



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

**IMPLEMENTACIÓN Y VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DE MODELO NUMÉRICO  
BIDIMENSIONAL DE TRANSPORTE DE OXÍGENO DISUELTO EN LAGUNAS  
EXTREMADAMENTE SOMERAS ENERGIZADAS POR VIENTO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

**RODRIGO ALFONSO PÉREZ ILLANES**

**PROFESOR GUÍA:**  
ALBERTO DE LA FUENTE STRANGER

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:**  
YARKO NIÑO CAMPOS  
CLAUDIO FALCÓN BEAS

SANTIAGO DE CHILE  
2015

**RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL  
POR: RODRIGO PÉREZ  
FECHA: 2015  
PROF. GUÍA: SR. ALBERTO DE LA FUENTE**

**IMPLEMENTACIÓN Y VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DE MODELO NUMÉRICO  
BIDIMENSIONAL DE TRANSPORTE DE OXÍGENO DISUELTO EN LAGUNAS  
EXTREMADAMENTE SOMERAS ENERGIZADAS POR VIENTO**

En las zonas altas de los Andes del norte de Chile, Perú, Argentina y Bolivia se encuentran lagunas extremadamente someras, usualmente conocidas como salares, cuyo balance hídrico es determinado por afloramientos de agua subterránea y su posterior evaporación. Estas sustentan poblaciones de flamencos y otras especies, los que se alimentan del contenido orgánico que se encuentra en los sedimentos. El oxígeno disuelto (OD) es una de las sustancias que puede transportarse en las lagunas y es indicador de la actividad biológica en los sedimentos. Este se transporta horizontalmente producto de corrientes generadas por la interacción entre la distribución de batimetría de la laguna y los fuertes vientos que inyectan energía durante las tardes, lo que ha sido corroborado en experiencias de terreno.

Con el propósito de desarrollar una herramienta de estudio y control de las lagunas, se implementan numéricamente las ecuaciones de continuidad y momentum bidimensional, promedio vertical para una capa, las que permiten resolver la dinámica del fluido ambiente. Estas se resuelven con las metodologías de Crank Nicolson y el Análisis Modal para el problema teórico planteado por Kranenburg (1992), el cual considera una distribución de batimetría idealizada excitada por un viento uniforme. En conjunto, se implementa un módulo de transporte escalar que permite resolver la dinámica del OD mediante volúmenes finitos, considerando consumo de OD en los sedimentos y transferencias con la atmósfera. Estos resultados se comparan con los obtenidos al suponer mezcla completa en la laguna. El módulo hidrodinámico de la herramienta numérica es validado experimentalmente mediante mediciones de velocidad realizadas con un velocímetro acústico Doppler en un contenedor que representa la batimetría de Kranenburg (1992) y que es ensayado en una mesa oscilatoria construida en el laboratorio de hidráulica Francisco Javier Domínguez de la Universidad de Chile.

Los resultados muestran que la relación de aspecto de la laguna y el número de Wedderburn son los adimensionales que controlan la magnitud de la concentración promedio espacial de OD en el sistema. El estudio del transporte escalar muestra que la concentración de OD calculada con volúmenes finitos es en general mayor que la concentración de mezcla completa. Conjuntamente se obtiene que el supuesto de mezcla completa sobrestima los flujos de OD con los sedimentos en relación a los resultados del modelo. Las zonas más lentas de la laguna presentan las condiciones propicias para maximizar el consumo de OD, mientras que en las de mayor velocidad la advección horizontal neutraliza el consumo vertical. La instalación experimental y simulaciones numéricas ajustadas al resultado analítico del flujo en el problema de Kranenburg (1992), muestran que el coeficiente de fricción lineal varía con la magnitud del forzante externo, lo que es una característica fundamental de la formulación simplificada de las ecuaciones de flujo planteadas en este trabajo.

*A mi familia*

# Agradecimientos

Hasta que se acabó! Sin duda que la memoria ha sido uno de los períodos con más locura, música, bicicleta, carretes y viajes en el paso por la U. Bueno, con hartito trabajo también. Todos estos con la irremplazable compañía de la familia, los amigos y las inagotables ganas de webear. Vivimos buenos y malos momentos y entre todos aprendimos que en particular los malos hay que saber enfrentarlos con la mejor de las caras. Dar cara.

Esta memoria no hubiese sido posible sin el apoyo continuo e incondicional de la beca Mario Pérez, la cual sin postulación alguna me ha permitido estudiar y disfrutar al máximo este período. Fuera de bromas, agradezco mucho a mi Papá, Mamá, al Pipe y a la Romi por el apoyo y compañía incondicional. A ustedes dedico este trabajo! Los quiero mucho!

Agradezco a los amigos de Conty con los que llevo toda una vida webeando. Nico, Gonzalez, Franco, Ubal, Pablo y Pato Miño. Gracias a las marías José y Paz a quienes quiero mucho. Agradezco a la Dani y a la Vero por los paseos, carretes e incontables onces santiaguinas con las que forjamos una linda amistad. Muchos personajes maulinos se me quedan en el tintero pero quiero que sepan que los recuerdo y estimo mucho a todos! A los civiles con los que compartí las primeras incursiones en la especialidad: Pachi, Thomas, Emily, Mati Rojas, Aru, Meji, Nico Leiva, Salocín, Tamayo. A los hidráulicos Vicky, Sunero, Balbo, Rosario, Dany, Negrete, César, Richard, Uribe, Mascatore, Paci, Pauli. A los miembros de la actual incursión musical: Caicha, Seba Mengual y José Ayala a ver si resulta algo sonoro. A los que hoy considero los mejores amigos de la U: Gustavo, Loco Alberto, Vixon, Chinovera, Fano, Gabyluli, Javi, Fepo, OSS, Peter, GZ, Pinolio, Axel. Menciones especiales: A Nacho Cartes por ser la rata más grande, a Sewasted porque casi se lo lleva la ola, a Soto por su alegría y amistad. Mención especial al Edi porque lo siento como un hermano más. Agradecimiento especial a Willinho porque a este weon lo conocí el día cero y hasta hoy seguimos juntos en la U, el único amigo de principio a fin. A todos muchas gracias por la compañía y amistad!

Muchas gracias a la Jacqui por su buena onda y ejemplo de levantarse temprano. Gracias por las enseñanzas a Manuel, a JD Jr., a Pancho Mella, al mítico e incomparable JD y al Sensei de los motores Yuyitsu. Agradezco al Fablab y a Fernando Torres por la asistencia prestada en la confección de la maqueta. Agradezco a los miembros de la comisión por sus invaluable comentarios y correcciones y al proyecto Fondecyt 1140821.

Agradezco a quienes me iniciaron en los fluidos: Hugo y Beto. Al primero le agradezco su constante apoyo y conversaciones. Al segundo tendría que escribirle una página entera de agradecimientos por todo lo que me ha enseñado y por la paciencia. Muchas gracias Beto.

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.2.1. Generales . . . . .	2
1.2.2. Específicos . . . . .	2
1.3. Metodología . . . . .	3
1.3.1. Análisis teórico de las ecuaciones . . . . .	3
1.3.2. Implementación numérica de las ecuaciones . . . . .	3
1.3.3. Validación analítica y experimental del modelo . . . . .	3
1.3.4. Análisis de resultados y aplicación . . . . .	3
1.4. Descripción conceptual del problema . . . . .	4
1.5. Contenidos del informe . . . . .	4
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Hidrodinámica . . . . .	6
2.1.1. Ecuaciones . . . . .	6
2.1.2. Metodologías de resolución . . . . .	7
2.1.3. Energía . . . . .	10
2.1.4. Análisis dimensional . . . . .	10
2.2. Transporte escalar . . . . .	11
2.2.1. Ecuación . . . . .	12
2.2.2. Volúmenes Finitos . . . . .	14
2.3. Geometría de Kranenburg (1992) . . . . .	16
<b>3. Implementación Numérica</b>	<b>19</b>
3.1. Aspectos generales . . . . .	19
3.1.1. Malla Numérica . . . . .	19
3.1.2. Lenguaje de programación . . . . .	20
3.1.3. Paradigma de programación . . . . .	20
3.1.4. Codificación . . . . .	21
3.2. Modelo conceptual de programación . . . . .	22
<b>4. Desarrollo Teórico</b>	<b>24</b>
4.1. Efecto de corrientes horizontales en deformación de superficie libre . . . . .	24
4.2. Variación temporal de la energía mecánica . . . . .	28
4.3. Efecto de corrientes horizontales en transporte escalar . . . . .	30

4.4. Número de Péclét del flujo vertical de OD . . . . .	34
<b>5. Instalación Experimental</b>	<b>36</b>
5.1. Descripción general . . . . .	36
5.2. Instrumentación . . . . .	38
5.2.1. Acelerómetro . . . . .	38
5.2.2. Velocímetro acústico Doppler (ADV) . . . . .	39
5.2.3. Tacómetro . . . . .	39
5.2.4. Motor y variador de frecuencia eléctrica . . . . .	39
5.3. Metodología Experimental . . . . .	41
5.3.1. Experimentos a realizar . . . . .	41
5.3.2. Operación general de la instalación . . . . .	41
5.3.3. Metodología de medición . . . . .	42
5.4. Procesamiento de datos . . . . .	43
5.4.1. Filtro <i>Butterworth</i> . . . . .	43
5.4.2. Media móvil . . . . .	43
5.4.3. Correlación de datos . . . . .	44
5.4.4. Ajuste de la velocidad medida con la velocidad simulada . . . . .	46
5.5. Sobre la construcción . . . . .	47
5.5.1. Factores que determinan el tipo de instalación . . . . .	47
5.5.2. Confección de la maqueta a escala . . . . .	48
5.6. Propuestas de mejora a la instalación . . . . .	49
<b>6. Resultados</b>	<b>51</b>
6.1. Resultados Numéricos para el problema de Kranenburg (1992) . . . . .	51
6.1.1. Representación numérica . . . . .	51
6.1.2. Solución hidrodinámica . . . . .	52
6.1.3. Análisis de energía mecánica . . . . .	57
6.1.4. Análisis de transporte escalar sin dispersión horizontal . . . . .	65
6.2. Resultados Experimentales . . . . .	77
6.2.1. Mediciones de velocidad y ajuste del coeficiente de fricción . . . . .	77
6.2.2. Análisis de las series ajustadas por rango de medición . . . . .	79
<b>7. Conclusiones y Comentarios</b>	<b>94</b>
7.1. Implementación numérica . . . . .	94
7.2. Hidrodinámica . . . . .	95
7.3. Transporte escalar . . . . .	95
7.4. Experimentos . . . . .	97
7.5. Propuestas para futuros análisis . . . . .	98
7.6. Comentarios finales . . . . .	99
<b>Bibliografía</b>	<b>100</b>
<b>Anexo</b>	<b>104</b>
<b>A. Deducción de las ecuaciones hidrodinámicas</b>	<b>105</b>
A.1. Ecuación de Continuidad . . . . .	105
A.1.1. Formulación Teórica . . . . .	105

A.1.2. Derivada Material . . . . .	106
A.1.3. Flujo Incompresible . . . . .	106
A.2. Ecuación de momentum . . . . .	107
A.3. Integración vertical de las ecuaciones . . . . .	113
A.3.1. Regla de integración de Leibnitz . . . . .	113
A.3.2. Ecuación de Continuidad . . . . .	113
A.3.3. Ecuación de Momentum . . . . .	114
A.4. Resumen de las ecuaciones integradas . . . . .	118
<b>B. Teoría del análisis modal</b>	<b>119</b>
B.1. Producto interior . . . . .	122
B.2. Relaciones de ortogonalidad . . . . .	122
B.3. Ecuaciones para la amplitud modal . . . . .	125
B.4. Soluciones analíticas para la amplitud modal . . . . .	126
B.5. Ecuaciones para la energía modal . . . . .	130
<b>C. Análisis dimensional de las ecuaciones hidrodinámicas</b>	<b>132</b>
<b>D. Deducción de las ecuaciones de transporte escalar</b>	<b>138</b>
D.1. Concentración . . . . .	138
D.2. Balance de masa . . . . .	138
D.3. Difusión turbulenta . . . . .	140
D.4. Sobre vectores normales . . . . .	143
D.5. Integración vertical de la ecuación de transporte . . . . .	145
D.6. Volúmenes Finitos . . . . .	149
<b>E. Efectos del filtro en las series de aceleración</b>	<b>155</b>
<b>F. Series de aceleración medidas</b>	<b>159</b>

# Índice de tablas

5.1. Rangos de medición de $\omega_f$ definidos para los experimentos. . . . .	41
5.2. Datos de aplicación de media móvil para series de aceleración. . . . .	44
6.1. Comparación de tiempos de cálculo en función del refinamiento de la malla. El computador en el que han sido realizado estos cálculos es un Samsung R440 con procesador Intel ©Core™ i3 CPU M370 @ 2.40GHz x 2 y 3.7 Gb de memoria ram. . . . .	52
6.2. Rangos de variación de parámetros para simulaciones utilizadas en el análisis del coeficiente de fricción. Las simulaciones son resueltas utilizando la técnica del Análisis Modal. . . . .	53
6.3. Parámetros de ajuste del coeficiente de fricción adimensional en función del número de Wedderburn y la relación de aspecto. . . . .	54
6.4. Rangos de parámetros utilizados para experimentos numéricos que permiten estudiar el transporte escalar. . . . .	67
6.5. Número de casos ajustados por rango de $\omega_f$ . . . . .	77
6.6. Frecuencias $\omega^*$ que maximizan velocidad por rango de $\omega_f$ . . . . .	79



# Índice de figuras

2.1.	Patrón de flujo analítico obtenido por Kranenburg (1992). Los puntos A y B son elípticos y el flujo orbita en torno a ellos con un período mayor a cero. Los puntos C y D son hiperbólicos y corresponden a puntos de estancamiento. $\tau_s$ es el esfuerzo de corte del viento uniforme sobre la superficie. . . . .	17
2.2.	Esquema conceptual del problema estudiado por Kranenburg (1992). Se esquemmatizan las variables del problema y se incluye una demostración de la malla numérica. . . . .	18
3.1.	Esquema conceptual de las clases que componen una Simulación. . . . .	23
3.2.	Esquema conceptual de los motores de cálculo disponibles. . . . .	23
5.1.	Esquema general de la instalación experimental. . . . .	36
5.2.	Vista isométrica de la ubicación del ADV. . . . .	37
5.3.	A) Acelerómetro ADXL345 Evaluation Board. Fuente: Sparkfun electronics. B) Probeta 2D del ADV Sontek. Fuente: SonTek C) Tacómetro Autonics. D) Vista general de la instalación. . . . .	40
5.4.	Ejemplo de aplicación de la correlación de datos para buscar una serie característica. A) Serie completa. Las líneas grises verticales aislan lo que se define como rango estacionario del experimento B) Serie del rango estacionario. Esta es la denominada serie Y. Las líneas grises verticales aislan la ventana de datos X con la cual se calcula la correlación C) Serie de datos X aislada del rango estacionario D) Correlaciones calculadas. Los puntos negros indican los máximos locales de la correlación y la línea segmentada marca el criterio de corte 0.75 E) Serie característica del experimento obtenida de promediar aquellas series en que la correlación supera el criterio de corte. . . . .	45
5.5.	A) ShopBot Desktop en su ubicación actual en el Fablab. B) Modelo 3D de la geometría de Kranenburg (1992) visualizado en FreeCad. C) ShopBot durante la confección de la maqueta. D) Maqueta en uno de los ensayos. Se agrega una revancha para evitar el derrame de agua. . . . .	49
6.1.	A) Implementación de la malla alternada o <i>staggered</i> . Los cuadrados negros son los nodos en donde se resuelve la variable $\eta$ . Los triángulos que apuntan hacia la derecha son los nodos de velocidad $U$ y los triángulos que apuntan hacia arriba son los nodos de velocidad $V$ . El espaciamiento entre puntos está aumentado para facilitar la visualización. B) Distribución espacial de batimetría. . . . .	52

6.2.	Calibración del coeficiente de fricción para el problema de Kranenburg (1992) A) Puntos de la simulación numérica con respecto a la solución analítica B) Variación del coeficiente de fricción adimensional $\tilde{c}_{f*}$ versus el número de Wed- derburn $\mathbf{W}$ para distintas relaciones de aspecto $\psi$ . Las rectas representan el ajuste de los datos para cada valor de $\psi$ . Mientras más delgada es la recta de ajuste, la laguna es más somera. . . . .	53
6.3.	Solución hidrodinámica del problema de Kranenburg (1992). El viento sopla desde $-y$ hacia $+y$ . Las flechas indican la dirección del flujo A) Deformación de la superficie libre B) Magnitud de la velocidad local normalizada por la velocidad máxima. . . . .	55
6.4.	A) Perfiles de deformación normalizada de la superficie libre para distintos números de Wedderburn B) Deformación máxima de la superficie libre viento abajo en función del número de Wedderburn. En círculos grises se muestran los resultados del modelo numérico, los cuadrados grafican el valor estimado con la corrección por corrientes horizontales $\Delta_{*c}$ y los triángulos muestran la estimación obtenida del análisis unidimensional $\Delta_*$ (Shintani <i>et al.</i> , 2010). . .	56
6.5.	Comportamiento de la energía en el tiempo para $\mathbf{W} = 1000$ y $\psi = 10^5$ A) Energía total $E$ normalizada por la energía del régimen permanente $E_{rp}$ y su distribución entre energía potencial y cinética B) Distribución entre energía aportada por las estructuras oscilatorias ( $\omega \neq 0$ ) y por las no oscilatorias ( $\omega = 0$ ) C) Evolución del total de energía cinética y su distribución entre estructuras oscilatorias y no oscilatorias D) Evolución del total de energía potencial y su distribución entre estructuras oscilatorias y no oscilatorias. . .	58
6.6.	Estructuras oscilatorias cuyo aporte al total de la energía potencial es A) 98,6 % B) 1,1 %. Estructuras no oscilatorias cuyo aporte al total de la energía cinética es C) 8,1 % D) 3,8 %. . . . .	59
6.7.	Resultados para una simulación con $R = 1000[m]$ , $\mathbf{W} = 100$ y $\psi = 10^5$ A) Comparación de los perfiles de velocidad numéricos usando el Análisis Modal y Crank Nicolson. Evolución temporal de la potencia inyectada y disipada para B) Crank Nicolson C) Análisis Modal. En este último caso la línea segmentada indica el valor que debiera alcanzar cada término en el régimen permanente. . .	60
6.8.	Resultados de transporte escalar para $\mathbf{W} = 6000$ , $\psi = 10^3$ y $R = 500[m]$ . Distribuciones espaciales de A) Número de Péclét de la difusión vertical B) Velocidad de transferencia vertical de OD en los sedimentos C) Concentración de OD adimensional D) Magnitud del flujo hacia los sedimentos. . . . .	65
6.9.	Evolución temporal de la concentración promedio espacial para simulaciones con $\psi = 10^5$ , $R = 1000[m]$ y A) $\mathbf{W} = 1$ , cambiando la condición inicial de concentración B) Cambiando el número de Wedderburn con condición inicial nula. . . . .	66
6.10.	Evolución del promedio espacial de parámetros de interés del proceso de trans- porte de OD en función del número de Wedderburn para $\psi = 10^3$ A) Velocidad de transferencia vertical de OD en los sedimentos B) Velocidad de transfe- rencia vertical de OD entre el agua y la atmósfera C) Tiempo característico de la difusión vertical D) Velocidad del flujo E) Tiempo característico de la advección horizontal F) Péclét de la difusión vertical. . . . .	68

6.11. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Wedderburn para $\psi = 10^3$ A) Concentración adimensional B) Flujo hacia los sedimentos. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Péclet promedio espacial para $\psi = 10^3$ C) Concentración adimensional D) Flujo hacia los sedimentos. Los puntos rellenos de blanco corresponden a cálculos realizados con el supuesto de mezcla completa. . . . .	69
6.12. Evolución del promedio espacial de parámetros de interés del proceso de transporte de OD en función del número de Wedderburn para $\psi = 10^4$ A) Velocidad de transferencia vertical de OD en los sedimentos B) Velocidad de transferencia vertical de OD entre el agua y la atmósfera C) Tiempo característico de la difusión vertical D) Velocidad del flujo E) Tiempo característico de la advección horizontal F) Péclet de la difusión vertical. . . . .	70
6.13. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Wedderburn para $\psi = 10^4$ A) Concentración adimensional B) Flujo hacia los sedimentos. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Péclet promedio espacial para $\psi = 10^4$ C) Concentración adimensional D) Flujo hacia los sedimentos. Los puntos rellenos de blanco corresponden a cálculos realizados con el supuesto de mezcla completa. . . . .	71
6.14. Evolución del promedio espacial de parámetros de interés del proceso de transporte de OD en función del número de Wedderburn para $\psi = 10^5$ A) Velocidad de transferencia vertical de OD en los sedimentos B) Velocidad de transferencia vertical de OD entre el agua y la atmósfera C) Tiempo característico de la difusión vertical D) Velocidad del flujo E) Tiempo característico de la advección horizontal F) Péclet de la difusión vertical. . . . .	72
6.15. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Wedderburn para $\psi = 10^5$ A) Concentración adimensional B) Flujo hacia los sedimentos. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Péclet promedio espacial para $\psi = 10^5$ C) Concentración adimensional D) Flujo hacia los sedimentos. Los puntos rellenos de blanco corresponden a cálculos realizados con el supuesto de mezcla completa. . . . .	73
6.16. Evolución de la concentración de mezcla completa en función del número de Wedderburn, diferenciada por relación de aspecto para A) $R = 1000[m]$ , B) $R = 500[m]$ y C) $R = 250[m]$ . . . . .	74
6.17. Evolución del cociente entre el flujo vertical de OD promedio espacial y de mezcla completa en función del número de Wedderburn, diferenciado por relación de aspecto para A) $R = 1000[m]$ , B) $R = 500[m]$ y C) $R = 250[m]$ . . .	75
6.18. Evolución del parámetro $\Delta\tilde{F}$ en función del número de Wedderburn, diferenciado por relación de aspecto para A) $R = 1000[m]$ , B) $R = 500[m]$ y C) $R = 250[m]$ . . . . .	76

6.19.	A) Amplitud promedio de la velocidad en el rango estacionario versus la frecuencia de giro del motor. Los símbolos claros son los experimentos con amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ y los oscurecidos con $a_2 = 2[mm]$ . Los cuadrados son los experimentos del rango de frecuencia 1, los círculos son del rango 2, los triángulos que apuntan hacia la derecha del rango 3 y los triángulos que apuntan hacia arriba son del rango 4. Aquellos puntos encerrados en un círculo corresponden a los casos en los que se encontró un coeficiente de fricción que ajustara las mediciones con la simulación numérica. Se indican los valores máximos de la velocidad por amplitud de oscilación de la mesa y las frecuencias en las que se alcanzan las máximas velocidades por rango de medición. B) Coeficiente de fricción adimensional versus amplitud adimensional de la aceleración forzante. La simbología es la misma que la del panel A. . . . .	78
6.20.	Estructuras modales de la hoya experimental calculadas numéricamente y que se consideran de relevancia para el análisis de los experimentos. Se indica en cada caso la frecuencia angular y el período de oscilación. Notar que por fila la estructura es la misma pero aparece con orientación distinta en el paquete de vectores propios. . . . .	80
6.21.	Resultados para experimento con $\omega_f = 40[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Serie de aceleración característica medida (línea gris) y ajustada (línea segmentada) B) Serie de velocidad medida (línea gris), simulada con la aceleración ajustada (línea negra) y simulada con la aceleración medida (línea punteada) C) Densidad espectral de la medición de velocidad D) Estructura modal con mayor energía promedio. . . . .	81
6.22.	Resultados simulados para experimento con $\omega_f = 40[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Campo de flujo al inicio de un ciclo B) Campo de flujo en la mitad de un ciclo C) Perfiles transversales de deformación de superficie libre para los campos de flujo mostrados en A y B. . . . .	82
6.23.	Resultados para experimento con $\omega_f = 40[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Series de energía B) Series de potencia inyectada y disipada. . . . .	83
6.24.	Resultados para experimento con $\omega_f = 116[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Serie de aceleración característica medida (línea gris) y ajustada (línea segmentada) B) Serie de velocidad medida (línea gris), simulada con la aceleración ajustada (línea negra) y simulada con la aceleración medida (línea punteada) C) Densidad espectral de la medición de velocidad D) Estructura modal con mayor energía promedio. . . . .	84
6.25.	Resultados simulados para experimento con $\omega_f = 116[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Campo de flujo al inicio de un ciclo B) Campo de flujo en la mitad de un ciclo C) Perfiles transversales de deformación de superficie libre para los campos de flujo mostrados en A y B. . . . .	85
6.26.	Resultados para experimento con $\omega_f = 116[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Series de energía B) Series de potencia inyectada y disipada. . . . .	86
6.27.	Resultados para experimento con $\omega_f = 182[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) Serie de aceleración característica medida (línea gris) y ajustada (línea negra) B) Serie de velocidad medida (línea gris), simulada con la aceleración ajustada (línea negra) y simulada con la aceleración medida (línea punteada) C) Densidad espectral de la medición de velocidad D) Estructura modal con mayor energía promedio. . . . .	87

6.28.	Resultados simulados para experimento con $\omega_f = 182[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Campo de flujo al inicio de un ciclo B) Campo de flujo en la mitad de un ciclo C) Perfiles transversales de deformación de superficie libre para los campos de flujo mostrados en A y B. . . . .	88
6.29.	Resultados para experimento con $\omega_f = 182[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) Series de energía B) Series de potencia inyectada y disipada. . . . .	89
6.30.	Resultados para experimento con $\omega_f = 206[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) Serie de aceleración característica medida (línea gris) y ajustada (línea segmentada) B) Serie de velocidad medida (línea gris), simulada con la aceleración ajustada (línea negra) y simulada con la aceleración medida (línea punteada) C) Densidad espectral de la medición de velocidad D) Estructura modal con mayor energía promedio. . . . .	90
6.31.	Resultados simulados para experimento con $\omega_f = 206[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) Campo de flujo al inicio de un ciclo B) Campo de flujo en la mitad de un ciclo C) Perfiles transversales de deformación de superficie libre para los campos de flujo mostrados en A y B. . . . .	91
6.32.	Resultados para experimento con $\omega_f = 206[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) Series de energía B) Series de potencia inyectada y disipada. . . . .	92
E.1.	Series de aceleración en $x$ para $\omega_f = 40[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Original B) Con filtro <i>Butterworth</i> C) Con filtro <i>Butterworth</i> y media móvil promediando sobre 10 datos. . . . .	155
E.2.	Series de aceleración en $x$ para $\omega_f = 116[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) Original B) Con filtro <i>Butterworth</i> C) Con filtro <i>Butterworth</i> y media móvil promediando sobre 6 datos. . . . .	156
E.3.	Series de aceleración en $x$ para $\omega_f = 182[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) Original B) Con filtro <i>Butterworth</i> C) Con filtro <i>Butterworth</i> y media móvil promediando sobre 3 datos. . . . .	157
E.4.	Series de aceleración en $x$ para $\omega_f = 206[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) Original B) Con filtro <i>Butterworth</i> C) Con filtro <i>Butterworth</i> y media móvil promediando sobre 3 datos. . . . .	158
F.1.	Series de aceleración medidas en unidades de $g$ para $\omega_f = 40[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) $a_x$ B) $a_y$ C) $a_z$ . . . . .	159
F.2.	Series de aceleración medidas en unidades de $g$ para $\omega_f = 116[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_1 = 1[mm]$ A) $a_x$ B) $a_y$ C) $a_z$ . . . . .	160
F.3.	Series de aceleración medidas en unidades de $g$ para $\omega_f = 182[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) $a_x$ B) $a_y$ C) $a_z$ . . . . .	161
F.4.	Series de aceleración medidas en unidades de $g$ para $\omega_f = 206[RPM]$ y amplitud de oscilación $a_2 = 2[mm]$ A) $a_x$ B) $a_y$ C) $a_z$ . . . . .	162

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

En los Andes del norte de Chile, Argentina, Perú y Bolivia existen lagunas extremadamente someras con profundidades del orden de centímetros, las que sustentan sensibles ecosistemas cuyo balance hídrico está determinado por el afloramiento y posterior evaporación de aguas subterráneas (de la Fuente & Niño, 2010). Estos ambientes constituyen el hábitat de algunos seres vivos entre los cuales se encuentran al menos tres especies de flamencos (*Phoenicopterus chilensis*, *Phoenicopterus andinus* and *Phoenicopterus jamesi*), cuya población se sustenta en especies bénticas que viven en las lagunas y que conforman la principal fuente de alimento (Zuñiga *et al.* , 1991; Dejoux, 1993; Williams *et al.* , 1995). Experiencias de terreno han demostrado la existencia de fuertes y sostenidos vientos durante las tardes, que junto con la temperatura del lugar, se convierten en las principales fuentes de energía externa que controlan la producción primaria y el transporte horizontal de oxígeno disuelto en las lagunas (Kampf *et al.* , 2005; de la Fuente, 2014a). Además, trabajos de laboratorio han encontrado una relación entre la corriente inducida por el viento con la tasa de consumo de oxígeno en los sedimentos (Ordóñez *et al.* , 2013; de la Fuente *et al.* , 2015).

En este contexto, se torna de interés desarrollar una herramienta numérica para predecir la distribución espacial de la concentración de oxígeno disuelto (OD) en la laguna. En primera instancia, se implementa un modelo hidrodinámico linealizado de una capa, bidimensional y promedio vertical de rápida resolución basado en el esquema de Shimizu & Imberger (2008) y aplicado en particular para la geometría de Kranenburg (1992). La hidrodinámica de este problema ya ha sido estudiada (de la Fuente, 2006; Liang *et al.* , 2006a) y cuenta con solución analítica conocida (Kranenburg, 1992). Para este problema, Liang *et al.* (2006a) analizaron la advección caótica de compuestos, no existiendo a la fecha trabajos que estudien la distribución espacial de OD en el estado permanente. Por ello, para el caso de Kranenburg (1992), se implementa la resolución de la ecuación de transporte de OD considerando términos advectivos, dispersivos (Holly & Usseglio-Polatera, 1984), interacciones verticales con sedimentos (de la Fuente *et al.* , 2015) y reaireación (Ro & Hunt, 2006), despreciando la influencia de las derivadas cruzadas en el término dispersivo por simplicidad (Fischer, 1973). Esta ecuación es

resuelta mediante volúmenes finitos utilizando un esquema de ley de potencia para el cálculo de los coeficientes de transporte (Patankar, 1980; Versteeg & Malalasekera, 1995). Esto permitirá estudiar la relación entre la velocidad local del flujo inducido por viento y el transporte de OD y como este proceso se relaciona con las demás variables hidrodinámicas del problema.

Para validar la hidrodinámica del estudio numérico se considera el diseño y construcción de una instalación experimental que permita realizar mediciones de velocidad mediante la utilización de un velocímetro acústico Doppler (ADV por su sigla en inglés). Con herramientas de modelado tridimensional se contempla la construcción de una maqueta a escala de la geometría de Kranenburg (1992) la cual se ensaya en una mesa que oscila horizontalmente. Este experimento induce patrones de flujo oscilatorios cuya distribución espacial es compleja y someten a prueba la calidad del sistema de ecuaciones.

La herramienta numérica y metodologías de resolución obtenidas del trabajo, son diseñadas de manera tal que permitan una fácil aplicación a un caso real, lo que sienta las bases teóricas y prácticas para la implementación de una herramienta de control y predicción de las condiciones que sustentan los ecosistemas encontrados en las lagunas altiplánicas.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Generales

Implementar un herramienta numérica de rápida resolución, bidimensional, promediada en la vertical y linealizada para las ecuaciones de momentum y continuidad, acoplado con un módulo de volúmenes finitos para la ecuación de transporte de oxígeno disuelto (OD), con el fin de determinar los factores hidrodinámicos que en el equilibrio controlan el transporte de OD en aguas extremadamente someras en un escenario de batimetría variable. Además, para generar la validación experimental del módulo hidrodinámico se proyecta la construcción de una instalación que además permita generar las primeras aplicaciones prácticas de la herramienta numérica.

### 1.2.2. Específicos

- Estudiar la resolución numérica de las ecuaciones de flujo considerando una metodología tipo Crank Nicolson y la técnica del Análisis Modal, lo que en el estado permanente permite entender la generación de corrientes horizontales.
- Validar los resultados obtenidos con soluciones analíticas disponibles en la literatura y con mediciones experimentales a escala de laboratorio, basadas en mediciones de velocidad.
- Generar un esquema de volúmenes finitos promedio vertical para estudiar el transporte de oxígeno disuelto en aguas extremadamente someras considerando flujos con la atmósfera y sedimentos. Analizar el efecto de la batimetría en los flujos verticales.

- Desarrollar una metodología de uso y diseño de la herramienta numérica para su fácil aplicación a casos reales.
- Diseñar y construir una instalación experimental que permita ensayar una maqueta a escala de la geometría en estudio para lograr la validación hidrodinámica del modelo computacional mediante mediciones de velocidad.

## **1.3. Metodología**

### **1.3.1. Análisis teórico de las ecuaciones**

En primera instancia se analizan las ecuaciones de momentum y continuidad las que se adaptan a la física del problema en aguas extremadamente someras con batimetría variable. Dentro de las simplificaciones principales, se considera que la deformación de la superficie libre producto de la acción del viento es mucho menor que la altura de agua en el estado de reposo. Para las ecuaciones de transporte de oxígeno disuelto, se contempla la inclusión de modelos que representen el transporte vertical con la atmósfera y con los sedimentos.

### **1.3.2. Implementación numérica de las ecuaciones**

Mediante el uso de una malla numérica alternada para las ecuaciones hidrodinámicas, se busca alcanzar rápidamente el estado permanente utilizando dos metodologías: la implementación de un esquema numérico impermanente de tipo Crank Nicolson y la resolución mediante el Análisis Modal. Con la misma malla, se plantea un esquema de volúmenes finitos para el transporte horizontal de oxígeno considerando reaireación y flujos con los sedimentos, con el objetivo de analizar la influencia de la distribución de batimetría en estos procesos.

### **1.3.3. Validación analítica y experimental del modelo**

Los resultados numéricos serán validados con la solución analítica de Kranenburg (1992). Por otro lado, mediante la construcción e implementación de la geometría de Kranenburg (1992) a escala de laboratorio utilizando herramientas de modelado 3D, se busca recrear distintas condiciones hidrodinámicas que puedan ser comparadas con mediciones experimentales. Estas se llevan a cabo realizando mediciones de velocidad. Ambas validaciones entregarán un respaldo robusto al módulo hidrodinámico.

### **1.3.4. Análisis de resultados y aplicación**

Una vez validado el modelo se busca concluir sobre la influencia de los parámetros hidrodinámicos que determinan el transporte de oxígeno disuelto en el equilibrio. Mediante un diseño



eficiente de las metodologías de cálculo, se busca que la herramienta obtenida sea de fácil aplicación a casos reales.

## 1.4. Descripción conceptual del problema

Uno de los objetivos principales de esta memoria es implementar un modelo numérico que permita caracterizar el transporte de OD en una laguna extremadamente somera energizada por viento, lo que se define como el *Problema por resolver*. Sin embargo, el planteamiento del *Problema por resolver* es particular y puede ser descompuesto conceptualmente para entenderlo desde un punto de vista general. El diseño de las herramientas y metodologías numéricas generadas en esta memoria está basado en la definición aquí propuesta lo que permitirá extender fácilmente su uso a cualquier problema que cumpla con la conceptualización.

Algunas de las componentes principales del *Problema por resolver* y su interpretación conceptual son:

- *Transporte de oxígeno disuelto*: Conceptualmente corresponde a la dinámica de una sustancia descrita por una variable escalar que se transporta en un fluido ambiente. En el caso particular de esta memoria el fluido es agua y se considera que el OD es una sustancia pasiva, es decir, no altera la densidad del fluido (Fischer *et al.* , 1979).
- *Laguna extremadamente somera*: Una laguna se puede entender como la unión de un contenedor y un fluido. En este caso particular el contenedor es una geometría que cumpla con la característica de ser *extremadamente somera* lo que en la práctica es una propiedad particular y no general del problema.
- *Energizada por viento*: Se entiende que el viento actúa sobre la laguna y desencadena la dinámica del fluido. Sin embargo, visto desde una perspectiva general, el viento corresponde a un forzante externo.

Tomando en consideración los puntos anteriores, el transporte de oxígeno disuelto en una laguna extremadamente somera energizada por viento, puede ser entendido desde un punto de vista general como el *transporte de un escalar pasivo en un cuerpo fluido energizado por un forzante externo*. Como queda a la vista, esta forma de describir el problema permite que el diseño de la herramienta numérica sea generalizado.

Esta forma de reinterpretar el problema predomina en la implementación del modelo. Mayores detalles y conceptos se introducen en el capítulo 3.

## 1.5. Contenidos del informe

- I. **Capítulo 1 “Introducción”** : En este capítulo se incluye la motivación, objetivos y principales metodologías de la memoria.
- II. **Capítulo 2 “Marco Teórico”** : Se incluyen las ecuaciones y consideraciones teóricas

con las cuales se desarrolla la herramienta numérica y análisis teóricos.

- III. **Capítulo 3 “Implementación Numérica”** : Se presenta una descripción general de la estructura conceptual que caracteriza la herramienta numérica. Además se incluyen algunas de las reglas y conceptos que gobiernan la programación.
- IV. **Capítulo 4 “Desarrollo Teórico”** : Este capítulo incluye extensiones de la teoría presentada en el marco teórico las que permiten entender con mayor profundidad el problema en estudio.
- V. **Capítulo 5 “Instalación Experimental”** : Se especifican los principales aspectos de la construcción, utilización e instrumentación de la instalación experimental. Además se hace mención a metodologías de procesamiento de datos.
- VI. **Capítulo 6 “Resultados”**: Este capítulo presenta los resultados numéricos y experimentales del trabajo.
- VII. **Capítulo 7 “Conclusiones y Comentarios”**: Se presentan las principales conclusiones de la memoria. Además se proponen futuros estudios y preguntas que surgen a partir del trabajo.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

Este capítulo presenta las bases teóricas que permiten el desarrollo del trabajo. Como se mencionó en la sección anterior, se considera que el oxígeno disuelto (OD) es una sustancia dinámicamente pasiva de manera que no afecta el flujo del fluido ambiente. Este escenario permite desacoplar el transporte escalar de la hidrodinámica la cual pasa a ser información de entrada para el transporte escalar (Fischer *et al.*, 1979).

### 2.1. Hidrodinámica

Se presentan las ecuaciones y metodologías de cálculo utilizadas para resolver el problema hidrodinámico, es decir, el flujo del fluido ambiente. Para entrar en el detalle de la deducción de las ecuaciones referirse a el anexo A.

#### 2.1.1. Ecuaciones

En esta memoria, la dinámica lineal del fluido ambiente en una capa es descrita por el sistema de ecuaciones promedio vertical introducidas en Shimizu & Imberger (2008)

$$\mathbf{M}\partial_t\boldsymbol{\xi} = i(\mathbf{K} + \mathbf{C})\boldsymbol{\xi} + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

en donde,  $\boldsymbol{\xi} = (\eta, \mathbf{v})^T$  es el vector de estado del sistema siendo  $\eta$  la deformación de la superficie libre con respecto al estado de reposo y  $\mathbf{v} = (U, V)^T$  el campo de velocidad bidimensional. El superíndice  $T$  indica la matriz transpuesta y  $\partial_t$  representa la derivada temporal.  $\mathbf{M}$  es la matriz de peso definida como

$$\mathbf{M} = \rho \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & h_o(\vec{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

siendo  $\rho$  la densidad del fluido,  $g$  la aceleración de gravedad y  $h_o(\vec{x})$  la función que caracteriza la distribución espacial de la profundidad en reposo.  $\mathbf{K}$  es el operador lineal no disipativo de aguas someras definido como

$$\mathbf{K} = i\rho \begin{bmatrix} 0 & g\nabla \cdot h_o(\vec{x}) \\ h_o(\vec{x})\nabla g & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

siendo  $i$  la unidad imaginaria y  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$  el operador gradiente en dos dimensiones. En esta matriz, el término  $g\nabla \cdot h_o(\vec{x})$  se aplica sobre la velocidad como  $g\nabla \cdot (h_o(\vec{x})\mathbf{v})$ , mientras que el término  $h_o(\vec{x})\nabla g$  se aplica sobre la deformación de la superficie libre como  $h_o(\vec{x})\nabla(g\eta)$ .  $\mathbf{C}$  es la matriz de disipación lineal definida como

$$\mathbf{C} = i\rho \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c}_f \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

siendo  $\tilde{c}_f$  un coeficiente de fricción lineal constante cuya escala es de velocidad.  $\mathbf{f}$  es el vector de forzantes externos considerados en la formulación del problema

$$\mathbf{f} = (0, \boldsymbol{\tau}_s - \rho h_o(\vec{x})\mathbf{a})^T, \quad (2.5)$$

siendo  $\boldsymbol{\tau}_s = (\tau_{sx}, \tau_{sy})^T$  el esfuerzo de corte sobre la superficie del fluido y  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)^T$  el vector de aceleraciones del sistema de referencia.

Cabe mencionar que en las ecuaciones (2.1) la fila superior representa la ecuación de continuidad promedio vertical multiplicada por el peso específico del fluido. Se considera que no existen fuentes ni sumideros de masa y que se cumple la condición de borde cinemática en la superficie libre y de no penetración en el fondo. Por otro lado, la fila inferior en las ecuaciones (2.1) corresponde a la ecuación de momentum bidimensional promedio vertical con las aproximaciones de Boussinesq para la densidad del fluido y de capa límite. Por último, el operador  $\mathbf{K}$  es hermítico mientras que  $\mathbf{C}$  es antihermítico (Platzman, 1984; Shimizu *et al.*, 2007), información que se utiliza en una de las deducciones del capítulo 4.

## 2.1.2. Metodologías de resolución

### Análisis Modal

En esta sección se presentan los aspectos prácticos de la aplicación de la teoría. Para ver el detalle de la deducción y aplicación de la teoría referirse al anexo B o al trabajo realizado en la memoria de Rozas (2011). Algunos autores ya han implementado esta técnica en la resolución de las ecuaciones de flujo para corrientes oceánicas (Proudman, 1928; Platzman, 1984) y para el caso de lagos multicapa con y sin disipación de energía (Shimizu *et al.*, 2007; Shimizu & Imberger, 2008; Rozas *et al.*, 2014). La formulación utilizada en este trabajo

considera disipación de energía por fricción y como se mencionó previamente existe sólo una capa de fluido.

Esta técnica considera que la solución  $\boldsymbol{\xi}(\vec{x}, t)$  del sistema de ecuaciones (2.1) puede ser expresada como una combinación lineal del tipo

$$\boldsymbol{\xi}(\vec{x}, t) = \sum_r \tilde{a}^{R(r)}(t) \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)}(\vec{x}), \quad (2.6)$$

en donde,  $r$  es el índice que varía sobre la cantidad de estructuras modales  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)}(\vec{x})$  que posea el sistema de ecuaciones y  $\tilde{a}^{R(r)}(t)$  es la amplitud de oscilación compleja asociada a cada estructura modal. El superíndice  $R(r)$  indica que en la combinación lineal se están considerando las estructuras y amplitudes calculadas a partir del problema de valores y vectores propios *por la derecha* (Right en inglés)

$$(\omega + i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) = (\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}), \quad (2.7)$$

el cual se deduce de imponer que la solución del sistema de ecuaciones (2.1) es del tipo  $\boldsymbol{\xi}(\vec{x}, t) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \exp(i[\omega + i\gamma]t)$  y de desprejar el efecto del forzante externo para encontrar las estructuras libres o naturales del sistema.

En la ecuación (2.7)  $(\omega + i\gamma)$  corresponde a los valores propios, siendo  $\omega$  un valor caracteriza la frecuencia de oscilación de la estructura, si es que esta efectivamente oscila dado que pueden existir estructuras no oscilatorias (Platzman, 1984).  $\gamma$  es una tasa de disipación lineal de energía que caracteriza como decae en el tiempo la energía de una estructura modal.

Para aclarar conceptos, cuando se hace mención a que el problema de valores y vectores propios es *por la derecha* se hace referencia a la ecuación (2.7). Siguiendo la notación de Shimizu & Imberger (2008) existe además el problema de valores y vectores propios *por la izquierda* el cual se expresa como

$$(\omega + i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^H(\vec{x}) = (\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}), \quad (2.8)$$

donde el superíndice  $H$  indica transpuesto conjugado. Las estructuras modales que se obtienen de esta última ecuación serán expresadas como  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}(\vec{x})$ , en donde el superíndice  $L(r)$  indica que se obtuvo la estructura a partir del problema *por la izquierda* (Left en inglés).

Ambos problemas de valores y vectores propios son en esencia el mismo problema pero expresado de formas distintas lo que permite caracterizar la teoría del análisis modal con la rigurosidad matemática correspondiente y obtener algunas relaciones de uso práctico. En esta sección no se ahonda mucho más en el significado de cada problema, pero de todas formas, en el anexo B se detallan algunas consecuencias de hacer esta consideración.

Desde el punto de vista del problema abordado en esta memoria, los vectores propios tienen una componente que describe la deformación de la superficie libre y otra que describe el campo

de velocidad. Por ende, caracterizan las estructuras básicas de flujo originadas por el sistema de ecuaciones (2.1). Obviamente, cualquier estructura modal obtenida de la resolución del problema de valores y vectores propios, satisface las ecuaciones de momentum y continuidad, siendo por lo tanto una solución válida de las ecuaciones bajo el efecto del forzante adecuado.

Por lo tanto, en la ecuación (2.6) debe entenderse que las estructuras modales describen la distribución espacial de deformación de superficie libre y del campo de velocidad. Ahora, cuanto influye realmente una determinada estructura en la solución de un problema, o cuanta energía aporta, está determinado por la amplitud que multiplica a la estructura. Esta amplitud se calcula para cada estructura y está influenciada por la interacción entre el forzante externo y la correspondiente estructura en análisis. La ecuación que describe como varía la amplitud en el tiempo es

$$\tilde{e}^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t) = (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) + \tilde{f}^{R(r)}(t) \quad (2.9)$$

La deducción detallada y el significado de cada término puede ser revisado en el anexo B. En esta sección el análisis de esta ecuación se limita a indicar que el término  $\tilde{f}^{R(r)}(t)$  caracteriza el efecto del forzante externo sobre el modo  $r$  y que en el caso en que el valor propio de una estructura sea distinto de cero y el forzante externo sea constante y uniforme, entonces es posible encontrar la amplitud modal en el régimen permanente

$$\tilde{a}^{R(r)} = -\frac{\tilde{f}^{R(r)}}{(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)}} \quad (2.10)$$

## Crank Nicolson

A diferencia del Análisis Modal, la metodología de Crank Nicolson discretiza directamente la variación temporal de las ecuaciones a resolver lo que se expresa en la práctica como

$$\mathbf{M} \frac{\boldsymbol{\xi}^{n+1} - \boldsymbol{\xi}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [F^{n+1} + F^n], \quad (2.11)$$

en donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo y de (2.1) se obtiene

$$F^n = i(\mathbf{K} + \mathbf{C}) \boldsymbol{\xi}^n + \mathbf{f}^n \quad (2.12)$$

Los superíndices  $n$  o  $n + 1$  indican el paso temporal en el que debe ser evaluado un término. Para aplicar esta metodología basta despejar  $\boldsymbol{\xi}^{n+1}$  en la ecuación (2.11).

### 2.1.3. Energía

Siguiendo a Shimizu & Imberger (2008), la energía de un estado del sistema puede ser calculada como

$$E = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \rangle \quad (2.13)$$

En la ecuación anterior, el corchete triangular representa el producto interior el cual para dos vectores de estado diferentes  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\boldsymbol{\xi}'$  es definido como

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}' \rangle = \int_A \boldsymbol{\xi}^H \cdot \boldsymbol{\xi}' dA, \quad (2.14)$$

siendo  $A$  el área superficial sobre la cual está definido el problema. El producto interior en este caso, es el producto punto utilizado usualmente en álgebra lineal pero está integrado sobre el área superficial dado que se está trabajando sobre un medio continuo.

A modo de ejercicio, si se considera un vector de estado del sistema  $\boldsymbol{\xi} = (\eta, \mathbf{v})^T$  y se reemplaza en la ecuación (2.13), se obtiene la energía mecánica del sistema

$$E = \frac{1}{2} \int_A (\rho g \eta^2 + \rho h_o(\bar{x}) \mathbf{v}^2) dA, \quad (2.15)$$

en donde el término asociado a la variable  $\eta$  representa la energía potencial de deformación de la superficie libre y el término asociado al campo de velocidad cuantifica la energía cinética del sistema.

### 2.1.4. Análisis dimensional

Las ecuaciones hidrodinámicas pueden ser expresadas adimensionalmente para identificar algunos parámetros relevantes que caractericen el problema. Para ver el detalle de la adimensionalización y la justificación de los parámetros escogidos referirse al anexo C.

Se introducen las variables adimensionales

$$\eta_* = \eta/\bar{h}_o, \quad t_* = t/T, \quad U_* = U/\sqrt{g\bar{h}_o}, \quad V_* = V/\sqrt{g\bar{h}_o},$$

$$h_{o*} = h_o/\bar{h}_o, \quad x_* = x/L, \quad y_* = y/L, \quad \tilde{c}_{f*} = \tilde{c}_f/\sqrt{g\bar{h}_o}, \quad \mathbf{a}_* = \mathbf{a}/g$$

siendo  $T = 2L/\sqrt{g\bar{h}_o}$  el período característico de la onda fundamental del sistema y  $L$  el largo característico del dominio.  $\bar{h}_o$  corresponde a la profundidad promedio espacial. Dado que se considera la onda fundamental, la escala de velocidad característica que aparece en el problema es la celeridad de esta onda la que se expresa como  $c = \sqrt{g\bar{h}_o}$ . Utilizando estas variables, el sistema de ecuaciones (2.1) expresado adimensionalmente es

$$\mathbf{M}_* \partial_{t_*} \boldsymbol{\xi}_* = i(\mathbf{K}_* + \mathbf{C}_*) \boldsymbol{\xi}_* + \mathbf{f}_*, \quad (2.16)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}_* = (\eta_*, \mathbf{v}_*)^T$  es el vector de estado adimensional con  $\mathbf{v}_* = (U_*, V_*)^T$ . Además

$$\mathbf{M}_* = \frac{1}{2} \cdot \text{diag}(1, h_{o*}) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{K}_* = i \begin{bmatrix} 0 & \nabla_* \cdot h_{o*} \\ h_{o*} \nabla_* & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{C}_* = i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \psi \tilde{c}_{f*} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{f}_* = \left[ 0, \frac{L}{g\bar{h}_o^2} \frac{\boldsymbol{\tau}_s}{\rho} - \psi h_{o*}(\vec{x}_*) \mathbf{a}_* \right]^T \quad (2.20)$$

En la formulación anterior, se ha introducido el parámetro  $\psi = L/\bar{h}_o$  el cual se entiende como una relación de aspecto. En el caso particular que el esfuerzo de corte superficial  $\boldsymbol{\tau}_s$  sea el viento y no existan aceleraciones externas del sistema de referencia, entonces el forzante externo adimensional puede ser expresado como

$$\mathbf{f}_* = \left[ 0, \frac{1}{\mathbf{W}} \right]^T, \quad (2.21)$$

siendo  $\mathbf{W}$  el número de Wedderburn. (Imberger & Hamblin, 1982; Shintani *et al.*, 2010) De este análisis entonces se reconocen como parámetros importantes este número y la relación de aspecto  $\psi$ , los cuales serán particularmente analizados durante el trabajo.

## 2.2. Transporte escalar

Esta sección muestra las ecuaciones necesarias para resolver el transporte de un escalar pasivo en un medio fluido. Para ver la deducción completa de los términos involucrados en esta sección, ver el anexo D.



### 2.2.1. Ecuación

La ecuación promedio vertical que caracteriza la dinámica de un escalar pasivo en un medio fluido, considerando el supuesto de mezcla completa en la dirección promediada es

$$\frac{\partial (h_o C)}{\partial t} + \nabla \cdot (h_o \mathbf{v} C) = \nabla \cdot (h_o \mathbf{k}_{ij} \nabla C) + F_{atm} + F_{sed}, \quad (2.22)$$

en donde  $C$  es la concentración del escalar expresada como masa por unidad de volumen y

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

es el tensor bidimensional de dispersión (Holly, 1975; Sayre, 1975; Fischer *et al.*, 1979). Según Holly & Usseglio-Polatera (1984) los términos del tensor se calculan como

$$k_{xx} = e_L u_* h(\vec{x}, t) \cos^2 \theta + e_T u_* h(\vec{x}, t) \sin^2 \theta \quad (2.24)$$

$$k_{yy} = e_L u_* h(\vec{x}, t) \sin^2 \theta + e_T u_* h(\vec{x}, t) \cos^2 \theta, \quad (2.25)$$

$$k_{xy} = k_{yx} = u_* h(\vec{x}, t) (e_L - e_T) \sin \theta \cos \theta, \quad (2.26)$$

siendo  $u_*$  la velocidad de corte local del flujo,  $e_L = 5,93$  y  $e_T = 0,23$  son los coeficientes adimensionales de dispersión longitudinal y transversal respectivamente (Elder, 1959). Además  $\theta$  es el ángulo que se genera entre un sistema de referencia local que caracteriza la dirección principal de las líneas de corriente, con respecto al sistema de referencia fijo.

Según Sayre (1975) los procesos de difusión turbulenta y molecular son independientes entre sí y en la formulación de Holly & Usseglio-Polatera (1984) para el cálculo de los coeficientes de dispersión se desprecia el efecto de la difusión molecular. Además, en el caso que el eje local que sigue a las líneas de corriente está alineado con el eje de referencia principal del sistema, entonces el tensor de dispersión puede ser considerado isotrópico (Fischer, 1973; Holly & Usseglio-Polatera, 1984). Con estas observaciones finalmente el tensor de dispersión a considerar en este modelo es

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

siendo

$$k_{xx} = e_L u_* h(\vec{x}, t) \cos^2 \theta + e_T u_* h(\vec{x}, t) \sin^2 \theta + D \quad (2.28)$$

$$k_{yy} = e_L u_* h(\vec{x}, t) \sin^2 \theta + e_T u_* h(\vec{x}, t) \cos^2 \theta + D, \quad (2.29)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión molecular el cual depende del tipo de escalar que se esté transportando en el sistema. Cabe mencionar que esta forma de calcular los coeficientes permite resolver satisfactoriamente los casos en que la dispersión inducida por el flujo es pequeña con respecto a la difusión molecular. En el caso particular del OD se tiene que  $D = 1,82 \times 10^{-9} [m^2 s^{-1}]$  (Steinberger & Hondzo, 1999)

En la ecuación (2.22)  $F_{atm}$  y  $F_{sed}$  son términos que caracterizan los flujos difusivos de masa entre el fluido y la atmósfera, y entre el fluido y los sedimentos, respectivamente. En el caso particular del oxígeno disuelto, el intercambio con la atmósfera se calcula según

$$F_{atm} = k_L (C_s - C), \quad (2.30)$$

donde  $k_L$  es la velocidad de transferencia de OD entre el agua y el aire y  $C_s$  es la concentración de saturación de OD, la que para efectos de este trabajo es  $C_s = 8,82 \times 10^{-3} [kgm^{-3}]$ . El término  $k_L$  se calcula como (Ro & Hunt, 2006; Ro *et al.*, 2007)

$$k_L = 0,167 u_*^{1,81}, \quad (2.31)$$

siendo  $u_*$  la velocidad de corte del viento desde el punto de vista del agua. En la expresión anterior tanto  $u_*$  como  $k_L$  están en unidades de  $[ms^{-1}]$ . Este coeficiente está basado en los datos de terreno de las investigaciones recopiladas por (Ro & Hunt, 2006).

El flujo de OD en la interfaz agua sedimentos considerando los procesos de intercambio a ambos lados de la interfaz se calcula como (Nakamura & Stefan, 1994; Ordóñez, 2014; Ordóñez *et al.*, 2015)

$$F_{sed} = \frac{S}{2k_t} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4k_t^2 C}{S}} \right), \quad (2.32)$$

donde  $S$  es un parámetro que caracteriza el consumo bioquímico de OD y  $k_t$  es la velocidad de transferencia vertical. Para efectos de este trabajo se considera que  $S$  es constante y se calcula como

$$S = 2\phi^2 r^* D, \quad (2.33)$$

siendo  $\phi = 0,9$  la porosidad del sedimento en la vecindad de la interfaz (Bryant *et al.*, 2010; Ordóñez *et al.*, 2013),  $r^* = 1 [kgm^{-3}d^{-1}]$  la tasa de consumo de OD por unidad de volumen en un día y  $D$  el coeficiente de difusión de OD. El valor utilizado de  $r^*$  es constante y está dentro del rango obtenido por de la Fuente (2014b) para una laguna extremadamente somera.

Para efectos de este trabajo, el término  $k_t$  depende de las condiciones locales del flujo y se calcula como (de la Fuente *et al.* , 2015)

$$\frac{k_t}{u_* Sc^{-2/3}} = \frac{\beta}{Re\sqrt{f}} \exp\left(\frac{\kappa}{\sqrt{f}}\right), \quad (2.34)$$

siendo  $u_*$  la velocidad de corte del viento desde el punto de vista del agua,  $Sc = \nu/D$  es el número de Schmidt con  $\nu = 1,15 \times 10^{-6} [m^2 s^{-1}]$  la viscosidad cinemática del agua y  $Re = |\mathbf{v}|h\nu^{-1}$  el número de Reynolds local del flujo. Este parámetro es el que permite que las condiciones que describen el flujo vertical de OD varíen en función de la corriente horizontal de fluido.  $\kappa = 0,41$  es la constante de von Kármán,  $f = 0,01$  es un coeficiente de fricción que permite calcular la velocidad media del flujo en función de la velocidad de corte del viento y el término  $\beta = 1/21$  es un parámetro que caracteriza el cociente entre el ancho de la subcapa difusiva y la altura a la cual el perfil logarítmico de velocidad es nulo. Estos últimos parámetros son obtenidos de los rangos propuestos en de la Fuente *et al.* (2015) y para efectos de este trabajo se consideran constantes.

Es importante notar que para  $C_s > C > 0$  se tiene que  $F_{sed} < 0$  y  $F_{atm} > 0$ .

## 2.2.2. Volúmenes Finitos

Para resolver la ecuación de transporte escalar considerando los flujos verticales presentados en la sección anterior se utiliza la metodología de volúmenes finitos. Esta consiste básicamente en aplicar el principio de conservación de masa a la ecuación de transporte escalar en conjunto con la ecuación de continuidad para el fluido, e integrando en el tiempo de manera implícita. La deducción completa de la metodología para las ecuaciones de esta memoria se encuentra en el anexo D y está basada en los libros de Patankar (1980) y Versteeg & Malalasekera (1995).

Sea  $C_P$  la concentración del escalar en un punto  $P$  de la malla de discretización. Se considera que este punto está rodeado de puntos similares hacia el este, oeste, norte y sur de su ubicación. La concentración en los puntos que rodean a  $P$  se expresa como  $C_E$ ,  $C_W$ ,  $C_N$  y  $C_S$  respectivamente para cada posición cardinal. En este caso, el subíndice indica la posición con respecto a  $P$  pero en función de su nombre cardinal inglés (East, West, North, South).

