UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO DE VARIANTES DEL PROBLEMA DE LA SECRETARIA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ÉMILIEN GARCIA

PROFESOR GUÍA:
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Fondecyt de Iniciación 11130266:
APPROXIMATION ALGORITHMS FOR INCREMENTAL SELECTION PROBLEMS

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: ÉMILIEN GARCIA
FECHA: 25/01/2016
PROF. GUÍA: SR. JOSÉ SOTO SAN MARTÍN

ESTUDIO DE VARIANTES DEL PROBLEMA DE LA SECRETARIA

El Problema de la Secretaria (SP) (por *Secretary Problem*), un problema con mucho interés desde los años 50, se trata de encontrar una manera de procesar las entrevistas de N candidatos a un puesto de secretaria para maximizar la probabilidad de contratar al mejor de ellos, bajo el supuesto que las entrevistas se realizan en orden aleatorio y que las decisiones tomadas: rechazar o aceptar, son irrevocables. Esto permite modelar directamente la versión discreta del problema. También se puede considerar una versión contínua con una infinidad de candidatos, suponiendo que los instantes de entrevista son tiempos aleatorios uniformes sobre el intervalo $[0, 1]$. Este problema y sus variantes tienen muchas aplicaciones. Esta memoria se enfoca en el estudio de la variante llamada Problema de la Secretaria con Restricciones de Tiempo (TCSP).

En la formulación discreta del (TCSP) se rechazan k candidatos y luego se quiere contratar al mejor de los $N-k$ que quedan, mientras que en su formulación contínua se rechazan todos los candidatos entrevistados antes de un tiempo T y luego se quiere contratar al mejor de los candidatos entrevistados después del tiempo T. En ambos casos los candidatos rechazados al principio forman un sampleo, y se puede utilizar la información acumulada en este sampleo inicial para mejorar la toma de decisión durante la fase de aceptación que sigue.

Después de familiarizarse con esta variante, se demuestran propiedades que cumple la regla óptima que resuelve el (TCSP) discreto. Basándose en esto, se estudia la siguiente estrategia para el caso contínuo. Se selecciona una sucesión creciente de constantes absolutas $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subseteq [0, 1]$ o tiempos barreras, independientes del tiempo T del sampleo. El proceso de selección se realiza del siguiente modo: sólo se acepta un candidato entrevistado entre los tiempos T_i y T_{i+1} si es mejor que todos los ya entrevistado después del tiempo T y mejor que el i-ésimo mejor del sampleo inicial. Se encuentran fórmulas explícitas para calcular dichas barreras. La regla óptima para resolver el (TCSP) discreto tiene una forma similar, donde en vez de tiempos barreras, se usan candidatos barreras. Se comprueba que a medida que N tiende a infinito, las razones entre la posición del candidato barrera i-ésimo y el número de candidatos tienden al valor encontrado para los tiempos barreras en el caso contínuo.

Finalmente, se estudia una variante del (TCSP) en la cual el empleador sólo puede recordar un candidato del periodo del sampleo (no necesariamente el mejor) y al mejor candidato entrevistado luego del sampleo. Se deduce en el caso discreto la forma de la regla óptima en la situación donde el algoritmo guarda el i-ésimo mejor candidato de la zona sampleada. Esta regla interpretada en el caso contínuo consiste en: rechazar a todos los candidatos hasta un tiempo $T_1 \geq T$, luego aceptar un candidato entrevistado entre los tiempos T_1 y $T_0 \geq T_1$ si es mejor que ambos miembros en memoria, y luego si no se aceptó a nadie, aceptar a un candidato entrevistado después del tiempo T_0 solamente si es mejor que el mejor entrevistado después del tiempo T. Se encuentran fórmulas explícitas para las barreras T_1 y T_0 como función de T y del rango i del candidato del sampleo guardado en memoria.

A mi familia y todos mis amigos.
La posibilidad de realizar un sueño
es lo que hace que la vida sea interesante.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer fuertemente al profesor José Soto, mi profesor guía de memoria. Fue el profesor quién me enseñó durante cada semestre de mis dos años, un profesor muy atento a todas las dudas de sus alumnos y quién no duda tomarse el tiempo de explicar bien las cosas hasta que se entienda. Estuvo muy informado de lo todo que tenía que hacer durante esta memoria, anticipando los plazos y las obligaciones de la memoria, y me hizo ahorrar mucho tiempo muy valioso al momento de redactar y anticipar las vacaciones de verano. Incluso me obtuvo una beca para la memoria que ni siquiera pensaba poder obtener. Siempre tuvo mucha fe en mi, hasta pedirme ser su auxiliar de Combinatoria por un semestre, lo que fue una experiencia tan interesante como valiosa. Muchas gracias profe, por estos dos años en su compañía.

Agradezco a los profesores Servet Martínez y Martín Matamala, quienes aceptaron ser profesores de mi comisión sin ninguna complicación y me enseñaron materias que me interesaron mucho (supuestamente porque la enseñaron de manera inteligente e interesante), así como todos los demás profesores que me enseñaron ramos durante estos dos años. Quiero agradecer también al profesor Aris Daniilidis, nuevo Jefe Docente del DIM lleno de alegría, a quién le encantaba poder practicar su francés conmigo, y el placer era compartido.

Quiero agradecer profundamente a Viviana, la Coordinadora de Relaciones Internacionales, quién siempre fue de gran ayuda durante estos dos años, también siendo muy alegre en cualquier situación. Me ayudó mucho, e incluso cuando tuve un par de problemas de salud. ¡Muchas gracias a ti, te pasaste!

Agradezco a Francisco, mi compañero de infortunio de todos los ramos, con quién compartí muchas cosas, tanto buenas como más complicadas en el DIM, entre tareas, informes y estudio de controles. Afortunadamente, el completo semanal era una de las tradiciones que nos ayudó a seguir avanzando. También tuvo la tarea muy complicada de traducirme un montón de palabras en Chileno, con más o menos éxito según las palabras, y me ayudó demasiado a revisar la presente memoria. ¡Muchas gracias a ti!

No quiero olvidar agradecer a todos mis compañeros del DIM, que me acojeron con mucho cariño y entusiasmo. ¡Muchas gracias a todos por su sencillez y su generosidad! Tampoco quiero olvidar agradecer a mis amigos en Santiago (con mención especial a Nina), que me ayudaron a vivir mucho mejor la lejanía a Francia. Quiero terminar agradeciendo a mi familia y mis amigos en Francia, que siempre supieron aconsejarme bien y apoyarme en todas mis elecciones, incluso la de ir a exiliarme a más de 11.000km de distancia de ellos (con mención especial a mis padres, Maximilien, Péné y Benoît). ¡Muchas gracias a todos, les amo!

Tabla de Contenido

Índice de Ilustraciones

Introducción

El Problema de la Secretaria, o (SP) por sus siglas en inglés *Secretary Problem*, es un problema que fue planteado formalmente por primera vez a finales de los años 50. Ferguson [1] cuenta la historia del problema, reflejando el interés histórico del (SP). Su versión tradicional se puede presentar como sigue.

Consideremos un empleador que quiera contratar a una nueva secretaria. Redacta un anuncio y lo publica, con el fin de contratar al mejor de los candidatos que vengan a postular. Se supone que los postulantes se pueden ordenar estrictamente entre ellos, así que uno de ellos es el mejor de todos, otro es el segundo mejor de todos, etc., pero este orden es desconocido para el empleador quien decide encargarse él mismo de las entrevistas una a una en un orden aleatorio. Después de entrevistar a cada candidato, el empleador le dice sin esperar si lo contrata o no. Para esto, puede basarse en la entrevistas que ya hizo para tomar su decisión. También puede usar el número de entrevistas que ya realizó, dado que conoce el número de postulantes. Finalmente, si elige a algún candidato, no va a entrevistar a nadie más, y si rechaza a alguién, nunca más lo podrá contratar. En este contexto, el objetivo del empleador es maximizar la probabilidad de contratar al mejor de los candidatos.

Hay dos formas de plantear el (SP): una forma discreta con un número finito de candidatos, y una forma contínua con un número infinito (numerable) de candidatos. Después de presentar las principales variantes del (SP) y de definir notaciones de uso general, se plantearán ambas formas del (SP) en esta introducción, antes de abordar la estructura general de esta memoria.

0.1. Historia y Motivación

El (SP) es un problema muy famoso de los años 1950-60, que ha sido estudiado por muchas personas a través de distintos modelamientos. Lindley [2] y Beckmann [3] lo estudiaron via programación dinámica con el fin de encontrar estrategias óptimas para resolverlo. También se puede modelar via Procesos de Markov, lo que estudió Dynkin [4].

Las variantes del (SP) tienen muchas aplicaciones, por ejemplo en ventas en línea. En la literatura se han estudiado muchísimas variantes del (SP). A continuación damos una lista no exhaustiva de éstas:

1. Cambiando el objetivo del problema:

   En vez de querer maximizar la probabilidad de contratar al mejor de todos los candidatos, el empleador puede desear alcanzar otros objetivos. Por ejemplo, se puede minimizar el rango global esperado del candidato contratado; Chow, Moriguti, Robbins y Samuels [5] estudiaron esta variante en el caso finito y encontraron una regla de selección para la cual el rango global esperado tiende a un valor cercano a 3,8695 cuando el número de candidatos N tiende a infinito. Entre otros ejemplos, se puede desear maximizar la probabilidad de elegir uno de los k mejores candidatos [6], o también maximizar la probabilidad de elegir al segundo mejor candidato (conocida como la *Postdoc Variant of the Secretary Problem* [7]).

2. El *Full-Information Secretary Problem* (FISP):

   Con las mismas hipótesis que el (SP), se supone además que los candidatos son enteros positivos y que en cada entrevista uno se entera del valor del entero. Más aún, se conoce la distribución de probabilidad que siguen estos enteros aleatorios así como los parámetros de la distribución. Gilbert y Mosteller [8] resolvieron este caso y encontraron un valor del juego que tiende a un valor cercano a 0,5802 para N grande. Se usará entre otros este resultado en los estudios ulteriores.

3. El *Partial Information Secretary Problem* (PISP):

   Ésta es una variante intermedia entre el (SP) y el (FISP). Con las mismas hipótesis que el (SP), se supone además que los candidatos son enteros positivos y que en cada entrevista uno se entera del valor del entero. Más aún, se conoce la distribución de probabilidad que siguen estos enteros aleatorios, pero no se conocen todos los parámetros de la distribución. Esta variante ha sido estudiada por Petruccelli [9].

4. El *Finite Memory Secretary Problem* (FMSP):

   Con las mismas hipótesis que el (SP), ahora el empleador no puede acordarse de todos los candidatos que ya entrevistó sino solamente un número finito. Después de cada entrevista, tiene que elegir entre (1) contratar el candidato, (2) rechazarlo simplemente y (3) rechazarlo guardándolo en memoria. Smith y Deely [10] estudiaron esta variante.

5. El *Multiple-Choice Secretary Problem* (MCSP):

   En vez de elegir un único candidato, el empleador elige aquí un conjunto de candidatos; de nuevo, también se puede cambiar la definición de ganar, lo que crea nuevas variantes más tal como el *Knapsack Secretary Problem* (KSP) y el *Matroid Secretary Problem* (MSP). Kleinberg estudió esta familia de variantes [11], así como el (KSP) junto con Babaioff, Immorlica y Kempe [12]. En los diez últimos años, el (MSP) ha sido estudiado extensamente. Para una visión amplia de los últimos avances en este problema, recomendamos el artículo de Dinitz [13].

6. El *Secretary Problem with Interview Cost* (SPIC):

   Además de todas las hipótesis del (SP) tradicional, se supone que a cada candidato se le asigna un valor (positivo) y que cada entrevista tiene un costo (negativo) fijo. El objetivo sería entonces minimizar el costo total de la serie de entrevistas, es decir el valor del candidato contratado quitando los costos de las entrevistas realizadas. Bartoszynski y Govindarajulu [14] estudiaron esta variante.

0.2. Notaciones de uso general

En esta sección se describen notaciones usadas en todos los capítulos siguientes.

Se denotarán por $\mathbb{N}$ al conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$ de los enteros naturales y por $\mathbb{N}^*$ al conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ de los enteros naturales no nulos. Para $N \in \mathbb{N}^*$, el conjunto $\{1, \dots, N\}$ se escribirá $[N]$. El cardinal de un conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ se denotará por $\mathrm{Card}(X)$, por lo que para $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}([N]) = N$. Para $N \in \mathbb{N}^*$, el conjunto de las permutaciones de los números de $[N]$ se escribirá Σ_N.

Adicionalmente, necesitaremos algunas notaciones combinatoriales. En particular, para $k \in \mathbb{N}^*$ e $i \in [k]$, se denotarán el factorial decreciente de k en i y el coeficiente binomial de k sobre i respectivamente por:

$$k^{\underline{i}} := k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-(i-1)) = \frac{k!}{(k-i)!}, \qquad \binom{k}{i} := \frac{k^{\underline{i}}}{i!}.$$

0.3. (SP) discreto

En esta sección se define la formulación discreta del (SP) y se presenta la forma de la regla óptima de elección.

0.3.1. Definiciones

Sea X el conjunto de candidatos donde $\mathrm{Card}(X) = N \in \mathbb{N}^*$ con N conocido, y donde $(X, \prec)$ es totalmente ordenado.

Definición 0.1 ***Mejor/Peor***

*Sean $x, y \in X$, se dice que x es **mejor** que y si $x \succ y$, y que x es **peor** que y si $x \prec y$.*

Definición 0.2 ***Rango de un candidato***

*Sea $x \in Y \subseteq X$, se define $\rho_Y(x) := Card(\{y \in Y | x \prec y\}) + 1$ como el **rango parcial** de x en Y; si $Y = X$, se dice que $\rho_X(x)$ es el **rango global** de x en X.*

*Además, si $i \in [Card(Y)]$, se dice que x es el i**-ésimo mejor** elemento de Y si $\rho_Y(x) = i$ en Y; si $i = 1$, se dice que x es **el mejor** de Y.*

Definición 0.3 ***Orden de llegada***

Un ***orden de llegada*** *es una permutación $\pi \in \Sigma_N$ que interpretamos como sigue: se identifica X con $[N]$ donde llamamos $j \in [N]$ al j-ésimo candidato entrevistado de X. Bajo esta identificación, para $i \in [N]$, el $\pi(i)$-ésimo candidato entrevistado es el i-ésimo mejor candidato de X.*

Ejemplo: Dada $\pi \in \Sigma_5$, se identifica X con $[5]$ donde 1 es el primer candidato entrevistado, 2 el segundo entrevistado, etc. Supongamos que X tiene asociado el orden $\prec$ como sigue:

$$4 \succ 1 \succ 5 \succ 3 \succ 2,$$

es decir 4 es el mejor candidato de X, 1 el segundo mejor candidato de X, etc. Entonces $\pi(1) = 4$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 5$, $\pi(4) = 3$ y $\pi(5) = 2$.

Observación 1) El orden de llegada se elige uniformemente en Σ_N, es decir que $\pi \in \Sigma_N$ se elige con probabilidad $\frac{1}{N!}$.

2) La definición de rango parcial aquí está generalizada a cualquier subconjunto de $[N]$. En los estudios que siguen, solamente se considerarán subconjuntos Y de X de la forma $[m] = \{1, \ldots, m\}$ para $m \in [N]$. Se nota también que dado el orden de llegada π, para todo $x \in X$, $\rho_X(x) = \pi^{-1}(x)$.

Definición 0.4 ***Récord***

Sea $x \in Y \subseteq X = [N]$. A x se le llama ***récord parcial en*** *Y si su rango parcial en Y es 1; si $Y = X$, x se denomina* ***récord global*** *en X.*

Definición 0.5 ***Valor del juego, Ganar***

Se define ***ganar*** *como el evento "contratar al mejor candidato de X", es decir "contratar al candidato de X con rango global 1". Se define el* ***valor del juego*** *como la probabilidad del evento "ganar".*

0.3.2. Formulación y estrategia óptima

Con las definiciones anteriores, se puede formalizar matemáticamente el (SP) discreto:

Sean X el conjunto de candidatos, $N \in \mathbb{N}^*$ fijo el número de candidatos. Recordemos que dado un orden de llegada π, identificamos X con $[N]$ donde $j \in X$ es el j-ésimo candidato entrevistado. Al entrevistar al candidato m, sólo se puede deducir su rango parcial en $[m]$ antes de decidir si aceptarlo o no. Si se acepta, el juego termina y se gana si m resulta ser el récord global; si se rechaza, se sigue con la entrevista siguiente. Con esto se quiere encontrar una estrategia óptima que maximice la probabilidad de ganar dada por:

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) := \frac{1}{N!} \cdot \sum_{\pi \in \Sigma_N} \mathbb{P}(\text{ganar}|\pi) = \mathbb{E}_\pi(\text{ganar}|\pi).$$

Teorema 0.6 *Existe $k := k(N) \in [N]$ tal que la regla siguiente es óptima para resolver el (SP) discreto:*

1. *Rechazar los k primeros candidatos entrevistados,*
2. *Contratar al primero de los siguientes que tenga rango parcial 1 dentro del conjunto de los entrevistados, i.e. el primero que sea mejor que el mejor de los k rechazados.*

Más aún, para este k óptimo, $\frac{k}{N} \to \frac{1}{e}$ cuando $N \to \infty$.

Demostración. Existen varias demostraciones de este teorema en la literarura. Lindley [2] realizó en 1961 una demostración por programación dinámica, luego simplificada por Beckmann [3] en 1990. Por su lado, Dynkin [4] demostró en 1963 el mismo resultado via una formulación por procesos de Markov. Aquí recordamos la demostración via programación dinámica hecha por Beckmann.

Para todo $m \in [N]$ se define el evento $R_m :=$ "los $m-1$ primeros candidatos han sido rechazados". De aquí definamos las siguientes probabilidades para todo $m \in [N-1]$:

$$\begin{aligned} v_m &:= \mathbb{P}(\text{ganar}|\ R_m,\ \text{se rechaza el candidato } m), \\ u_m &:= \mathbb{P}(\text{ganar}|\ R_m,\ \text{el candidato } m \text{ es récord parcial}). \end{aligned}$$

Se observa además que $v_N = 0$ y $u_N = 1$. Con estas definiciones, queremos encontrar una forma de calcular ambas cantidades para todo m hasta encontrar el valor del juego, que es u_1 (ya que el primer candidato será récord parcial, y queremos tomar la mejor decisión entre aceptarlo o rechazarlo).

Podemos deducir que bajo la regla óptima, se tienen los siguientes resultados:

1. Si se rechaza el candidato m, el candidato siguiente $m+1$ puede ser o no récord parcial:
   - La probabilidad que $m+1$ sea récord parcial en $[m+1]$ es $\frac{1}{m+1}$, y la probabilidad de ganar dado este evento es por definición u_{m+1}.
   - La probabilidad que $m+1$ no sea récord parcial en $[m+1]$ es $\frac{m}{m+1}$, pero como no es récord parcial ganamos con probabilidad 0 si lo aceptamos, por lo que se debe rechazar el candidato $m+1$ y la probabilidad de ganar dado que lo rechazamos es por definición v_{m+1}.

   Esto nos entrega la siguiente recurrencia para todo $m \in [N-1]$:

   $$v_m = \frac{m}{m+1} \cdot v_{m+1} + \frac{1}{m+1} \cdot u_{m+1}.$$

2. Si el candidato m es récord parcial en $[m]$, tenemos que decidir si aceptarlo o no:
   - Si lo aceptamos, ganamos si m es el récord global. Esto ocurre si el mejor de los N candidatos ya estuvo entrevistado dentro de los m primeros, es decir con probabilidad $\frac{m}{N}$.
   - Si lo rechazamos, ganamos por definición con probabilidad v_m.

