Universidad de Chile
Facultad de Filosofía y Humanidades
Departamento de Filosofía

Bases para una comprensión de las nociones de intuición y de construcción en Kant

Informe de Seminario para optar al grado de Licenciado en Filosofía

Javier Andrés Fuentes González

Profesor guía: Luis
Placencia García

Santiago de Chile
2016

Resumen

Este escrito tiene por objetivo estudiar las nociones de intuición y de construcción en Kant según su exposición en la *Crítica de la razón pura*. No se busca entregar una interpretación completa de estas nociones ni tampoco de la filosofía de las matemáticas de Kant, sino sólo plantear ciertas ideas que podrían constituir un punto de partida para una investigación más exhaustiva de ellas.

Para realizar esta tarea, se parte de la interpretación de la intuición y de la construcción planteada por el filósofo finés Jaakko Hintikka. A partir de una consideración crítica de su propuesta, se formulan algunas ideas alternativas a las suyas. A pesar de las discrepancias con Hintikka, este texto rescata su método de trabajo, pues aquí también se utilizan algunos de los recursos empleados por él, como las conexiones con Proclo y con la lógica actual, aunque con otros resultados.

También se rescata de Hintikka la comprensión de la intuición como una instanciación de un concepto. Sin embargo, la comprensión planteada en este texto también se aleja de él en este aspecto, porque no es claro que la intuición deba reducirse sólo a una instanciación de un concepto.

En cuanto a la construcción, se propone comprenderla como aquello que, por medio de la instanciación de un concepto, permite la aplicación de una generalización universal. Cabe destacar que esta comprensión de la construcción sólo toma en consideración su papel en los teoremas, puesto que Kant plantea que ella también está presente en los axiomas y en las definiciones.

Una profundización y ampliación de este trabajo debería tomar en cuenta una mayor parte de la obra de Kant. Además, debería estudiar cómo se presentan las nociones estudiadas en los axiomas y en las definiciones, comparando el papel que juegan en ellas con aquel que tienen en los teoremas.

A Eva Monardes.

Agradecimientos

La realización de este trabajo no habría sido posible sin la ayuda de muchas personas. Las palabras que a continuación les dirijo son insuficientes para expresar mi gratitud hacia ellas.

Agradezco a mis padres, por siempre haberme apoyado en mis estudios.

A mis amigos, especialmente a Bruno Biagini, Ernesto Rodríguez, Ignacio Vergara y Jorge Vergara, con quienes compartí interesantes conversaciones sobre filosofía y otras cosas.

A Elizabeth Colvin, Teresa Figueroa, Francisco Herrera, Jorge Olivares y Juana Quintero, quienes tuvieron mucha amabilidad y paciencia para ayudarme en los numerosos trámites que tuve que hacer, desde antes de ingresar a la licenciatura hasta el término de ella.

A Virginia Espinosa, Constanza Martínez y Silvia Vyhmeister, quienes compartieron conmigo sus conocimientos sobre idiomas y respondieron mis dudas con la mejor disposición.

A Francisco Abalo y Rafael Simian, quienes leyeron una versión previa de este texto y me brindaron comentarios y observaciones que me ayudaron a mejorarlo.

A Pamela Chávez y Claudio Pierantoni, por los conocimientos que me entregaron y por la confianza y apoyo que me dieron para poder participar en los quehaceres académicos.

A Luis Placencia, a quien admiro mucho por la seriedad y motivación con que se dedica a la filosofía. Sus excelentes observaciones y sugerencias, junto con su preocupación y amabilidad, me orientaron durante este trabajo y me permitieron desarrollar este texto.

A Eva Monardes, con quien he recorrido este camino desde que era sólo un plan. Su apoyo ha sido fundamental durante este trabajo y durante toda la licenciatura. Sin ella, nunca habría realizado estos estudios y nunca habría escrito este texto.

Y Alfonso Reyes me dijo: “Publicamos para no pasarnos la vida corrigiendo los borradores”.

— Jorge Luis Borges

Índice

Introducción: objetivo, alcance, método y estructura

Este escrito tiene por objetivo estudiar las nociones de intuición y de construcción en Kant según su exposición en la *Crítica de la razón pura* (*KrV* de aquí en adelante). No se pretende entregar una interpretación completa de estas nociones ni tampoco de la filosofía de las matemáticas de Kant, sino solamente plantear algunas ideas que podrían constituir un punto de partida para una investigación más exhaustiva de ellas.

Para realizar esta tarea se parte de la interpretación de la intuición y de la construcción en Kant planteada por el filósofo finés Jaakko Hintikka. A partir de una consideración crítica de ésta, será posible formular algunas ideas alternativas a las de Hintikka que pueden ser tomadas como un punto de partida para una investigación posterior. A pesar de las discrepancias con Hintikka, este texto rescata el método de su trabajo, pues aquí también se utilizan algunos de los recursos usados por él, como las conexiones con Proclo y la lógica actual, aunque con otros resultados.

La estructura del texto es la siguiente: primero, se plantea el problema a partir de los textos de Kant (parte I); posteriormente, se aborda la interpretación de Hintikka y se realiza una crítica de ciertos aspectos de ella (parte II); luego, se estudian las partes de los teoremas y problemas que Proclo menciona en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides* (parte III); a continuación, se plantea una propuesta preliminar de compresión para la intuición y la construcción a partir de los análisis realizados (parte IV); posteriormente, se considera cómo esta propuesta permite entender las construcciones ostensiva y simbólica planteadas Kant y se indica si la construcción juega algún papel dentro de lo que él llama "fórmulas numéricas" (parte V); por último, se recogen las observaciones finales sobre el trabajo realizado.

Parte I: Planteamiento del problema en Kant

1. Las nociones de intuición y de construcción y la relación entre ellas

Kant caracteriza la noción de intuición en diversos pasajes de su obra, pero, a primera vista, no todas estas caracterizaciones parecen ser equivalentes, puesto que unas resaltan ciertos aspectos, mientras que otras otros[1]. Un pasaje fundamental para comprender esta noción es aquel en el cual la intuición es caracterizada a través de dos criterios que en la literatura son llamados "criterio de inmediatez" y "criterio de singularidad" (Parsons, 1992):

> "El género es *representación* en general (*repraesentatio*). Bajo él está la representación con conciencia (*perceptio*). Una *percepción* que se refiere solamente al sujeto, como modificación del estado de él, es *sensación* (*sensatio*); una percepción objetiva es *conocimiento* (*cognitio*). Éste es o bien *intuición*, o bien *concepto* (*intuitus vel conceptus*). Aquélla se refiere inmediatamente al objeto[2], y es singular[3], éste, mediatamente, por medio de una característica que puede ser común a muchas cosas." (A320/B376-7)[4]

Sin embargo, al comienzo de la *Estética Trascendental* Kant la describe mencionando sólo el criterio de inmediatez y relacionándola, además, con la sensibilidad en el caso del intelecto humano:

> "Cualesquiera sean la manera y los medios por los que un conocimiento se refiera a objetos, aquella [manera] por la cual se refiere a ellos inmediatamente, y que todo

[1] Para esta sección nos basamos considerablemente en Parsons (1992).
[2] A este aspecto hace referencia el "criterio de inmediatez". Parsons (1992, p. 44) lo caracteriza del siguiente modo: "[...] it evidently means that the object of an intuition is in some way directly present to the mind, as in perception, and that intuition is thus a source, ultimately the only source, of immediate knowledge of objects."
[3] A este aspecto hace referencia el "criterio de singularidad". Parsons (1992, p. 44) caracteriza así la intuición en función de este criterio: "It can have only one individual object. The objects to which a concept 'relates' are evidently those which fall under it, and these can be any which have the property which the concept represents, so that a concept will only in exceptional cases have a single object."
[4] Otra mención de ambos criterios en conjunto se encuentra en *Los progresos de la metafísica* (AA XX: 266).

> pensar busca como medio, es la *intuición*. [...] Por medio de la sensibilidad, enton-entonces, nos son dados objetos, y sólo ella nos suministra intuiciones.” (A19/B33)

Por otro lado, Kant caracteriza la noción de intuición en sus lecciones sobre lógica apelando sólo al criterio de singularidad:

> “Todo conocimiento, es decir, toda representación con conciencia referida a un objeto, es o intuición o concepto. La intuición es una representación singular (*repraesentatio singularis*), el concepto una representación general (*repraesentatio per notas communes*) o reflexionada (*repraesentatio discursiva*).” (AA IX: 91)

A partir de esta breve revisión de pasajes podemos preguntarnos, entonces, ¿qué caracteriza finalmente a la intuición? ¿Cómo se relacionan los criterios entre sí? ¿Hay alguna prioridad de uno respecto de otro? ¿Se sigue uno a partir de otro? ¿Son independientes?[5] ¿Cómo entra en juego la sensibilidad para el caso del intelecto humano? ¿Cómo se vinculan la sensibilidad y los criterios? ¿La sensibilidad está relacionada con ambos criterios o con uno de estos? Una respuesta a cada una de estas preguntas está fuera del alcance de este texto, pues nuestro objetivo sólo es proponer una base para poder abordar estas preguntas con una mayor cantidad de herramientas.

La noción de intuición está estrechamente vinculada con la de construcción, a la cual Kant describe en la última parte de la *KrV*, la *Doctrina trascendental del método*, especialmente en la primera parte de esta última, *La disciplina de la razón pura en el uso dogmático*, cuyo tema principal es la distinción entre el conocimiento filosófico y el matemático. Su caracterización es la siguiente:

> “El conocimiento *filosófico* es el *conocimiento racional por conceptos*; el matemático [es el conocimiento] por *construcción* de los conceptos. *Construir* un concepto significa: exhibir *a priori* la intuición que le corresponde.” (A713/B742)

[5] Prácticamente todas las alternativas posibles de respuesta han sido planteadas por los estudiosos de este tema. Algunos piensan que la inmediatez se sigue de la singularidad, otros que la dependencia es inversa, otros que son independientes, otros que sólo una de ellas es relevante, etc.

Para Kant, la matemática utiliza la construcción de conceptos, la cual se apoya en la intuición. Sin embargo, no resulta claro a primera vista cómo entra en juego la intuición en la construcción. De esta manera, podemos preguntarnos, entre otras cosas, ¿en qué consiste propiamente la construcción? ¿Qué quiere decir "construir un concepto"? ¿Qué significa "exhibir a priori la intuición" correspondiente a un concepto? ¿Cuál es la relación entre construcción e intuición?