Con esta consideración, la concentración  $C_P$  se calcula a partir de la ecuación

$$a_P C_P = a_E C_E + a_W C_W + a_N C_N + a_S C_S + h_{oP} C_P^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_0 \Delta x \Delta y \quad (2.35)$$

En esta,  $\Delta x$  y  $\Delta y$  corresponden a los pasos de discretización espacial, mientras que  $\Delta t$  es el paso de discretización temporal.  $C_P^0$  es la concentración escalar en el punto  $P$  pero considerando el paso de tiempo previo al que se está resolviendo.  $h_{oP}$  es la profundidad local de la batimetría en el punto  $P$ . Los términos  $a_i$  se conocen como coeficientes de transporte (Patankar, 1980) y se calculan con las expresiones

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (h_{oP} - \eta_P + \eta_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - F_1 \Delta x \Delta y \quad (2.36)$$

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \text{máx}(-F_e, 0) \quad (2.37)$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \text{máx}(F_w, 0) \quad (2.38)$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \text{máx}(-F_n, 0) \quad (2.39)$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \text{máx}(F_s, 0), \quad (2.40)$$

siendo la función  $A(|Pe|)$  la que caracteriza el esquema que se utiliza para la estimación de los coeficientes en función del número de Péclet de la discretización. En este caso, se utiliza el esquema ley de potencia el cual representa la opción más eficiente en términos de rapidez de cómputo y precisión en la estimación de los coeficientes (Patankar, 1980; Versteeg & Malalasekera, 1995). En este escenario la función  $A(|Pe|)$  se expresa como

$$A(|Pe|) = \text{máx} [0, (1 - 0,1 |Pe|)^5] \quad (2.41)$$

El número de Péclet de la discretización se evalúa en las caras del volumen de control que rodea al punto  $P$ . En este caso, se considera que las caras también tienen una denominación cardinal y que por lo tanto, la cara este ( $e$ ) es la cara del volumen que se encuentra entre el nodo  $P$  y su nodo  $E$  correspondiente. El número de Péclet de la cara este se define como  $Pe_e = F_e/D_e$ , siendo  $F_e = (h_o U)_e \Delta y$  la intensidad del flujo advectivo y  $D_e = (h_o k_{xx})_e \Delta y / \Delta x$  la intensidad del flujo difusivo o conductancia difusiva (Patankar, 1980).

En la expresión para  $a_P$  aparecen los términos  $\eta_P$  y  $\eta_P^0$  los cuales representan la deformación de la superficie libre en el tiempo que se está calculando la concentración y en el paso anterior, respectivamente.

Por último, los términos  $F_0$  y  $F_1$  son expresiones que caracterizan los flujos verticales o términos fuente en la formulación de la ecuación de transporte escalar. Para este caso, en la ecuación (2.22) los flujos verticales pueden ser expresados como

$$F(C) = F_{sed} + F_{atm}, \quad (2.42)$$

expresión que debe ser linealizada para la aplicación de la metodología. La forma de linealizar la función  $F(C)$  es mediante una expansión de Taylor en torno a un valor  $C^*$  tal que

$$F(C) = F(C^*) + \left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{C^*} (C - C^*), \quad (2.43)$$

en donde se tiene el término

$$\left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{C^*} = \frac{-k_t}{\sqrt{1 + \frac{4k_t^2 C^*}{S}}} - k_L \quad (2.44)$$

La metodología de volúmenes finitos involucra una iteración sobre los valores de la concentración de manera que se cumpla el balance de masa.  $C^*$  puede ser considerado como el valor de la concentración en una iteración previa. Reordenando la ecuación (2.43) se obtiene que

$$F(C) = F_0 + F_1 C, \quad (2.45)$$

siendo

$$F_0 = F(C^*) - \left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{C^*} C^* \quad (2.46)$$

$$F_1 = \left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{C^*} \quad (2.47)$$

Notar que  $F_1 < 0$  lo que cumple con el requerimiento en la linealización del término fuente. (Patankar, 1980; Versteeg & Malalasekera, 1995)

### 2.3. Geometría de Kranenburg (1992)

A modo de caso de estudio, las metodologías anteriores se aplican a la geometría propuesta por Kranenburg (1992). Esta consiste en un borde circular con una distribución espacial de batimetría descrita por la expresión

$$\frac{h_o(r)}{H} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{r}{R}}, \quad (2.48)$$

siendo  $r$  la distancia medida desde el punto central de la circunferencia que delimita el borde del lago.  $R$  es el radio de la circunferencia y  $H$  es una profundidad característica de la batimetría. Esta geometría es de interés pues Kranenburg (1992) encontró una solución analítica para el campo de flujo excitado por viento y además ya ha sido estudiada numéricamente utilizando metodologías de resolución no lineales para las ecuaciones de momentum

(de la Fuente, 2006; Liang *et al.* , 2006a). El perfil de velocidad adimensional calculado por Kranenburg (1992) en una sección central perpendicular a la dirección del viento es

$$\frac{U_o(r)\kappa}{u_* \ln Z} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{r}{R}}, \quad (2.49)$$

siendo  $U_o(r)$  la magnitud de la velocidad a lo largo del perfil,  $\kappa = 0,41$  es la constante de von Kármán,  $u_*$  es la velocidad de corte del viento vista desde el agua y  $Z = H/z_o$  es una constante siendo  $z_o$  la rugosidad del fondo.

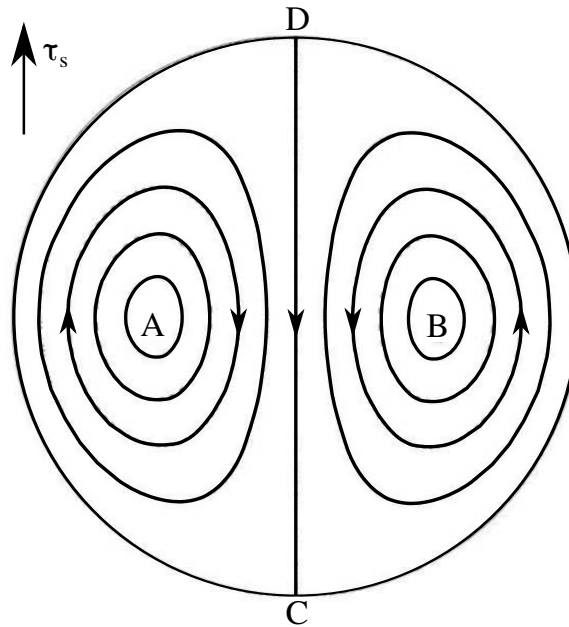


Figura 2.1: Patrón de flujo analítico obtenido por Kranenburg (1992). Los puntos A y B son elípticos y el flujo orbita en torno a ellos con un período mayor a cero. Los puntos C y D son hiperbólicos y corresponden a puntos de estancamiento.  $\tau_s$  es el esfuerzo de corte del viento uniforme sobre la superficie.

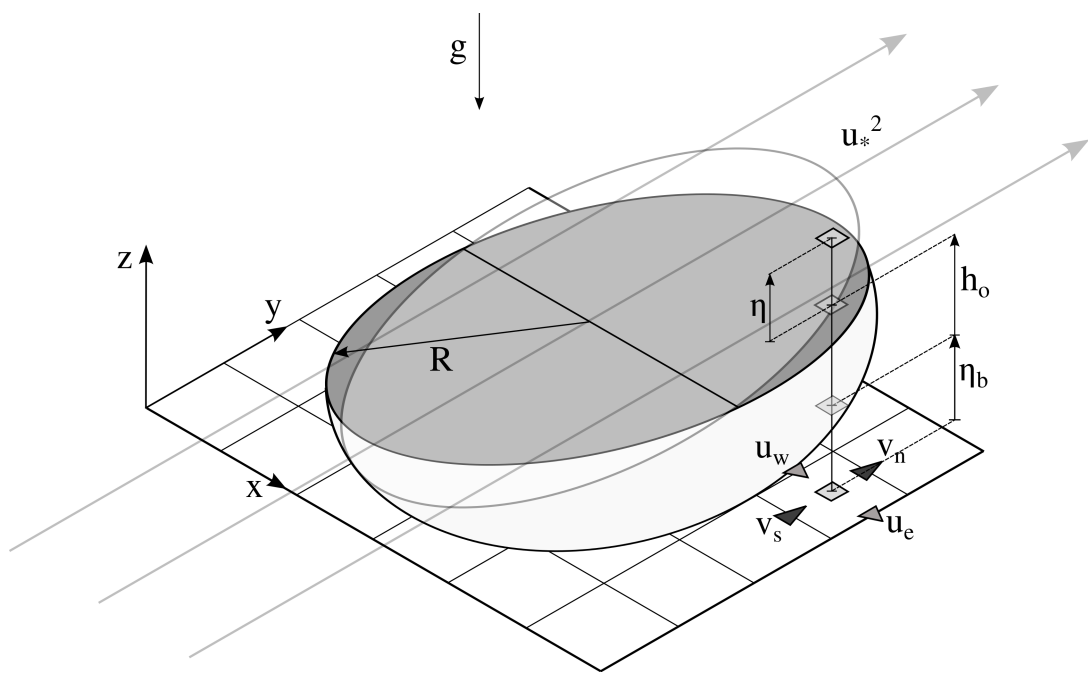


Figura 2.2: Esquema conceptual del problema estudiado por Kranenburg (1992). Se esquematizan las variables del problema y se incluye una demostración de la malla numérica.

# Capítulo 3

## Implementación Numérica

### 3.1. Aspectos generales

La implementación numérica de esta memoria está basada en el trabajo realizado por Rozas (2011) por lo que para entrar en el detalle de la construcción de la malla y matrices que gobiernan el problema se recomienda revisar ese documento.

#### 3.1.1. Malla Numérica

Numéricamente, la malla corresponde a una serie de puntos distribuidos en un dominio definido, los que poseen coordenadas que describen su posición. En un dominio bidimensional se tienen las coordenadas  $(x, y)$ . La distancia entre puntos sucesivos usualmente se denota con la letra  $\Delta$  por ende un punto ubicado al este de  $(x, y)$  sería  $(x + \Delta x, y)$  y un punto ubicado al norte de  $(x, y)$  sería  $(x, y + \Delta y)$ . El refinamiento de la malla, es decir, la cantidad de puntos utilizados para representar el espacio, varía en función de esta distancia  $\Delta$ .

Los problemas hidrodinámicos de esta memoria deben resolver dos variables:  $\eta$  que es la deformación de la superficie libre y  $\mathbf{v}$  que corresponde al campo de velocidad. En una malla clásica esta clase de problemas se resuelve almacenando ambas variables en el mismo punto, es decir, comparten el volumen de control. Esto puede ocasionar que las ecuaciones de momentum no sean correctamente representadas, en particular por influencias en el término que cuantifica el gradiente de presión. (Versteeg & Malalasekera, 1995)

Para evitar este problema, el modelo utiliza una malla alternada o *staggered* por su nombre en inglés. Esta distribución de puntos considera que cada variable tiene su punto en la malla, es decir, existen nodos para resolver  $\eta$  y, en el caso bidimensional, puntos para resolver ambas componentes de la velocidad. La organización de los puntos genera que los volúmenes de control para resolver cada variable sean distintos lo que trae como consecuencia que la representación numérica de las ecuaciones sea correcta. Para mayores detalles sobre la malla alternada ver el ejemplo en la sección dedicada a la *staggered grid* en Versteeg &



Malalasekera (1995) y la descripción en Rozas (2011) en donde se entrega una metodología para la construcción de esta. En la figura (6.1) del capítulo 6 se presenta un esquema de ejemplo de la malla alternada.

### 3.1.2. Lenguaje de programación

Los códigos están escritos en MATLAB <sup>®</sup>. Se ha utilizado este lenguaje como una primera aproximación a la implementación de las rutinas, pero considerando necesario que el lenguaje de programación evolucione a un código abierto.

Dentro de las opciones disponibles se encuentra Python que es uno de los lenguajes con mayor documentación en línea. Este ya ha sido exitosamente utilizado en la implementación de simuladores de flujo y dado que es abierto, cualquier persona puede descargar el entorno Python y programar en él. Por otro lado MATLAB <sup>®</sup> requiere el pago de licencias que entorpecen el libre flujo de información y conocimiento.

### 3.1.3. Paradigma de programación

En la descripción conceptual presentada en el capítulo 1 la interpretación del tema a desarrollar en la memoria permite entender el problema desde un punto de vista general lo que en la práctica guía la programación numérica del modelo.

De esta forma, la implementación numérica no es exclusivamente para resolver un caso, sino que cualquier problema que pueda ser descompuesto en función de la estructura conceptual propuesta puede ser resuelto utilizando las rutinas.

En este escenario, se puede aplicar fácilmente el paradigma de Programación Orientada a Objetos (OOP por su sigla en inglés). Esta idea viene de considerar que el modelo computacional es una representación de la realidad y que la realidad puede ser subdivida en objetos que interactúan de cierta forma.

Los objetos poseen propiedades y funciones que les entregan las características necesarias para su funcionamiento y pueden interactuar con otros objetos siguiendo alguna regla definida por el programador. La única función que es obligatoria para todos los objetos es el constructor, el cual básicamente tiene por tarea inicializar o construir un objeto.

A modo de ejemplo para entender la OOP se considera un Teléfono. Algunas de las propiedades que un objeto de clase Teléfono posee son su Marca y su Color. Estas características lo diferencian de otros Teléfonos y entregan algo de información sobre el objeto. La principal función o método de un Teléfono es Realizar Llamadas y es una función que es común para todos los aparatos de esta clase. Sin embargo, es posible considerar que dentro de los tipos de Teléfonos existen los Teléfonos Fijos y los Teléfonos Celulares. Ambos son en esencia Teléfonos pero poseen un espectro de funciones distintas. Por ejemplo, los Teléfonos Celulares pueden Enviar Mensajes de Texto mientras que un Teléfono Fijo no.

En el ejemplo anterior, la clase Teléfono se puede considerar como una superclase o clase padre. Es decir, es una clase que da origen a dos subclases: Teléfono Fijo y Teléfono Celular. Ambas son Teléfonos y heredan las propiedades y métodos de su clase padre. Pero, además se pueden agregar otras funciones. Como por ejemplo, la clase Teléfono Celular que hereda desde Teléfono, puede incorporar un nuevo método llamado Enviar Mensajes de Texto.

De esta forma, si se invoca al constructor de la clase Teléfono Celular, entonces se tiene un objeto al cual se le puede especificar su Marca y su Color (dado que hereda desde Teléfono), puede Realizar Llamadas (dado que hereda desde Teléfono) y además permite Enviar Mensajes de Texto (función que es exclusiva de Teléfono Celular).

Para ahondar más en el tema de la OOP se recomienda leer el libro de Rajlich (2012) el cual entrega una explicación bastante detallada de las ventajas y desventajas de este paradigma de programación, analizando además el proceso de desarrollo de software.

### 3.1.4. Codificación

De los trabajos de Rajlich (2012) y Wilson *et al.* (2014) se extraen normas de programación que son consideradas como *buenas prácticas*. Estas consideraciones se introducen en el código y permiten ordenar la lectura y programación.

Algunas de las reglas básicas de programación son:

- Los nombres de las clases comienzan con mayúsculas. El constructor de clase tiene el mismo nombre de la clase. Ej: La clase Fluido tiene como constructor a Fluido().
- Las funciones y variables numéricas comienzan con minúsculas.
- Los nombres de las variables deben representar su contenido o función. Es decir, evitar nombres monosílabos sin significado.
- En el caso de que el nombre de una variable incluya más de una palabra, las palabras posteriores a la primera, comienzan con mayúscula. Ej: navierStokes.
- Los comentarios deben entregar información sobre el funcionamiento general del programa. No de la implementación.
- Escribir el programa para humanos, no computadores.
- Optimizar el programa una vez que funcione.

Los códigos se encuentran disponibles en <https://github.com/rodrperez/Shallow2D>. Si bien se introducen los conceptos anteriores obviamente la programación no es perfecta y siempre puede mejorar. Github es un sitio que fomenta el intercambio de códigos y trabajo colaborativo en el desarrollo de software. Hoy en día toda clase de programas se desarrollan en él y puede resultar una herramienta de alta utilidad. El sitio además entrega las licencias necesarias para que los códigos estén legalmente protegidos.

## 3.2. Modelo conceptual de programación

En el capítulo 1 se definió que el problema por resolver es el *transporte de un escalador pasivo en un cuerpo fluido energizado por un forzante externo*. En esta sección se completa la definición para llevarla a términos numéricos.

En el *problema por resolver* existen dos etapas de cálculo principales: primero es necesario resolver la *Hidrodinámica* y posteriormente el *Transporte* escalador. Ambos casos se resuelven con el correspondiente *Motor* de cálculo, el cual luego de procesar la información retorna los *Resultados*. En el caso de la hidrodinámica los motores de cálculo disponibles son el *Crank Nicolson* y el *Análisis Modal*, mientras que para el transporte escalador el motor de cálculo es el de *Volúmenes Finitos*.

En la implementación del problema hidrodinámico es necesario definir el conjunto de partes que dan forma al problema. Es decir, es necesario definir el *Fluido* y la *Geometría* en la cual está contenido, junto con las características del *Forzante* externo. Numéricamente se considera que una geometría está completamente determinada si se conoce la *Batimetría*, el *Borde* que delimita la superficie y la *Malla*. Esta información es la necesaria para construir las *Matrices* del problema.

Por otro lado, el transporte escalador utiliza los resultados hidrodinámicos para resolver la dinámica de una cierta *Masa* como por ejemplo el *Oxígeno Disuelto*.

En los párrafos anteriores, todas las palabras que comenzaron con mayúscula y tienen formato *itálico* corresponden a clases del programa y sólo corresponden a representaciones computacionales de las partes principales que permiten caracterizar un problema. El acto de resolver un problema y analizar sus resultados corresponde en la práctica a realizar una *Simulación*. Esta corresponde a la clase principal del modelo y en ella se almacena toda la información que caracteriza a un problema.

Esta representación permite organizar los problemas numéricos que se deseen resolver en función del tipo de problema o del tipo de variable que se desee controlar. Por ejemplo, si se desea analizar el efecto del viento para una geometría en particular, entonces se construye un arreglo de simulaciones las cuales se diferencian exclusivamente en el forzante pero todas utilizan la misma geometría. Como cada simulación almacena sus resultados, entonces el procesamiento posterior de la información se simplifica puesto que se pueden construir funciones que extraigan y procesen la información de una determinada manera para cada simulación.

La figura (3.1) muestra un esquema conceptual de las clases principales que componen una simulación. Similarmente, la figura (3.2) muestra un esquema con las clases que describen los motores de cálculo disponibles. La idea de desarrollo del modelo es que ambos esquemas conceptuales se pueblen de las clases necesarias para aumentar su funcionalidad e interacción con el usuario, sin olvidar que para que exista un entendimiento del código este tiene que ser conceptualmente simple. Para entrar en el detalle de la implementación o información que almacena cada clase se recomienda descargar el código y leer las líneas de ayuda de cada clase.

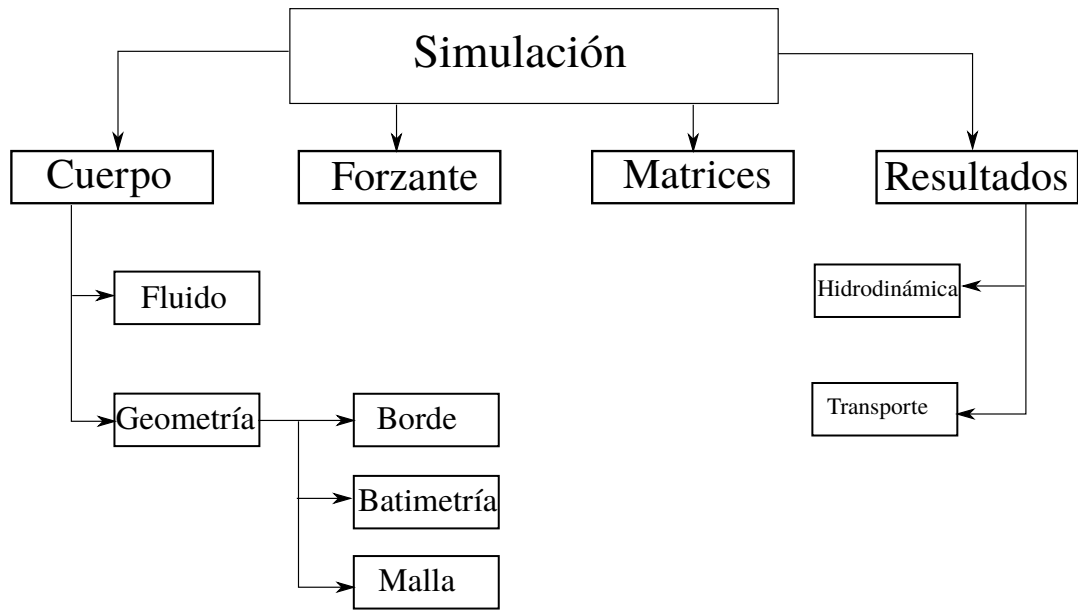


Figura 3.1: Esquema conceptual de las clases que componen una Simulación.

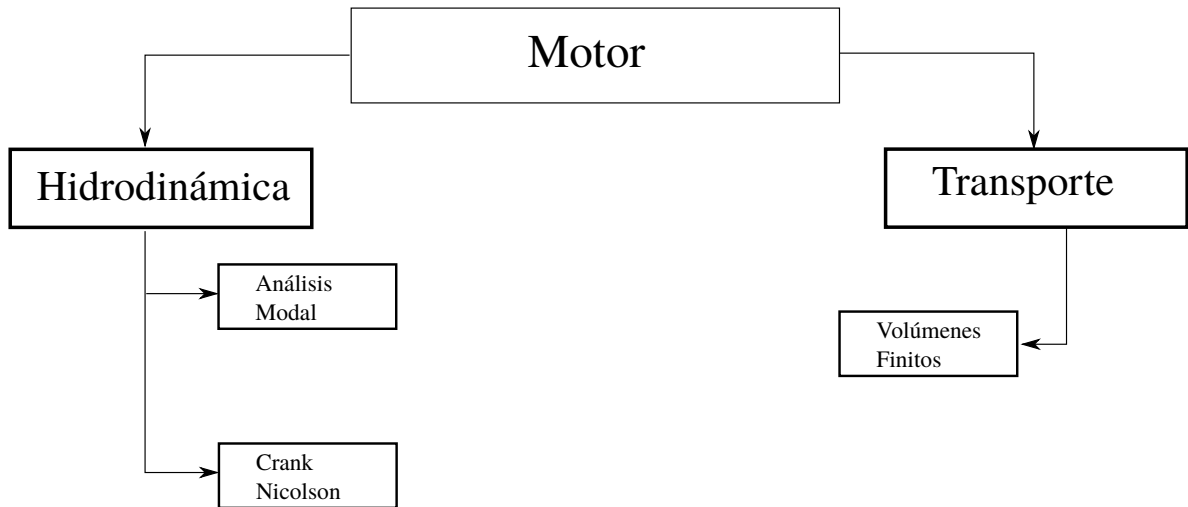


Figura 3.2: Esquema conceptual de los motores de cálculo disponibles.

# Capítulo 4

## Desarrollo Teórico

Este capítulo presenta algunos de los desarrollos teóricos aplicados a las ecuaciones que gobiernan el *problema por resolver*. La idea es encontrar algunas expresiones que permitan caracterizar y explicar los resultados.

### 4.1. Efecto de corrientes horizontales en deformación de superficie libre

Para el desarrollo de esta sección se utiliza el esquema conceptual mostrado en la figura (2.2), el cual caracteriza el problema del viento soplando sobre una laguna somera. En el caso unidimensional, la máxima deformación de la superficie libre se presenta en el extremo viento abajo de la geometría y es inversamente proporcional al número de Wedderburn (Shintani *et al.*, 2010). En ese caso, no existen corrientes horizontales en la formulación teórica producto de que el esfuerzo de corte de viento se balancea completamente con el gradiente de presión obtenido como respuesta del sistema frente al forzante. Sin embargo, en el caso bidimensional y producto de la variación espacial de batimetría, se generan corrientes horizontales o recirculaciones cuya dirección está determinada por el balance de fuerzas entre el gradiente de presión local y el viento (Csanady, 1973). La hipótesis que motiva este análisis es que la generación de corrientes debe influir de alguna manera en la deformación total de la superficie libre en comparación con lo que se puede predecir en el caso unidimensional en donde no hay corrientes.

Se consideran las ecuaciones de momentum promedio vertical despreciando aceleraciones del sistema de referencia presentadas en el anexo A para las coordenadas  $x$  e  $y$  respectivamente.

$$\rho h_o(\vec{x}) \frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} + \tau_{sx} - \tau_{bx} \quad (4.1)$$

$$\rho h_o(\vec{x}) \frac{\partial V(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial y} + \tau_{sy} - \tau_{by} \quad (4.2)$$

El concepto que da origen al desarrollo teórico es que estas ecuaciones representan el balance de fuerzas en ambas direcciones. Por lo tanto, existe una respuesta resultante del sistema, la cual se entiende como la norma de los efectos en cada eje, es decir, si  $F_x$  y  $F_y$  son las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente se cumple que

$$F_r^2 = F_x^2 + F_y^2, \quad (4.3)$$

siendo  $F_r$  la fuerza resultante sobre el sistema. Elevando al cuadrado las ecuaciones (4.1) y (4.2) y sumando se obtiene

$$\begin{aligned} (\rho h_o |\partial_t \mathbf{v}|)^2 &= (\rho g h_o |\nabla \eta|)^2 - 2\rho g h_o \partial_x \eta (\tau_{sx} - \tau_{bx}) \\ &+ (\tau_{sx} - \tau_{bx})^2 - 2\rho g h_o \partial_y \eta (\tau_{sy} - \tau_{by}) + (\tau_{sy} - \tau_{by})^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

En la expresión anterior, el operador  $|\cdot|$  representa la norma euclidea del vector en su interior. Además, para simplificar notación se define que  $h_o = h_o(\vec{x})$  y se tiene que  $\nabla \eta = (\partial_x \eta, \partial_y \eta)^T$  es el gradiente bidimensional de deformación de superficie libre. Desarrollando términos y agrupando, se obtiene que

$$(\rho h_o |\partial_t \mathbf{v}|)^2 = (\rho g h_o |\nabla \eta|)^2 - 2\rho g h_o (\nabla \eta \cdot \boldsymbol{\tau}_s) + 2\rho g h_o (\nabla \eta \cdot \boldsymbol{\tau}_b) + |\boldsymbol{\tau}_s|^2 - 2(\boldsymbol{\tau}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_b) + |\boldsymbol{\tau}_b|^2 \quad (4.5)$$

$$(\rho h_o |\partial_t \mathbf{v}|)^2 = (\rho g h_o |\nabla \eta|)^2 - 2\rho g h_o \nabla \eta \cdot (\boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\tau}_b) + |\boldsymbol{\tau}_s|^2 - 2(\boldsymbol{\tau}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_b) + |\boldsymbol{\tau}_b|^2 \quad (4.6)$$

Considerando el régimen permanente, es decir, la derivada temporal desaparece y reordenando términos se obtiene que

$$2\rho g h_o (\nabla \eta \cdot \boldsymbol{\tau}_s) + 2(\boldsymbol{\tau}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_b) - |\boldsymbol{\tau}_s|^2 = (\rho g h_o |\nabla \eta|)^2 + 2\rho g h_o (\nabla \eta \cdot \boldsymbol{\tau}_b) + |\boldsymbol{\tau}_b|^2 \quad (4.7)$$

En la ecuación anterior aparecen tres términos que tienen un producto punto. Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores entonces el producto punto entre ellos se define como  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi$ , siendo  $\phi$  el ángulo que se forma entre ambos vectores. Si los vectores son colineales, entonces  $\phi = 0$  y  $\cos \phi = 1$ . Se analizan especialmente aquellos términos que tienen este producto vectorial. Como ha sido señalado por Shintani *et al.* (2010) la deformación de la superficie libre cuantificada por  $\nabla \eta$  tiende a ser proporcional al esfuerzo de corte superficial, el cual para efectos de este análisis es ejercido por el viento. Además, la dirección de máximo crecimiento de la deformación de la superficie libre tiende a ser colineal con la dirección del esfuerzo de

corte superficial, por lo tanto,  $(\nabla\eta \cdot \boldsymbol{\tau}_s) = |\nabla\eta| |\boldsymbol{\tau}_s|$ . Por otro lado, el esfuerzo de corte de fondo se define como  $\boldsymbol{\tau}_b = \rho\tilde{c}_f\mathbf{v}$ , es decir, este vector comparte la dirección del campo de velocidad inducido en el sistema.

Por continuidad, la magnitud de la velocidad es máxima en las zonas cuya profundidad es menor a la profundidad media de la hoya y además es en estas zonas que el flujo comparte la dirección principal del esfuerzo de corte superficial (Csanady, 1973). Por lo tanto, si se considera que el gradiente de deformación de superficie libre y el esfuerzo de corte de superficie comparten la dirección principal y son uniformes en la laguna, se puede anticipar que los productos  $(\boldsymbol{\tau}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_b)$  y  $(\nabla\eta \cdot \boldsymbol{\tau}_b)$  son máximos en las zonas someras de la laguna. Es en este punto que se introduce el supuesto de que ambos producto punto pueden ser aproximados como el producto de la norma de dos vectores predominantemente colineales, es decir,  $(\boldsymbol{\tau}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_b) \approx |\boldsymbol{\tau}_s| |\boldsymbol{\tau}_b|$  y  $(\nabla\eta \cdot \boldsymbol{\tau}_b) \approx |\nabla\eta| |\boldsymbol{\tau}_b|$ . Introduciendo estas simplificaciones en la ecuación (4.7) y formando un cuadrado de binomio con los términos de la mano derecha

$$2\rho gh_o |\nabla\eta| |\boldsymbol{\tau}_s| + 2|\boldsymbol{\tau}_s| |\boldsymbol{\tau}_b| - |\boldsymbol{\tau}_s|^2 = (\rho gh_o |\nabla\eta| + |\boldsymbol{\tau}_b|)^2 \quad (4.8)$$

Reagrupando

$$2|\boldsymbol{\tau}_s| (\rho gh_o |\nabla\eta| + |\boldsymbol{\tau}_b|) - |\boldsymbol{\tau}_s|^2 = (\rho gh_o |\nabla\eta| + |\boldsymbol{\tau}_b|)^2 \quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) escritas vectorialmente son

$$\rho h_o \partial_t \mathbf{v} = -\rho gh_o \nabla\eta + \boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\tau}_b \quad (4.10)$$

Considerando el régimen permanente, reordenando y tomando norma euclideana a ambos lados de la ecuación se obtiene que

$$|\boldsymbol{\tau}_s| = |\rho gh_o \nabla\eta + \boldsymbol{\tau}_b| \quad (4.11)$$

Si nuevamente se considera la simplificación de que los vectores  $\nabla\eta$  y  $\boldsymbol{\tau}_b$  son prácticamente colineales y alcanzan sus máximos respectivos en ese estado, la expresión anterior se puede reducir a

$$|\boldsymbol{\tau}_s| = |\rho gh_o \nabla\eta + \boldsymbol{\tau}_b| \approx \rho gh_o |\nabla\eta| + |\boldsymbol{\tau}_b| \quad (4.12)$$

Es necesario destacar que esta última expresión en general no es cierta en virtud de la desigualdad triangular, pero en el caso que los vectores son considerados casi colineales y con la misma dirección principal si aplica. Reemplazando esto en la ecuación (4.9) se obtiene finalmente que

$$2|\boldsymbol{\tau}_s|^2 - |\boldsymbol{\tau}_s|^2 = (\rho gh_o |\nabla\eta| + |\boldsymbol{\tau}_b|)^2 \quad (4.13)$$

$$|\boldsymbol{\tau}_s|^2 = (\rho g h_o |\nabla \eta| + |\boldsymbol{\tau}_b|)^2 \quad (4.14)$$

Tomando raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación se obtiene que

$$|\boldsymbol{\tau}_s| = \rho g h_o |\nabla \eta| + |\boldsymbol{\tau}_b| \quad (4.15)$$

Esta última expresión dice que el efecto resultante del esfuerzo de corte superficial se balancea con el gradiente de presión y el esfuerzo de corte de fondo en el régimen permanente. La ecuación anterior es la base para determinar el efecto de las corrientes horizontales en la deformación de la superficie libre del sistema.

Se considera que la norma del esfuerzo de corte superficial se puede expresar como  $|\boldsymbol{\tau}_s| = \rho u_{*s}^2$  con  $u_{*s}$  la velocidad de corte en la dirección resultante, es decir, considerando el efecto de lo que ocurre en las direcciones  $x$  e  $y$ , y además considerando que  $\boldsymbol{\tau}_b = \rho \tilde{c}_f \mathbf{v}$ , se obtiene

$$\rho u_{*s}^2 = \rho g h_o |\nabla \eta| + \rho \tilde{c}_f |\mathbf{v}| \quad (4.16)$$

Reordenando y promediando sobre el área superficial  $A$  se obtiene

$$\frac{u_{*s}^2}{g} \frac{1}{A} \int_A \frac{1}{h_o} dA = \frac{1}{A} \int_A |\nabla \eta| dA + \frac{\tilde{c}_f}{g} \frac{1}{A} \int_A \frac{|\mathbf{v}|}{h_o} dA \quad (4.17)$$

Se define

$$\frac{1}{A} \int_A \frac{1}{h_o} dA = \overline{\left( \frac{1}{h_o} \right)} \quad (4.18)$$

y

$$\frac{1}{A} \int_A \frac{|\mathbf{v}|}{h_o} dA = \overline{\left( \frac{|\mathbf{v}|}{h_o} \right)} \quad (4.19)$$

Además, la integral del gradiente de deformación de superficie libre se entiende como un gradiente promedio sobre la laguna y que crece en la dirección en la cual actúa el esfuerzo de corte superficial. Introduciendo una aproximación lineal para el gradiente promedio y considerando que la hoya tiene una simetría tal que la magnitud de la deformación positiva de viento abajo es igual a la magnitud de la deformación negativa de viento arriba, entonces el gradiente promedio puede ser aproximado como

$$\frac{1}{A} \int_A |\nabla \eta| dA = \frac{2\Delta}{L}, \quad (4.20)$$



siendo  $\Delta$  la deformación de la superficie libre con respecto al estado de reposo viento arriba y viento abajo y  $L$  la escala de longitud que caracteriza la dirección en la cual actúa el esfuerzo de corte de superficie. Reemplazando esto en (4.17) y multiplicando la ecuación a ambos lados por  $(L/2) \overline{(1/h_o)}$  se obtiene finalmente que

$$\Delta_c^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\overline{\mathbf{W}}} - \tilde{F}r^2 L \overline{\left( \frac{1}{h_o} \right)} \right), \quad (4.21)$$

donde  $\Delta_c^* = \Delta \overline{\left( \frac{1}{h_o} \right)}$  es la deformación adimensional de la superficie libre en los extremos de la hoya que incluye el efecto de las corrientes horizontales. Además

$$\frac{1}{\overline{\mathbf{W}}} = \frac{Lu_{*s}^2}{g} \overline{\left( \frac{1}{h_o} \right)}^2 \quad (4.22)$$

es el inverso del número de Wedderburn y el número de Froude de las corrientes horizontales afectadas por fricción es

$$\tilde{F}r^2 = \frac{\tilde{c}_f}{g} \overline{\left( \frac{|\mathbf{v}|}{h_o} \right)} \quad (4.23)$$

Como se puede apreciar, el efecto generalizado de las corrientes horizontales es el de disminuir la deformación máxima en los extremos de la laguna con respecto a lo que sería el estado sin corrientes explicado en Shintani *et al.* (2010).

## 4.2. Variación temporal de la energía mecánica

Siguiendo a Shimizu & Imberger (2008) dado un vector de estado  $\boldsymbol{\xi}$  la energía mecánica del sistema es

$$E = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \rangle \quad (4.24)$$

Para cuantificar la variación temporal de la energía en un sistema basta con tomar la derivada temporal a la ecuación anterior lo que entrega

$$\partial_t E = \frac{1}{2} [\langle \partial_t \boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}\partial_t \boldsymbol{\xi} \rangle], \quad (4.25)$$

en donde se ha considerado que la matriz  $\mathbf{M}$  no varía en el tiempo, lo cual es cierto para el caso en consideración. A continuación, se busca evaluar los términos que aparecen en la ecuación anterior.

El sistema de ecuaciones hidrodinámicas utilizado en este trabajo es

$$\mathbf{M}\partial_t\boldsymbol{\xi} = i(\mathbf{K} + \mathbf{C})\boldsymbol{\xi} + \mathbf{f} \quad (4.26)$$

Si se aplica transpuesto conjugado a todo el sistema entonces se obtiene

$$\partial_t\boldsymbol{\xi}^H\mathbf{M} = -i\boldsymbol{\xi}^H(\mathbf{K} + \mathbf{C})^H + \mathbf{f}^H \quad (4.27)$$

Reordenando

$$\partial_t\boldsymbol{\xi}^H\mathbf{M} = -i\boldsymbol{\xi}^H\mathbf{K}^H - i\boldsymbol{\xi}^H\mathbf{C}^H + \mathbf{f}^H \quad (4.28)$$

Tomando producto punto por la derecha con el vector de estado  $\boldsymbol{\xi}$  e integrando sobre el área superficial  $A$  de la laguna considerada, se obtiene

$$\langle \mathbf{M}\partial_t\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = -i\langle \mathbf{K}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle - i\langle \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi} \rangle \quad (4.29)$$

Shimizu & Imberger (2008) indican que el operador lineal de aguas someras  $\mathbf{K}$  es hermítico, es decir,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^H$  por lo que se cumple  $\langle \mathbf{K}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{K}\boldsymbol{\xi} \rangle$ , mientras que la matriz de disipación lineal  $\mathbf{C}$  es anti-hermítica, o sea  $\mathbf{C}^H = -\mathbf{C}$  y satisface que  $\langle \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = -\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \rangle$ . Por último, como la matriz  $\mathbf{M}$  es real y simétrica cumple que  $\langle \mathbf{M}\partial_t\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \langle \partial_t\boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \rangle$ . Utilizando estas consideraciones la ecuación (4.29) se reescribe como

$$\langle \partial_t\boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \rangle = -i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{K}\boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi} \rangle \quad (4.30)$$

Ahora, considerando nuevamente el sistema de ecuaciones (4.26), tomando producto punto por la izquierda con  $\boldsymbol{\xi}^H$  e integrando sobre el área superficial se obtiene

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}\partial_t\boldsymbol{\xi} \rangle = i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{K}\boldsymbol{\xi} \rangle + i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{f} \rangle \quad (4.31)$$

Sumando (4.30) y (4.31) y dividiendo la suma por dos, se obtiene que la variación temporal de energía en el sistema está dada por

$$\partial_t E = i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \rangle + \frac{1}{2}[\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{f} \rangle] \quad (4.32)$$

Por último, considerando que los vectores  $\mathbf{f}$  y  $\boldsymbol{\xi}$  son reales, los últimos dos términos en la ecuación anterior son iguales y por ende

$$\partial_t E = i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi} \rangle \quad (4.33)$$

Shimizu & Imberger (2008) realizan un análisis similar pero a partir de las ecuaciones para la energía modal. Utilizando su notación, se define la tasa de trabajo aplicado por el forzante externo sobre el sistema  $\dot{W} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi} \rangle$  y la tasa de disipación energética  $\dot{D} = -i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \rangle$  de forma que la variación temporal de la energía mecánica del sistema puede ser reescrita como

$$\partial_t E = \dot{W} - \dot{D} \quad (4.34)$$

Es importante recordar que la matriz de disipación lineal  $\mathbf{C}$  en su definición es antecedida por la unidad imaginaria y por lo tanto  $i\mathbf{C}$  es una matriz real negativa. Además cabe mencionar que los términos en (4.34) tienen unidades de energía por unidad de tiempo, es decir, corresponden a términos que representan potencia. Por ende,  $\dot{W}$  y  $\dot{D}$  pueden ser entendidos como potencia aplicada por el forzante externo y potencia disipada respectivamente.

### 4.3. Efecto de corrientes horizontales en transporte escalar

La ecuación de transporte escalar, integrada verticalmente deducida en el marco teórico es

$$\frac{\partial (h_o C)}{\partial t} + \nabla \cdot (h_o \mathbf{v} C) = \nabla \cdot (h_o \mathbf{k}_{ij} \nabla C) + F_{atm} + F_{sed}, \quad (4.35)$$

en donde  $C$  es la concentración escalar promedio vertical,  $\mathbf{k}_{ij}$  es el tensor bidimensional de dispersión,  $F_{atm}$  y  $F_{sed}$  son los flujos difusivos verticales con la atmósfera y con los sedimentos respectivamente. La definición detallada de cada término ya fue explicada en el marco teórico pero de todas forma se recuerda que los flujos difusivos verticales son parametrizados como

$$F_{sed} = \frac{S}{2k_t} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4k_t^2 C}{S}} \right) \quad (4.36)$$

$$F_{atm} = k_L (C_s - C) \quad (4.37)$$

La idea de este desarrollo teórico es comparar si es que existe alguna diferencia en la resolución del problema de transporte de oxígeno disuelto entre la aplicación de la metodología de volúmenes finitos la cual requiere previamente la resolución de la hidrodinámica del problema, versus el supuesto de mezcla completa en la laguna el cual finalmente considera que existe un balance entre los flujos verticales pero sin considerar el efecto de las corrientes horizontales.

Si se considera la ecuación (4.35) en el régimen permanente y se integra sobre la superficie  $A$  de la laguna se obtiene

$$\int_A \nabla \cdot (h_o \mathbf{v} C - h_o \mathbf{k}_{ij} \nabla C) dA = \int_A (F_{atm} + F_{sed}) dA \quad (4.38)$$

Una versión del teorema de la divergencia de Gauss dice que la integral del lado izquierdo en la ecuación anterior se transforma en

$$\int_A \nabla \cdot (h_o \mathbf{v} C - h_o \mathbf{k}_{ij} \nabla C) dA = \int_l (h_o \mathbf{v} C - h_o \mathbf{k}_{ij} \nabla C) \hat{n} dl = 0, \quad (4.39)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector normal al borde  $l$  que delimita la superficie  $A$  de la laguna. La integral anterior es nula producto de que al aplicar el teorema de Gauss, se obtiene la integral sobre el contorno de la superficie del flujo normal al borde. Por condición de borde del problema, los flujos laterales son nulos y por ello la integral es nula. Por lo tanto, la conclusión es que se tiene

$$\int_A (F_{atm} + F_{sed}) dA = 0 \quad (4.40)$$

Esta última ecuación dice que en el régimen permanente, el flujo de oxígeno total desde la atmósfera a la laguna es igual en magnitud al flujo total de oxígeno desde el agua hacia los sedimentos. Es importante notar que la única forma en que  $F_{atm}$  varíe espacialmente sería que la concentración variara espacialmente dado  $k_L$  constante. Por otro lado, si los coeficientes que describen a  $F_{sed}$  no varían espacialmente, entonces se tiene que el balance entre los flujos es el mismo en cada punto de la laguna. En este escenario, se puede encontrar una concentración de equilibrio la cual para efectos de esta deducción se denominará como concentración de mezcla completa  $\tilde{C}$ . Es decir, en el caso que los coeficientes que caracterizan los flujos sean los mismos en cada punto de la laguna, entonces la solución a la ecuación (4.40) será única e igual a la concentración de mezcla completa  $\tilde{C}$ . de la Fuente *et al.* (2015) demuestran con sus experimentos de laboratorio que las condiciones locales del flujo inducido por viento influyen el valor de parámetro  $k_t$ , cuya expresión se muestra en el capítulo 2. Si se acepta como válida esta expresión y existe una distribución espacial de corrientes horizontales, entonces habrá variación espacial en el parámetro  $k_t$ . Esto se traduce en que exista una distribución espacial no uniforme de concentración de oxígeno disuelto en la laguna.

Reordenando la ecuación (4.40) y dividiendo por el área superficial

$$\frac{1}{A} \int_A F_{sed} dA = -\frac{1}{A} \int_A F_{atm} dA \quad (4.41)$$

La integral del lado izquierdo se entiende como el flujo de oxígeno disuelto promedio hacia los sedimentos  $\overline{F_{sed}}$ . Reemplazando la definición para  $F_{atm}$

$$\overline{F_{sed}} = -\frac{1}{A} \int_A k_L (C_s - C) dA \quad (4.42)$$

$$\overline{F_{sed}} = k_L \bar{C} - k_L C_s, \quad (4.43)$$

donde,  $\bar{C}$  es la concentración promedio superficial y como se mencionó anteriormente, se considera que el parámetro  $k_L$  no varía espacialmente. En el caso que los parámetros de  $F_{sed}$  no varían espacialmente, se tiene a partir de la ecuación (4.41)

$$F_{sed}|_{\tilde{C}} = k_L \tilde{C} - k_L C_s \quad (4.44)$$

Restando las ecuaciones (4.43) y (4.44) se obtiene

$$\overline{F_{sed}} - F_{sed}|_{\tilde{C}} = k_L (\bar{C} - \tilde{C}) \quad (4.45)$$

Dividiendo esta última expresión por  $k_L C_s$  se obtiene

$$\Delta \tilde{F} = \frac{\overline{F_{sed}} - F_{sed}|_{\tilde{C}}}{k_L C_s} = \frac{(\bar{C} - \tilde{C})}{C_s}, \quad (4.46)$$

en donde se ha introducido el parámetro  $\Delta \tilde{F}$  el cual es una medida adimensional de que tan diferente son las concentraciones promedio en la laguna en el caso en que se considera influencia de las corrientes horizontales ( $k_t$  variable espacialmente) versus el caso de mezcla completa.

La ecuación (4.36) puede ser derivada con respecto a la concentración para obtener

$$\frac{\partial F_{sed}}{\partial C} = -\frac{k_t}{\sqrt{1 + \frac{4k_t^2 C}{S}}} \quad (4.47)$$

Con esto, el flujo hacia los sedimentos puede ser reescrito como

$$F_{sed} = \frac{S}{2} \left( \frac{1}{k_t} + \left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \right)^{-1} \right) \quad (4.48)$$

Reemplazando esta definición en (4.41)

$$\frac{1}{A} \int_A \frac{S}{2} \left( \frac{1}{k_t} + \left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \right)^{-1} \right) dA = -\frac{1}{A} \int_A k_L (C_s - C) dA, \quad (4.49)$$

y resolviendo las integrales, se obtiene

$$\frac{S}{2} \left[ \overline{\left( \frac{1}{k_t} \right)} + \overline{\left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \right)^{-1}} \right] = k_L \bar{C} - k_L C_s, \quad (4.50)$$

en donde la barra superior indica promedio sobre la superficie de la laguna. Reordenando

$$\frac{\bar{C}}{C_s} = 1 + \frac{S}{2k_L C_s} \left[ \overline{\left( \frac{1}{k_t} \right)} + \overline{\left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \right)^{-1}} \right] \quad (4.51)$$

Aplicando el mismo procedimiento anterior pero considerando el caso de mezcla completa se puede obtener

$$\frac{\tilde{C}}{C_s} = 1 + \frac{S}{2k_L C_s} \left[ \frac{1}{\bar{k}_t} + \left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \Big|_{\tilde{C}} \right)^{-1} \right], \quad (4.52)$$

en donde, para la caracterización de los flujos, se ha utilizado el valor promedio de la velocidad de transferencia vertical de oxígeno disuelto entre el agua y los sedimentos  $\bar{k}_t$  para la caracterización de  $F_{sed}|_{\tilde{C}}$ . Restando las ecuaciones (4.51) y (4.52) para formar el término  $\Delta\tilde{F}$  definido previamente se obtiene

$$\Delta\tilde{F} = \frac{(\bar{C} - \tilde{C})}{C_s} = \frac{S}{2k_L C_s} \left[ \overline{\left( \frac{1}{k_t} \right)} - \frac{1}{\bar{k}_t} + \overline{\left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \right)^{-1}} - \left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \Big|_{\tilde{C}} \right)^{-1} \right] \quad (4.53)$$

Reemplazando la expresión para  $k_t$  mostrada en el capítulo 2, la expresión anterior se transforma en

$$\Delta\tilde{F} = \frac{S}{2k_L C_s} \left[ \frac{1}{\alpha u_* S c^{-2/3}} \left( \overline{Re} - \overline{\left( \frac{1}{Re} \right)^{-1}} \right) + \overline{\left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \right)^{-1}} - \left( \frac{\partial F_{sed}}{\partial C} \Big|_{\tilde{C}} \right)^{-1} \right], \quad (4.54)$$

en donde  $\alpha = (\beta/\sqrt{f}) \exp(\kappa/\sqrt{f})$ . En esta expresión, los términos que contienen el número de Reynolds sólo requieren conocer el campo de velocidad, es decir, resolver la hidrodinámica del problema. El segundo término al interior del corchete en la ecuación anterior representa el promedio espacial del inverso de la derivada de  $F_{sed}$  y para que este término pueda ser evaluado es necesario conocer la distribución espacial de concentración de oxígeno disuelto. Esta información se obtiene al resolver la ecuación de transporte con volúmenes finitos dado el campo de velocidades inducido por el viento.

Si no se aplica la metodología de volúmenes finitos entonces la concentración promedio espacial debiera ser igual a la de mezcla completa. Esta deducción demuestra que existe una forma de cuantificar la diferencia entre la concentración promedio espacial y la de mezcla

completa en el caso que se aplica volúmenes finitos dada la parametrización de  $k_t$  en función del flujo local.

#### 4.4. Número de Péclét del flujo vertical de OD

Para la deducción de este parámetro, se considera que los flujos horizontales de masa son exclusivamente por efectos de la advección. Esta simplificación se realiza en principio para entender los efectos de las corrientes horizontales en comparación con los flujos verticales.

El número de Péclét del flujo vertical de OD ( $Pe_v$ ), por definición corresponde a la razón entre el tiempo característico de la difusión vertical versus el de la advección horizontal. La ecuación de transporte de masa en el régimen permanente y despreciando la dispersión es

$$\nabla \cdot (h_o \mathbf{v} C) = F_{sed} + F_{atm}, \quad (4.55)$$

es decir, los flujos verticales están balanceados con los términos advectivos. Para reducir la notación se define la función de flujos verticales  $F(C)$  como

$$F(C) = F_{sed} + F_{atm} \quad (4.56)$$

En el régimen permanente la ecuación de continuidad unidimensional entrega que

$$\frac{\partial U h_o}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4.57)$$

$$\Rightarrow q = cte, \quad (4.58)$$

siendo  $q$  el caudal unitario. Luego, la ecuación (4.55) unidimensional se expresa como

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{F(C)}{q} \quad (4.59)$$

Esto último indica que en el régimen permanente de un problema 1D, independiente de las variaciones longitudinales de batimetría, la concentración promedio a lo largo del dominio depende exclusivamente de la interacción entre los flujos verticales y el caudal unitario.

Sea  $C = \tilde{C} + C'$ , donde  $\tilde{C}$  es la concentración que balancea los flujos verticales de OD y cumple que  $F(\tilde{C}) = 0$ , es decir, la que se obtiene al no existir gradientes horizontales de concentración.  $C'$  es una desviación con respecto a  $\tilde{C}$  que absorbe la variabilidad espacial de concentración. Reemplazando la nueva definición para  $C$  en (4.59) se obtiene

$$\frac{\partial C'}{\partial x} = \frac{F(\tilde{C} + C')}{q} \quad (4.60)$$

Si se supone que  $C'$  es pequeño con respecto a  $\tilde{C}$ , entonces en la ecuación (4.60) se puede realizar una expansión de Taylor para el término de los flujos de manera que

$$\frac{\partial C'}{\partial x} = \frac{1}{q} \left[ F(\tilde{C}) + \left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{\tilde{C}} C' \right] \quad (4.61)$$

Como por definición  $F(\tilde{C}) = 0$ , la ecuación (4.61) se reduce a

$$\frac{\partial C'}{\partial x} = \left. \frac{1}{q} \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{\tilde{C}} C' \quad (4.62)$$

Esta ecuación tiene solución analítica para  $C'$ . Esta expresión representa una ecuación diferencial ordinaria que puede ser resuelta mediante separación de variables. Con esto

$$C'(x) = C'_o \exp \left( \left. \frac{1}{q} \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{\tilde{C}} x \right) \quad (4.63)$$

De esta solución es directo ver que aparece una escala natural de longitud  $L_C$ , característica del proceso de transporte vertical de masa definida como

$$L_C = q \left( \left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{\tilde{C}} \right)^{-1} = U h_o \left( \left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{\tilde{C}} \right)^{-1} \quad (4.64)$$

Es importante notar que esta escala de longitud no coincide necesariamente con la escala de longitud natural de la geometría en donde está enmarcado el problema. Considerando que el dominio tiene una longitud característica  $L$ , entonces se puede definir el número de Péclét que caracteriza el flujo vertical de OD como

$$Pe_v = \frac{L_C}{L} = \frac{U h_o}{L} \left( \left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{\tilde{C}} \right)^{-1} = \frac{T_{adv}}{T_{difv}} \quad (4.65)$$

en donde  $T_{adv} = L/U$  es el tiempo característico de la advección horizontal y  $T_{difv} = h_o \left( \left. \frac{\partial F}{\partial C} \right|_{\tilde{C}} \right)^{-1}$  es el tiempo característico de la difusión vertical. Este parámetro es de utilidad pues dice que si se alcanzan números muy altos, entonces el proceso difusivo vertical no es de relevancia en comparación con la advección horizontal. Por otro lado, si el  $Pe_v$  tiende a cero, el tiempo característico de la advección es muy grande con respecto a la difusión y por ende la concentración local es controlada por los procesos de difusión vertical.



# Capítulo 5

## Instalación Experimental

Esta sección describe la construcción e instrumentación de la instalación experimental implementada. Además se explican las metodologías aplicadas en el procesamiento de datos. El trabajo experimental se lleva a cabo en el laboratorio de Hidráulica F.J. Domínguez de la Universidad de Chile.

### 5.1. Descripción general

La instalación experimental consta de una base plana que oscila horizontalmente sobre la cual se monta la maqueta de la laguna a ensayar, como se aprecia en la figura (5.1).

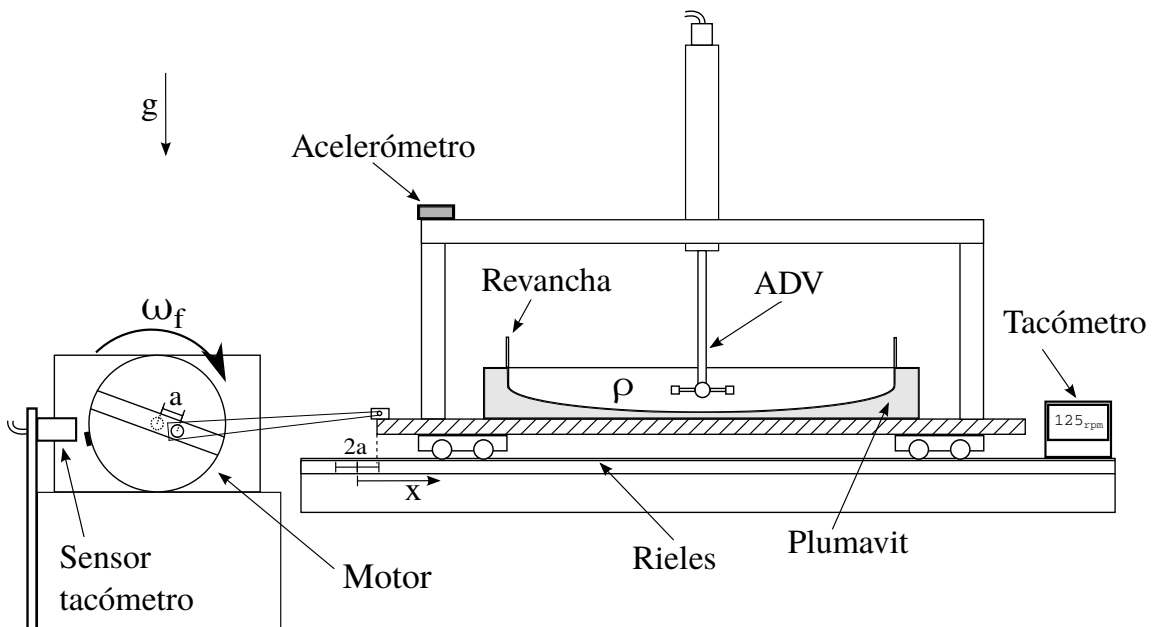


Figura 5.1: Esquema general de la instalación experimental.

El movimiento horizontal es inducido por el giro de un motor, el cual se transmite hacia la base plana gracias a un brazo metálico conectado mediante ejes libres a ambas partes. Esta configuración induce una trayectoria horizontal de tipo sinusoidal con una amplitud de movimiento determinada por la distancia entre el eje central del motor y el eje que conecta el brazo con la rueda giratoria (distancia  $a$  en la figura (5.1)). El motor gira con una frecuencia angular  $\omega_f$  la cual es monitoreada con un tacómetro análogo que muestra la frecuencia en revoluciones por minuto (RPM).

La base plana se mueve en una única dirección gracias a que en su parte inferior cuenta con carros que pueden viajar sobre rieles horizontales. La aceleración de la base es monitoreada con un acelerómetro cuyo eje  $x$  está alineado con la dirección de los rieles.

La velocidad del flujo inducido por el movimiento del sistema es medida con un velocímetro acústico Doppler (ADV por su sigla en inglés), cuyo posicionamiento en la maqueta se muestra en la figura (5.2). La medición se realiza en el punto central de la laguna y el sensor se posiciona de manera que el dato se mida a la mitad de la profundidad en ese punto, lo cual constituye el supuesto de que la velocidad promedio vertical simulada con la herramienta numérica se encuentra a la mitad de la profundidad. Cabe mencionar que por funcionamiento del instrumento este mide lo que ocurre en un volumen de control ubicado a  $5[cm]$  desde el cabezal que emite la señal acústica (distancia  $b$  en la figura (5.2)).

Los parámetros de diseño de la maqueta son  $R = 0,2[m]$  y  $H = 0,03[m]$  según la ecuación (2.48). Esto provoca que la profundidad de agua en el centro sea de  $35,6[mm]$  por lo que la parte superior del cabezal del ADV debe estar a  $(35,6 - d)/2[mm]$  de la superficie libre, siendo  $d$  el diámetro del cabezal del ADV el cual es  $15,6[mm]$ .

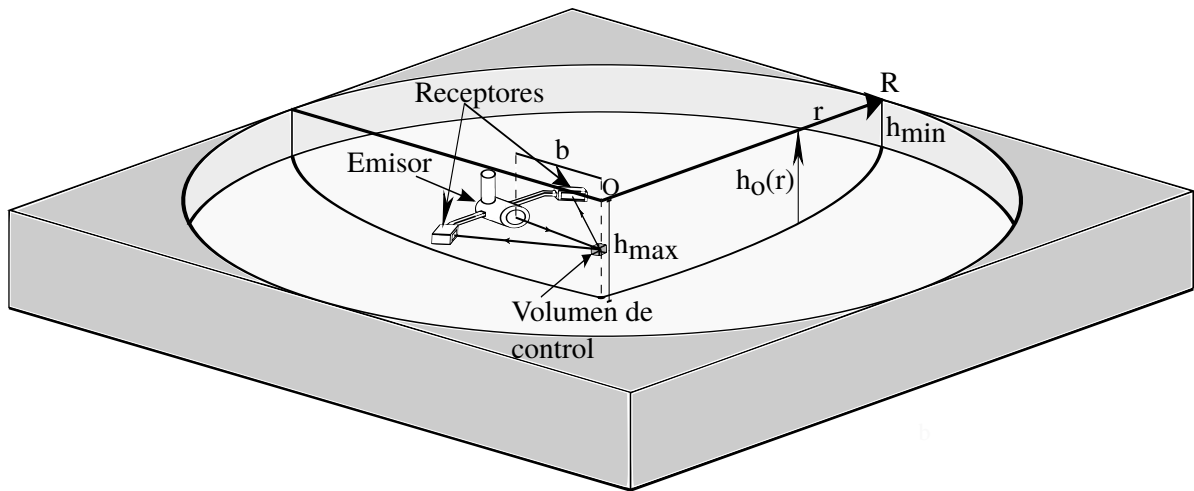


Figura 5.2: Vista isométrica de la ubicación del ADV.