Esto permite deducir el valor de u_m para todo $m \in [N-1]$:

$$u_m = \text{máx}\left\{\frac{m}{N}, v_m\right\}.$$

Procesando por inducción inversa sobre m, se puede llegar al resultado siguiente para v_m:

$$v_m = \frac{m}{N} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right) = \frac{m}{N} \cdot \sum_{i=m}^{N-1} \frac{1}{i}.$$

Luego $u_m = \dfrac{m}{N} \cdot \text{máx}\{1, \displaystyle\sum_{i=m}^{N-1} \frac{1}{i}\}$. Sea $m^* \in [N]$ tal que:

$$\sum_{i=m^*}^{N-1} \frac{1}{i} \leq 1 < \sum_{i=m^*-1}^{N-1} \frac{1}{i},$$

por lo que para todo $m \in [N]$:

$$u_m = \begin{cases} v_m & \text{si } m \leq m^* - 1. \\ \frac{m}{N} & \text{si } m \geq m^*. \end{cases}$$

Por lo tanto, definiendo $k := m^* - 1$, la regla óptima recomienda seguir rechazando todos los candidatos hasta el k-ésimo, y luego de ellos contratar al primer récord parcial.

Para encontrar el límite cuando N tiende a infinito, se aproxima $\displaystyle\sum_{i=m^*}^{N-1} \frac{1}{i}$ por $\displaystyle\int_{m^*}^{N} \frac{dt}{t}$ y se busca m^* tal que la integral vale 1, esto es $\ln(N) - \ln(m^*) = 1$, o equivalentemente $\frac{m^*}{N} = \frac{1}{e}$. $\square$

Observación Este resultado quiere decir que la estrategía óptima recomienda rechazar sistemáticamente a una fracción de los candidatos al principio, y esta proporción tiende a $\frac{1}{e}$ para grandes valores de N.

0.4. (SP) contínuo

En esta sección se define la formulación contínua del (SP) y se ve cuál es la regla óptima de elección.

0.4.1. Definiciones

Sea X el conjunto de candidatos. Como hay una infinidad numerable de candidatos, se identifica X con el conjunto $\mathbb{N}^*$. A X se le adjunta la relación de orden $\prec$ donde para todos $m, n \in X$, $m \prec n \Leftrightarrow m > n$. Cada uno de los candidatos se entrevista en un tiempo $t \in [0, 1]$.

Definición 0.7 ***Tiempos de entrevista***

Los ***tiempos de entrevista*** $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ *se definen via variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.'s i.i.d.) que siguen una ley uniforme sobre el segmento* $[0, 1]$*, es decir* $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$, $t_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Definición 0.8 ***Orden de llegada***

Un ***orden de llegada*** *es una inyección* $\pi : \mathbb{N}^* \to [0, 1]$ *donde* $\pi(i) = t_i$.

Observación Las nociones de orden de llegada y de tiempos de entrevista son muy relacionadas; de hecho, un orden de llegada define los tiempos de entrevista para cada candidato. Además, como la probabilidad del evento "existen $i \neq j$ tales que $t_i = t_j$" es 0, supondremos para nuestro estudio que todos son distintos, esto es que el orden de llegada es inyectivo.

Definición 0.9 ***Rango de un candidato***

Sea $x \in Y \subseteq X$ $(= \mathbb{N}^*)$, *el* ***rango parcial*** *de* x *en* Y *es* $\rho_Y(x) := Card(\{y \in Y | x \prec y\}) + 1$; *si* $Y = X$, *se dice que* $\rho_X(x)$ *es el* ***rango global*** *de* x *en* X *(notar que para todo* $Y \subseteq X$ *y todo* $x \in Y$, $\rho_Y(x)$ *siempre es finito).*

Además, si $i \leq Card(Y)$, *se dice que* x *es el* ***i-ésimo mejor*** *elemento de* Y *si* $\rho_Y(x) = i$ *en* Y*; si* $i = 1$, *se dice que* x *es* ***el mejor*** *de* Y.

Observación Como se identifica X con $\mathbb{N}^*$, el rango global de $x \in X$ siempre está dado por $\rho_X(x) = x$, mientras que para el rango parcial de $x \in Y \subseteq X$ sólo se puede deducir $\rho_Y(x) \leq x$. Esto es una **diferencia fundamental** entre los modelamientos discreto y contínuo: dado un orden de llegada, se identifica el candidato $x \in X$ con $i \in [N]$ en **caso discreto** si x **es el** i**-ésimo entrevistado**, mientras que se identifica con $i \in \mathbb{N}^*$ en **caso contínuo** si $\rho_X(x) = i$.

Definición 0.10 ***Récord***

Sea $x \in Y \subseteq X$. *A* x *se le llama* ***récord parcial*** *si su rango parcial en* Y *es 1; si* $Y = X$, x *se denomina* ***récord global*** *en* X.

Definición 0.11 ***Valor del juego, Ganar***

*Se define **ganar** como el evento "contratar al mejor candidato de X", es decir "contratar al candidato de X con rango global 1". Se define el **valor del juego** como la probabilidad del evento "ganar".*

0.4.2. Formulación y estrategia óptima

Con las definiciones anteriores, se puede formalizar matemáticamente el (SP) contínuo:

Sea $[0,1]$ el conjunto de tiempos de entrevistas posibles para los candidatos (considerados como enteros en $\mathbb{N}^*$). Dado un orden de llegada $\pi : \mathbb{N}^* \to [0,1]$ (inyectivo), obtenemos los tiempos de llegada $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ de los candidatos. Ignoremos por un momento el hecho que no existe manera de definir quién es el "primer" candidato entrevistado. Como la probabilidad que dos entrevistas ocurran al mismo tiempo es nula, supondremos que esto no ocurre. Notemos que si entrevistamos a un candidato en t_i, sólo se puede deducir su rango parcial dentro de los ya entrevistados en $[0,t_i]$ antes de decidir si aceptarlo o no. Si se acepta, el juego termina y se gana si $i=1$, i.e. si el candidato era el récord global (notar que el algoritmo no puede determinar i). Con esto se quiere encontrar una estrategia óptima que maximice la probabilidad de ganar dada por:

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) := \mathbb{E}_{\pi:\mathbb{N}^*\longrightarrow[0,1]}(\text{ganar}|\pi).$$

Observación Dado que nos interesa maximizar la probabilidad de ganar, podemos eliminar cualquier estrategia que acepte un candidato que no es récord parcial. Si bien es cierto que no existe la noción de "siguiente candidato", es posible realizar este proceso ya que para cualquier tiempo $t>0$, podemos determinar el mejor candidato c visto en $[0,t]$. Después de t, hay solamente una cantidad finita de candidatos mejores que c en los cuales el proceso puede terminar.

De manera análoga a la regla óptima encontrada para el (SP) discreto, definimos para $T\in(0,1)$ la siguiente regla para el caso contínuo:

1. Rechazar todos los candidatos entrevistados antes del tiempo T,
2. Contratar al primer récord parcial entrevistado después del tiempo T.

Teorema 0.12 *Existe un $T \in (0,1)$ óptimo que maximiza el valor del juego asociado a la regla anterior.*

Demostración. Damos dos formas de calcular el valor del juego:

Forma 1 - Distingamos los casos posibles aplicando la regla anterior para cualquier $T \in (0,1)$:

- Si $t_1 \in [0,T]$: **se pierde**.
- Si $t_1 \in [T,1]$: sea $k \geq 2$ el rango global en $[0,1]$ del mejor candidato entrevistado en $[0,T]$. Esta configuración tiene probabilidad $(1-T)^{k-1} \cdot T$ de ocurrir. Luego **se gana** si y solo si todos los candidatos cuyo rango global está entre 2 y $k-1$ se entrevistan después del tiempo t_1, y dada la configuración, esto tiene probabilidad $\frac{1}{k-1}$ de ocurrir.

Luego, sumando sobre todos los valores $k \geq 2$ del rango global en X del mejor entrevistado en $[0,T]$, el valor del juego es:

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \sum_{k=2}^{\infty} (1-T)^{k-1} \cdot T \cdot \frac{1}{k-1} = T \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-T)^k}{k} = -T \cdot \ln(T).$$

Forma 2 - A t_1 fijo, la probabilidad de ganar corresponde a la probabilidad que el mejor candidato entrevistado en $[0,t_1)$ haya sido entrevistado antes del tiempo T, lo que tiene probabilidad $\frac{T}{t_1}$. Luego, como se pierde si $t_1 \in [0,T]$, queda integrar esta probabilidad sobre todos los valores de t_1 mayores que T (donde dt_1 es la densidad de probabilidad que t_1 tome un valor específico en el intervalo $[0,1]$), lo que da:

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \int_{t_1=T}^{1} \frac{T}{t_1} dt_1 = -T \cdot \ln(T).$$

La función $-T\ln(T)$ es positiva, cóncava, y se anula en 0 y 1, por lo que se maximiza en algún T^* que anula su derivada. Derivando e igualando a 0, se obtiene:

$$-\ln(T^*) - 1 = 0 \Leftrightarrow T^* = \frac{1}{e},$$

y el valor del juego en estas condiciones es entonces $-\frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$. □

Observación Como se vio en el caso discreto para N candidatos, la regla óptima recomienda rechazar a una fracción de los primeros candidatos antes de analizar los rangos parciales de los candidatos siguientes, y la fracción rechazada tiende a $\frac{1}{e}$ para N grande. Por otro lado, la regla óptima en el caso contínuo recomienda rechazar a todos los candidatos entrevistados antes del tiempo $T = \frac{1}{e}$ y luego analizar los rangos parciales de los siguientes candidatos. En este sentido se puede decir que **el caso contínuo se puede interpretar como el proceso límite del caso discreto para** $N \to \infty$.

0.5. Nuestro trabajo

Ahora que se presentaron los resultados fundamentales sobre el (SP) tradicional, se pueden introducir los objetivos de la presente memoria.

En el primer capítulo se presenta la variante estudiada, el *Problema de la Secretaria con Restricciones Temporales* (TCSP) (por sus siglas en inglés *Time Constrained Secretary Problem*). Se plantea el problema en ambas formas discreta y contínua. Como primer acercamiento a esta variante, se estudia la eficiencia de reglas de elección sencillas que denominamos reglas de barrera.

En el segundo capítulo se buscan las propiedades de la regla óptima asociada al (TCSP). En un primer tiempo se buscan estas propiedades via una resolución por programación dinámica del problema en forma discreta. En un segundo tiempo se trata de extender las reglas óptimas discretas al caso contínuo. Además, se hace un estudio computacional del valor del juego asociado a estas extensiones con el fin de comparar los resultados obtenidos en ambas formulaciones discreta y contínua.

En el tercer capítulo se estudia una extensión del (TCSP) considerando una capacidad finita de memoria. Es decir, en cada momento el empleador sólo puede recordar un número finito de candidatos. Se aborda el caso cuando la memoria tiene tamaño 2 y se busca cuál candidato del sampleo guardar en memoria dependiendo del tamaño del sampleo. Primero se estudian los valores del juego óptimos asociados a cada regla posible y se encuentra la forma óptima de las reglas de selección via una resolución por programación dinámica en forma discreta. Luego se trata de estudiar las mismas reglas con el modelo contínuo para abordar la forma de las reglas optimales cuando el número de candidatos tiende a infinito. Finalmente se concluye sobre los resultados teóricos y numéricos obtenidos a lo largo de la memoria.

Precisemos que esta memoria es el fruto de una memoria corta. Por lo tanto, el estudio se enfoca sobre todo en algunos aspectos específicos. En particular, en el segundo capítulo, el objetivo es encontrar la forma de la regla óptima y deducir valores númericos de sus tiempos de barrera; queda abierto encontrar el valor límite del juego cuando el número de candidatos tiende a infinito ya que sólo se conjetura este valor. En el tercer capítulo, el objetivo es encontrar la forma óptima de las reglas de selección y extender estos resultados al caso contínuo; para el caso discreto, quedan dos formas posibles de regla óptima, por lo que al extender estas reglas al caso contínuo se estudian ambas, pero queda abierto probar formalmente cuál es mejor que la otra, aunque una parezca intuitivamente mejor que la otra.

Capítulo 1

El (SP) con Restricciones Temporales

En esta memoria se propone el estudio de una nueva variante del (SP): el *Problema de la Secretaria con Restricciones Temporales*, o (TCSP) por su nombre en inglés *Time Constrained Secretary Problem*. Esta variante se presenta de manera muy similar al problema inicial. La única diferencia reside en el hecho que se empieza rechazando un conjunto fijo de candidatos que forma un sampleo inicial (la definición formal del problema está explicada más adelante), y luego de este sampleo se quiere contratar al mejor candidato dentro de los que quedan. Nuevamente, el objetivo del empleador es maximizar la probabilidad de contratar al mejor de los candidatos post-sampleo.

Análogamente, hay dos formas de plantear el (TCSP): una forma discreta con un número finito de candidatos, y una forma contínua con un número infinito (numerable) de candidatos. En este capítulo se presentarán ambas formulaciones antes de estudiar el valor del juego cuando se usa una familia básica de reglas de barrera en el caso contínuo.

1.1. Presentación del (TCSP)

En esta sección se definen ambas formulaciones discreta y contínua del (TCSP), de forma análoga a lo hecho en introducción para el (SP).

1.1.1. (TCSP) discreto

Se fijan $N \in \mathbb{N}^*$ el número de candidatos y $k \in [N]$ el número de candidatos a ser rechazados en un comienzo. Se conservan al igual como para el (SP) las definiciones de orden de llegada, de rango parcial y rango global, con la misma relación de orden $\prec$ de antes. Se fija un orden de llegada $\pi \in \Sigma_N$, se identifica X con $[N]$ donde $j \in [N]$ es el elemento de X que se entrevista j-ésimo, y se define $X' := X \setminus [k] = \{k+1, \ldots, N\}$.

Definición 1.1 ***Sampleo***

*Dado un orden de llegada π, se denomina **sampleo** al conjunto de los k primeros candidatos entrevistados. Este conjunto se identifica con $[k]$.*

Definición 1.2 ***Récord***

*Sea $x \in Y \subseteq X'$. A x se le llama **récord parcial** si su rango parcial en Y es 1; si $Y = X'$, x se denomina **récord global** en X'.*

Observación 1) La definición de récord parcial aquí está generalizada a cualquier subconjunto de $[N] \setminus [k]$. En los estudios que siguen, solamente se considerarán subconjuntos Y de X de la forma $[m] \setminus [k] = \{k+1, \ldots, m\}$ para $m \in [N] \setminus [k]$.

2) Si bien la definición de récord global usa X' y no X, la definición de rango global se sigue usando X.

3) La diferencia con el problema (SP) reside en el hecho que ahora se busca al mejor después de entrevistar a los k primeros candidatos. Por lo tanto, solamente son interesantes los mejores elementos después de este k-ésimo, lo que se toma en cuenta al restringir la definición de récord parcial a $Y \subsetneq X'$ y de récord global a X', y no a todo X.

Definición 1.3 ***Valor del juego, Ganar***

*Se define **ganar** como el evento "contratar al mejor candidato de X'". Se define el **valor del juego** como la probabilidad de ganar.*

El objetivo en el (TCSP) discreto es maximizar la probabilidad de contratar al mejor de los $N - k$ candidatos que quedan después del sampleo inicial:

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) := \frac{1}{N!} \cdot \sum_{\pi \in \Sigma_N} \mathbb{P}(\text{ganar}|\pi) = \mathbb{E}_\pi(\text{ganar}|\pi).$$

Observación Se nota que la cantidad que maximizar es la misma que para el (SP). Sin embargo, hay que tener en cuenta que la definición de ganar en el (TCSP) es distinta ahora.

1.1.2. (TCSP) contínuo

Sea X el conjunto de candidatos identificado con $\mathbb{N}^*$, con la misma relación de orden total $\prec$ usada en la definición del (SP) contínuo, esto es $x \prec y$ si $\rho_X(x) > \rho_X(y)$, donde $\rho_X(x)$ es el rango global de x en X. Se conservan al igual como para el (SP) las definiciones de orden de llegada, de rango parcial y rango global, así como los tiempos de entrevista $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ de los candidatos. Se fijan además $T \in (0,1)$ un tiempo antes del cual no se elige a ningún candidato entrevistado, y un orden de llegada $\pi : \mathbb{N}^* \to [0,1]$ inyectivo donde cada $t_i := \pi(i)$ se escoge uniformemente al azar. Se elige inyectivo pues, como en introducción para el (SP) contínuo, la probabilidad que dos tiempos de entrevista sean iguales es nula.

Definición 1.4 ***Sampleo***

Se denomina ***sampleo*** *al conjunto de los candidatos entrevistados antes del tiempo T, candidatos que se rechazan cualquieras sean.*

Definición 1.5 ***Récord***

Sea x un candidato entrevistado en $t_x \in Y \subseteq (T,1]$. A x se le llama ***récord parcial*** *si su rango parcial dentro de los candidatos entrevistados en Y es 1; si $Y = (T,1]$, x se denomina* ***récord global*** *en $[T,1]$.*

Definición 1.6 ***Valor del juego, Ganar***

Se define ***ganar*** *como el evento "contratar al mejor candidato entrevistado en $(T,1]$". Se define el* ***valor del juego*** *como la probabilidad de ganar.*

El objetivo en el (TCSP) contínuo es maximizar la probabilidad siguiente:

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) := \mathbb{E}_{\pi:\mathbb{N}^* \longrightarrow [0,1]}(\text{ganar}|\pi).$$

Observación 1) Se nota que la cantidad que maximizar es la misma que para el (SP). De nuevo, hay que tener en cuenta que la definición de ganar en el (TCSP) es distinta.

2) Dado que nos interesa maximizar la probabilidad de ganar, podemos eliminar cualquier estrategia que acepte un candidato que no es récord parcial. Si bien es cierto que no existe la noción de "siguiente candidato", es posible realizar este proceso ya que para cualquier tiempo $t > T$, podemos determinar el mejor candidato c entrevistado en $(T,t]$. Después de t, hay sólo una cantidad finita de candidatos mejores que c en los cuales el proceso puede terminar.

1.2. Reglas de barrera básicas para el (TCSP) contínuo

En esta sección se hace un estudio preliminar para el problema (TCSP) contínuo. Para esto se estudia la eficiencia de una familia simple de algoritmos o reglas, denominadas *reglas de barrera.*

Definición 1.7 ***Regla de barrera***

A todo $i \in \mathbb{N}^*$ se le asocia la siguiente ***regla de barrera*** *$\mathcal{B}_i$, donde s_i denomina el i-ésimo mejor candidato entrevistado antes del tiempo T:*

1. *Rechazar a todo candidato con tiempo de entrevista menor a T,*
2. *Aceptar al primer candidato x con tiempo de entrevista $t \geq T$ cuyo rango parcial en $Y_t := \{x \in X | t_x \leq t\}$ sea mayor al rango parcial en Y_t de s_i.*

Se denotará $\mathbb{P}_i(T)$ a la probabilidad de ganar usando la regla de barrera $\mathcal{B}_i$.

En lo que sigue, se va a estudiar la probabilidad de ganar usando estas reglas para los primeros valores de $i \in \mathbb{N}^*$ y se encontrarán los valores óptimos de T que maximizan dicha probabilidad. Luego se estudiará el caso general para $i \in \mathbb{N}^*$.

Observación Al considerar la regla $\mathcal{B}_i$, se supone que hay al menos i candidatos en el sampleo inicial, dado que la probabilidad que haya un número finito de elementos en el sampleo es 0.

1.2.1. Regla de barrera $\mathcal{B}_1$

Proposición 1.8 *El valor del juego usando la regla de barrera $\mathcal{B}_1$ es $\mathbb{P}_1(T) = -T \cdot \ln(T)$.*

Demostración. Hagamos el análisis distinguiendo los casos.