Es posible que la comprensión de una de estas dos nociones sea determinante para la comprensión de la otra, debido a la estrecha relación que existe entre ellas. De hecho, en este texto comenzaremos abordando la noción de intuición para luego tratar la de construcción, y, cuando entreguemos nuestra propuesta para comprender ambas, veremos cómo la compresión de una nos ayuda para la de la otra.

Tal como advertimos al abordar la noción de intuición, no es nuestro objetivo responder en forma concluyente todas las preguntas que plantea el estudio de la noción de construcción. Esta sección sólo ha tenido como objetivo presentar la problemática que generan estas nociones y motivar una primera aproximación a su elucidación.

2. Muy breve revisión de parte de la literatura sobre el tema

Conviene realizar un breve recorrido por lo que se ha discutido recientemente acerca de la filosofía de las matemáticas en Kant, en particular acerca de las nociones de intuición y de construcción.

En un artículo que marcó el renacimiento del interés general por la filosofía de las matemáticas en Kant, Hintikka (1992, p. 23) ha planteado la tesis de que lo único que caracteriza a la noción de intuición en Kant es el criterio de singularidad, basándose, entre otras cosas, en que la construcción en Kant debe entenderse como la regla de inferencia de la lógica actual llamada ejemplificación existencial.

Contra la tesis de Hintikka, Parsons (1992, p. 45) argumenta que el criterio de singularidad es una consecuencia del criterio de inmediatez, lo cual se enmarca dentro de su tesis de que la intuición en Kant debe entenderse, en el caso de un intelecto finito como el del ser humano, a partir de su conexión con la sensibilidad.

Torretti (2004, p. 116), con Parsons y contra Hintikka, también considera que es el criterio de singularidad el que se sigue del criterio de inmediatez. Aparte de eso, concuerda con Hintikka en su interpretación de la intuición y de la construcción en Kant, aunque le critica que reduzca esta última una regla de inferencia, pues con ella "propone un caso tal que toda la información acerca de él está contenida" (Torretti, 2004, p. 122) en la condición considerada, mientras que para Kant la intuición y la construcción permiten ir más allá del contenido de los conceptos.

Friedman (1992), siguiendo la tendencia de Hintikka, interpreta la intuición en Kant partiendo del principio de que la habría postulado para llenar los vacíos de la lógica de su época. Plantea que Kant, para postular la intuición, habría considerado ciertas herramientas, tanto de la matemática como de la física, que en su época no estaban formalizadas, entre ellas la construcción en la geometría euclideana y la derivada en el cálculo infinitesimal.

Contra los enfoques de Hintikka y Friedman, Carson (1997) y Shabel (2006) interpretan la intuición dejando en un segundo plano su posible identificación con herramientas de la lógica y la matemática modernas.

Carson, en el caso de la geometría, plantea que el espacio subjetivo, en tanto forma pura de la sensibilidad, es el que fundamenta el espacio geométrico, lo cual es el enfoque inverso al que sigue Friedman. Con ello, pretende enfatizar que los rendimientos matemáticos de la noción de intuición son derivados de sus rendimientos estrictamente filosóficos.

Shabel plantea que en las demostraciones geométricas, a pesar de que se manipule ejemplares singulares, se obtiene resultados universales gracias a la noción de construcción, puesto que mediante ella se toma en cuenta solamente los aspectos generales de los objetos considerados, dejando de lado aquellos que son particulares.

Parte II: Consideración de la interpretación de Hintikka

Como ya mencionamos, de entre los autores que han abordado la filosofía de las matemáticas en Kant, uno de los más relevantes y de los que comenzó este debate en el siglo XX fue Hintikka (1992). Su tesis es que la intuición pura se caracteriza sólo por el "criterio de singularidad", mientras que el "criterio de inmediatez" y su identificación como forma pura de la sensibilidad son secundarios, lo cual expresa en el siguiente pasaje:

> "[T]he term 'intuition' should be taken in the 'unintuitive' sense which Kant gave to it in his definition of the notion[6]. In particular, Kant's characterization of mathematics as based on the use of constructions has to be taken to mean merely that, in mathematics, one is all the time introducing particular representatives of general concepts and carrying out arguments in terms of such particular representatives, arguments which cannot be carried out by the sole means of general concepts." (Hintikka, 1992, p. 24)

A continuación revisaremos ciertos aspectos de su interpretación que nos ayudarán a llegar a una propuesta alternativa. Conviene enfatizar que no es nuestra intención hacer un estudio completo de la interpretación de Hintikka, sino solamente realizar una consideración crítica de ciertos aspectos de ella, de manera que sea un punto de partida que nos permita plantear nuestra propuesta.

Hintikka (1992, p. 24) fundamenta su postura tanto sistemática como históricamente, para lo cual propone que las tesis que Kant sostiene en la *Doctrina trascendental del método* son anteriores a las que plantea en la *Estética trascendental*:

> "My main suggestion towards art interpretation of Kant's theory of the mathematical method, as presented at the end of the first *Critique*[7], is that this theory is not posterior but rather systematically prior to the Transcendental Aesthetic." (Hintikka, 1992, p. 24)

[6] Esta definición es aquella de las lecciones de lógica, la cual citamos anteriormente.
[7] Con ello se refiere a la *Doctrina trascendental del método*.

En varios pasajes de la *Estética transcendental* Kant, al abordar la intuición, toma en consideración tanto el criterio de singularidad como el de inmediatez, mientras que en la *Doctrina trascendental del método* sólo está presente el criterio de singularidad. Según Hintikka, esto mostraría que el criterio de inmediatez es secundario en relación al de singularidad.

1. Prioridad sistemática: primer argumento

Hintikka menciona dos sentidos según los que una teoría sería anterior a la otra. El primero de ellos es el de anterioridad sistemática o conceptual (Hintikka, 1992, p. 24). Para demostrar que existe una prioridad en este sentido, Hintikka plantea dos argumentos, uno de los cuales está basado en los *Prolegomena*, texto en el cual Kant buscar mostrar con más claridad algunos puntos del argumento de la *KrV*.

En los *Prolegomena*, Kant ubica su concepción del método de las matemáticas en la sección que se identificaría con la *Estética Trascendental* de la *KrV*, mientras que en esta última tal concepción está contenida hacia el final de la obra. A partir de esto, Hintikka (1992, p. 24) concluye que hay una dependencia explícita de la *Estética Trascendental* respecto de la concepción del método de las matemáticas de Kant, el cual aparece en la *Doctrina trascendental del método* en la *KrV*.

El orden de exposición de los *Prolegomena*, con el cual efectivamente Kant pretendía ofrecer de manera más clara ciertos putos del argumento de la *KrV*, se inspira en el método analítico, el cual tiene su origen en los desarrollos de la matemática de los antiguos griegos[8]. Éste consiste en asumir lo que se quiere demostrar y llegar, a partir de ello, a resultados previamente conocidos, con lo cual es posible reconstruir el camino en sentido inverso. El

[8] "El análisis es un camino que parte de tomar lo que se investiga como cosa aceptada mediante sus consecuencias hasta llegar a la síntesis. En el análisis, suponiendo que lo investigado ya se ha producido, observamos por qué sucede y vamos de nuevo a lo que lo precedió hasta que, haciendo el camino hacia atrás de esta manera, damos con algo de lo ya aceptado o que pertenezca a la clase de los principios. Y a este método lo llamamos análisis porque es una solución camino atrás. Por la otra parte, en la síntesis, partiendo de la marcha atrás, dando por sentado el elemento último captado en el análisis, colocando ahora lo que allí precedía en su orden natural como consecuencias y componiéndolas entre sí llegamos por último a la construcción de lo investigado. Y a eso lo llamamos síntesis." (Papo, *Synagogé* VII, pp. 634-6, en Arquímedes (2005))

método sintético, la contraparte del analítico, parte de lo conocido sin presuponer nada para llegar a lo que se quiere demostrar[9].

Lo que Kant da por asumido en la exposición de los *Prolegomena* es la existencia de la matemática pura y de la ciencia natural pura como conocimientos sintéticos *a priori*:

> "Al avanzar ahora hacia esta solución [del problema *¿cómo son posibles los juicios sintéticos* a priori*?*], y ello según un método analítico, en el cual suponemos que existen realmente tales conocimientos por razón pura, podemos remitirnos sólo a dos ciencias del conocimiento teórico (que es del único del que se trata aquí), a saber, la *matemática pura* y la *ciencia pura de la naturaleza*." (*Prolegomena* §5, AA IV: 280)

Por lo tanto, el uso que en los *Prolegomena* haría Kant de la existencia y del método de la matemática, en tanto conocimiento sintético *a priori*, no obedecería a que las teorías correspondientes a la *Doctrina trascendental del método* tengan una prioridad lógica respecto de aquellas de la *Estética Trascendental*, es decir, a que la verdad de aquellas dependa de la de estas, sino todo lo contrario, ya que es el método sintético, y no el analítico, el que muestra cómo un conocimiento posterior se sigue de otro anterior. Como se mencionó previamente, este orden fue establecido por Kant con el fin de facilitar la exposición de parte de su argumento de la *KrV*, no por razones lógicas.

2. Prioridad sistemática: segundo argumento

El otro argumento con que Hintikka (1992, p. 24) justifica la prioridad sistemática consiste en que Kant, en los pasajes fundamentales de la *Estética Trascendental*, utilizaría exclusivamente el criterio de singularidad para caracterizar la noción de intuición.

[9] No es claro que Kant utilice los conceptos de "método analítico" y de "método sintético" tal como los estamos presentado acá, el cual corresponde a un modo relativamente estándar. Un estudio sobre este aspecto queda fuera del alcance de este trabajo.

El hecho de que en ciertos pasajes Kant sólo considere el criterio de singularidad se puede evaluar de diversas maneras. Una de ellas es la de Hintikka, mientras que otra es considerar que Kant estaría tomando simplemente uno de los criterios esenciales de la intuición dentro del contexto del argumento, lo cual no significaría que el otro criterio quede en un segundo plano, sino que sería meramente una distinción de énfasis en la consideración particular del argumento.