## 5.2. Instrumentación

Esta sección describe los instrumentos utilizados en la instalación y sus principales características de funcionamiento.

### 5.2.1. Acelerómetro

La instalación cuenta con un acelerómetro ADXL345 Evaluation Board, producto fabricado por Sparkfun Electronics y que se puede apreciar en la figura (5.3A). Este genera mediciones de la aceleración en las tres dimensiones definidas por un sistema de referencia cartesiano fijo al sensor. Los datos son almacenados en una tarjeta microSD en la cual se crean los archivos para cada medición.

Cada vez que el sensor se enciende y en presencia de una tarjeta de memoria válida, se crea un nuevo archivo. Las luces indicadoras se prenden y apagan cuatro veces mientras el sensor se inicializa. Luego de esto, sólo parpadea la luz roja y el sensor se encuentra en estado de medición y almacenamiento. Los datos se guardan en archivos con extensión *.csv*. Por defecto, el sensor mide con una frecuencia de  $100[Hz]$  en un rango de  $\pm 2[g]$ , siendo  $g$  la aceleración de gravedad. El sensor se energiza mediante dos baterías AA.

La información almacenada en los archivos corresponde al voltaje medido el cual varía en función de la aceleración en formato hexadecimal y en unidades de *LSB* (Least Significant Bit). Por lo tanto, para obtener el dato de aceleración útil es necesario convertir la medición a unidades de  $g$ . Esto se hace con un factor de conversión del tipo

$$a_g = f_g a_{LSB}, \quad (5.1)$$

donde  $a_g$  es la aceleración medida en unidades de  $g$ ,  $a_{LSB}$  es la aceleración en *LSB* y  $f_g = 0,0039[g/LSB]$  es el factor de conversión. Este factor está especificado por el fabricante pero puede ser corroborado mediante una calibración.

Para calibrar el sensor se utiliza la aceleración de gravedad. El proceso resulta bastante intuitivo y consiste en orientar cada eje del sensor según la gravedad, por lo que se sabe que la medición que arroje el instrumento debiera ser igual a  $g$ . Se realiza esto para cada eje y con esto se encuentra el factor de conversión promedio. Se corrobora que el factor de conversión es el mismo especificado por el fabricante.

Para que una medición sea detectable la intensidad de la señal debe ser mayor al ruido característico del sensor. En este caso la tabla de información del sensor muestra que el ruido característico es menor a  $1[LSB]$ . Al multiplicar este valor por el factor de conversión se obtiene que la mínima medición que podría realizar el sensor es menor a  $a_{min} = 0,0039[g] = 0,0383[ms^{-2}]$ . Por ende, la mínima medición correcta del sensor es incierta pero acotada por  $a_{min}$ . En secciones posteriores se compara el valor de  $a_{min}$  con las aceleraciones que se espera medir en cada experimento.

### 5.2.2. Velocímetro acústico Doppler (ADV)

Este instrumento se utiliza para medir la velocidad del flujo en el punto central de la maqueta. La información es capturada con una frecuencia de  $50[Hz]$  y el rango de medición se fija en  $\pm 30[cm\cdot s^{-1}]$ . Existen distintas probetas o cabezales de medición para el instrumento pero el que se encuentra disponible para esta experiencia es el cabezal 2D (Fig. 5.3B). Con este se pueden medir velocidades en ambas direcciones horizontales y es de utilidad en particular para aguas someras.

Según el manual del fabricante, el volumen de control está ubicado a una distancia de  $5[cm]$  desde el sensor y tiene un volumen de  $0,09[cm^3]$ . La precisión de este instrumento es del  $1[\%]$  de la velocidad medida o  $\pm 0,25[cm\cdot s^{-1}]$  según corresponda.

Uno de los parámetros que debe ser controlado durante la medición es el cociente de señal sobre ruido (SNR, signal to noise ratio en inglés). De acuerdo por lo especificado por el fabricante el SNR no puede bajar de  $10[dB]$  puesto que en este estado empeora la calidad de la medición. Este parámetro es controlado por la cantidad de partículas que tenga el fluido para reflejar la señal acústica. Para aumentar la calidad de la medición se puede agregar un poco de polvo en suspensión al fluido.

### 5.2.3. Tacómetro

Este instrumento se utiliza para tener una indicación en directo de la cantidad de revoluciones por unidad de tiempo que da el motor (Fig. 5.3C). El tacómetro funciona mediante un sensor que detecta una pequeña placa de bronce pegada a la rueda giratoria del motor. Cada vez que la placa pasa frente al sensor el tacómetro enciende una luz indicando que la placa ha sido detectada.

Se corrobora experimentalmente que las mínimas frecuencias que puede medir el tacómetro son cercanas a  $40[RPM]$ . Menor a eso el tiempo que pasa entre cada revolución es muy grande y se pierde el dato para que el equipo calcule el promedio. Para altas frecuencias de giro, se pueden inducir vibraciones en la estructura que soporta al sensor y por ende la medición puede verse alterada.

### 5.2.4. Motor y variador de frecuencia eléctrica

El motor gira con una frecuencia angular  $\omega_f$  controlada por el variador de frecuencia eléctrica. Originalmente, los equipos estaban montados sobre el mesón que contiene al sistema oscilatorio (Fig. 5.3D). Sin embargo, producto del movimiento del motor se inducen vibraciones que alteran la oscilación en el sistema. Es decir, se agrega ruido a las mediciones.

Para sortear este problema se implementa una estructura metálica especial para el motor la cual es aparte del mesón principal. De manera que la única forma de transmitir movimiento a la base oscilatoria es mediante el brazo metálico que se conecta con el motor. El ajuste

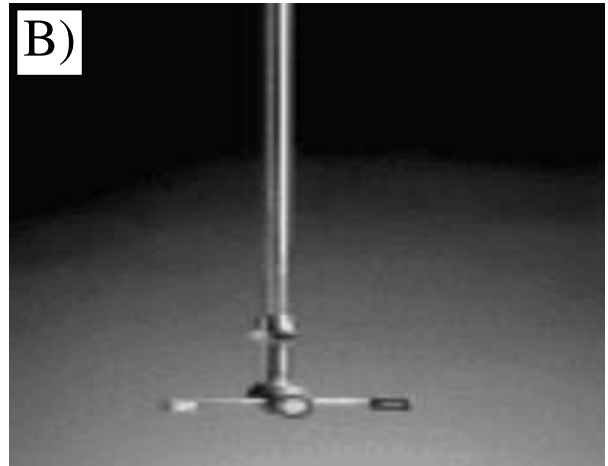
entre el brazo y el eje que lo une a la rueda giratoria debe ser lo más exacto posible puesto que cualquier espacio en la unión se traduce en vibraciones no deseadas en el sistema.

Existen dos formas de controlar la frecuencia de giro del motor. Mediante una manivela mecánica que se encuentra a un costado del motor y mediante el uso del variador de frecuencia eléctrica. Ambos debe ser utilizados en conjunto para ajustar la frecuencia de giro. La manivela mecánica controla la máxima frecuencia de giro mientras que el variador de frecuencia eléctrica permite realizar un ajuste de mayor precisión.

A)



B)



C)



D)



Figura 5.3: A) Acelerómetro ADXL345 Evaluation Board. Fuente: Sparkfun electronics. B) Probeta 2D del ADV Sontek. Fuente: SonTek C) Tacómetro Autonics. D) Vista general de la instalación.

## 5.3. Metodología Experimental

Esta sección detalla los experimentos a realizar y la metodología de trabajo en laboratorio. Se busca explicar los pasos necesarios para llevar a cabo un experimento.

### 5.3.1. Experimentos a realizar

Mediante algunas experiencias de prueba se definen cuatro rangos en los que variará la frecuencia de giro del motor  $\omega_f$  (Tabla 5.1). Se observa experimentalmente que cada rango excita una estructura oscilatoria distinta por lo que se realiza un barrido cada  $2[RPM]$  para entender el comportamiento del sistema. Todos los rangos se recorren considerando dos amplitudes de oscilación que se fijan en la rueda giratoria:  $a_1 = 1[mm]$  y  $a_2 = 2[mm]$ . Considerando lo anterior y los rangos mostrados en la tabla (5.1) se obtiene un total de 98 experimentos a realizar.

Tabla 5.1: Rangos de medición de  $\omega_f$  definidos para los experimentos.

Nombre	Rango $\omega_f$ [RPM]
Rango 1	40 - 60
Rango 2	110 - 130
Rango 3	166- 186
Rango 4	206 - 236

Teóricamente, la aceleración que el movimiento oscilatorio induce sobre la base plana se puede expresar como una función sinusoidal (que varía entre -1 y 1) multiplicada por el término  $a\omega_f^2$ , siendo  $a$  la amplitud de oscilación horizontal de la mesa. De los experimentos a realizar, se comprueba que aquellos con amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$  y que se encuentran en el Rango 1 de  $\omega_f$ , probablemente no puedan ser medidos correctamente por el acelerómetro puesto que en el caso del experimento con  $\omega_f = 60[RPM]$  se tiene que  $a\omega_f^2 = 0,0394[ms^{-2}]$ , valor que es cercano al de  $a_{min} = 0,0383[ms^{-2}]$  presentado en la descripción del acelerómetro. De todas formas estas mediciones se llevan a cabo y posteriormente se analizará su validez.

### 5.3.2. Operación general de la instalación

Los aspectos fundamentales para el funcionamiento del sistema son

- Corroborar que el motor está conectado a la salida de corriente trifásica. Esta alimenta el variador de frecuencia y el motor.
- Encender el interruptor de la zapatilla eléctrica o alargador que distribuye la corriente en el sistema. Esta debiera energizar el tacómetro, las luces, y los equipos necesarios para el funcionamiento del ADV.
- El computador que controla el ADV debiera estar encendido y con el programa winADV en funcionamiento. Este es el que permite la conexión entre el procesador externo del

ADV y la memoria del computador mediante el cable USB. En caso de que la conexión con el ADV demore mucho tiempo o no conecte entonces reiniciar el programa e intentar nuevamente. Corroborar que la conexión del cable USB está en el puerto COM3.

- Corroborar que el acelerómetro tiene la tarjeta microSD en su interior.

Una vez que el programa winADV está funcionando y los equipos están energizados, entonces se tiene lo básico para comenzar una medición. El único sensor que falta por encender es el acelerómetro el cual se inicia sólo en el momento de la realización de un experimento.

### 5.3.3. Metodología de medición

Previo a la realización de una medición se debe corroborar que el nivel de agua en la maqueta es el adecuado. Los puntos característicos se encuentran en el centro con una profundidad de  $3,56[cm]$  y en el borde con una profundidad de  $1,5[cm]$ . Luego de esto y dada una amplitud de oscilación, los pasos y consideraciones a seguir para la realización de un experimento son

- Corroborar que la frecuencia de giro del motorreductor es cercana a la deseada para el experimento. Esto se puede realizar encendiendo el motor para ajustar la frecuencia y luego apagarlo.
- Corroborar que el ADV está preparado para la medición y el fluido al interior de la maqueta se encuentra en completo reposo.
- Encender el acelerómetro.
- Iniciar la medición con el ADV.
- Iniciar el giro del motor con el botón *Run* en el variador de frecuencia.
- Ajustar la frecuencia de giro hasta alcanzar el valor deseado. En particular para frecuencias bajas es necesario monitorear constantemente el tacómetro puesto que el motor cambia su velocidad de giro en el tiempo. Esto no se observa para los rangos de frecuencias más altas.
- Lograr el ajuste de la frecuencia deseada dentro del primer minuto de medición para que el sistema alcance el régimen estacionario lo antes posible. En general se observa que dentro de ese tiempo se logra la condición.
- Medir hasta alcanzar los 5 minutos de medición y apagar el motor. Los sensores siguen midiendo hasta que el sistema alcanza el estado de reposo. En el caso del acelerómetro este mide aceleración cero y el ADV mide el proceso de disipación de energía del fluido.
- Una vez que el fluido está cercano al reposo detener la medición y ajustar la frecuencia para el siguiente experimento.

## 5.4. Procesamiento de datos

Esta sección describe parte del tratamiento que reciben los datos medidos.

### 5.4.1. Filtro *Butterworth*

Como se menciona en la sección anterior, la medición del acelerómetro está influenciada por ruido en algunas de las experiencias. Es por ello que para atenuar el ruido y eliminar frecuencias indeseadas se aplica un filtro pasa-bajo tipo *Butterworth*.

Para este filtro se requieren dos parámetros característicos: el orden  $n$  del filtro y la frecuencia de corte. El orden caracteriza la calidad del filtro y mientras mayor sea, mejor se representa la banda de frecuencia que pasa. Se ha corroborado numéricamente que un orden de  $n = 6$  genera buenos resultados y con un bajo tiempo de cálculo. La frecuencia de corte en general se representa en términos adimensionales con respecto a la frecuencia de Nyquist (la mitad de la frecuencia de muestreo del sensor). Considerando que la frecuencia de muestreo de la aceleración es  $f_a = 100[Hz]$  y que la frecuencia de muestreo de la velocidad es  $f_v = 50[Hz]$ , se tiene que la frecuencia de Nyquist en cada caso es  $f_a^{Ny} = 50[Hz]$  y  $f_v^{Ny} = 25[Hz]$ .

Es importante recordar que la frecuencia de Nyquist determina la máxima frecuencia que puede ser resuelta por un sensor. Sobre este valor, los fenómenos muestreados pueden verse sometidos a *aliasing*, lo que en la práctica significa que en vez de caracterizar adecuadamente un fenómeno se muestra un *alias* de él. Considerando que con la medición conjunta del acelerómetro y el ADV se puede resolver a lo más un proceso que ocurre con  $25[Hz]$  de frecuencia, el valor de la frecuencia de corte para el filtro *Butterworth* de la aceleración se fija en  $25[Hz]$  o expresado en términos adimensionales la frecuencia de corte es  $0,5$  ( $25[Hz]/f_a^{Ny}$ ). Para la velocidad también se aplica este filtro considerando una frecuencia de corte de  $20[Hz]$  lo que permite limpiar algún ruido indeseado en la serie.

Cabe mencionar que la aplicación de este filtro es válida para los experimentos realizados. Esto porque la máxima frecuencia de giro del motor con la cual se experimenta es de  $\omega_f = 236[RPM] = 3,9[Hz]$ , valor que está muy por debajo de las frecuencias de corte especificadas para cada serie. Para apreciar gráficamente los efectos de este filtro se recomienda ver el anexo E.

### 5.4.2. Media móvil

Dentro del procesamiento de señales existe como herramienta disponible la media móvil. Esta técnica permite suavizar las series de datos promediando en torno a una vecindad definida. Se aplica sólo para las series de aceleración las cuales presentan mayor influencia de ruido y dado que tienen una alta frecuencia de muestreo existe disponibilidad de datos suficiente para realizar el proceso. La cantidad de datos utilizados para definir la vecindad sobre la cual se promedia debe ser definida con criterio puesto que si se utilizan muchos datos entonces se pierde información característica del fenómeno. La cantidad de datos utilizados



para promediar se muestra en la tabla (5.2) y está definida en función de la frecuencia de giro del motor. El anexo E muestra gráficamente para cada rango de medición el efecto de la media móvil.

Tabla 5.2: Datos de aplicación de media móvil para series de aceleración.

$\omega_f[RPM]$	Datos para promediar
< 60	10
60 – 140	6
> 140	3

### 5.4.3. Correlación de datos

Dado que el experimento es oscilatorio, la idea es encontrar las series de aceleración y velocidad que caracterizan el régimen estacionario. Para esto, se considera que la serie total de datos del régimen estacionario está almacenada en un vector  $Y$  de la cual se extrae una ventana  $X$ . Esta ventana se mueve a lo largo de la serie completa y en cada posición se calcula la correlación como

$$corr_i = \frac{\sum XY_i}{\sum XX}, \quad (5.2)$$

donde el subíndice  $i$  muestra que se está recorriendo la serie  $Y$ . Esto entrega un vector de correlaciones cuyos valores en el mejor de los casos es 1, es decir, la correlación es perfecta. El proceso anterior entrega un vector de correlaciones dentro del cual se buscan aquellos casos con mejor correlación, los que darán origen a la serie promedio del experimento.

En la mayoría de los casos se utiliza el criterio de que correlaciones menores a 0,75 se descartan del análisis y mayores a ese valor pasan a ser promediadas. En el caso de que la medición es de mejor calidad, entonces el criterio de descarte se hace más exigente y se utiliza como valor de corte 0,85. Dentro de la totalidad de experimentos existen casos en los que la correlación nunca supera alguno de los criterios de corte. Esta situación se puede generar en particular frente a la presencia de excesivo ruido en la medición, en particular cuando la influencia de algún desnivel o vibración externa en el sistema es evidente puesto que las series de aceleración simplemente parecen no presentar un promedio o ciclo característico.

Este procesamiento se aplica tanto para las series de aceleración y velocidad. En la figura (5.4) se muestra un ejemplo de la aplicación de este procesamiento para una serie de aceleración.

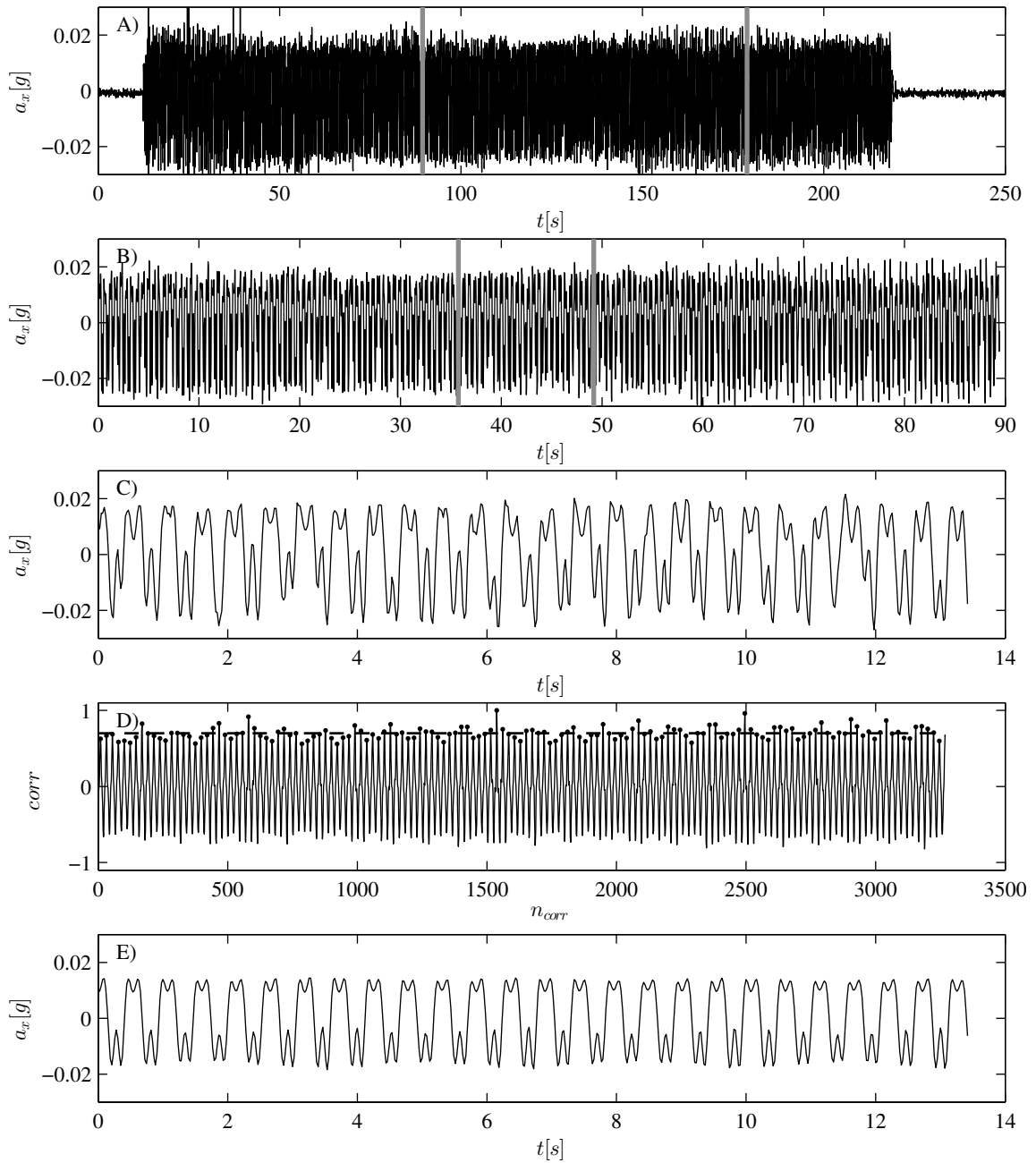


Figura 5.4: Ejemplo de aplicación de la correlación de datos para buscar una serie característica. A) Serie completa. Las líneas grises verticales aislan lo que se define como rango estacionario del experimento B) Serie del rango estacionario. Esta es la denominada serie  $Y$ . Las líneas grises verticales aislan la ventana de datos  $X$  con la cual se calcula la correlación C) Serie de datos  $X$  aislada del rango estacionario D) Correlaciones calculadas. Los puntos negros indican los máximos locales de la correlación y la línea segmentada marca el criterio de corte 0.75 E) Serie característica del experimento obtenida de promediar aquellas series en que la correlación supera el criterio de corte.

#### 5.4.4. Ajuste de la velocidad medida con la velocidad simulada

Las series de velocidad y aceleración se procesan con las herramientas explicadas en las subsecciones anteriores para obtener una ventana de mediciones que represente el régimen estacionario de un experimento.

Para obtener la velocidad simulada, se construye un experimento numérico cuyo forzante externo sea una repetición sucesiva de la serie característica de aceleración y con un coeficiente de fricción arbitrario, el cual se resuelve con Crank Nicolson. El número de veces que se repite la serie es tal que se alcance el régimen estacionario en la simulación. Dentro de este régimen, se aísla una ventana temporal que coincida con uno de los ciclos de repetición de la aceleración y se toma el resultado de la velocidad para esa misma ventana. Dado que la ventana se extrae del régimen estacionario y la serie de aceleración se repite sucesivamente, se obtiene que la velocidad aislada representa la ventana característica de esta variable.

Para comparar las series de velocidad medida y simulada se analiza el error cuadrático medio entre ellas y la amplitud promedio de cada serie. Una simulación ajustada correctamente a la medición es aquella que minimiza el error cuadrático medio y a la vez representa adecuadamente la amplitud de la serie medida.

En el caso que la amplitud de la velocidad simulada sea mayor a la medida, entonces se repite la simulación numérica aumentando el coeficiente de fricción, de manera de disminuir la amplitud de la velocidad simulada. Si la velocidad simulada tiene una amplitud menor que la velocidad medida, entonces se repite la simulación pero disminuyendo el valor del coeficiente de fricción.

El proceso anterior se repite hasta encontrar el coeficiente de fricción que minimiza la diferencia cuadrática media entre las series y ajusta adecuadamente la amplitud de las velocidades. En algunos casos, y a pesar de disminuir constantemente el coeficiente de fricción, la serie simulada no alcanza la magnitud de la serie medida por lo que el experimento no puede ser ajustado y se descarta del análisis.

## 5.5. Sobre la construcción

### 5.5.1. Factores que determinan el tipo de instalación

El objetivo esencial de los experimentos es generar datos que validen las observaciones que se puedan obtener de los modelos computacionales. De esta forma se logra una noción respaldada de que el trabajo numérico es efectivamente una representación de la realidad.

En el caso de este trabajo, la idea principal es generar una validación para el *problema por resolver* definido en el capítulo 1. Numéricamente este involucra dos resoluciones que son candidatas a validación: el flujo hidrodinámico y el transporte de oxígeno disuelto, ambos resueltos considerando la geometría de Kranenburg (1992).

Dado que la geometría en estudio tiene una parametrización matemática, esta puede ser descrita computacionalmente con facilidad. Dentro de las instalaciones de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile existe el Fablab, laboratorio que cuenta con impresoras 3D y maquinaria de control numérico computarizado (CNC). Estos equipos permiten la construcción de maquetas en función de los diseños que se especifiquen computacionalmente.

Además, el laboratorio de Hidráulica cuenta con un túnel de viento que ya ha sido utilizado en el desarrollo de experimentos para estudiar reaeración de un estanque (Rayo, 2009) y consumo de oxígeno disuelto en sedimentos (Ordóñez *et al.*, 2015; de la Fuente *et al.*, 2015). En particular para este último estudio, se realizaron mediciones del flujo inducido por el viento con un velocímetro acústico Doppler y con microperfiladores de oxígeno disuelto, instrumentos que permitirían la medición de los parámetros necesarios para la validación experimental del *problema por resolver*.

Tomando en cuenta los recursos disponibles y las metodologías experimentales desarrolladas en Ordóñez (2014) y de la Fuente *et al.* (2015) la primera idea para el experimento es la confección de un modelo a escala de la geometría de Kranenburg (1992), cuyo fondo debiera ser de sedimentos para simular la transferencia vertical de oxígeno disuelto. Este modelo sería ensayado al interior del túnel de viento, realizando mediciones de las corrientes inducidas por el viento y perfiles de oxígeno disuelto que permitieran cuantificar la distribución espacial de concentración.

Es por esto que como primera aproximación a la construcción de la instalación se recurre al Fablab para la confección de la maqueta. Sin embargo, al ensayar la maqueta en el túnel de viento, se corroboran una serie de problemas que finalmente imposibilitan llevar a cabo este experimento. En particular, el *problema por resolver* considera que el esfuerzo de corte del viento es uniforme sobre la superficie del fluido, condición que no se logra experimentalmente por dos motivos principales: la influencia de las paredes laterales del túnel en el perfil transversal de esfuerzo de corte y la influencia de los bordes de la maqueta en la calidad del contacto entre el viento y la superficie del fluido. Por esto, las corrientes características del problema (mostradas en la sección 2.3) nunca fueron logradas. Sin estas corrientes, no se tiene la validación de la hidrodinámica y por ende tampoco la del transporte escalar.

Una de las técnicas de resolución numérica implementadas en la memoria es la del Análisis Modal. Esta metodología permite visualizar algunas de las estructuras esenciales de flujo, en particular, las estructuras oscilatorias mencionadas en la sección 2.1.2 las cuales satisfacen las ecuaciones de continuidad y momentum.

Dentro de los equipos del laboratorio de Hidráulica se encontró un motor con variador de frecuencia. Este sistema ha sido utilizado para agitar oscilatoriamente mezclas sólido-líquido como se presenta en Cotroneo (2015). Por lo tanto, la nueva idea de experimento contempla realizar las modificaciones necesarias a este sistema oscilatorio para que pueda albergar la maqueta construida con el propósito de inducir algunos de los complejos patrones de flujo que se pueden visualizar durante el Análisis Modal.

Dado que el equipo cuenta con un variador de frecuencia, la maqueta puede ser forzada oscilatoriamente en un amplio rango de valores para la validación de las ecuaciones hidrodinámicas. Las ecuaciones de transporte escalar quedan pendientes de validación.

Los párrafos anteriores describen en general el proceso de desarrollo de la instalación lo que se considera relevante para entender porqué se utiliza para la validación un experimento que en principio pareciera no tener relación con el título de la memoria.

### 5.5.2. Confección de la maqueta a escala

A la fecha de fabricación de la maqueta, el Fablab contaba con sólo un equipo CNC: la ShopBot Desktop (Fig. 5.5A). Esta máquina tiene un área de trabajo efectiva de  $(x, y, z) = 0,61 \times 0,46 \times 0,05[m]$ , donde  $z$  es la dimensión vertical.

La ShopBot puede trabajar sobre una amplia variedad de materiales, pero para simplificar la confección y costo de la maqueta se escoge trabajar en plumavit de alta densidad. Este material es barato y puede ser tallado fácilmente por la CNC (Fig. 5.5C). Sin embargo, posterior al tallado es necesario aplicar un sello impermeable dado que la plumavit no retiene completamente el líquido. El sello utilizado es pintura esmalte blanca. Esta no destruye el material y luego de la aplicación de 8 a 10 manos de pintura el material se impermeabiliza.

El diseño 3D de la maqueta se realiza con el software SolidWorks® en las instalaciones del Fablab el cual permite especificar la ecuación que caracteriza a la geometría. Posteriormente se encontró el software de diseño de piezas FreeCad el cual está programado en Python y es de código abierto. Este software aún no cuenta con la totalidad de funciones que SolidWorks® pero entrega lo básico para el desarrollo de cualquier pieza. En la figura (5.5B) se observa una visualización del diseño 3D de la maqueta en FreeCad.

Considerando las dimensiones de trabajo de la máquina se confecciona una placa de plumavit de  $(x, y, z) = 0,5 \times 0,5 \times 0,05[m]$  sobre la cual se tornea la geometría cuyos parámetros de diseño según la ecuación (2.48) son  $R = 0,2[m]$  y  $H = 0,03[m]$ . (Fig. 5.5D)

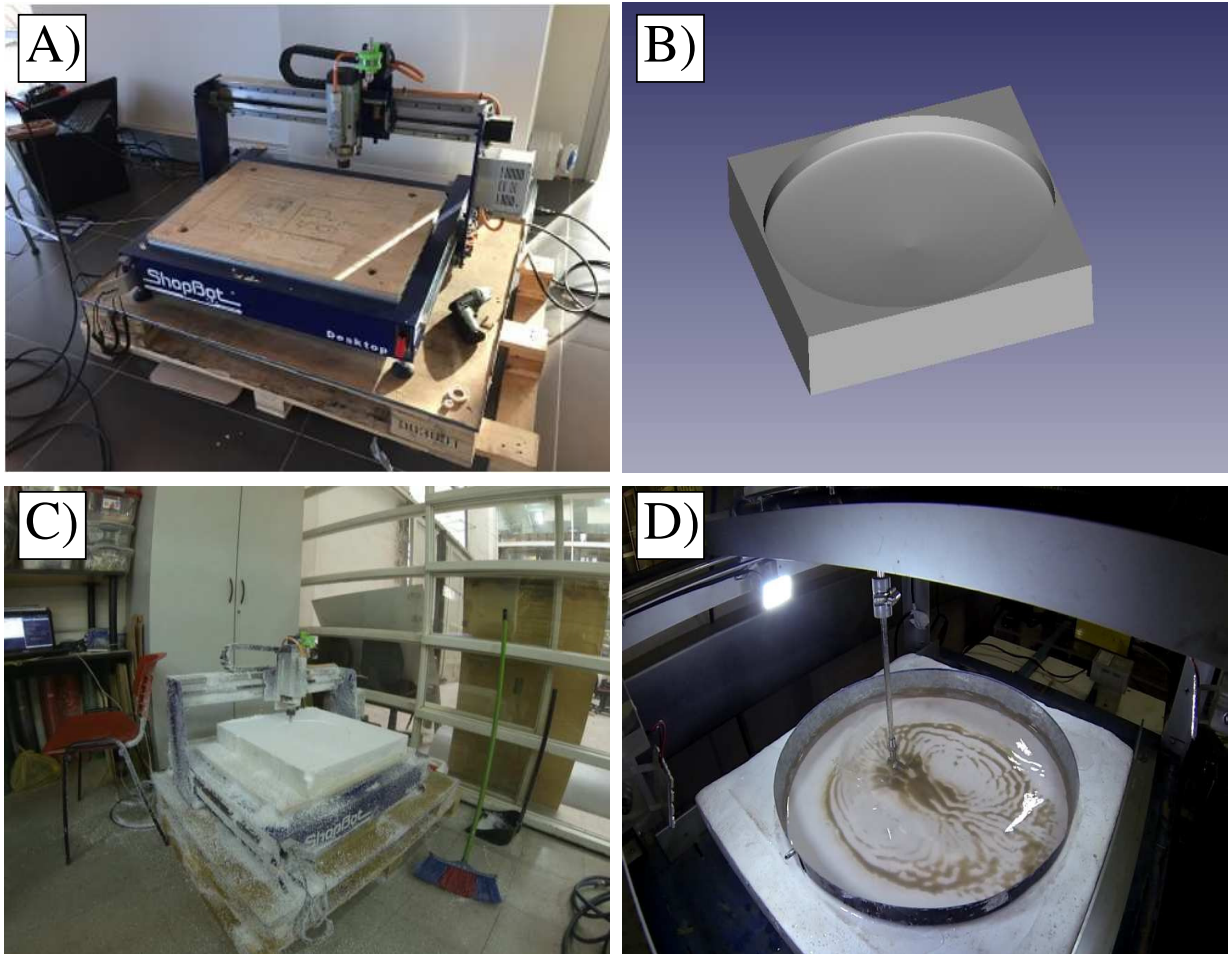


Figura 5.5: A) ShopBot Desktop en su ubicación actual en el Fablab. B) Modelo 3D de la geometría de Kranenburg (1992) visualizado en FreeCad. C) ShopBot durante la confección de la maqueta. D) Maqueta en uno de los ensayos. Se agrega una revancha para evitar el derrame de agua.

## 5.6. Propuestas de mejora a la instalación

La instalación siempre es susceptible de mejora. Y dentro de las primeras mejoras que se pueden realizar están la reconstrucción de la estructura que guía el camino de la oscilación. Actualmente la base posee ruedas que viajan sobre rieles de aluminio lo que puede ser reemplazado por guías metálicas que hagan que el movimiento de la mesa sea completamente horizontal y sin ninguna perturbación. Esta mejora incluye realizar una revisión completa de la nivelación del sistema.

El motor que induce la oscilación de la mesa es útil pero aún puede ser mejorado. En particular, el sistema de fijación de la amplitud de oscilación es poco preciso y el acople entre el brazo metálico y el eje de giro no es perfecto, lo que induce vibraciones indeseadas en el sistema.

Como parte de la idea original que da origen a la instalación se había considerado implementar un sistema de motores *stepper* que permitiera trasladar el ADV especialmente en la

maqueta hacia algunas posiciones determinadas mediante un control eléctrico. A la fecha, los motores y el sistema de control o drivers se tienen en el laboratorio pero falta implementarlos adecuadamente. La estructura y los ejes que determinan el traslado del sensor ya están contruidos, pero nuevamente son susceptibles de mejora. En particular, los ejes de giro y las guías de traslación del sensor pueden ser mejoradas.

Puede estudiarse la implementación de un control de información especial para la instalación. Este control tendría acceso directo a los datos de aceleración y velocidad y permitiría realizar las mediciones coordinadamente. Lo ideal sería lograr la instalación de un monitor que muestre ambas mediciones en tiempo real.

Finalmente, el esquema original también consideraba implementar un sistema de detección de deformación de superficie libre que utiliza una cámara y un proyector de franjas sobre la superficie, técnica que se conoce como profilometría en base a transformadas de Fourier (Cobelli *et al.* , 2009; Maurel *et al.* , 2009; Przadka *et al.* , 2012). Esta técnica se estudió pero requiere un proyector de corta distancia para evitar el aumento en la altura del sistema, la cual con un proyector convencional y para la maqueta ensayada debe ser de al menos  $1,5[m]$ .

# Capítulo 6

## Resultados

Este capítulo presenta los resultados numéricos y experimentales de la memoria.

### 6.1. Resultados Numéricos para el problema de Kranenburg (1992)

#### 6.1.1. Representación numérica

La figura (6.1) muestra la implementación computacional de la geometría de análisis. Con el propósito de normalizar los tiempos de cómputo se realiza un análisis de como cambia la solución a medida que se refina la malla. El problema de ejemplo es una simulación del problema de Kranenburg (1992). Se utiliza una geometría de  $R = 200[m]$ ,  $H = 0,15[m]$  y el forzante está caracterizado por una velocidad de corte de  $u_* = 0,001[ms^{-1}]$ . Se definen los indicadores

$$\Delta\eta_{CN} = \frac{|\eta_{CN} - \eta_{CN}^{\min \Delta x}|}{\eta_{CN}^{\min \Delta x}}, \quad (6.1)$$

$$\Delta\eta_{AM} = \frac{|\eta_{AM} - \eta_{AM}^{\min \Delta x}|}{\eta_{AM}^{\min \Delta x}}, \quad (6.2)$$

siendo  $\eta_{CN}$  y  $\eta_{AM}$  la deformación máxima de la superficie libre viento abajo la que se utiliza como parámetro de control. Estos indicadores cuantifican el cambio de una solución con respecto al caso simulado con la malla más fina. La tabla (6.1) muestra los tiempos de resolución y el valor de los indicadores previamente mencionados. A partir de estos resultados se determina que el espaciamiento entre nodos  $\eta$  de  $\Delta x = \Delta y = 0,1R$  resuelve adecuadamente el problema para ambas metodologías en un tiempo de cálculo que permite llevar a cabo múltiples simulaciones a cambio de una pequeña pérdida de precisión.



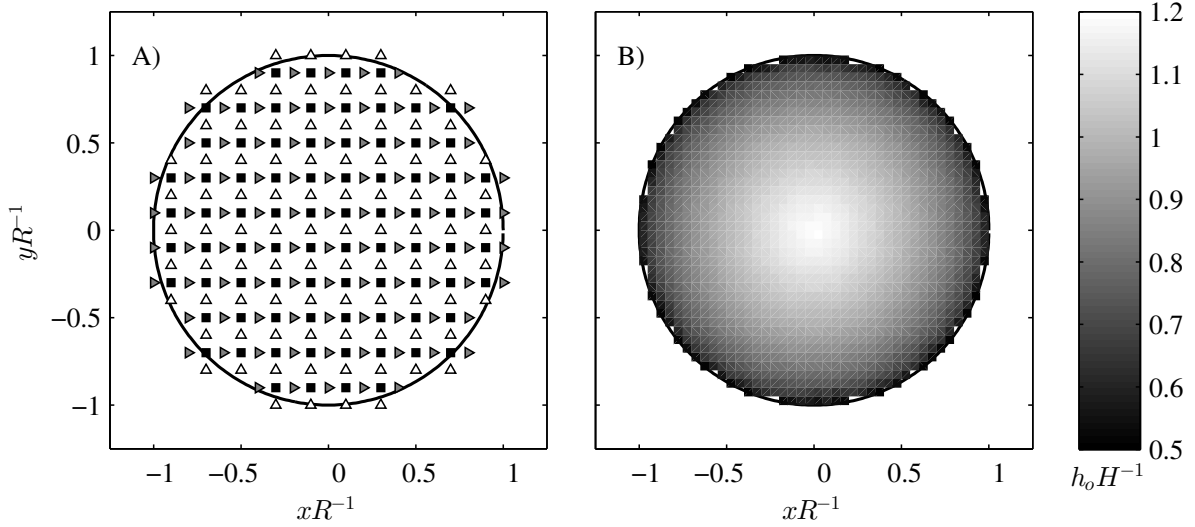


Figura 6.1: A) Implementación de la malla alternada o *staggered*. Los cuadrados negros son los nodos en donde se resuelve la variable  $\eta$ . Los triángulos que apuntan hacia la derecha son los nodos de velocidad  $U$  y los triángulos que apuntan hacia arriba son los nodos de velocidad  $V$ . El espaciamiento entre puntos está aumentado para facilitar la visualización. B) Distribución espacial de batimetría.

Tabla 6.1: Comparación de tiempos de cálculo en función del refinamiento de la malla. El computador en el que han sido realizado estos cálculos es un Samsung R440 con procesador Intel ©Core™ i3 CPU M370 @ 2.40GHz x 2 y 3.7 Gb de memoria ram.

$\Delta x/R$	$t_{CN}[s]$	$\Delta\eta_{CN} \times 100$	$t_{AM}[s]$	$\Delta\eta_{AM} \times 100$
1/5	3.3	10.5	0.5	10.6
1/10	14	2.8	17.8	2.8
1/15	29.5	0	280.5	0

### 6.1.2. Solución hidrodinámica

Como se vio en el capítulo 2 los adimensionales de relevancia en el problema de Kranenburg (1992) son el número de Wedderburn  $\mathbf{W}$  y la relación de aspecto  $\psi$ . Es de interés conocer como se comporta el coeficiente de fricción en función de estos parámetros, el cual es un término que debe ser calibrado en el modelo. La solución analítica del flujo propuesta por Kranenburg (1992), mostrada en la ecuación (2.49), sirve como solución objetivo de una simulación numérica. La idea es variar el coeficiente de fricción hasta que se minimice el error entre la simulación numérica y el perfil analítico (Fig 6.2A).

Para realizar el análisis anterior se ejecutan una serie de simulaciones variando el número de Wedderburn y la relación de aspecto según los rangos mostrados en la tabla (6.2). Estas simulaciones se realizan para hojas de distinto tamaño y los resultados se muestran en la Figura (6.2B).

Tabla 6.2: Rangos de variación de parámetros para simulaciones utilizadas en el análisis del coeficiente de fricción. Las simulaciones son resueltas utilizando la técnica del Análisis Modal.

Parámetro	Rango
$\mathbf{W}$	$10^0 - 10^4$
$\psi$	$10^0 - 10^5$

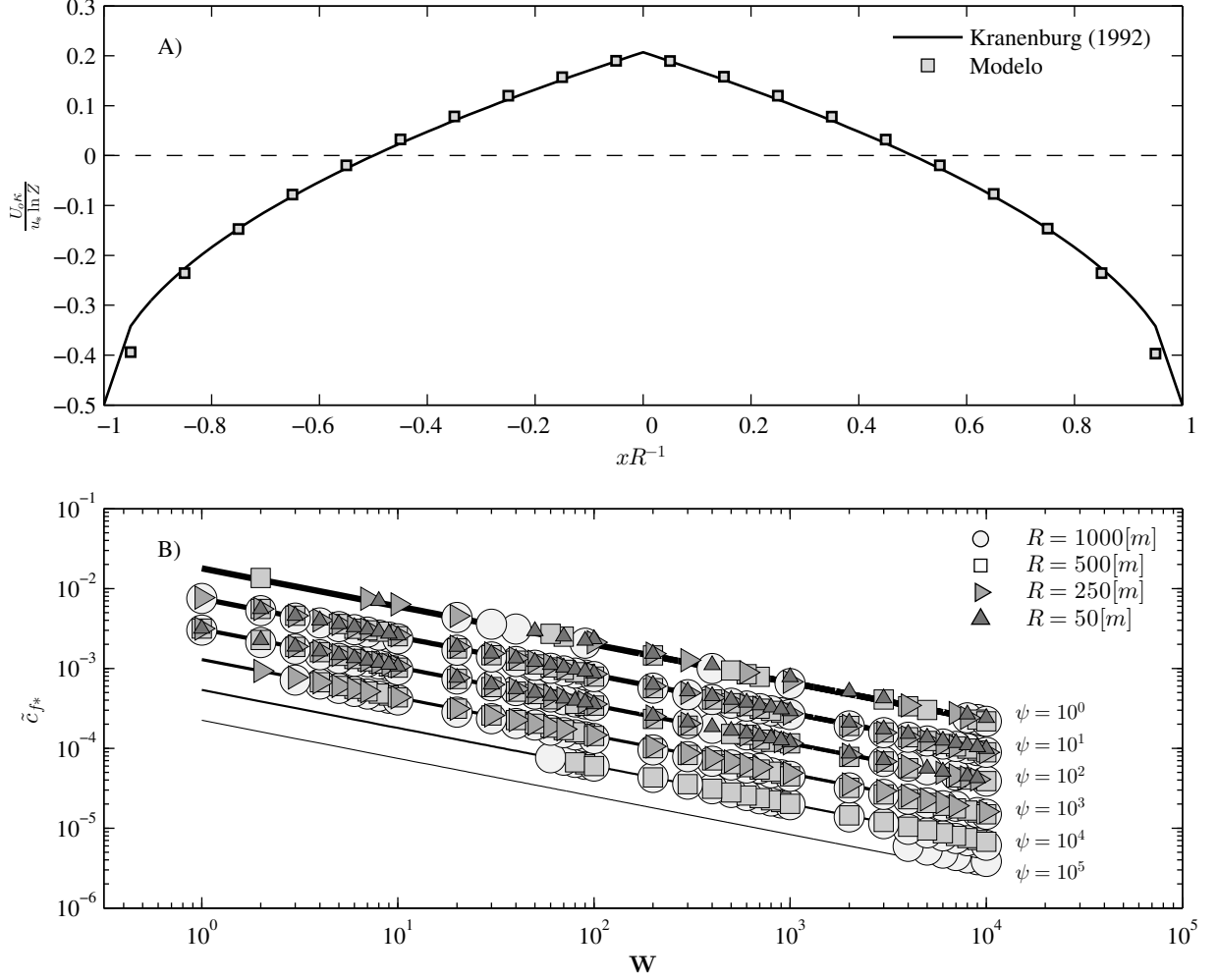


Figura 6.2: Calibración del coeficiente de fricción para el problema de Kranenburg (1992) A) Puntos de la simulación numérica con respecto a la solución analítica B) Variación del coeficiente de fricción adimensional  $\tilde{c}_{f*}$  versus el número de Wedderburn  $\mathbf{W}$  para distintas relaciones de aspecto  $\psi$ . Las rectas representan el ajuste de los datos para cada valor de  $\psi$ . Mientras más delgada es la recta de ajuste, la laguna es más somera.

Observando el patrón de tendencia que sigue el coeficiente de fricción en la Figura (6.2B), se puede anticipar que el comportamiento de este puede ser descrito por una regresión bilineal del tipo

$$\tilde{c}_{f*} = \alpha \mathbf{W}^\beta \psi^\gamma \quad (6.3)$$

Tabla 6.3: Parámetros de ajuste del coeficiente de fricción adimensional en función del número de Wedderburn y la relación de aspecto.

Parámetro	Valor	Intervalo de confianza (95 %)
$\alpha$	0,0188	[0,0186 - 0,0191]
$\beta$	-0,4765	[-0,4786 - -0,4744]
$\gamma$	-0,3804	[-0,3824 - -0,3784]

Los valores de los coeficientes de ajuste  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  con sus respectivos intervalos de confianza se muestran en la tabla (6.3), y cabe mencionar que la tendencia es avalada por el valor del parámetro  $r^2 = 0,99$ .

Considerando los valores de los coeficientes de ajuste se aprecia que el coeficiente de fricción adimensional es influenciado tanto por el número de Wedderburn como por la relación de aspecto, es decir, el parámetro responde tanto a la magnitud relativa del forzante externo como a la estructura geométrica de la hoya. La importancia de estimar adecuadamente la fricción, radica en que esta controla tanto la magnitud de las corrientes horizontales como de la deformación de la superficie libre. En la práctica, el modelo podría resolver las ecuaciones utilizando un coeficiente de fricción constante, sin embargo, el resultado no sería coincidente con lo predicho por Kranenburg (1992) lo que puede considerarse como incorrecto. Cabe mencionar que la solución analítica carece de validación experimental, pero al ser la única estimación del flujo con la cual se puede comparar el resultado numérico, para efectos de este trabajo se considera como válida.

Observando el panel B de la figura (6.2) se aprecia que faltan puntos del total de casos simulados en el gráfico. Esto es producto de que la resolución con el Análisis Modal para los casos ausentes, falló. La falla en general corresponde a que se obtienen campos de velocidad que no concuerdan con el gradiente de presión lo que se estima que es producto de un problema de precisión en el cómputo de los valores y vectores propios. También existen casos en los que la deformación de la superficie libre interseca a la batimetría, lo que se genera por que el modelo no cuenta con los algoritmos necesarios para representar los nodos secos. Queda pendiente entender porqué al variar el radio de la hoya, cambia la cantidad de casos que se resuelven correctamente con esta metodología. Independiente de lo anterior el análisis demuestra que si se acepta como válida la solución analítica del flujo, para que la solución numérica sea correcta es necesario que la estimación del coeficiente de fricción tome en cuenta el número de Wedderburn y la relación de aspecto. La curva bilineal ajustada sirve como una primera estimación para el coeficiente de fricción, por lo que debiera corroborarse la solución del flujo en cada simulación y eventualmente refinar la estimación del coeficiente.

La figura (6.3) muestra los patrones de circulación del régimen permanente obtenidos con las ecuaciones lineales. Se observa que estos cumplen con las circulaciones elípticas predichas por Kranenburg (1992). La solución cumple además con las observaciones de Csanady (1973), quién indica que el flujo es contrario a la dirección del viento en las zonas de mayor profundidad de la laguna. Las mayores velocidades se alcanzan en las zonas más bajas de la hoya y son coincidentes con la dirección del viento (Fig 6.3 B).

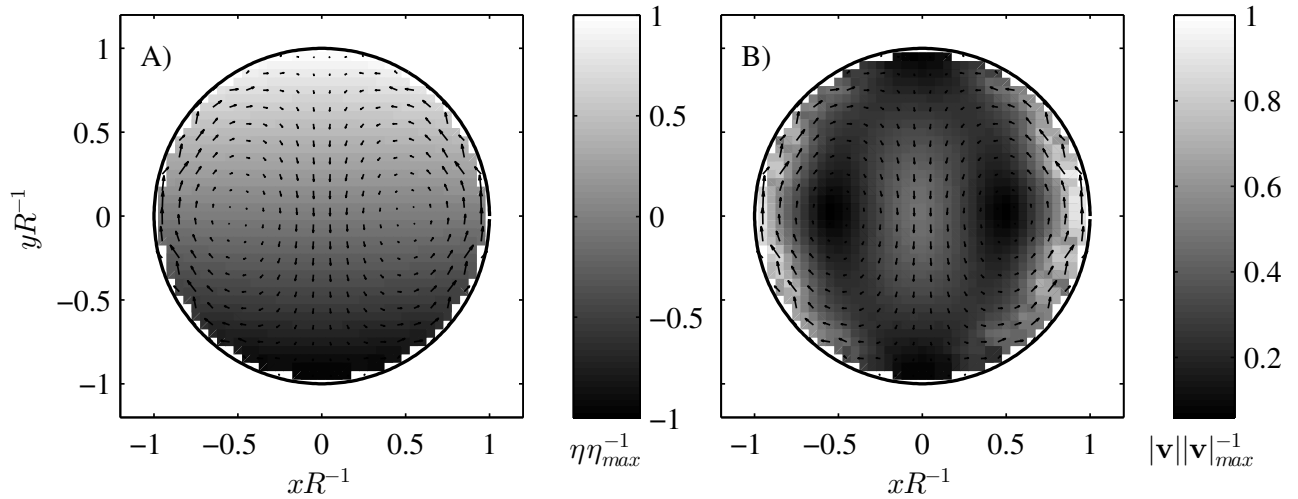


Figura 6.3: Solución hidrodinámica del problema de Kranenburg (1992). El viento sopla desde  $-y$  hacia  $+y$ . Las flechas indican la dirección del flujo A) Deformación de la superficie libre B) Magnitud de la velocidad local normalizada por la velocidad máxima.

En la figura (6.4 A) se observan perfiles de deformación de la superficie libre y como varía el comportamiento de esta a medida que cambia el número de Wedderburn. La superficie libre crece en la dirección que sopla el viento, lo que surge como respuesta natural del sistema para equilibrar el forzante externo. Al disminuir el valor del número de Wedderburn, aumenta la deformación máxima con respecto al reposo, la cual se obtiene en los extremos de viento arriba y viento abajo. En la práctica, que disminuya el número de Wedderburn significa que, dada una geometría, aumenta el esfuerzo de corte del viento. Además, considerando la versión adimensional de las ecuaciones, se aprecia que una disminución de este parámetro significa que crece el efecto del forzante adimensional en el problema.

Con respecto a la deformación máxima de la superficie libre (Fig. 6.4B), Csanady (1973) ya había predicho que por efecto de las corrientes horizontales esta debiera disminuir en comparación a un caso que no considere las corrientes. Sin embargo, no cuantificó el efecto y no se han encontrado otras referencias que mencionen este asunto. Se observa que la expresión (4.21), la cual se dedujo en el desarrollo teórico, se ajusta con el resultado obtenido del modelo numérico y que ambos difieren de la estimación de la deformación máxima obtenida a partir del análisis del caso unidimensional. Este comportamiento se aprecia con notoriedad para  $\mathbf{W} < 10$ .

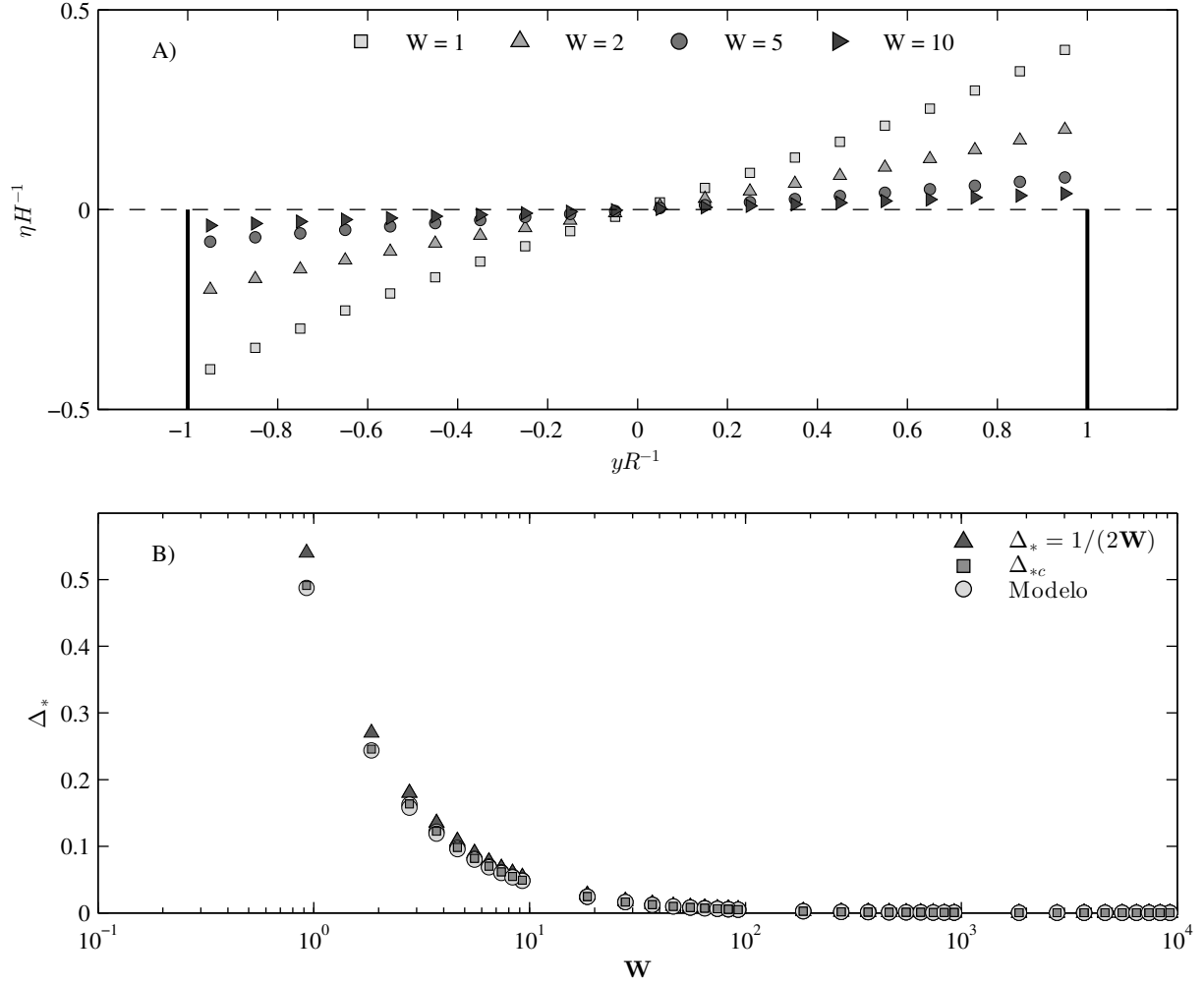


Figura 6.4: A) Perfiles de deformación normalizada de la superficie libre para distintos números de Wedderburn B) Deformación máxima de la superficie libre viento abajo en función del número de Wedderburn. En círculos grises se muestran los resultados del modelo numérico, los cuadrados grafican el valor estimado con la corrección por corrientes horizontales  $\Delta_{*c}$  y los triángulos muestran la estimación obtenida del análisis unidimensional  $\Delta_*$  (Shintani *et al.*, 2010).

### 6.1.3. Análisis de energía mecánica

En el desarrollo teórico se dedujo la expresión (4.34) para estudiar la variación de la energía mecánica en el tiempo. Esta se aplica al problema de Kranenburg (1992) lo que en conjunto con el Análisis Modal permite entender el comportamiento energético del sistema.

Las estructuras obtenidas con el Análisis Modal pueden ser distribuidas en dos grandes grupos: aquellas que oscilan ( $\omega \neq 0$ ) y aquellas que no ( $\omega = 0$ ). Las estructuras oscilatorias cumplen con las propiedades explicadas en Platzman (1984) y Shimizu & Imberger (2008) mientras que sobre los patrones no oscilatorios existe poca información. Platzman (1984) hace mención a la existencia de estructuras no oscilatorias pero indica que su aparición puede ser una consecuencia no importante de la discretización. Además, reconoce la existencia de una estructura no oscilatoria necesaria para describir la disipación radiativa, la cual es una condición de borde en su sistema de ecuaciones que permite que el flujo transmita energía a las estructuras terrestres con las que interactúa. Tal condición de borde no existe en el problema resuelto en este trabajo.

La figura (6.5) presenta la evolución temporal de la energía mecánica para uno de los casos simulados del problema de Kranenburg (1992). El panel A muestra que la energía en el sistema responde oscilatoriamente al comienzo de la excitación, en particular, se observa que las primeras oscilaciones son principalmente producto de las variaciones en la energía potencial. A medida que se tiende al régimen permanente, la energía cinética cobra importancia llegando a concentrar el 78 % del total de energía. Las estructuras no oscilatorias acumulan energía en el tiempo pero no influyen en las oscilaciones de energía total que tiene el sistema (Fig. 6.5 B); acumulan prácticamente el total de energía cinética, la cual puede oscilar en el transcurso que se tiende al régimen permanente, pero estas oscilaciones son producto exclusivo de la influencia de los modos oscilatorios, en particular al inicio del proceso de acumulación de energía (Fig. 6.5 C). Las estructuras oscilatorias son responsables del comportamiento de la energía potencial, la cual no recibe aportes de los modos no oscilatorios (Fig. 6.5 D).

Este comportamiento demuestra que son las estructuras no oscilatorias las que dan forma al patrón de circulación que se obtiene en el régimen permanente mostrado en la Figura (6.3 A). Para el caso simulado, la discretización cuenta con un total de 908 nodos por lo que se tienen 908 estructuras modales. De estas, 315 corresponden a estructuras oscilatorias, 277 a estructuras no oscilatorias y sólo una tiene valor propio cero. Como se puede corroborar en el anexo B, las 315 estructuras oscilatorias corresponden realmente a 630 modos puesto que los conjugados de estas también son solución del problema de valores y vectores propios (Platzman, 1984; Shimizu & Imberger, 2008).