- **Caso 1:** $t_1 \in [0, T]$
  En este caso no se acepta a nadie, dado que ningún candidato en $(T, 1]$ es mejor que $s_1 = 1$.
- **Caso 2:** $t_1 \in (T, 1]$
  Entonces el mejor global en X también es el mejor candidato entrevistado después del tiempo T, por lo que tenemos que elegirlo para ganar.
  Condicionemos en el evento "s_1 tiene rango global j" con $j \geq 2$ donde s_1 es el mejor elemento entrevistado en $[0, T]$. Ya que hay $j-1$ elementos mejores que s_1 entrevistados en $(T, 1]$, se ganará sólo si dentro de estos $j-1$ elementos, el primero que llega es el elemento máximo. Esto ocurre con probabilidad (condicional) $\frac{1}{j-1}$.
  Por otro lado, la probabilidad que s_1 tenga rango global j es igual a la que los $j-1$ elementos de mayor rango estén entrevistados en $(T, 1]$ y que el j-ésimo esté entrevistado en $[0, T]$. Esto ocurre con probabilidad $(1-T)^{j-1} \cdot T$.
  Queda finalmente por sumar sobre $j \geq 2$ ($j \neq 1$ ya que el mejor global no se entrevista en $[0, T]$) para obtener la probabilidad de ganar si $t_1 \in (T, 1]$:

$$\mathbb{P}_1(T) = 0 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{T \cdot (1-T)^{j-1}}{j-1} = T \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-T)^j}{j} = -T \cdot \ln(T). \quad \square$$

Observación En este caso se puede calcular sencillamente T_1^* el valor del T óptimo que maximiza esta probabilidad: $T_1^* = \frac{1}{e}$. El valor del juego asociado es $\mathbb{P}_1(T_1^*) = \frac{1}{e}$.

1.2.2. Regla de barrera $\mathcal{B}_2$

Aunque calcular el valor del juego asociado a la regla $\mathcal{B}_2$ no sea necesario para realizar el cálculo del valor del juego asociado a la regla $\mathcal{B}_i$ para $i \geq 2$, se realiza este estudio para notar la diferencia con el caso básico de la regla $\mathcal{B}_1$ y entender mejor lo que se realizará para el caso general.

Proposición 1.9 *El valor del juego usando la regla de barrera $\mathcal{B}_2$ es:*

$$\mathbb{P}_2(T) = T \cdot \mathbb{P}_1(T) + (T - T^2) = -T^2 \cdot \ln(T) + (T - T^2).$$

Demostración. Hagamos el análisis distinguiendo los casos.

- **Caso 1:** $t_1 \in [0, T]$

  Tenemos probabilidad T que esto ocurra. Luego consideremos el experimento virtual en el que ignoramos $s_1 = 1$ el mejor candidato del sampleo (y mejor candidato global) y lo sacamos del conjunto de todos los candidatos. Ganar corresponde a elegir al primer candidato entrevistado en $(T, 1]$ que sea mejor que s_2, el segundo mejor entrevistado en $[0, T]$; pero en el experimento virtual, al ignorar s_1, s_2 ahora es el mejor del sampleo. Por lo tanto, la probabilidad de ganar condicionada al evento "$s_1 = 1$" es $\mathbb{P}_1(T)$.

- **Caso 2:** $t_1 \in (T, 1]$

  Entonces el mejor global en X también es el mejor candidato entrevistado después del tiempo T, por lo que tenemos que elegirlo para ganar.
  Condicionemos en los eventos "s_1 tiene rango global j" y "s_2 tiene rango global k", donde $1 < j < k$. Ya que hay $k - 2$ candidatos entrevistados en $(T, 1]$ que son mejores que s_2, se ganará sólo si dentro de estos $k - 2$ elementos, el primero que llega es el elemento máximo. Esto ocurre con probabilidad (condicional) $\frac{1}{k-2}$.
  Por otro lado, la probabilidad que s_1 tenga rango global j y que s_2 tenga rango global k es igual a la que tanto el j-ésimo como el k-ésimo estén entrevistado en $[0, T]$ y los $k - 2$ otros elementos con rango en $[k] \setminus \{j, k\}$ estén entrevistados en $(T, 1]$. Esto ocurre con probabilidad $(1 - T)^{k-2} \cdot T^2$.
  Queda finalmente por sumar sobre $j \geq 2$ y $k > j$ para tener la probabilidad de ganar si $t_1 \in (T, 1]$ (donde $j \neq 1$ ya que el mejor global no se entrevista en $[0, T]$).

Probabilidad total:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_2(T) = T \cdot \mathbb{P}_1(T) + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{T^2 \cdot (1-T)^{k-2}}{k-2} &= T \cdot \mathbb{P}_1(T) + T^2 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{j=2}^{k-1} \frac{(1-T)^{k-2}}{k-2} \\
= T \cdot \mathbb{P}_1(T) + T^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2}^{k+1} 1 \right) \frac{(1-T)^k}{k} &= T \cdot \mathbb{P}_1(T) + T^{\cancel{2}} \cdot (1-T) \cdot \cancel{\frac{1}{1-(1-T)}} \\
= T \cdot \mathbb{P}_1(T) + T \cdot (1-T) = -T^2 \cdot \ln(T) + (T - T^2). &\qquad \square
\end{aligned}$$

Observación En este caso no se tiene una expresión analítica para T_2^* el valor de T que optimiza $\mathbb{P}_2(T)$. Usando *Maple*, se encuentra el valor $T_2^* \approx 0{,}552$.

1.2.3. Regla de barrera $\mathcal{B}_i$ para i cualquiera

El siguiente es el teorema principal de este capítulo.

Teorema 1.10 *El valor del juego usando la regla de barrera $\mathcal{B}_i$ para $i \geq 2$ cumple la siguiente recurrencia:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_1(T) = -T \cdot \ln(T), \\ &\mathbb{P}_i(T) = T \cdot \mathbb{P}_{i-1}(T) + \frac{1}{i-1} \cdot (T - T^i), \qquad \forall\, i \geq 2. \end{aligned}$$

Resolviendo la recurrencia, se deduce:

$$\mathbb{P}_i(T) = -T^i \cdot \ln(T) + \sum_{n=1}^{i-1} \frac{T^n - T^i}{i-n}, \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}^*.$$

Demostración. Tratemos de calcular la probabilidad de ganar, separando los dos eventos complementarios "$t_1 \in [0,T]$" y "$t_1 \in (T,1]$" (donde la probabilidad que $t_1 = T$ es nula).

Por un lado, $\mathbb{P}_i(T, t_1 \in [0,T])$ (que es la probabilidad de ganar si $t_1 \in [0,T]$) está dada por $T \cdot \mathbb{P}_{i-1}(T, t_1 \in [0,T])$. En efecto, esto se deduce usando el mismo argumento como en las demostración de la proposición 1.9, es decir considerando el experimento virtual en el cual ignoramos $s_1 = 1$ y lo sacamos del sampleo.

Por otro lado, $\mathbb{P}_i(T, t_1 \in (T,1])$ (que denota la probabilidad de ganar si $t_1 \in (T,1]$) vale $\int_T^1 \left(\frac{T}{t}\right)^i$. Denotando por S_i el conjunto de los i mejores elementos entrevistados en $[0, t_1)$, el resultado anunciado se deduce del hecho que necesitamos que los elementos de S_i estén entrevistados antes del tiempo T para que la regla $\mathcal{B}_i$ elija al mejor candidato, que está entrevistado en t_1 (si no, se elegiría uno de los elementos de S_i, y perderíamos). Este evento tiene probabilidad $\left(\frac{T}{t_1}\right)^i \cdot dt_1$, donde dt_1 es la densidad de probabilidad que t_1 tome un valor específico en $[0,1]$. Integrando esto sobre todos los posibles valores en $(T,1]$, se deduce:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(T) &= \mathbb{P}_i(T, t_1 \in [0,T]) + \mathbb{P}_i(T, t_1 \in (T,1]) \\ &= T \cdot \mathbb{P}_{i-1}(T) + \int_T^1 \left(\frac{T}{t}\right)^i = T \cdot \mathbb{P}_{i-1}(T) + \frac{1}{i-1} \cdot (T - T^i). \end{aligned}$$

La fórmula general se deduce directamente de este resultado. □

1.3. Resultados computacionales

Se calculan con *Maple* los valores óptimos T_i^* de T que maximizan respectivamente las probabilidades $\mathbb{P}_i(T)$ para $i \in [20]$. Estos aparecen a continuación en los gráficos siguientes, a la izquierda en función de la regla usada y a la derecha dispuestos en el segmento $[0, 1]$.

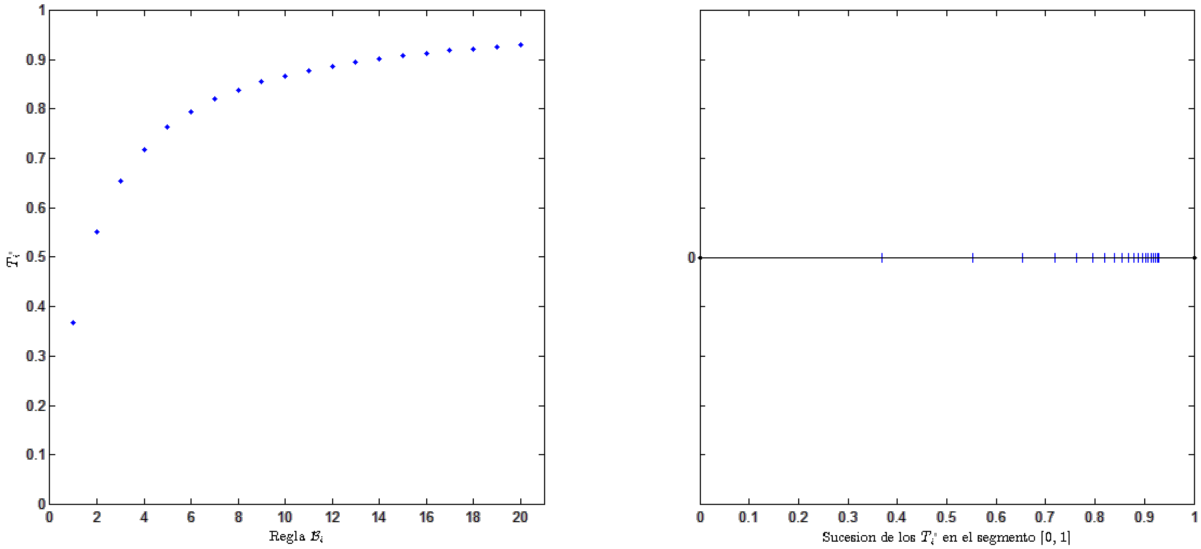

Figura 1.1: Tiempos óptimos asociados a las 20 primeras reglas, a la izquierda representados en función de la regla $\mathcal{B}_i$ asociada, y a la derecha representados en el segmento $[0, 1]$.

Se puede además encontrar a continuación una tabla que reune algunos resultados numéricos obtenidos sobre este estudio. Para varias reglas $\mathcal{B}_i$ aparecen valores numéricos de los tiempos T_i^* óptimos asociados, así como el valor óptimo del juego asociado:

i	T_i^*	$\mathbb{P}_i(T_i^*)$	i	T_i^*	$\mathbb{P}_i(T_i^*)$
1	0.367879	0.367879	13	0.895091	0.500937
2	0.552001	0.428353	14	0.901933	0.502069
3	0.654082	0.453911	15	0.907938	0.503055
4	0.718506	0.468051	16	0.913250	0.503922
5	0.762777	0.477031	17	0.917983	0.504689
6	0.795047	0.483243	18	0.922226	0.505374
7	0.819602	0.487795	19	0.926052	0.505988
8	0.838911	0.491275	20	0.929519	0.506543
9	0.854490	0.494021	25	0.942905	0.508662
10	0.867324	0.496245	30	0.952018	0.510087
11	0.878079	0.498081	40	0.963629	0.511881
12	0.887223	0.499623	50	0.970716	0.512964

Figura 1.2: Valores óptimos del juego para algunas reglas $\mathcal{B}_i$, junto con el valor T_i^* asociado a cada una de ellas. Precisión de los cálculos: 10^{-6}.

En el gráfico siguiente aparecen los valores del juego usando las reglas $\mathcal{B}_i$ para $i \leq 20$:

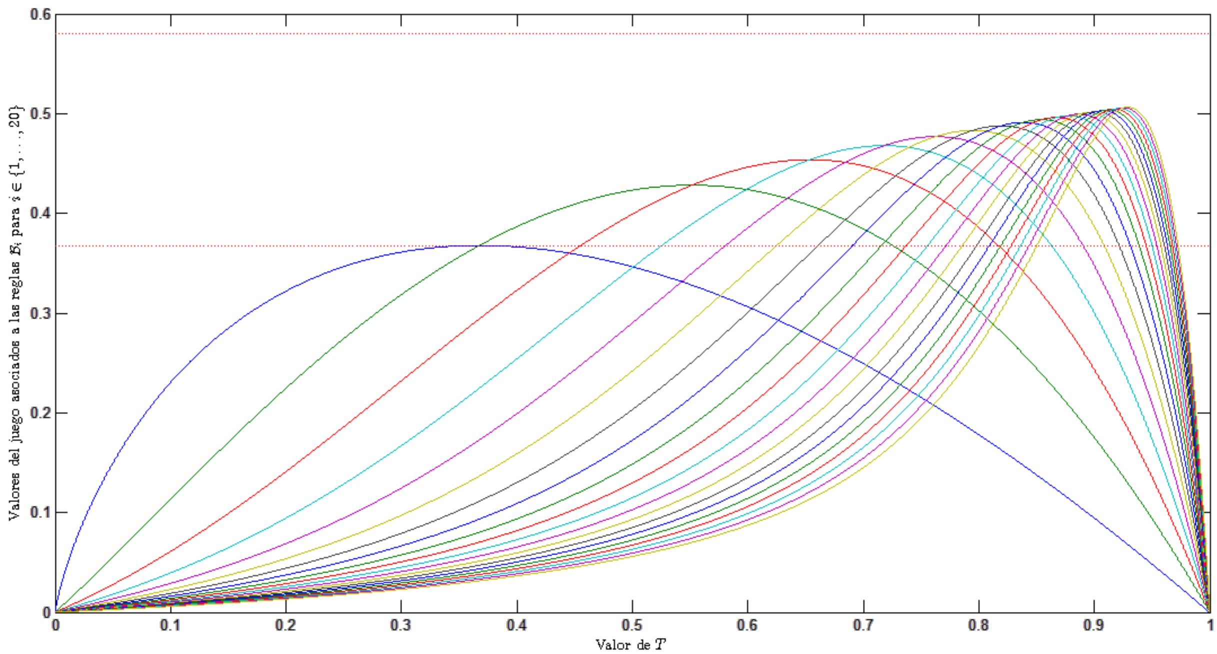

Figura 1.3: $\mathbb{P}_i(T)$ para $i \in [20]$ en función del valor de T. Se agregaron en líneas de puntos rojas las curvas $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas a los valores del juego usando estrategias óptimas respectivamente para los problemas (SP) y (FISP).

Todas las funciones $\mathbb{P}_i$ son positivas, parten de 0, crecen hasta llegar a un valor óptimo, y luego decrecen hasta 0, como se podía esperar. Se observa también que tanto el valor T_i^* como la probabilidad óptima $\mathbb{P}_i(T_i^*)$ crecen con i, como podía esperarse.

Además, se nota que para cada $i \in \{1, \ldots, 19\}$, la curva que representa $\mathbb{P}_{i+1}$ parece intersectar a la curva representativa de $\mathbb{P}_i$ en el óptimo alcanzado por esta última. Con esto se puede suponer que al cumular barreras, se podría obtener un valor del juego aún más grande. Pero no se sabe todavía si una regla de barrera es óptima para el (TCSP), por lo que esto será el objetivo del próximo capítulo: encontrar una regla óptima para resolver el (TCSP), en el sentido que maximice el valor del juego.

Capítulo 2

Algoritmo óptimo para el (TCSP)

Ahora que está definido el (TCSP) tanto en el caso discreto como contínuo, resulta interesante conocer la forma de una regla óptima de elección. Para esto, se formulará la manera de buscar propiedades de la regla óptima en el caso del (TCSP) discreto usando una formulación similar a la de Beckmann [3] para encontrar la regla óptima asociada al (SP). Luego se extenderá este resultado al (TCSP) contínuo.

2.1. Forma del algoritmo óptimo para el (TCSP) discreto

Los datos del problema siguen siendo el número total de candidatos N y el tamaño del sampleo inicial $k \in [N]$. Se fija un orden de llegada $\pi \in \Sigma_N$ elegido uniformemente al azar, se identifica el conjunto de candidatos con $[N]$ donde $j \in [N]$ es el j-ésimo candidato entrevistado.

El objetivo de esta sección es encontrar la forma que tiene la regla óptima asociada al (TCSP) discreto y las propiedades que verifica. Para esto, se simula el cálculo de la probabilidad óptima mediante un programa dinámico cuyos estados son los pares (m, l), donde $m \in \{k+1, \dots, N\}$ representa el candidato entrevistado y $l \in [k+1]$ es el rango parcial en $[k]$ del récord parcial en $\{k+1, \dots, m\}$.

2.1.1. Definición de la regla óptima y primeros resultados

Definición 2.1 ***Estado***

Sean $m \in \{k+1,\dots,N\},\ l \in [k+1]$. *Si se entrevista el candidato* m *y el récord parcial en* $\{k+1,\dots,m\}$ *tiene rango parcial* l *en* $[m]$*, decimos que estamos en el* ***estado*** (m,l)*.*

Definición 2.2 ***Probabilidades de aceptación, rechazo y mejor elección***

Para todo $m \in [N]$ *se define el evento* $R_m :=$ *"los* $m-1$ *primeros candidatos han sido rechazados". Sean* $m \in \{k+1,\dots,N\}, l \in [k+1]$*, se definen las siguientes probabilidades en el estado* (m,l)*:*

$$\begin{aligned}
a(m,l) &= \mathbb{P}\,(\text{ganar}|R_m,\ \text{se acepta el candidato } m,\\
&\qquad\qquad \text{el mejor candidato de } \{k+1,\dots,m\} \text{ tiene rango parcial } l \text{ en } [m])\,,\\
r(m,l) &= \mathbb{P}\,(\text{ganar}|R_m, \text{se rechaza el candidato } m,\\
&\qquad\qquad \text{el mejor candidato de } \{k+1,\dots,m\} \text{ tiene rango parcial } l \text{ en } [m])\,,\\
z(m,l) &= \text{máx}\,\{a(m,l), r(m,l)\}\,.
\end{aligned}$$

Notar que $a(N,l) = z(N,l) = 1$ *y* $r(N,l) = 0$ *para todo* $l \in [k+1]$.

Observación En la definición de $a(m,l)$, se puede precisar que se gana si y sólo si m es el récord global en $\{k+1,\dots,N\}$, por lo que para aceptar el candidato m se necesita que m sea récord parcial en $\{k+1,\dots,m\}$. En cambio, en la definición de $r(m,l)$, el candidato m puede ser rechazado por cualquier razón, sea récord parcial en $\{k+1,\dots,m\}$ o no.

Proposición 2.3 $\forall\, m \in \{k+1,\dots,N\}, \forall\, l \in [k+1], \quad a(m,l) = \dfrac{m^{\underline{l}}}{N^{\underline{l}}} = \dfrac{\binom{m}{l}}{\binom{N}{l}}.$

Demostración. Si los l mejores de $[N]$ están entrevistados en $[m]$, entonces m (que es el l-ésimo mejor de $[m]$) debe ser el mejor de $\{k+1,\dots,N\}$. Si alguno de los l mejores de $[N]$ no está entrevistado en $[m]$, dicho candidato es mejor que m, así que no se gana al aceptar m.

Luego $a(m,l)$ es igual a la probabilidad que los l mejores candidatos de $[N]$ estén en $[m]$:

$$a(m,l) = \frac{m}{N}\cdot\frac{m-1}{N-1}\cdot\dots\cdot\frac{m-(l-1)}{N-(l-1)} = \frac{m^{\underline{l}}}{N^{\underline{l}}} = \frac{\binom{m}{l}}{\binom{N}{l}}. \quad \square$$

Corolario 2.4 $a(m,l)$ *es estrictamente creciente en* m *y estrictamente decreciente en* l*, i.e.:*

$$\forall\ m \in \{k+1,\dots,N-1\},\ \forall\ l \in [k+1], \quad a(m,l+1) \le a(m,l) \le a(m+1,l).$$

Demostración. Esto es directo de la proposición anterior. $\square$

2.1.2. Recurrencia para $r(m,l)$

Teorema 2.5 $\forall\, m \in \{k+1,\dots,N-1\},\ \forall\, l \in [k+1]$:

$$r(m,l) = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{m+1} \cdot z(m+1,j) + \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \cdot r(m+1,l).$$

Demostración. Supongamos que estamos en el estado (m,l), llamemos s_m al récord parcial en $\{k+1,\dots,m\}$ y s_{m+1} al récord parcial en $\{k+1,\dots,m+1\}$.