3. Prioridad histórica

El segundo sentido de anterioridad que Hintikka (1992, p. 25) plantea es el histórico, el cual demuestra aduciendo que Kant, en *Sobre la nitidez de los principios de la teología natural y de la moral* de 1764 (§2; AA II: 278-9), ya menciona que el método característico de la matemática consiste en manipular conceptos generales *in concreto*, aunque no hace ninguna mención de la noción de intuición ni de la forma pura de la sensibilidad.

La anterioridad cronológica no es suficiente si no se traduce en una anterioridad sistemática. El argumento de Hintikka serviría como base para su tesis si Kant hubiese mantenido posteriormente aquella teoría tal como la formuló en 1764, con lo que la de la *KrV* sería una profundización o prolongación de ésta. La evolución del pensamiento de Kant desde 1764 hasta 1787, año de la segunda edición de la *KrV*, muestra que es difícil sostener una tesis como esa, pues Kant realizó modificaciones fundamentales en sus teorías de la *KrV* que las alejaron de las que mantuvo anteriormente, por ejemplo, la introducción de la intuición y de la forma pura de la sensibilidad, lo cual el mismo Hintikka destaca. Luego, estas teorías no son comparables en el aspecto que a Hintikka le interesa.

Parte III: Las partes de los teoremas y los problemas en Proclo

1. La identificación de Hintikka de la noción de construcción con aquellas de *ékthesis* y *kataskeué* en Proclo

Para defender con mayor fundamento su tesis principal, Hintikka (1992, p. 30) propone que la noción de construcción dentro de la filosofía de las matemáticas en Kant debe identificarse con las que Proclo, en su comentario a los *Elementos* de Euclides, llama *ékthesis*[10] y *kataskeué*. De acuerdo a Hintikka (1992, p. 28), los *Elementos* de Euclides habrían sido un paradigma del método matemático para Kant[11], por lo que sería razonable buscar allí las nociones que habría tenido en vista al desarrollar sus teorías sobre filosofía de las matemáticas.

Para justificar la identificación de la construcción con la *ékthesis*, Hintikka (1992, p. 29) menciona la similitud que existe entre la descripción que da Kant de la construcción y la función que cumpliría la *ékthesis*, pues la primera considera conceptos generales *in concreto* y la segunda "muestra" o "exhibe" una proposición geométrica general por medio de un ejemplar singular. Para justificar la identificación de la construcción con la *kataskeué* (Hintikka, 1992, pp. 29-30), destaca un pasaje (A716–7/B744–5) donde Kant menciona que el matemático, cuando pretende demostrar algún resultado, inmediatamente comienza a hacer construcciones adicionales que lo ayudan en esa tarea, lo cual Hintikka considera que tiene similitud con la descripción de la noción de *kataskeué*.

Posteriormente, Hintikka, además de identificar *ékthesis* y *kataskeué*[12], identifica (Hintikka, 1992, p. 35) la primera con la regla de inferencia con cuantificadores de la lógica actual

[10] Esta noción también está presente en los *Analíticos primeros* de Aristóteles (por ejemplo, en 28b14, 48a25 y 49b6). ¿Habrá obtenido Aristóteles esta noción a partir de los desarrollos de la matemática de su época? ¿Qué vínculo tienen la *ékthesis* planteada por Aristóteles y aquella por Proclo? Hintikka (1992, p. 34) parece identificar los usos de esta noción en ambos.

[11] Hintikka expresa este supuesto de la siguiente manera: "It is much more useful to ask exactly what features of Euclid's presentation Kant was thinking of in his theory" (Hintikka, 1992, p. 28).

[12] En Hintikka (1978) dice explícitamente que la *ékthesis* y la *kataskeué* se refieren a lo mismo. Posteriormente, abordaremos en detalle si la identificación de ambas nociones es correcta.

llamada “ejemplificación existencial”, de modo que deberíamos suponer que la última también se identifica con ella, a pesar de que pierde relevancia durante el resto del texto.

2. Consideración sobre la identificación de Hintikka de la *ékthesis* y de la *kataskeué* con la ejemplificación existencial

Concentrémonos en la identificación de la construcción con la *ékthesis*. Más allá de la semejanza que existe entre las descripciones de ambos conceptos, esta correspondencia permite que Hintikka pueda dar un mayor fundamento a su tesis de que la intuición pura se caracteriza sólo por el criterio de singularidad, pues durante la construcción, entendida como *ékthesis*, y ésta, a su vez, entendida como ejemplificación existencial, se estarían empleando ejemplares particulares para demostrar proposiciones generales.

Para analizar más detalladamente si es razonable identificar la construcción en Kant con la ejemplificación existencial, podemos replicar el ejercicio realizado por Beth (1957)[13], quien formalizó la demostración del teorema que establece que los ángulos de la base de un triángulo isósceles miden lo mismo. Esta formalización toma en cuenta lo siguiente: las letras mayúsculas $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ indican puntos; $\Delta(A, B, C)$ representa un triángulo cuyos vértices son los puntos A, B, C; $\overline{XY}$ indica una recta que pasa por los puntos X, Y; $\sphericalangle XYZ$ representa un ángulo cuyo vértice es Y y cuyas semirrectas pasan una por X y la otra por Z. La formalización es la siguiente:

1)	$\Delta(A, B, C) \wedge \overline{AB} = \overline{AC}$	Hipótesis
2)	$\Delta(A, B, C)$	1) y simplificación
3)	$\overline{AB} = \overline{AC}$	1) y simplificación
4)	$\forall X, Y, Z\ [\Delta(X, Y, Z) \rightarrow \Delta(X, Z, Y)]$	Principio “1”
5)	$\Delta(A, B, C) \rightarrow \Delta(A, C, D)$	4) y ejemplificación universal
6)	$\Delta(A, C, D)$	2), 5) y *modus ponens*
7)	$\forall X, Y\ [\overline{XY} = \overline{YX} \rightarrow \overline{YX} = \overline{XY}]$	Principio “2”

[13] Este ejercicio de Beth tiene una enorme importancia, ya que, hasta donde hemos podido observar dentro de la literatura, es el único que realiza una formalización de esta índole, aunque con objetivos distintos a los que nos hemos planteado aquí. Una formalización como ésta permite identificar más claramente las partes de los teoremas que propone Proclo con nociones de la lógica y la matemática actuales.

8) $\overline{AB} = \overline{BA} \rightarrow \overline{BA} = \overline{AB}$ 8) y ejemplificación universal

9) $\overline{BA} = \overline{AB}$ 3), 8) y *modus ponens*

10) $\forall X, Y, Z\ [\sphericalangle XYZ = \sphericalangle ZYX]$ Principio "3"

11) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAB$ 10) y ejemplificación universal

12) $\forall X, Y, Z, U, V, W\ \{[\Delta(X, Y, Z) \wedge \Delta(U, V, W) \wedge \overline{XY} = \overline{UV} \wedge \overline{XZ} = \overline{UW} \wedge \sphericalangle YXZ = \sphericalangle VUW] \rightarrow \sphericalangle XYZ = \sphericalangle UVW\}$ Principio "4" (Congruencia)

13) $[\Delta(A, B, C) \wedge \Delta(A, C, D) \wedge \overline{AB} = \overline{AC} \wedge \overline{BA} = \overline{AB} \wedge \sphericalangle BAC = \sphericalangle CAB] \rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ 12) y ejemplificación universal

14) $\Delta(A, B, C) \wedge \Delta(A, C, D) \wedge \overline{AB} = \overline{AC} \wedge \overline{BA} = \overline{AB} \wedge \sphericalangle BAC = \sphericalangle CAB$ 2), 3), 6), 9), 11) y conjunción

15) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ 13), 14) y *modus ponens*

16) $[\Delta(A, B, C)\ \wedge\ \overline{AB} = \overline{AC}] \rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ 1), 15) y prueba condicional

17) $\forall X, Y, Z\ [\Delta(X, Y, Z)\ \wedge\ \overline{XY} = \overline{XZ}] \rightarrow \sphericalangle XYZ = \sphericalangle XZY$ 15) y generalización universal

La demostración anterior nos permite obtener varias conclusiones. En primer lugar, no necesitamos ocupar en ningún paso la ejemplificación existencial, por lo tanto, si la identificación de la construcción con ésta fuera correcta[14], la construcción no estaría presente en todas las demostraciones de la geometría euclideana. Esto puede ser relevante ya que, en principio, pareciera como si Kant pensara que la construcción es un atributo esencial del método matemático, lo cual podría implicar que está presente en todas proposiciones de la matemática.

En cuanto a la *ékthesis*, según como la entiende Proclo, el candidato más razonable de la demostración con el cual podríamos identificarla es el paso 1), es decir, la representación de la hipótesis como una proposición que se cumple para un objeto considerado de modo arbitrario[15], sin ningún tipo de regla de inferencia involucrada.

[14] Existe otro problema en la identificación de la *ékthesis* con la ejemplificación existencial. Si el objeto sobre el cual se realiza la demostración se obtiene a partir de una proposición existencial por medio de una ejemplificación, entonces, posteriormente, no se podría universalizar el resultado obtenido para tal objeto, de modo que no se podría obtener la universalidad que presentan los teoremas. En este problema está en juego sobre cuáles objetos se aplican las reglas de inferencias, por ejemplo, si sobre variables libres y/o constantes. Un tratamiento detallado de este problema no es parte del objetivo de este texto.

[15] Es importante notar que la representación de la hipótesis como una proposición para un objeto considerado arbitrariamente tiene sentido allí donde el teorema es una proposición condicional universal.

Por otro lado, no está muy claro qué parte de la demostración correspondería a la *kataskeué*. Considerando el diagrama que representaría a esta demostración, sólo se trazaría una figura al inicio de ella, es decir, cuando se menciona la hipótesis, lo cual, como vimos, corresponde a la *ékthesis*, de modo que la *kataskeué* estaría ausente. Sin embargo, en otras demostraciones de la geometría euclideana se realizan construcciones auxiliares, de modo que no está muy claro si éstas, es decir, la *kataskeué*, se pueden identificar con la *ékthesis*.

Otra debilidad de la interpretación de Hintikka, así como la de otros autores involucrados en este debate, consiste en que se concentra exclusivamente en el papel que desempeñan las nociones de intuición pura y de construcción dentro de las demostraciones, dejando de lado el hecho de que Kant también destaca que éstas juegan un papel dentro de las definiciones y de los axiomas (A727–35/B755–63).