Para completar el análisis, se identifican las estructuras fundamentales del problema en función de la cantidad de energía que aportan a la solución del régimen permanente, las cuales se muestran en la figura (6.6). Los paneles A y B muestran estructuras de energía potencial oscilatorias mientras que los paneles C y D presentan estructuras de energía cinética no oscilatorias. Estas últimas, presentan sectores en los que existe un campo de velocidad distinto de cero y si bien parecen tener una distribución de superficie libre, su aporte en energía potencial es despreciable. Esto refuerza la idea de que el patrón de flujo del régimen permanente es inducido por la superposición de todas las estructuras no oscilatorias.

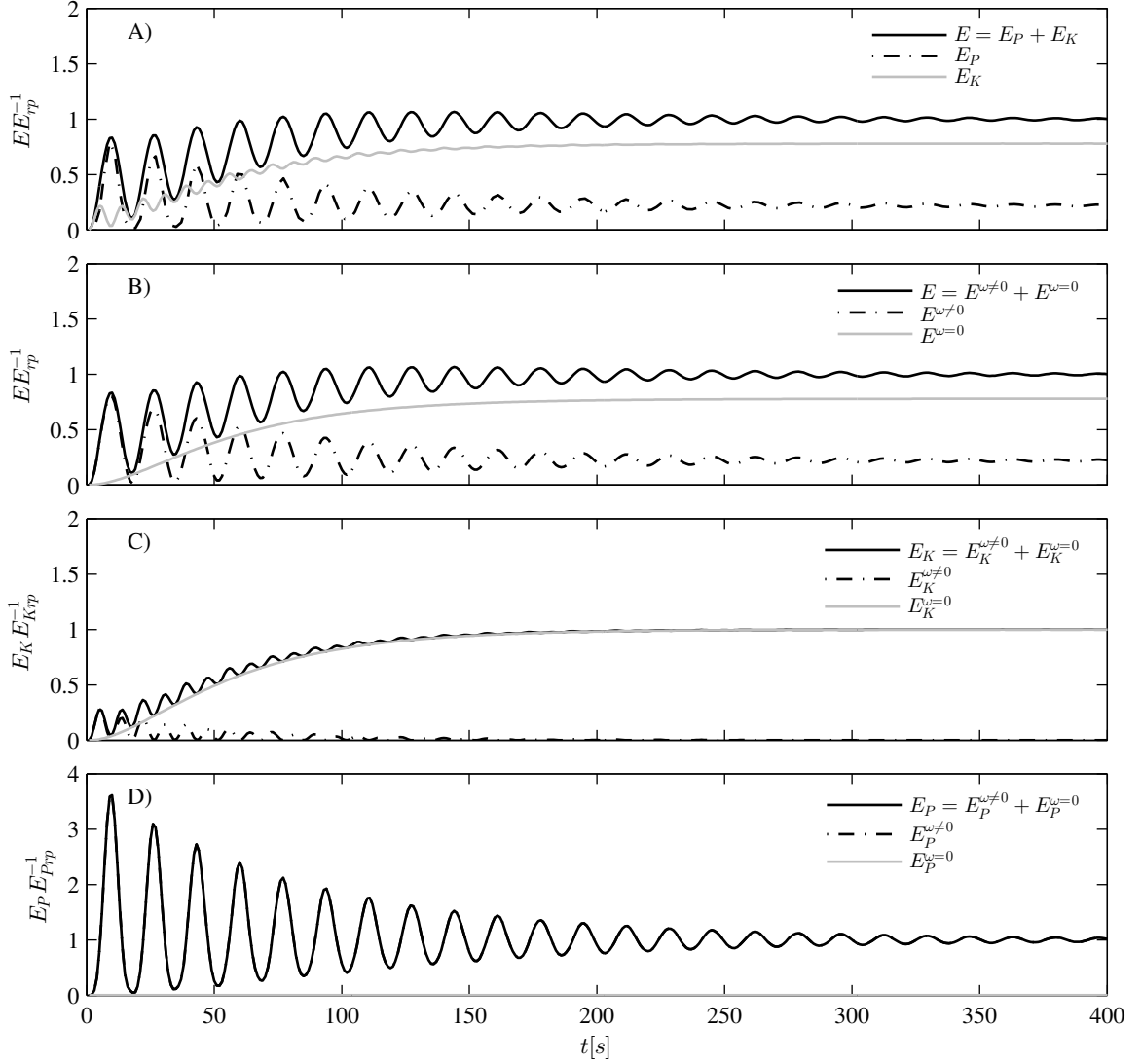


Figura 6.5: Comportamiento de la energía en el tiempo para  $\mathbf{W} = 1000$  y  $\psi = 10^5$  A) Energía total  $E$  normalizada por la energía del régimen permanente  $E_{rp}$  y su distribución entre energía potencial y cinética B) Distribución entre energía aportada por las estructuras oscilatorias ( $\omega \neq 0$ ) y por las no oscilatorias ( $\omega = 0$ ) C) Evolución del total de energía cinética y su distribución entre estructuras oscilatorias y no oscilatorias D) Evolución del total de energía potencial y su distribución entre estructuras oscilatorias y no oscilatorias.

En otros trabajos (e.g. Rozas, 2011; Shimizu & Imberger, 2008) para representar soluciones del flujo en sistemas multicapa se utiliza solo una fracción del total de modos. Esta simplificación no puede ser realizada en el caso de una capa con batimetría variable, puesto que las corrientes del régimen permanente requieren prácticamente el total de las estructuras no oscilatorias dado que cada una aporta una pequeña fracción del campo de velocidad. De todas formas la energía potencial si podría ser representada por un par de modos pero ese análisis no se ha realizado en este trabajo.

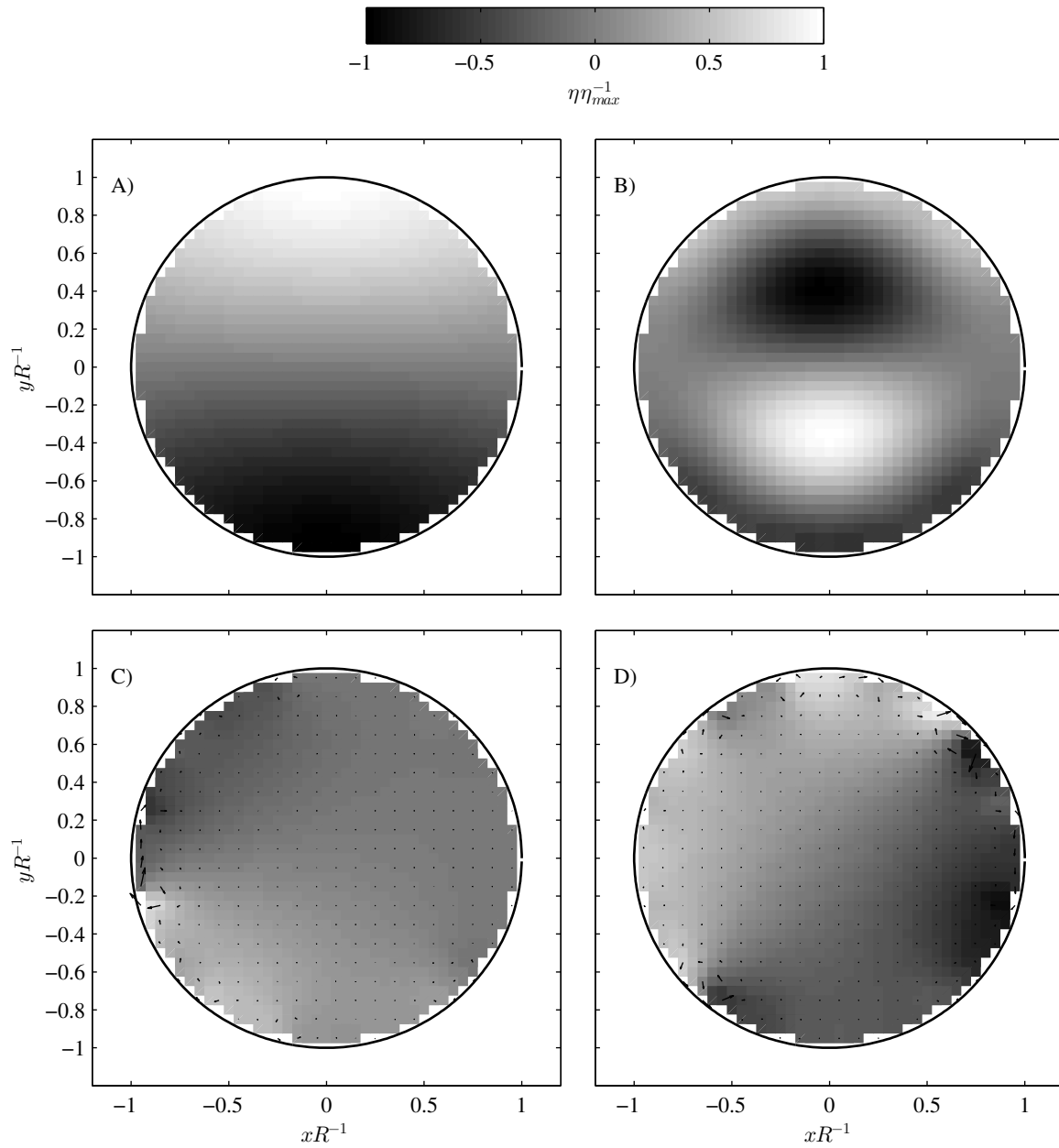


Figura 6.6: Estructuras oscilatorias cuyo aporte al total de la energía potencial es A) 98,6% B) 1,1%. Estructuras no oscilatorias cuyo aporte al total de la energía cinética es C) 8,1% D) 3,8%.



La figura (6.7) presenta algunas comparaciones de los resultados que se obtienen resolviendo el problema con Crank Nicolson y con el Análisis Modal para una hoja de radio  $R = 1000[m]$ ,  $\mathbf{W} = 100$  y  $\psi = 10^5$ . Ambas metodologías representan el perfil de velocidad analítico en el régimen permanente de Kranenburg (1992), pero con una pequeña diferencia en la magnitud del resultado (Fig. 6.7 A). Si se calcula la evolución de la solución en el tiempo, o sea  $\xi(\vec{x}, t)$ , se pueden calcular las tasas de inyección y disipación de energía usando las expresiones mostradas en la deducción de la ecuación (4.34). La solución obtenida con Crank Nicolson satisface la condición del régimen permanente  $\dot{W} = \dot{D}$  (Fig. 6.7 B), mientras que con el Análisis Modal no se cumple exactamente (Fig. 6.7 C). Esto no significa que la solución obtenida con esta metodología sea errónea, sino que demuestra que en el cómputo se introduce un error en la solución, lo cual no ocurre con Crank Nicolson.

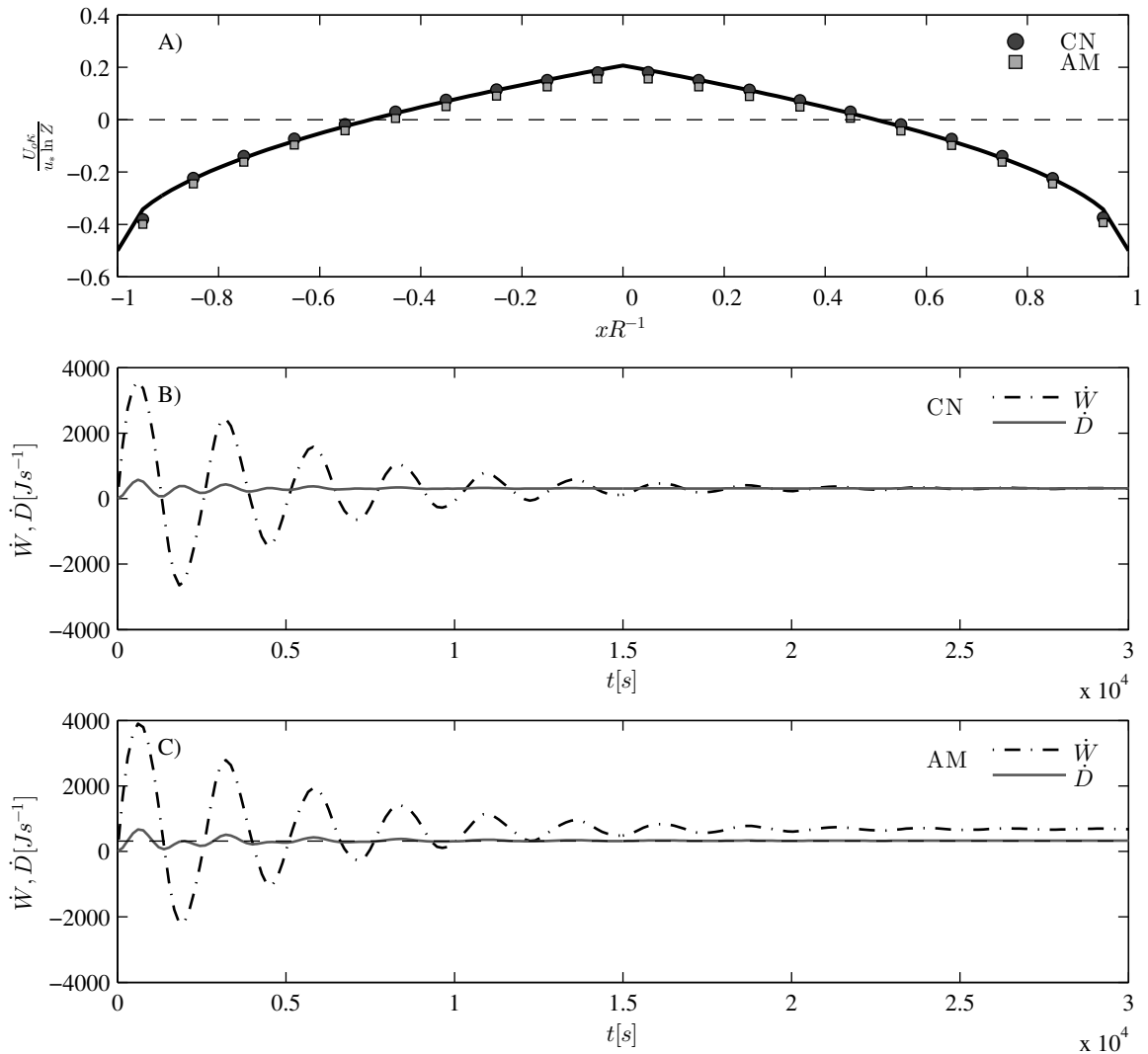


Figura 6.7: Resultados para una simulación con  $R = 1000[m]$ ,  $\mathbf{W} = 100$  y  $\psi = 10^5$  A) Comparación de los perfiles de velocidad numéricos usando el Análisis Modal y Crank Nicolson. Evolución temporal de la potencia inyectada y disipada para B) Crank Nicolson C) Análisis Modal. En este último caso la línea segmentada indica el valor que debiera alcanzar cada término en el régimen permanente.

Utilizar la técnica del Análisis Modal para el régimen impermanente resolviendo la ecuación para la amplitud modal (2.9), es en esencia lo mismo que resolver el problema con un esquema Crank Nicolson. Sin embargo, el paso en el cual ambas metodologías difieren es en el cálculo de valores y vectores propios que se realiza con el Análisis Modal. Este cálculo es intensivo computacionalmente y es el que introduce errores en los resultados obtenidos para las estructuras modales y frecuencias de oscilación. Una forma de corroborar esto numéricamente es comparando algunos de los valores propios obtenidos que teóricamente debiesen ser iguales, pero a partir de cierta posición de decimales, no lo son. Esto tiene relación con la precisión de cálculo de cualquier programa numérico.

Para entender desde un punto de vista teórico cuales son las consecuencias de introducir un error de cómputo en el cálculo de los vectores propios y explicar el resultado obtenido en la figura (6.7 C) se realiza el siguiente análisis de propagación de error.

En principio, se considera la ecuación para la amplitud modal en el régimen permanente con forzante externo constante y uniforme (2.10) con el propósito de clarificar el efecto del error y luego se analiza que ocurre con la solución del régimen impermanente. La ecuación (2.10) es

$$\tilde{a}^{R(r)} = -\frac{\tilde{f}^{R(r)}}{(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})\tilde{e}^{R(r)}}, \quad (6.4)$$

en donde  $\tilde{f}^{R(r)} = \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, \mathbf{f} \rangle$  es el forzante modal y  $\tilde{e}^{R(r)} = \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \rangle$  es el factor de normalización por la derecha. Para efectos de esta deducción se considera que el error introducido en los valores propios puede ser despreciado en comparación al efecto que se tiene sobre los vectores propios. Se definen las estructuras modales del problema como

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{L(r)} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} \pm \Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{R(r)} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \pm \Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad (6.5)$$

en donde  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{L(r)}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{R(r)}$  son las estructuras modales obtenidas del cálculo numérico por la izquierda (Left) y derecha (Right) respectivamente, y  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}$  es el error de cómputo. Es importante notar que esta definición dice que la estructura modal calculada numéricamente es igual a la estructura modal *real* o teórica más un error que se introduce en el cálculo numérico. Se asume que el error de cómputo es el mismo tanto para el problema de la derecha como el de la izquierda y que no depende de la estructura  $r$  que se analice en particular. Al introducir este error, el cálculo del factor de normalización arroja que

$$\tilde{e}^{R(r)} = \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{L(r)}, \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{R(r)} \rangle \mp \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{L(r)}, \mathbf{M}\Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}} \rangle \mp \langle \Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{R(r)} \rangle \mp \langle \Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{M}\Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}} \rangle, \quad (6.6)$$

expresión que puede ser redefinida como

$$\tilde{e}_c^{R(r)} = \tilde{e}^{R(r)} \pm \Delta\tilde{e}^{R(r)}, \quad (6.7)$$

siendo  $\tilde{e}_c^{R(r)} = \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{L(r)}, \mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{R(r)} \rangle$  el factor de normalización calculado numéricamente y  $\Delta\tilde{e}^{R(r)}$  el error que se introduce en el cálculo de este parámetro y que agrupa el resto de los términos en la expresión (6.6). Es importante notar que este error depende de la estructura  $r$  en análisis. Análogamente, para el forzante modal se obtiene que

$$\tilde{f}^{R(r)} = \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{L(r)}, \mathbf{f} \rangle \mp \langle \Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{f} \rangle, \quad (6.8)$$

expresión que se redefine como

$$\tilde{f}_c^{R(r)} = \tilde{f}^{R(r)} \pm \Delta\tilde{f}, \quad (6.9)$$

siendo  $\tilde{f}_c^{R(r)} = \langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}_c^{L(r)}, \mathbf{f} \rangle$  el forzante modal que se calcula numéricamente y  $\Delta\tilde{f} = \langle \Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{f} \rangle$  el error que se introduce en el cómputo, el cual en este caso no depende de la estructura en análisis.

Reemplazando las ecuaciones (6.7) y (6.9) en la ecuación (6.4) se puede concluir que

$$\tilde{a}_c^{R(r)} = \tilde{a}^{R(r)} \pm \Delta\tilde{a}^{R(r)}, \quad (6.10)$$

en donde en este caso no es posible realizar una estimación concreta de los términos  $\tilde{a}_c^{R(r)}$  y  $\Delta\tilde{a}^{R(r)}$  como en los pasos previos debido a que en el numerador de la ecuación (6.4) aparece el error del forzante modal y en el denominador se tiene el error del factor de normalización, por lo que la expresión (6.4) no puede ser descompuesta o separada de la forma tradicional. Sin embargo, se define que  $\tilde{a}_c^{R(r)}$  es la amplitud calculada numéricamente y  $\Delta\tilde{a}^{R(r)}$  es la influencia del error en el cálculo de este parámetro, la cual por ahora no tiene una expresión definida y depende de la estructura  $r$ .

En virtud de la expresión (2.6), el error que se introduce en el cálculo de las amplitudes modales se transfiere al vector de estado, que es la solución del problema. La combinación lineal presentada en la ecuación (2.6) es

$$\boldsymbol{\xi}(\vec{x}, t) = \sum_r \tilde{a}^{R(r)}(t) \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \quad (6.11)$$

Considerando el régimen permanente e introduciendo las ecuaciones (6.10) y (6.5) en la expresión anterior se obtiene

$$\boldsymbol{\xi}(\vec{x}) = \sum_r \tilde{a}_c^{R(r)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})_c^{R(r)} \mp \sum_r \tilde{a}_c^{R(r)} \Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}} \mp \sum_r \Delta\tilde{a}^{R(r)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})_c^{R(r)} \mp \sum_r \Delta\tilde{a}^{R(r)} \Delta\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad (6.12)$$

expresión que puede ser reordenada para obtener

$$\boldsymbol{\xi}(\vec{x})_c = \boldsymbol{\xi}(\vec{x}) \pm \Delta\boldsymbol{\xi}, \quad (6.13)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}(\vec{x})_c = \sum_r \tilde{a}_c^{R(r)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})_c^{R(r)}$  es el vector de estado calculado numéricamente y  $\Delta\boldsymbol{\xi}$  el error que agrupa el resto de los términos en la expresión (6.12). Lo importante de este análisis es que se hace evidente que el error introducido en el cálculo de los vectores propios se propaga hasta la solución final del problema y obviamente condiciona los cálculos posteriores que se realicen con este resultado. Además, el error obtenido aumenta su magnitud constantemente puesto que proviene desde productos interiores los cuales en la práctica son una suma de los productos elemento a elemento entre vectores.

La tasas de inyección y disipación de energía en el régimen permanente se calculan respectivamente como  $\dot{W} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi} \rangle$  y  $\dot{D} = -i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \rangle$ . Introduciendo la expresión (6.13) en el cálculo de  $\dot{W}$  se obtiene que

$$\dot{W} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi}_c \rangle \mp \langle \mathbf{f}, \Delta\boldsymbol{\xi} \rangle, \quad (6.14)$$

expresión que se reordena para obtener

$$\dot{W}_c = \dot{W} \pm \Delta\dot{W}, \quad (6.15)$$

siendo  $\dot{W}_c = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\xi}_c \rangle$  la tasa de inyección calculada numéricamente y  $\Delta\dot{W}$  el error en el cálculo de la inyección de energía. Análogamente para la tasa de disipación

$$\dot{D} = -i [\langle \boldsymbol{\xi}_c, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_c \rangle \mp \langle \boldsymbol{\xi}_c, \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\xi} \rangle \mp \langle \Delta\boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_c \rangle \mp \langle \Delta\boldsymbol{\xi}, \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\xi} \rangle] \quad (6.16)$$

$$\dot{D}_c = \dot{D} \pm \Delta\dot{D}, \quad (6.17)$$

en donde  $\dot{D}_c = -i \langle \boldsymbol{\xi}_c, \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_c \rangle$  es la tasa de disipación calculada numéricamente y  $\Delta\dot{D}$  es el error que agrupa el resto de los términos de la expresión (6.16).

El análisis teórico realizado muestra en detalle los pasos realizados para el cálculo de las tasas de inyección y disipación de energía del régimen permanente, mostradas al final de las series graficadas en la figura (6.7 C), y permite entender porqué la solución del Análisis Modal no cierra exactamente el balance energético. En el anexo B la expresión (B.57) muestra la evolución temporal de la amplitud modal para el problema con forzante externo constante y uniforme en el tiempo. Esta expresión es

$$\tilde{a}^{R(r)}(t) = \frac{-\tilde{f}^{R(r)}}{(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})\tilde{c}^{R(r)}} \left[ 1 - e^{([i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}]t)} \right], \quad (6.18)$$

en donde se considera que la amplitud inicial para cada modo es nula. Observando esta expresión es fácil ver que el análisis realizado para el régimen permanente aplica análogamente para el régimen impermanente puesto que los términos que absorben el error introducido por los vectores propios son independientes del tiempo. Esto indica además que el error introducido en el cálculo de la amplitud es constante en el tiempo, comportamiento que se puede apreciar la figura (6.7 C) al notar que la separación entre las series graficadas no crece con el tiempo.

A modo de conclusión del desarrollo anterior, la metodología que presenta el resultado *más correcto* es la de Crank Nicolson. Esto producto de que el cómputo de la solución es directo y no hay procesos de cálculo intermedios que puedan introducir errores a diferencia del Análisis Modal, el cual funciona en base al cálculo de un problema de valores y vectores propios. Este es de alta intensidad computacional e induce la aparición de errores que se propagan dada la gran cantidad de operaciones que involucran productos vectoriales entre modos o vectores propios. Además, se comprueba que el producto interior entre vectores distintos, el cual teóricamente es nulo, numéricamente no lo es para algunos casos. Es cercano a cero, pero no cero.

Dado que el objetivo final de este modelo es estudiar el transporte escalar, el cual depende de las corrientes horizontales, se opta por resolver este problema utilizando la metodología de Crank Nicolson la cual entrega un resultado coherente para la hidrodinámica, es decir, cumple con la generación de corrientes y cumple perfectamente con el balance energético.

Cabe mencionar que la parametrización para el coeficiente de fricción encontrada a partir de las simulaciones realizadas con el Análisis Modal se puede extender como primera estimación para Crank Nicolson. Sin embargo, en algunos casos es necesario corregir este parámetro para que el flujo se ajuste al perfil adimensional de Kranenburg (1992) por lo que se recomienda revisar constantemente la calidad de la solución obtenida.

### 6.1.4. Análisis de transporte escalar sin dispersión horizontal

Esta sección presenta los resultados correspondientes al transporte de OD en lagunas someras energizadas por viento considerando los flujos verticales de OD con la atmósfera y los sedimentos. Las simulaciones que se presentan en esta sección no consideran el efecto de la dispersión horizontal, por lo que principalmente se analiza la interacción de los flujos verticales de OD con las corrientes horizontales, proceso que está caracterizado por el número de Péclét de la difusión vertical definido en la expresión (4.65) del capítulo 4.

La figura (6.8 A) muestra la distribución espacial del número de Péclét de la difusión vertical para el régimen permanente de una simulación cuyos parámetros son  $\mathbf{W} = 6000$ ,  $\psi = 10^3$  y  $R = 500[m]$ . Se observa que las zonas con el menor número de Péclét coinciden con aquellos sectores de la laguna que presentan las menores velocidades del flujo, como se vio en la figura (6.3 B). Mientras menor es el número de Péclét de la difusión vertical, mayor relevancia tiene el proceso difusivo en relación a la advección horizontal.

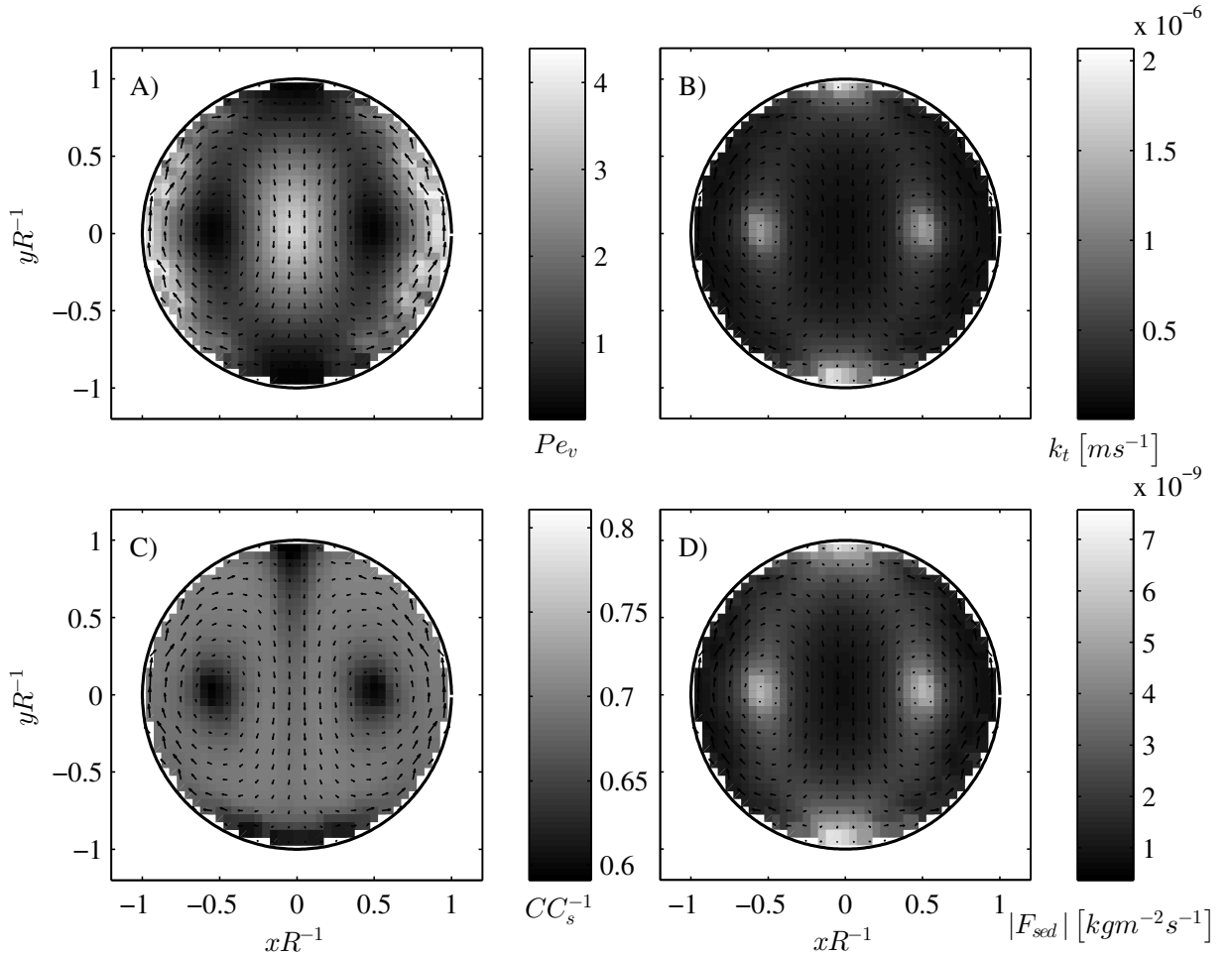


Figura 6.8: Resultados de transporte escalar para  $\mathbf{W} = 6000$ ,  $\psi = 10^3$  y  $R = 500[m]$ . Distribuciones espaciales de A) Número de Péclét de la difusión vertical B) Velocidad de transferencia vertical de OD en los sedimentos C) Concentración de OD adimensional D) Magnitud del flujo hacia los sedimentos.

La figura (6.8 B) muestra la distribución espacial de la velocidad de transferencia vertical de OD entre el agua y los sedimentos calculada con la expresión (2.34) (de la Fuente *et al.*, 2015). Se observa que las zonas con menores velocidades horizontales permiten obtener las mayores velocidades de transferencia vertical de OD, por ende y considerando la distribución espacial del número de Péclét, se puede anticipar que las zonas de la laguna con menores velocidades horizontales, son las que propician las condiciones óptimas para que el consumo de OD en los sedimentos sea máximo. O sea, las zonas más lentas en el patrón de corrientes horizontales tendrían las menores concentraciones de OD (Fig. 6.8 C) y las mayores magnitudes del flujo vertical hacia los sedimentos (Fig. 6.8 D).

La implementación de los volúmenes finitos se ha realizado con la posibilidad de resolver el problema impermanente, especificando la condición inicial para la concentración. La figura (6.9 A) muestra la evolución temporal de la concentración promedio espacial para distintas condiciones iniciales de concentración uniforme.

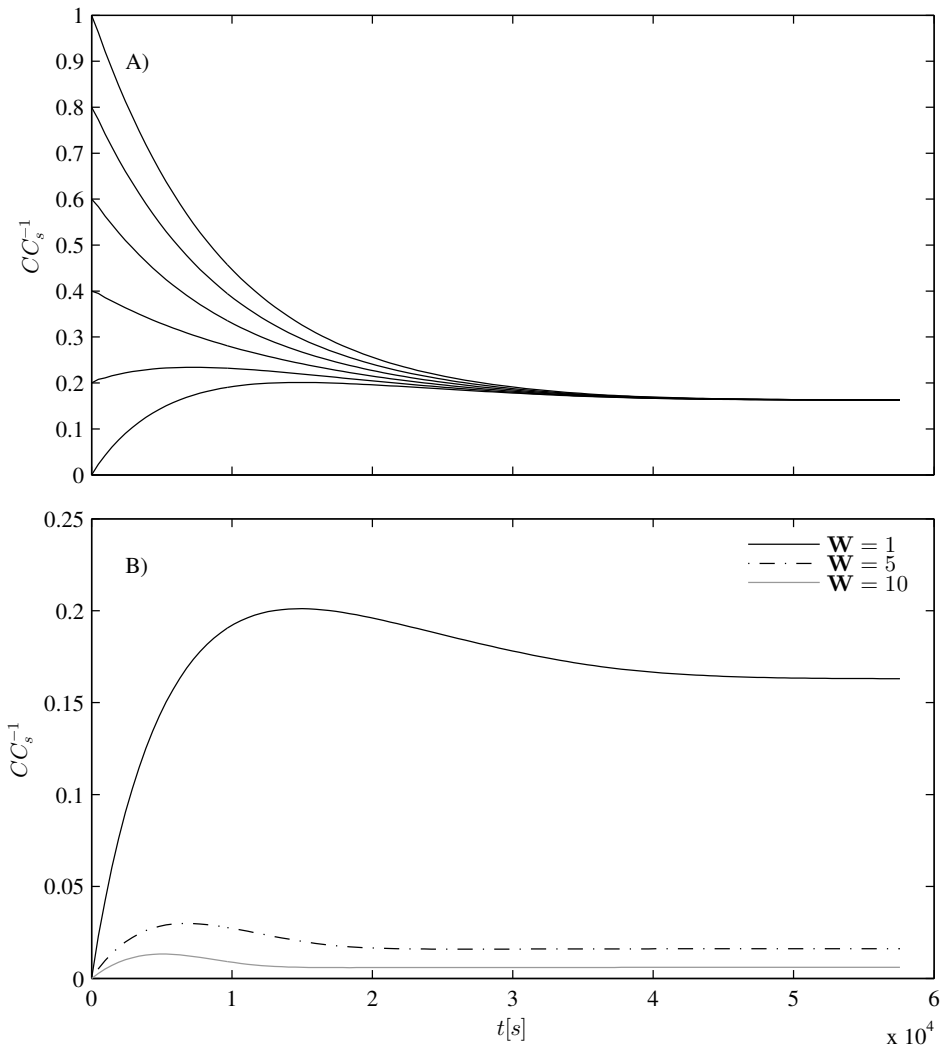


Figura 6.9: Evolución temporal de la concentración promedio espacial para simulaciones con  $\psi = 10^5$ ,  $R = 1000[m]$  y A)  $W = 1$ , cambiando la condición inicial de concentración B) Cambiando el número de Wedderburn con condición inicial nula.

Se observa que independiente del valor de la condición inicial, el resultado del estado permanente es el mismo en todos los casos. En aquellas simulaciones que se comienza con una condición inicial mayor a la concentración del régimen permanente, el promedio espacial decae en el tiempo hasta el valor de equilibrio. Sin embargo, en el caso de las condiciones iniciales cercanas o menores al valor del estado permanente, la concentración promedio espacial tiende a aumentar al inicio de la simulación, es decir, la laguna se oxigena con respecto a su estado inicial. Luego de alcanzar un valor máximo mayor al resultado permanente, la concentración promedio espacial disminuye hasta el valor de equilibrio.

La figura (6.9 B) muestra como varía temporalmente la concentración promedio espacial para distintos números de Wedderburn, con condición inicial nula en todos los casos. Se aprecia que mientras menor es el número de Wedderburn, mayor es la concentración promedio espacial de equilibrio y más notorio es el proceso de oxigenación inicial. Este resultado se explica por que a medida que disminuye el número de Wedderburn, o sea, aumenta el viento, la magnitud de las corrientes horizontales crece, y como se observó en el análisis de la figura (6.8), a medida que el flujo horizontal tiene mayor magnitud, mayor es la concentración de OD en la laguna.

Para profundizar en la influencia del forzante externo y la geometría utilizada en el transporte escalar se proponen los experimentos numéricos mostrados en la tabla (6.4). La idea es generar un desglose detallado de los efectos que inducen sobre la solución promedio espacial del transporte escalar tanto el número de Weddeburn, como la relación de aspecto y el tamaño característico de la geometría.

Tabla 6.4: Rangos de parámetros utilizados para experimentos numéricos que permiten estudiar el transporte escalar.

Parámetro	Rango	Unidad
<b>W</b>	$10^0 - 10^4$	[–]
$\psi$	$[10^3; 10^4; 10^5]$	[–]
$R$	$[250; 500; 1000]$	[ $m$ ]

La figura (6.10) muestra como varían los principales parámetros que caracterizan el proceso de transporte escalar en función del número de Wedderburn. Los resultados son para la relación de aspecto  $\psi = 10^3$  y están diferenciados por el tamaño de la hoya. Cabe mencionar que las simulaciones numéricas son realizadas fijando el número de Wedderburn y la relación de aspecto. Por ello, dado un radio de la hoya, a partir de la relación de aspecto se despeja la profundidad y posteriormente a partir del número de Wedderburn se despeja la magnitud del viento.

La figura (6.10 A) muestra que la velocidad de transferencia vertical de OD desde el agua hacia los sedimentos  $k_t$  es más sensible a los cambios en la profundidad que al efecto que pueda tener el viento sobre este parámetro. Esta respuesta es producto de la parametrización de de la Fuente *et al.* (2015), la cual incluye implícitamente el cuociente entre la magnitud del viento y las corrientes horizontales. Estos términos están directamente relacionados entre sí por lo que al cambiar el viento, cambia la magnitud del flujo horizontal y el cuociente entre ellos permanece casi constante. Por ende la respuesta de  $k_t$  frente a la variación en el número de Wedderburn no es tan notoria como lo es frente al cambio de profundidad inducido por la variación en el tamaño característico de la hoya.



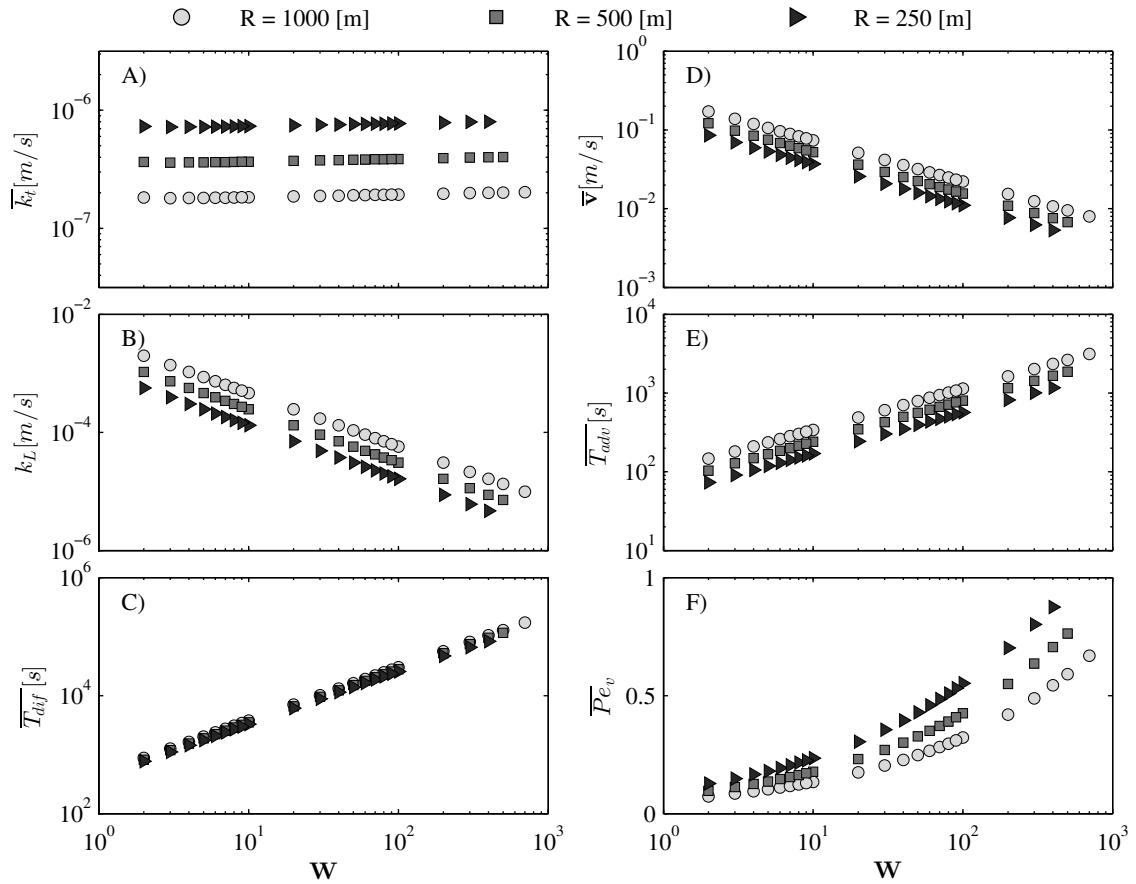


Figura 6.10: Evolución del promedio espacial de parámetros de interés del proceso de transporte de OD en función del número de Wedderburn para  $\psi = 10^3$  A) Velocidad de transferencia vertical de OD en los sedimentos B) Velocidad de transferencia vertical de OD entre el agua y la atmósfera C) Tiempo característico de la difusión vertical D) Velocidad del flujo E) Tiempo característico de la advección horizontal F) Péclét de la difusión vertical.

La figura (6.10 B) muestra que el coeficiente de transferencia de OD entre el agua y la atmósfera  $k_L$  aumenta conforme disminuye el número de Wedderburn, o sea, a medida que aumenta el viento. Si bien  $k_L$  depende exclusivamente de la magnitud del viento, la figura muestra valores distintos de este parámetro para distintos tamaños de la hoja. Esto es producto de que, como se explicó anteriormente, la velocidad de corte del viento se obtiene a partir del número de Wedderburn y la relación de aspecto, dado un tamaño característico de la geometría.

Otros puntos relevantes en la figura (6.10) son que el tiempo característico de la difusión vertical tiende a aumentar directamente con el Wedderburn (Fig. 6.10 C), mientras que la velocidad promedio espacial disminuye conforme aumenta el Wedderburn y aumenta a medida que se consideran radios mayores (Fig. 6.10 D). Esto se traduce en que el tiempo característico de la advección horizontal aumenta con el Wedderburn y con el radio de la hoja (Fig. 6.10 E). La suma de todos estos efectos conlleva finalmente que el número de Péclét promedio espacial, para la relación de aspecto  $\psi = 10^3$ , aumenta con el número de Wedderburn y disminuye a medida que crece el radio de la hoja (Fig. 6.10 F).

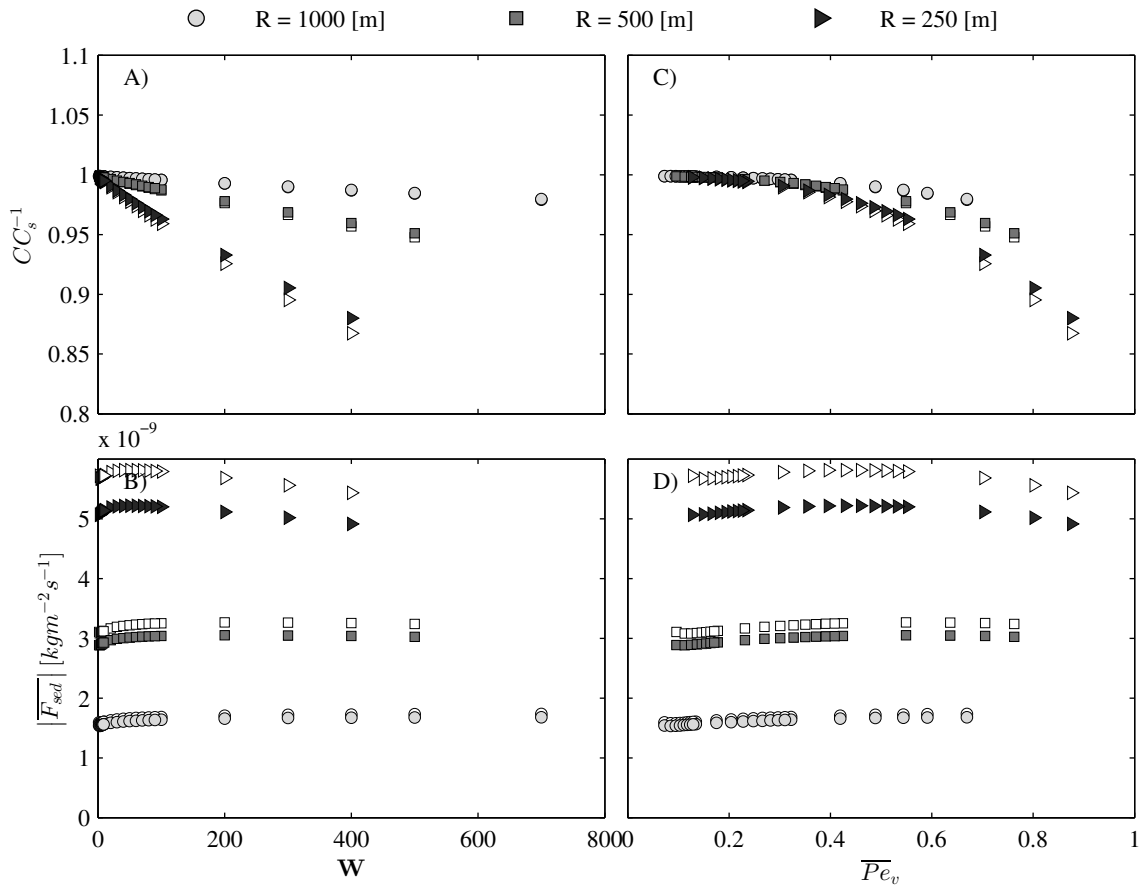


Figura 6.11: Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Wedderburn para  $\psi = 10^3$  A) Concentración adimensional B) Flujo hacia los sedimentos. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Péclet promedio espacial para  $\psi = 10^3$  C) Concentración adimensional D) Flujo hacia los sedimentos. Los puntos rellenos de blanco corresponden a cálculos realizados con el supuesto de mezcla completa.

La figura (6.11 A) muestra el comportamiento de la concentración promedio espacial en función del número de Wedderburn para la relación de aspecto  $\psi = 10^3$ . Se aprecia que para cada tamaño de la hoya simulado, la concentración promedio espacial es igual a la saturación para los números de Wedderburn cercanos a uno. Esto indica que las condiciones del flujo horizontal inducido para las geometrías analizadas, contrarrestan el efecto del consumo de OD en los sedimentos, permitiendo que la laguna se encuentre completamente oxigenada. A medida que crece el Wedderburn, disminuye la concentración promedio espacial, siendo las hoyas de mayor tamaño las que presentan las menores disminuciones, puesto que el flujo vertical de OD promedio espacial es menor a medida que crece la hoya (Fig. 6.11 B). La respuesta del flujo vertical promedio de OD frente a la variación del Wedderburn es baja y está influenciado mayormente por el cambio en el coeficiente  $k_t$  (Fig. 6.10 A) inducido por el cambio en la altura al variar el radio de la hoya.

Las figuras (Fig. 6.11 C) y (Fig. 6.11 D) presentan la variación de la concentración promedio espacial y del flujo vertical promedio de OD en función del número de Péclet. En este caso, el Péclet crece directamente con el número de Wedderburn, por lo que los resultados obtenidos siguen la misma tendencia que fue observada con este parámetro.

La figura (6.12) muestra el cambio en los principales parámetros del transporte escalar como función del número de Wedderburn para las simulaciones realizadas con relación de aspecto  $\psi = 10^4$ . En relación al caso con  $\psi = 10^3$  se observa que para  $\psi = 10^4$ , dado un número de Wedderburn:

- El coeficiente  $k_t$  crece (Fig. 6.10 A versus 6.12 A).
- El coeficiente  $k_L$  disminuye (Fig. 6.10 B versus 6.12 B).
- La magnitud promedio de la velocidad disminuye (Fig. 6.10 D versus 6.12 D).

Estas observaciones permiten anticipar que dado un número de Wedderburn y un tamaño de la hoya, la concentración promedio espacial en el caso con  $\psi = 10^4$  debiese ser menor con respecto al mismo resultado obtenido para  $\psi = 10^3$ . Esto pues, aumenta el coeficiente de transferencia vertical de OD en los sedimentos, disminuye el coeficiente de reaeración y el flujo horizontal inducido es más lento, lo que da las condiciones precisas para que el flujo vertical de OD hacia los sedimentos pueda desarrollarse con mayor facilidad.

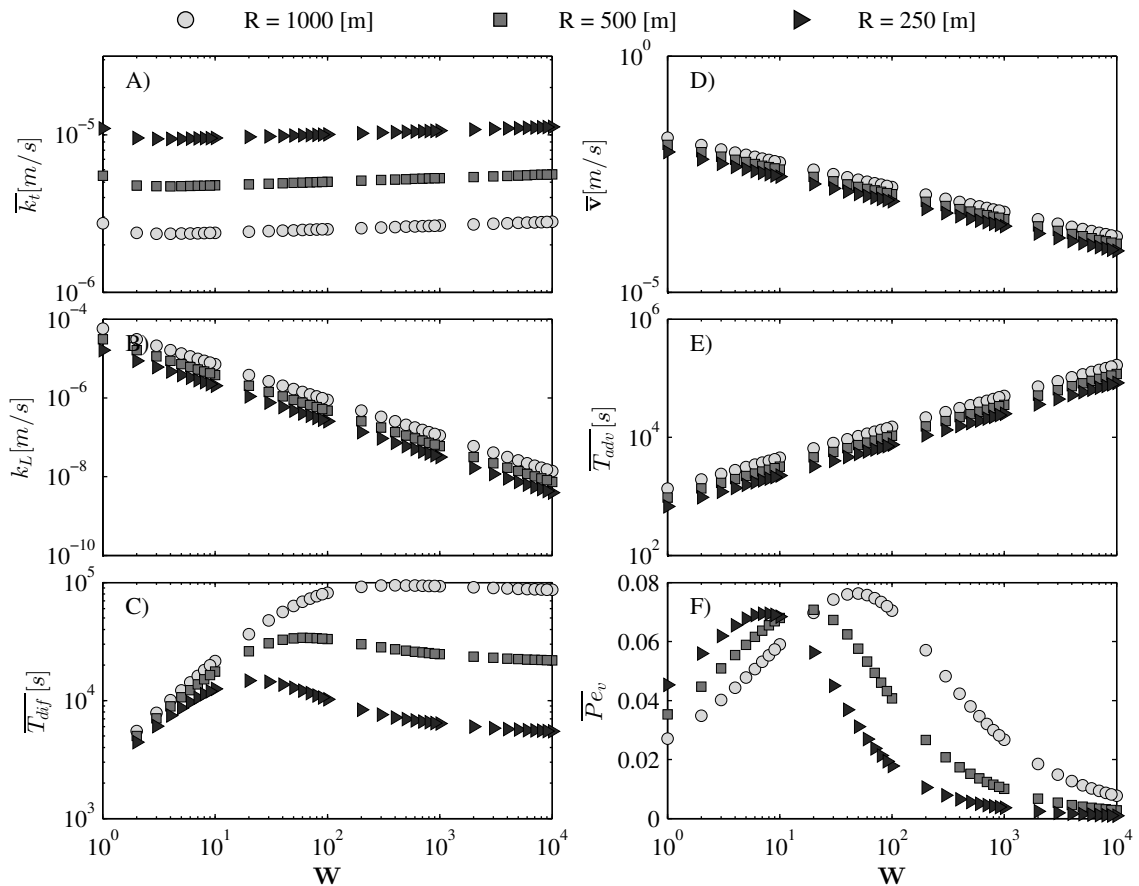


Figura 6.12: Evolución del promedio espacial de parámetros de interés del proceso de transporte de OD en función del número de Wedderburn para  $\psi = 10^4$  A) Velocidad de transferencia vertical de OD en los sedimentos B) Velocidad de transferencia vertical de OD entre el agua y la atmósfera C) Tiempo característico de la difusión vertical D) Velocidad del flujo E) Tiempo característico de la advección horizontal F) Péclét de la difusión vertical.

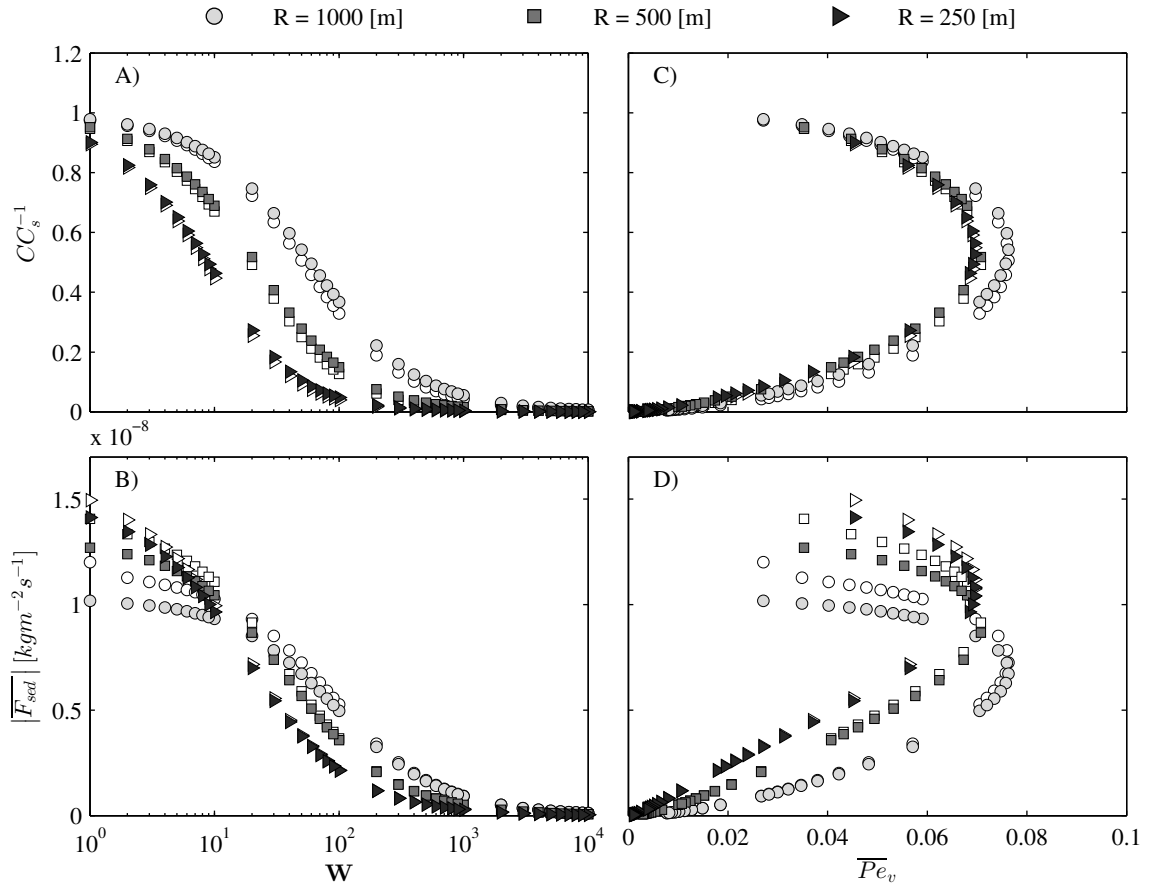


Figura 6.13: Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Wedderburn para  $\psi = 10^4$  A) Concentración adimensional B) Flujo hacia los sedimentos. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Péclet promedio espacial para  $\psi = 10^4$  C) Concentración adimensional D) Flujo hacia los sedimentos. Los puntos rellenos de blanco corresponden a cálculos realizados con el supuesto de mezcla completa.

La tendencia del tiempo característico de la difusión vertical con respecto al número de Wedderburn presenta un cambio de pendiente (Fig. 6.12 C) que altera la tendencia del número de Péclet (Fig. 6.12 F). Este comportamiento es en respuesta a como varían las magnitudes de las velocidades de transferencia vertical y la concentración de mezcla completa. Lo interesante de este resultado es que el número de Péclet como parámetro que caracteriza el transporte escalar, desde el punto de vista del promedio espacial, puede ser cuestionado dado que para un mismo valor se encuentran dos posibles soluciones para la concentración promedio espacial (Fig. 6.13 C) y para el flujo promedio vertical de OD (Fig. 6.13 D).

Otro resultado interesante lo muestra la figura (6.13 B). Para números de Wedderburn menores a 10, la magnitud del flujo vertical de OD es mayor a medida que menor es el radio de la hoya. Este comportamiento se invierte para números de Wedderburn mayores a 10, es decir, ahora el flujo vertical de OD es mayor a medida que mayor es el tamaño característico de la geometría.

La figura (6.14) muestra la evolución de los principales parámetros del transporte escalar como función del número de Wedderburn para las simulaciones realizadas con relación de aspecto  $\psi = 10^5$ . En relación al caso con  $\psi = 10^4$  se observa que para  $\psi = 10^5$ , dado un número de Wedderburn:

- El coeficiente  $k_t$  crece (Fig. 6.12 A versus 6.14 A).
- El coeficiente  $k_L$  disminuye (Fig. 6.12 B versus 6.14 B).
- La magnitud promedio de la velocidad disminuye (Fig. 6.12 D versus 6.14 D).

Estos cambios, al igual que para las simulaciones con  $\psi = 10^4$ , generan las condiciones propicias para que la concentración de OD en la laguna nuevamente disminuya. El tiempo característico de la difusión vertical disminuye con el número de Wedderburn y tiene un comportamiento regular para el rango de datos analizado (Fig. 6.14 C), por lo que el número de Péclét también sigue una curva que decae monótonamente (Fig. 6.14 F). Para esta relación de aspecto las magnitudes del número de Péclét son mucho menores que en los casos anteriores (ver Fig. 6.10 F y 6.12 F).