Si se rechaza el candidato m, se entrevista el $(m+1)$-ésimo. Notemos que s_{m+1}, el mejor candidato entrevistado en $\{k+1,\dots,m+1\}$, no puede tener rango parcial en $[m+1]$ superior a l. En efecto, si $m+1 \prec s_m$, entonces $s_{m+1} = s_m$, así que sigue siendo el l-ésimo mejor candidato en $[m+1]$; si en cambio $m+1 \succ s_m$, entonces $s_{m+1} = m+1$, y luego su rango parcial en $[m+1]$ está entre 1 y l (como $m+1 \succ s_m$, $m+1$ no puede tener rango parcial en $[m+1]$ peor que s_m, y s_m es el $l+1$-ésimo mejor candidato en $[m+1]$).

Por lo tanto:

- Si el candidato $m+1$ es el nuevo récord parcial en $\{k+1,\dots,m+1\}$ y es j-ésimo en $[m+1]$ (con $j \le l$), lo es con probabilidad $\frac{1}{m+1}$ (probabilidad que el j-ésimo de los $m+1$ elementos esté el último de los $m+1$). Dado esto se elige o no según lo que maximice la probabilidad de ganar, en otras palabras se gana con la probabilidad asociada $z(m+1,j)$.
- Si en cambio el récord se mantiene, esto es si $s_{m+1} = s_m$, se debe rechazar $m+1$. Esto ocurre con probabilidad $1 - \frac{l}{m+1}$, donde $\frac{l}{m+1}$ es la probabilidad que el candidato $m+1$ sea uno de los l mejores de $[m+1]$. En esta situación se gana con probabilidad $r(m+1,l)$.

Esto entrega la recurrencia anunciada por el teorema:

$$r(m,l) = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{m+1} \cdot z(m+1,j) + \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \cdot r(m+1,l). \quad \square$$

Proposición 2.6 $r(m,l)$ *es creciente en* l*, esto es:*

$$\forall\ m \in \{k+1,\dots,N\}, \forall\, l \in [k], \quad r(m,l) \le r(m,l+1).$$

Demostración. Probemos este resultado por inducción inversa sobre m, fijando $l \in [k]$.

Caso base ($m = N$): $\quad 1 = r(N,l) \le r(N,l+1) = 1.$

Paso inductivo: Supongamos que $r(m+1,l+1) \ge r(m+1,l)$ y expresemos $r(m,l+1)$ via su relación por recurrencia:

$$r(m,l+1) = \sum_{j=1}^{l+1} \frac{z(m+1,j)}{m+1} + \left(1 - \frac{l+1}{m+1}\right) \cdot r(m+1,l+1).$$

Reemplazando $\displaystyle\sum_{j=1}^{l} \frac{z(m+1,j)}{m+1}$ por $r(m,l) - \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \cdot r(m+1,l)$ gracias a la recurrencia que cumple $r(m,l)$, se deduce:

$$\begin{aligned}
r(m,l+1) &= \left[r(m,l) - \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \cdot r(m+1,l)\right] + \frac{z(m+1,l+1)}{m+1} \\
&\quad + \left(1 - \frac{l+1}{m+1}\right) \cdot r(m+1,l+1) \\
&= r(m,l) + \frac{z(m+1,l+1) - r(m+1,l+1)}{m+1} \\
&\quad + \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \cdot (r(m+1,l+1) - r(m+1,l)) \\
&\geq r(m,l),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se deduce porque $z(m+1,l+1) \geq r(m+1,l+1)$ (por definición de z), por la hipótesis de inducción $r(m+1,l+1) \geq r(m+1,l)$, y porque $m+1 \geq l$ (lo que implica que $\left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \geq 0$). $\square$

2.1.3. Propiedades de la regla óptima

Con los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores, se sabe ahora que:

- Para $l \in [k+1]$ fijo, $a(m,l)$ es estrictamente creciente en m,
- Para $m \in \{k+1, \ldots, N-1\}$ fijo, $r(m,l)$ es creciente en l mientras que $a(m,l)$ es estrictamente decreciente en l.

Las monotonías de a y r evocadas en el segundo item permiten definir, al entrevistar el candidato m, una barrera de elección con respecto al rango parcial en $[k]$ del récord post-sampleo. En otras palabras, se puede definir un rango minimal tal que, si m es récord y tiene rango en $[k]$ menor o igual a esta barrera, conviene aceptarlo; en cambio, si tiene rango en $[k]$ mayor estricto a esta barrera, conviene rechazarlo.

Definición 2.7 ***Barrera***

*Sea $m \in \{k+1, \ldots, N-1\}$. Se define la **barrera** $\bar{l}(m) \in [k+1]$ de modo que:*

$$\begin{aligned}
&\forall\ l \in \{1, \ldots, \bar{l}(m)\},\ a(m,l) \geq r(m,l), \\
&\forall\ l \in \{\bar{l}(m)+1, \ldots, k+1\},\ a(m,l) < r(m,l).
\end{aligned}$$

De no existir tal índice, debe ocurrir que siempre se tiene $a(m,l) < r(m,l)$ o que siempre se tiene $a(m,l) \geq r(m,l)$. Para estos casos, se dirá respectivamente que $\bar{l}(m) = k+2$ y que $\bar{l}(m) = 0$.

El siguiente es el teorema más importante de esta sección.

Teorema 2.8 *Las funciones $a(\cdot,\cdot)$ y $r(\cdot,\cdot)$, asociadas a la regla de elección óptima, cumplen los dos resultados siguientes:*

1. *Si $a(m,l) \geq r(m,l)$ entonces $a(m,l-1) \geq r(m,l-1)$.*
2. *Si $a(m,l) \geq r(m,l)$ entonces $a(m+1,l) \geq r(m+1,l)$.*

Observación Las propiedades anteriores se pueden entender de la siguiente manera:

1. Si en un estado (m,l) la estrategia dicta que se debe aceptar, entonces también se debe aceptar en todos los estados (m,l') para $l' \leq l$. En particular, para cada m existe un valor l tal que los estados (m,l') con m récord parcial se aceptan si y solo si $l' \leq l$ (o sea para cada m récord parcial, se acepta si l es suficientemente pequeño).
2. Si en un estado (m,l) la estrategia dicta que se debe aceptar, entonces también se debe aceptar en todos los estados (m',l) para $m' \geq m$. En particular, para cada l existe un valor m tal que los estados (m',l) se aceptan si y solo si $m' \geq m$ (o sea para cada l, se aceptan los récords parciales que tienen rango parcial l al compararlos con el sampleo, desde cierto número m de entrevistas en adelante).

Demostración del teorema 2.8. Probemos cada caso por separado usando los resultados de las secciones precedentes.

1. Si $a(m,l) \geq r(m,l)$, como para m fijo se tiene que r es creciente en l mientras que a es decreciente en l, se deduce:

$$a(m,l-1) \geq a(m,l) \geq r(m,l) \geq r(m,l-1).$$

2. Se probará este resultado a través de su contrarecíproca, es decir: vamos a suponer que $a(m+1,l) < r(m+1,l)$ y mostrar que $a(m,l) < r(m,l)$. Ahora bien, sea un estado (m,l) y se supone que $a(m+1,l) < r(m+1,l)$. Por definición de r:

$$\begin{aligned} r(m,l) &= \frac{1}{m+1} \cdot \sum_{j=1}^{l} z(m+1,j) + \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \cdot r(m+1,l) \\ &> \frac{1}{m+1} \cdot \sum_{j=1}^{l} a(m+1,j) + \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \cdot a(m+1,l). \end{aligned}$$

Como $a(m+1,j)$ es decreciente en j, se deduce:

$$\begin{aligned} &\geq \frac{l}{m+1} \cdot a(m+1,l) + \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) \cdot a(m+1,l) \\ &= a(m+1,l) \geq a(m,l). \end{aligned}$$

Por lo tanto $a(m,l) < r(m,l)$. De donde: $[a(m+1,l) < r(m+1,l) \Longrightarrow a(m,l) < r(m,l)]$, o equivalentemente $[a(m,l) \geq r(m,l) \Rightarrow a(m+1,l) \geq r(m+1,l)]$. $\square$

Corolario 2.9 *La sucesión de barreras* $\{\bar{l}(m)\}_{m\in\{k+1,\ldots,N\}}$ *es creciente con* m.

Demostración. Este resultado se deduce de la segunda propiedad del teorema anterior. En efecto, por definición de las barreras,

$$\begin{array}{ll} & [a(m,l) \geq r(m,l) \Rightarrow a(m+1,l) \geq r(m+1,l)]\,. \\ \Longleftrightarrow & \left[l \leq \bar{l}(m) \Rightarrow l \leq \bar{l}(m+1)\right]. \\ \Longleftrightarrow & \bar{l}(m) \leq \bar{l}(m+1). \end{array}$$

□

En otras palabras, el teorema anterior implica lo siguiente: la regla de elección óptima recomienda comparar los candidatos con algún candidato del sampleo bien específico, esto dependiendo de cuándo está entrevistado. Para la explicación que sigue, se denotarán los elementos del sampleo inicial por $\{s_i\}_{i=1}^{k}$ donde s_i es el i-ésimo mejor candidato del sampleo. Se denotarán $\{\bar{l}(k+1), \bar{l}(k+2), \ldots, \bar{l}(N)\}$ al conjunto de las barreras antes definidas y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ al mismo conjunto sin repeticiones con $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, por lo que se tiene que $n \leq N - k$. Se usará además $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ el conjunto de candidatos tales que $m_i = \text{mín}\{m \in \{k+1, \ldots, N\} | \bar{l}(m) = b_i\}$ para todo $i \in [n]$.

Después de entrevistar (y rechazar) a los k candidatos del sampleo inicial, un primer periodo empieza donde más vale rechazar a todos los candidatos, cualquieras sean. Luego, a partir del candidato m_1, conviene aceptar un candidato si es récord parcial y mejor que s_{b_1}. Después de este periodo empieza un segundo periodo a partir del candidato m_2 donde conviene aceptar un candidato si es récord parcial y mejor que s_{b_2}, luego de esto empezará un tercer periodo a partir del candidato m_3 donde conviene aceptar un candidato si es récord parcial y mejor que s_{b_3}, etc.

De manera general, cuando ya se entrevistaron bastante candidatos sin aceptar a nadie, se cambia de candidato de comparación s_{b_i} contra el siguiente mejor en el sampleo $s_{b_{i+1}}$. Si se sigue rechazando incluso al comparar con s_k, llega un último periodo donde conviene aceptar un candidato solamente si es récord parcial, ignorando la información recogida en el sampleo.

Las barreras permiten entonces bajar las exigencias de aceptación de un candidato si se sigue rechazando a lo largo del algoritmo, esto para no rechazar a todos los candidatos después del sampleo en el desafortunados caso donde los candidatos del sampleo tienen rangos globales muy bajos.

Queda ahora por encontrar el valor del juego usando la recurrencia inversa, lo que entrega la siguiente proposición.

Proposición 2.10 *A* N *y* k *dados, el valor del juego es* $r(k, k+1)$.

Demostración. Después de rechazar a los k candidatos del sampleo, el valor del juego corresponde a la probabilidad de ganar tomando la mejor decisión entre aceptar o no al candidato $k+1$. Además, como es el primer y único candidato que se puede contratar, es automáticamente el récord parcial en $\{k+1\}$. Por lo tanto, para todo $l \in [k+1]$, tiene probabilidad $\frac{1}{k+1}$ de ser el j-ésimo mejor de los $k+1$ candidatos ya entrevistados, y dado esto se gana con probabilidad $z(k+1, j)$. Luego el valor del juego es:

$$\begin{aligned}
\text{valor} &= \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{l=1}^{k+1} z(k+1,j) \\
&= \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{l=1}^{k+1} z(k+1,j) + \left(1 - \frac{k+1}{k+1}\right) \cdot r(k+1,k+1) =: r(k,k+1),
\end{aligned}$$

por extensión de la definición de r a $m = k$. □

2.2. Resultados computacionales

Usando la fórmula cerrada de $a(m,l)$ y la recurrencia inversa que cumple $r(m,l)$, se puede implementar con *Matlab* el cálculo de los valores $a(m,l)$, $r(m,l)$ y $z(m,l)$ hasta llegar al valor del juego $r(k,k+1)$. Como las recurrencias no dependen de k explícitamente, se puede incluso calcular lo anterior para todos los valores posibles de l, imponiendo para todo $l \geq m+2$ que $a(m,l) = r(m,l) = z(m,l) = 0$ (es decir, se supone que k puede valer hasta el valor m). Luego, se guardan dos conjuntos de datos: la evolución de los valores $\bar{l}(m)$ con el valor de m, y los valores del juego $r(k,k+1)$ para todo $k \in [N-1]$.

Para $N \in \{100,\ 1.000,\ 10.000,\ 100.000\}$ se obtienen respectivamente los pares de gráficos a continuación. En los gráficos de la izquierda se agregan además las curvas de puntos rojas $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas a los valores óptimos del juego respectivamente para los problemas (SP) y (FISP), esto para comparar los resultados obtenidos con estos casos límites con respecto a la información conocida sobre los candidatos (el (SP) no tiene ninguna información previa y el (FISP) tiene toda la información previa).

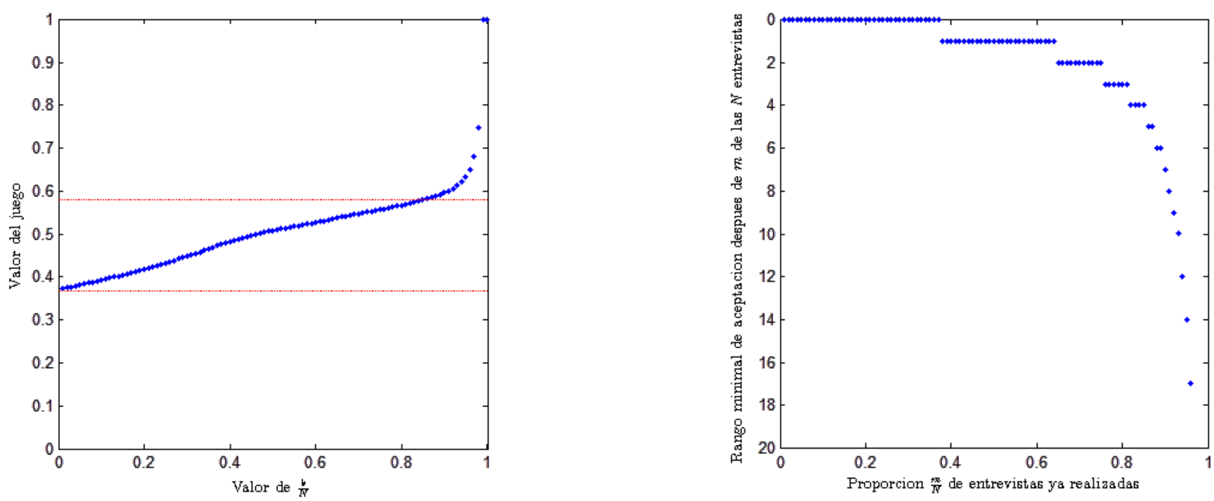

Figura 2.1: Resultados para $N = 100$: a la izquierda aparece el valor del juego en función de la razón $\frac{k}{N}$ y a la derecha la evolución de las barreras óptimas en función de la razón $\frac{m}{N}$. A la izquierda se agregan las curvas de puntos rojas $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas a los valores óptimos del juego respectivamente para los problemas (SP) y (FISP).

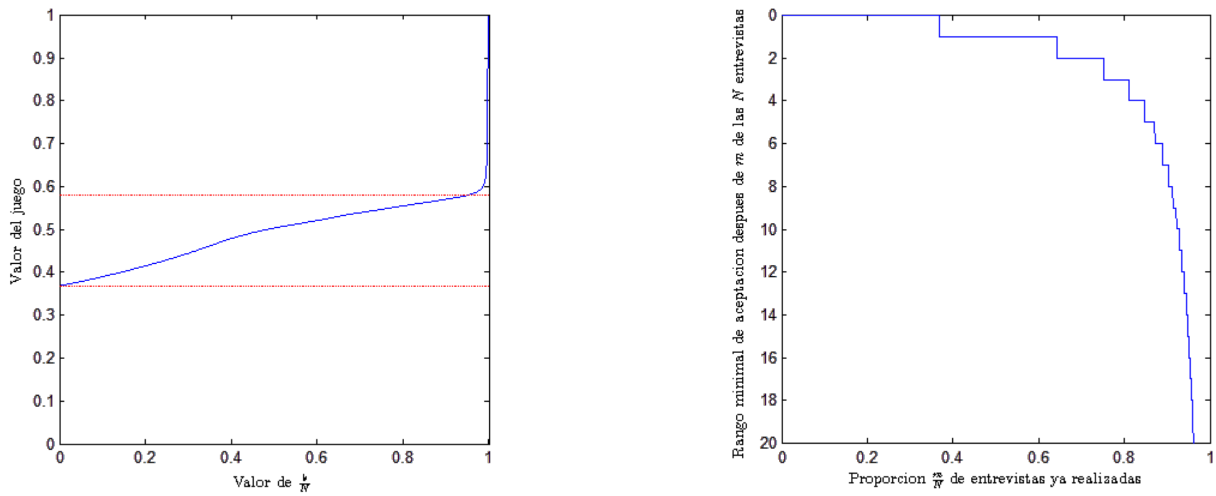

Figura 2.2: Resultados para $N = 1.000$: a la izquierda aparece el valor del juego en función de la razón $\frac{k}{N}$ y a la derecha la evolución de las barreras óptimas en función de la razón $\frac{m}{N}$. A la izquierda se agregan las curvas de puntos rojas $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas a los valores óptimos del juego respectivamente para los problemas (SP) y (FISP).

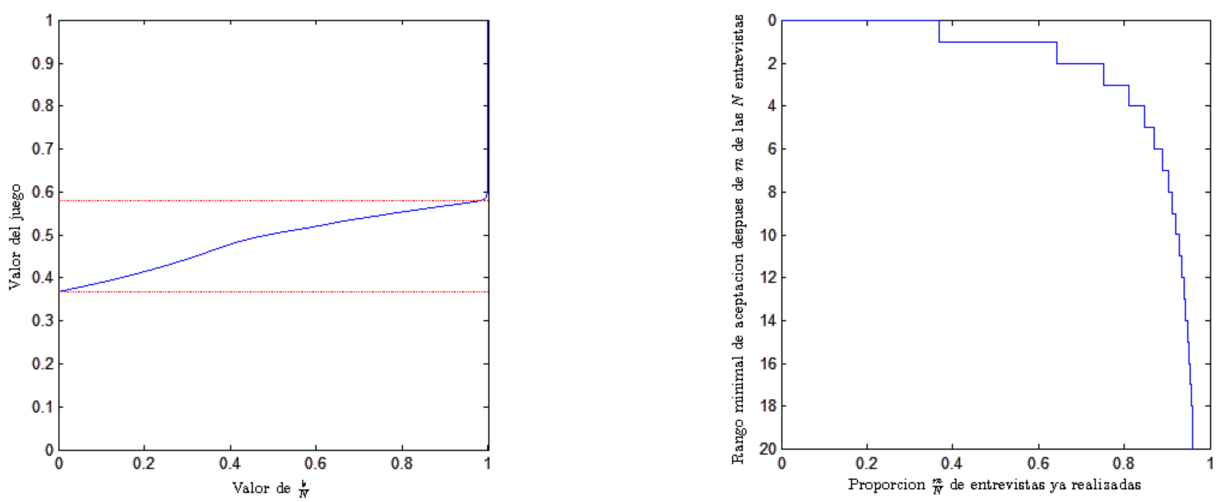

Figura 2.3: Resultados para $N = 10.000$: a la izquierda aparece el valor del juego en función de la razón $\frac{k}{N}$ y a la derecha la evolución de las barreras óptimas en función de la razón $\frac{m}{N}$. A la izquierda se agregan las curvas de puntos rojas $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas a los valores óptimos del juego respectivamente para los problemas (SP) y (FISP).