Por lo tanto, no parece acertado concentrarse exclusivamente en el papel que juegan en las demostraciones la intuición pura y la construcción, pues, si éstas también están presentes en las definiciones y en los axiomas, además de en las demostraciones, entonces su papel podría no ser únicamente el de representar inferencias lógicas que en la época de Kant aún no estaban formalizadas. De este modo, aún debemos responder preguntas como: ¿juega la construcción el mismo papel en las definiciones, en los axiomas y en las demostraciones? Si no es el mismo, ¿tienen algo común?, ¿en qué se diferencian?

3. Las partes de los teoremas y de los problemas según Proclo

A pesar de que la identificación de la *ékthesis* con la ejemplificación no parece correcta, es necesario que estudiemos en detalle las partes de la demostración que menciona Proclo, lo cual nos puede llevar a tener más claridad sobre qué son la *ékthesis* y la *kataskeué* y, quizás, también sobre qué son la intuición pura y la construcción.

Nos proponemos realizar un análisis de las partes de los teoremas y los problemas que ex-expone Proclo en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*[16], lo cual nos ayudará a comprender qué entiende Kant por construcción, particularmente en el caso de las demostraciones.

Proclo expresa en su *Comentario* que las partes de los teoremas y los problemas, cuando están completos, corresponden a la enunciación (πρότασις), la exposición (ἔκθεσις), la especificación (διορισμός), la preparación (κατασκευή), la prueba (ἀπόδειξις) y, por último, la conclusión (συμπέρασμα). Proclo describe estas partes del siguiente modo:

> "[L]a enunciación expresa qué es lo dado y qué es lo buscado, pues una enunciación perfecta está compuesta de ambas <partes>. La exposición, determinando lo dado mismo según sí mismo, lo prepara para la búsqueda. La especificación, separadamente, aclara qué es lo buscado. La preparación agrega a lo dado lo que falta para la consecución de lo buscado. La prueba concluye científicamente lo propuesto a partir de lo acordado. La conclusión vuelve nuevamente a la enunciación confirmando lo demostrado." (*Comentario* 203)[17]

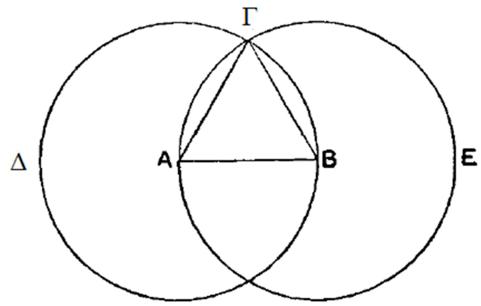
Las descripciones de Proclo pueden parecer un tanto insuficientes. Por suerte, más adelante en el texto identifica estas partes en un problema determinado, a saber, *Elementos* I 1. Conviene que revisemos con detención este ejemplo para entender mejor en qué consisten estas partes de los teoremas y los problemas.

El primer problema de los *Elementos* es el siguiente:

> "Construir un triángulo equilátero sobre una recta definida dada
> Sea AB la recta finita dada.
> Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero.

[16] De aquí en adelante nos referiremos a este texto simplemente como *Comentario*.
[17] Las traducciones del *Comentario* utilizadas en este texto son nuestras. Hasta donde se ha podido averiguar, aún no existe una traducción completa del *Comentario* al castellano.

Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo BΓΔ, y con el centro B y la distancia BA descríbase a su vez el círculo AΓE, y a partir del punto Γ donde los círculos se cortan entre sí, trácense las rectas ΓA, ΓB hasta los puntos A, B.



Y puesto que el punto A es el centro del círculo ΓΔB, AΓ es igual a AB. Puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo ΓAE, BΓ es igual a AB, pero se demostró que ΓA es igual a AB, por lo tanto, cada una de las <rectas> ΓA y ΓB es igual a AB. Y las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí, por lo tanto, ΓA es también igual a ΓB. Luego, las tres <rectas> ΓA, AB y BΓ son iguales entre sí.
Por lo tanto, el triángulo ABΓ es equilátero y ha sido construido sobre la recta definida dada AB.
[Por lo tanto, sobre una recta definida dada se ha construido un triángulo equilátero.] [18] Lo cual <era lo que> había que hacer.” (Traducción nuestra.)

Teniendo presente el problema anterior, revisemos cómo Proclo nos va guiando en la explicación de las partes de los teoremas y problemas. Sobre la enunciación nos dice, entre otras cosas, que “está compuesta de lo dado y de lo buscado, pues se da una recta determinada y se busca cómo construir sobre ella un triángulo equilátero” (*Comentario* 208), mientras que de la exposición nos dice que corresponde a la frase “sea ésta una recta determinada dada” (*Comentario* 208). Parece más o menos claro que, entonces, la enunciación corresponde a lo que el problema plantea, es decir, “construir un triángulo

[18] Euclides, *Elementos* I 1. Es importante destacar ni Puertas (Euclides 1991) ni Heath (Euclides 1986) incluyen esta línea en sus traducciones. Parece ser que ésta no se encuentra en todos los manuscritos, pero, como veremos, Proclo sí la menciona, lo cual es un punto a favor de las variantes que la incluyen. Además, hay una razón sistemática para incluirla, ya que Proclo distingue dos conclusiones, una previa y una general. La primera de éstas correspondería al paso contenido en la línea en cuestión.

equilátero sobre una recta definida dada", mientras que la exposición es la presentación de los objetos específicos sobre los cuales la demostración se realizará, es decir, "sea AB la recta finita dada".

A continuación, plantea que la especificación corresponde a "es necesario construir sobre la recta expuesta determinada un triángulo equilátero" (*Comentario* 208), es decir, "así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero", por lo tanto, la enunciación es la reiteración de lo que la enunciación dice que hay que hacer, pero para el caso del objeto específico que se mostró en la exposición.

Luego, plantea que la preparación dice "'trácese una circunferencia con centro en uno de los extremos de la recta y con radio el resto <de la recta>', y nuevamente 'trácese una circunferencia con centro en el otro extremo y con radio idéntico a la anterior', y 'a partir del punto común de la intersección de las circunferencias únanse rectas con los extremos de la recta'" (*Comentario* 209), por lo tanto, la preparación corresponde a las construcciones adicionales que se realizan en la demostración, las cuales, posteriormente, serán fundamentales para obtener a la conclusión.

A continuación, según Proclo la prueba expresa que:

> "puesto que uno de los puntos de los <que están> sobre la recta dada es el centro mismo de la circunferencia que lo comprende, la <recta> sobre la intersección común es igual a la recta dada. Puesto que también el punto restante de los <que están> sobre la recta dada es el centro mismo de la circunferencia que lo comprende, la <recta> sobre la intersección común de las circunferencias es igual a la recta dada [...] Por lo tanto, 'se construye un triángulo equilátero sobre **esta** recta dada'. Ésta es la primera conclusión que sigue a la exposición. Pero, después de ésta, la <conclusión> general: 'por lo tanto, sobre **una** recta dada se construye un triángulo equilátero'[19], pues, aunque duplicases la <recta> dada de lo expuesto, las mismas preparaciones y las <mismas> pruebas calzarían, y aunque triplicases o la hicieses

[19] Aquí se ve que Proclo habla en favor de la variante que incluye las dos conclusiones.

más grande o más que pequeña que ésta” (*Comentario* 209-10, el destacado es nues- nuestro).

Por lo tanto, la prueba corresponde a una serie de pasos obtenidos a partir del objeto específico mostrado en la exposición y de las construcciones adicionales realizadas en la preparación, pero, por eso mismo, su conclusión aplica sólo al objeto específico que se está tratando, de ahí que Proclo la llame “primera conclusión”.[20]

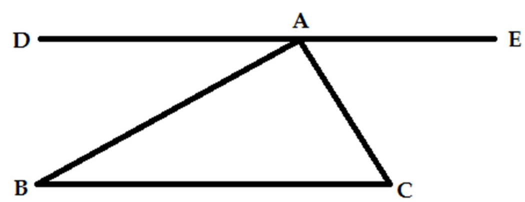
Luego, a partir de la prueba, se obtiene la conclusión propiamente tal, a la cual Proclo llama “segunda conclusión”. Ésta corresponde a la conclusión general, ya que el resultado obtenido en la prueba se universaliza para cualquier objeto afín al objeto específico que se muestra en la exposición, de modo que, con ella, se realiza (en el caso de los problemas) o prueba (en el de los teoremas) lo que la enunciación había planteado en un comienzo.

4. Utilización de la matemática y la lógica actuales para comprender las partes de los teoremas y los problemas según Proclo

A través del ejercicio realizado en la sección anterior, llegamos a una comprensión de lo que Proclo entiende que son las partes de los teoremas y problemas. En esta sección abordaremos, utilizando parte de la matemática y la lógica actuales, el teorema que plantea que *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos*[21], con el fin de identificar las partes que Proclo menciona en su *Comentario* con conceptos de la lógica actual[22].

[20] Cabe destacar que Proclo (*Comentario* 209) plantea que en la preparación se usan los postulados (αἰτήματα), mientras que en la prueba se usan los axiomas (ἀξιώματα).
[21] *Elementos* I 32.
[22] Aquí estamos siguiendo, en parte, el consejo del mismo Proclo, ya que nos dice que “es necesario que los oyentes busquen también en los restantes teoremas y problemas cuáles de las partes principales se incluyen, cuáles se omiten, de cuántas maneras se da lo dado y a partir de cuáles principios obtenemos o las preparaciones o las pruebas, pues una visión comprensiva de esto no provee poco entrenamiento ni poca práctica en los razonamientos de la geometría.” (*Comentario* 210)

Consideremos el modo como los pitagóricos demostraron este teorema, cuya transmisión Proclo atribuye a Eudemo. Esta demostración posee menos pasos que la de Euclides y, por lo tanto, es menos difícil de reformular. Proclo transmite lo siguiente:

> "El peripatético Eudemo adscribe el hallazgo del teorema *todo triángulo tiene sus ángulos interiores iguales a dos rectos* a los pitagóricos. Dice que ellos lo **demostraron** (**δεικνύναι** φησὶν αὐτοὺς) de esta manera:
>
> Sea ABC un triángulo y por A trácese la recta DE paralela a BC.
>
> 
>
>
> En efecto, ya que BC y DE son paralelas <y> también <ya que> los <ángulos> alternos son iguales, entonces el <ángulo> DAB es igual al <ángulo> ABC, y el <ángulo> EAC es igual al <ángulo> ACB. Agréguese el <ángulo> común BAC. Entonces, los <ángulos> DAB, BAC y CAE, i. e., los <ángulos> DAB, BAE, i.e., dos <ángulos> rectos son iguales a los tres ángulos del triángulo ABC. Entonces, los tres <ángulos> de un triángulo son iguales a dos <ángulos> rectos." (*Comentario* 379.2-15, destacado nuestro)

Retomando la compresión que obtuvimos en la sección anterior, podemos identificar en esta demostración las partes de un teorema según Proclo[23] de la siguiente manera:

Enunciación: *Omitida*.