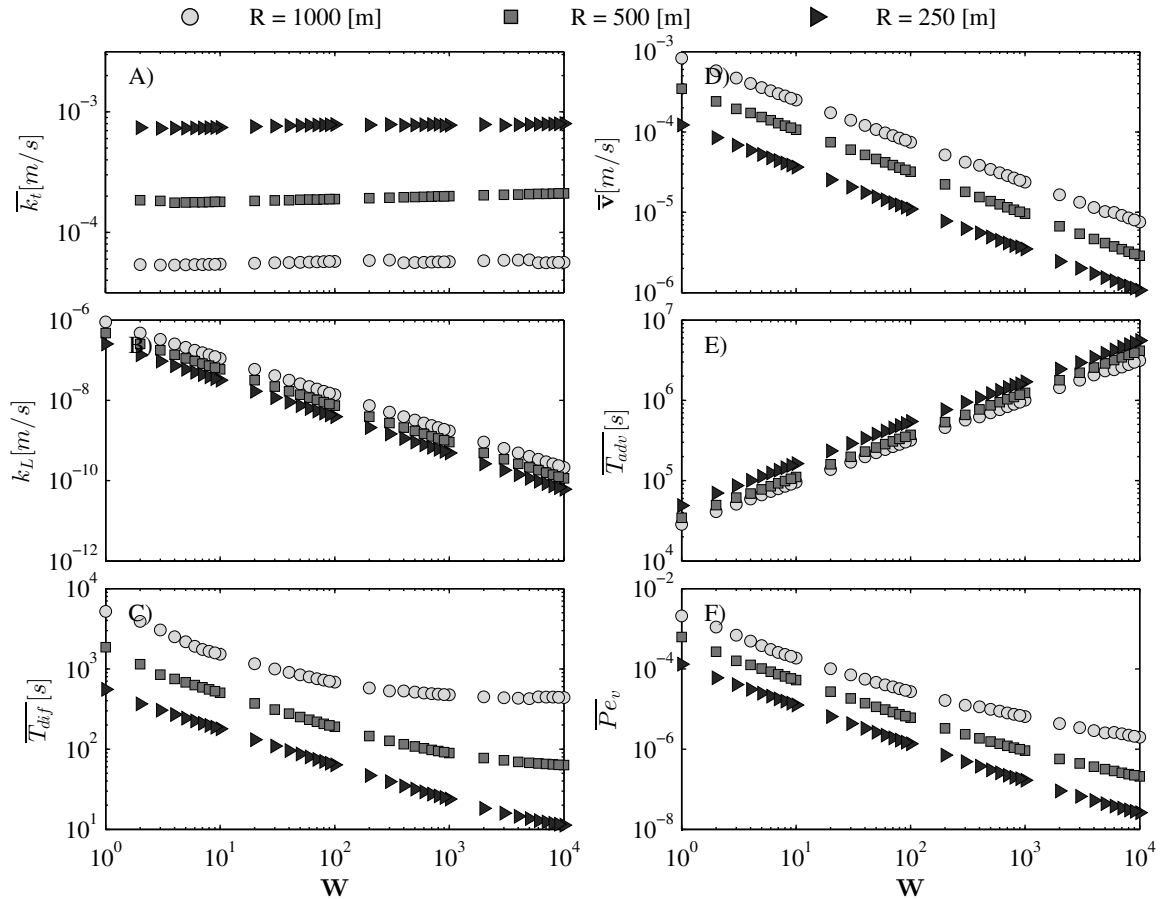


Figura 6.14: Evolución del promedio espacial de parámetros de interés del proceso de transporte de OD en función del número de Wedderburn para  $\psi = 10^5$  A) Velocidad de transferencia vertical de OD en los sedimentos B) Velocidad de transferencia vertical de OD entre el agua y la atmósfera C) Tiempo característico de la difusión vertical D) Velocidad del flujo E) Tiempo característico de la advección horizontal F) Péclét de la difusión vertical.

La figura (6.15 A) presenta la evolución de la concentración promedio espacial en función del número de Wedderburn. Se aprecia que la magnitud de la concentración promedio es notoriamente más baja que para las relaciones de aspecto  $\psi = 10^3, 10^4$  (ver Fig. 6.11 A y 6.13 A). Para los números de Wedderburn menores a 10, o sea, en donde la laguna debiese tener las mayores concentraciones de OD, se alcanza una concentración promedio espacial de entre el 1% al 5% de la concentración de saturación, mientras que para las lagunas con relaciones de aspecto  $\psi = 10^3, 10^4$  en el mismo rango del número de Wedderburn, la concentración promedio espacial es cercana a la saturación.

Desde la figura (6.10) hasta la figura (6.15), los resultados promedio espacial han sido presentados incluyendo además que se obtiene en el caso del supuesto de mezcla completa. Sin embargo, no se ha analizado el comportamiento de este supuesto o cuales son las principales diferencias que se generan con respecto a la aplicación del modelo. El análisis se realiza en los párrafos siguientes.

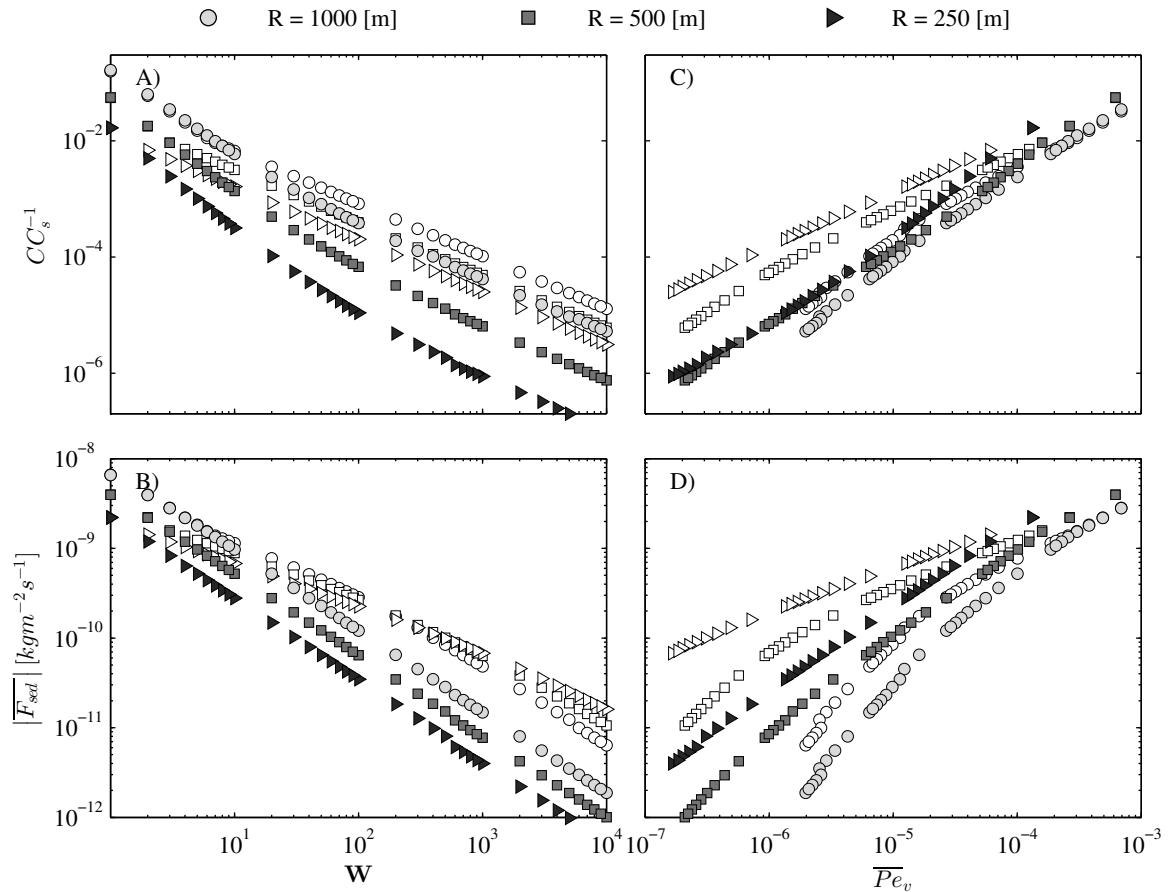


Figura 6.15: Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Wedderburn para  $\psi = 10^5$  A) Concentración adimensional B) Flujo hacia los sedimentos. Evolución de resultados promedio espacial en función del número de Péclet promedio espacial para  $\psi = 10^5$  C) Concentración adimensional D) Flujo hacia los sedimentos. Los puntos rellenos de blanco corresponden a cálculos realizados con el supuesto de mezcla completa.

La figura (6.16) muestra como evoluciona la concentración de mezcla completa en función del número de Wedderburn y diferenciado por tamaño característico de la hoya. Se observa que para la relación de aspecto  $\psi = 10^5$ , la concentración de mezcla completa es prácticamente nula para todo el rango de números de Wedderburn. En particular, para el radio  $R = 1000[m]$  se observa que para  $\mathbf{W} < 5$  la concentración de mezcla completa aumenta a valores distintos de cero llegando a ser el 15 % de la saturación para  $\mathbf{W} = 1$  (Fig. 6.16 A). Para el mismo valor del número de Wedderburn, en los casos que el radio es  $R = 500[m]$  y  $R = 250[m]$ , la concentración de mezcla completa llega a ser el 5 % (Fig. 6.16 B) y el 1,5 % (Fig. 6.16 C) de la saturación, respectivamente.

En el caso de la relación de aspecto  $\psi = 10^4$ , se observa que la concentración de mezcla completa recorre prácticamente todo el espectro de soluciones posibles. Es importante recordar que el cambio en el radio, dados el número de Wedderburn y la relación de aspecto, se traduce en un cambio en la profundidad. A menor radio, menor profundidad tiene la laguna. Se aprecia que a medida que disminuye el radio, el número de Wedderburn que ahoga a la laguna disminuye (Fig. 6.16). Es decir, a menor profundidad, la laguna tiende a tener menor concentración de mezcla completa dado un número de Wedderburn y relación de aspecto. Esto último guarda relación principalmente con la influencia de la profundidad de la laguna en las velocidades de transferencia vertical de OD y en la magnitud del flujo promedio inducido por el viento.

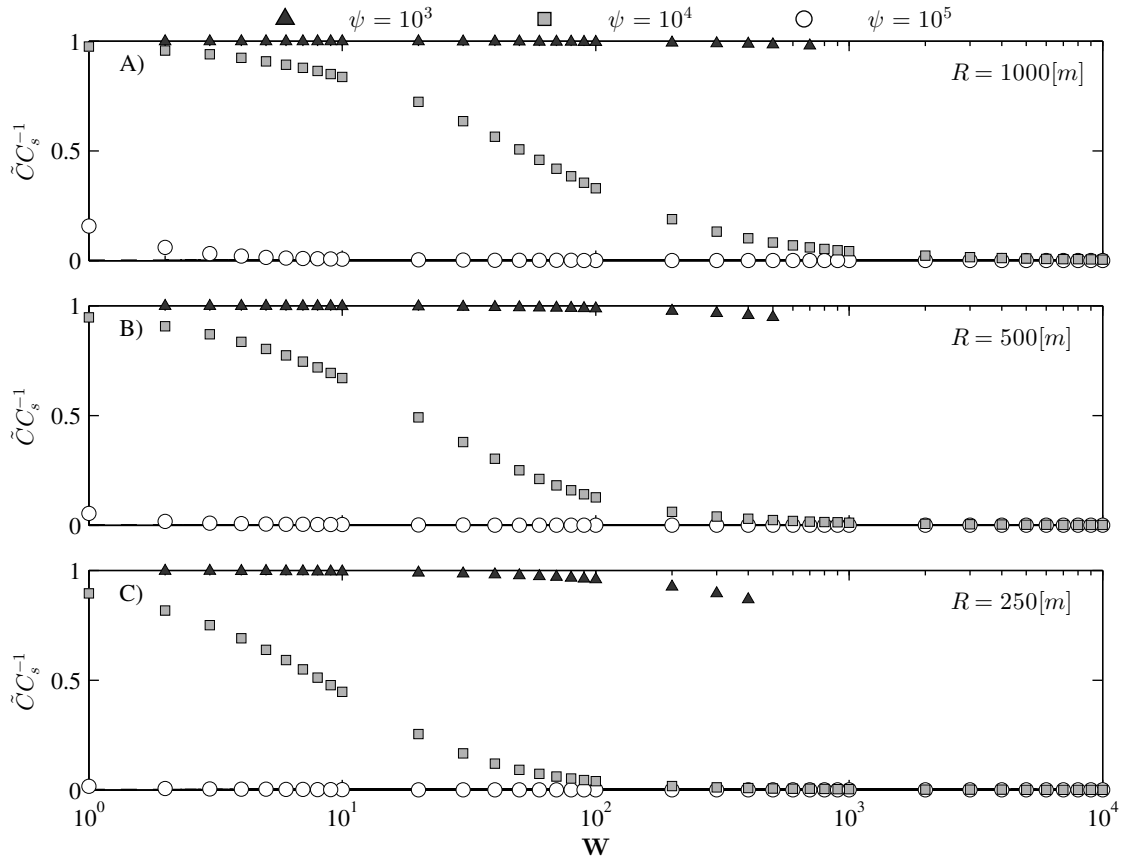


Figura 6.16: Evolución de la concentración de mezcla completa en función del número de Wedderburn, diferenciada por relación de aspecto para A)  $R = 1000[m]$ , B)  $R = 500[m]$  y C)  $R = 250[m]$ .

Para la relación de aspecto  $\psi = 10^3$  se tienen las mayores profundidades de agua y se observa que la concentración de mezcla completa es del orden de la saturación para  $\mathbf{W} < 1000$  en todos los radios simulados (Fig. 6.16).

Para entender la relación entre el flujo vertical de OD promedio espacial y el flujo de mezcla completa, se construye la figura (6.17), la cual muestra como evoluciona el cuociente entre ambos flujos mencionados como función del número de Wedderburn. Se observa que la magnitud del flujo promedio espacial es menor que el flujo de mezcla completa en todos los casos simulados, dado que el cuociente es siempre menor o igual a uno. En el caso particular de la relación de aspecto  $\psi = 10^5$ , donde la concentración de mezcla completa es prácticamente nula para todo el rango de números de Wedderburn (Fig. 6.16), las diferencias entre el flujo promedio espacial y el flujo de mezcla completa son muy notorias. Para  $R = 1000[m]$  se observa que en el rango  $\mathbf{W} < 10$  los flujos son prácticamente iguales. Para  $\mathbf{W} > 10$  el cuociente disminuye sostenidamente hasta un valor mínimo de 0,3 (Fig. 6.17 A).

Para la relación de aspecto  $\psi = 10^4$  se aprecia en todos los radios que a medida que aumenta el Wedderburn, el cuociente entre los flujos comienza a aumentar hasta llega a uno. A medida que el Wedderburn sigue aumentando, el cuociente comienza a disminuir nuevamente (Fig. 6.17).

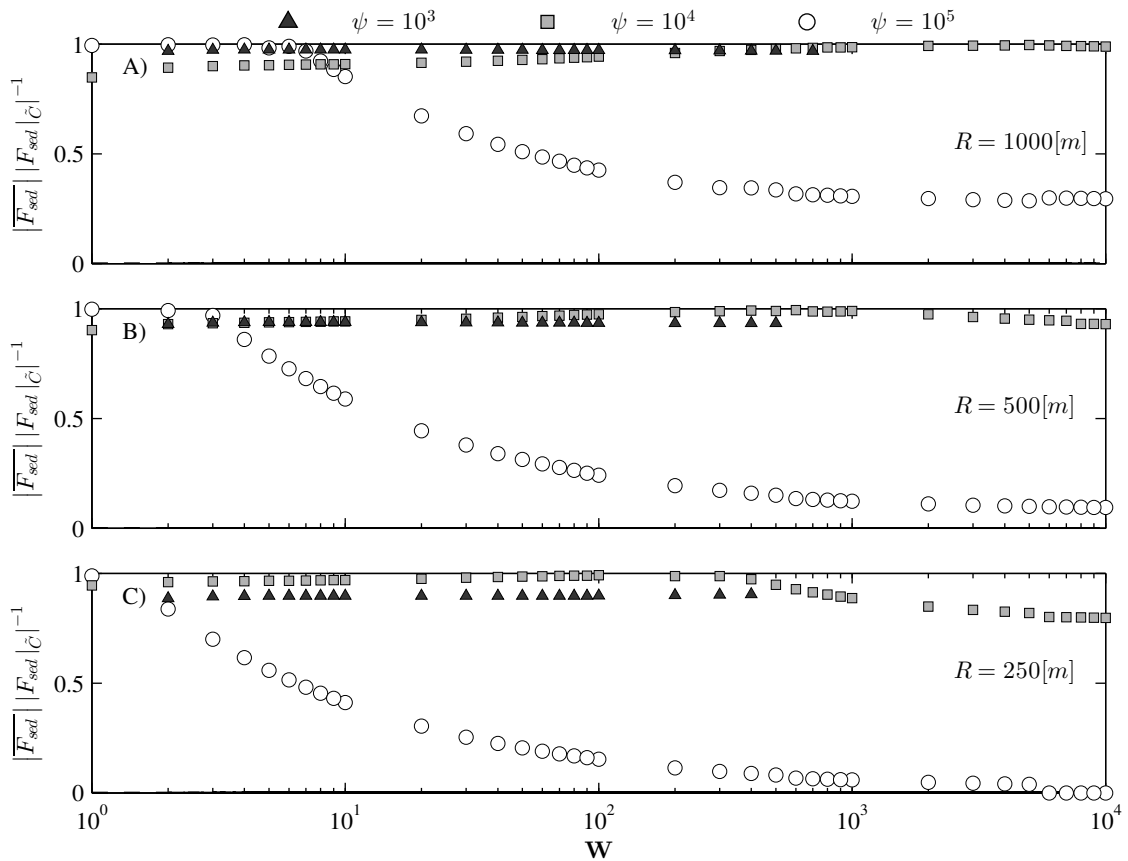


Figura 6.17: Evolución del cuociente entre el flujo vertical de OD promedio espacial y de mezcla completa en función del número de Wedderburn, diferenciado por relación de aspecto para A)  $R = 1000[m]$ , B)  $R = 500[m]$  y C)  $R = 250[m]$ .



Para la relación de aspecto  $\psi = 10^3$  se observa que dado un Wedderburn, el cuociente entre los flujos tiende a disminuir a medida que disminuye el radio y por ende la profundidad. Cabe mencionar que para los casos simulados, el cuociente entre el flujo promedio espacial y el flujo de mezcla completa no baja del 80 % para las relaciones de aspecto  $\psi = 10^3$  y  $\psi = 10^4$  (Fig. 6.17).

La figura (6.18) muestra como cambia el parámetro  $\Delta\tilde{F}$  (ec. 4.54) en función del número de Wedderburn. Este parámetro cuantifica la diferencia entre la concentración promedio espacial y la de mezcla completa relativa a la concentración de saturación. Se observa que para la relación de aspecto  $\psi = 10^5$ , este parámetro es siempre cercano a cero, incluso siendo negativo en ocasiones, lo que significa que la concentración de mezcla completa es mayor que la promedio espacial. Este comportamiento se aprecia en particular para  $\mathbf{W} < 10$  en todos los radios simulados. Para la relación de aspecto  $\psi = 10^4$  se observa que la magnitud máxima del parámetro disminuye conforme disminuye el radio de la hoya y por ende su profundidad. Por ejemplo en el caso de  $R = 1000[m]$  el máximo valor del parámetro es 0,04, mientras que para  $R = 250[m]$  el máximo es 0,02. Se observa que existe un número de Wedderburn que maximiza el parámetro  $\Delta\tilde{F}$  y que conforme disminuye el radio, disminuye el Wedderburn que maximiza este número (Fig. 6.18). En la práctica esto último significa que existe un Wedderburn que maximiza la diferencia entre las concentraciones analizadas. Da la impresión que el mismo comportamiento se tiene para la relación de aspecto  $\psi = 10^3$ .

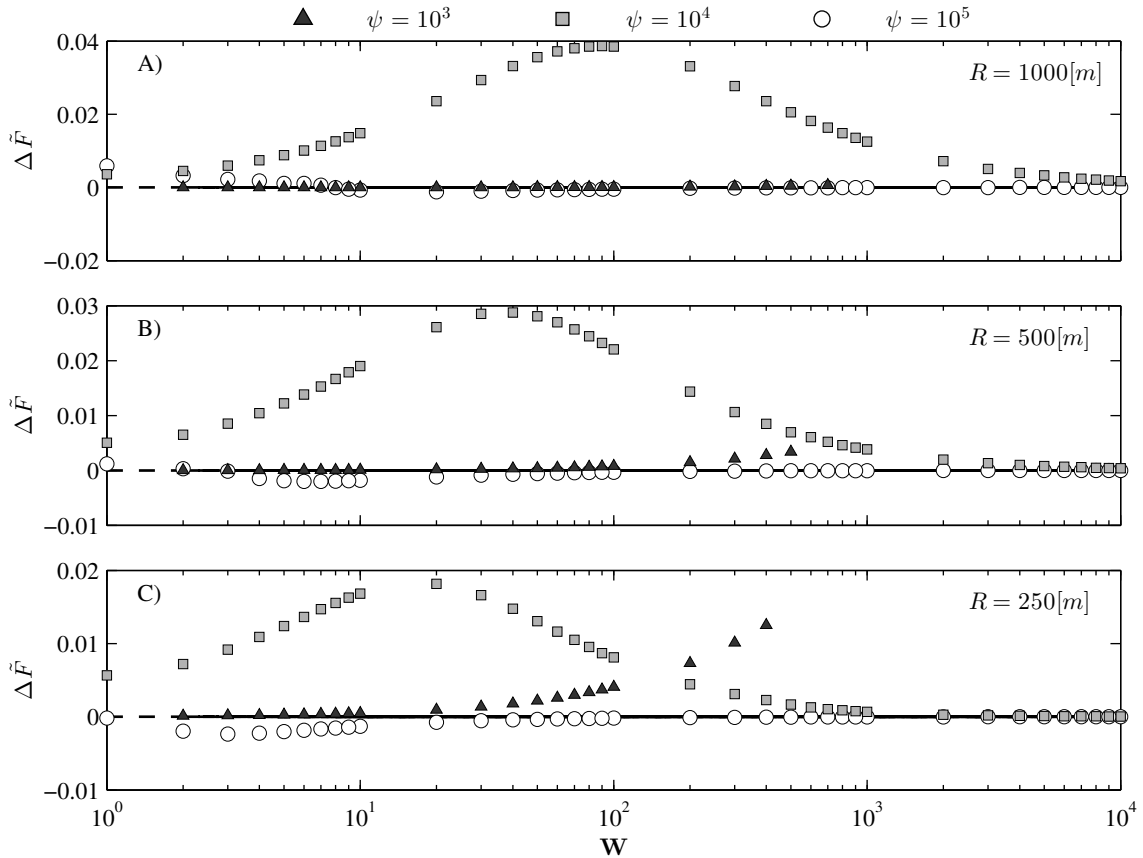


Figura 6.18: Evolución del parámetro  $\Delta\tilde{F}$  en función del número de Wedderburn, diferenciado por relación de aspecto para A)  $R = 1000[m]$ , B)  $R = 500[m]$  y C)  $R = 250[m]$ .

## 6.2. Resultados Experimentales

Esta sección presenta los principales resultados experimentales de la memoria.

### 6.2.1. Mediciones de velocidad y ajuste del coeficiente de fricción

Del total de 98 experimentos, solo se logra ajustar la serie de velocidad simulada con la medición en 38 casos. La cantidad de casos ajustados por rango de medición se muestran en la tabla (6.5).

Un experimento se cataloga como *no ajustado* ya sea porque alguna de las series medidas no cumple con los criterios de corte de la correlación, porque no fue posible encontrar un coeficiente de fricción que ajustara la simulación numérica a la medición, o porque el experimento es descartado en laboratorio. Por ejemplo, durante las mediciones se observó la aparición de estructuras de flujo que rompen la tensión superficial, en los que salta gran cantidad de gotas y con estructuras oscilatorias inestables, por lo que se descartan del análisis.

La figura (6.19A) muestra la amplitud de la velocidad medida graficada para las distintas frecuencias de giro del motor y diferenciada por amplitud de oscilación de la mesa. El gráfico destaca con un círculo aquellos experimentos en los que se encontró un coeficiente de fricción que ajustara la simulación a la medición.

En cada rango de frecuencia medido, se cumple que la amplitud promedio de la velocidad crece, alcanza un máximo y luego decrece. En la figura (6.19 A) se identifican las frecuencias en la que se alcanza el máximo de velocidad por rango. Los valores de estas frecuencias se muestran en la tabla (6.6). Lo curioso de este comportamiento es que se presenta para cada rango de medición, sin embargo, entre rangos no se logra diferenciar cambios notorios en la magnitud de la velocidad, es decir, se observa que existe una frecuencia en la cual la amplitud de la velocidad es máxima pero no se identifica claramente que este máximo sea distinto a medida que se cambia el rango de giro del forzante, sino que parece estar acotado. La magnitud de la amplitud de la velocidad pareciera estar controlada por la amplitud de oscilación de la mesa, lo que se puede apreciar en las líneas horizontales que marcan los máximos valores de la velocidad por amplitud de oscilación de la mesa en la figura (6.19 A).

Tabla 6.5: Número de casos ajustados por rango de  $\omega_f$ .

Rango	$\omega_f [RPM]$	Casos ajustados
1	40 – 60	3
2	110 – 130	7
3	166 – 186	15
4	206 – 236	13

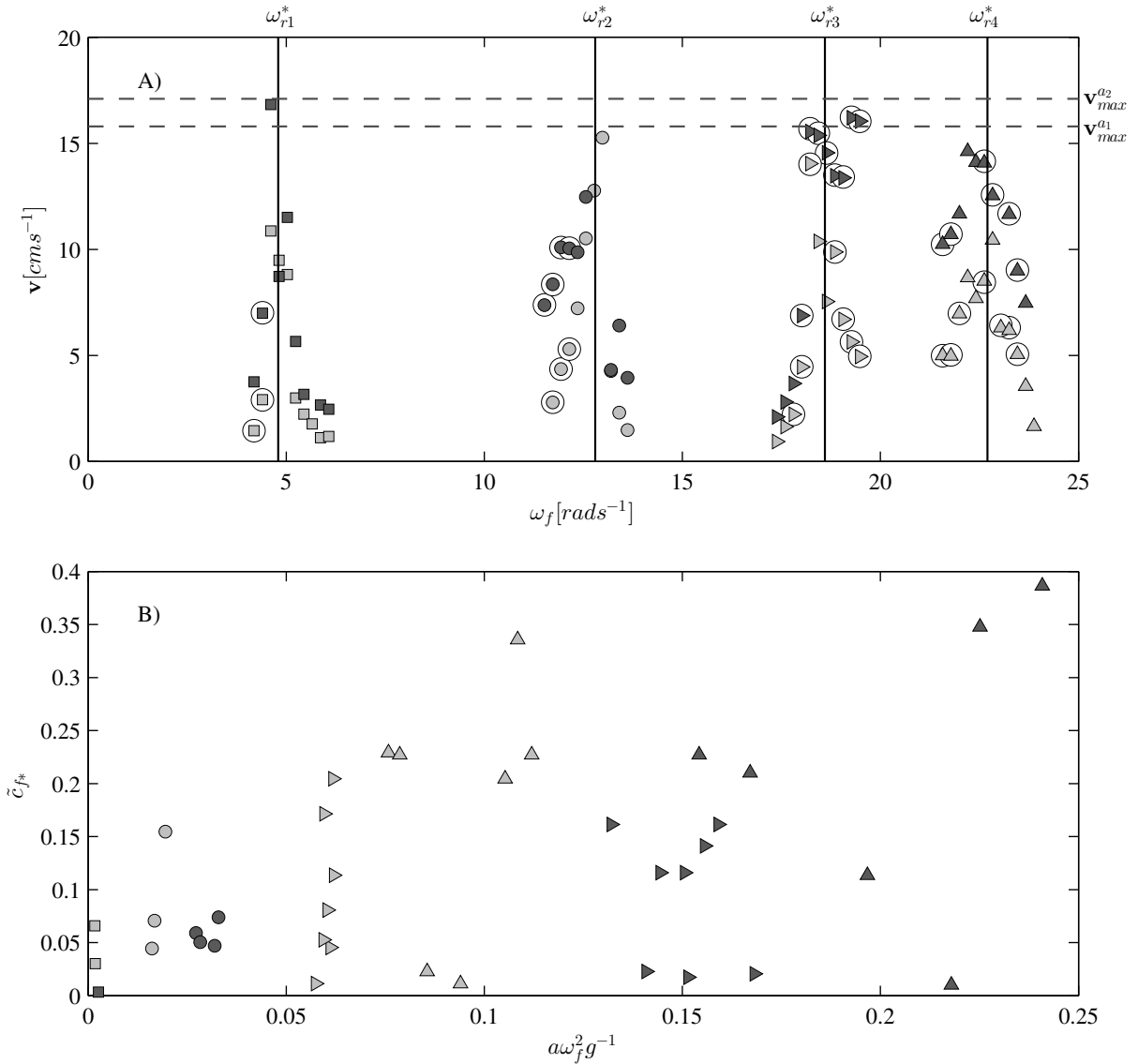


Figura 6.19: A) Amplitud promedio de la velocidad en el rango estacionario versus la frecuencia de giro del motor. Los símbolos claros son los experimentos con amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$  y los oscurecidos con  $a_2 = 2[mm]$ . Los cuadrados son los experimentos del rango de frecuencia 1, los círculos son del rango 2, los triángulos que apuntan hacia la derecha del rango 3 y los triángulos que apuntan hacia arriba son del rango 4. Aquellos puntos encerrados en un círculo corresponden a los casos en los que se encontró un coeficiente de fricción que ajustara las mediciones con la simulación numérica. Se indican los valores máximos de la velocidad por amplitud de oscilación de la mesa y las frecuencias en las que se alcanzan las máximas velocidades por rango de medición. B) Coeficiente de fricción adimensional versus amplitud adimensional de la aceleración forzante. La simbología es la misma que la del panel A.

Tabla 6.6: Frecuencias  $\omega^*$  que maximizan velocidad por rango de  $\omega_f$ .

Rango	$\omega^* [rads^{-1}]$
1	4,8
2	12,8
3	18,6
4	22,7

Los coeficientes de fricción ajustados (Fig 6.19B) se presentan en función de la amplitud de aceleración del forzante adimensional. Dado que en las simulaciones numéricas del problema de Kranenburg (1992) se encontró una tendencia entre la fricción y el forzante externo adimensional se escoge mantener este esquema por consistencia aunque no se aprecie alguna tendencia clara, la cual se buscó inclusive con ejes logarítmicos. De todas formas, da la impresión que la fricción tiende a crecer a medida que aumenta la magnitud del forzante adimensional.

### 6.2.2. Análisis de las series ajustadas por rango de medición

En esta sección se analiza un experimento por rango de medición. En la figura (6.20) se presentan algunas de las estructuras modales calculadas para la hoya ensayada experimentalmente y que aparecen dentro de los resultados mostrados posteriormente. La figura pareciera mostrar dos veces la misma estructura pero con una orientación distinta. Esto no es así, sino que cada una representa un vector propio distinto en el paquete de resultados.

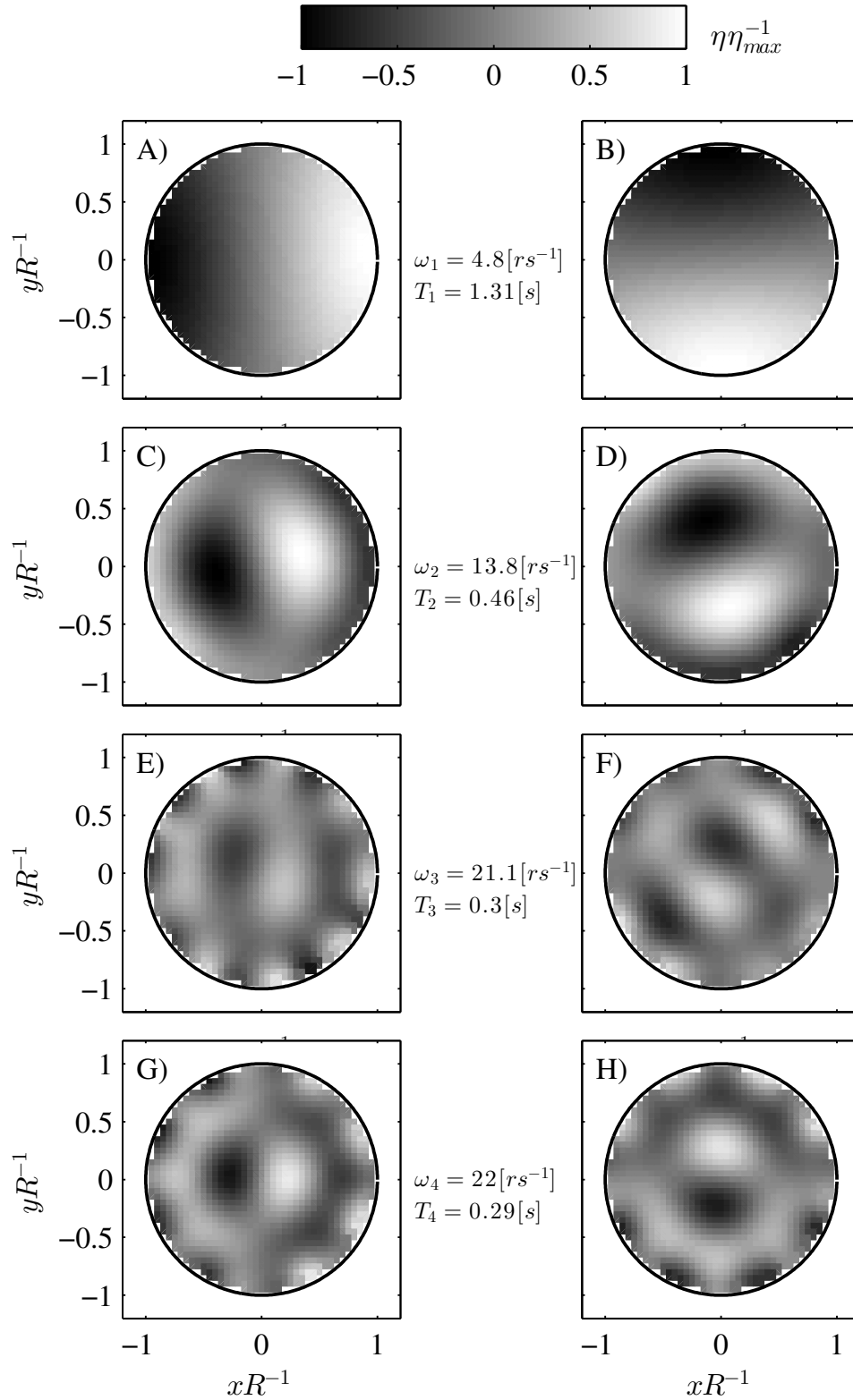


Figura 6.20: Estructuras modales de la hoja experimental calculadas numéricamente y que se consideran de relevancia para el análisis de los experimentos. Se indica en cada caso la frecuencia angular y el período de oscilación. Notar que por fila la estructura es la misma pero aparece con orientación distinta en el paquete de vectores propios.

## Análisis de experimento para Rango 1 de $\omega_f$

La figura (6.21 A) muestra la serie característica de aceleración medida y un ajuste sinusoidal de ella. Se simula numéricamente utilizando ambas series. Los resultados de esta simulación se presentan en el panel B. El coeficiente de fricción se ajusta usando la serie de aceleración sinusoidal y no la medición, puesto que las perturbaciones en la serie dificultan el proceso de ajuste, lo que se puede visualizar con mayor facilidad en los resultados posteriores.

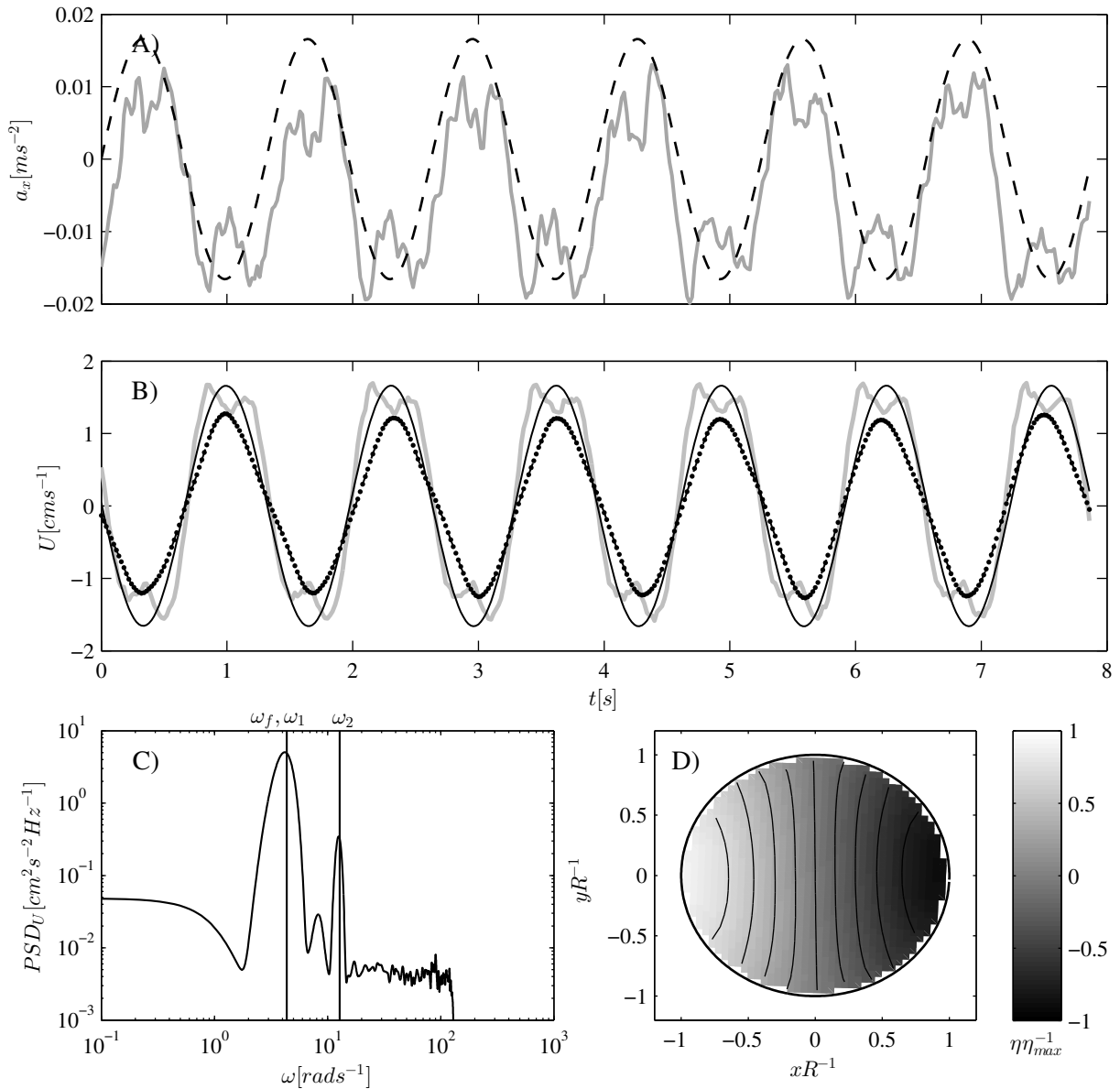


Figura 6.21: Resultados para experimento con  $\omega_f = 40[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$   
 A) Serie de aceleración característica medida (línea gris) y ajustada (línea segmentada) B) Serie de velocidad medida (línea gris), simulada con la aceleración ajustada (línea negra) y simulada con la aceleración medida (línea punteada) C) Densidad espectral de la medición de velocidad D) Estructura modal con mayor energía promedio.

La densidad espectral de la velocidad medida (Fig. 6.21 C) muestra peaks en las frecuencias:  $\omega_f$  del forzante externo,  $\omega_1$  del modo de la figura (6.20 A) y  $\omega_2$  del modo de la figura (6.20 C). El modo que concentra el mayor porcentaje de energía promedio (Fig 6.21D) coincide con el patrón de flujo inducido por la oscilación horizontal (ver Fig 6.22 A,B).

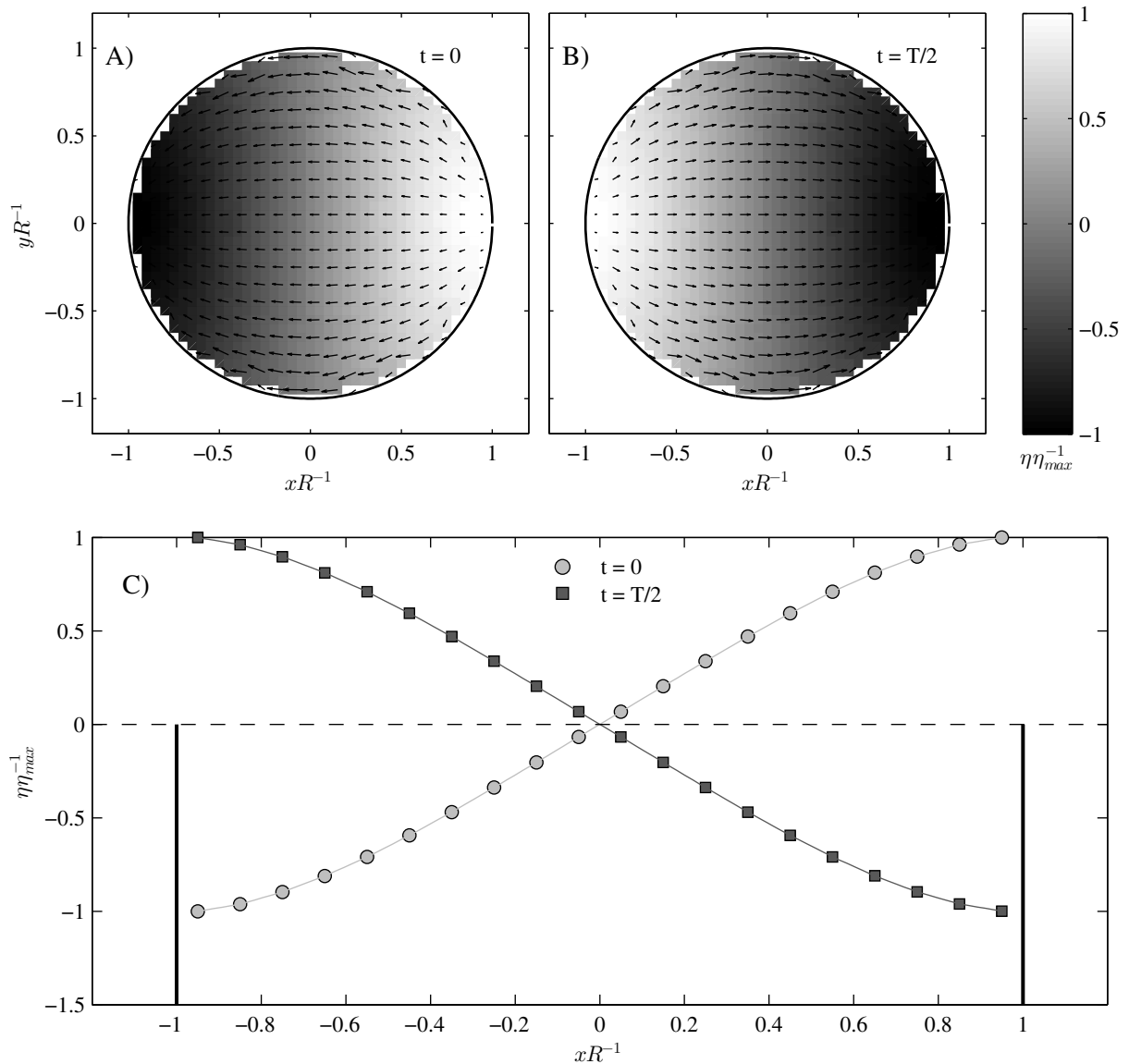


Figura 6.22: Resultados simulados para experimento con  $\omega_f = 40[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$  A) Campo de flujo al inicio de un ciclo B) Campo de flujo en la mitad de un ciclo C) Perfiles transversales de deformación de superficie libre para los campos de flujo mostrados en A y B.

Para este caso, la energía total permanece constante (Fig. 6.23 A) y se cumple que la tasa de trabajo es igual con la tasa de disipación durante toda la oscilación (Fig. 6.23 B). La distribución de energía se caracteriza por que en un instante la totalidad de la energía es potencial mientras que la cinética es nula. Esto se revierte posteriormente y la energía potencial pasa a ser nula mientras que la cinética domina, proceso que se repite cíclicamente.

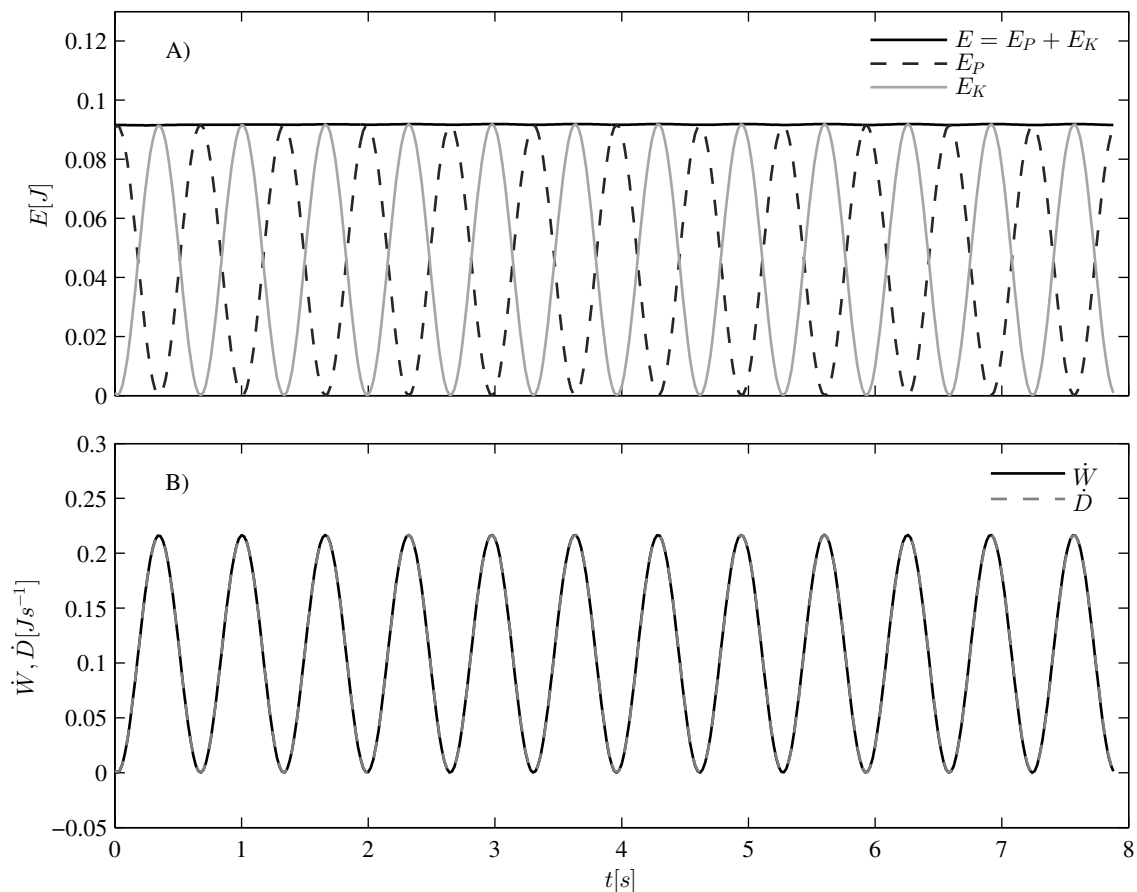


Figura 6.23: Resultados para experimento con  $\omega_f = 40[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$   
 A) Series de energía B) Series de potencia inyectada y disipada.



## Análisis de experimento para Rango 2 de $\omega_f$

Nuevamente se utiliza el ajuste sinusoidal de la aceleración para encontrar el coeficiente de fricción (Fig. 6.24 A). Se observa un buen ajuste entre la velocidad medida y la simulada (Fig. 6.24 B). Al simular con la medición, se induce la aparición de una serie característica que cambia de amplitud en el tiempo, generada por los saltos bruscos en la medición.

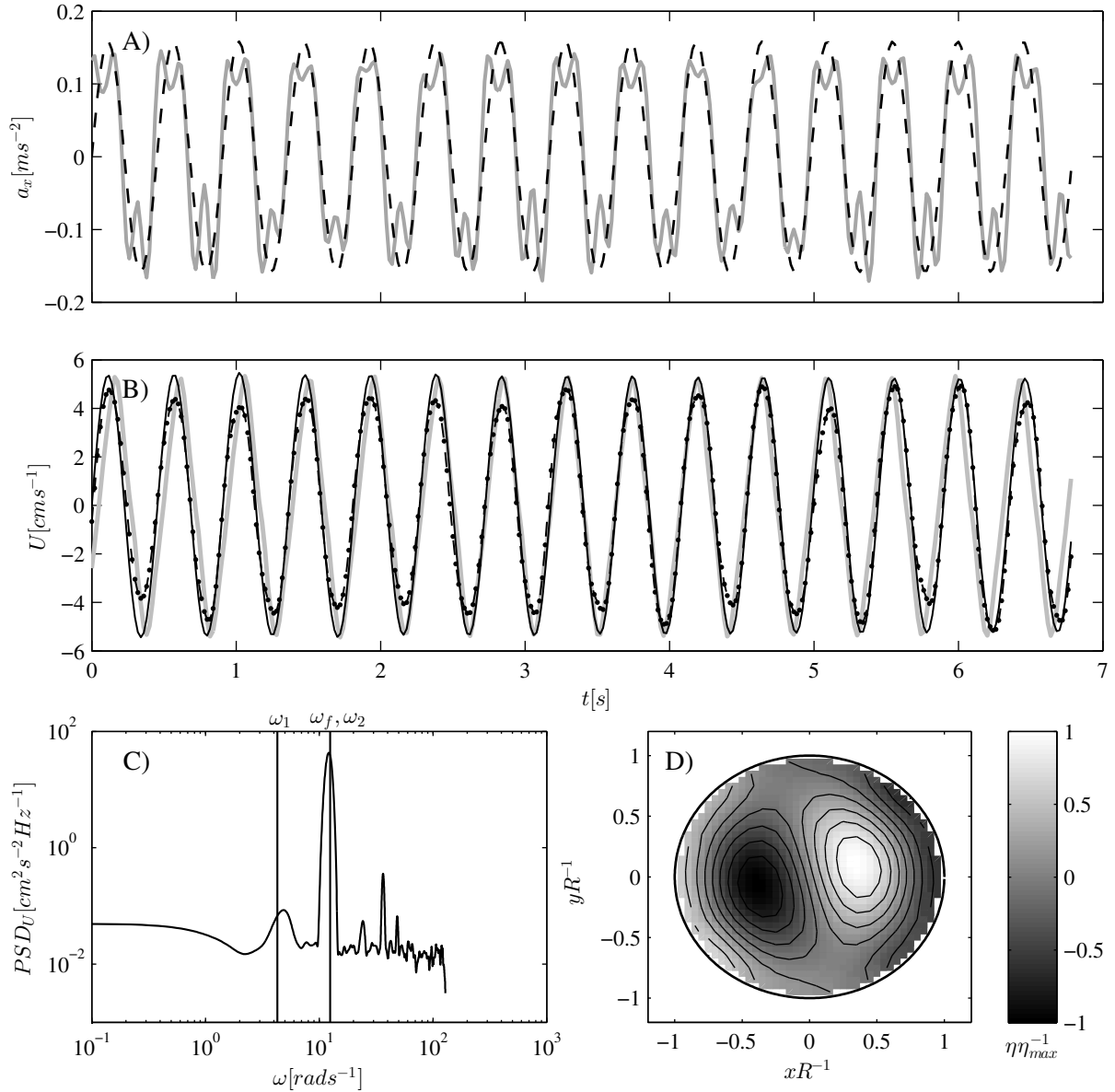


Figura 6.24: Resultados para experimento con  $\omega_f = 116 [RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1 [mm]$   
 A) Serie de aceleración característica medida (línea gris) y ajustada (línea segmentada) B) Serie de velocidad medida (línea gris), simulada con la aceleración ajustada (línea negra) y simulada con la aceleración medida (línea punteada) C) Densidad espectral de la medición de velocidad D) Estructura modal con mayor energía promedio.

La densidad espectral de la velocidad (Fig. 6.24 C) muestra puntos relevantes en las frecuencias  $\omega_f$  del forzante externo,  $\omega_1$  (Fig. 6.20 A) y  $\omega_2$  (Fig. 6.20C). Se observa la aparición de otras frecuencias relevantes las cuales por ahora no se investigan. El modo dominante (Fig. 6.24 D) coincide con el patrón de flujo inducido por el experimento (Fig. 6.25 A,B).

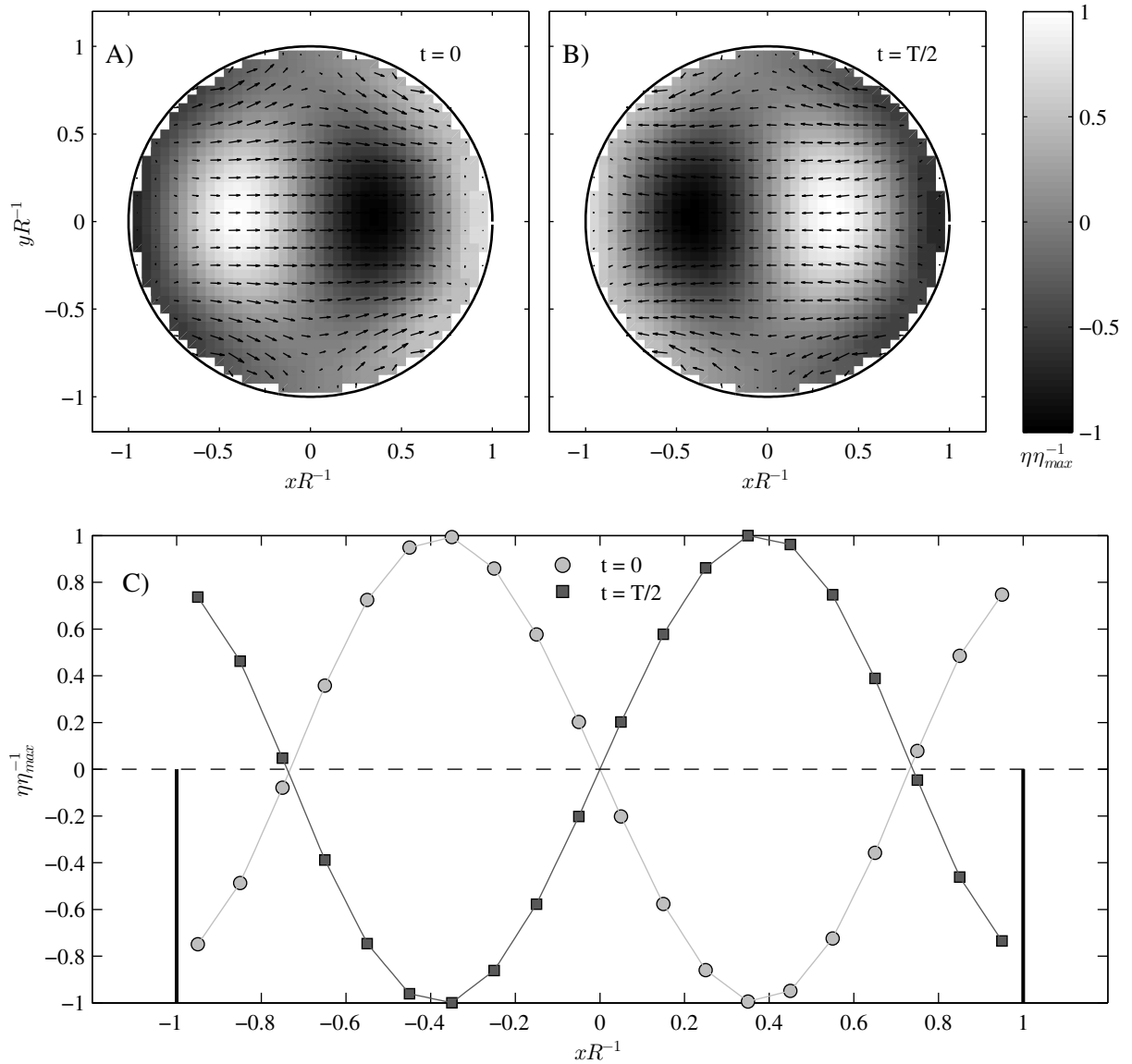


Figura 6.25: Resultados simulados para experimento con  $\omega_f = 116[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$  A) Campo de flujo al inicio de un ciclo B) Campo de flujo en la mitad de un ciclo C) Perfiles transversales de deformación de superficie libre para los campos de flujo mostrados en A y B.

La energía total oscila (Fig. 6.26 A) en torno a un valor mayor que en el caso previo (ver Fig. 6.23 A). Existen momentos en que casi la totalidad de la energía es cinética la cual posteriormente disminuye sin llegar a cero. En el tramo que esta decrece aumenta la potencial lo que se traduce en un aumento de la energía total. La tasa de trabajo oscila en fase con la tasa de disipación pero con una amplitud mayor (Fig. 6.26 B), lo que ayuda a entender que exista un cambio temporal en la energía. Las magnitudes de estos valores están determinadas por el patrón de flujo inducido.

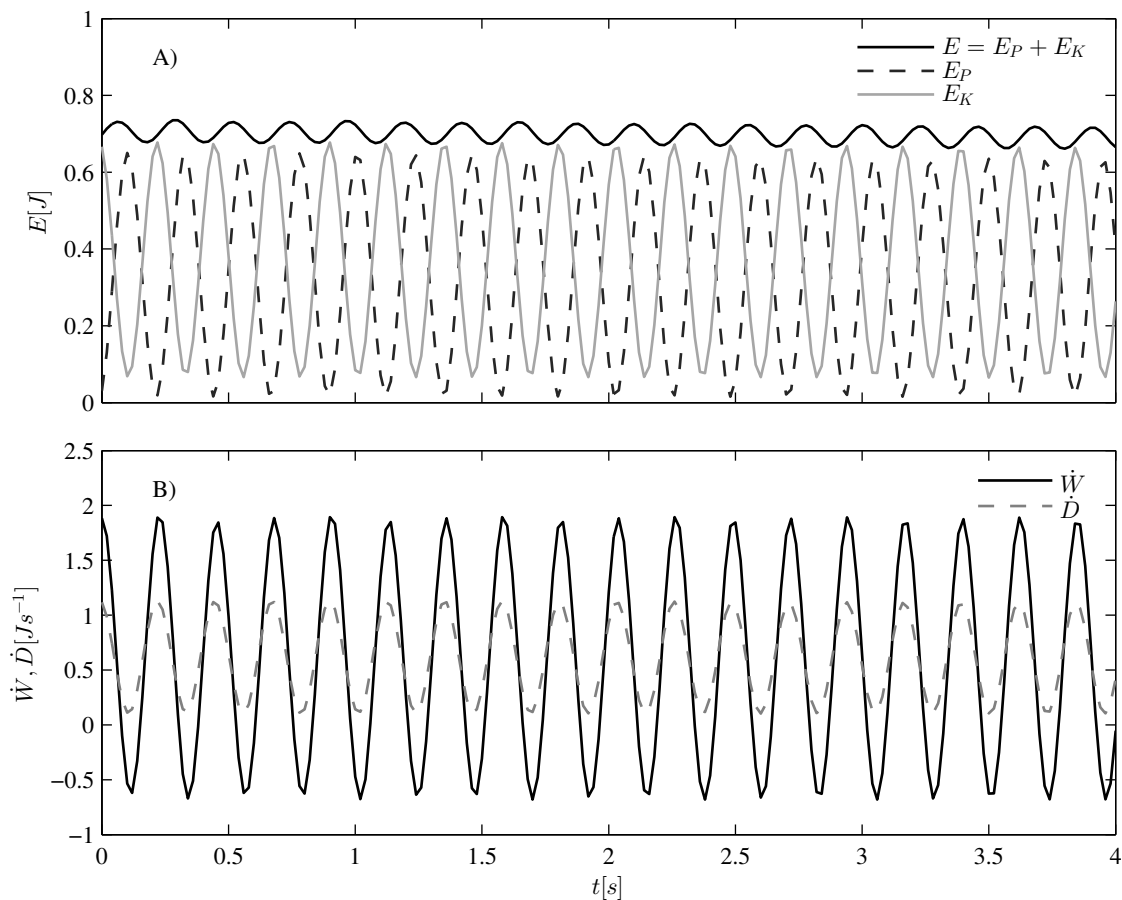


Figura 6.26: Resultados para experimento con  $\omega_f = 116[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$   
 A) Series de energía B) Series de potencia inyectada y disipada.