Observación En cada gráfico, los resultados se representan como función de una razón y no de m o k directamente, esto por dos razones: primero para tener un eje horizontal que no dependa de N, y segundo para tener desde ahora la analogía con el caso contínuo (visto como una modelación límite para $N \to \infty$ del caso discreto). Además, para $N = 100$, los gráficos se realizan con puntos ya que curvas no tenían sentido para N tan pequeño.

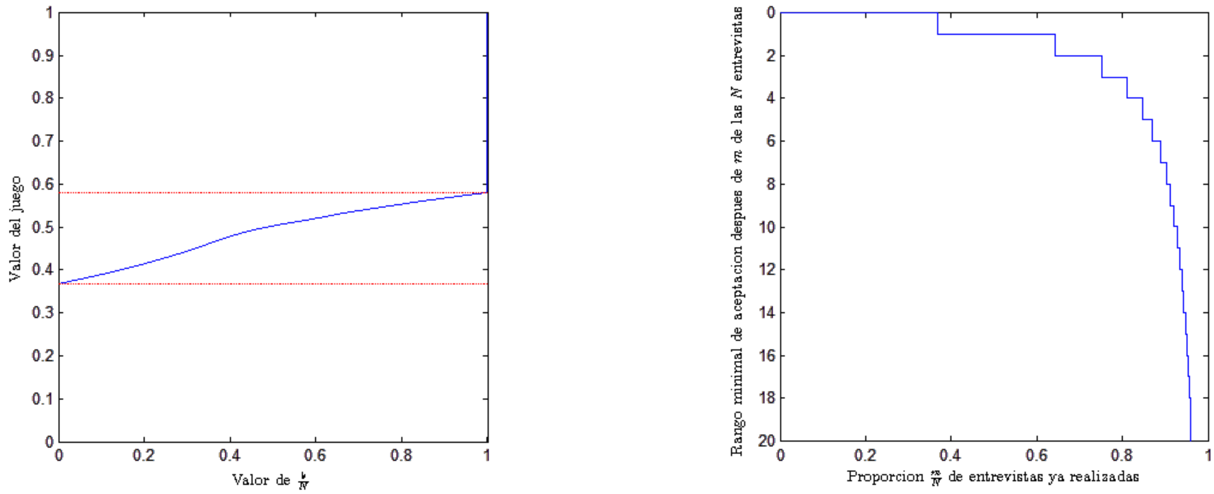

Figura 2.4: Resultados para $N = 100.000$: a la izquierda aparece el valor del juego en función de la razón $\frac{k}{N}$ y a la derecha la evolución de las barreras óptimas en función de la razón $\frac{m}{N}$.

Se puede observar que el valor del juego es una función creciente de $\frac{k}{N}$, lo que tiene sentido ya que más personas hay en el sampleo, mejor puede ser la estimación de los candidatos que vienen y mejor se puede refinar la comparación con un candidato del sampleo.

Además, se pueden estudiar los valores límites para $\frac{k}{N} \to 0$ y $\frac{k}{N} \to 1$:

- en el primer caso, parece que el valor tiende a $\frac{1}{e}$, lo que se podía esperar ya que este caso se acerca del (SP) tradicional (el sampleo es cada vez más pequeño hasta ser vacío, como para el (SP)),
- en el último caso, el valor parece tender a un valor bien distinto de 1, cercano a 0,58.

El trabajo de Gilbert y Mosteller anuncia que la estrategia óptima en la variante (FISP) (cf. 0.3) permite mejorar el valor del juego hasta un valor cercano a $0{,}580164 \approx 0{,}58$ [8].

Conjetura 2.1 El valor del juego límite del (TCSP) discreto cuando $\frac{k}{N} \to \infty$ es el valor del juego óptimo asociado al (FISP), cercano a 0,580164.

Se puede justificar la conjetura anterior de la manera siguiente. Con un sampleo cada vez más grande, se puede estimar cada vez mejor la calidad de los candidatos que vienen después del sampleo, así que se puede adivinar cada vez mejor tanto la distribución de probabilidad seguida por los "valores" de los candidatos como los valores de los parámetros de esta distribución. Con más y más información sobre los candidatos, el juego se parece entonces más y más al con información total, el (FISP).

2.3. Extensión al (TCSP) contínuo

Recordemos que para $T \in (0,1)$ fijo, se rechazan a todos los candidatos entrevistados antes del tiempo T. Estos candidatos forman el sampleo inicial. Luego se desea encontrar una estrategia óptima para maximizar la probabilidad de elegir al mejor candidato después del tiempo T.

El objetivo de esta sección es estudiar reglas de barrera establecidas a partir de las propiedades que cumple la regla óptima encontrada en el caso discreto (cf. parte anterior), luego se trata de deducir la forma genérica del valor del juego para una cualquiera de estas reglas y de relacionar los resultados obtenidos con los resultados del caso discreto.

Definición 2.11 ***Familia de reglas estudiada, Tiempos de barrera***

Sean $n \in \mathbb{N}$ y una familia $\{T_i\}_{i=0}^{n+1}$ creciente en $[T,1]$ con $T_0 := T$ y $T_{n+1} := 1$. Se define la regla $\mathcal{R}_n$ con $b_n : (T,1] \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

$$\forall i \in \{0,\dots,n\}, \forall t \in (T_i, T_{i+1}], b_n(t) = i.$$

$b_n(t)$ es el ***rango global en*** *$[0,T]$ del candidato con el cual comparar el candidato entrevistado en t.*

Observación La regla óptima encontrada en el caso discreto toma en cuenta k barreras posibles. Ahora en el caso contínuo, hay una posible infinidad de candidatos en el sampleo, así que se podrían considerar a todos. Sin embargo, considerar a todos al mismo tiempo no permite calcular sencillamente el valor del juego asociado. Por lo tanto se prefiere definir reglas con un número finito de barreras (la regla $\mathcal{R}_n$ tiene n barreras), lo que es mucho más cómodo de estudiar, y seguir agregando una barrera más en cada paso. Con esto, la regla óptima asociada al (TCSP) contínuo debería ser la que toma en cuenta la infinidad de barreras del sampleo.

Definición 2.12 ***Elección de un candidato*** *Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $i \in \{0,\dots,n\}$ y consideremos la regla $\mathcal{R}_n$. Sean también $t \in (T,1]$ y x_t el candidato entrevistado en el tiempo t.*

Si $b_n(t) = i$, x_t ***se elige*** *si se cumplen las tres condiciones que siguen:*

- *no se eligió a nadie antes del tiempo t,*
- *x_t es un récord parcial,*
- *x_t es mejor que el i-ésimo mejor de $[0,T]$.*

Observación En la definición anterior, el caso $i = 0$ significa que no se compara con nadie en $[0,T]$, más bien que no se elige.

2.3.1. Estudio de las reglas $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$

La regla $\mathcal{R}_0$ corresponde al caso donde nunca se elige a nadie, que no tiene ningún interés en nuestro estudio. Por eso se estudiarán primero en las siguientes subpartes algunas reglas $\mathcal{R}_n$ para $n \geq 1$, antes de abordar el caso general. Para esto, definamos el valor del juego asociado a una regla $\mathcal{R}_n$.

Definición 2.13 ***Valor del juego asociado a*** $\mathcal{R}_n$

*Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se define $P_n(T, T_1, \cdots, T_n)$ como la probabilidad de ganar considerando la regla asociada a la familia $\{T_i\}_{i=0}^{n+1}$ (donde recordemos que $T_0 = T$ y $T_{n+1} = 1$). Diremos que P_n es el **valor del juego** asociado a la regla $\mathcal{R}_n$.*

Estudio de $\mathcal{R}_1$

Proposición 2.14 *El valor del juego asociado a la regla $\mathcal{R}_1$ es:*

$$P_1(T, T_1) = -T_1 \cdot \ln(T_1).$$

Demostración. Hagaos el estudio por casos, condicionando en la variable aleatoria t_1.

- **Si** $t_1 \in [0, T]$**:**
  Llamemos j al rango global del mejor candidato entrevistado en $(T, 1]$. Si $t_j \in (T, T_1]$, por la regla usada no se puede elegir. Si $t_j \in (T_1, 1]$, tampoco se puede elegir pues no puede ser mejor que el mejor, ya entrevistado en el sampleo. Por lo tanto, el mejor de $(T, 1]$ **no se puede elegir** con esta regla.
- **Si** $t_1 \in (T, T_1]$**:**
  Entonces el mejor global de $[0, 1]$ está entrevistado en $(T, 1]$. Sin embargo, **no se puede elegir** con la regla actual ya que mientras $b(t) = 0$ no se elige a nadie.
- **Si** $t_1 \in (T_1, 1]$**:**
  Entonces el mejor global de $[0, 1]$ está entrevistado en $(T, 1]$. Además, $b(t_1) = 1$, así que para que se elija el mejor, necesitamos que el mejor entrevistado en $[0, t_1)$ no se pueda elegir. Ya que sería un récord parcial y que a priori nadie se habría elegido antes, esto sólo ocurre si se entrevista antes del tiempo T_1 (cuando no se elige a nadie), y este caso se produce con probabilidad $\frac{T_1}{t_1}$.

Luego el valor del juego en este caso vale:

$$P_1(T, T_1) = \int_{T_1}^{1} \frac{T_1}{t_1} dt_1 = T_1 \cdot [\ln(t_1)]_{T_1}^{1} = -T_1 \cdot \ln(T_1). \quad \square$$

Observación Se tiene que $P_1(T, T) = \mathbb{P}_1(T)$, lo que tiene sentido ya que corresponde al (SP) tradicional: también se elige al primer candidato mejor que el mejor entrevistado en $[0, T_1] = [0, T]$. Además, a T_1 fijo, el resultado parece no depender de T, pero en verdad sí depende de T ya que se supone que $T_1 \geq T$.

Corolario 2.15 *El valor óptimo de T_1 que permite maximizar P_1 es $T_1^* = \text{máx}\left\{T, \frac{1}{e}\right\}$.*

Demostración. Esto es directo del estudio del (SP) en introducción, derivando la probabilidad con respecto a T e igualando a 0. Sin embargo, este resultado vale si $T \leq \frac{1}{e}$; en caso contrario, como $T_1 \geq T$ y como $P_1(T, T_1)$ es decreciente en T_1 sobre $\left[\frac{1}{e}\right]$, P_1 se maximiza en el valor más pequeño posible para T_1, es decir en T.

Por lo tanto, si $T < \frac{1}{e}$, $T_1^* = \frac{1}{e}$, y en otro caso $T_1^* = T$, por lo que $T_1^* = \text{máx}\left\{T, \frac{1}{e}\right\}$. □

Estudio de la regla $\mathcal{R}_2$

Proposición 2.16 *El valor del juego asociado a la regla $\mathcal{R}_2$ es:*

$$P_2(T, T_1, T_2) = P_1(T, T_1) + T \cdot (1 - T_2) \cdot (1 + \ln(T_2))\,.$$

Demostración. Apliquemos el razonamiento anterior al cálculo del valor del juego. Condicionemos en la variable aleatoria t_1.

- **Si** $t_1 \in [0, T]$**:**

  Este caso tiene probabilidad T de ocurrir. Consideremos el experimento virtual donde ignoramos en candidato 1 y lo sacamos del sampleo. Ahora, con este experimento virtual, la regla de elección se puede interpretar de la siguiente forma:
  - No elegir a nadie en $[0, T]$,
  - No elegir a nadie en $(T, T_1]$,
  - Comparar los elementos de $(T_1, T_2]$ con el mejor de $[0, T]$, que acabamos de sacar ya que nadie podía ser mejor que él, entonces corresponde también a no elegir a nadie,
  - Comparar los elementos de $(T_2, 1]$ con el segundo mejor de $[0, T]$, que ahora es el mejor de $[0, T]$ (ya que hemos sacado el mejor).

  Luego, definiendo $T' := T,\ T_1' := T_2$, queremos encontrar el mejor de $(T', 1]$ aplicando la regla $\mathcal{R}_1$. Por lo tanto, ganamos con probabilidad $T \cdot P_1(T', T_1') = T \cdot P_1(T, T_2)$.
- **Si** $t_1 \in (T, T_1]$**:**

  Entonces el mejor global de $[0, 1]$ está entrevistado en $(T, 1]$. Sin embargo, no se puede elegir con la regla actual ya que mientras $b(t) = 0$ **no se elige a nadie**.
- **Si** $t_1 \in (T_1, T_2]$**:**

  Entonces el mejor global de $[0, 1]$ está entrevistado en $(T, 1]$. Condicionemos en el evento "$t_1 \in (T_2, 1]$". Llamemos q_1 al mejor candidato entrevistado en el tiempo $u_1 \in [0, t_1)$. Como $b(t_1) = 1$, para que se elija el candidato 1, necesitamos que q_1 no se pueda elegir. Si $u_1 \leq T_1$, 1 será el único candidato mejor que q_1 (q_1 no se puede elegir) así que nadie será elegido antes que él y se ganará. Si en cambio $u_1 > T_1$, como q_1 sería un récord parcial y que a priori nadie habría sido elegido antes, q_1 no se elige sólo si $u_1 \leq T_1$ (cuando no se elige a nadie), y este caso se produce con probabilidad $\frac{T_1}{t_1}$.

- **Si** $t_1 \in (T_2, 1]$**:**
  Entonces el mejor global de $[0,1]$ está entrevistado en $(T,1]$. Condicionemos en el evento "$t_1 \in (T_2,1]$". Llamemos q_1 y q_2 respectivamente al mejor candidato entrevistado en $u_1 \in [0,t_1)$ y al segundo mejor candidato entrevistado en $u_2 \in [0,t_1)$. Estudiemos los distintos casos posibles:
  - Si $u_1 \in [0,T]$:
    * Si $u_2 \in [0,T_2]$, el único elemento que pueda ser récord parcial es el candidato 1 pues es el único mejor que q_2 en $(T,t_1]$, así que nadie será elegido antes que él. Como es mejor que el segundo mejor de $[0,T]$ también, se elige. Este caso tiene probabilidad $\frac{T}{t_1} \cdot \frac{T_2}{t_1}$.
    * Si $u_2 \in (T_2,t_1)$, ése cumplirá todas las condiciones a ser elegido (nadie será mejor que el segundo mejor, y será el primer récord parcial siendo también mejor que el segundo mejor de $[0,T]$), a menos que alguién ya haya sido elegido antes que él. En todo caso, **no se elige al mejor**.
  - Si $u_1 \in (T,T_1]$, no podemos elegir a este elemento ya que $b(u_1) = 0$, y el único elemento que pueda ser récord parcial será nuestro candidato 1, así que no se podrá elegir a nadie antes que él. Luego se elige el mejor con probabilidad $\frac{T_1-T}{t_1}$.
  - Si $t_2 \in (T_1,t_1)$, ése será mejor que todos los elementos de $[0,T]$, será récord parcial, y a menos que alguién ya haya sido elegido antes (en cual caso se pierde), ése sería entonces elegido. En este caso entonces, **no se puede elegir** al mejor.

Por lo tanto, el valor del juego es:

$$\begin{aligned}
P_2(T,T_1,T_2) &= T \cdot P_1(T,T_2) + \int_{T_1}^{T_2} \frac{T_1}{t_1} dt_1 + \int_{T_2}^{1} \left(\frac{TT_2}{t_1^2} + \frac{T_1 - T}{t_1} \right) dt_1 \\
&= -TT_2 \cdot \ln(T_2) + \int_{T_1}^{1} \frac{T_1}{t_1} dt_1 - \int_{T_2}^{1} \frac{T}{t_1} dt_1 + \int_{T_2}^{1} \frac{TT_2}{t_1^2} dt_1 \\
&= -T_1 \cdot \ln(T_1) + T \cdot \ln(T_2) - TT_2 \cdot \ln(T_2) + TT_2 \left(\frac{1}{T_2} - 1 \right) \\
&= P_1(T,T_1) + T \cdot (1 - T_2) \cdot (1 + \ln(T_2)) .
\end{aligned}$$

□

Observación Notar que P_2 cumple:

- $P_2(T,T,T) = \mathbb{P}_2(T)$, donde $\mathbb{P}_2$ es la probabilidad encontrada en 1.2.2.
- $P_2(0,0,0) = 0$; en efecto, si $T_1 = T_2 = 0$, el método consiste en elegir al primer elemento que encontramos, y con este método se elige el mejor con probabilidad 0 (ya que se supone que hay una infinidad de candidatos).
- $P_2(T_1,1) = P_1(T_1)$.

Conviene notar también que $P_2(0,T_1,T_2) = P_1(0,T_1)$, independientemente de T_2. Esto también se entiende de la siguiente manera: ya no hay ningún elemento en $[0,T]$, así que el tercer criterio de elección ya no existe (no se puede comparar con el segundo mejor de $[0,T] = \{0\}$ ya que nadie estuvo entrevistado en este intervalo de tiempo). Elegir a alguién en el tiempo t corresponde ahora a no haber elegido nadie antes y ser el mejor de $[0,t]$ con el sampleo de $[0,T_1]$, que es exactamente el (SP) tradicional. Por eso no depende de T_2.

Corolario 2.17 *El valor óptimo de T_2 que permite maximizar P_2 vale es $T_2^* = \text{máx}\{T, T_2'\}$ donde $T_2' \approx 0{,}642$.*

Demostración. Dado que T_1 sólo aparece en P_2 bajo la expresión de P_1 (que es sumada al resto), basta con calcular la derivada parcial de P_2 con respecto a T_2 para encontrar T_2^*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_2}{dT_2}(T, T_1, T_2) &= T \cdot \left(-(1 + \ln(T_2)) + \frac{1 - T_2}{T_2}\right) \\ &= T \cdot \left(\frac{1}{T_2} - 2 - \ln(T_2)\right).\end{aligned}$$

Ya sabemos que $P_2(0, T_1, T_2) = P_1(0, T_1)$, así que cualquier valor de T_2 no cambia nada a la resolución de nuestro problema en tal caso; supongamos entonces $T \neq 0$. Esta derivada parcial se anula si $-T_2 \cdot \ln(T_2) = 2T_2 - 1$. Usando *Maple* para resolver esta ecuación, se obtiene la siguiente aproximación:

$$T_2^* \approx 0{,}6422007041 \approx 0{,}642.$$

Esto es válido si $T < 0{,}642$. En efecto, en otro caso, P_2 es decreciente en T_2 sobre el intervalo $[T, 1]$, por lo que se maximiza en $T_2^* = T$. Por lo tanto $*T_2^* = \text{máx}\{T, 0{,}642\}$. □

Observación Se puede notar que el valor T_1^* que maximiza P_2 es el mismo que maximiza P_1, por la misma razón que justificó el uso de simples derivadas parciales para encontrar el óptimo. Se puede suponer que este comportamiento se seguirá encontrando en las probabilidades siguientes, es decir que los T_i^* que maximizan P_n(para $i < n$) se deducen de los cálculos ya hechos y no dependen de P_n.

2.3.2. Caso general con la regla $\mathcal{R}_n$

A continuación presentamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.18 *Para todo $m \in \mathbb{N}$, llamando $H_m := \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$ (donde $H_0 := 0$), el valor del juego usando la regla asociada a $n \geq 2$ está dado por:*

$$\begin{aligned}P_n(T, T_1, \ldots, T_n) = -T_1 \cdot \ln(T_1) + \sum_{i=2}^{n} T^{i-1} \cdot \Big[&(1 - T_i) \cdot (1 + \ln(T_i)) \\ &+ H_{i-2} - (H_{i-1} - 1) \cdot T_i - \sum_{m=1}^{i-2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) \cdot \frac{1}{T_i^m}\Big].\end{aligned}$$

Además, $\forall n \geq 1$, T_n^* es solución de la siguiente ecuación:

$$-\ln(T_n^*) = 1 + H_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \cdot T_n^{*-i}.$$

Demostración. Probemos este resultado por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Se puede notar que ya se tiene el caso base, ya que la fórmula entrega el mismo resultado como ya calculado para $n = 1$ y 2. Veamos entonces el paso inductivo, suponiendo que la fórmula anterior vale para $n-1$ con $n \geq 3$. Distinguiremos 3 casos para $t_1 \in [0,1]$ el tiempo de entrevista del mejor candidato global en X: $t_1 \in [0,T]$, $t_1 \in (T,T_1]$ y $t_1 \in (T_l,T_{l+1}]$ para todo $l \in [n]$ (como se consideran n barreras, supondremos que $T_{n+1} := 1$ en este caso).