Exposición: Sea ABC un triángulo.

[23] Hay que tener en consideración que para Proclo un teorema es más amplio que una demostración. De hecho, aquél incluye a ésta.

Especificación: *Omitida.*

Preparación: Por A trácese la recta DE paralela a BC.

Prueba: En efecto, ya que BC y DE son paralelas <y> también <ya que> los <ángulos> alternos son iguales, entonces el <ángulo> DAB es igual al <ángulo> ABC, y el <ángulo> EAC es igual al <ángulo> ACB. Agréguese el <ángulo> común BAC. Entonces, los <ángulos> DAB, BAC y CAE, i. e., los <ángulos> DAB, BAE, i.e., dos <ángulos> rectos son iguales a los tres ángulos del triángulo ABC.

Conclusión: Entonces, los tres <ángulos> de un triángulo son iguales a dos <ángulos> rectos.

Lo primero que llama la atención es que la enunciación y la especificación estén omitidas. Seguramente, la razón para ello radica en que Proclo, como dice explícitamente, se limita a exponer la demostración del teorema, pero no el teorema completo. De hecho, podemos decir que menciona la enunciación antes de transmitir la demostración propiamente tal, mientras que la especificación se da por supuesta.

Usando las herramientas de la lógica actual, nos proponemos representar la demostración de los pitagóricos formalmente. El hecho de que la enunciación y la especificación estén ausentes es coherente con lo que haremos, pues se verá que no es necesario incluir aquellos pasos en los que se entiende por demostración en sentido estricto.

Para la formalización de la demostración de los pitagóricos es necesario tener presente lo mismo que para la realizada por Beth, la cual fue abordada anteriormente. En este caso, una formalización completa sería demasiado extensa, por lo que hemos omitido algunos pasos que no son relevantes para lo que se busca mostrar.

La formalización es la siguiente:

Exposición

1) $\Delta(A,B,C)$	Hipótesis

Preparación

2) $\forall X,Y,Z\ [\neg(Z \in \overline{XY}) \rightarrow \exists V,W(Z \in \overline{VW} \wedge \overline{XY} \mid\mid \overline{VW})]$	Existencia de paralela
3) $\forall X,Y,Z\ [\Delta(X,Y,Z) \leftrightarrow \neg(Z \in \overline{XY})]$	Propiedad del triángulo
4) $\Delta(A,B,C) \leftrightarrow \neg(C \in \overline{AB})$	3) y ejemplificación universal
5) $\neg(C \in \overline{AB})$	1), 4) y eliminación del bicondicional
6) $\neg(C \in \overline{AB}) \rightarrow \exists V,W(C \in \overline{VW} \wedge \overline{AB} \mid\mid \overline{VW})$	2) y ejemplificación universal
7) $\exists V,W(C \in \overline{VW} \wedge \overline{AB} \mid\mid \overline{VW})$	5), 6) y *modus ponens*
8) $C \in \overline{DE} \wedge \overline{AB} \mid\mid \overline{DE}$	7) y ejemplificación existencial

Prueba

9) $\forall X,Y,Z,U,V,W\ \{[(\overline{XY} \mid\mid \overline{UZ}) \wedge \neg(\overline{XY} \mid\mid \overline{VW})] \rightarrow [\sphericalangle UVW = \sphericalangle YWV]\}$	Ángulos alternos internos
10) $\overline{AB} \mid\mid \overline{DE}$	8) y simplificación
11) $[(\overline{AB} \mid\mid \overline{DE}) \wedge \neg(\overline{AB} \mid\mid \overline{CA})] \rightarrow [\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC]$	9) y ejemplificación universal
12) $[(\overline{BA} \mid\mid \overline{ED}) \wedge \neg(\overline{BA} \mid\mid \overline{CB})] \rightarrow [\sphericalangle ECB = \sphericalangle ABC]$	9) y ejemplificación universal
13) $\forall X,Y,Z,U\ [\sphericalangle XYZ + \sphericalangle ZYU = \sphericalangle XYU]$	Suma de ángulos adyacentes
14) $\forall X,Y,Z\ \{[Y \in \overline{XZ}] \rightarrow [\sphericalangle XYZ = 180°]\}$	Definición de ángulo extendido
15) $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC$	Por alternos internos
16) $\sphericalangle BCE = \sphericalangle ABC$	Por alternos internos
17) $[C \in \overline{DE}] \rightarrow [\sphericalangle DCE = 180°]$	14) y ejemplificación universal
18) $C \in \overline{DE}$	
19) $\sphericalangle DCE = 180°$	17), 18) y *modus ponens*
20) $\sphericalangle DCA + \sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB$	13) y ejemplificación universal
21) $\sphericalangle DCB + \sphericalangle BCE = \sphericalangle DCE$	13) y ejemplificación universal
22) $\sphericalangle DCA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCE = \sphericalangle DCE$	20), 21) y reemplazo
23) $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC = 180°$	15), 16), 19), 22) y reemplazo
24) $[\Delta(A,B,C)] \rightarrow [\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC = 180°]$	1), 23) y prueba condicional

Conclusión

25) $\forall X,Y,Z\ \{[\Delta(X,Y,Z)] \rightarrow [\sphericalangle YXZ + \sphericalangle XZY + \sphericalangle XYZ = 180°]\}$	24) y generalización universal

Podemos ver que la exposición coincide con el planteamiento de la hipótesis. El siguiente paso, la preparación, que representa el trazado de la recta, se lleva a cabo mediante una ejemplificación existencial, la cual está soportada por otras reglas de inferencia y por premisas geométricas. La prueba, cuya proposición final está justificada por la prueba condicional, también se fundamenta en reglas de inferencia y en premisas geométricas previas, tanto de carácter general como particular para el caso de este teorema. Finalmente, la conclusión se obtiene a partir de una universalización de la prueba, la cual es posible gracias a la generalización universal.

Parte IV: Propuesta de solución al problema en Kant

1. La relación entre la construcción en Kant y las partes de los teoremas y los problemas según Proclo

En esta sección, luego de nuestro estudio de Proclo, retomaremos nuestra consideración de la interpretación de Hintikka sobre la intuición y la construcción en Kant. Abordaremos diversos aspectos que pretenden mostrar que la interpretación de Hintikka, a pesar de tener la buena idea de relacionar a Kant con Proclo, no acierta en las asociaciones que hace entre los conceptos utilizados por uno y otro.

En primer lugar, no estamos de acuerdo con la identificación que hace Hintikka de la exposición con la ejemplificación existencial, puesto que la exposición, a pesar de ser una proposición sobre un objeto considerado de modo arbitrario, no aparece en la serie de pasos de la demostración a partir de la aplicación de una regla de inferencia, sino que es simplemente la introducción del punto de partida de la demostración, es decir, el planteamiento de la hipótesis para el caso de un objeto considerado de modo arbitrario, por lo que no es introducida por ningún paso previo.

Otro punto en que nos alejamos de Hintikka es en su identificación de la exposición con la preparación. Aunque podemos considerar que ambas son proposiciones referidas a ejemplares considerados de modo arbitrario, su aparición dentro de la demostración está justificada por razones distintas. Mientras que la exposición, como mencionamos anteriormente, cumple la función de plantear la hipótesis del teorema para un caso considerado de modo arbitrario, con lo cual constituye el punto de partida de la demostración en sentido estricto, la preparación es un proceso por el cual se agregan premisas que ayudan a obtener el resultado esperado, las cuales están soportadas por axiomas o teoremas anteriores que contienen un cuantificador existencial, de modo que es necesario usar una ejemplificación existencial para poder utilizarlas en la demostración. No obstante, esta regla de inferencia también debe ir precedida por ejemplificaciones universales, puesto que, generalmente, los principios utilizados son proposiciones encabezadas, primero, por cuantificadores universales y, luego, por existenciales. En síntesíntesis, la exposición se presenta por el simple hecho de ser la hipótesis, mientras que la preparación lo hace a través de resultados previos y de reglas de inferencia con cuantificadores.

Enfaticemos que la preparación, a pesar de que su último paso esté dado por una ejemplificación existencial, no es el único que la constituye, sino que también hay ejemplificaciones universales, por lo que no se puede identificar sin más con ninguna de estas reglas de inferencia, sino con un conjunto de ellas. Además, es importante distinguir entre las proposiciones que constituyen los pasos de teoremas o problema y las reglas de inferencia que permiten obtener nuevos pasos, puesto que es muy distinto decir que tal parte de un teorema o problema se identifica con tal regla de inferencia a decir que tal parte se obtiene o tiene entre sus elementos a reglas de inferencia. Por ejemplo, Hintikka parece identificar a la exposición con la ejemplificación existencial, pero quizás quería decir que la exposición es un resultado de la aplicación de la ejemplificación existencial. Por ello, para nosotros lo más correcto sería decir, a partir de las consideraciones que hemos hecho, que la preparación es una serie de pasos de la demostración constituida por principios que se instancian para el caso de un objeto considerado de modo arbitrario a través de la aplicación tanto de ejemplificaciones universales como existenciales.

2. Las conclusiones de los teoremas: Primera propuesta de solución al problema en Kant

A pesar de nuestras discrepancias con Hintikka, su sugerencia de vincular a Kant con Proclo nos puede ser de ayuda. Para encontrar tal vínculo conviene poner atención en un aspecto sumamente relevante de las demostraciones, el cual consiste en cómo es posible que un resultado que, al menos en principio, vale sólo para un objeto considerado de modo arbitrario también sea válido universalmente. Este problema fue abordado tanto por Proclo como por Kant. De hecho, ambos parecen tener opiniones bastante similares al respecto.