## Análisis de experimento para Rango 3 de $\omega_f$

La aceleración medida (Fig. 6.27 A) presenta una distorsión en el centro de la serie que no se aprecia en la velocidad medida (Fig. 6.27 B). El ajuste sinusoidal de la aceleración representa la medición de velocidad; mientras que la distorsión en la medición de aceleración genera un patrón de velocidad que no coincide con la medición. Esto destaca que el modelo numérico es sensible a los cambios en el forzante, lo que no necesariamente se observa en las mediciones.

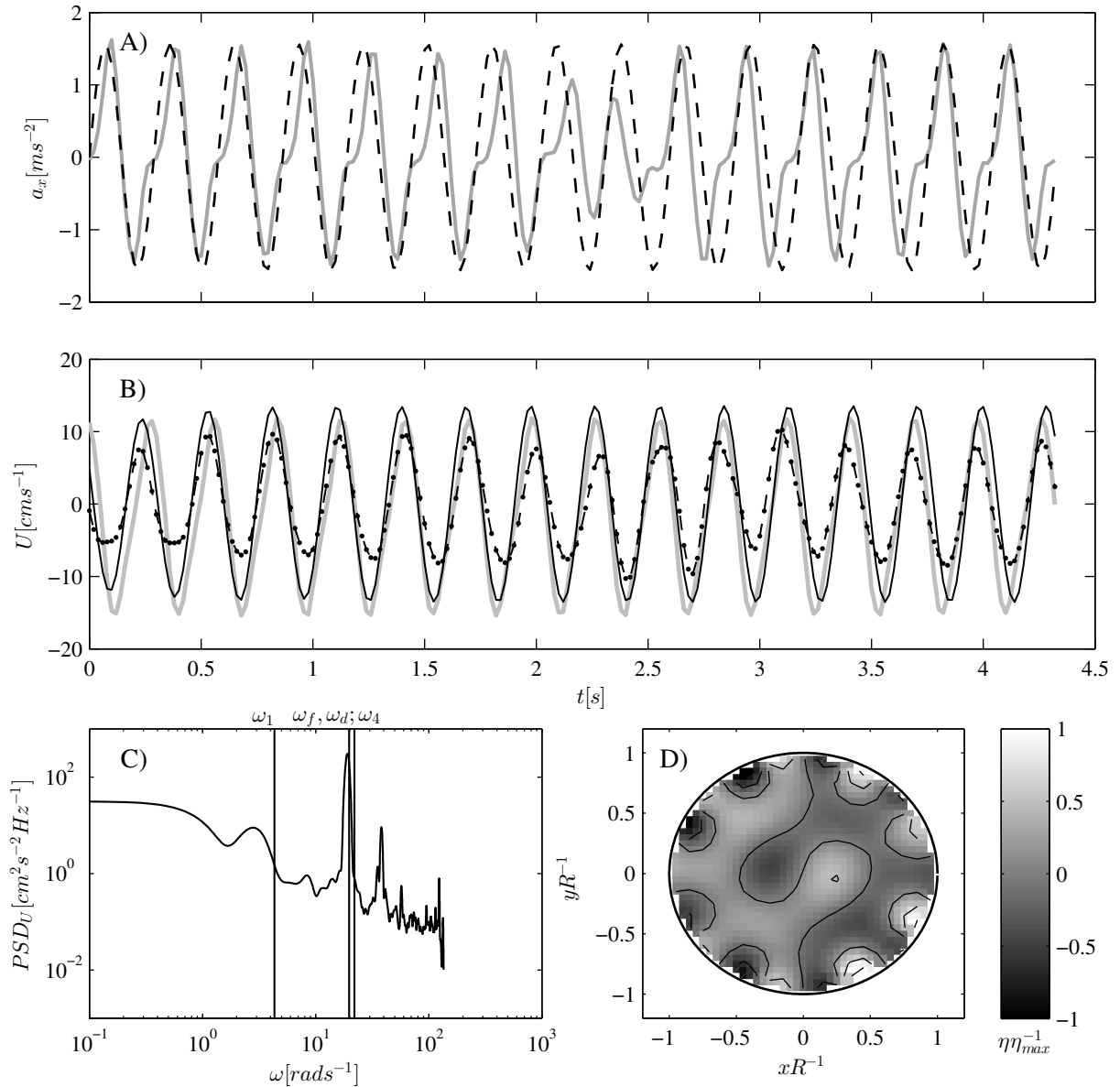


Figura 6.27: Resultados para experimento con  $\omega_f = 182[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2[mm]$  A) Serie de aceleración característica medida (línea gris) y ajustada (línea negra) B) Serie de velocidad medida (línea gris), simulada con la aceleración ajustada (línea negra) y simulada con la aceleración medida (línea punteada) C) Densidad espectral de la medición de velocidad D) Estructura modal con mayor energía promedio.

La densidad espectral (Fig. 6.27 C) nuevamente muestra puntos relevantes en las frecuencias  $\omega_f$  del forzante externo y  $\omega_1$  (Fig. 6.20 A). Se incluye además la frecuencia  $\omega_d$  del modo dominante de este caso (Fig. 6.27 D), la cual prácticamente coincide con la frecuencia del forzante. El patrón de flujo inducido (Fig. 6.28 A,B) no coincide con la estructura dominante sino que se asemeja al modo mostrado en la figura (Fig. 6.20 G). Esto indica que el patrón de flujo adquirido es una combinación de la estructura dominante más otros modos, cuyo detalle queda pendiente de análisis.

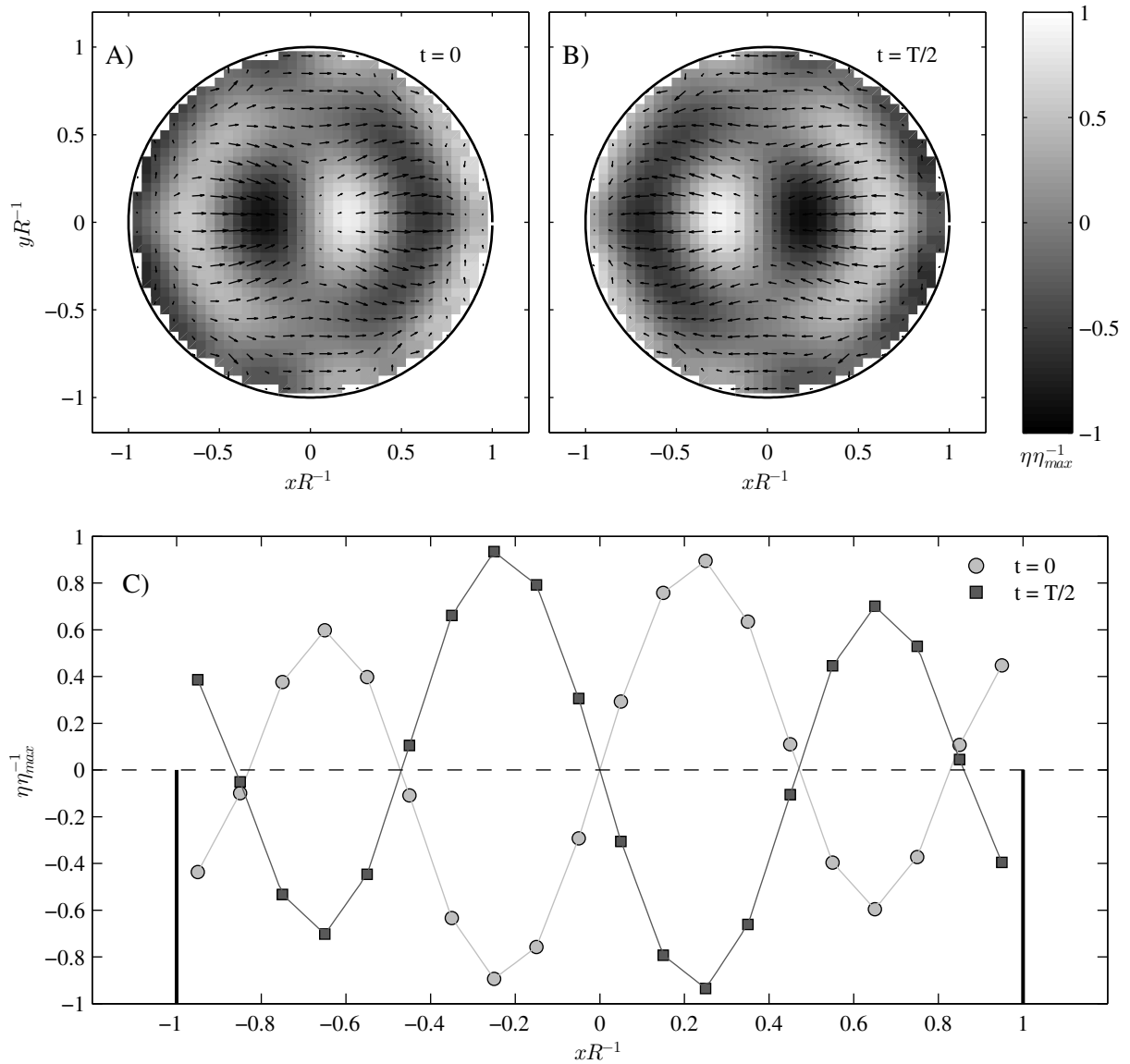


Figura 6.28: Resultados simulados para experimento con  $\omega_f = 182[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$  A) Campo de flujo al inicio de un ciclo B) Campo de flujo en la mitad de un ciclo C) Perfiles transversales de deformación de superficie libre para los campos de flujo mostrados en A y B.

La energía en el sistema (Fig. 6.29 A) oscila con mayor notoriedad que en el caso previo (Fig. 6.26 A). En este caso se aprecia que la energía cinética es constantemente mayor que la energía potencial y ambas oscilan con un leve desfase. Ni la energía cinética ni la potencial llegan a ser nulas. La tasa de trabajo aumenta notoriamente en relación a la tasa de disipación en comparación con los casos anteriores (Fig. 6.29 B). Se aprecia que la relación de magnitud entre ambos valores cambia para cada rango del forzante y es la que explica la amplitud de oscilación de la energía total.

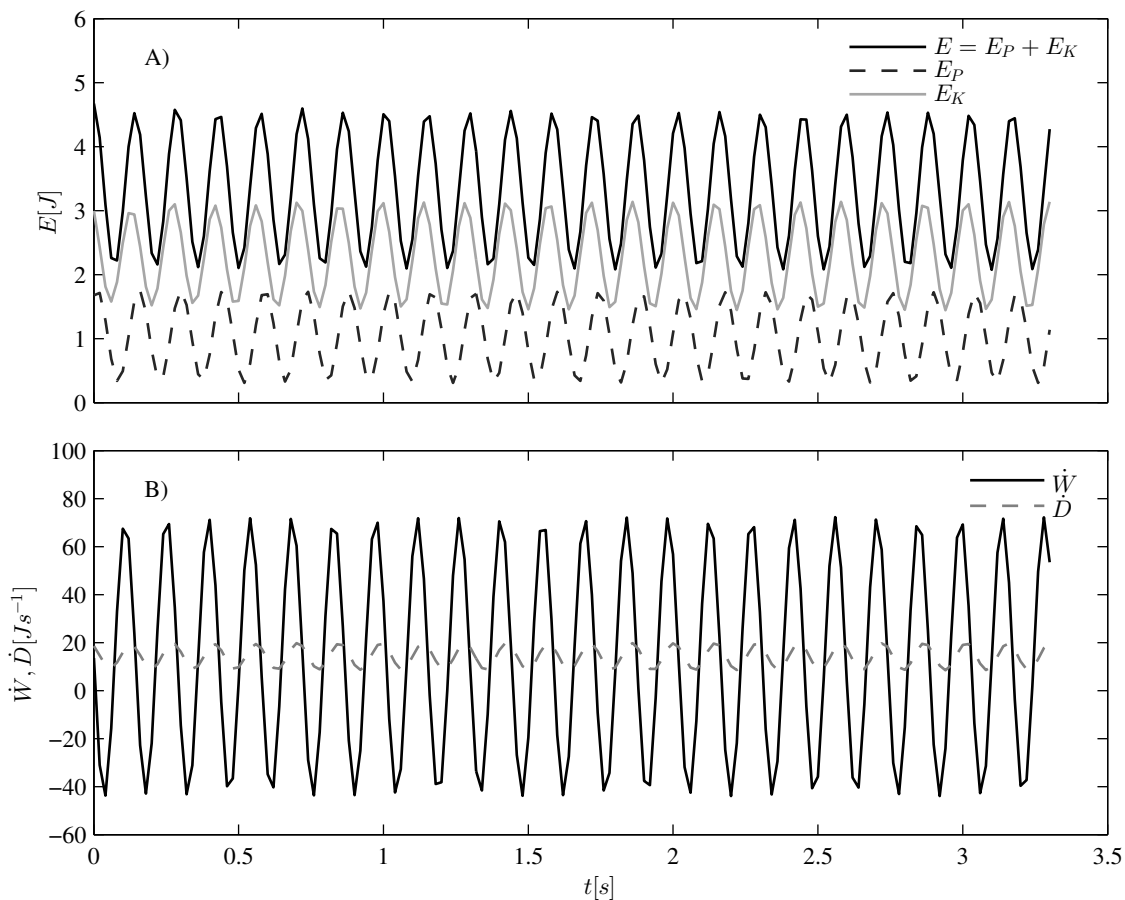


Figura 6.29: Resultados para experimento con  $\omega_f = 182 [RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2 [mm]$   
 A) Series de energía B) Series de potencia inyectada y disipada.

## Análisis de experimento para Rango 4 de $\omega_f$

Si bien la aceleración medida presenta leves cambios temporales en la amplitud (Fig. 6.30 A), la velocidad obtenida al usar esta serie presenta grandes distorsiones en comparación a la medición (Fig. 6.30 B). Esto muestra que a medida que crece la magnitud del forzante externo, el modelo es más sensible frente a pequeños cambios en el forzante, lo que puede inducir series de velocidad que no se ajustan a las mediciones. Nuevamente el ajuste sinusoidal de la aceleración representa adecuadamente las mediciones de velocidad.

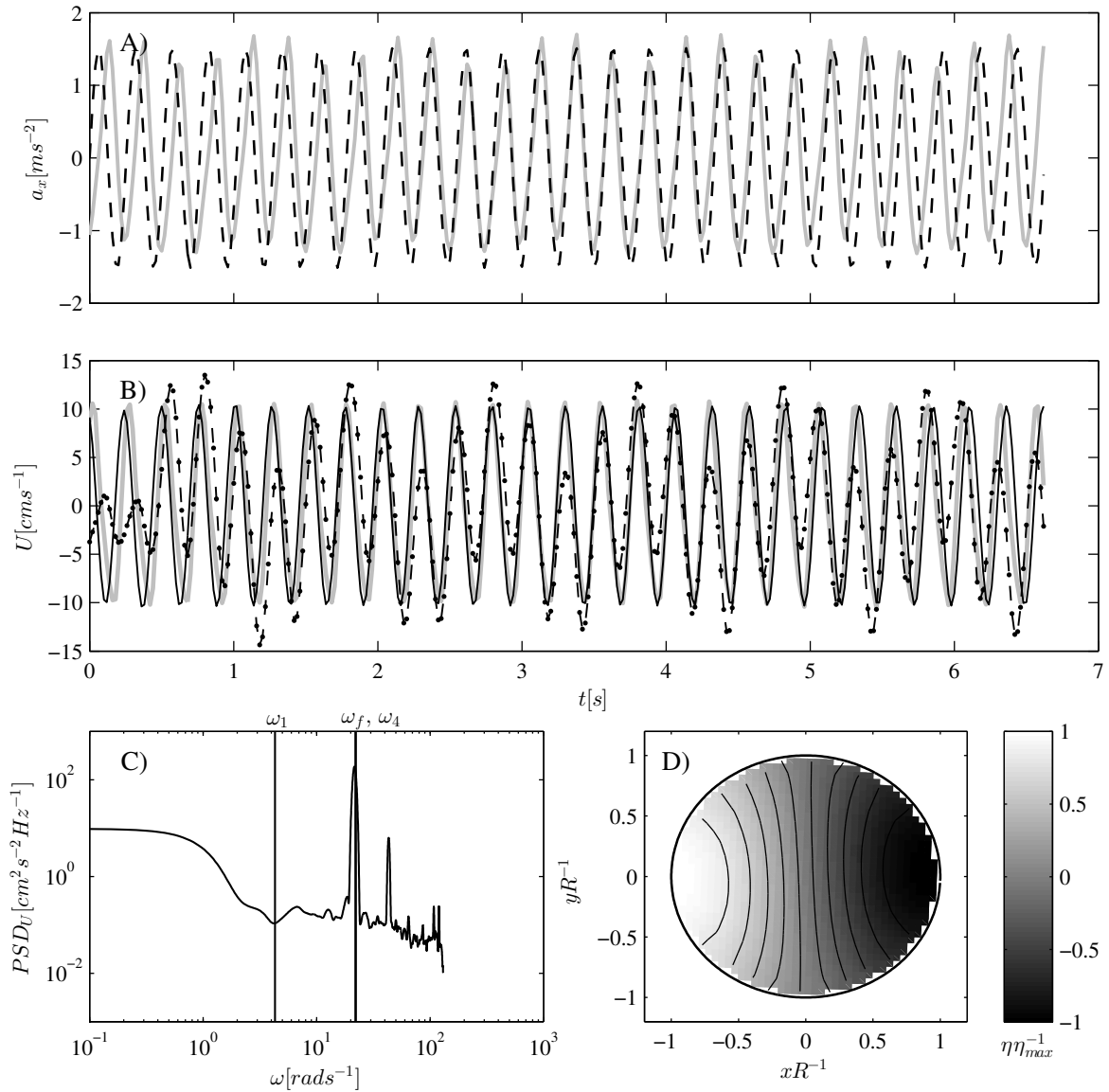


Figura 6.30: Resultados para experimento con  $\omega_f = 206 [RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2 [mm]$   
 A) Serie de aceleración característica medida (línea gris) y ajustada (línea segmentada) B) Serie de velocidad medida (línea gris), simulada con la aceleración ajustada (línea negra) y simulada con la aceleración medida (línea punteada) C) Densidad espectral de la medición de velocidad D) Estructura modal con mayor energía promedio.

La densidad espectral de la velocidad muestra un punto relevante en la frecuencia del forzante externo (Fig. 6.30 C), la cual es muy cercana con la frecuencia  $\omega_4$  (Fig. 6.20 G). Según el cálculo de la energía promedio, esta última es la segunda estructura dominante en el proceso. La figura (6.31 A) muestra la descripción del campo de flujo simulado numéricamente, patrón que se asemeja nuevamente con la estructura mostrada en la figura (6.20 G).

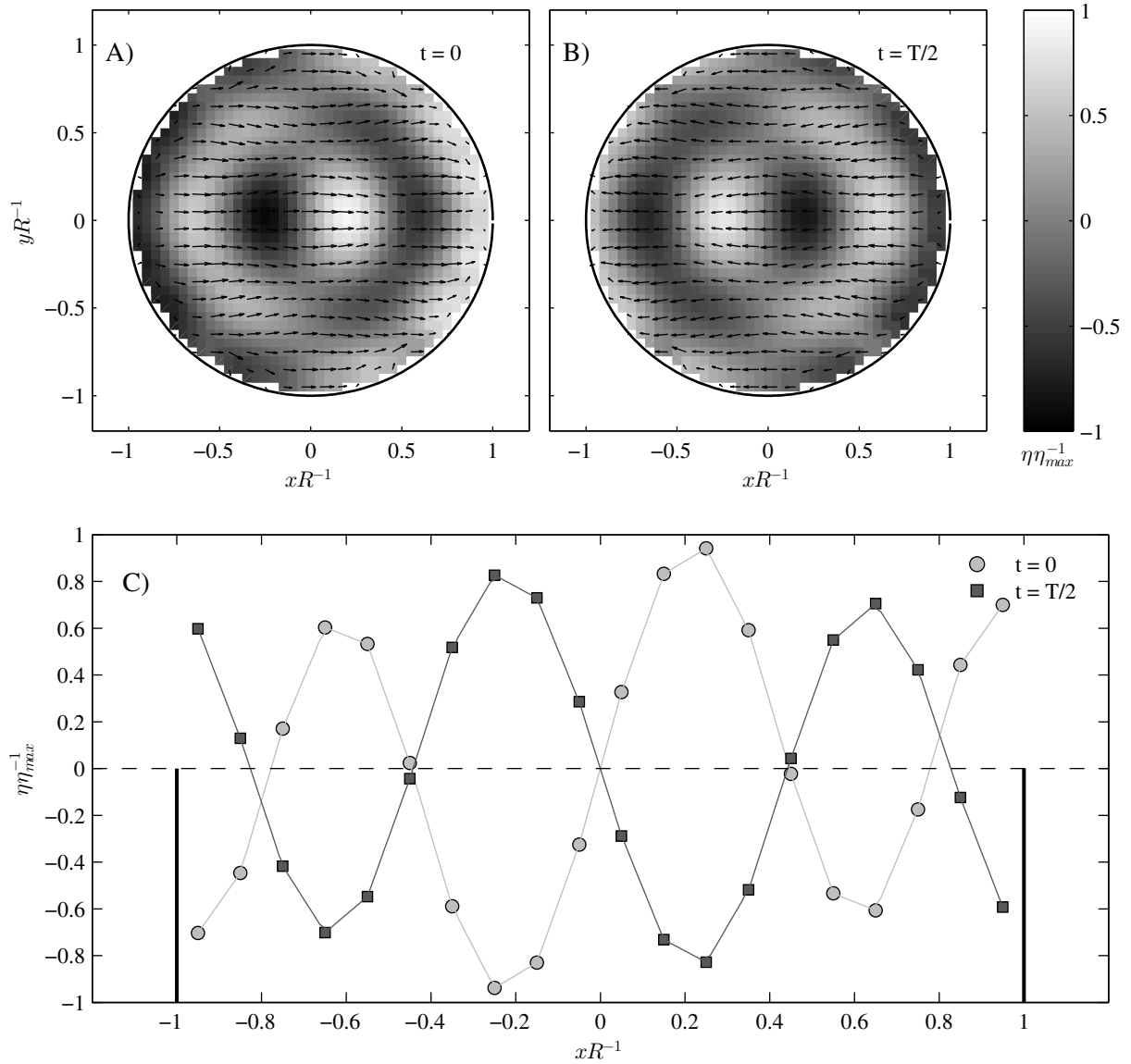


Figura 6.31: Resultados simulados para experimento con  $\omega_f = 206[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2[mm]$  A) Campo de flujo al inicio de un ciclo B) Campo de flujo en la mitad de un ciclo C) Perfiles transversales de deformación de superficie libre para los campos de flujo mostrados en A y B.



La energía total oscila notoriamente (Fig. 6.32 A) y es la energía cinética la que domina constantemente el proceso. En aquellos instantes de tiempo en que la energía cinética es mínima, la energía potencial alcanza sus valores máximos. Se aprecia la pérdida de resolución temporal producto de que la frecuencia del forzante externo es muy alta en comparación a los casos anteriores. La magnitud máxima de la tasa de trabajo (Fig. 6.32 B) es levemente menor que para el rango anterior si bien la estructura de oscilación es la misma (ver Fig. 6.29 B). Esto genera que el máximo de energía en este caso sea menor que en el rango anterior (ver Fig. 6.29 A). Probablemente esto se asocia a que la partición entre energía cinética y potencial para este rango es diferente a la del rango anterior (ver Fig. 6.29 A).

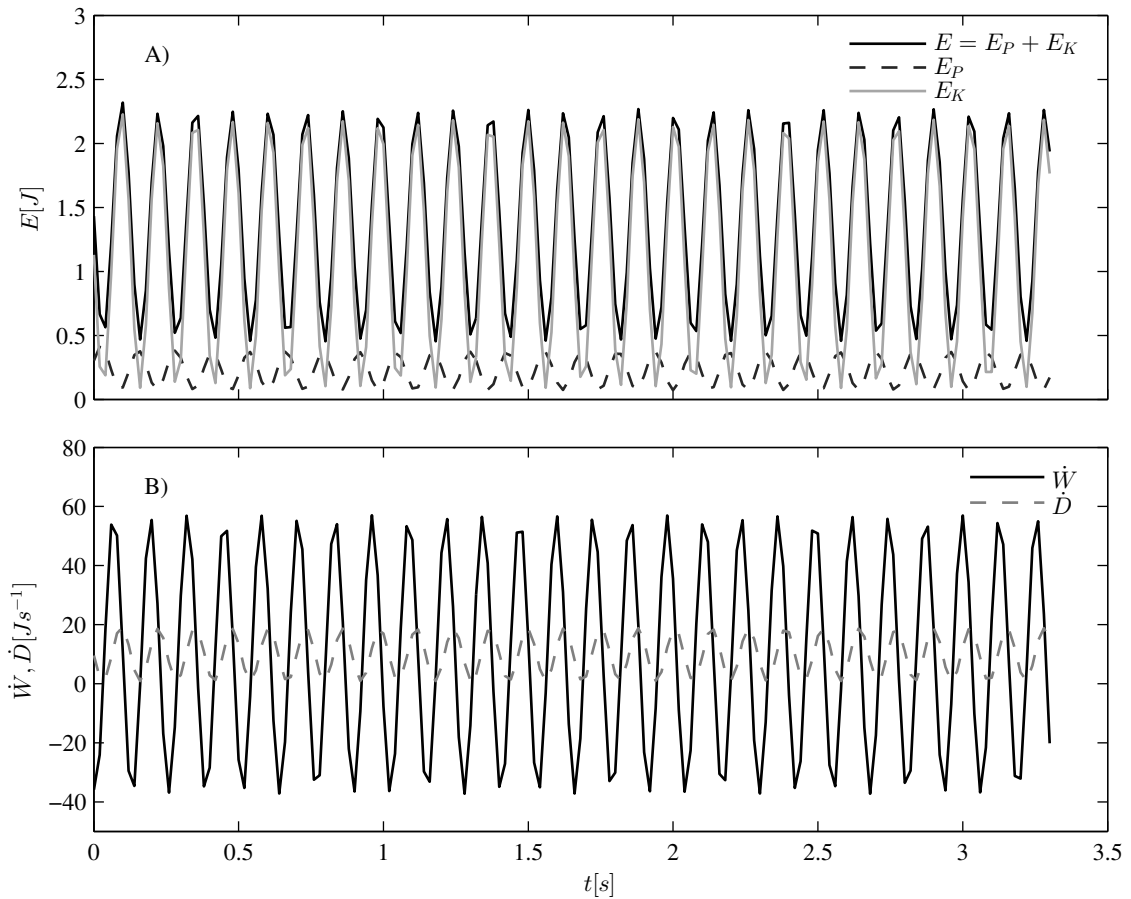


Figura 6.32: Resultados para experimento con  $\omega_f = 206[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2[mm]$   
A) Series de energía B) Series de potencia inyectada y disipada.

### Resumen de resultados por rango

Se observa que a medida que aumenta la frecuencia de oscilación de la mesa, se inducen patrones de flujo con mayor nivel de complejidad. La distribución espacial del flujo es la que domina el balance energético en el problema, modificando los aportes relativos de energía cinética y potencial, así como las tasas de trabajo y disipación.

Al observar las densidades espectrales de la velocidad se aprecia que siempre existe un peak en la frecuencia de oscilación de la mesa. Para los Rangos 1 y 2 este peak coincide con la frecuencia del modo que concentra la mayor cantidad de energía promedio y se observa que las estructuras del flujo inducido se asemejan a estos modos. En los casos de los Rangos 3 y 4, el flujo inducido por la oscilación es semejante entre ellos y coincide con la estructura mostrada en la figura (6.20 G), si bien esta no concentra la mayor parte de la energía promedio. La composición modal de los patrones de flujo inducidos en estos casos requiere mayor análisis.

En todos los casos analizados, se observa que al simular utilizando la serie de aceleración sinusoidal ajustada, la velocidad medida se representa adecuadamente. Sin embargo, al utilizar las series de aceleración medidas, las cuales pueden presentar irregularidades, se pueden inducir patrones de oscilación en la velocidad que no coinciden con las mediciones. En particular, este comportamiento se amplifica para los casos con mayor magnitud del forzante externo, lo que muestra que el modelo numérico es más sensible a las perturbaciones en el forzante externo mientras mayor sea la magnitud de este. Cabe mencionar, que las perturbaciones en las series de aceleración medida en general no se observan en las series de velocidad medida.

# Capítulo 7

## Conclusiones y Comentarios

Este capítulo presenta las conclusiones y principales observaciones del trabajo, las cuales se separan por tópico.

### 7.1. Implementación numérica

El modelo numérico ha sido implementado correctamente utilizando un paradigma de programación de objetos. El esquema conceptual definido para la programación ha probado su utilidad en el manejo masivo de datos, la administración de la memoria computacional y como una herramienta que facilita el procesamiento de información. Este esquema es solo una propuesta inicial y obviamente que puede ser modificada en el tiempo. Si se piensa en el desarrollo futuro de la herramienta se recomienda la utilización de el entorno de desarrollo *Github*, sitio que facilita el libre intercambio de códigos y participación colaborativa.

Con respecto a los cálculos numéricos estos han sido llevados a cabo en un computador convencional, lo que es en parte uno de los objetivos de la memoria, puesto que la idea es que el modelo sea de rápida resolución. Esto se logra por la linealización de las ecuaciones.

Sin embargo, como el coeficiente de fricción es un parámetro de ajuste, se requieren calibraciones como la presentada en los resultados para cada geometría que se simule. Esto es una desventaja puesto en la literatura pocas geometrías cuentan con soluciones analíticas para el flujo.

La metodología de resolución del Análisis Modal y la de Crank Nicolson logran resolver correctamente las ecuaciones. El cómputo de valores y vectores propios introduce un error en los vectores propios que se propaga hasta la solución final afectando la precisión del análisis modal, lo que se observó con el análisis de la energía mecánica. Por otro lado, Crank Nicolson cumple adecuadamente con el balance energético y a pesar de ser un esquema impermanente, su resolución es rápida en comparación al cómputo de valores propios.

Por lo anterior, se estima que para resolver las corrientes horizontales resulta mejor utilizar

Crank Nicolson, metodología que representa exactamente la magnitud de las corrientes dictada por las matrices del problema y cuya implementación numérica es más sencilla que el Análisis Modal. Esta última ha resultado de gran utilidad para comprender la distribución de energía en un sistema fluido pero a cambio de una falla de precisión. Una de las preguntas que queda sin responder es cuanto afectaría esta falla en los flujos de oxígeno disuelto en comparación a los estimados con Crank Nicolson.

La implementación de la metodología de volúmenes finitos para el transporte escalar se realizó con la posibilidad de especificar las condiciones iniciales del problema y analizar su evolución temporal. Además, gracias a la programación de objetos, fue posible realizar la implementación para cualquier masa y no para el oxígeno disuelto en particular. Es decir, si se desea estudiar el transporte de algún escalar cualquiera, habría que crear este escalar y especificar sus parámetros de relevancia como el coeficiente de difusión o si tiene o no interacción verticales con los sedimentos o la atmósfera.

## 7.2. Hidrodinámica

Las corrientes horizontales afectan la deformación máxima que puede alcanzar la superficie libre en una laguna. Estas juegan un rol en el balance de fuerzas que altera las condiciones de un problema unidimensional en donde el balance es determinado solo por el gradiente de presión y el viento. Se ha demostrado este hecho teóricamente y se valida numéricamente.

Las ecuaciones linealizadas son capaces de representar corrientes de recirculación en lagunas someras con batimetría variable. En el caso de Kranenburg (1992) los patrones de recirculación son elípticos y se puede pensar en principio que las ecuaciones linealizadas tendrían problemas en su representación. Esto no fue así y se cumplen las distribuciones de velocidad espacial predichas analíticamente.

Se ha encontrado una ecuación que cuantifica el balance de energía temporalmente en función de las tasas de trabajo y de disipación de energía. Esta forma de abordar el problema ha sido de utilidad para entender como reacciona el sistema frente a un forzante externo y permitió analizar los resultados experimentales con mayor profundidad.

El análisis dimensional de las ecuaciones es el que permitió entender a cabalidad los parámetros que controlan la dinámica de las ecuaciones lineales y que en la práctica gobiernan la variación del coeficiente de fricción en el problema.

## 7.3. Transporte escalar

En el escenario en que el transporte de una sustancia es afectada mayormente por advección horizontal y flujos difusivos verticales, se ha demostrado teóricamente y comprobado numéricamente que la parametrización de los flujos verticales influye en la distribución espacial de concentración de la sustancia transportada. En particular para el oxígeno disuelto, es la

velocidad de transferencia vertical con los sedimentos la que controla y origina que la distribución espacial de concentración sea variable, dado que su parametrización depende del flujo local de fluido.

Para cuantificar la interacción entre el flujo vertical de oxígeno disuelto y la advección horizontal se ha deducido una versión del número de Péclet a partir de un análisis unidimensional del problema de transporte. Este número resulta de gran utilidad para entender las distribuciones espaciales de concentración, en donde se ha logrado establecer que las zonas con velocidades más bajas generan las condiciones para que aumente el consumo de oxígeno disuelto en los sedimentos y por ende, disminuya la concentración.

En los casos simulados con advección horizontal y con flujos de oxígeno disuelto en los sedimentos que solo involucran consumo, se ha observado que el número de Péclet promedio espacial sigue un comportamiento que varía conforme se cambia la relación de aspecto de la geometría y está influenciado por el forzante externo y la relación de aspecto. Para una de las relaciones de aspecto simuladas este parámetro tiene un punto de inflexión al ser analizado con respecto a la magnitud del forzante externo. En la práctica, esto permite que para un determinado número de Péclet promedio espacial, puedan existir dos concentraciones de equilibrio posibles. Esto puede indicar que el promedio espacial del Péclet no es un indicador consistente para describir el problema o bien el fenómeno de determinar cual es la concentración de equilibrio en una laguna es más complejo y requiere analizar nuevas simulaciones numéricas. Un tema que queda abierto con el trabajo es generar una validación experimental o de terreno del transporte escalar. Además, las simulaciones realizadas en este trabajo no incluyen dispersión horizontal dado que el objetivo era cuantificar el efecto de las corrientes horizontales por lo que analizar el efecto de la dispersión sobre todo en topografías más complejas es un tema que queda abierto.

Se concluye que la profundidad de la laguna es una de las variables más relevantes que determinan la concentración que esta tendrá en el régimen permanente. En particular por su influencia en la velocidad de transferencia vertical de OD con los sedimentos: a menor profundidad, mayor es este coeficiente. Se observa que dado un número de Wedderburn y un tamaño característico de la hoya, a medida que aumenta la relación de aspecto, o sea, disminuye la profundidad, la concentración promedio espacial en el régimen permanente disminuye notoriamente. Dentro de las simulaciones numéricas, aquellos casos en los que la relación de aspecto fue  $\psi = 10^5$  la concentración promedio espacial fue prácticamente nula en el rango de números de Wedderburn analizado.

Se observan diferencias entre los resultados obtenidos al resolver el problema con volúmenes finitos versus los que se obtienen con el supuesto de mezcla completa. En particular, se tiene que la concentración promedio espacial es en general mayor a la concentración de mezcla completa y existe un número de Wedderburn que maximiza esta diferencia, el cual cambia en función del tamaño característico de la hoya y la relación de aspecto. Esto último se traduce en que el flujo vertical de OD obtenido con mezcla completa es siempre mayor que el flujo que se obtiene al promediar espacialmente la solución obtenida con volúmenes finitos. La diferencia entre los flujos depende de la relación de aspecto y del número de Wedderburn.

## 7.4. Experimentos

Se ha logrado implementar una instalación experimental que permite validar el módulo hidrodinámico del modelo computacional. La instalación además abre toda una nueva serie de experiencias para entender el comportamiento de fluidos oscilantes. El tipo de instalación construida es determinada por los conceptos teóricos que entrega el análisis modal, dado que es con esta técnica que se pueden visualizar campos de flujo con distribuciones espaciales complejas. La instalación puede recrear exitosamente algunos de estos campos de flujo.

Además, se ha introducido el desarrollo de maquetas a escala en base a parametrizaciones computacionales utilizando herramientas de modelación y construcción tridimensional. Esto permitiría confeccionar cualquier tipo de geometría que se quiera ensayar en la máquina experimental con lo que se pueden estudiar nuevos patrones de oscilación.

Actualmente la implementación de sensores como el acelerómetro resultan de bajo costo y entregan una nueva gama de información que puede ser analizada. Lo ideal sería que a futuro nueva instrumentación de este tipo sea implementada y que la instalación pueda evolucionar a ser un sistema de monitoreo completo de procesos oscilatorios en fluidos. Es decir, que posea su sistema de control computacional independiente el cual permita monitorear en vivo las mediciones realizadas por los sensores implementados.

Las mediciones de velocidad en el centro del modelo a escala responden a cambios en la frecuencia y en la amplitud de oscilación. Se ha observado que los cambios en la frecuencia inducen la excitación de distintos patrones de flujo y la amplitud de oscilación influye en la magnitud de las mediciones. Cada patrón de flujo excitado tiene una respuesta en la que para determinado rango de frecuencia la amplitud de la velocidad crece, alcanza un peak y luego decrece para posteriormente cambiar el patrón de flujo.

Algunas de las frecuencias de giro del motor en las que se maximiza la amplitud de la velocidad medida, coinciden con las frecuencias de las estructuras modales que determinan el patrón de flujo, por lo que se puede entender que una determinada estructura entra en estado de resonancia. Esto se da en particular para las mediciones del Rango 1 y del Rango 4.

La calidad en la construcción no es perfecta y puede ser mejorada. Lo ideal sería anular cualquier tipo de vibración externa en el sistema y realizar una revisión completa de la nivelación de sus partes. Esto entregaría un sustento constructivo más robusto y permitiría desarrollar experimentos de precisión. Mediciones de mayor precisión permitirían definir por ejemplo, el rango de forzamiento en que el sistema fluido responde linealmente.

El montaje actualmente recrea las condiciones de flujo que permiten ajustar un coeficiente de fricción en la simulación numérica para reconstruir las mediciones. Pero el comportamiento de este coeficiente aún es incierto y en los resultados da la impresión de que este valor tiende a aumentar con la magnitud adimensional de la aceleración, lo que requiere mayores experiencias para ser confirmado.

Los patrones de flujo inducidos tienen distintas distribuciones espaciales y distintas relaciones entre la tasa de trabajo y de disipación. Se observa que a medida que aumenta la frecuencia

del forzante, aumenta la tasa de trabajo y esta tiende a ser notoriamente mayor que la tasa de disipación. Además, dependiendo el aumento en la frecuencia del forzante, se traduce en una modificación del comportamiento energético del patrón del flujo. En general se aprecia que a medida que aumenta la frecuencia, mayor es la influencia de la energía cinética en relación a la energía potencial, llegando en algunos casos a concentrar el total de energía del sistema.

## 7.5. Propuestas para futuros análisis

En la búsqueda de referencias para estudiar sistemas de fluidos oscilatorios se han encontrado los estudios de Couder *et al.* (2010), Harris *et al.* (2013) y Bush (2015), los cuales están ligados al estudio de hidrodinámica de ondas piloto, tema que se relaciona con la interpretación de la mecánica cuántica de De Broglie. En los experimentos que se presentan en Couder *et al.* (2010) excitan un contenedor de fluido verticalmente y analizan estadísticamente la trayectoria de una partícula que puede saltar en la superficie del fluido. Un estudio de esta clase también puede ser realizado en el sistema que oscila horizontalmente implementado en el laboratorio. Para una revisión completa del estado actual de la hidrodinámica de ondas piloto se recomienda ver el trabajo de Bush (2015).

Existen hoy en día técnicas de detección de deformación de superficie libre en base a transformadas de Fourier (Cobelli *et al.* , 2009; Maurel *et al.* , 2009; Przadka *et al.* , 2012). La implementación de esta metodología en la instalación sería de utilidad para captar las distribuciones espaciales de superficie libre. Es importante considerar de todas formas que esta metodología tiene una precisión del orden de  $4[mm]$  lo que probablemente impida captar todas las deformaciones espaciales. En ausencia de un sensor de altura para la superficie libre que corrobore cuanto se deformó esta en las experiencias, se estima que en algunos casos el cambio en la superficie libre escala con un par de centímetros, lo que podría ser estudiado en principio con simulaciones numéricas.

Los fluidos oscilantes presentan campos de flujo complejos que pueden interactuar con la batimetría. En las experiencias de laboratorio y para mejorar las mediciones de velocidad, se ensucia el agua con polvo. Este sirve de trazador para observar la generación de patrones de acumulación que dependen del régimen del forzante. Esto abre la pregunta de como podría interactuar a largo plazo un fluido oscilante con maquetas cuyo lecho es deformable, es decir, como cambia la forma del lecho cuando se excita oscilatoriamente por un extenso lapso de tiempo.

## 7.6. Comentarios finales

Los resultados presentados en esta memoria son diversos y abren toda una nueva gama de preguntas. Los objetivos fueron mutando desde su planteamiento original pero en esencia han sido cumplidos: se tiene una herramienta numérica para el transporte bidimensional de escalares y se ha implementado una instalación experimental que permite la validación de parte del modelo.

Se espera que la implementación de la herramienta numérica permita a largo plazo generar un ambiente colaborativo en torno a la programación que entregue la posibilidad de aprendizaje e intercambio de códigos para aumentar la funcionalidad del programa. Esta clase de ambientes de programación grupal facilitaría el acercamiento de los estudiantes al manejo de la programación y entregaría un marco conceptual para unificar en un solo ambiente la gran cantidad de códigos con los que actualmente se cuenta.

Los anexos de este trabajo incluyen una revisión y desarrollo extensivo de la teoría que sustenta las metodologías aplicadas. Si bien esta puede ser encontrada en las referencias, parte de la idea de incluirlas aquí es que están traducidas al español y compiladas para que quién desee ahondar en las bases teóricas del trabajo, pueda hacerlo directamente. Es esta revisión teórica la que permite comprender los supuestos que sustentan las ecuaciones, su rango de aplicabilidad y su eventual extensión y uso para extraer nuevas conclusiones.



# Bibliografía

- Bryant, L., McGinnis, D., Larrai, C., Brand, A., Little, J., & Wuest, A. 2010. Evaluating oxygen fluxes using microprofiles from both sides of the sediment-water interface. *Limnology and Oceanography: Methods*, **8**, 610 – 627.
- Bush, J. 2015. Pilot-Wave Hydrodynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **47**, 269 – 292.
- Cobelli, P., Maurel, A., Pagneux, V., & Petitjeans, P. 2009. Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry. *Experiments in Fluids*, **46**, 1037 – 1047.
- Cotroneo, J. 2015. Estudio experimental de la sedimentación de mezclas sólidos-líquida polidispersas en planos inclinados. *In: Tesis para optar al grado de magíster en ciencias de la ingeniería, mención recursos y medio ambiente hídrico, Universidad de Chile.*
- Couder, Y., Boudaoud, A., Protière, S., & Fort, E. 2010. Walking droplets, a form of wave-particle duality at macroscopic scale? *Europhysics News*, **41**, 14 – 18.
- Csanady, G. 1973. Wind-Induced Barotropic Motions in Long Lakes. *Journal of Physical Oceanography*, **3**, 429 – 438.
- Csanady, G. 1975. Hydrodynamics of large lakes. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **7**, 357 – 386.
- de la Fuente, A. 2006. Modelo numérico bidimensional plano multicapa para el estudio de la hidrodinámica en cuerpos de agua estratificados. *In: Examen de calificación para el programa de doctorado en Fluidodinámica, Universidad de Chile.*
- de la Fuente, A. 2014a. Heat and dissolved oxygen exchanges between the sediment and water column in a shallow salty lagoon. *Journal of Geophysical Research: Biogeosciences*. doi: 10.1002/2013JG002413.
- de la Fuente, A. 2014b. Methodology for analyzing dissolved oxygen consumption in benthic chambers. *Journal of Environmental Engineering*. doi: 10.1061/(ASCE)EE.1943-7870.0000926.
- de la Fuente, A., & Niño, Y. 2010. Temporal and spatial features of the thermohydrodynamics of shallow salty lagoons in northern Chile. *Limnology and Oceanography*, **55**(1), 279–288.

- de la Fuente, A., Ordóñez, C., & Pérez, R. 2015. Diffusional mass transfer coefficient at the water-sediment interface for wind-induced flow in very shallow lagoons. *Environmental Fluid Mechanics*. doi: 10.1007/s10652-015-9437-9.
- Dejoux, C. 1993. Benthic invertebrates of some lakes of the SudLipes region, Bolivia. *Hydrobiologia*, **267**, 257 – 267.
- Elder, C. 1959. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **5**, 544 –560.
- Fischer, H. 1973. Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open channel flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **5**, 59–78.
- Fischer, H., List, E., Koh, R., Imberger, J., & Brooks, N. 1979. *Mixing in inland and coastal waters*. First edn. Academic Press.
- Harris, D., Moukhtar, J., Fort, E., Couder, Y., & Bush, J. 2013. Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral. *Physical Review E*, **88**.
- Holly, F. 1975. Two-Dimensional Mass Dispersion in Rivers. *Hydrology Papers Colorado State University*, **78**.
- Holly, F., & Usseglio-Polatera, J. 1984. Dispersion simulation in two-dimensional tidal flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, **110**, 905–926.
- Imberger, J., & Hamblin, P. 1982. Dynamics of lakes, reservoirs, and cooling ponds. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **14**, 153 – 187.
- Kampf, S., Tyler, S., Ortiz, C., Muñoz, J., & Adkins, P. 2005. Evaporation and land surface energy budget at the Salar de Atacama, Northern Chile. *Journal of Hydrology*, **310**, 236–252.
- Kranenburg, C. 1992. Wind driven chaotic advection in a shallow model lake. *Journal of Hydraulic Research*, **30**, 29–46.
- Liang, Q., Borthwick, A., & Taylor, P. 2006a. Wind-induced chaotic advection in shallow flow geometries. Part I: Circular basins. *Journal of Hydraulic Research*, **44**(2), 170–179.
- Liang, Q., Borthwick, A., & Taylor, P. 2006b. Wind-induced chaotic advection in shallow flow geometries. Part II: Non-circular basins. *Journal of Hydraulic Research*, **44**(2), 180–188.
- Maurel, A., Cobelli, P., Pagneux, V., & Petitjeans, P. 2009. Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in Fourier transform profilometry. *Applied Optics*, **48**, 380 – 392.
- Nakamura, Y., & Stefan, H. 1994. Effect of flow velocity on sediment oxygen demand: Theory. *Journal of Environmental Engineering*, **120**, 996–1016.
- Ordóñez, C. 2014. Estudio experimental sobre el transporte de oxígeno en la interfaz agua–

- sedimentos para cuerpos de agua someros. *In: Tesis para optar al título de ingeniero civil, Universidad de Chile.*
- Ordóñez, C., Pérez, R., & de la Fuente, A. 2013. Experimental study of flow and diffusional mass transfer coefficient across the water-sediment interface determined by wind blowing an extremely shallow lagoon. *In: Proceedings of 2013 IAHR Congress, Chengdu, China.*
- Ordóñez, C., de la Fuente, A., & Díaz, P. 2015. Modeling the influence of benthic primary production on oxygen transport through the water–sediment interface. *Ecological Modelling*. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2015.05.007.
- Pain, H. 2005. *The physics of vibrations and waves*. Sixth edn. John Wiley & Sons, Ltd.
- Patankar, S. 1980. *Numerical heat transfer and fluid flow*. First edn. McGraw–Hill.
- Platzman, G. 1984. Normal modes of the world ocean. Part III: A procedure for tidal synthesis. *Journal of Physical Oceanography*, **14**, 1521–1531.
- Proudman, J. 1928. On a general expansion in the theory of the tides. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **29**, 527–536.
- Przadka, A., Cabane, B., Pagneux, V., Maurel, A., & Petitjeans, P. 2012. Fourier transform profilometry for water waves: how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface? *Experiments in Fluids*, **52**, 519 – 527.
- Rajlich, V. 2012. *Software Engineering: The current practice*. First edn. CRC Press, Taylor & Francis.
- Rayo, S. 2009. Estudio experimental del efecto del viento en la tasa de reaireación en un estanque agitado. *In: Tesis para optar al grado de magíster en ciencias de la ingeniería, mención recursos y medio ambiente hídrico, Universidad de Chile.*
- Ro, K., & Hunt, P. 2006. A new unified equation for wind-driven surficial oxygen transfer into stationary water bodies. *Transactions of the American Society of Agricultural and Biological Engineers*, **49**, 1615–1622.
- Ro, K., Hunt, P., & Poach, M. 2007. Wind-driven surficial oxygen transfer. *Critical Reviews in Environmental Science and Technology*, **37**, 539–563.
- Rozas, C. 2011. Análisis modal para el estudio de resonancia de ondas internas excitadas por el viento en el lago Villarrica. *In: Tesis para optar al grado de magíster en ciencias de la ingeniería, mención recursos y medio ambiente hídrico, Universidad de Chile.*
- Rozas, C., de la Fuente, A., Ulloa, H., Davies, P., & Niño, Y. 2014. Quantifying the effect of wind on internal wave resonance in Lake Villarrica, Chile. *Environmental Fluids Mechanics*. doi: 10.1007/s10652-013-9329-9.
- Sayre, W. 1975. Dispersion of mass in open-channel flow. *Hydrology Papers Colorado State University*, **75**.

- Shimizu, K., & Imberger, J. 2008. Energetics and damping of basin-scale internal waves in a strongly stratified lake. *Limnology and Oceanography*, **53**(4), 1574–1588.
- Shimizu, K., Imberger, J., & Kumagai, M. 2007. Horizontal structure and excitation of primary motions in a strongly stratified lake. *Limnology and Oceanography*, **52**(6), 2641–2655.
- Shintani, T., de la Fuente, A., Niño, Y., & Imberger, J. 2010. Generalizations of the Wedderburn number: Parameterizing upwelling in stratified lakes. *Limnology and Oceanography*, **55**(3), 1377 – 1389.
- Steinberger, N., & Hondzo, M. 1999. Difussional mass transfer at sediment-water interface. *Journal of Enviromental Engineering*, **125**(2), 192–200.
- Taylor, J. 2005. *Classical Mechanics*. First edn. University Science Books.
- Thompson, R., & Imberger, J. 1980. Response of a numerical model of a stratified lake to wind stress. *Proc. Int. Symp. Stratified Flows, 2nd, Trondheim*, **1**, 562 – 570.
- Versteeg, H., & Malalasekera, W. 1995. *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*. First edn. Longman Group Ltd.
- White, F. 1998. *Fluid Mechanics*. Fourth edn. McGraw–Hill.
- Williams, W., Carrick, T., Bayly, I., Green, J., & Berbst, D. 1995. Invertebrates in salt lakes of the Bolivian Altiplano. *International Journal of Salt Lakes Research*, **4**, 65–77.
- Wilson, G., Aruliah, D., Brown, C., Chue Hong, N., Davis, M., Guy, R., Haddock, S., Huff, K., Mitchell, I., Plumbley, M., Waugh, B., White, E., & Wilson, P. 2014. Best practices for scientific computing. *PLoS Biology*, **12**.
- Zuñiga, L., Campos, V., Pinochet, H., & Prado, B. 1991. A limnological reconnaissance of Lake Tevenquiche, Salar de Atacama, Chile. *Hydrobiologia*, **210**, 1–2.

# Anexos

# Anexo A

## Deducción de las ecuaciones hidrodinámicas

### A.1. Ecuación de Continuidad

#### A.1.1. Formulación Teórica

Sea  $\rho\mathbf{v}$  el campo de flujo másico de un fluido continuo de densidad  $\rho$  y campo de velocidad  $\mathbf{v}$ . Matemáticamente, el flujo másico a través de una superficie cerrada  $S$  está dado por

$$F = \int_S \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.1})$$

en donde  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}dS$  es el elemento de superficie que apunta en la dirección de la normal exterior a la superficie. La masa total contenida en el volumen  $V$  que encierra la superficie  $S$  es

$$m = \int_V \rho dV, \quad (\text{A.2})$$

La ecuación de continuidad de masa estudia el cambio temporal en la masa producto de los flujos másicos que ocurren a través de la superficie considerada, lo que matemáticamente se expresa como

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.3})$$

en donde el signo negativo indica que si hay una mayor flujo de salida entonces la masa en el volumen disminuye. La integral de superficie en la ecuación anterior, puede ser expresada

como una integral de volumen aplicando el teorema de la divergencia de Gauss, con lo que se obtiene

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (\text{A.4})$$

Reordenando esta ecuación se puede concluir que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

### A.1.2. Derivada Material

Sea  $\mathbf{A}$  un campo que depende del espacio y el tiempo. El cambio total en el tiempo de la variable  $\mathbf{A}$  puede ser calculado como

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (\text{A.6})$$

en donde se ha aplicado regla de la cadena para la derivación. Sea  $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$  un vector que describe un campo de velocidad tridimensional, donde el exponente  $T$  significa transpuesto. Definiendo  $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ ,  $v = \frac{\partial y}{\partial t}$  y  $w = \frac{\partial z}{\partial t}$ , la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \equiv \frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}, \quad (\text{A.7})$$

en donde se ha introducido la notación  $\frac{da}{dt} \equiv \frac{Da}{Dt}$  para identificar con claridad el concepto de derivada material y ser consecuente con las definiciones que se pueden encontrar en la literatura. Vectorialmente la ecuación se puede escribir como

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.8})$$

La derivada material consta de dos términos. El primero corresponde al cambio estrictamente temporal de la variable  $\mathbf{A}$ , mientras que el segundo explica el cambio que se genera en la variable producto del movimiento inducido por  $\mathbf{v}$ , lo que usualmente se conoce como término advectivo.

### A.1.3. Flujo Incompresible

Retomando la ecuación de continuidad (A.5) y expandiendo la divergencia se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (\text{A.9})$$

Aplicando la definición de derivada material, se puede concluir finalmente que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Por definición, el flujo es incompresible cuando  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , lo que para una densidad  $\rho \neq 0$  implica que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , es decir, el campo de velocidad es solenoidal y no existen fuentes ni sumideros de masa en el espacio. El hecho de que el flujo sea incompresible, no necesariamente implica que el material sea incompresible, por lo que la ecuación de continuidad admite cambios espaciales en la densidad, siempre y cuando la derivada material sea nula. El caso en que la densidad es constante en el tiempo y el espacio es por definición la representación de un fluido incompresible.

## A.2. Ecuación de momentum

El balance de fuerzas sobre un elemento de fluido que se encuentra en un sistema de referencia no inercial se expresa como (White, 1998)

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} + \rho \mathbf{f}, \quad (\text{A.11})$$

donde  $p$  es la distribución de presión,  $\boldsymbol{\tau}_{ij}$  es el tensor de esfuerzos superficiales sobre el fluido el cual se define como

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

en donde  $\tau_{ij}$  es el esfuerzo que actúa sobre la cara  $i$  y apunta en la dirección  $j$ . El operador divergencia ( $\nabla \cdot$ ) se aplica sobre las filas de la matriz  $\boldsymbol{\tau}_{ij}$ . Cabe mencionar que a partir de un balance de momentum angular sobre el elemento fluido se puede demostrar que el tensor de esfuerzos es simétrico. Para el caso de fluidos newtonianos, los esfuerzos superficiales son proporcionales a la tasa de deformación

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{A.13})$$

siendo  $\mu$  la viscosidad dinámica,  $u_i$  y  $x_i$  las componentes  $i$  del vector de velocidad y de coordenadas espaciales, respectivamente.



$\mathbf{f}$  es el vector de aceleraciones que da origen a las fuerzas másicas sobre el elemento de fluido. Para el caso de un fluido en la tierra en un sistema de referencia no inercial

$$\mathbf{f} = -g\nabla h + \mathbf{a}_f, \quad (\text{A.14})$$

donde  $-g\nabla h$  representa el efecto de la gravedad terrestre. El término  $h$  es un eje vertical que sigue la dirección de un radio terrestre, es decir, es paralelo a la dirección de  $\vec{g}$ , el que apunta hacia el centro de la tierra. El término  $\nabla h$  cuantifica como varía la fuerza de gravedad sobre un elemento fluido cuando este se encuentra en un plano que no es perpendicular a  $\vec{g}$ .  $\mathbf{a}_f$  es el vector de aceleraciones ficticias que aparecen en el problema producto de la naturaleza no inercial del sistema de referencia. Sea  $O$  un sistema de referencia fijo en el espacio y  $O'$  un sistema de referencia no inercial que contiene al fluido en análisis. En este contexto, el vector  $\mathbf{a}_f$  está dado por (Taylor, 2005)

$$\mathbf{a}_f = - \left[ \mathbf{a}_{OO'} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right], \quad (\text{A.15})$$

siendo  $\mathbf{a}_{OO'}$  la aceleración del sistema de referencia no inercial  $O'$  con respecto al sistema de referencia  $O$ .  $\boldsymbol{\Omega}$  y  $\mathbf{r}$  son los vectores de rotación y posición respectivamente, ambos expresados con respecto al origen  $O'$ . En la ecuación (A.15) el segundo término del lado derecho es la aceleración de Coriolis, el tercero es la aceleración centrípeta y el último es la aceleración de Euler.

En hidrodinámica de lagos es usual encontrar que el término de aceleraciones ficticias se reduce a sólo la aceleración de Coriolis. Para efectos de este trabajo, se considera que el vector de aceleraciones ficticias incluye sólo las aceleraciones del sistema de referencia no inercial con respecto al origen fijo.

Con las consideraciones anteriores, la ecuación de movimiento se reduce a

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \hat{p} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} - \rho \mathbf{a}_{OO'}, \quad (\text{A.16})$$

en donde se ha introducido la definición de presión motriz  $\hat{p} = p + \rho gh$ . Utilizando la definición de los esfuerzos de corte superficiales para fluidos newtonianos, el tensor de esfuerzos puede ser reescrito como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} = \mu [\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})], \quad (\text{A.17})$$

siendo el segundo término de la mano derecha nulo en virtud de la ecuación de continuidad de masa. Así, otra forma de escribir la ecuación de momentum es

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \hat{p} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \rho \mathbf{a}_{OO'} \quad (\text{A.18})$$

## Concepto de capa límite

El concepto de capa límite considera un problema tipo en el que la escala de longitud vertical  $\delta$  es mucho menor que la escala de longitud horizontal  $L$ .

Si se toma la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.19})$$

y se introducen las variables adimensionales

$$u^* = u/U, \quad v^* = v/V, \quad w^* = w/W, \quad x^* = x/L_x, \quad y^* = y/L_y, \quad z^* = z/\delta, \quad (\text{A.20})$$

siendo  $U$ ,  $V$  y  $W$  escalas de velocidad y  $L_x$ ,  $L_y$  escalas de longitud horizontal para la coordenada  $x$  e  $y$  respectivamente. Introduciendo estas variables en la ecuación de continuidad se obtiene

$$\frac{U}{L_x} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V}{L_y} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{W}{\delta} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Reordenando

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{L_x V}{U L_y} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{L_x W}{U \delta} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Para que la ecuación anterior tenga sentido físico, todos los términos deben ser del mismo orden. El primer término es orden uno y se puede asumir que las escalas de longitud horizontal son mucho mayores que la escala de longitud vertical y que ambas tienen un orden similar. Por lo tanto, dado que  $\mathcal{O}\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) = 1$  se cumple que

$$\mathcal{O}\left(\frac{L_x V}{L_y U}\right) = 1, \quad (\text{A.23})$$

es decir,  $\mathcal{O}\left(\frac{V}{U}\right) = 1$ . De manera similar, el último término del lado izquierdo, debe ser orden uno, esto significa que

$$\mathcal{O}\left(\frac{L_x W}{\delta U}\right) = 1, \quad (\text{A.24})$$

pero dado que  $\mathcal{O}\left(\frac{L_x}{\delta}\right) \gg 1$ , entonces  $\mathcal{O}\left(\frac{W}{U}\right) \ll 1$ . Esto dice que la escala de velocidad vertical es mucho menor que las escalas de velocidad horizontales, conclusión que se obtiene

exclusivamente de considerar que las escalas de longitud horizontales son mucho mayores que la escala de longitud característica vertical.