Si $t_1 \in [0,T]$ (evento con probabilidad T), sea $\{s_i\}_{i=1}^n$ el conjunto ordenado de los n mejores candidatos del sampleo, donde $s_1 = 1$. Consideremos el experimento virtual donde ignoramos el mejor candidato del sampleo y lo sacamos del conjunto de todos los candidatos. Si el mejor entrevistado en $(T,1]$ está entrevistado en $(T,T_2]$, no se podrá elegir: en $(T,T_1]$ no se puede elegir por definición, y en $(T_1,T_2]$ no podrá ser mejor que $s_1 = 1$. Si ahora el mejor está entrevistado en $(T_l,T_{l+1}]$ para algún $l \in \{2,\ldots,n\}$, se podrá elegir si es mejor que s_l. Pero con el experimento virtual considerado, como se ignora s_1, s_{l-1} es el $(l-1)$-ésimo mejor candidato del sampleo. Por lo tanto, dado el evento "$s_1 = 1$", la probabilidad de ganar es $P_{n-1}(T,T_2,T_3,\ldots,T_n)$, y se puede expandir este término usando la hipótesis de inducción.

Si $t_1 \in (T,T_1]$, no se puede elegir el mejor candidato entrevistado en $(T,1]$ por definición de la regla. Terminemos entonces estudiando el caso $t_1 \in (T_1,1]$.

Fijemos $l \in [n]$ y supongamos que $t_1 \in (T_l,T_{l+1}]$ (recordemos que $T_{n+1} := 1$). Condicionamos las siguientes probabilidades en el evento $t_1 \in (T_l,T_{l+1}]$. En este caso, el mejor candidato global en X es el mejor candidato entrevistado después del tiempo T, por lo que tenemos que elegirlo para ganar. Llamemos $Q_l := \{q_1,q_2,\ldots,q_l\}$ al conjunto de los l mejores candidatos entrevistados en $[0,t_1)$ donde q_i es el i-ésimo mejor de ellos para todo $i \in [l]$. Llamemos además para todo $i \in [l]$ $u_i \in [0,t_1)$ el tiempo de entrevista de q_i. Distinguemos dos eventos: "existe $j \in \{0,\ldots,l-1\}$ tal que $u_1,\ldots,u_j \in [0,T]$ y $u_{j+1} \in (T,t_1)$" (si $j = 0$, entonces $u_1 \in (T,t_1)$) y "$u_i \in [0,T]$ para todo $i \in [l]$".

Para estudiar el primer evento, fijemos $j \in \{0,\ldots,l-1\}$ tal que $u_1,\ldots,u_j \in [0,T]$ y $u_{j+1} \in (T,t_1)$ (si $j = 0$, $u_1 \in (T,t_1)$). El evento "$u_i \in [0,T]$ para todo $i \in [j]$" tiene probabilidad $\frac{T^j}{t_1^j}$ de ocurrir. Ahora bien, si $u_{j+1} > T$, se gana si y sólo si $u_{j+1} \leq T_{j+1}$. En efecto, si nadie ha sido elegido antes de entrevistar a q_{j+1}, q_{j+1} es récord parcial ($q_1,\ldots,q_j$ son los únicos candidatos mejores que q_{j+1} y están en el sampleo), y q_{j+1} no se elige solamente si se entrevista antes del tiempo T_l; en otro caso se cumplirían las tres condiciones que permiten elegirlo, y se perdería al no aceptar el candidato entrevistado en t_1. Por lo tanto, dado el evento "$u_i \in [0,T]$ para todo $i \in [j]$" que tiene probabilidad $\frac{T^j}{t_1^j}$, la probabilidad del evento "$u_{j+1} > T$ y se gana" es $\frac{T_{j+1}}{t_1}$.

Para estudiar el segundo evento, basta con notar que nadie podrá ser elegido antes de t_1. En efecto, nadie será mejor que q_i en (T_i,T_{i+1}) para todo $i \in [l-1]$ y nadie será mejor que q_l en (T_l,t_1). 1 es entonces el primer elemento que pueda ser récord parcial y mejor que q_l en $(T_l,T_{l+1}]$ dado que nadie ha sido elegido antes de t_1. Por lo tanto, la probabilidad de ganar dado el evento "$u_i \in [0,T]$ para todo $i \in [l]$" es 1, y la probabilidad del evento "$u_i \in [0,T]$ para todo $i \in [l]$" es $\frac{T^l}{t_1^l}$.

Por lo tanto, para obtener el valor del juego asociado a la regla n, queda finalmente:

1. Sumar las probabilidades de ganar con los eventos "existe j tal que $u_1,\ldots,u_j \in [0,T]$ y $u_{j+1} \in (T,t_1)$" sobre $j \in \{0,\ldots,l-1\}$ y la probabilidad de ganar con el evento "$u_i \in [0,T]$ para todo $i \in [l]$",
2. Integrar las probabilidades sobre $t_1 \in (T_l, T_{l+1}]$ (recordemos que $T_{n+1} = 1$),
3. Sumar todas las integrales sobre $l \in [n]$ (recordemos que se pierde si $t_1 \in (T, T_1]$),
4. Agregar el término $T \cdot P_{n-1}(T, T_2, T_3, \ldots, T_n)$ que representa el caso $t_1 \in [0,T]$.

Esto entrega la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
P_n(T,T_1,\ldots,T_n) &= T\cdot P_{n-1}(T,T_2,\ldots,T_n) + \sum_{l=1}^{n}\int_{T_l}^{T_{l+1}}\left[\sum_{j=0}^{l-2}\left(\frac{T^j\cdot(T_{j+1}-T)}{t_1^{j+1}}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{T^{l-1}\cdot(T_l-\cancel{T})}{t_1^l} + \cancel{\frac{T^{l-1}\cdot T}{t_1^l}}\right] dt_1 \\
&= T\cdot P_{n-1}(T,T_2,\ldots,T_n) + \sum_{l=2}^{n}\sum_{j=0}^{l-2}\int_{T_l}^{T_{l+1}} \frac{T^j\cdot(T_{j+1}-T)}{t_1^{j+1}} dt_1 \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{n}\int_{T_l}^{T_{l+1}} \frac{T^{l-1}\cdot T_l}{t_1^l} dt_1.
\end{aligned}$$

Al intercambiar las sumas sobre j y l se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_n(T,T_1,\ldots,T_n) &= T\cdot P_{n-1}(T,T_2,\ldots,T_n) + \sum_{j=0}^{n-2} T^j\cdot(T_{j+1}-T)\cdot\left[\sum_{l=j+2}^{n}\int_{T_l}^{T_{l+1}}\frac{dt_1}{t_1^{j+1}}\right] \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{n-1} T^j\cdot T_{j+1}\cdot\left[\int_{T_{j+1}}^{T_{j+2}}\frac{dt_1}{t_1^{j+1}}\right].
\end{aligned}$$

Juntando los términos semejantes queda:

$$\begin{aligned}
P_n(T,T_1,\ldots,T_n) &= T\cdot P_{n-1}(T,T_2,\ldots,T_n) + \sum_{j=0}^{n-2}\left[T^j\cdot T_{j+1}\cdot\int_{T_{j+1}}^{1}\frac{dt_1}{t_1^{j+1}} - T^{j+1}\cdot\int_{T_{j+2}}^{1}\frac{dt_1}{t_1^{j+1}}\right] \\
&\qquad + T^{n-1}\cdot T_n\cdot\int_{T_n}^{1}\frac{dt_1}{t_1^n} \\
&= T\cdot P_{n-1}(T,T_2,\ldots,T_n) + T_1\cdot\int_{T_1}^{1}\frac{dt_1}{t_1} - T\cdot\int_{T_2}^{1}\frac{dt_1}{t_1} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-2}\left[T^j\cdot T_{j+1}\cdot\int_{T_{j+1}}^{1}\frac{dt_1}{t_1^{j+1}} - T^{j+1}\cdot\int_{T_{j+2}}^{1}\frac{dt_1}{t_1^{j+1}}\right] + T^{n-1}\cdot T_n\cdot\int_{T_n}^{1}\frac{dt_1}{t_1^n}.
\end{aligned}$$

Dado que $\int_a^b \frac{dt_1}{t_1^m} = \left[-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{t^{m-1}}\right]_{t=a}^{b}$ para $m \geq 2$ y que $\int_a^b \frac{dt_1}{t_1} = [\ln(t)]_{t=a}^{b}$, se simplifica lo anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
P_n(T,T_1,\ldots,T_n) &= T\cdot P_{n-1}(T,T_2,\ldots,T_n) - T_1\cdot\ln(T_1) + T\cdot\ln(T_2) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-2}\left[T^j\cdot T_{j+1}\cdot\frac{1}{j}\cdot\left(\frac{1}{T_{j+1}^j}-1\right) - T^{j+1}\cdot\frac{1}{j}\cdot\left(\frac{1}{T_{j+2}^j}-1\right)\right] \\
&\qquad + T^{n-1}\cdot T_n\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\left(\frac{1}{T_n^{n-1}}-1\right).
\end{aligned}$$

Tratemos ahora de agrupar los términos con las mismas potencias de T:

$$
\begin{aligned}
P_n(T, T_1, \ldots, T_n) &= T \cdot P_{n-1}(T, T_2, \ldots, T_n) - T_1 \cdot \ln(T_1) + T \cdot (1 - T_2) + T \cdot \ln(T_2) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} T^k \cdot \left[T_{k+1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{T_{k+1}^k} - 1 \right) - \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{1}{T_{k+1}^{k-1}} - 1 \right) \right] \\
&= T \cdot P_{n-1}(T, T_2, \ldots, T_n) - T_1 \cdot \ln(T_1) + T \cdot (1 - T_2) + T \cdot \ln(T_2) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} T^k \cdot \left[\frac{1}{k-1} - \frac{T_{k+1}^k}{k} - \frac{1}{T_{k+1}^{k-1}} \cdot \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \right].
\end{aligned}
$$

Terminamos reemplazando $P_{n-1}(T, T_2, \ldots, T_n)$ usando la hipótesis de inducción:

$$
\begin{aligned}
P_n(T, T_1, \ldots, T_n) &= -T \cdot T_2 \cdot \ln(T_2) + \sum_{i=2}^{n-1} T^i \cdot \Bigg[(1 - T_{i+1}) \cdot (1 + \ln(T_{i+1})) \\
&\quad + H_{i-2} - (H_{i-1} - 1) \cdot T_{i+1} - \sum_{m=1}^{i-2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \cdot \frac{1}{T_{i+1}^m} \Bigg] \\
&\quad - T_1 \cdot \ln(T_1) + T \cdot (1 - T_2) + T \cdot \ln(T_2) \\
&\quad + \sum_{m=2}^{n-1} T^m \cdot \left[\frac{1}{m-1} - \frac{T_{m+1}^m}{m} - \frac{1}{T_{m+1}^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \right].
\end{aligned}
$$

Solamente queda juntar todos los términos con la misma potencia de T para llegar a la fórmula buscada:

$$
\begin{aligned}
P_n(T, T_1, \ldots, T_n) &= -T_1 \cdot \ln(T_1) + \sum_{i=2}^{n} T^{i-1} \cdot \Bigg[(1 - T_i) \cdot (1 + \ln(T_i)) \\
&\qquad + H_{i-2} - (H_{i-1} - 1) \cdot T_i - \sum_{m=1}^{i-2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \cdot \frac{1}{T_i^m} \Bigg].
\end{aligned}
$$

Encontremos ahora la ecuación que cumple T_n^*, el valor de T_n que maximiza P_n. Notamos que la derivada parcial de P_n con respecto a T_n es:

$$
\frac{\partial P_n}{\partial T_n}(T, T_1, \ldots, T_n) = T^{n-1} \cdot \left[-1 - \ln(T_n) + \frac{1}{T_n} - \cancel{1} - H_{n-1} + \cancel{1} + \sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{(m+1) \cdot T_n^{m+1}} \right].
$$

Igualando a 0, se obtiene la siguiente igualdad dividiendo por T^{n-1} (ya que $T \neq 0$):

$$
-\ln(T_n) - \left[1 + H_{n-1} - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{1}{(m+1) \cdot T_n^{m+1}} \right] = 0,
$$

que es equivalente a la ecuación que deseamos probar. $\square$

Corolario 2.19 *Las probabilidades P_n cumplen la siguiente recurrencia para todo $n \geq 2$:*

$$P_n(T, T_1, \dots, T_n) = P_{n-1}(T, T_1, \dots, T_{n-1}) + T^{n-1} \cdot \Big[(1 - T_n) \cdot (1 + \ln(T_n)) + H_{n-2} - (H_{n-1} - 1) \cdot T_n - \sum_{m=1}^{n-2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) \cdot \frac{1}{T_n^m}\Big].$$

Demostración. Se calcula la diferencia $P_n(T, T_1, \dots, T_n) - P_{n-1}(T, T_1, \dots, T_{n-1})$ reemplazando los valores de cada probabilidad por su valor gracias al teorema anterior, y el resultado sale de inmediato. □

Observación Este resultado puede permitir realizar algoritmos más eficientes para calcular las probabilidades P_n.

2.4. Resultados computacionales

Usando el teorema anterior se calculan con *Maple* los valores óptimos de T que maximizan las probabilidades $P_n(T, T_1, \dots, T_n)$ para $n \in [20]$. Aparecen en los siguientes gráficos, a la izquierda en función de la regla $\mathcal{R}_n$ usada y a la derecha dispuestos en el segmento $[0, 1]$:

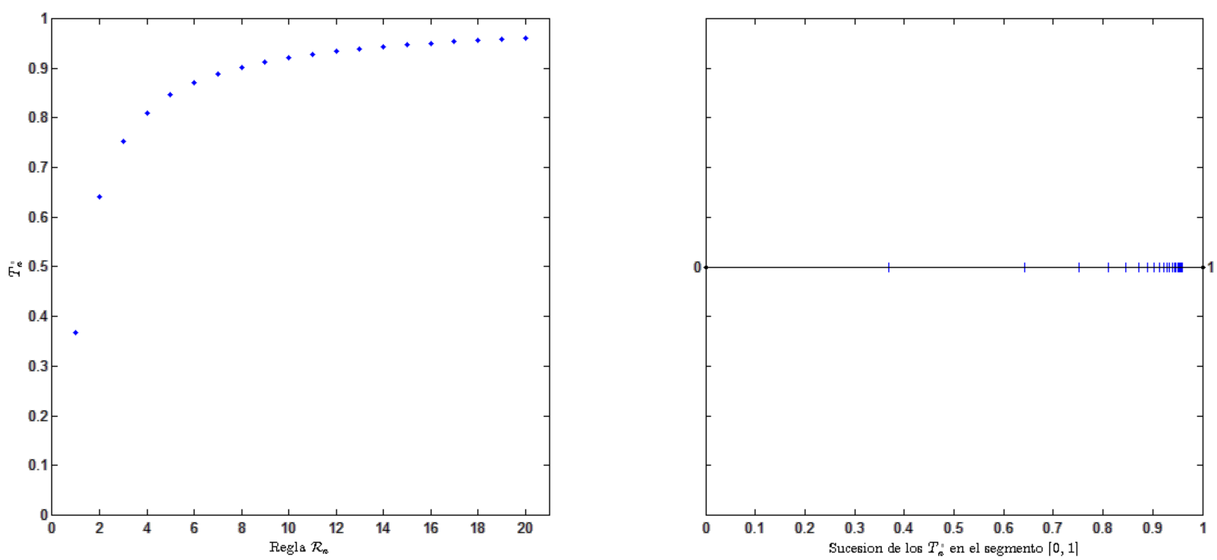

Figura 2.5: Tiempos óptimos asociados a las 20 primeras reglas, a la izquierda representados en función del número n asociado a la regla $\mathcal{R}_n$, y a la derecha representados en el segmento $[0, 1]$.

Se puede además encontrar a continuación una tabla que reune algunos resultados numéricos obtenidos sobre este estudio del caso contínuo. Para varias reglas $\mathcal{R}_n$ se obtienen los tiempos T_n^* óptimos asociados, así como los valores óptimos del juego asociados:

n	T_n^*	T^*	$P_n(T^*, T_1^*, \ldots, T_n^*)$	n	T_n^*	T^*	$P_n(T^*, T_1^*, \ldots, T_n^*)$
1	0.3679	$\leq$0.3679	0.3679	11	0.9284	0.7774	0.5419
2	0.6422	0.4490	0.4490	12	0.9342	0.7894	0.5443
3	0.7518	0.5171	0.4806	13	0.9392	0.8042	0.5464
4	0.8102	0.5864	0.4977	14	0.9435	0.8146	0.5484
5	0.8464	0.6535	0.5105	15	0.9472	0.8209	0.5501
6	0.8710	0.6776	0.5197	16	0.9504	0.8274	0.5516
7	0.8888	0.7010	0.5261	17	0.9533	0.8347	0.5529
8	0.9023	0.7267	0.5310	18	0.9559	0.8439	0.5541
9	0.9129	0.7550	0.5354	19	0.9582	0.8495	0.5552
10	0.9214	0.7662	0.5390	20	0.9602	0.8535	0.5562

Figura 2.6: Valores óptimos del juego para algunas reglas $\mathcal{R}_n$, junto con los valores T_n^* y T^* que las optimizan. Precisión de los cálculos: 10^{-4}.

Estos valores van creciendo con el rango parcial del candidato entrevistado en $[0, T]$ con el cual se están comparando los candidatos actualmente entrevistados, lo que se podía esperar.

En el gráfico siguiente aparecen las curvas representativas de los valores del juego usando las reglas asociadas a $n \leq 20$:

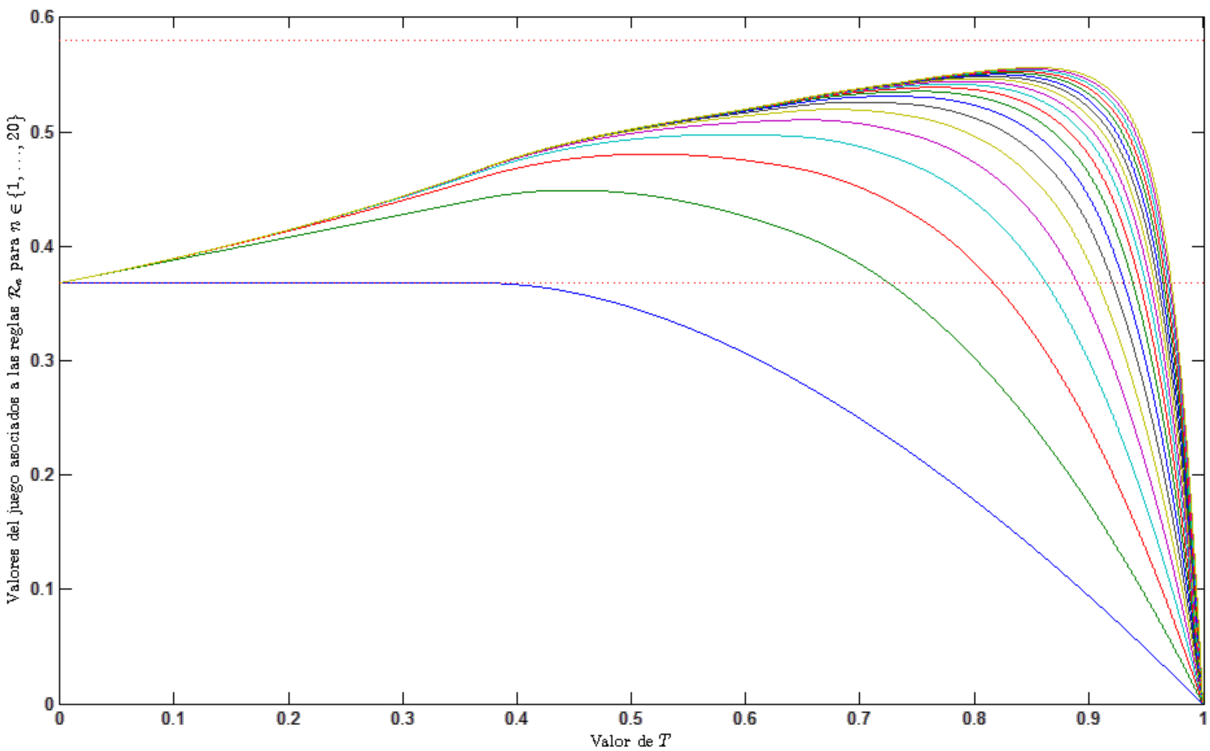

Figura 2.7: Valores del juego asociados a las 20 primeras reglas en función de T, comparadas con los valores del juego usando estrategias óptimas para los problemas (SP) y (FISP) (rectas de puntos rojas con ecuaciones respectivas $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$).