Por un lado, Proclo opina lo siguiente:

> “Acostumbran a hacer doble la conclusión de cierta manera, pues demuestran en lo dado y concluyen en general elevándose de una conclusión particular a una general. Porque no utilizan la particularidad de los objetos, sino que, poniendo lo dado ante los ojos, dibujan un ángulo o una línea, <y> consideran que son lo mismo la conclusión sobre éste o ésta y el concluir sobre todo lo semejante. En efecto, pasan hacia lo general para que no entendamos que la conclusión es parcial, y razonablemente pasan, porque para la prueba utilizan las enunciaciones no en tanto son estos <objetos>, sino en tanto son semejantes a los otros <objetos>. Pues no realizo una bisección del ángulo propuesto en tanto es de tal tamaño, sino en tanto es sólo una figura rectilínea. Mientras tal tamaño del <ángulo> propuesto es particular, el ser una figura rectilínea es <algo> común de todas las figuras rectilíneas. Pues sea recto el <ángulo> dado. En efecto, si hubiera utilizado para la prueba su ser recto, no habría sido capaz de pasar a la clase completa de figuras rectilíneas, pero si no utilizo su ser recto y considero sólo su ser rectilíneo, el argumento también aplica igualmente a todos los ángulos rectilíneos.” (*Comentario*, 207.4-25)

Por otro lado, Kant dice que:

> “El conocimiento *filosófico* es el *conocimiento racional por conceptos*; el matemático [es el conocimiento] por *construcción* de los conceptos. *Construir* un concepto significa: exhibir *a priori* la intuición que le corresponde. Para la construcción de un concepto se requiere, pues, una intuición *no empírica*, que por consiguiente, como intuición, es un objeto *singular*, pero que sin embargo, como construcción de un concepto ([como construcción] de una representación universal) debe expresar, en la representación, validez universal con respecto a todas las intuiciones posibles que hayan de estar bajo ese concepto. Así, yo construyo un triángulo al exhibir el objeto que corresponde a ese concepto, ya mediante mera imaginación, en la intuición pura, ya, de acuerdo con ella, también en el papel, en 1a intuición empírica, pero en ambos casos enteramente *a priori*, sin haber tomado de ninguna experiencia el modelo para ello. La figura singular dibujada es empírica, y

> sirve, sin embargo, para expresar el concepto, sin menoscabo de la universalidad de éste, porque en esta intuición empírica se atiende siempre sólo a la acción de construcción del concepto, para el cual muchas determinaciones, p. ej. [las] del tamaño, de los lados y de los ángulos, son enteramente indiferentes; y por consiguiente se hace abstracción de estas diferencias, que no alteran el concepto del triángulo." (A713-A714/B742-B743)

Ambos piensan que es precisamente la arbitrariedad del modo de consideración del objeto, es decir, el hecho de que sólo se tomen en consideración ciertos atributos generales de él, mientras que otros son dejados de lado, lo que justifica que un resultado obtenido para él sea universalizable para todos los objetos que compartan los atributos que fueron considerados en la demostración.

Dentro de las partes de los teoremas y problemas, Proclo se está refiriendo al paso que hay de la prueba a la conclusión, el cual, como vimos en el análisis anterior, está justificado por la utilización de una generalización universal. Por su parte, Kant parece concordar con ello cuando explica cómo interactúan la construcción y la intuición, al menos si consideramos lo que dice para el caso de las demostraciones, puesto que piensa que la construcción también está presente en los axiomas y en las definiciones. Por lo tanto, si buscáramos identificar la construcción en Kant con alguna noción de la lógica actual, tal como lo hace Hintikka en su interpretación, podríamos considerar que ésta corresponde a la generalización universal.

Sin embargo, tal identificación no parece correcta. En primer lugar, como ya hemos dicho en reiteradas ocasiones, la construcción también está presente en los axiomas y en las definiciones, de modo que, si consideramos que la construcción juega el mismo papel en estos tres tipos de proposiciones, no parece posible entenderla como una regla de inferencia, pues en los axiomas y en las definiciones no se presenta ninguna inferencia.

En segundo lugar, la descripción que Kant ofrece de la construcción parece indicar que ella está actuando siempre que esté presente una intuición correspondiente a un concepto. Si, en el caso de los teoremas, entendemos que esta intuición corresponde a aquel objeto que es considerado de modo arbitrario, entonces tal intuición estaría actuando, en términos de las partes de los teoremas según Proclo, desde la exposición hasta la prueba. Aquella intuición considerada de modo arbitrario es la que permite, por medio de la aplicación de una generalización universal, inferir la conclusión a partir de la prueba. En otras palabras, la construcción en Kant, por el momento y para el caso de los teoremas, posibilita la aplicación de la generalización universal, por lo que no se identifica con ella.

Como mencionamos anteriormente, este análisis que hemos hecho con ayuda de Proclo y Hintikka nos ha permitido encontrar una primera aproximación a lo que Kant entiende por construcción, pues, hasta ahora, sólo nos hemos ocupado de cómo ésta podría presentarse en las demostraciones, pero Kant menciona que ella está presente también en los axiomas y en las definiciones de la matemática.

3. Observaciones sobre esta primera propuesta

A pesar de las críticas que hemos realizado a parte de la interpretación de Hintikka, nuestra propuesta rescata ciertos aspectos de ella. En primer lugar, pensamos que es útil abordar las tesis de Kant con las herramientas que nos ofrecen la lógica y la matemática actuales, pero no se debe forzar a que el filósofo exprese sus tesis en los términos de ellas, como si aquellas fueran relevantes sólo si es posible traducirlas al lenguaje formal contemporáneo. En esto nos alejamos de Hintikka, pues creemos que la identificación de las nociones de Kant con aquellas de la lógica y de la matemática no refleja correctamente lo que está contenido en la *KrV*, pero sí nos sirven de guía para encontrar una mejor respuesta. En otras palabras, un método interpretativo que pretenda traducir a un lenguaje formal las tesis de Kant, y probablemente las de cualquier autor clásico, presenta limitaciones, lo cual no implica que tal lenguaje formal no pueda ser incluido como una herramienta más dentro de otro método interpretativo más amplio.

En segundo lugar, y en relación con el punto anterior, rescatamos de Hintikka el hecho de entender la intuición[24] como una instanciación de un concepto. Sin embargo, en este aspecto también nos alejamos de él, porque no es claro que la intuición deba reducirse sólo a aquello, lo cual abordamos al comienzo de nuestra consideración de la interpretación de Hintikka[25]. Además, el esclarecimiento completo de la noción de intuición, al igual que la de construcción, depende de un estudio mucho más extenso del realizado en este texto, el cual podría poner en cuestión esta idea. Por ejemplo, es posible que la intuición, entendida como instanciación, tenga sentido sólo en ciertos ámbitos, como en los teoremas.

A pesar de que nuestra propuesta está, por el momento, acotada al caso de los teoremas, podemos obtener algunas ideas que podrían guiar una investigación más amplia y detallada. Propusimos que la construcción, gracias a la instanciación de un objeto considerado de modo arbitrario que cae bajo un concepto, permite la aplicación de una generalización universal. En el caso de los axiomas y de las definiciones podría presentarse una situación semejante, pues Kant podría estar indicando, con la exhibición de una intuición correspondiente a un concepto, que una proposición universal se vincula con una para un objeto considerado de modo arbitrario. En el caso de los teoremas, tal vinculación está dada por el hecho de que la primera se deduce a partir de la última por medio de una regla de inferencia. Por lo tanto, la tarea sería, si es que esta idea tiene sentido, buscar cuál es el tipo de vinculación que se presenta entre ambos tipos de proposiciones en el caso de los axiomas y de los teoremas.

[24] Podría hablarse, quizás en términos más precisos, de “un objeto en la intuición”.
[25] Ver la “Parte II” de este texto.

Parte V: Aplicación de la solución propuesta a temas afines en Kant

1. Construcción ostensiva y construcción simbólica

En esta parte del texto nos proponemos ver cómo nuestra compresión obtenida de la construcción nos permite entender mejor las nociones de construcción ostensiva y de construcción simbólica que plantea Kant en el siguiente pasaje:

> "Pero la matemática no construye solamente cantidades (*quanta*), como en la geometría, sino también la mera cantidad (*quantitas*), como en el álgebra, y allí hace completa abstracción de la naturaleza del objeto que ha de ser pensado de acuerdo con ese concepto de cantidad. Entonces escoge una cierta notación para todas las construcciones de cantidades en general (números), como para la adición, la substracción, etc., extracción de raíz, y luego de haber caracterizado también el concepto universal de las cantidades de acuerdo con las diversas relaciones de éstas, exhibe en la intuición, según ciertas reglas universales, toda operación generada y modificada por la cantidad, allí donde una cantidad ha de ser dividida por otra, pone los caracteres de ambas juntos, según la forma que caracteriza a la división, etc., y así, por medio de una construcción simbólica, llega tan bien como [llega] la geometría siguiendo una [construcción] ostensiva o geométrica (de los objetos mismos), hasta allí donde el conocimiento discursivo por medio de meros conceptos nunca podría llegar." (A717/B745)

Shabel (2006) piensa que aquí Kant no hace una distinción entre dos tipos de construcción, sino que la construcción simbólica es otra forma de representar una construcción ostensiva, de modo que las letras en álgebra representan figuras geométricas, a la manera de la geometría analítica.

Sin embargo, según nuestra propuesta no es necesario plantear que la construcción simbólica representa una ostensiva, pues tiene que haber una construcción en álgebra allí donde se parta de la arbitrariedad del modo de consideración de un objeto en una proposi-proposición para fundamentar la universalidad de la misma.