Ahora, se introducen las variables adimensionales en la ecuación de momentum (A.18). Tomando a modo de ejemplo la ecuación para la coordenada  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - a_x, \quad (\text{A.25})$$

se transforma en

$$\begin{aligned} U \frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{U^2}{L_x} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{UV}{L_y} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{UW}{\delta} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \\ -\frac{1}{L_x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x^*} + \nu \left( \frac{U}{L_x^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U}{L_y^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - a_x, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Premultiplicando esta ecuación por  $\frac{L_x}{U^2}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{L_x}{U} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{L_x V}{L_y U} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{L_x W}{\delta U} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \\ -\frac{1}{\rho U^2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x^*} + \nu \left( \frac{1}{L_x U} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L_x}{L_y^2 U} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{L_x}{\delta^2 U} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{L_x}{U^2} a_x, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Para simplificar esta ecuación se introduce la escala de tiempo  $\tau = L_x/U$  y la escala de presión  $P = \rho U^2$ , las que dan origen a las variables adimensionales  $t^* = t/\tau$  y  $\hat{p}^* = \hat{p}/P$ , por lo que la ecuación anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{L_x V}{L_y U} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{L_x W}{\delta U} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \\ -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \nu \left( \frac{1}{L_x U} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L_x}{L_y^2 U} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{L_x}{\delta^2 U} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{L_x}{U^2} a_x, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Definiendo el número de Reynolds  $Re = UL_x/\nu$ , se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{L_x V}{L_y U} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{L_x W}{\delta U} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \\ -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L_x^2}{L_y^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{L_x^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{L_x}{U^2} a_x \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

En la ecuación anterior, todos los términos del lado izquierdo, son de orden uno en virtud de las conclusiones obtenidas de la ecuación de continuidad. De los términos premultiplicados por el inverso del número de Reynolds se observa que

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}\right) = 1, \quad \mathcal{O}\left(\frac{L_x^2}{L_y^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) = 1, \quad (\text{A.30})$$

siendo esta última aseveración verdadera producto de que parte de los supuestos del problema es que  $L_x \sim L_y$ . Sin embargo,

$$\mathcal{O}\left(\frac{L_x^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) \gg 1, \quad (\text{A.31})$$

dado que  $L_x \gg \delta$ . De esta forma, la ecuación de momentum adimensional se reescribe como

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{L_x V}{L_y U} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{L_x W}{\delta U} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \frac{L_x^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} - \frac{L_x}{U^2} a_x, \quad (\text{A.32})$$

simplificación que tiene sentido para números de Reynolds lo suficientemente grandes tal que

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{Re} \frac{L_x^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) = 1, \quad (\text{A.33})$$

Volviendo a variables dimensionales, la ecuación de momentum simplificada para el caso de capa límite se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a_x, \quad (\text{A.34})$$

Una deducción análoga se realiza para la ecuación de momentum en la coordenada  $y$ , con lo que se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a_y, \quad (\text{A.35})$$

La ecuación de momentum para la coordenada  $z$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - a_z, \quad (\text{A.36})$$

Introduciendo las variables adimensionales definidas anteriormente

$$\begin{aligned} \frac{W}{\tau} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{UW}{L_x} u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{VW}{L_y} v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{W^2}{\delta} w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \\ - \frac{P}{\rho \delta} \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial z^*} + \nu \left( \frac{W}{L_x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{W}{L_y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{W}{\delta^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - a_z \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Multiplicando esta ecuación por  $\delta/U^2$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{W}{U} \frac{\delta}{L_x} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\delta}{L_x} \frac{W}{U} u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\delta}{L_y} \frac{VW}{U^2} v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{W^2}{U^2} w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \\ - \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial z^*} + \nu \frac{\delta}{U^2} \left( \frac{W}{L_x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{W}{L_y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{W}{\delta^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{\delta}{U^2} a_z, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

en donde se ha reemplazado la definición de las escalas de tiempo  $\tau$  y presión  $P$  definidas anteriormente. Reordenando

$$\begin{aligned} \frac{W}{U} \frac{\delta}{L_x} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{W}{U} \frac{\delta}{L_x} u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{VW}{U^2} \frac{\delta}{L_y} v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{W^2}{U^2} w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \\ - \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial z^*} + \frac{\nu}{UL_x UL_x} \frac{\delta W}{UL_x} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L_x^2}{L_y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{L_x^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{\delta}{U^2} a_z, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Introduciendo nuevamente el número de Reynolds, la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{W}{U} \frac{\delta}{L_x} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{W}{U} \frac{\delta}{L_x} u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{VW}{U^2} \frac{\delta}{L_y} v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{W^2}{U^2} w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \\ - \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \frac{\delta W}{L_x U} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{Re} \frac{\delta W}{L_x U} \frac{L_x^2}{L_y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{1}{Re} \frac{W}{U} \frac{L_x}{\delta} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} - \frac{\delta}{U^2} a_z, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Analizando los términos de la ecuación anterior, considerando que  $\mathcal{O}(\delta/L_x) = \mathcal{O}(\delta/L_y) = \mathcal{O}(W/U) \ll 1$  y que como se mencionó en el caso de la ecuación de momentum en  $x$  el número de Reynolds debe ser alto por lo que  $\mathcal{O}(1/Re) \ll 1$ , se obtiene que

$$\mathcal{O} \left( \frac{W}{U} \frac{\delta}{L_x} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} \right) \ll 1, \quad \mathcal{O} \left( \frac{W}{U} \frac{\delta}{L_x} u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \ll 1, \quad \mathcal{O} \left( \frac{VW}{U} \frac{\delta}{L_y} v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \ll 1 \quad (\text{A.41})$$

$$\mathcal{O} \left( \frac{W^2}{U^2} w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \ll 1, \quad \mathcal{O} \left( \frac{1}{Re} \frac{\delta}{L_x} \frac{W}{U} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) \ll 1, \quad \mathcal{O} \left( \frac{1}{Re} \frac{\delta}{L_x} \frac{W}{U} \frac{L_x^2}{L_y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right) \ll 1 \quad (\text{A.42})$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{Re} \frac{W}{U} \frac{L_x}{\delta} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right) \ll 1 \quad (\text{A.43})$$

Por lo que finalmente la ecuación de momentum en  $z$  se reduce a

$$\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial z^*} = -\frac{\delta}{U^2} a_z \quad (\text{A.44})$$

Volviendo a variables dimensionales

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = -\rho a_z \quad (\text{A.45})$$

### A.3. Integración vertical de las ecuaciones

El trabajo considera la resolución de las ecuaciones promedio vertical. En esta sección, se realiza la integración vertical de estas.

#### A.3.1. Regla de integración de Leibnitz

La regla de integración de Leibnitz es una deducción del cálculo en varias variables que permite resolver algunas de las integrales que aparecen durante el proceso de integración. Esta dice que una función continua  $f(r, s)$  satisface la relación

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_a^b f(r, s) dr = \int_a^b \frac{\partial f(r, s)}{\partial s} dr + f(b, s) \frac{\partial b}{\partial s} - f(a, s) \frac{\partial a}{\partial s} \quad (\text{A.46})$$

siendo  $a$  y  $b$  límites de integración en la variable  $r$ .

#### A.3.2. Ecuación de Continuidad

Se integra verticalmente la ecuación de continuidad

$$\int_0^{h(\vec{x}, t)} \nabla \cdot \mathbf{v} dz = \int_0^{h(\vec{x}, t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (\text{A.47})$$

Aplicando la integración de Leibnitz para la velocidad  $u$

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(\vec{x},t)} u dz - u(h(\vec{x},t)) \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x} + u(0) \frac{\partial 0}{\partial x} \quad (\text{A.48})$$

Análogamente para  $v$

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h(\vec{x},t)} v dz - v(h(\vec{x},t)) \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial y} + v(0) \frac{\partial 0}{\partial y} \quad (\text{A.49})$$

Y finalmente para  $w$

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(h(\vec{x},t)) - w(0) \quad (\text{A.50})$$

Se define la condición de borde cinemática, la cual dice que la velocidad de desplazamiento vertical de la superficie libre no es más que la derivada total de la altura  $h(\vec{x},t)$ , o sea

$$w(h(\vec{x},t)) = \frac{dh(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial t} + u(h(\vec{x},t)) \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x} + v(h(\vec{x},t)) \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial y} \quad (\text{A.51})$$

Se introduce además la condición de borde de no deslizamiento, la que dice que la velocidad horizontal en el contacto con la pared del fondo de la cubeta que contiene al fluido, es nula. O sea,  $u(0) = v(0) = 0$ . En conjunto, se agrega la condición de borde de no penetración, la cual dice que la velocidad vertical del flujo en la pared del fondo es cero, o sea,  $w(0) = 0$ .

Imponiendo las tres condiciones de borde mencionadas y reemplazando las integrales calculadas en (A.47) se obtiene la ecuación de continuidad integrada verticalmente

$$\frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial U h(\vec{x},t)}{\partial x} + \frac{\partial V h(\vec{x},t)}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.52})$$

en donde además se ha utilizado la definición de velocidad media

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} u dz = U h(\vec{x},t), \quad \int_0^{h(\vec{x},t)} v dz = V h(\vec{x},t) \quad (\text{A.53})$$

### A.3.3. Ecuación de Momentum

Si a la ecuación (A.16) se le suma en su lado izquierdo la ecuación de continuidad premultiplicada por el campo de flujo de momentum  $\rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$  se obtiene

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\nabla \hat{p} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} - \rho \mathbf{a}_{OO'}$$
 (A.54)

Expandiendo la derivada material

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\nabla \hat{p} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} - \rho \mathbf{a}_{OO'}$$
 (A.55)

Los términos del lado izquierdo pueden ser reagrupados utilizando el producto de Kronecker  $\otimes$  de manera que las ecuaciones se pueden reescribir como

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v}) \right) = -\nabla \hat{p} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} - \rho \mathbf{a}_{OO'},$$
 (A.56)

en donde

$$\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v} = (u, v, w) \otimes (u, v, w)^T = \begin{bmatrix} u \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} & v \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} & w \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$
 (A.57)

$$\Rightarrow \mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} uu & vu & wu \\ uv & vv & vw \\ uw & vw & ww \end{bmatrix}$$
 (A.58)

La ecuación (A.56) escrita en notación tensorial o de Einstein se escribe como

$$\rho \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \rho a_j,$$
 (A.59)

donde  $a_j$  es la componente en la dirección  $j$  del vector de aceleración  $\mathbf{a}_{OO'}$ . A modo de ejemplo se desarrolla la integración de la ecuación correspondiente al eje  $\hat{x}$ . Expandiendo la notación tensorial

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho a_x,$$
 (A.60)

pero producto de la aplicación del concepto de capa límite mostrado previamente la ecuación se reduce a

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho a_x$$
 (A.61)



Se integra la ecuación (A.61) en la vertical. En principio, se comienza por la integración de los términos del lado izquierdo, en donde

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h(\vec{x},t)} u dz - u(h(\vec{x},t)) \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial t} \quad (\text{A.62})$$

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial uu}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(\vec{x},t)} uudz - uu(h(\vec{x},t)) \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x} \quad (\text{A.63})$$

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial vu}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h(\vec{x},t)} vudz - vu(h(\vec{x},t)) \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial y} \quad (\text{A.64})$$

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial wu}{\partial z} dz = wu(h(\vec{x},t)) \quad (\text{A.65})$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la integración del lado izquierdo de (A.61) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{h(\vec{x},t)} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} \right] dz = \\ \frac{\partial U h(\vec{x},t)}{\partial t} + \beta_{11} h(\vec{x},t) U U + \beta_{12} h(\vec{x},t) U V - u(h(\vec{x},t)) \left[ \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial t} \right. \\ \left. + u \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x} + v \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial y} - w(h(\vec{x},t)) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

en donde el último término de la ecuación anterior es cero en virtud de la condición de borde cinemática. Los coeficientes  $\beta_{11}$  y  $\beta_{12}$  son los coeficientes de integración de Boussinesq los que en general son igual a la unidad. No obstante lo anterior, para efectos de este modelo se simplifican los términos advectivos, lo que en la práctica se traduce como que el orden de magnitud del campo de velocidades es pequeño y por lo tanto, los términos que tienen una velocidad multiplicada por otra, se desprecian. De ésta manera, (A.66) se reduce a

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial U h(\vec{x},t)}{\partial t} \quad (\text{A.67})$$

Ahora se integra en la vertical el lado derecho de (A.61). Se considera el caso particular en que el sistema de referencia que contiene al fluido no acelera en la dirección vertical, es decir,  $a_z = 0$ . De ésta forma, se recupera que

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.68})$$

es decir, se cumple la ley hidr statica de presiones lo que en términos prácticos significa que la presión motriz es constante en la vertical. De esta manera, la integral del lado derecho de (A.61) se expresa como

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \left[ -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho a_x \right] dz = - \int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dz + \tau_{zx}(h(\vec{x},t)) - \tau_{zx}(0) - \rho a_x h(\vec{x},t) \quad (\text{A.69})$$

La integral del gradiente de presión del lado derecho se calcula como

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(\vec{x},t)} \hat{p} dz - \hat{p} \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x} \quad (\text{A.70})$$

Dado que la presión motriz es constante en la vertical, se obtiene

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dz = \frac{\partial h(\vec{x},t) \hat{p}}{\partial x} - \hat{p} \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x} \quad (\text{A.71})$$

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dz = h(\vec{x},t) \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \hat{p} \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x} - \hat{p} \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x} \quad (\text{A.72})$$

$$\int_0^{h(\vec{x},t)} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dz = h(\vec{x},t) \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (\text{A.73})$$

Para el problema en consideración, la presión motriz queda definida por  $\hat{p} = \rho g \eta_s(\vec{x},t)$  siendo  $\eta_s(\vec{x},t) = z_f(\vec{x}) + h_o(\vec{x}) + \eta(\vec{x},t)$  la posición de la superficie libre medida desde el datum de referencia. Reemplazando las deducciones anteriores en (A.61) y considerando que  $z_f(\vec{x}) + h_o(\vec{x})$  es constante en el tiempo y el espacio, se obtiene que la ecuación de momentum promedio vertical es

$$\rho h_o(\vec{x}) \frac{\partial U(\vec{x},t)}{\partial t} = -\rho g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x},t)}{\partial x} + \tau_{sx} - \tau_{bx} - \rho a_x h_o(\vec{x}) \quad (\text{A.74})$$

en donde se ha introducido además que la deformación de la superficie libre es muy peque na en comparación con la profundidad de agua en el estado de reposo y se incluyen las definiciones para el esfuerzo de corte superficial  $\tau_{zx}(h(\vec{x},t)) = \tau_{sx}$  y para el esfuerzo de corte de fondo  $\tau_{zx}(0) = \tau_{bx}$ . En el caso de que el esfuerzo de corte en la superficie sea producto del viento, se tiene que  $\tau_{sx} = \rho u_{*x}^2$ , siendo  $u_{*x}$  la velocidad de corte en la dirección  $x$  considerada desde el punto de vista del agua.

El esfuerzo de corte de fondo se expresa en general como,  $\tau_{bx} = \rho c_f U |\mathbf{v}|$ , en donde en este caso  $\mathbf{v} = (U, V)^T$ . En términos de cálculo computacional, esta definición dificulta la resolución de las ecuaciones producto de que se incluye un término cuadrático. Sin embargo, como última

gran simplificación de las ecuaciones, se considera que el esfuerzo de corte de fondo puede ser expresado en función de escalas características de velocidad para el eje  $x$  e  $y$  como

$$\tau_{bx} = \rho c_f U \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}, \quad (\text{A.75})$$

en donde  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$  son las escalas de velocidad para el eje  $x$  e  $y$  respectivamente. Si se considera que ambas escalas son iguales, entonces el esfuerzo de corte de fondo se puede expresar finalmente como

$$\tau_{bx} = \rho \tilde{c}_f U, \quad (\text{A.76})$$

donde  $\tilde{c}_f = \sqrt{2} \tilde{u} c_f$ .

## A.4. Resumen de las ecuaciones integradas

Después del desarrollo teórico mostrado en la sección anterior, las ecuaciones que serán resueltas en este trabajo son

### Ecuación de continuidad promedio vertical

$$\frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial U h_o(\vec{x})}{\partial x} + \frac{\partial V h_o(\vec{x})}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.77})$$

### Ecuaciones de momentum promedio vertical

Para el eje  $x$

$$\rho h_o(\vec{x}) \frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} + \tau_{sx} - \tau_{bx} - \rho a_x h_o(\vec{x}) \quad (\text{A.78})$$

Para el eje  $y$

$$\rho h_o(\vec{x}) \frac{\partial V(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial y} + \tau_{sy} - \tau_{by} - \rho a_y h_o(\vec{x}) \quad (\text{A.79})$$

# Anexo B

## Teoría del análisis modal

Una de las metodologías de resolución de las ecuaciones considera la aplicación de la teoría del análisis modal. Algunos autores ya la han implementado en la resolución de las ecuaciones de flujo para corrientes oceánicas (Proudman, 1928; Platzman, 1984) y para el caso de lagos multicapa con y sin disipación de energía (Shimizu *et al.*, 2007; Shimizu & Imberger, 2008). La formulación entregada en este caso, considera disipación de energía y, como ya se mencionó previamente, se utiliza una única capa. La notación a utilizar está basada en el trabajo de Shimizu & Imberger (2008).

Reordenando la ecuación (A.77) y multiplicando por el peso específico del fluido, esta se reescribe como

$$\rho g \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial U h_o(\vec{x})}{\partial x} - \rho g \frac{\partial V h_o(\vec{x})}{\partial y} \quad (\text{B.1})$$

Expresada vectorialmente y en términos de la unidad imaginaria,

$$\rho g \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial t} = i^2 \rho g \nabla \cdot (h_o(\vec{x}) \mathbf{v}) \quad (\text{B.2})$$

Las ecuaciones de momentum, considerando que el coeficiente de fricción lineal  $\tilde{c}_f$  es el mismo tanto para la coordenada  $x$  como para la coordenada  $y$  e introduciendo la unidad imaginaria pueden ser reescritas vectorialmente como

$$\rho h_o(\vec{x}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = i^2 \rho g h_o(\vec{x}) \nabla \eta + i^2 \rho \tilde{c}_f \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}_s - \rho h_o(\vec{x}) \mathbf{a}, \quad (\text{B.3})$$

en donde  $\boldsymbol{\tau}_s = (\tau_{sx}, \tau_{sy})^T$  y  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)^T$  son los vectores de esfuerzo de corte superficial y de aceleración del sistema de referencia, respectivamente. Las ecuaciones (B.2) y (B.3) dan forma a un sistema de ecuaciones que puede ser escrito matricialmente. Para ello, se introduce el vector de estado  $\boldsymbol{\xi} = (\eta, \mathbf{v})^T$ , con lo que el sistema puede ser reescrito como

$$\mathbf{M}\partial_t\boldsymbol{\xi} = i(\mathbf{K} + \mathbf{C})\boldsymbol{\xi} + \mathbf{f}, \quad (\text{B.4})$$

en donde,  $\mathbf{M}$  es la matriz de peso

$$\mathbf{M} = \rho \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & h_o(\vec{x}) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$\mathbf{K}$  es el operador lineal no disipativo de aguas someras

$$\mathbf{K} = i\rho \begin{bmatrix} 0 & g\nabla \cdot h_o(\vec{x}) \\ h_o(\vec{x})\nabla g & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

$\mathbf{C}$  es la matriz de disipación lineal

$$\mathbf{C} = i\rho \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c}_f \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

y  $\mathbf{f} = (0, \boldsymbol{\tau}_s - \rho h_o(\vec{x})\mathbf{a})^T$  es el vector de forzantes externos que incluye el efecto del esfuerzo de corte superficial más las aceleraciones del sistema de referencia. Cabe mencionar que el término  $\partial_t$  representa la derivada temporal. Además, en la matriz  $\mathbf{K}$ , el término  $g\nabla \cdot h_o(\vec{x})$  se aplica a la velocidad como  $g\nabla \cdot (h_o(\vec{x})\mathbf{v})$ , mientras que el término  $h_o(\vec{x})\nabla g$  se aplica sobre la deformación de la superficie libre como  $h_o(\vec{x})\nabla(g\eta)$ . El operador  $\mathbf{K}$  es hermítico (Platzman y Shimizu e Imberger) mientras que el operador  $\mathbf{C}$  es antihermítico.

La teoría modal considera que las soluciones al sistema de ecuaciones (B.4) pueden ser expresadas como una descomposición en términos de una estructura de oscilación o estructura modal y un término que exprese la oscilación temporal y que a la vez caracterice la disipación de energía. En términos prácticos, esto se traduce en considerar soluciones del tipo  $\boldsymbol{\xi}(\vec{x}, t) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \exp(i[\omega + i\gamma]t)$ . En estas soluciones  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})$  es la estructura modal de oscilación, es decir, la distribución espacial que caracteriza como oscilarán las variables contenidas en el vector de estado,  $\omega$  es la frecuencia angular de oscilación y  $\gamma$  es la tasa de disipación lineal. Si se reemplaza esta solución en la ecuación (B.4) se obtiene

$$\mathbf{M}\partial_t \left( \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \exp(i[\omega + i\gamma]t) \right) = i(\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \exp(i[\omega + i\gamma]t) + \mathbf{f}, \quad (\text{B.8})$$

Resolviendo la derivada temporal, se obtiene

$$i(\omega + i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \exp(i[\omega + i\gamma]t) = i(\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \exp(i[\omega + i\gamma]t) + \mathbf{f}, \quad (\text{B.9})$$

Si se desea estudiar los modos de oscilación libres del sistema, entonces se puede despreciar del análisis el efecto del forzante externo, lo que permite obtener finalmente

$$(\omega + i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) = (\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \quad (\text{B.10})$$

Esta última ecuación representa un problema de valores y vectores propios generalizado, en donde los términos  $(\omega + i\gamma)$  son los valores propios y  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})$  son los vectores propios. Por definición, este problema se entiende a partir de ahora como el problema por la derecha que básicamente es una forma de referirse al problema de valores y vectores propios cuando los vectores propios post multiplican a las matrices del problema. Las soluciones, en este caso, son soluciones por la derecha. Para estudiar el espacio de soluciones que admite la ecuación (B.10) se toma el complejo conjugado a el sistema de manera que

$$\left[ (\omega + i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \right]^* = \left[ (\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x}) \right]^* \quad (\text{B.11})$$

Resolviendo el conjugado

$$(\omega - i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^* = -(\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^* \quad (\text{B.12})$$

Reordenando

$$(-\omega + i\gamma)\mathbf{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^* = (\mathbf{K} + \mathbf{C})\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^* \quad (\text{B.13})$$

Para la enumeración de los modos, Shimizu & Imberger (2008) utilizan el índice  $r$ . El resultado anterior dice que cada modo con frecuencia angular  $\omega$  positiva obtenido como solución de la ecuación (B.10), tiene asociado una solución que conserva la tasa de disipación lineal pero cambia el signo de la frecuencia angular. Sea  $+r$  el índice que representa la solución al problema de valores y vectores propios que tiene frecuencia angular positiva y  $-r$  el índice que representa el par conjugado cuya frecuencia angular es negativa.

El resultado anterior se puede resumir como

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(+r)} \\ [\omega + i\gamma]^{R(+r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(-r)*} \\ -[\omega + i\gamma]^{R(+r)*} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(-r)} \\ \sigma_{-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(+r)*} \\ -\sigma_{+r}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

es decir, cada modo da origen a una solución  $+r$  a partir de la cual se obtiene un par conjugado de frecuencia angular negativa que viene de considerar que el valor propio  $-r$  es menos el conjugado del valor propio  $+r$ . La estructura  $-r$  es el conjugado de la estructura  $+r$ . Cabe mencionar que esta consideración aplica en principio, sólo a las soluciones que tengan frecuencia angular distinta de cero.

## B.1. Producto interior

Se define el producto interior (o producto punto) como

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}' \rangle = \int_A \boldsymbol{\xi}^H \cdot \boldsymbol{\xi}' dA, \quad (\text{B.16})$$

en donde el super índice  $H$  representa transpuesto conjugado, los vectores  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\boldsymbol{\xi}'$  representan dos estados distintos del sistema y  $A$  es el área superficial sobre la cual está definido el problema. El producto interior, en este caso, es el producto punto utilizado usualmente en álgebra lineal pero está integrado sobre el área superficial dado que se está trabajando sobre un medio continuo.

## B.2. Relaciones de ortogonalidad

Sea el problema de valores y vectores propios por la derecha expresado para un vector  $r$

$$\sigma_r \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} = (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \quad (\text{B.17})$$

Si se premultiplica esta ecuación por el transpuesto conjugado de la estructura modal  $r$  izquierda se obtiene

$$\left( \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} \right)^H \sigma_r \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} = \left( \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} \right)^H (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \quad (\text{B.18})$$

Si se transpone y conjuga todo el problema anterior y aplicando la propiedad de algebra lineal  $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H$ ,

$$\left( \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right)^H \sigma_r^* \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} = \left( \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right)^H (\mathbf{K} + \mathbf{C})^H \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, \quad (\text{B.19})$$

en donde se ha considerado que la matriz  $\mathbf{M}$  es real, lo que es dato por la definición del problema en estudio. Reordenando

$$\left( \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right)^H \left[ \sigma_r^* \mathbf{M} - (\mathbf{K} + \mathbf{C})^H \right] \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} = 0, \quad (\text{B.20})$$

de donde se puede concluir finalmente que

$$\sigma_r^* \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} = (\mathbf{K} + \mathbf{C})^H \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, \quad (\text{B.21})$$

es decir, el problema por la izquierda (definido según Shimizu & Imberger (2008) y Platzman (1984)) tiene como valores propios los conjugados de los valores propios del problema por la derecha. Utilizando este resultado, los problemas por la derecha y por la izquierda pueden ser expresados respectivamente como

$$[(\mathbf{K} + \mathbf{C}) - \sigma_r \mathbf{M}] \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$[(\mathbf{K} + \mathbf{C})^H - \sigma_r^* \mathbf{M}] \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} = 0 \quad (\text{B.23})$$

Se toma el problema por la derecha (B.22) y se premultiplica por el transpuesto conjugado de una estructura modal izquierda  $s$  tal que

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H [(\mathbf{K} + \mathbf{C}) - \sigma_r \mathbf{M}] \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} = 0 \quad (\text{B.24})$$

Expandiendo la multiplicación

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} - \left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H \sigma_r \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} = 0 \quad (\text{B.25})$$

Ahora, si se toma la ecuación del problema de la izquierda (B.23) pero expresada para un vector  $s$  y se transpone y conjuga todo el problema, entonces

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H [(\mathbf{K} + \mathbf{C}) - \sigma_s \mathbf{M}] = 0 \quad (\text{B.26})$$

Post multiplicando la ecuación anterior por una estructura modal derecha  $r \neq s$ , se obtiene

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H [(\mathbf{K} + \mathbf{C}) - \sigma_s \mathbf{M}] \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} = 0 \quad (\text{B.27})$$

Expandiendo el producto

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} - \left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H \sigma_s \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} = 0 \quad (\text{B.28})$$

Restando las ecuaciones (B.25) y (B.28), se obtiene

$$-\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H \sigma_r \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} + \left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H \sigma_s \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} = 0 \quad (\text{B.29})$$

Lo que se concluye de esta expresión es que



$$\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} (\sigma_s - \sigma_r) = 0 \quad (\text{B.30})$$

Integrando sobre el área superficial se obtiene finalmente

$$(\sigma_s - \sigma_r) \int_A \left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} dA = 0, \quad (\text{B.31})$$

es decir, para dos modos  $r \neq s$  se cumple siempre que

$$\int_A \left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}\right)^H \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} dA = \left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}, \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right\rangle = 0 \quad (\text{B.32})$$

En el caso que  $r = s$  se tiene que  $\sigma_r = \sigma_s$  y la relación (B.31) se satisface. En tal caso, se define el factor de normalización por la derecha como

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}, \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right\rangle = \tilde{e}^{R(r)} \quad (\text{B.33})$$

Si se realiza un trabajo similar al anterior se puede concluir que para  $r \neq s$  también se cumple que

$$\int_A \left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(s)}\right)^H \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} dA = \left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(s)}, \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} \right\rangle = 0 \quad (\text{B.34})$$

Y en el caso en que  $r = s$ , se define el factor de normalización por la izquierda

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(s)}, \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} \right\rangle = \tilde{e}^{L(r)} \quad (\text{B.35})$$

Además, si se transpone y conjuga la ecuación (B.33) se puede comprobar fácilmente que  $\tilde{e}^{R(r)} = \tilde{e}^{L(r)*}$ . (Shimizu & Imberger, 2008)

La última relación de ortogonalidad utilizada por Shimizu & Imberger (2008) en el desarrollo de la teoría del análisis modal se deduce como sigue. Considerando la ecuación (B.17) y tomando el producto interior con una estructura modal izquierda  $s \neq r$  se obtiene

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}, \sigma_r \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right\rangle = \left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}, (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right\rangle, \quad (\text{B.36})$$

lo que en virtud de la relación (B.33) para  $r = s$  se transforma en

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}, (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right\rangle = \sigma_r \tilde{e}^{R(r)} \quad (\text{B.37})$$

En resumen, las relaciones de ortogonalidad a utilizar en la deducción de las ecuaciones del análisis modal son

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}, \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right\rangle = \tilde{e}^{R(r)} \delta_{r,s} \quad (\text{B.38})$$

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(s)}, \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)} \right\rangle = \tilde{e}^{L(r)} \delta_{r,s} \quad (\text{B.39})$$

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(s)}, (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)} \right\rangle = \sigma_r \tilde{e}^{R(r)} \delta_{r,s}, \quad (\text{B.40})$$

siendo  $\delta_{r,s}$  el delta de Kronecker, el cual es 1 si  $r = s$  y 0 si no. Shimizu & Imberger (2008) introducen este término en la formulación de las relaciones de ortogonalidad pero, lo cual en términos prácticos es sólo para clarificar o hacer evidente que para  $r \neq s$  las relaciones de ortogonalidad son nulas. Pero, como se demostró en la deducción matemática esto no es estrictamente necesario, puesto que para  $r \neq s$  las relaciones son nulas en virtud de que satisfagan la ecuación (B.31).

### B.3. Ecuaciones para la amplitud modal

De acuerdo con lo señalado por Shimizu & Imberger (2008) cualquier vector de estado  $\boldsymbol{\xi}$  puede ser expresado como una combinación lineal de los modos (izquierdos o derechos) amplificadas por una amplitud de oscilación. Tomando como ejemplo el caso de la derecha, lo anterior se expresa matemáticamente como,

$$\boldsymbol{\xi}(\vec{x}, t) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{a}^{R(r)}(t) \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)}, \quad (\text{B.41})$$

en donde  $\tilde{a}^{R(r)}$  es la amplitud de oscilación modal de las estructuras derechas. Reemplazando esta descomposición en el sistema de ecuaciones que gobierna el problema (B.4) se obtiene

$$\mathbf{M} \partial_t \left( \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{a}^{R(r)}(t) \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \right) = i (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \left( \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{a}^{R(r)}(t) \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \right) + \mathbf{f} \quad (\text{B.42})$$

Reordenando las sumatorias

$$\mathbf{M} \left( \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t) \right) = i (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \left( \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) \right) + \mathbf{f} \quad (\text{B.43})$$

Tomando producto interior con una estructura modal izquierda  $r$

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, \mathbf{M} \left( \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t) \right) \right\rangle = \\ \left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, i(\mathbf{K} + \mathbf{C}) \left( \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) \right) \right\rangle + \left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, \mathbf{f} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

El término de la mano izquierda de la ecuación (B.44) en virtud de la relación de ortogonalidad (B.38) se transforma en

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, \mathbf{M} \left( \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t) \right) \right\rangle = \tilde{e}^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t), \quad (\text{B.45})$$

mientras que el primer término de la mano derecha en virtud de la relación (B.40) queda expresado como

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, i(\mathbf{K} + \mathbf{C}) \left( \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\vec{x})^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) \right) \right\rangle = (i\omega - \gamma) \tilde{e}^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) \quad (\text{B.46})$$

Por lo tanto, la ecuación (B.44) se reduce a

$$\tilde{e}^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t) = (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) + \tilde{f}^{R(r)}, \quad (\text{B.47})$$

en donde se ha introducido la definición del forzante modal

$$\tilde{f}^{R(r)} = \left\langle \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}, \mathbf{f} \right\rangle \quad (\text{B.48})$$

La ecuación (B.47) permite obtener la evolución temporal de la amplitud de oscilación de cada modo  $r$  dado un forzante externo  $\tilde{f}^{R(r)}$ .

## B.4. Soluciones analíticas para la amplitud modal

La ecuación (B.47) puede ser resuelta analíticamente suponiendo algunos casos para el forzante modal. A continuación se presentan algunas de las soluciones.

## Régimen permanente

En el régimen permanente, se puede despejar fácilmente que la amplitud está dada por

$$\tilde{a}^{R(r)}(t) = \frac{-\tilde{f}^{R(r)}}{(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})\tilde{e}^{R(r)}} \quad (\text{B.49})$$

Esta ecuación indica que aquellos modos que tengan valor propio nulo, o sea  $(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) = 0$ , no pueden ser considerados en la solución puesto que su amplitud de oscilación se indefiniría matemáticamente. Esta simplificación es de gran utilidad cuando el forzante modal es constante en el tiempo.

## Transformadas de Laplace

La ecuación para la amplitud modal será resuelta aplicando el concepto de transformadas de Laplace. Esta operación matemática transforma funciones definidas en el dominio del tiempo a funciones definidas en el dominio de frecuencias complejas. Si  $f(t)$  es una función definida en el dominio del tiempo, entonces su transformada de Laplace está definida como

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (\text{B.50})$$

donde  $s$  es la frecuencia compleja. Para volver al dominio del tiempo se define el inverso de la transformada de Laplace (o anti Transformada) como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (\text{B.51})$$

donde  $\epsilon$  es un número real que caracteriza la región de convergencia de la transformada. A continuación se indican algunas de las transformadas que serán utilizadas en las deducciones de la amplitud modal analítica.

- Transformada de una derivada temporal:  $\mathcal{L}[\partial_t f(t)] = sF(s) - f(0)$
- Transformada de una constante  $c$ :  $\mathcal{L}[c] = \frac{c}{s}$
- Transformada de un decaimiento exponencial:  $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s+\alpha}$
- Transformada de una aproximación exponencial:  $\mathcal{L}[(1 - e^{-\alpha t})] = \frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$
- Transformada de una función seno:  $\mathcal{L}[\sin(wt)] = \frac{w}{s^2+w^2}$

## Forzante modal constante en el tiempo

Si el forzante modal es constante en el tiempo, quiere decir que en la ecuación (B.47) el término  $\tilde{f}^{R(r)}$  es constante. Si se aplica transformada de Laplace a la ecuación (B.47), se tiene

$$\mathcal{L} [\tilde{e}^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t)] = \mathcal{L} [(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) + \tilde{f}^{R(r)}] \quad (\text{B.52})$$

Sea  $\tilde{A}^{R(r)}(s) = \mathcal{L} [\tilde{a}^{R(r)}(t)]$ . Utilizando las transformadas mostradas en la sección anterior, se obtiene

$$\tilde{e}^{R(r)} \left[ s \tilde{A}^{R(r)}(s) - \tilde{a}^{R(r)}(0) \right] = (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)} \tilde{A}^{R(r)}(s) + \frac{\tilde{f}^{R(r)}}{s}, \quad (\text{B.53})$$

en donde, el término  $\tilde{a}^{R(r)}(0)$  es la condición inicial para la amplitud. Reordenando esta ecuación se obtiene

$$\tilde{A}^{R(r)}(s) = \frac{1}{s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})} \left[ \frac{\tilde{f}^{R(r)}}{s \tilde{e}^{R(r)}} + \tilde{a}^{R(r)}(0) \right] \quad (\text{B.54})$$

Reordenando esta expresión para encontrar algunas transformadas conocidas, se obtiene

$$\tilde{A}^{R(r)}(s) = \frac{\tilde{f}^{R(r)}}{s \tilde{e}^{R(r)} (s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}))} + \frac{\tilde{a}^{R(r)}(0)}{s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})} \quad (\text{B.55})$$

$$\tilde{A}^{R(r)}(s) = \frac{\tilde{f}^{R(r)}}{(-i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)}} \frac{(-i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})}{s (s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}))} + \frac{\tilde{a}^{R(r)}(0)}{s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})} \quad (\text{B.56})$$

En el primer sumando de la ecuación anterior se reconoce la transformada de una aproximación exponencial, mientras que en el segundo se observa la transformada de un decaimiento exponencial. Aplicando antitransformada de Laplace se obtiene finalmente que

$$\tilde{a}^{R(r)}(t) = \frac{-\tilde{f}^{R(r)}}{(i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)}} \left[ 1 - e^{([i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}]t)} \right] + \tilde{a}^{R(r)}(0) e^{([i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}]t)} \quad (\text{B.57})$$

Notar que en la ecuación (B.57) si se hace tender el tiempo a infinito, se recupera la solución para el régimen permanente mostrada anteriormente.

## Forzante modal oscilatorio

A diferencia del caso anterior, se supone en esta sección que el forzante modal puede ser expresado como una función oscilatoria. Esto puede representar el caso de un viento que actúa oscilatoriamente sobre la superficie de una laguna o una aceleración oscilatoria del sistema de referencia por ejemplo. Se define el forzante modal oscilatorio  $\tilde{f}^{R(r)}(t) = \tilde{f}_o \sin(\omega_f t)$ , en donde  $\omega_f$  es la frecuencia de oscilación del forzante y  $\tilde{f}_o$  es la amplitud de oscilación. De esta forma, la ecuación para la amplitud modal se puede expresar como

$$\tilde{e}^{R(r)} \partial_t \tilde{a}^{R(r)}(t) = (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)} \tilde{a}^{R(r)}(t) + \tilde{f}_o \sin(\omega_f t) \quad (\text{B.58})$$

Esta ecuación puede ser resuelta analíticamente, proceso que se muestra a continuación. Tomando transformada de Laplace se obtiene

$$\tilde{e}^{R(r)} \left[ s \tilde{A}^{R(r)}(s) - \tilde{a}^{R(r)}(0) \right] = (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}) \tilde{e}^{R(r)} \tilde{A}^{R(r)}(s) + \tilde{f}_o \left( \frac{\omega_f}{s^2 + \omega_f^2} \right), \quad (\text{B.59})$$

Despejando el término  $\tilde{A}^{R(r)}(s)$  se obtiene

$$\tilde{A}^{R(r)}(s) = \frac{1}{s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})} \left[ \frac{\tilde{f}_o}{\tilde{e}^{R(r)}} \left( \frac{\omega_f}{s^2 + \omega_f^2} \right) + \tilde{a}^{R(r)}(0) \right] \quad (\text{B.60})$$

Para encontrar las transformadas de Laplace conocidas, es necesario descomponer el primer término del lado derecho en la ecuación anterior como fracciones parciales. Se tiene que

$$\frac{1}{(s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})) (s^2 + \omega_f^2)} = \frac{A}{(s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}))} + \frac{B}{(s + i\omega_f)} + \frac{C}{(s - i\omega_f)}, \quad (\text{B.61})$$

en donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son los términos por encontrar. Si la ecuación (B.61) se multiplica por  $(s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}))$  y se considera que  $s = (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)})$  entonces

$$A = \frac{1}{(s^2 + \omega_f^2)} = \frac{1}{(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \gamma^2 + \omega_f^2)}, \quad (\text{B.62})$$

en donde por ahora se eliminan de la notación los superíndices  $r$ . Ahora, la ecuación (B.61) se multiplica por  $(s + i\omega_f)$  y se considera que  $s = -i\omega_f$ , con lo que se obtiene que

$$B = \frac{1}{(s - (i\omega - \gamma)) (s - i\omega_f)} = \frac{-1}{2\omega_f (\omega_f + \omega + i\gamma)} \quad (\text{B.63})$$

Finalmente, si la ecuación (B.61) se multiplica por  $(s - i\omega_f)$  y se considera que  $s = i\omega_f$ , se obtiene

$$C = \frac{1}{(s - (i\omega - \gamma))(s + i\omega_f)} = \frac{-1}{2\omega_f(\omega_f - \omega - i\gamma)} \quad (\text{B.64})$$

Usando estos términos, la expresión (B.60) se convierte en

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{R(r)}(s) = & \left( \frac{\omega_f \tilde{f}_o}{\tilde{e}^{R(r)}} \right) \left[ \frac{1}{(s - (i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}))(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \gamma^2 + \omega_f^2)} \right. \\ & + \frac{-1}{(s + i\omega_f)(2\omega_f(\omega_f + \omega + i\gamma))} + \frac{-1}{(s - i\omega_f)(2\omega_f(\omega_f - \omega - i\gamma))} + \left. \frac{\tilde{a}^{R(r)}(0)}{(s - (i\omega - \gamma))} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Tomando antitransformada, se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{R(r)}(t) = & \left( \frac{\tilde{f}_o}{\tilde{e}^{R(r)}} \right) \left[ \frac{\omega_f e^{[i\omega - \gamma]t}}{(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \gamma^2 + \omega_f^2)} \right. \\ & - \frac{e^{-i\omega_f t}}{2(\omega_f + \omega + i\gamma)} - \frac{e^{i\omega_f t}}{2(\omega_f - \omega - i\gamma)} + \left. \tilde{a}^{R(r)}(0)e^{[i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}]t} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

## B.5. Ecuaciones para la energía modal

Considerando la definición del vector  $\boldsymbol{\xi}$  y los términos almacenados en la matriz  $\mathbf{M}$ , la energía mecánica del sistema, es decir, potencial gravitatoria más cinética, se expresa como

$$E = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \rangle \quad (\text{B.67})$$

A modo de ejercicio, si se considera un vector de estado del sistema  $\boldsymbol{\xi} = (\eta, \mathbf{v})^T$  y se reemplaza en la ecuación (B.67), se obtiene

$$E = \frac{1}{2} \int_A (\rho g \eta^2 + \rho h_o(\vec{x}) \mathbf{v}^2) dA \quad (\text{B.68})$$

lo que hace un poco más evidente el significado de energía mecánica de la expresión (B.67). Si cada término  $\boldsymbol{\xi}$  es reemplazado por las combinaciones lineales de la izquierda y de la derecha respectivamente, entonces

$$E = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{L(r)}(\vec{x}) \tilde{a}^{L(r)}(t), \mathbf{M} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{R(r)}(\vec{x}) \tilde{a}^{R(r)}(t) \right\rangle \quad (\text{B.69})$$

Expandiendo las sumatorias en la ecuación anterior y aplicando la relación de ortogonalidad (B.38), de donde se recupera la relación especificada por Shimizu e Imberger (2008)

$$E = \sum_{r=1}^{+\infty} E^{[r]}, \quad (\text{B.70})$$

donde

$$E^{[r]}(t) = \frac{1}{2} \left( \tilde{e}^{R(+r)} \tilde{a}^{R(+r)} \tilde{a}^{L(+r)*} + \tilde{e}^{R(-r)} \tilde{a}^{R(-r)} \tilde{a}^{L(-r)*} \right) \quad (\text{B.71})$$



# Anexo C

## Análisis dimensional de las ecuaciones hidrodinámicas

Las estructuras de oscilación del sistema fluido ( $\tilde{\xi}$ ) están caracterizadas exclusivamente por la geometría del contenedor. Es decir, la forma básica en que oscilan libremente las variables no depende del forzante externo al cual el sistema es sometido, sino que son características propias (valores y vectores propios) de la transformación lineal (ecuaciones linealizadas de momentum y continuidad) que describen la dinámica del fluido. Por lo tanto, lo que finalmente describe las estructuras de oscilación son las relaciones de aspecto que caracterizan a la geometría del contenedor del fluido. Para entender esta idea se adimensionalizan las ecuaciones del problema.

### Con que valores adimensionalizar?

El problema bidimensional considerado en las secciones anteriores puede ser reducido a una dimensión espacial y ser representado por las ecuaciones

$$\frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial U h_o(\vec{x})}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\rho h_o(\vec{x}) \frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} + \tau_{sx} - \tau_{bx} - \rho a_x h_o(\vec{x}) \quad (\text{C.2})$$

Interesa en esta ocasión determinar una expresión generalizada para el período de oscilación libre del sistema, el cual físicamente se obtiene cuando  $\tau_{sx} = \tau_{bx} = 0$  (Shintani *et al.*, 2010). Imponiendo esta condición en (C.2) y eliminando las aceleraciones externas se obtiene el sistema

$$\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial t} + g \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.3})$$

La ecuación de continuidad puede expandirse considerando que existe una variación espacial de batimetría para obtener

$$\frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial t} + U \frac{\partial h_o(x)}{\partial x} + h_o(x) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.4})$$

por lo que el sistema de ecuaciones se expresa finalmente como

$$\frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial t} + U \frac{\partial h_o(x)}{\partial x} + h_o(x) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial t} + g \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Para encontrar los modos de oscilación libre del problema se asume que la superficie libre y la velocidad pueden ser expresadas como ondas progresivas (o viajeras) del tipo

$$\eta = H e^{i\alpha(x - \frac{\omega}{\alpha}t)} \quad (\text{C.7})$$

$$U = \Upsilon e^{i\alpha(x - \frac{\omega}{\alpha}t)} \quad (\text{C.8})$$

donde  $\alpha = 2\pi/\lambda$  es el número de onda y  $\omega = 2\pi/T$  la frecuencia angular. Además  $\lambda$  y  $T$  son la longitud de onda y el período de oscilación libre respectivamente.  $H$  y  $\Upsilon$  representan la amplitud de oscilación de cada expresión y se consideran independientes del tiempo y el espacio. A diferencia del análisis propuesto por Shimizu & Imberger (2008) esta formulación considera que la amplitud de oscilación de las ondas no depende del espacio, puesto que la función oscilatoria ya incluye esta variable. Al reemplazar (C.7) y (C.8) en el sistema de ecuaciones (C.5), (C.6) se obtiene el problema de valores propios

$$\begin{vmatrix} -\omega & \alpha g \\ \left(\alpha h_o(x) - i \frac{\partial h_o(x)}{\partial x}\right) & -\omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Upsilon \\ H \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{C.9})$$

en donde  $i = \sqrt{-1}$  y se ha utilizado que  $1/i = -i$ . La solución no trivial de este problema viene dada por el determinante nulo de la matriz, lo que entrega

$$\frac{\omega^2}{\alpha^2} - g \left[ h_o(x) - \frac{i}{\alpha} \frac{\partial h_o(x)}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{C.10})$$

Si se considera que el lago tiene una longitud  $L$  y se integra (C.10) sobre el dominio se obtiene

$$\frac{\omega^2}{\alpha^2}L - g \left[ \int_0^L h_o(x)dx - \frac{i}{\alpha} \int_0^L \frac{\partial h_o(x)}{\partial x} dx \right] = 0 \quad (\text{C.11})$$

En la ecuación anterior se introduce la definición de profundidad promedio

$$\int_0^L h_o(x)dx = \bar{h}_o L, \quad (\text{C.12})$$

por lo tanto,

$$\frac{\omega^2}{\alpha^2}L - g \left[ \bar{h}_o L - \frac{i}{\alpha} [h_o(L) - h_o(0)] \right] = 0 \quad (\text{C.13})$$

Notar que si se considera que la profundidad del lago es constante e igual a  $H$  se recupera el caso en que la solución de la ecuación (C.13) está dada por

$$c = \frac{\omega}{\alpha} = \pm \sqrt{gH}, \quad (\text{C.14})$$

siendo  $c$  la celeridad de la onda. La expresión (C.13) puede fácilmente resolverse para  $\omega/\alpha$  considerando una batimetría variable que cumpla con que la profundidad en los extremos del dominio es la misma. De esta forma, se obtiene que la celeridad de la onda fundamental de oscilación libre del sistema está dada por

$$c = \pm \sqrt{g\bar{h}_o}, \quad (\text{C.15})$$

Por lo tanto, una profundidad característica que aparece naturalmente en el análisis del problema unidimensional es la profundidad media, parámetro que se utilizará en la adimensionalización de la batimetría. De esta forma además se obtiene que el período de la onda fundamental de oscilación es

$$T = \frac{2L}{\sqrt{g\bar{h}_o}} \quad (\text{C.16})$$

## Adimensionalización

A continuación se realiza la adimensionalización de las ecuaciones que gobiernan el problema. Se realiza el trabajo detallando los pasos seguidos y utilizando la información de la onda fundamental como parámetros que expresan el problema adimensionalmente. En primera instancia se trabaja con la ecuación de continuidad y luego con las de momentum.

Para el tiempo se utiliza como escala característica el período  $T$  de la onda fundamental, para la velocidad se utiliza la celeridad  $c = \sqrt{g\bar{h}_o}$  y la escala de longitud es el largo del dominio, el cual corresponde a la mitad de la longitud de onda más larga. Se introducen estos parámetros en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial U h_o(\vec{x})}{\partial x} + \frac{\partial V h_o(\vec{x})}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{\partial (\eta(\vec{x}, t)/\bar{h}_o)}{\partial (t/T)} \frac{\bar{h}_o}{T} = - \left[ \frac{\partial U h_o(\vec{x})}{\partial x} + \frac{\partial V h_o(\vec{x})}{\partial y} \right] \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial (\eta(\vec{x}, t)/\bar{h}_o)}{\partial (t/T)} = - \frac{T}{\bar{h}_o} \left[ \frac{\partial U h_o(\vec{x})}{\partial x} + \frac{\partial V h_o(\vec{x})}{\partial y} \right] \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial (\eta(\vec{x}, t)/\bar{h}_o)}{\partial (t/T)} = - \frac{T}{\bar{h}_o} \frac{\bar{h}_o}{L} \sqrt{g\bar{h}_o} \left[ \frac{\partial (U/\sqrt{g\bar{h}_o} \cdot h_o(\vec{x})/\bar{h}_o)}{\partial (x/L)} + \frac{\partial (V/\sqrt{g\bar{h}_o} \cdot h_o(\vec{x})/\bar{h}_o)}{\partial (y/L)} \right] \quad (\text{C.20})$$

Se introducen las variables adimensionales

$$\eta_* = \eta/\bar{h}_o, \quad t_* = t/T, \quad U_* = U/\sqrt{g\bar{h}_o}, \quad V_* = V/\sqrt{g\bar{h}_o},$$

$$h_{o*} = h_o/\bar{h}_o, \quad x_* = x/L, \quad y_* = y/L$$

Notando que por definición  $T\sqrt{g\bar{h}_o}/L = 2$ , entonces la ecuación de continuidad adimensional se expresa como

$$\frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} + 2 \frac{\partial U_* h_{o*}(\vec{x}_*)}{\partial x_*} + 2 \frac{\partial V_* h_{o*}(\vec{x}_*)}{\partial y_*} = 0 \quad (\text{C.21})$$

Ahora se realiza la adimensionalización de las ecuaciones de momentum. Se especifica el trabajo para la ecuación en la coordenada  $x$  siendo el caso de la coordenada  $y$  completamente análogo.

$$\rho h_o(\vec{x}) \frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} + \tau_{sx} - \tau_{bx} - \rho a_x h_o(\vec{x}) \quad (\text{C.22})$$

$$h_o(\vec{x}) \frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial t} = -g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - a_x h_o(\vec{x}) \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{\bar{h}_o \sqrt{g \bar{h}_o} h_o(\vec{x})}{T} \frac{\partial \left( U(\vec{x}, t) / \sqrt{g \bar{h}_o} \right)}{\partial t / T} = -g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - a_x h_o(\vec{x}) \quad (\text{C.24})$$

$$h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial U_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = \frac{T}{\bar{h}_o \sqrt{g \bar{h}_o}} \left[ -g h_o(\vec{x}) \frac{\partial \eta(\vec{x}, t)}{\partial x} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - a_x h_o(\vec{x}) \right] \quad (\text{C.25})$$

$$\begin{aligned} h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial U_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = \\ \frac{T}{\bar{h}_o \sqrt{g \bar{h}_o}} \left[ -g h_o(\vec{x}) \frac{g \bar{h}_o \bar{h}_o}{g \bar{h}_o L} \frac{\partial (\eta(\vec{x}, t) / \bar{h}_o)}{\partial (x/L)} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - a_x h_o(\vec{x}) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial U_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = \frac{T}{\bar{h}_o \sqrt{g \bar{h}_o}} \left[ -h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{g \bar{h}_o^2}{L} \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial x_*} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - a_x h_o(\vec{x}) \right] \quad (\text{C.27})$$

$$h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial U_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = \frac{2L}{g \bar{h}_o^2} \left[ -h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{g \bar{h}_o^2}{L} \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial x_*} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - a_x h_o(\vec{x}) \right] \quad (\text{C.28})$$

$$h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial U_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = -2h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial x_*} + \frac{2L}{g \bar{h}_o^2} \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{2L}{g \bar{h}_o^2} \frac{\tau_{bx}}{\rho} - \frac{2L}{g \bar{h}_o^2} a_x h_o(\vec{x}) \quad (\text{C.29})$$

Si el esfuerzo de corte de fondo es expresado como  $\tau_{bx} = \rho \tilde{c}_f U$ , donde  $\tilde{c}_f$  es una escala de velocidad, entonces

$$h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial U_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = -2h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial x_*} + \frac{2L}{g \bar{h}_o^2} \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{2L}{\bar{h}_o} \tilde{c}_{f*} U_* - \frac{2L}{g \bar{h}_o^2} a_x h_o(\vec{x}) \quad (\text{C.30})$$

siendo  $\tilde{c}_{f*} = \tilde{c}_f / \sqrt{g \bar{h}_o}$ . Finalmente, el término asociado a la aceleración externa del sistema se expresa como

$$h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial U_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = -2h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial x_*} + \frac{2L}{g \bar{h}_o^2} \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{2L}{\bar{h}_o} \tilde{c}_{f*} U_* - \frac{2L}{\bar{h}_o} a_{x*} h_{o*}(\vec{x}_*), \quad (\text{C.31})$$

siendo  $a_{x*} = a_x / g$ . Análogamente para el caso de la dirección  $y$

$$h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial V_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = -2h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial y_*} + \frac{2L}{g \bar{h}_o^2} \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{2L}{\bar{h}_o} \tilde{c}_{f*} V_* - \frac{2L}{\bar{h}_o} a_{y*} h_{o*}(\vec{x}_*) \quad (\text{C.32})$$

Reordenando las ecuaciones (C.21), (C.31) y (C.32) se obtiene finalmente

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = - \left[ \frac{\partial U_* h_{o*}(\vec{x}_*)}{\partial x_*} + \frac{\partial V_* h_{o*}(\vec{x}_*)}{\partial y_*} \right] = 0 \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{h_{o*}(\vec{x}_*)}{2} \frac{\partial U_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = -h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial x_*} + \frac{L}{g\bar{h}_o^2} \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{L}{\bar{h}_o} \tilde{c}_{f*} U_* - \frac{L}{\bar{h}_o} a_{x*} h_{o*}(\vec{x}_*), \quad (\text{C.34})$$

$$\frac{h_{o*}(\vec{x}_*)}{2} \frac{\partial V_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial t_*} = -h_{o*}(\vec{x}_*) \frac{\partial \eta_*(\vec{x}_*, t_*)}{\partial y_*} + \frac{L}{g\bar{h}_o^2} \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{L}{\bar{h}_o} \tilde{c}_{f*} V_* - \frac{L}{\bar{h}_o} a_{y*} h_{o*}(\vec{x}_*) \quad (\text{C.35})$$

Introduciendo la variable de estado adimensional  $\xi_* = (\eta_*, \mathbf{v}_*)^T$ , siendo  $\mathbf{v}_* = (U_*, V_*)^T$ , el sistema de ecuaciones puede ser expresado como

$$\mathbf{M}_* \partial_{t_*} \xi_* = i (\mathbf{K}_* + \mathbf{C}_*) \xi_* + \mathbf{f}_*, \quad (\text{C.36})$$

donde

$$\mathbf{M}_* = \frac{1}{2} \cdot \text{diag}(1, h_{o*}) \quad (\text{C.37})$$

$$\mathbf{K}_* = i \begin{bmatrix} 0 & \nabla_* \cdot h_{o*} \\ h_{o*} \nabla_* & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.38})$$

$$\mathbf{C}_* = i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{\bar{h}_o} \tilde{c}_{f*} \end{bmatrix} \quad (\text{C.39})$$

$$\mathbf{f}_* = \left[ 0, \frac{L}{g\bar{h}_o^2} \frac{\tau_s}{\rho} - \frac{L}{\bar{h}_o} h_{o*}(\vec{x}_*) \mathbf{a}_* \right]^T \quad (\text{C.40})$$

Despreciando el forzante externo en (C.36) de manera de estudiar los modos fundamentales de oscilación e introduciendo la solución  $\xi_* = \tilde{\xi}_*(\vec{x}_*) \exp(i[\omega_* + i\gamma_*] t_*)$ , siendo  $\tilde{\xi}_*(\vec{x}_*)$  la estructura modal,  $\omega_* = \omega T$  la frecuencia angular adimensional y  $\gamma_* = \gamma T$  la tasa de disipación lineal adimensional, se obtiene el problema de valores y vectores propios adimensional

$$(\omega_* + i\gamma_*) \mathbf{M}_* \tilde{\xi}_* = (\mathbf{K}_* + \mathbf{C}_*) \tilde{\xi}_* \quad (\text{C.41})$$

# Anexo D

## Deducción de las ecuaciones de transporte escalar

En esta sección se explica la derivación de la ecuación de transporte escalar que gobierna el movimiento del oxígeno disuelto. Estas expresiones son válidas para el transporte de cualquier compuesto en un medio fluido y están basadas en un balance másico. Se detalla la derivación y pasos necesarios para llegar al sistema a resolver en el transcurso del trabajo posterior. Las derivaciones están basadas en los trabajos de Holly (1975); Sayre (1975); Fischer *et al.* (1979)

### D.1. Concentración

Sea  $\Delta M$  la masa de un compuesto escalar contenida en un volumen infinitesimal  $\Delta V$ . Se define la concentración de la cantidad transportada como

$$C = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}, \quad (\text{D.1})$$

en donde el tamaño del volumen  $\Delta V$  debe ser lo suficientemente pequeño para que la concentración pueda ser representada con alguna función continua.