Salvo en el caso $n = 1$, todas estas funciones son positivas, parten de $\frac{1}{e}$ en $T = 0$, crecen hasta llegar a un valor óptimo, y luego decrecen hasta 0 en $T = 1$, como se podía esperar; para $n = 1$, el valor del juego óptimo para el (TCSP) se entiende más sencillamente como el valor óptimo del (SP) hasta $T = \frac{1}{e}$, donde vale lo mismo que para el (SP), lo que se debe a la definición de T_1^* como máximo entre T y el valor óptimo calculado $\frac{1}{e}$.

Se observa también que el valor del T óptimo crece con la regla usada $\mathcal{R}_n$, esto es con el número de barreras usadas, y que la probabilidad óptima asociada también crece con el número de barreras consideradas, lo que también se puede entender bastante bien. De hecho, usando el Teorema 2.18, al considerar una barrera más siempre se obtiene una probabilidad que es: la probabilidad obtenida usando todas las barreras anteriores, **más** un término positivo relacionado a la nueva barrera agregada.

En los gráficos a continuación, se comparan los resultados obtenidos en las modelaciones discreta y contínua. En él de la izquierda, se superponen el valor óptimo del juego en el caso discreto para $N = 100.000$ (la curva rosada más encima) y los valores del juego en el caso contínuo obtenidos justo antes hasta $n = 20$; en el de la derecha, se superponen las barreras obtenidas en el caso discreto para $N = 100.000$ (en azul) y las barreras obtenidas en el caso contínuo via la conjetura (con cruces rojas):

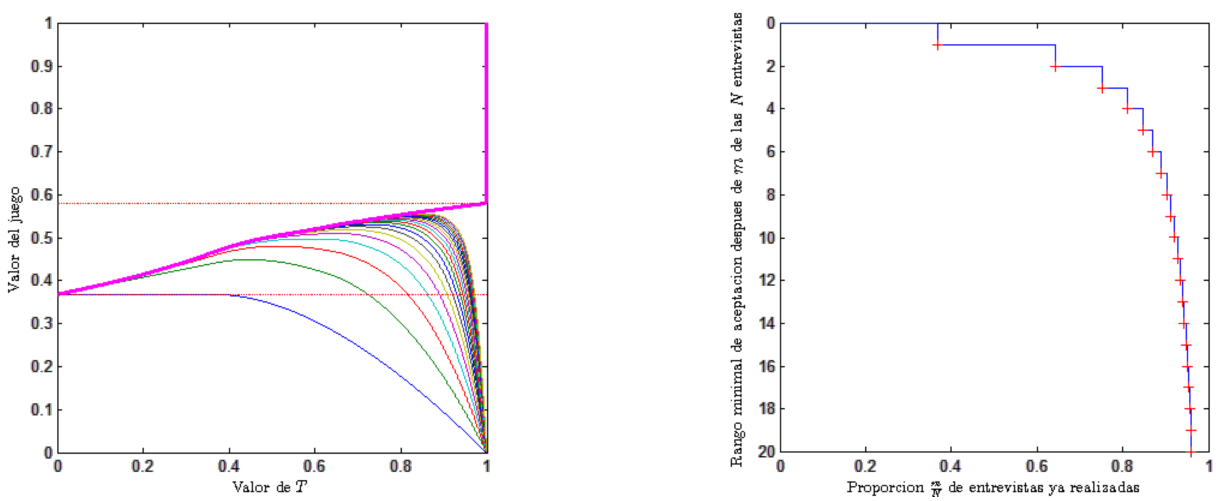

Figura 2.8: A la izquierda: comparación de los valores del juego para las 20 primeras reglas en el caso contínuo con el valor óptimo encontrado en el caso discreto para $N = 100.000$ (comparadas con las rectas de puntos rojas $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas a los valores del juego usando estrategias óptimas respectivamente para los problemas (SP) y (FISP)); a la derecha: comparación de los tiempos de barrera encontrados en el caso contínuo (cruces rojas) con las barreras encontradas en el caso discreto para $N = 100.000$.

Se puede observar que cuando más barreras se consideran en el caso contínuo, más el valor del juego asociado viene a pegarse a la curva óptima, por lo menos para pequeños valores de T. En efecto, en el caso discreto, cuando menos candidatos hay después del sampleo, más probabilidad se tiene para contratar al mejor de ellos; por eso siempre se tiene un valor del juego de 1 para $k = N - 1$, ya que hay que encontrar el mejor candidato de un conjunto de 1 solo candidato. Sin embargo, en el caso contínuo, cuando más pequeño se ve el conjunto de tiempos de entrevistas donde se busca al mejor candidato, más pequeña es su medida, hasta llegar a 0 cuando $T = 1$, por lo que el valor del juego va decreciendo después de cierto T.

Por otro lado, las barreras obtenidas por cada método parecen coincidir perfectamente entre sí. Por lo tanto, la regla $\mathcal{B}_\infty$ (vista como extensión límite para $n \to \infty$ de la regla $\mathcal{R}_n$, es decir considerando una infinidad de barreras distintas) parece ser la extensión natural de la regla óptima para el (TCSP) encontrada en el caso discreto, y los valores de las barreras también parecen ser los valores límites (para $N \to \infty$) de las barreras encontradas en el caso discreto. Además, al considerar una infinidad de barreras distintas en el caso contínuo, se debería a priori obtener directamente el valor del juego asociado via el cálculo de la serie obtenida (aunque no se sabe si se puede calcular bien facilmente esta serie).

Ahora bien, en el estudio realizado para el caso contínuo con las reglas $\mathcal{R}_n$, no se consideró un tiempo T_∞ después del cuál solamente se compara un candidato entrevistado en $t \in (T, 1]$ con el récord parcial dentro de los ya entrevistados en (T, t). De hecho, esta barrera T_∞ aparece en la regla óptima encontrada en el estudio del (TCSP) discreto, cuando el valor de la barrera $\bar{l}(m)$ es $k+2$. A priori, parece que una familia de reglas considerando esta barrera T_∞ permitiría mejorar el valor del juego del (TCSP) contínuo si se considera solamente un número finito de barreras.

Sin embargo, no se consideró esta barrera, y esto por una razón bien específica (a parte del hecho que esta barrera vuelve los cálculos de valor del juego más complicados). Como ya se dijo, la regla óptima en el caso contínuo parece ser la extensión de las reglas $\mathcal{R}_n$ con una infinidad de barreras. Uno puede intuir que no tiene sentido ignorar la información recogida en el sampleo inicial después de cierto tiempo T_∞ ya que esta información es infinita con probabilidad 1. Se estudiaron las reglas $\mathcal{R}_n$ teniendo en mente que la regla extendida con infinitas barreras nunca ignora la información del sampleo (ya que es infinita), por lo que no tenía sentido considerar una barrera más que no tiene sentido con información infinita, aunque tenga mucho sentido con un número finito de barreras.

Capítulo 3

(TCSP) con memoria finita mínima

En el capítulo anterior, no se consideró ninguna restricción en las capacidades de memoria del empleador, quien podía acordarse de cualquier candidato entrevistado en el sampleo inicial. En este capítulo se impondrá un límite en el número M de candidatos del sampleo que se pueden guardar. En particular, se estudia el caso $M = 1$ con memoria de sampleo unitaria, ya que el caso $M = 0$ equivale al Problema de la Secretaria tradicional restringido a la fase post-sampleo. La incognita reside entonces en cuál segundo recordado elegir, esto es cuál candidato del sampleo guardar en memoria junto con el récord para ser lo más eficiente posible en función del tamaño del sampleo.

Notemos que las reglas de barrera $\mathcal{B}_i$ estudiadas en la Sección 1.2 cumplen con el requisito de memoria $M = 1$. En efecto aunque no se dijo explicítamente, al usar la regla $\mathcal{B}_i$ se guarda en memoria el récord parcial entrevistado después de T y el i-ésimo mejor candidato entrevistado antes de T. El objetivo de este capítulo será entonces encontrar la forma de la regla óptima asociada al (TCSP) con memoria de sampleo unitaria en ambas formulaciones discreta y contínua, una forma más eficiente que la sugerida en la Sección 1.2.

3.1. Forma del algoritmo óptimo en el caso discreto

Al igual que en el Capítulo 2, hay N candidatos y los k primeros forman el sampleo inicial. Estos datos son fijos para toda la sección. El objetivo de esta sección es encontrar la forma de la regla óptima asociada al (TCSP) con memoria de sampleo unitaria y las propiedades que verifica.

3.1.1. Definición de la regla óptima y primeros resultados

Definición 3.1 ***Reglas estudiadas***

Para todo $i \in [k]$, se define s_i como el i-ésimo mejor candidato del sampleo. Se deifinen también las siguientes reglas de elección para el (TCSP) con memoria de sampleo unitaria:

- *la regla $\mathcal{S}_i$ donde el único elemento del sampleo recordado es s_i,*
- *la regla $\mathcal{S}^*$ que guarda en memoria el candidato del sampleo que maximiza la probabilidad de ganar, es decir es la regla $\mathcal{S}_i$ más eficiente para k y N dados.*

Definición 3.2 ***Estado***

*Sean $m \in \{k+1, \ldots, N\}$ e $i \in [k]$. Si se está entrevistando el candidato m usando la regla $\mathcal{S}_i$, diremos que estamos en el **estado** (m, i).*

Definición 3.3 ***Probabilidades condicionales asociadas a $\mathcal{S}^*$***

Para $i \in [k]$, $m \in \{k+1, \ldots, N\}$, se denomina r el récord parcial en $\{k+1, \ldots, m\}$ y se define el evento $S_m :=$"los $m-1$ primeros candidatos han sido rechazados". Se definen:

$$\begin{aligned}
A_0(m,i) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|\, S_m, r \prec s_i, \text{se acepta } m),\\
A_1(m,i) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|\, S_m, r \succ s_i, \text{se acepta } m),\\
R_0(m,i) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|\, S_m, r \prec s_i, \text{se rechaza } m),\\
R_1(m,i) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|\, S_m, r \succ s_i, \text{se rechaza } m),\\
Z_0(m,i) &= \max\{A_0(m,i), R_0(m,i)\},\\
Z_1(m,i) &= \max\{A_1(m,i), R_1(m,i)\}.
\end{aligned}$$

Notemos además que para $m = N$ se tiene que $A_0(N,i) = A_1(N,i) = Z_0(N,i) = Z_1(N,i) = 1$ y que $R_0(N,i) = R_1(N,i) = 0$ para todo $i \in [k]$.

Observación En A_0 y A_1 se puede precisar que se gana si y sólo si m es el récord global en $\{k+1, \ldots, N\}$, por lo que para aceptar el candidato m se necesita que m sea récord parcial en $\{k+1, \ldots, m\}$. En cambio, en la definición de R_0 y R_1, el candidato m puede ser rechazado por cualquier razón, sea récord parcial en $\{k+1, \ldots, m\}$ o no.

Para simplificar considerablemente las expresiones de A_0 y A_1, se realiza primero el siguiente estudio preliminar.

Definición 3.4 ***Funciones auxiliares***

Se definen, para todo $i \leq k \leq n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_0(n,k) := \sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{k^{\underline{j-1}}}{n^{\underline{j}}}, \quad F_1(n,k) := \sum_{j=1}^{i} \frac{k^{\underline{j-1}}}{n^{\underline{j}}}, \quad F(n,k) := F_0(n,k) + F_1(n,k) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{k^{\underline{j-1}}}{n^{\underline{j}}}.$$

Lema 3.5 *Para todo $i \leq k \leq n \in \mathbb{N}^*$, $F_0(n,k) = \dfrac{1}{n-k} \cdot \dfrac{k^{\underline{i}}}{n^{\underline{i}}}$.*

Demostración. Vamos a reescribir de distintas maneras F_0 para llegar al resultado.

$$
\begin{aligned}
F_0(n,k) &= \sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{k^{\underline{j-1}}}{n^{\underline{j}}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{k!}{(k-(j-1))!} \cdot \frac{(n-\cancel{1}-(j-\cancel{1}))!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1-k)!}{(n-1-k)!} \\
&= \frac{1}{n \cdot \binom{n-1}{k}} \cdot \sum_{j=i+1}^{k+1} \binom{n-j}{n-(k+1)}.
\end{aligned}
$$

Definiendo $\overline{n} := n-(k+1)$ y usando la identidad $\displaystyle\sum_{l=0}^{K} \binom{n+l}{n} = \binom{n+K+1}{n+1}$ se deduce:

$$
\begin{aligned}
F_0(n,k) &= \frac{1}{n \cdot \binom{n-1}{k}} \cdot \sum_{j=i+1}^{k+1} \binom{\overline{n}+k+1-j}{\overline{n}} = \frac{1}{n \cdot \binom{n-1}{k}} \cdot \sum_{l=0}^{k-i} \binom{\overline{n}+l}{\overline{n}} \\
&= \frac{1}{n \cdot \binom{n-1}{k}} \cdot \binom{\overline{n}+k-i+1}{\overline{n}+1} = \frac{1}{n \cdot \binom{n-1}{k}} \cdot \binom{n-i}{n-k} = \frac{\frac{(n-i)!}{(n-k)!\cdot(k-i)!}}{\frac{n\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}} = \frac{1}{n-k} \cdot \frac{k^{\underline{i}}}{n^{\underline{i}}}. \square
\end{aligned}
$$

Corolario 3.6 *Para todo $i \leq k \leq n \in \mathbb{N}^*$:*

$$
F(n,k) = \frac{1}{n-k}, \qquad F_1(n,k) = \frac{1}{n-k} \cdot \left(1 - \frac{k^{\underline{i}}}{n^{\underline{i}}}\right).
$$

Demostración. La expresión de F se deduce de la de F_0 evaluando en $i = 0$ (se puede comprobar que no cambia en nada todo el razonamiento asociado). Luego la expresión de F_1 se deduce de la relación $F_0 + F_1 \equiv F$. $\square$

Con estas fórmulas más simples para F, F_0 y F_1, se pueden estudiar A_0 y A_1.

Teorema 3.7 $\forall\ m \in \{k+1, \cdots, N\}$, $\forall\ i \in [k]$*:*

$$
A_0(m,i) = \frac{m-k}{N-k} \cdot \frac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}, \qquad A_1(m,i) = A_0(m,i) \cdot \frac{N^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}}.
$$

Demostración. Modifiquemos la expresión de A_0 usando probabilidades totales:

$$
\begin{aligned}
A_0(m,i) &= \mathbb{P}(\text{ganar} \mid S_m, r \prec s_i,\ \text{se acepta } m) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{ganar}, S_m, r \prec s_i,\ \text{se acepta } m)}{\mathbb{P}(S_m, r \prec s_i,\ \text{se acepta } m)} \\
&= \frac{\sum_{j=i+1}^{k+1} \mathbb{P}(\text{ganar}, S_m, r \text{ es } j\text{-ésimo de } [m], \text{se acepta } m = r)}{\sum_{j=i+1}^{k+1} \mathbb{P}(S_m, r \text{ es } j\text{-ésimo de } [m], \text{se acepta } m = r)},
\end{aligned}
$$

donde se distinguen los casos para j el rango parcial de r en $[m]$. Se tiene que $j \geq i+1$ ya que r tiene rango parcial en $[m]$ peor que s_i (que es el i-ésimo mejor candidato de $[m]$), y $j \leq k+1$ pues en el peor caso $r \prec s_k$, donde r tendría rango parcial $j = k+1$ en $[m]$). Luego, para j fijo, la probabilidad del numerador es la probabilidad de ganar al aceptar m si es el j-ésimo mejor candidato de $[m]$. Se gana si y sólo si los $j-1$ mejores de $[m]$ forman parte del sampleo y si el j-ésimo mejor de $[m]$ no está en el sampleo, lo que tiene probabilidad $\dfrac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}} \cdot \dfrac{m-k}{m-(j-1)}$. La probabilidad en el denominador se deduce de manera similar, reemplazando m por N en el argumento anterior. Luego, usando el Lema 3.3 se obtiene:

$$\begin{aligned}
A_0(m,i) &= \frac{\sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{k^{\underline{j-1}}}{N^{\underline{j-1}}} \cdot \frac{\cancel{m-k}}{N-(j-1)}}{\sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}} \cdot \frac{\cancel{m-k}}{m-(j-1)}} = \frac{\sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{k^{\underline{j-1}}}{N^{\underline{j}}}}{\sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j}}}} = \frac{F_0(N,k)}{F_0(m,k)} = \frac{\frac{1}{N-k} \cdot \frac{\cancel{k^{\underline{i}}}}{N^{\underline{i}}}}{\frac{1}{m-k} \cdot \frac{\cancel{k^{\underline{i}}}}{m^{\underline{i}}}} \\
&= \frac{m-k}{N-k} \cdot \frac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}.
\end{aligned}$$

Calculemos ahora $A_1(m,i)$ usando el mismo razonamiento como para A_0, con la diferencia que en este caso m tiene rango parcial en $[m]$ menor que i. Usando el Corolario 3.4:

$$\begin{aligned}
A_1(m,i) &= \mathbb{P}(\text{ganar} |\, S_m, r \succ s,\ \text{se acepta } m) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{ganar},\, S_m, r \succ s_i,\ \text{se acepta } m)}{\mathbb{P}(\ r \succ s_i,\ \text{se acepta } m)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(\text{ganar}, S_m, r \text{ es } j\text{-ésimo de } [m], \text{ se acepta } m = r)}{\sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(S_m, r \text{ es } j\text{-ésimo de } [m], \text{ se acepta } m = r)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{i} \frac{k^{\underline{j-1}}}{N^{\underline{j-1}}} \cdot \frac{\cancel{m-k}}{N-(j-1)}}{\sum_{j=1}^{i} \frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j-1}}} \cdot \frac{\cancel{m-k}}{m-(j-1)}} = \frac{\sum_{j=1}^{i} \frac{k^{\underline{j-1}}}{N^{\underline{j}}}}{\sum_{j=1}^{i} \frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j}}}} = \frac{F_1(N)}{F_1(m)} = \frac{\frac{1}{N-k} \cdot \left(1 - \frac{k^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}\right)}{\frac{1}{m-k} \cdot \left(1 - \frac{k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}}}\right)} \\
&= \frac{m-k}{N-k} \cdot \frac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}} \cdot \frac{N^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}} = A_0(m,i) \cdot \frac{N^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}}.
\end{aligned}$$

□

Observación Se puede comprobar con estas fórmulas cerradas que $A_0(N,i) = 1 = A_1(N,i)$ para todo $i \in [k]$.

Corolario 3.8 $\forall\ m \in \{k+1, \ldots, N\},\ \forall i \in [k],\ A_0(m,i) \leq A_1(m,i)$.