Considerando el caso de las demostraciones, tomemos como ejemplo el teorema de que el inverso multiplicativo es único para todo número distinto de 0:

1) $a \cdot b = 1$	Hipótesis 1
2) $a \cdot c = 1$	Hipótesis 2
3) $c \cdot (a \cdot b) = c \cdot 1$	Principio “1” (número por igualdad)
4) $\forall x\ [x \cdot 1 = x]$	Definición del neutro multiplicativo
5) $c \cdot 1 = c$	4) y ejemplificación universal
6) $c \cdot (a \cdot b) = c$	3), 5) y transitividad
7) $\forall x, y, z\ [x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$	Asociatividad de la multiplicación
8) $c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b$	7) y ejemplificación universal
9) $\forall x, y\ [x \cdot y = y \cdot x]$	Conmutatividad de la multiplicación
10) $(c \cdot a) \cdot b = (a \cdot c) \cdot b$	9) y ejemplificación universal
11) $(a \cdot c) \cdot b = 1 \cdot b$	2) y reemplazo
12) $1 \cdot b = b \cdot 1$	9) y ejemplificación universal
13) $b \cdot 1 = b$	4) y ejemplificación universal
14) $b = c$	6), 8), 10), 11), 12) 13) y transitividad
15) $[a \cdot b = 1 \wedge a \cdot c = 1] \rightarrow b = c$	1), 2), 14) y prueba condicional
16) $\forall x, y, z\ [x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1] \rightarrow y = z$	15) y generalización universal

Tal como en el caso del ejemplo geométrico que consideramos anteriormente, en este algebraico tenemos objetos considerados de modo arbitrario y luego universalizamos el resultado que obtenemos para ellos. Tenemos que considerar que aquí hay una construcción porque se emplea una generalización universal, pues la primera posibilita la aplicación de la última, teniendo en cuenta que estamos hablando de una demostración. Luego, no hay aquí una construcción porque haya una demostración geométrica representada a través de letras, aunque eso no implica que se le pueda dar esa interpretación, a la manera de la geometría analítica, pero tal interpretación sería posterior.

Por lo tanto, no es necesario plantear esa dependencia que arguye Shabel, pues la construcción simbólica es independiente de la ostensiva. Ahora bien, aún podemos preguntarnos por qué a una Kant la llama ostensiva y a la otra simbólica. A pesar de que hoy podemos plantear formalmente las proposiciones tanto de la geometría como del álgebra, tal como hicimos en este texto, de modo que nos parece que los objetos son consideramos en uno y en otro caso de la misma manera, es posible que Kant haya pensado que en la geometría uno tenía ante sí un objeto de una manera más directa que en el álgebra.

2. Las fórmulas numéricas y su relación con la noción de construcción

Ya hemos visto que en la *Disciplina* Kant caracteriza la matemática como un conocimiento por construcción de conceptos. Podemos pensar, en primera instancia, que esto es equivalente a que en todas las proposiciones propiamente matemáticas, las cuales son sintéticas *a priori*, está presente la construcción, según como la entiende Kant.

En la *Disciplina* Kant ofrece, como ya hemos mencionado anteriormente, más detalles sobre la construcción de conceptos en tres tipos de proposiciones: 1) definiciones ("no quedan otros conceptos que sean aptos para ser definidos, que aquellos que contienen una síntesis arbitraria que pueda ser **construida** *a priori*; y por tanto, sólo la matemática posee definiciones" (A729/B757)), 2) axiomas ("la matemática es capaz de [tener] axiomas, porque ella, medio de la **construcción** de los conceptos, puede conectar a priori, y de manera inmediata, en la intuición del objeto los predicados de este" (A732/B760)), 3) demostraciones ("sólo la matemática contiene demostraciones, porque ella no deduce sus conocimientos a partir de conceptos, sino a partir de la **construcción** de éstos" (A734/B762)). ¿Agotan estos tres tipos de proposiciones todos los de la matemática?

Kant menciona en los *Axiomas de la intuición* otro tipo de proposiciones que no corresponde a ninguno de los mencionados: las fórmulas numéricas. Es llamativo que no las vuelva a mencionar en la *Disciplina*, así que puede haber una buena razón para ello.

Para determinar si hay una buena razón, veamos cómo caracteriza Kant a las fórmulas numéricas. Éstas son proposiciones que contienen sólo números particulares, como $5 + 7 = 12$ ó $2 \cdot 2 = 4$, y son el tipo de proposiciones que constituyen la aritmética, la cual no contiene axiomas, pues tales proposiciones son particulares e infinitas, de acuerdo a Kant. ¿Podrá haber dentro de esta caracterización una razón para que no estén incluidas dentro de los tipos mencionados en la *Disciplina*?

Si consideramos nuestra propuesta de comprensión para la noción de construcción, podemos dar una hipótesis para tal razón. Hemos planteando que la construcción establece un vínculo entre una proposición universal y la correspondiente proposición para un caso considerado de modo arbitrario. De este modo, no es necesario recurrir a la construcción dentro de la comprobación de una fórmula numérica, pues, como ella no es proposición universal, sino particular, no sería necesaria la consideración de una proposición para un objeto considerado de modo arbitrario para poder manipular su proposición universal correspondiente.

Luego, vemos que Kant puede haber excluido a las fórmulas numéricas de su catálogo de tipos de proposiciones de la matemática en la *Disciplina* porque éste incluye sólo aquéllas donde se emplea la construcción, es decir, aquéllas donde está en juego una proposición de carácter universal, requisito que las fórmulas numéricas no cumplen, debido a que son de carácter particular.

Esto refuerza nuestra propuesta de que la construcción está vinculada a la universalidad de las proposiciones y nos permite dar una razón de por qué las fórmulas numéricas están excluidas de la *Disciplina*, lo cual también nos muestra que la construcción no está presente en todas las proposiciones de la matemática, sino sólo en algunas, a saber, en las universales.

A modo de conclusión

1. Síntesis de la propuesta realizada en este trabajo

Nuestro breve estudio de las nociones de intuición y de construcción nos llevó a abordar la interpretación que de ellas hace Hintikka, lo cual, a su vez, nos condujo a estudiar las partes de los teoremas en Proclo. Finalmente, volvimos a los planteamientos de Kant para ver cómo nuestra breve consideración de Hintikka y de Proclo nos ayudaba a dar una propuesta preliminar para comprender las nociones estudiadas.

Considerando sólo el caso de los teoremas, esta propuesta consiste en entender que la construcción, por medio de la instanciación de un concepto en un objeto considerado arbitrariamente, permite la aplicación de una generalización universal. Como idea para comenzar un estudio que aborde el papel de la construcción en los axiomas y en las definiciones, se puede tener presente que ella establece un vínculo entre una proposición universal y la correspondiente al caso de un objeto considerado arbitrariamente.

2. Límites del trabajo realizado y tareas para una posterior profundización y ampliación

Nuestro estudio de Kant ha estado acotado, principalmente, a unos pocos pasajes de la KrV, particularmente de la *Disciplina*. Por lo tanto, nuestra propuesta también tiene, en principio, un alcance que no va más allá de los pasajes estudiados. Esta propuesta se ha centrado en el papel de la intuición y la construcción en los teoremas, sin dejar de tener presente que estas nociones también se presentan en los axiomas y en las definiciones.

Luego, una profundización y ampliación de lo realizado en este trabajo debería tomar en cuenta una mayor parte de la obra de Kant. Además, debería estudiar cómo se presentan las nociones estudiadas en los axiomas y en las definiciones, comparando el papel que juegan en ellas con aquel que tienen en los teoremas.

3. Observaciones sobre la forma de trabajo

Conviene hacer algunas aclaraciones sobre el trabajo realizado. En primer lugar, no ha sido nuestra intención evaluar las tesis de Kant sobre la intuición y la construcción, sino tratar de entender qué quieren decir, ya que cualquier crítica de estas nociones debe ser posterior a la interpretación que se haga de ellas.

En segundo lugar, debemos tener cautela cuando estudiamos las reflexiones sobre matemáticas o lógica de los filósofos clásicos, pues a veces nuestra estimación de las teorías actuales nos puede llevar a tergiversar sus planteamientos o a desecharlos completamente. Además, puede suceder que nuestro estudio se convierta finalmente en un ejercicio de búsqueda de los conocimientos actuales en los textos de los filósofos clásicos, con lo cual compresión de la particularidad de sus planteamientos queda marginada.

4. Preguntas sistemáticas motivadas por este trabajo sobre Kant

Las tesis de Kant en filosofía de las matemáticas, a pesar de distanciarse diversos aspectos de las tesis actuales, nos conducen a preguntas que aún hoy son relevantes tanto para la matemática como para la lógica. Entre aquellas preguntas podemos mencionar, por ejemplo, cuál es la naturaleza de los objetos de la matemática, cuál es el estatus y el fundamento de los axiomas y las definiciones, cuál es la justificación de las reglas de inferencia, si hay en las matemáticas justificaciones que no apelen a fundamentos lógicos, cuál es el carácter que deben tener los objetos de la matemática para poder aplicar sobre ellos herramientas de la lógica, por qué las demostraciones presentan, en general, una cierta estructura, etc.

Bibliografía

Arquímedes, 2005, *Tratados I* (Ortiz, P., trad.), Madrid: Gredos.

Beth, E. W., 1957, "Über Lockes „allgemeines Dreieck"", *Kant-Studien* 48 (1-4):361-380.

Carson, E., 1997, "Kant on Intuition in Geometry", *Canadian Journal of Philosophy*, 27 (4): 489–512.

Euclides, 1968, *The thirteen books of Euclid's Elements*, (Heath, T. L., trad.), Cambridge: Cambridge University Press.

___, 1991, *Elementos* (Puertas, M. L., trad.), Madrid: Gredos.

Friedlein, G., 1967, *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, Leipzig: Teubner.

Friedman, M., 1992, "Kant's Theory of Geometry", en Posy 1992, pp. 177-219.

Guyer, P. (ed.), 2006, *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*, Cambridge: Cambridge University Press.

Hintikka, J, "Aristotle's incontinent logician", *Ajatus* vol. 37, pp. 48–63.

___, 1992, "Kant on the Mathematical Method", en Posy 1992, pp. 21-42.

Kant, I., 1910-, *Gesammelte Schriften*, ed. Akademie der Wissenschaften, Berlin: Reimer, posteriormente DeGruyter.

___, 1999, *Prolegómenos a toda metafísica futura que haya de poder presentarse como ciencia* (Caimi, M., trad.), Madrid: Istmo.

___, 2007, *Crítica de la razón pura* (Caimi, M., trad.), Buenos Aires: Colihue.

Ojeda, C. y Ramírez, A. (eds.), 2004, *El sentimiento de lo humano en la ciencia, la filosofía y las artes*, Santiago: Editorial Universitaria.