### D.2. Balance de masa

Sea  $M$  la masa total de un escalar contenida en un volumen de control de fluido. Conceptualmente, se entiende que la diferencia entre la cantidad de masa que ingresa al volumen por alguna de las caras y la cantidad de materia que sale de él, queda albergada en el interior de este. Es decir, la diferencia entre el flujo másico de entrada y el de salida es lo que hace aumentar la cantidad de masa en el interior del volumen de control. Además se puede considerar

la existencia de reacciones internas que actúen como generación o destrucción de masa en conjunto con otros términos correspondientes a fuentes o sumideros externos, como por ejemplo, transferencia del compuesto con el entorno del volumen de control. Matemáticamente, el cambio temporal en la masa es

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_S (-C\mathbf{v} + D\nabla C) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{D.2})$$

siendo  $S$  la superficie que define el borde del volumen de control y  $d\mathbf{S} = \hat{n}dS$  el elemento de superficie cuya normal apunta hacia el exterior del centro del volumen de control. El primer término contenido en la integral de la mano derecha corresponde al transporte de masa producto del flujo del fluido ambiente o transporte advectivo y va antecedido por un signo negativo producto del sentido en el cual se define la normal de la superficie y permite mantener la noción de que el aumento en la masa al interior del volumen de control es producto de la diferencia entre lo que entra y lo que sale del volumen. El segundo término contenido en la integral corresponde al flujo que se genera por difusión molecular el cual es descrito matemáticamente por la ley de Fick  $q_D = -D\nabla C$ , en donde  $q_D$  es el flujo másico por difusión,  $D$  es el coeficiente de difusión el cual en la formulación se asume que es igual en todas las direcciones (isotrópico). El signo negativo en la ley de Fick entrega la noción de que la masa se transporta desde las zonas de mayor concentración a las zonas de menor concentración y por eso, el término difusivo en la integral está antecedido por un signo positivo.

Utilizando el teorema de la divergencia de Gauss en la ecuación (D.2)

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_V \nabla \cdot (-C\mathbf{v} + D\nabla C) dV, \quad (\text{D.3})$$

El cambio temporal en la masa total contenida en el volumen de control se entiende matemáticamente como

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V C dV = \int_V \frac{\partial C}{\partial t} dV \quad (\text{D.4})$$

Reemplazando en (D.3) se obtiene

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot (-\mathbf{v}C + D\nabla C) dV \quad (\text{D.5})$$

Dado que el volumen de control es arbitrario, se puede finalmente concluir que el balance másico se expresa como

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (-\mathbf{v}C + D\nabla C) + F(C, \vec{x}, t) + R(C), \quad (\text{D.6})$$



en donde se han considerado dos términos adicionales.  $F$  se entiende como un aporte externo o fuente externa de masa por unidad de tiempo y volumen y  $R$  es un término asociado a cambios en la concentración producto de reacciones que ocurran al interior del volumen de control, también por unidad de tiempo y volumen. Expandiendo la divergencia se tiene

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}C) = D\nabla^2 C + F(C, \vec{x}, t) + R(C) \quad (\text{D.7})$$

Eliminando los términos  $F$  y  $R$  en la ecuación anterior, se obtiene la conocida ecuación de advección difusión. Es importante destacar que hasta este punto se ha considerado que la difusión de materia es exclusivamente molecular.

Esta última expresada en notación tensorial y despreciando los términos de fuente externa y reacciones internas

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{v}_i C)}{\partial x_i} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{D.8})$$

en donde  $\mathbf{v}_i$  corresponde a la componente  $i$  del vector de velocidad.

### D.3. Difusión turbulenta

Como señala Fischer *et al.* (1979), la ecuación (D.7) se cumple en general sólo para aquellos casos en que la difusión es netamente molecular, como lo es por ejemplo en el caso de un flujo laminar. Sin embargo, la mayoría de los flujos encontrados en la naturaleza, tienden a ser turbulentos por lo que se generan perturbaciones en el transporte de escalares. Para incluir el efecto anterior, Sayre (1975) en su análisis de la ecuación de transporte utiliza el procedimiento de promedio de Reynolds que básicamente consiste en promediar las concentraciones y velocidades instantáneas cada pequeñas ventanas temporales. De esta manera, se define que la concentración y la velocidad pueden ser expresadas como

$$C = \bar{C} + C', \quad \mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}}_i + \mathbf{v}'_i \quad (\text{D.9})$$

Ambas variables anteriores se entienden como un valor promedio más una desviación que es producto de la turbulencia. Los valores promedio son

$$\bar{C} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} C dt, \quad \bar{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{v}_i dt, \quad (\text{D.10})$$

siendo  $T$  el ancho de la ventana temporal utilizada para el cálculo del promedio. Además se cumple que

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} C' dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{v}'_i dt = 0, \quad (\text{D.11})$$

Si se reemplazan las expresiones (D.9) en la ecuación (D.8) se obtiene

$$\frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial t} + \frac{\partial [(\bar{\mathbf{v}}_i + \mathbf{v}'_i) (\bar{C} + C')]}{\partial x_i} = D \frac{\partial^2 (\bar{C} + C')}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{D.12})$$

Ahora se realiza un promedio temporal de la ecuación anterior sobre ventanas de largo  $T$  al igual que en la definición de las variables que incluyen la desviación turbulenta. El lado derecho de la ecuación entrega que

$$\frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \left[ \frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial t} + \frac{\partial [(\bar{\mathbf{v}}_i + \mathbf{v}'_i) (\bar{C} + C')]}{\partial x_i} \right] d\tau = \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \left[ \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial C'}{\partial t} + \frac{\partial [\bar{\mathbf{v}}_i \bar{C} + \mathbf{v}'_i \bar{C} + \bar{\mathbf{v}}_i C' + \mathbf{v}'_i C']}{\partial x_i} \right] d\tau = \quad (\text{D.14})$$

Resolviendo el promedio temporal

$$\frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} d\tau = \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} \int_\tau^{\tau+T} d\tau = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \frac{\partial C'}{\partial t} d\tau = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau^{\tau+T} C' d\tau = 0 \quad (\text{D.16})$$

$$\frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \frac{\partial (\bar{\mathbf{v}}_i \bar{C})}{\partial x_i} d\tau = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \left[ \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} + \bar{C} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_i}{\partial x_i} \right] d\tau = \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i}, \quad (\text{D.17})$$

en donde en esta última expresión se ha utilizado que

$$\frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} d\tau = \frac{\bar{\mathbf{v}}_i}{T} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \int_\tau^{\tau+T} d\tau = \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i}, \quad (\text{D.18})$$

y la ecuación de continuidad pero con la expansión de la variable de velocidad a partir de la cual se obtiene que

$$0 = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}_i + \mathbf{v}'_i) d\tau = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_i d\tau + \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \nabla \cdot \mathbf{v}'_i d\tau = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_i}{\partial x_i} \quad (\text{D.19})$$

Utilizando argumentos similares en los demás términos de la expresión (D.14) se concluye que

$$\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \frac{\partial (\mathbf{v}'_i \bar{C})}{\partial x_i} d\tau = 0 \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \frac{\partial (\bar{\mathbf{v}}_i C')}{\partial x_i} d\tau = 0 \quad (\text{D.21})$$

y

$$\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \frac{\partial (\mathbf{v}'_i C')}{\partial x_i} d\tau = \frac{\overline{\partial (\mathbf{v}'_i C')}}{\partial x_i}, \quad (\text{D.22})$$

en donde para este último término no existen argumentos matemáticos para decir que es nulo. El lado izquierdo de la ecuación (D.12) promediado temporalmente entrega que

$$\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} D \frac{\partial^2 (\bar{C} + C')}{\partial x_i \partial x_i} d\tau = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{D.23})$$

Reemplazando todo lo anterior en la ecuación (D.12) se obtiene finalmente que el promedio temporal transforma el sistema en

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} + \frac{\overline{\partial (\mathbf{v}'_i C')}}{\partial x_i} = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{D.24})$$

El tercer término de la mano derecha se puede entender como un flujo másico producto de las perturbaciones inducidas por turbulencia tanto en la velocidad como en la concentración. En el trabajo de Sayre (1975) detalla que este término puede ser entendido como un término difusivo definiendo

$$\epsilon_{ij}^t \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} = -\overline{\partial (\mathbf{v}'_i C')}, \quad (\text{D.25})$$

en donde  $\epsilon_{ij}^t$  es el tensor de coeficientes de difusión turbulenta (superíndice  $t$ ). Un análisis similar fue realizado por Taylor. Con esta consideración finalmente se puede obtener que

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} = -\frac{\overline{\partial (\mathbf{v}'_i C')}}{\partial x_i} + D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{D.26})$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \epsilon_{ij}^t \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} \right) + D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{D.27})$$

Sayre (1975) continúa el desarrollo de la ecuación de transporte como sigue. Suponiendo que los procesos de difusión molecular y turbulenta son independientes entre sí y por lo tanto, aditivos, se puede definir un nuevo coeficiente de difusión de masa

$$\mathbf{k}_{ij} = \epsilon_{ij}^t + \mathbf{D}, \quad (\text{D.28})$$

siendo

$$\epsilon_{ij}^t = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^t & \epsilon_{xy}^t & \epsilon_{xz}^t \\ \epsilon_{yx}^t & \epsilon_{yy}^t & \epsilon_{yz}^t \\ \epsilon_{zx}^t & \epsilon_{zy}^t & \epsilon_{zz}^t \end{bmatrix} \quad (\text{D.29})$$

y

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \quad (\text{D.30})$$

Reemplazando esta definición en (D.27) y eliminando las barras superiores que indican promedio temporal, pero recordando que las variables tienen esta definición conceptual de promedio móvil, la ecuación de transporte de masa que incluye los procesos de difusión turbulenta y molecular es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{k}_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \quad (\text{D.31})$$

El término  $\mathbf{k}_{ij}$  es conocido como tensor de dispersión (Holly & Usseglio-Polatera, 1984), tensor de difusión (Sayre, 1975) o además se puede entender como una matriz de coeficientes escalares de mezcla (Fischer *et al.*, 1979). Si al lado izquierdo de la ecuación anterior, se suma  $C \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} = 0$  se obtiene

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}C) = \nabla \cdot (\mathbf{k}_{ij} \nabla C) \quad (\text{D.32})$$

Es esta ecuación la que se integra verticalmente y que se resuelve numéricamente con volúmenes finitos durante el desarrollo del trabajo.

## D.4. Sobre vectores normales

Se incluye una sección para revisar algunos de los aspectos que permiten determinar el vector normal a una superficie. En algunas de las deducciones posteriores se utilizan estos conceptos.

Sea  $\vec{\varphi}(x, y)$  una parametrización suave y simple de una superficie  $S$  tal que

$$\vec{\varphi}(x, y) = (x, y, f_o(x, y)), \quad (\text{D.33})$$

siendo  $f_o(x, y)$  una función continua que en el dominio. Los vectores tangentes a  $S$  en un punto  $(x_o, y_o)$  tal que las derivadas de  $\vec{\varphi}(x, y)$  sean distintas de cero están definidos como

$$\hat{t}_x = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} / \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \right\|; \quad \hat{t}_y = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} / \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} \right\| \quad (\text{D.34})$$

Si  $\hat{t}_x$  y  $\hat{t}_y$  son linealmente independientes, se dice que la parametrización es regular. Dado lo anterior, el plano al cual dan origen se denomina plano tangente y el vector normal a  $S$  en  $\vec{\varphi}(x_o, y_o)$  se define como

$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_x \times \hat{t}_y}{\|\hat{t}_x \times \hat{t}_y\|} \quad (\text{D.35})$$

En base a estas definiciones y para la parametrización considerada se obtiene

$$\hat{t}_x = \frac{1}{a(x, y)} \left( 1, 0, \frac{\partial f_o}{\partial x} \right); \quad a(x, y) = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \right\| = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f_o}{\partial x} \right)^2} \quad (\text{D.36})$$

$$\hat{t}_y = \frac{1}{b(x, y)} \left( 0, 1, \frac{\partial f_o}{\partial y} \right); \quad b(x, y) = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f_o}{\partial y} \right)^2}, \quad (\text{D.37})$$

por lo que la expresión genérica para el vector normal a la superficie generada por la función de batimetría  $f_o(x, y)$  está dado por

$$\hat{n} = \frac{1}{a(x, y)b(x, y)c(x, y)} \left( -\frac{\partial f_o}{\partial x}, -\frac{\partial f_o}{\partial y}, 1 \right) \quad (\text{D.38})$$

$$c(x, y) = \|\hat{t}_x \times \hat{t}_y\| = \frac{1}{a(x, y)b(x, y)} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f_o}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_o}{\partial y} \right)^2} \quad (\text{D.39})$$

Reordenando y reduciendo términos finalmente se deduce que

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial f_o}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_o}{\partial y} \right)^2}} \left( -\frac{\partial f_o}{\partial x}, -\frac{\partial f_o}{\partial y}, 1 \right) \quad (\text{D.40})$$

Este es el vector normal normalizado, o sea, de norma unitaria. Sin embargo, en la literatura se conoce como vector normal a la versión no normalizada del vector anterior. En ese caso se hablará del vector  $\hat{\mathbf{N}}$ .

## D.5. Integración vertical de la ecuación de transporte

Esta sección se basa en el trabajo de (Holly, 1975) quién detalla el proceso de integración de las ecuaciones. Se incluye para clarificar algunos conceptos.

Se integra verticalmente la ecuación de transporte. Se analiza independientemente cada término integrado.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}C) = \nabla \cdot (\mathbf{k}_{ij} \nabla C) \quad (\text{D.41})$$

La integral de la derivada temporal es

$$\int_{z_f}^h \frac{\partial C}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_f}^h C dz = \frac{\partial (h_o \bar{C})}{\partial t}, \quad (\text{D.42})$$

en donde se ha incluido la noción de concentración promedio vertical  $\bar{C}$

$$\int_{z_f}^h C dz = h_o \bar{C} \quad (\text{D.43})$$

El término  $h_o$  aparece producto de que en las ecuaciones de momentum se ha despreciado la deformación de la superficie libre, por lo tanto, la diferencia entre la altura local del flujo y la cota de fondo puede ser aproximada como la profundidad del estado de reposo. Se integra ahora el término advectivo en la ecuación (D.41)

$$\int_{z_f}^h \nabla \cdot (\mathbf{v}C) dz = \int_{z_f}^h \frac{\partial uC}{\partial x} dz + \int_{z_f}^h \frac{\partial vC}{\partial y} dz + \int_{z_f}^h \frac{\partial wC}{\partial z} dz \quad (\text{D.44})$$

Se aplica la regla de integración de Leibnitz con lo que se concluye que

$$\int_{z_f}^h \nabla \cdot (\mathbf{v}C) dz = \frac{\partial (h_o \overline{uC})}{\partial x} - \overline{uC} \Big|_h \frac{\partial h}{\partial x} + \overline{uC} \Big|_{z_f} \frac{\partial z_f}{\partial x} + \frac{\partial (h_o \overline{vC})}{\partial y} - \overline{vC} \Big|_h \frac{\partial h}{\partial y} + \overline{vC} \Big|_{z_f} \frac{\partial z_f}{\partial y} + \overline{wC} \Big|_h - \overline{wC} \Big|_{z_f} \quad (\text{D.45})$$

Recordando la noción del vector normal a superficies introducida en la sección anterior y considerando que la dirección del vector normal a la superficie no está normalizada pero de todas formas tiene el sentido normal a la superficie, entonces la ecuación anterior se puede expresar como

$$\int_{z_f}^h \nabla \cdot (\mathbf{v}C) dz = \nabla_{2D} \cdot (h_o \overline{\mathbf{v}C}_{2D}) + \left( \mathbf{v}C \cdot \hat{\mathbf{N}} \right) \Big|_{z_f}^h, \quad (\text{D.46})$$

donde  $\nabla_{2D} = (\partial_x, \partial_y)$  es el operador nabla en dos dimensiones,  $h_o$  es la profundidad local de la hoya en el estado de reposo,  $\overline{\mathbf{v}C}_{2D} = (\overline{u}C, \overline{v}C)$  es el vector de flujo advectivo promedio vertical bidimensional. El último término de la mano derecha en la ecuación anterior se entiende como un flujo advectivo a través de las superficies que delimitan los bordes de integración, es decir, el flujo advectivo a través de la superficie libre y el flujo advectivo a través del fondo. Por condición de borde de no flujo, ambos son nulos. Por lo tanto,

$$\int_{z_f}^h \nabla \cdot (\mathbf{v}C) dz = \nabla_{2D} \cdot (h_o \overline{\mathbf{v}C}_{2D}) \quad (\text{D.47})$$

Para la integración del flujo difusivo se realizan algunos comentarios previo a la deducción del resultado. El término difusivo presentado en las ecuaciones de transporte anteriores está caracterizado por un tensor de difusión el cual multiplica al gradiente de concentración promedio temporal  $C$ . Expandiendo estos términos

$$\mathbf{k}_{ij} \nabla C = \left( \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} k_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial C}{\partial z} \\ k_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial C}{\partial z} \\ k_{zx} \frac{\partial C}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{D.48})$$

Es importante recordar que el término  $\mathbf{k}_{ij} \nabla C$  es un vector que caracteriza los flujos de difusión turbulenta de la cantidad descrita por  $C$  al interior de un volumen de control sobre el cual se estudia el balance másico. Por lo tanto, se entiende que el flujo por difusión turbulenta que se observa en la dirección  $x$  tiene un aporte proveniente de los gradientes de concentración que se observan en las tres direcciones, cada uno premultiplicado por un coeficiente de difusión que caracteriza el proceso. Por otro lado, es importante recordar que el tensor de difusión es un modelo que pretende explicar los flujos másicos producidos por las fluctuaciones turbulentas de la velocidad y la concentración. Así, para el caso de la coordenada  $x$  se tiene que

$$-\overline{u'C'} = k_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (\text{D.49})$$

es decir, el flujo másico inducido por el promedio temporal del producto entre las fluctuaciones turbulentas de la velocidad y la concentración se entiende o se modela como un proceso difusivo que recibe aporte de los gradientes de concentración de las tres direcciones.

Los flujos difusivos dan origen a una variación temporal en la concentración expresada como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{k}_{ij} \nabla C) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} \right. \\ &+ k_{xz} \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial C}{\partial z} \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zx} \frac{\partial C}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

Este término debe ser integrado verticalmente aplicando la regla de integración de Leibnitz para las derivadas en  $x$  e  $y$ , mientras que para la derivada en  $z$  aplica el teorema fundamental del cálculo. A modo de ejemplo se integra el término

$$\int_{z_f}^h \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{h_o k_{xy} \frac{\partial C}{\partial y}} \right) - \left( k_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \Big|_{z_f}^h \quad (\text{D.51})$$

Esta regla de integración aplica a las derivadas en  $x$  e  $y$  de la ecuación (D.50). Para las derivadas en  $z$  se integra a modo de ejemplo

$$\int_{z_f}^h \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dz = \left( k_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \Big|_{z_f}^h \quad (\text{D.52})$$

Aplicando estas reglas de integración a cada término y reordenando las expresiones se obtiene

$$\int_{z_f}^h \nabla \cdot (\mathbf{k}_{ij} \nabla C) dz = \nabla_{2D} \cdot (h_o [\overline{\mathbf{k}_{ij} \nabla C}_{2D} + \overline{\mathbf{k}_{iz} \nabla C}_{2D}]) + \left( \mathbf{k}_{ij} \nabla C \cdot \hat{\mathbf{N}} \right) \Big|_{z_f}^h \quad (\text{D.53})$$

En esta ecuación los nuevos términos son

$$\overline{\mathbf{k}_{ij} \nabla C}_{2D} = \left( \begin{array}{c} \overline{k_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}} + \overline{k_{xy} \frac{\partial C}{\partial y}} \\ \overline{k_{yx} \frac{\partial C}{\partial x}} + \overline{k_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}} \end{array} \right) \quad (\text{D.54})$$

$$\overline{\mathbf{k}_{iz} \nabla C}_{2D} = \left( \begin{array}{c} \overline{k_{xz} \frac{\partial C}{\partial z}} \\ \overline{k_{yz} \frac{\partial C}{\partial z}} \end{array} \right) \quad (\text{D.55})$$

El último término de la mano derecha en la ecuación (D.53) representa los flujos difusivos a través de la superficie libre y a través del fondo, dado que la integración se hizo en la coordenada vertical. Se considera por ahora que este factor puede ser distinto de cero. Por lo tanto, la versión integrada verticalmente de la ecuación (D.41) puede ser expresada como

$$\frac{\partial (h_o \bar{C})}{\partial t} + \nabla_{2D} \cdot (h_o \overline{\mathbf{v} C}_{2D}) = \nabla_{2D} \cdot (h_o [\overline{\mathbf{k}_{ij} \nabla C}_{2D} + \overline{\mathbf{k}_{iz} \nabla C}_{2D}]) + \left( \mathbf{k}_{ij} \nabla C \cdot \hat{\mathbf{N}} \right) \Big|_{z_f}^h, \quad (\text{D.56})$$



en donde es importante recordar que las barras superiores en este caso indican promedio vertical. Siguiendo el análisis de Holly (1975); Fischer *et al.* (1979) se puede suponer que tanto la velocidad como la concentración se expresan como un promedio vertical más una desviación con respecto a ese promedio. Es decir, existe un perfil vertical de velocidad y concentración los que pueden ser expresados respectivamente como

$$\mathbf{v}_{2D} = \overline{\mathbf{v}_{2D}} + \mathbf{v}'_{2D}(z) \quad (\text{D.57})$$

y

$$C = \overline{C} + C'(z) \quad (\text{D.58})$$

De esta forma, el término advectivo arroja

$$\overline{\mathbf{v}C}_{2D} = \overline{(\overline{\mathbf{v}_{2D}} + \mathbf{v}'_{2D}(z)) (\overline{C} + C'(z))} = \overline{\mathbf{v}_{2D}}\overline{C} + \overline{\mathbf{v}'_{2D}C'} \quad (\text{D.59})$$

Si se reemplaza la expresión para la concentración en  $\overline{\mathbf{k}_{iz}\nabla C}_{2D}$

$$\overline{\mathbf{k}_{iz}\nabla C}_{2D} = \left( \frac{k_{xz} \frac{\partial(\overline{C} + C'(z))}{\partial z}}{k_{yz} \frac{\partial(\overline{C} + C'(z))}{\partial z}} \right) = \left( \frac{k_{xz} \frac{\partial C'(z)}{\partial z}}{k_{yz} \frac{\partial C'(z)}{\partial z}} \right) \quad (\text{D.60})$$

Como ha sido señalado por Holly (1975); Fischer *et al.* (1979) el transporte generado por las desviaciones verticales con respecto al promedio puede ser aproximado existosamente por un flujo tipo difusivo y además en flujo naturales es común encontrar que la mezcla es prácticamente completa en la vertical, por lo tanto, las desviaciones de la concentración  $C'(z)$  son pequeñas, por lo tanto, el término  $\overline{\mathbf{k}_{iz}\nabla C}_{2D}$  es nulo.

La ecuación (D.56) se transforma en

$$\frac{\partial(h_o\overline{C})}{\partial t} + \nabla_{2D} \cdot (h_o\overline{\mathbf{v}_{2D}}\overline{C}) = \nabla_{2D} \cdot (h_o[\overline{\mathbf{k}_{ij}\nabla C}_{2D} - \overline{\mathbf{v}'_{2D}C'}]) + \left( \mathbf{k}_{ij}\nabla C \cdot \hat{\mathbf{N}} \right) \Big|_{z_f}^h, \quad (\text{D.61})$$

El párrafo anterior implica que todos los efectos de difusión o dispersión pueden ser incluidos en un único coeficiente que premultiplica al gradiente de concentración. Aplicando esto y eliminando las barras superiores y los subíndices  $2D$ , entendiendo que ahora el problema está expresado en términos de un promedio vertical, entonces se obtiene

$$\frac{\partial(h_oC)}{\partial t} + \nabla \cdot (h_o\mathbf{v}C) = \nabla \cdot (h_o\mathbf{k}_{ij}\nabla C) + F_{atm} + F_{sed}, \quad (\text{D.62})$$

en donde se definen los flujos difusivos verticales con la atmosfera y los sedimentos como

$$\left( \mathbf{k}_{ij} \nabla C \cdot \hat{\mathbf{N}} \right) \Big|_{z_f}^h = F_{atm} + F_{sed} \quad (\text{D.63})$$

y se tiene que  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ ,  $\mathbf{v} = (U, V)^T$  y

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{D.64})$$

## D.6. Volúmenes Finitos

La metodología de resolución numérica escogida para la ecuación (D.62) es la de volúmenes finitos de Patankar (1980). La formulación utilizada esta basada en el libro de Versteeg & Malalasekera (1995) y en los apuntes del curso de modelación numérica con aplicaciones de ingeniería hidráulica y ambiental. La ventaja de esta metodología es que su concepción nace del principio de conservación de masa. No discretiza las ecuaciones directamente como lo hace por ejemplo el método de diferencias finitas.

### Integración de la ecuación de transporte

La ecuación de transporte de masa que ha sido deducida anteriormente debe ser integrada tanto en el volumen de control a utilizar como en el tiempo. En esta sección se muestra el proceso de integración. La ecuación de transporte de masa escalar que se considera es

$$\frac{\partial (h_o C)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = F(C), \quad (\text{D.65})$$

en donde se han despreciado las derivadas cruzadas y  $F(C)$  es el término fuente. Esto se sustenta en que se pueden escoger los ejes principales del problema coincidentes con los ejes principales del flujo (Sayre, 1975; Holly, 1975; Fischer *et al.*, 1979) de manera que las derivadas cruzadas desaparecen. Por lo tanto, los flujos se expresan como

$$J_x = h_o U C - h_o k_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (\text{D.66})$$

La ecuación (D.65) integrada en el volumen de control y en el tiempo se expresa como

$$\int_V \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial (h_o C)}{\partial t} dt dV + \int_t^{t+\Delta t} \int_V \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_V F(C) dV dt, \quad (\text{D.67})$$

La primera integral de la mano derecha puede ser resuelta como

$$\int_V \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial (h_o C)}{\partial t} dt dV = h_{oP} (C_P - C_P^0) \Delta x \Delta y, \quad (\text{D.68})$$

en donde por notación se adopta que  $C_P^0$  es la concentración del material transportada en el punto  $P$  al inicio del intervalo de tiempo. La segunda integral de la mano derecha en (D.67) se expresa como

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) dV dt = \int_t^{t+\Delta t} (J_e - J_w + J_n - J_s) dt, \quad (\text{D.69})$$

siendo

$$J_e = \int_y J_x \Big|_e dy = \left( [h_o U C]_e - \left[ h_o k_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \right]_e \right) \Delta y, \quad (\text{D.70})$$

es decir,  $J_e$  es el flujo másico total que atraviesa la cara  $e$  del volumen de control. Un análisis similar aplica al resto de las caras. Para resolver la integral del tiempo es necesario suponer la variación de las variables con respecto al tiempo. En este contexto, se puede suponer que la integración temporal equivale a calcular un promedio ponderado del valor de la variable al inicio y al final del espacio temporal. Por ejemplo, la integración

$$\int_t^{t+\Delta t} C_P dt = [f C_P + (1 - f) C_P^0] \Delta t \quad (\text{D.71})$$

es un promedio ponderado entre el valor de la variable al inicio del intervalo  $C_P^0$  y al final del intervalo  $C_P$ . El parámetro  $f$  es el que determina el peso que tiene en el resultado cada valor de la variable en el tiempo. Siguiendo a Patankar (1980); Versteeg & Malalasekera (1995) se tiene que cuando  $f = 0$  la integración temporal es explícita y el valor con más influencia es el calculado en el paso de tiempo previo, si  $f = 0,5$  la integración es de tipo Crank Nicolson y las variables al inicio y al término del intervalo tienen el mismo peso relativo y si  $f = 1$  el tipo de integración temporal es implícito el cual entrega bajo peso relativo a los resultados obtenidos en el paso de tiempo anterior. Este último entrega los mejores resultados físicos (Patankar, 1980; Versteeg & Malalasekera, 1995) por lo tanto todas las integraciones temporales están bajo este concepto. Por lo tanto, se tiene finalmente que la integración en el tiempo y en el volumen de control de la ecuación de transporte entrega

$$\frac{h_{oP} (C_P - C_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = (F_0 + F_1 C_P) \Delta x \Delta y, \quad (\text{D.72})$$

en donde el término fuente ha sido linealizado y se entiende que todas las variables que aparecen en los flujos han sido integradas utilizando un esquema implícito y por lo tanto

son las variables del final del intervalo de tiempo de integración. La ecuación de continuidad promedio vertical deducida en la sección de ecuaciones hidrodinámicas, también se utiliza en el análisis. Por lo tanto, debe ser integrada en el volumen de control y en el tiempo al igual que la ecuación de transporte. La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (Uh_o)}{\partial x} + \frac{\partial (Vh_o)}{\partial y} = 0, \quad (\text{D.73})$$

siendo  $\eta$  la deformación de la superficie libre. Integrando en el volumen de control e implícitamente para el caso del tiempo, entonces se obtiene

$$\frac{(\eta_p - \eta_p^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s = 0, \quad (\text{D.74})$$

en donde  $F_e = (Uh_o)_e \Delta y$  es el flujo que atraviesa por el total de la cara  $e$ .

### Coefficientes de transporte

Patankar (1980) derivó una forma generalizada para determinar los coeficientes de transporte, que son valores que multiplican a la variable transportada y que describen el flujo sobre ella. A modo de ejemplo, se toma el caso del flujo por la cara  $e$  el cual como se mencionó previamente es

$$J_e = [h_o UC]_e \Delta y - \left[ h_o k_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \right]_e \Delta y \quad (\text{D.75})$$

La idea es estudiar el comportamiento del flujo a través de la cara  $e$  en función de algunos de los parámetros que caracterizan al proceso de advección-difusión. Se considera que el nodo que está ubicado antes de la cara  $e$  es el nodo  $i$ , mientras que el que se encuentra después de ella hacia la derecha es el nodo  $i + 1$ . Ambos nodos están separados una distancia  $\Delta x$  entre sí y por ahora se considera que la interfaz  $e$  está en el punto medio entre los nodos. Se define

$$J_* = \frac{J_e \Delta x}{h_o k_{xx} \Delta y} = \frac{h_o U \Delta x \Delta y}{h_o k_{xx} \Delta y} C - \frac{\partial C}{\partial (x/\Delta x)} = CP_{e_e} - \frac{\partial C}{\partial (x/\Delta x)}, \quad (\text{D.76})$$

en donde se define el número de Peclet de la discretización evaluado en la cara  $e$  como  $P_{e_e} = F_e/D_e$ , siendo  $F_e = (h_o U)_e \Delta y$  la intensidad del flujo advectivo y  $D_e = (h_o k_{xx})_e \Delta y/\Delta x$  la intensidad del flujo difusivo o conductancia difusiva (Patankar, 1980). Para caracterizar el flujo en la interfaz, se observa que la concentración que aparece en el primer término del lado derecho en la ecuación anterior, vista en la interfaz, debe ser algún tipo de promedio ponderado de las concentraciones que contienen los volúmenes de control adyacentes. O sea, es un promedio ponderado entre  $C_i$  y  $C_{i+1}$ . Por otro lado, el gradiente de concentración debe

ser proporcional a la diferencia entre las concentraciones, es decir, proporcional a  $(C_{i+1} - C_i)$ . Bajo este concepto se propone que el flujo en la interfaz entre los volúmenes de control es

$$J_* = Pe [\alpha C_i + (1 - \alpha) C_{i+1}] - \beta (C_{i+1} - C_i), \quad (D.77)$$

siendo los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  números adimensionales que dependen del  $Pe$ . Por lo tanto, el término  $J_*$  puede ser finalmente expresado como

$$J_* = BC_i - AC_{i+1}, \quad (D.78)$$

siendo los coeficientes  $A$  y  $B$  términos que dependen del número de Péclet. Estos coeficientes satisfacen algunas propiedades que se expresan a continuación. En el caso que  $C_i = C_{i+1}$  se debe recuperar naturalmente que el gradiente de concentración es nulo y por lo tanto la difusión es nula. En ese caso, se concluye a partir de la ecuación (D.77) que

$$J_* = C_i Pe = C_{i+1} Pe \quad (D.79)$$

Usando esto en conjunto con la ecuación (D.78) se obtiene que

$$B = A + Pe \quad (D.80)$$

El número de Péclet puede cambiar de signo en función de la dirección de la velocidad  $U$ . Suponiendo que ese es el caso entonces la relación (D.80) permite encontrar una simetría entre las funciones  $A$  y  $B$  tal que

$$A(-Pe) = B(Pe) \quad (D.81)$$

$$B(-Pe) = A(Pe) \quad (D.82)$$

La dependencia de las funciones  $A$  y  $B$  con el número de Péclet ha sido encontrada analíticamente Patankar (1980). Una propiedad que satisfacen estas funciones y que puede ser deducida a partir de las expresiones anteriores es que para  $Pe < 0$  se cumple que

$$A(Pe) = B(Pe) - Pe \quad (D.83)$$

$$A(Pe) = A(-Pe) - Pe = A(|Pe|) - Pe \quad (D.84)$$

De esta forma, la función  $A$  puede ser expresada en términos generales como

$$A(Pe) = A(|Pe|) + \text{máx}(-Pe, 0), \quad (\text{D.85})$$

es decir, si  $Pe > 0$  se recupera que  $A(Pe) = A(|Pe|)$  y si  $Pe < 0$  entonces  $A(Pe) = A(|Pe|) - Pe$ . Similarmente, y a partir de la expresión encontrada para  $A$ , la función  $B$  será

$$B(Pe) = A(|Pe|) + \text{máx}(Pe, 0) \quad (\text{D.86})$$

La función  $B$  está conectada con el punto que está a la izquierda de la interfaz o detrás de ella (Behind) mientras que la función  $A$  está ligada al coeficiente que está delante de la interfaz o a su derecha (Ahead). Estas funciones dan origen a los coeficientes de transporte.

Finalmente, utilizando las ecuaciones (D.78) y (D.80) se pueden deducir las relaciones

$$J_* - C_i Pe = A(C_i - C_{i+1}) \quad (\text{D.87})$$

$$J_* - C_{i+1} Pe = B(C_i - C_{i+1}) \quad (\text{D.88})$$

Restando de la ecuación (D.72) la ecuación (D.74) multiplicada por la concentración  $C_P$  entonces se obtiene

$$\begin{aligned} (h_{oP} [C_P - C_P^0] - C_P [\eta_P - \eta_P^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}] + \\ (J_e - F_e C_P) - (J_w - F_w C_P) + (J_n - F_n C_P) - \\ (J_s - F_s C_P) = (F_0 + F_1 C_P) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (\text{D.89})$$

En esta expresión los flujos que se evalúan con (D.87) son

$$J_e - F_e C_P = a_E (C_P - C_E) \quad (\text{D.90})$$

$$J_n - F_n C_P = a_N (C_P - C_N) \quad (\text{D.91})$$

y con (D.88) se evalúan

$$J_w - F_w C_P = a_W (C_W - C_P) \quad (\text{D.92})$$

$$J_s - F_s C_P = a_S (C_S - C_P) \quad (\text{D.93})$$

En las expresiones anteriores, se tiene que

$$a_E = A(Pe_e)D_e = D_e A(|Pe_e|) + \text{máx}(-F_e, 0) \quad (\text{D.94})$$

$$a_W = B(Pe_w)D_w = D_w A(|Pe_w|) + \text{máx}(F_w, 0) \quad (\text{D.95})$$

$$a_N = A(Pe_n)D_n = D_n A(|Pe_n|) + \text{máx}(-F_n, 0) \quad (\text{D.96})$$

$$a_S = B(Pe_s)D_s = D_s A(|Pe_s|) + \text{máx}(F_s, 0) \quad (\text{D.97})$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación (D.89) y reordenando se obtiene finalmente que la formulación de volúmenes finitos para la ecuación de transporte promedio vertical es

$$a_P C_P = a_E C_E + a_W C_W + a_N C_N + a_S C_S + h_{oP} C_P^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_0 \Delta x \Delta y \quad (\text{D.98})$$

con

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (h_{oP} - \eta_P + \eta_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - F_1 \Delta x \Delta y \quad (\text{D.99})$$

### Esquema ley de potencia

La forma de la función  $A(|Pe|)$  determina el esquema de volúmenes finitos a utilizar. Existen varias formulaciones, entre ellas, el esquema exponencial, el esquema lineal, el esquema híbrido y el esquema ley de potencia (Patankar, 1980). Este último, entrega los mejores resultados a cambio de los menores costos computacionales. Para este caso, la función  $A(|Pe|)$  adquiere la forma

$$A(|Pe|) = \text{máx} [0, (1 - 0,1 |Pe|)^5] \quad (\text{D.100})$$

# Anexo E

## Efectos del filtro en las series de aceleración

Las siguientes figuras presentan una sección del tramo estacionario de las series medidas para los experimentos mostrados en la sección de resultados y el efecto que tiene la aplicación de los filtros explicados en el capítulo de la instalación experimental.

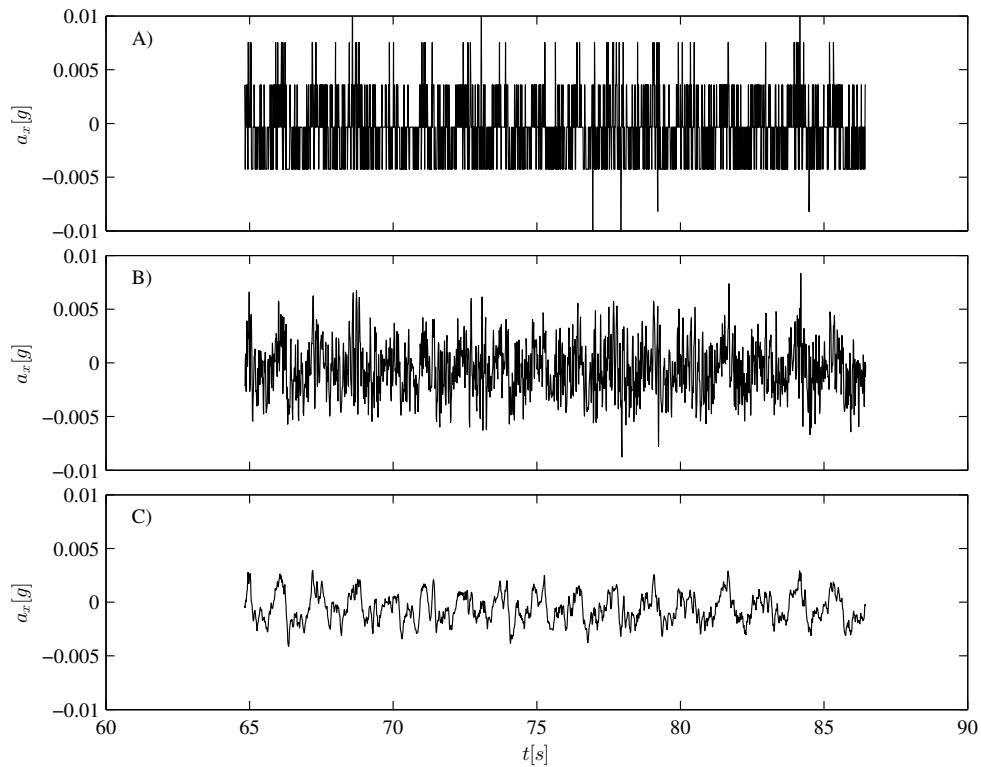


Figura E.1: Series de aceleración en  $x$  para  $\omega_f = 40[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$  A) Original B) Con filtro *Butterworth* C) Con filtro *Butterworth* y media móvil promediando sobre 10 datos.



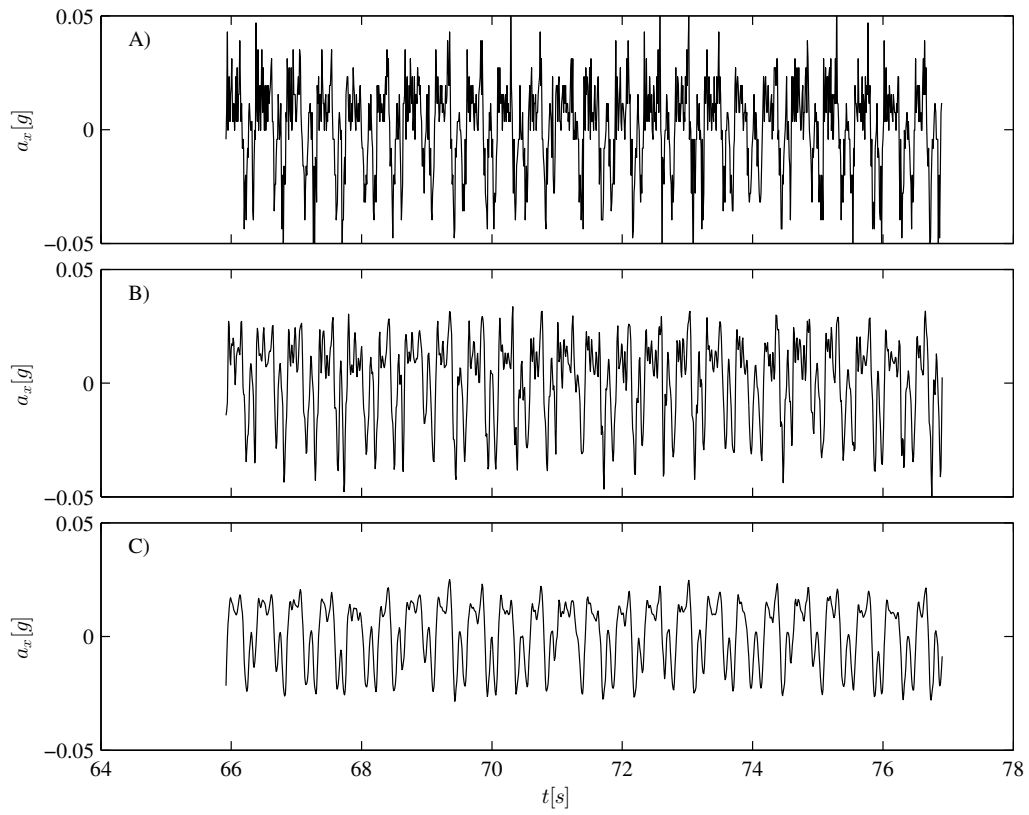


Figura E.2: Series de aceleración en  $x$  para  $\omega_f = 116[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$   
 A) Original B) Con filtro *Butterworth* C) Con filtro *Butterworth* y media móvil promediando sobre 6 datos.

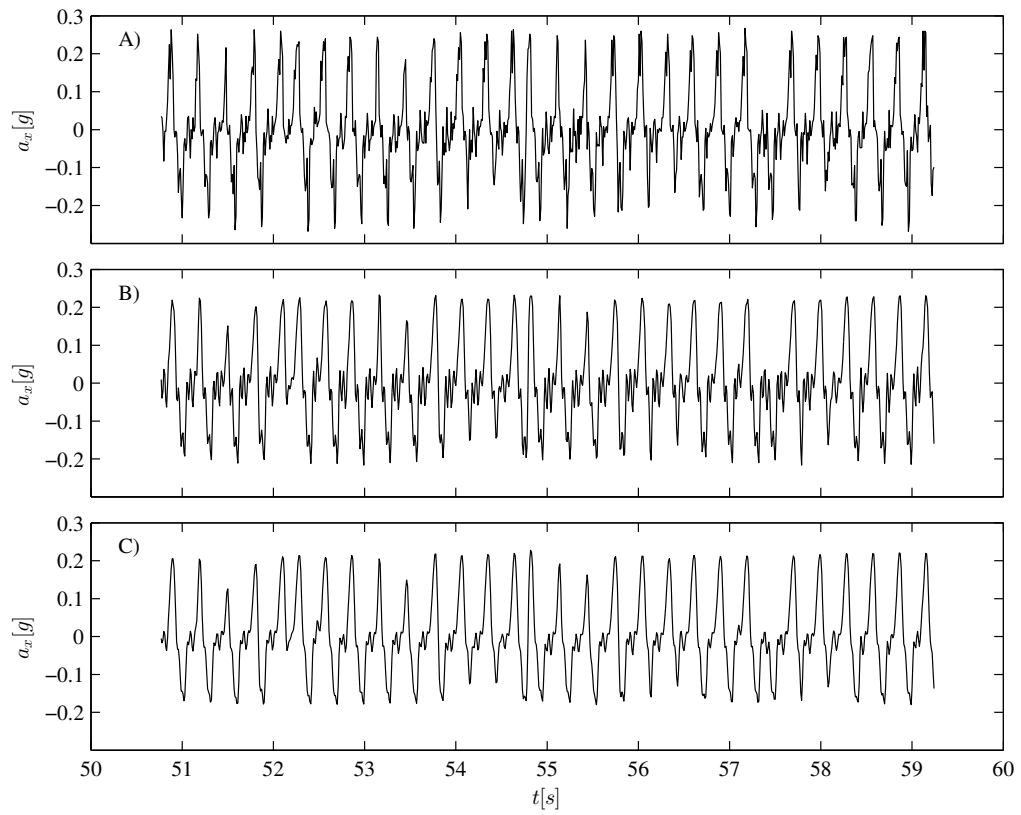


Figura E.3: Series de aceleración en  $x$  para  $\omega_f = 182[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2[mm]$   
 A) Original B) Con filtro *Butterworth* C) Con filtro *Butterworth* y media móvil promediando sobre 3 datos.

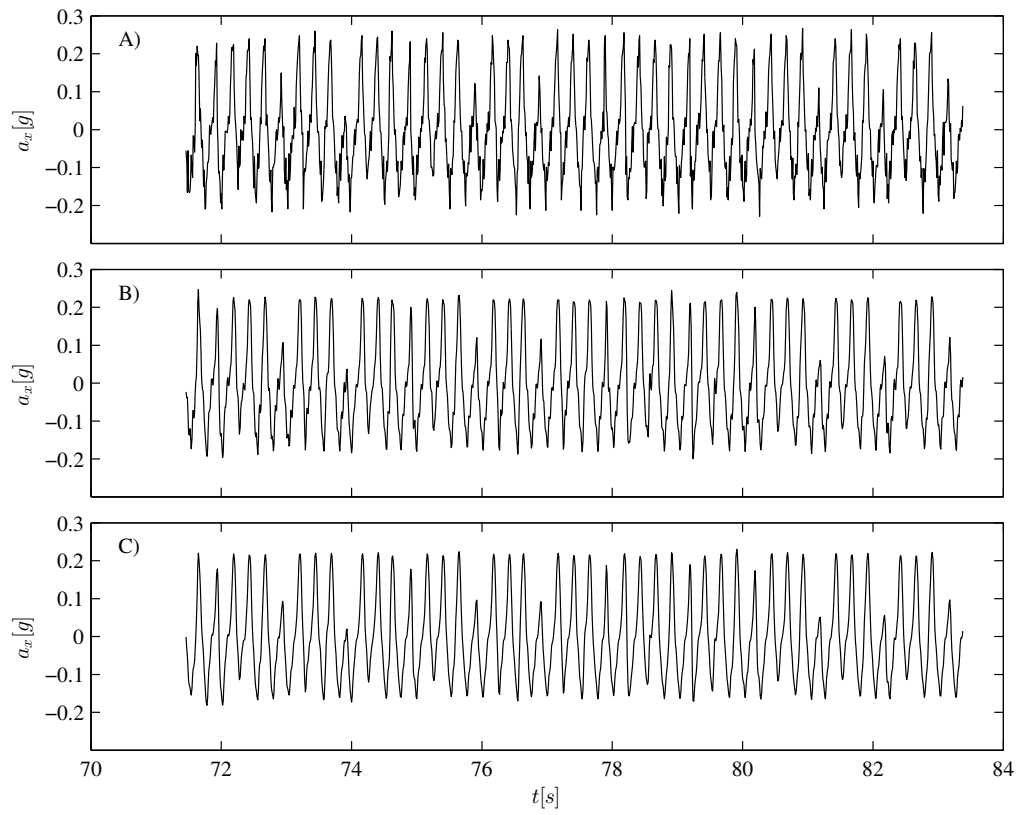


Figura E.4: Series de aceleración en  $x$  para  $\omega_f = 206[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2[mm]$   
 A) Original B) Con filtro *Butterworth* C) Con filtro *Butterworth* y media móvil promediando sobre 3 datos.

# Anexo F

## Series de aceleración medidas

Las siguientes figuras presentan las series de aceleración medidas para los experimentos mostrados en el capítulo de resultados. La escala vertical de las aceleraciones en  $x$  e  $y$  son iguales en cada gráfico para apreciar la magnitud de la oscilación inducida en  $y$  en comparación con la aceleración en  $x$ . La escala de la aceleración en  $z$  es la misma para todos los gráficos.

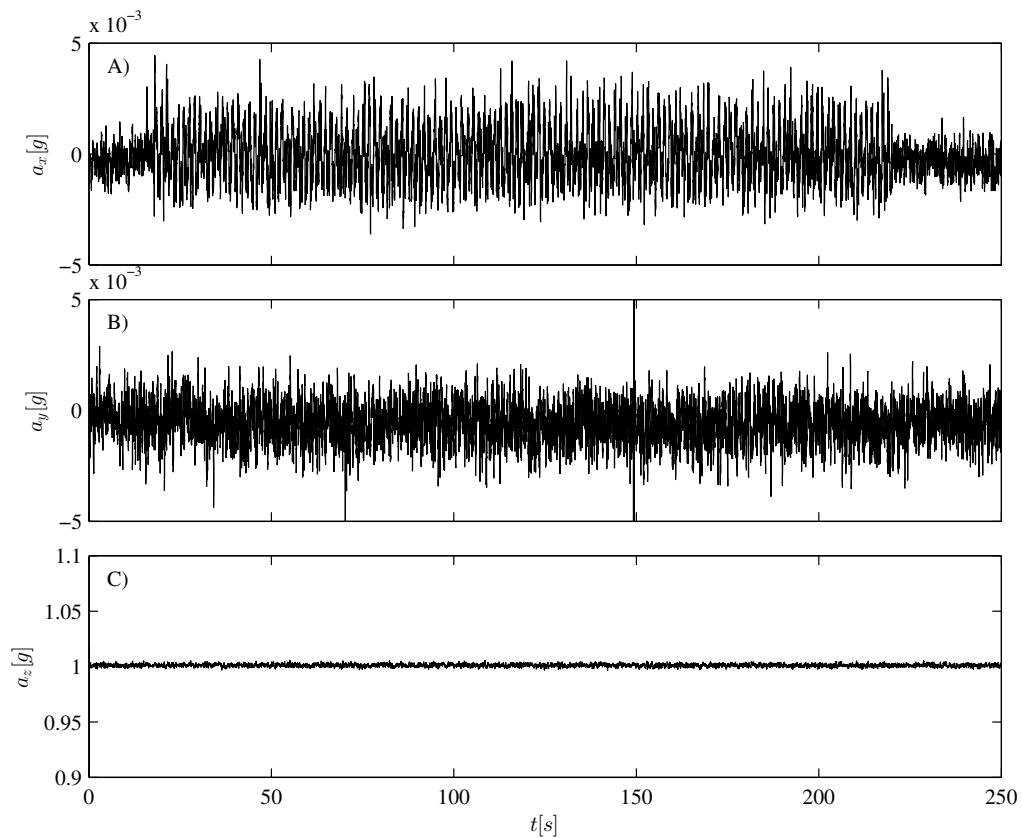


Figura F.1: Series de aceleración medidas en unidades de  $g$  para  $\omega_f = 40[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$  A)  $a_x$  B)  $a_y$  C)  $a_z$ .

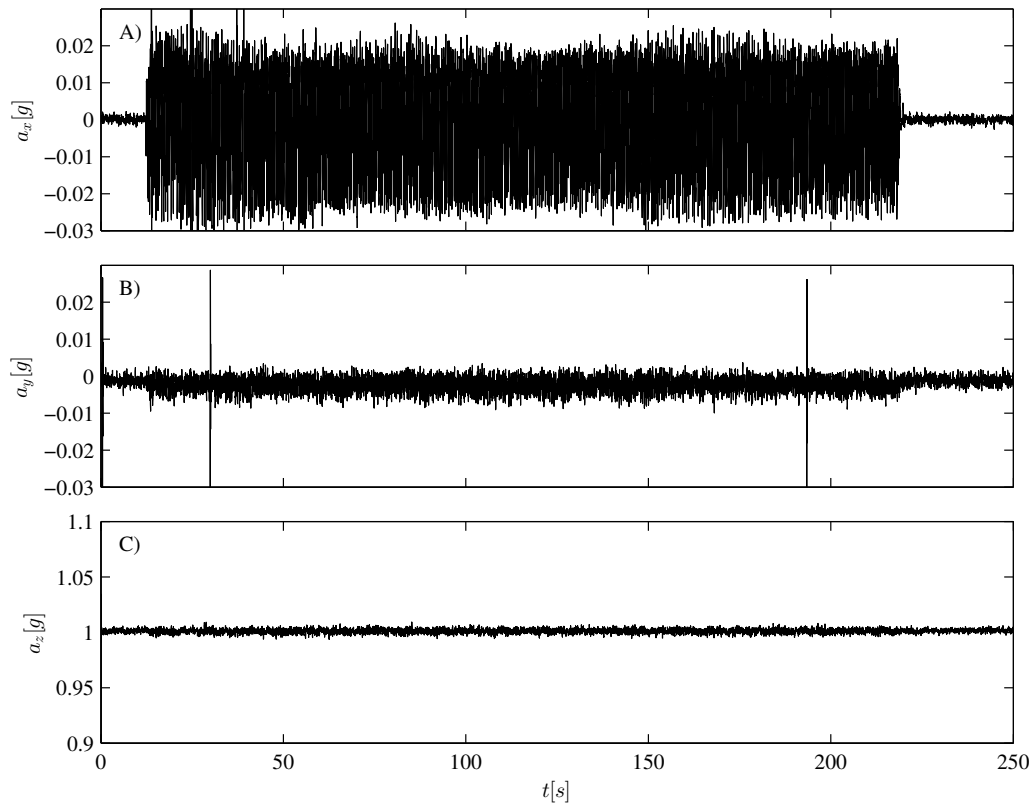


Figura F.2: Series de aceleración medidas en unidades de  $g$  para  $\omega_f = 116[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_1 = 1[mm]$  A)  $a_x$  B)  $a_y$  C)  $a_z$ .

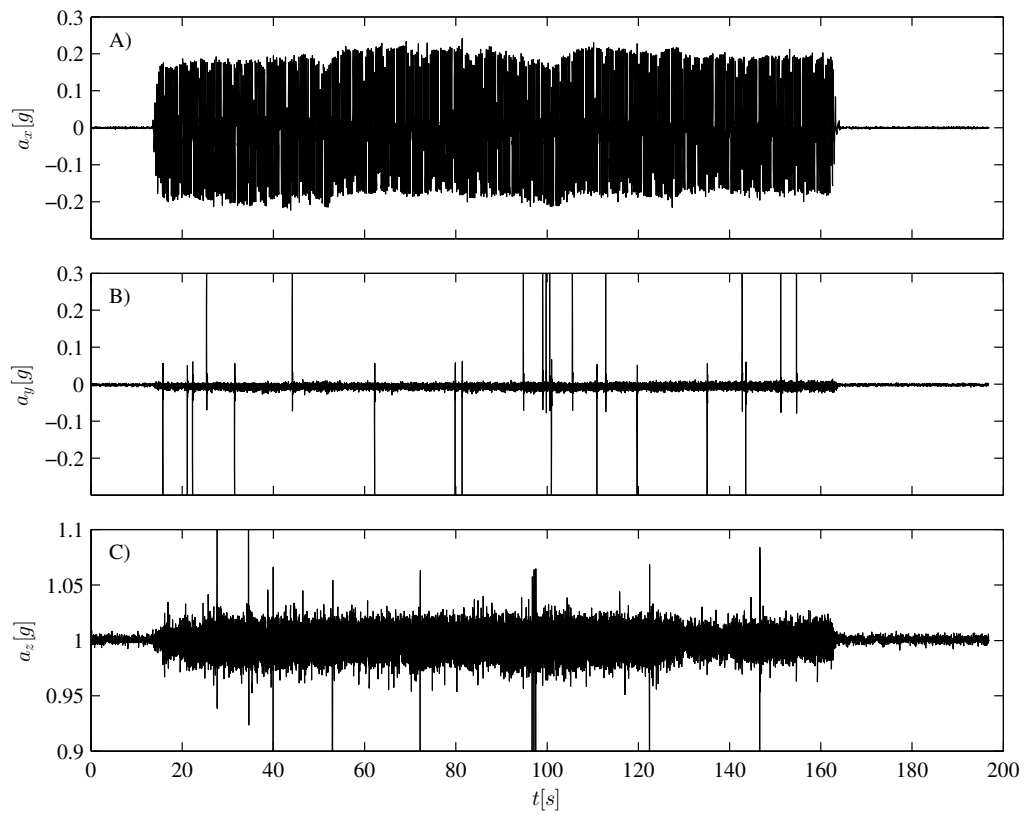


Figura F.3: Series de aceleración medidas en unidades de  $g$  para  $\omega_f = 182[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2[mm]$  A)  $a_x$  B)  $a_y$  C)  $a_z$ .

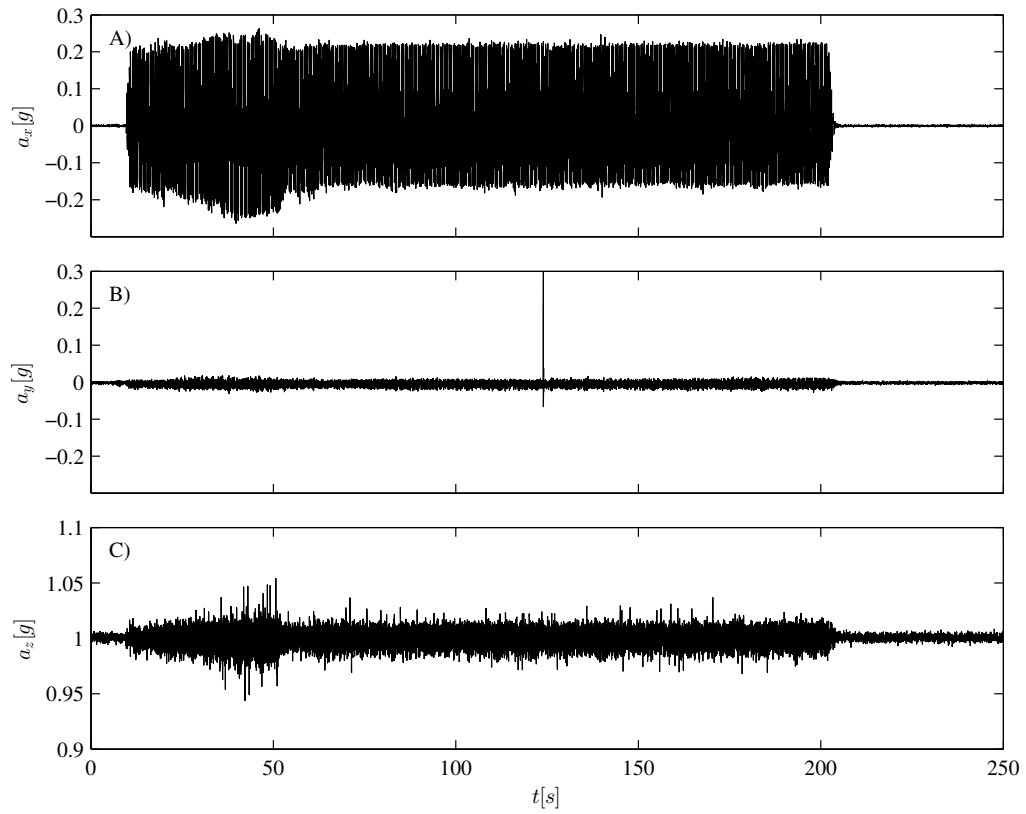


Figura F.4: Series de aceleración medidas en unidades de  $g$  para  $\omega_f = 206[RPM]$  y amplitud de oscilación  $a_2 = 2[mm]$  A)  $a_x$  B)  $a_y$  C)  $a_z$ .