Parsons, C., 1992, "Kant's Philosophy of Arithmetic", en Posy 1992, pp. 43-79.

Posy, C. (ed.), 1992, *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Shabel, L., 2006, "Kant's Philosophy of Mathematics", en Guyer 2006, pp. 94–128.

Torretti, R., 2004, "Intuición pura", en Ojeda y Ramírez 2004, pp. 111-134.

Anexos

Traducción de una selección del *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides* de Proclo

[Las partes de los teoremas y los problemas]

[203] Todo problema y todo teorema, los cuales estén completados por sus partes perfectas, tiende a tener en él todas estas <partes>: enunciación, exposición, especificación, preparación, prueba, conclusión. De éstas, la enunciación expresa qué es lo dado y qué es lo buscado, pues una enunciación perfecta está compuesta de ambas <partes>. La exposición, determinando lo dado mismo según sí mismo, lo prepara para la búsqueda. La especificación, separadamente, aclara qué es lo buscado. La preparación agrega a lo dado lo que falta para la consecución de lo buscado. La prueba concluye científicamente lo propuesto a partir de lo acordado. La conclusión vuelve nuevamente a la enunciación confirmando lo demostrado. Tales son todas las partes de los problemas y de los teoremas, pero las que se dan en éstos con suma necesidad son la enunciación, la prueba y la conclusión, ya que es necesario que lo buscado sea conocido previamente, que esto sea demostrado por <pasos> intermedios y que se concluya lo demostrado, y es imposible que alguna de estas tres <partes> sea omitida. Las <partes> restantes muchas veces se presentan y muchas veces, ofreciendo ninguna utilidad, son omitidas, pues no hay especificación ni exposición en aquel **[204]** problema de construir un triángulo isósceles con cada <ángulo> sobre la base el doble que el restante[26], y en muchos teoremas no hay preparación, siendo suficiente la exposición, sin otra adición aparte de lo dado, para demostrar lo propuesto. ¿Cuándo decimos que la exposición es omitida? Cuando nada dado haya en la enunciación, pues la enunciación, en la mayoría de los casos, se divide en lo dado y en lo buscado, pero esto no siempre sucede, sino que, a veces, sólo expresa lo buscado, lo cual es necesario conocer o encontrar, como en el problema antes mencionado. Pues no dice de antemano qué es lo dado necesario para construir un <triángulo> isósceles con cada <ángulo> de los iguales el doble que el restante,

[26] *Elementos* IV 10.

sino que es necesario encontrarlo. Aquí la determinación de lo propuesto se da a partir de lo previamente conocido, pues resulta que conocemos qué es un <triángulo> isósceles y qué es un <ángulo> igual o doble. Esto dice <Aristóteles> que es propio de todo conocer discursivo. Del mismo modo, no establecemos ninguna hipótesis en otros problemas, como cuando se plantea bisectar una recta finita dada[27], pues aquí es dada una recta y se nos plantea que la bisectemos, y se especifica, separadamente, qué es lo dado y qué es lo buscado. En efecto, cuando la enunciación contiene ambos, entonces se presenta tanto la especificación como la exposición, y cuando se omite lo dado, también se omite éstas, pues la exposición lo es **[205]** de lo dado, al igual que la especificación, pues <ésta> será lo mismo que la enunciación. ¿Pues qué otra cosa dirías que es lo especificado en el problema antedicho sino que es necesario encontrar un <triángulo> isósceles tal? Esto sería la enunciación. Entonces, si la enunciación no tuviera ni lo dado ni lo buscado, la exposición estaría ausente a causa del no estar lo dado y la especificación se omitiría para que no fuera lo mismo que la enunciación.

[Las dos conclusiones]

[207.4] Acostumbran a hacer doble la conclusión de cierta manera, pues demuestran en lo dado y concluyen en general elevándose de una conclusión particular a una general. Porque no utilizan la particularidad de los objetos, sino que, poniendo lo dado ante los ojos, dibujan un ángulo o una línea, <y> consideran que son lo mismo la conclusión sobre éste o ésta y el concluir sobre todo lo semejante. En efecto, pasan hacia lo general para que no entendamos que la conclusión es parcial, y razonablemente pasan, porque para la prueba utilizan las enunciaciones no en tanto son estos <objetos>, sino en tanto son semejantes a los otros <objetos>. Pues no realizo una bisección del ángulo propuesto en tanto es de tal tamaño, sino en tanto es sólo una figura rectilínea. Mientras tal tamaño del <ángulo> propuesto es particular, el ser una figura rectilínea es <algo> común de todas las figuras rectilíneas. Pues sea recto el <ángulo> dado. En efecto, si hubiera utilizado para la prueba su ser recto, no habría sido capaz de pasar a la clase completa de figuras rectilíneas, pero si no utilizo su ser

[27] *Elementos* I 10.

recto y considero sólo su ser rectilíneo, el argumento también aplica igualmente **[207.25]** a todos los ángulos rectilíneos.

[Las partes de los teoremas y los problemas ejemplificadas en *Elementos* I 1]

[208] Examinemos todas las <cosas> que hemos dicho previamente en este primer problema[28], pues es evidente que es un problema, ya que nos conmina a construir la producción de un triángulo equilátero.

La enunciación en este <problema> está compuesta de lo dado y de lo buscado, pues se da una recta determinada y se busca cómo construir sobre ella un triángulo equilátero, y lo dado precede, lo buscado sigue, de modo que, conjuntamente, concibes "si hay una recta determinada, es posible construir sobre ella un triángulo equilátero". Pues no se construiría un triángulo si no hubiera una recta –pues es comprendido por líneas rectas– y si no estuviera determinada, pues no es posible producir un ángulo sino en torno a un punto: un punto no es límite de una <recta> indeterminada.

A continuación, luego de la enunciación, está la exposición: "sea ésta una recta determinada dada", y ves que la exposición expresa sólo lo dado mismo, no agregando lo buscado.

Y después de ésta se encuentra la especificación: "es necesario construir sobre la recta expuesta determinada un triángulo equilátero". De cierta manera la especificación es causa de <nuestra> atención, pues proclamando lo buscado nos vuelve más atentos para la prueba, así como la exposición, poniendo lo dado ante los ojos, nos pone con mayor disposición al aprendizaje.

Y luego de **[209]** la especificación está la preparación: "trácese una circunferencia con centro en uno de los extremos de la recta y con radio el resto <de la recta>", y nuevamente "trácese una circunferencia con centro en el otro extremo y con radio idéntico a la anterior",

[28] *Elementos* I 1.

y “a partir del punto común de la intersección de las circunferencias únanse rectas con los extremos de la recta”. Y ves que en la preparación utilizo los postulados, tanto el “trazar una línea recta desde cualquier punto hacia cualquier punto” como el “trazar una circunferencia con un centro y con un radio”, pues generalmente los postulados componen las preparaciones y los axiomas <componen> las pruebas.

A continuación está la prueba: “puesto que uno de los puntos de los <que están> sobre la recta dada es el centro mismo de la circunferencia que lo comprende, la <recta> sobre la intersección común es igual a la recta dada. Puesto que también el punto restante de los <que están> sobre la recta dada es el centro mismo de la circunferencia que lo comprende, la <recta> sobre la intersección común de las circunferencias es igual a la recta dada”. Y la mención de estos <pasos> viene a partir de la definición de circunferencia, la cual dice que “todas las <rectas> a partir del centro son iguales”. Cada una <de las rectas>, por lo tanto, es igual a la misma <recta>. Y “<objetos> iguales al mismo <objeto> también son iguales entre sí” a causa del primer axioma. Por lo tanto, las tres <rectas> son iguales. Por lo tanto, “se construye un triángulo equilátero sobre esta recta dada”. Ésta es la primera conclusión que sigue a la exposición. Pero, después de ésta, **[210]** la <conclusión> general: “por lo tanto, sobre una recta dada se construye un triángulo equilátero”, pues, aunque duplicases la <recta> dada de lo expuesto, las mismas preparaciones y las <mismas> pruebas calzarían, y aunque triplicases o la hicieses más grande o más que pequeña que ésta.

A estos <pasos> se agrega “lo cual era lo que tenía que hacerse”, mostrando que es la conclusión del problema. Y a los teoremas se agrega “lo cual era lo que tenía que demostrarse”. Los <problemas> anuncian la construcción de algo, mientras los <teoremas> la demostración y el descubrimiento de lo que existe. En efecto, en general se agregan estas <palabras> a las conclusiones indicando que las cosas <buscadas> de la enunciación han llegado a ser, uniendo el final con el principio e imitando al intelecto que es desenvuelto y que nuevamente se convierte hacia el principio. No siempre es lo mismo <lo agregado>, sino que algunas veces es “lo cual era lo que tenía que hacerse” y otras veces es “lo cual era lo que tenía que demostrarse”, a causa de diferenciar los teoremas de los problemas.

Nos hemos entrenado en un único problema, el primero, y hemos aclarado todas estas <observaciones>. Es necesario que los oyentes busquen también en los restantes <teoremas y problemas> cuáles de las <partes> principales se incluyen, cuáles se omiten y de cuántas maneras se da lo dado, y a partir de cuáles principios obtenemos o las preparaciones o las pruebas, pues una visión comprensiva de estos <asuntos> no provee poco entrenamiento ni <poca> práctica en los razonamientos <usados> en la geometría.

[La demostración de los pitagóricos de *Elementos* I 32]

[379.2] Pero el peripatético <Eudemo> adscribe el hallazgo de este teorema a los <pitagóricos>, que todo triángulo tiene sus ángulos interiores iguales a dos rectos. Dice que ellos demostraron lo propuesto de esta manera:

Sea ABC un triángulo y por A trácese la recta DE paralela a BC. En efecto, ya que BC y DE son paralelas <y> también <ya que> los <ángulos> alternos son iguales, entonces el <ángulo> DAB es igual al <ángulo> ABC, y el <ángulo> EAC es igual al <ángulo> ACB. Agréguese el <ángulo> común BAC. Entonces, los <ángulos> DAB, BAC y CAE, i. e., los <ángulos> DAB, BAE, i.e., dos <ángulos> rectos son iguales a los tres ángulos del triángulo ABC. Entonces, los tres <ángulos> de un triángulo son iguales a **[379.16]** dos <ángulos> rectos.