Demostración. Esto es directo del Teorema 3.7 ya que $A_1(m,i) = A_0(m,i) \cdot \dfrac{N^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}}$, donde $\dfrac{N^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}} - k^{\underline{i}}} \geq 1\ \forall\ m \in \{k+1, \ldots, N\}$. □

Para demostrar monotonías de A_0 y A_1 en i y m, se necesita el siguiente lema.

Lema 3.9 $\forall\ m \in \{k+1, \ldots, N\},\ \forall\ i \in [k],\ A_0(m,i) \leq \dfrac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}} \leq A_1(m,i-1)$.

Demostración. La primera desigualdad es directa del hecho que $A_0(m,i) = \dfrac{m-k}{N-k}\cdot\dfrac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}$, donde $\dfrac{m-k}{N-k} \leq 1$. Para demostrar la segunda desigualdad, manejaremos una de sus expresiones obtenida en la demostración del Teorema 3.7:

$$A_1(m,i-1) = \frac{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{k^{\underline{j-1}}}{N^{\underline{j}}}}{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j}}}} = \frac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{k^{\underline{j-1}}\cdot N^{\underline{i}}}{N^{\underline{j}}}}{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{k^{\underline{j-1}}\cdot m^{\underline{i}}}{m^{\underline{j}}}} = \frac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{i-1}k^{\underline{j-1}}\cdot(N-j)^{\underline{i-j}}}{\sum_{j=1}^{i-1}k^{\underline{j-1}}\cdot(m-j)^{\underline{i-j}}} \geq \frac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}. \quad \square$$

Teorema 3.10 *A_0 y A_1 son ambas crecientes en m y decrecientes en i.*

Demostración. El crecimiento en m para A_0 se deduce del hecho que $m \leq N$ y que, gracias al Teorema 3.7, $A_0(m,i) = \dfrac{m-k}{N-k}\cdot\dfrac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}$. Para A_1, se usa la siguiente expresión encontrada en la demostración del Teorema 3.7, y se concluye la afirmación del teorema del hecho que $m \leq N$: $A_1(m,i) = \dfrac{m-k}{N-k}\cdot\dfrac{1-\frac{k^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}}}{1-\frac{k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}}}}$.

Estudiemos ahora el decrecimiento en i de A_0 y A_1. En efecto, usando el Teorema 3.7 para A_0, se tiene que:

$$A_0(m,i) = \frac{m-k}{N-k}\cdot\frac{m^{\underline{i}}}{N^{\underline{i}}} \geq \frac{m-k}{N-k}\cdot\frac{m^{\underline{i+1}}}{N^{\underline{i+1}}} = A_0(m,i+1).$$

Además, usando la expresión al final de la demostración del Lema 3.9 para A_1 se tiene:

$$\begin{aligned}
A_1(m,i+1) &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{i+1}\frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j}}}}\cdot\left[\sum_{j=1}^{i}\frac{k^{\underline{j-1}}}{N^{\underline{j}}} + \frac{k^{\underline{i}}}{N^{\underline{i+1}}}\right] = \frac{1}{\sum_{j=1}^{i+1}\frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j}}}}\cdot\left[A_1(m,i)\cdot\sum_{j=1}^{i}\frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j}}} + \frac{k^{\underline{i}}}{N^{\underline{i+1}}}\right] \\
&= A_1(m,i) + \frac{1}{\sum_{j=1}^{i+1}\frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j}}}}\cdot\left[\frac{k^{\underline{i}}}{N^{\underline{i+1}}} - A_1(m,i)\frac{k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i+1}}}\right] \\
&= A_1(m,i) - \frac{\frac{k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i+1}}}}{\sum_{j=1}^{i+1}\frac{k^{\underline{j-1}}}{m^{\underline{j}}}}\cdot\left[A_1(m,i) - \frac{m^{\underline{i+1}}}{N^{\underline{i+1}}}\right] \leq A_1(m,i). \qquad \square
\end{aligned}$$

3.1.2. Recurrencia para R_0 y R_1

El objetivo de esta parte será demostrar el teorema más importante de esta sección que está a continuación:

Teorema 3.11 *A N y k fijos, para todo $i \in [k]$, el valor del juego asociado a la regla $\mathcal{S}_i$ está dado por $R_0(k,i)$ donde para todo $m \in \{k+1,\dots,N-1\}$:*

$$\begin{aligned}
R_0(m,i) &= \left(1-\frac{i}{m+1}\right)\cdot\left[\left(1-\frac{1}{m+1-k}\right)\cdot R_0(m+1,i) + \frac{1}{m+1-k}\cdot Z_0(m+1,i)\right] \\
&\quad + \frac{i}{m+1}\cdot Z_1(m+1,i), \\
R_1(m,i) &= \mathrm{coef}(m+1,i)\cdot R_1(m+1,i) + (1-\mathrm{coef}(m+1,i))\cdot Z_1(m+1,i),
\end{aligned}$$

donde $\operatorname{coef}(m+1,i) = \dfrac{\left(1-\frac{1}{m+1-k}\right)\cdot\left(1-\frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}}\right)}{\left(1-\frac{k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}}}\right)}$.

Observación No se definió R_0 para $m=k$, pero al extender la definición de R_0 en k usando la recurrencia dada por el teorema a este valor corresponde el valor del juego.

Se demostrará primero la recurrencia del Teorema 3.11, antes de demostrar cuál es el valor del juego asociado a la regla $\mathcal{S}_i$.

Teorema 3.12 $\forall\ m \in \{k+1,\dots,N-1\},\ \forall\ i \in [k]$,

$$\begin{aligned} R_0(m,i) &= \left(1-\frac{i}{m+1}\right)\cdot\left[\left(1-\frac{1}{m+1-k}\right)\cdot R_0(m+1,i) + \frac{1}{m+1-k}\cdot Z_0(m+1,i)\right] \\ &\quad + \frac{i}{m+1}\cdot Z_1(m+1,i), \\ R_1(m,i) &= \operatorname{coef}(m+1,i)\cdot R_1(m+1,i) + (1-\operatorname{coef}(m+1,i))\cdot Z_1(m+1,i), \end{aligned}$$

donde $\operatorname{coef}(m+1,i) = \dfrac{\left(1-\frac{1}{m+1-k}\right)\cdot\left(1-\frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}}\right)}{\left(1-\frac{k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}}}\right)}$.

Demostración. Fijamos $i \in [k]$, $m \in \{k+1,\dots,N-1\}$, veamos un par de notaciones que vamos a usar en esta demostración:

- Llamaremos r_m y r_{m+1} respectivamente a los récords parciales en $\{k+1,\dots,m\}$ y en $\{k+1,\dots,m+1\}$;
- Llamaremos s_i al i-ésimo mejor candidato del sampleo, guardado en memoria;
- Denotaremos por A el evento "$r_m \prec s_i$" y por $\overline{A}$ el evento "$r_m \succ s_i$";
- Denotaremos por E_1 el evento "$r_{m+1} = m+1$" (es decir el evento "$m+1$ es el nuevo récord parcial") y por E_2 el evento "$r_{m+1} \succ s_i$". Notemos entonces $\overline{E_1}$ es el evento "$r_{m+1} = r_m$" y $\overline{E_2}$ es el evento "$r_{m+1} \prec s_i$").

Además, los eventos del tipo "se acepta m" y "se rechaza m" no serán considerados en los cálculos, ya que son independientes de las configuraciones de estudio; representan lo que hace el algoritmo de selección, que es determinista.

1) Empecemos con la demostración de la recurrencia asociada a $R_0(m,i)$. Se rechaza el candidato m por cualquier motivo y se tiene que $r_m \prec s_i$. Luego se entrevista el candidato $m+1$, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} R_0(m,i) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_m \prec s_i, \text{se rechaza } m) = \mathbb{P}(\text{ganar}|A) \\ &= \mathbb{P}(\text{ganar}|A,E_1,E_2)\cdot\mathbb{P}(E_1,E_2|A) + \mathbb{P}(\text{ganar}|A,E_1,\overline{E_2})\cdot\mathbb{P}(E_1,\overline{E_2}|A) \\ &\quad + \mathbb{P}(\text{ganar}|A,\overline{E_1},\overline{E_2})\cdot\mathbb{P}(\overline{E_1},\overline{E_2}|A). \end{aligned}$$

En efecto, al condicionar sobre E_1 y E_2, obtenemos 4 casos distintos que considerar. Sin embargo, $\mathbb{P}(\overline{E_1},E_2|A) = 0$ ya que el evento "$r_m = r_{m+1} \succ s_i | r_m \prec s_i$" tiene probabilidad 0.

Ahora quedan tres términos: $\mathbb{P}(\text{ganar}|A, E_1, E_2)$, $\mathbb{P}(\text{ganar}|A, E_1, \overline{E_2})$ y $\mathbb{P}(\text{ganar}|A, \overline{E_1}, \overline{E_2})$. Estos se pueden asimilar a Z_1, Z_0 y R_0 de la manera que sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{ganar}|A, E_1, E_2) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_m \prec s_i, m+1 = r_{m+1} \succ s_i) \\
&= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_{m+1} \succ s_i, r_{m+1} = m+1) = Z_1(m+1, i), \\
\mathbb{P}(\text{ganar}|A, E_1, \overline{E_2}) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_m \prec s_i, m+1 = r_{m+1} \prec s_i) \\
&= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_{m+1} \prec s_i, r_{m+1} = m+1) = Z_0(m+1, i), \\
\mathbb{P}(\text{ganar}|A, \overline{E_1}, \overline{E_2}) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_m \prec s_i, r_{m+1} = r_m) \\
&= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_{m+1} \prec s_i, r_{m+1} \neq m+1) = R_0(m+1, i),
\end{aligned}$$

ya que cuando el candidato $m+1$ es récord, el algoritmo opta por la opción que tiene la probabilidad más alta de ganar entre elegirlo o no, lo que representan Z_0 y Z_1. En cambio, si no es récord, se rechaza ya que la probabilidad de ganar eligiendo un candidato que no es récord parcial es 0. Concluimos que:

$$\begin{aligned}
R_0(m, i) &= Z_1(m+1, i) \cdot \mathbb{P}(E_1, E_2|A) + Z_0(m+1, i) \cdot \mathbb{P}(E_1, \overline{E_2}|A) \\
&\quad + R_0(m+1, i) \cdot \mathbb{P}(\overline{E_1}, \overline{E_2}|A) \\
&= Z_1(m+1, i) \cdot \frac{\mathbb{P}(E_1, E_2, A)}{\mathbb{P}(A)} + Z_0(m+1, i) \cdot \frac{\mathbb{P}(E_1, \overline{E_2}, A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&\quad + R_0(m+1, i) \cdot \frac{\mathbb{P}(\overline{E_1}, \overline{E_2}, A)}{\mathbb{P}(A)}.
\end{aligned}$$

Calculemos cada término:

1. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(r_m \prec s_i)$: el evento A ocurre si y sólo si los i mejores candidatos de $[m]$ están en $[k]$, lo que tiene probabilidad $\frac{k}{m} \cdot \frac{k-1}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{k-(i-1)}{m-(i-1)} = \frac{k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}}}$. Luego $\mathbb{P}(A) = \frac{k^{\underline{i}}}{m^{\underline{i}}}$.
2. $\mathbb{P}(E_1, E_2, A)$: los eventos E_1, E_2 y A dependen solamente del orden relativo de los candidatos en $[m+1]$. Para calcular la probabilidad buscada, se puede notar que la conjunción de los eventos E_1, E_2 y A equivale a que exista algún $j \in \{0, \dots, i-1\}$ tal que $s_1 \succ s_2 \succ \dots \succ s_j \succ m+1 \succ s_{j+1} \succ \dots \succ s_i \succ r_m$, donde $j+1$ es el rango parcial en $[m+1]$ de $m+1$. Luego:
$$\mathbb{P}(E_1, E_2, A) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{k^{\underline{j}}}{(m+1)^{\underline{j}}} \cdot \frac{1}{m+1-j} \cdot \frac{(k-j)^{\underline{i-j}}}{(m-j)^{\underline{i-j}}} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i+1}}} = i \cdot \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i+1}}}.$$
3. $\mathbb{P}(E_1, \overline{E_2}, A)$: los eventos $E_1, \overline{E_2}$ y A dependen solamente del orden relativo de los candidatos en $[m+1]$. Para calcular la probabilidad buscada, se puede notar que la conjunción de los eventos $E_1, \overline{E_2}$ y A equivale a que exista algún $j \in \{i, \dots, k\}$ tal que $s_i \succ s_{i+1} \succ \dots \succ s_j \succ m+1$, donde $m+1 = r_{m+1} \succ r_m$ y donde $j+1$ es el rango parcial en $[m+1]$ de $m+1$. Luego:
$$\mathbb{P}(E_1, \overline{E_2}, A) = \sum_{j=i}^{k} \frac{k^{\underline{j}}}{(m+1)^{\underline{j}}} \cdot \frac{1}{m+1-j} = F_0(m+1, k) = \frac{1}{m+1-k} \cdot \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}}.$$

4. $\mathbb{P}(\overline{E_1}, \overline{E_2}, A)$: los eventos $\overline{E_1}, \overline{E_2}$ y A dependen solamente del orden relativo de los candidatos en $[m+1]$. Para calcular la probabilidad buscada, se puede notar que la conjunción de los eventos $\overline{E_1}, \overline{E_2}$ y A equivale a que exista algún $j \in \{i, \ldots, k\}$ tal que $s_i \succ s_{i+1} \succ \ldots \succ s_j \succ r_{m+1}$ donde $r_{m+1} \succ m+1$ y donde $j+1$ es el rango parcial en $[m+1]$ de r_{m+1}. Luego:

$$\mathbb{P}(E_1, \overline{E_2}, A) = \sum_{j=i}^{k} \frac{k^{\underline{j}}}{(m+1)^{\underline{j}}} \cdot \frac{m-k}{m+1-j} = (m-k) \cdot F_0(m+1, k) = \frac{m-k}{m+1-k} \cdot \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
R_0(m,i) &= Z_1(m+1,i) \cdot \frac{i \cdot \frac{\cancel{k^{\underline{i}}}}{(m+1)^{\underline{i+1}}}}{\frac{\cancel{k^{\underline{i}}}}{m^{\underline{i}}}} + Z_0(m+1,i) \cdot \frac{\frac{1}{m+1-k} \cdot \frac{\cancel{k^{\underline{i}}}}{(m+1)^{\underline{i}}}}{\frac{\cancel{k^{\underline{i}}}}{m^{\underline{i}}}} \\
&\quad + R_0(m+1,i) \cdot \frac{\frac{m-k)}{m+1-k} \cdot \frac{\cancel{k^{\underline{i}}}}{(m+1)^{\underline{i}}}}{\frac{\cancel{k^{\underline{i}}}}{m^{\underline{i}}}} \\
&= \frac{m^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}} \cdot \left[\frac{m-k}{m+1-k} \cdot R_0(m+1,i) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{m+1-k} \cdot Z_0(m+1,i) \right] + \frac{i \cdot \cancel{m^{\underline{i}}}}{(m+1) \cdot \cancel{m^{\underline{i}}}} \cdot Z_1(m+1,i) \\
&= \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{m+1-k}\right) \cdot R_0(m+1,i) + \frac{1}{m+1-k} \cdot Z_0(m+1,i) \right] \\
&\quad + \frac{i}{m+1} \cdot Z_1(m+1,i).
\end{aligned}$$

Observación Se puede comprobar que $R_0(m,i)$ es una combinación convexa de R_0, Z_0 y Z_1 en el estado $(m+1,i)$. Los coeficientes asociados a cada término se pueden interpretar como sigue, condicionando en los eventos $B_1 :=$"$m+1 \succ s_i$" y $B_2 :=$"$r_{m+1} = m+1$:

- condicionando primero en B_1, se desea calcular:

$$\mathbb{P}(\text{ganar}|A, B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1|A),$$

  donde $\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{i}{m+1}$ es la probabilidad que $m+1$ sea uno de los i mejores elementos de $[m+1]$; además,como $A =$"$r_m \prec s_i$" y como $B_1 =$"$m+1 \succ s_i$", la conjunción de estos dos eventos implica los evento $r_{m+1} = m+1 (= B_2)$ y $r_{m+1} \succ s_i (= E_2)$, por lo que $\mathbb{P}(\text{ganar}|A, B_1) = Z_1(m+1,i)$;
- condicionando ahora en $\overline{B_1}$ y en B_2, se desea calcular:

$$\left[\mathbb{P}(\text{ganar}|A, \overline{B_1}, B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2|A, \overline{B_1}) + \mathbb{P}(\text{ganar}|A, \overline{B_1}, \overline{B_2}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2}|A, \overline{B_1}) \right] \cdot \mathbb{P}(\overline{B_1}|A),$$

  donde $\mathbb{P}(\overline{B_1}|A) = 1 - \mathbb{P}(B_1|A) = 1 - \frac{i}{m+1}$ es la probabilidad que $m+1$ no sea uno de los i mejores de $[m+1]$; dado $\overline{B_1}$, B_2 tiene probabilidad condicional $\frac{1}{m+1-k}$ de ocurrir (esto es la probabilidad que el último elemento de $\{k+1, \ldots, m+1\}$ sea el mejor), y luego $\mathbb{P}(\text{ganar}|A, \overline{B_1}, B_2) = Z_0(m+1,i)$ ya que se quiere encontrar la forma con más probabilidad de ganar entre elegir a $m+1$ o no elegirlo dado que es peor que s_i y que es récord parcial en $[m+1]$; en otro caso, $m+1$ no es récord parcial en $[m+1]$ con probabilidad $1 - \frac{1}{m+1-k}$, por lo que se rechaza y luego $\mathbb{P}(\text{ganar}|A, \overline{B_1}, \overline{B_2}) = R_0(m+1,i)$.

2) Estudiemos ahora la recurrencia que cumple $R_1(m,i)$. Se rechaza el candidato m por cualquier motivo y se tiene que $r_m \succ s_i$. Luego se entrevista el candidato $m+1$, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} R_1(m,i) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_m \succ s_i, \text{ se rechaza } m) = \mathbb{P}(\text{ganar}|\overline{A}) \\ &= \mathbb{P}(\text{ganar}|\overline{A}, E_1) \cdot \mathbb{P}(E_1|\overline{A}) + \mathbb{P}(\text{ganar}|\overline{A}, \overline{E_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{E_1}|\overline{A}). \end{aligned}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{ganar}|\overline{A}, E_1) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_{m+1} \succ r_m \succ s_i) \\ &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_{m+1} \succ s_i, r_{m+1} = m+1) = Z_1(m+1,i), \\ \mathbb{P}(\text{ganar}|\overline{A}, \overline{E_1}) &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_{m+1} = r_m \succ s_i) \\ &= \mathbb{P}(\text{ganar}|r_{m+1} \succ s_i, r_{m+1} \neq m+1) = R_1(m+1,i), \end{aligned}$$

donde la asimilación de cada probabilidad a R_1 y Z_1 se justifica de manera análoga al análisis realizado anteriormente para encontrar la recurrencia que cumple R_0. Concluimos que:

$$\begin{aligned} R_1(m,i) &= Z_1(m+1,i) \cdot \mathbb{P}(E_1|\overline{A}) + R_1(m+1,i) \cdot \mathbb{P}(\overline{E_1}|\overline{A}) \\ &= Z_1(m+1,i) \cdot \frac{\mathbb{P}(E_1,\overline{A})}{1-\mathbb{P}(A)} + R_1(m+1,i) \cdot \frac{\mathbb{P}(\overline{E_1},\overline{A})}{1-\mathbb{P}(A)}. \end{aligned}$$

Calculemos cada término, dado que ya calculamos $\mathbb{P}(A)$ al buscar la recurrencia que cumple R_0:

1. $\mathbb{P}(E_1,\overline{A})$: los eventos E_1 y $\overline{A}$ dependen solamente del orden relativo de los candidatos en $[m+1]$. Para calcular la probabilidad buscada, se puede notar que la conjunción de los eventos E_1 y $\overline{A}$ equivale a que existan $j \in \{0,\ldots,i-1\}$ y $l \in \{0,\ldots,i-1-j\}$ tales que $s_1 \succ s_2 \succ \ldots \succ s_j \succ m+1 \succ s_{j+1} \succ \ldots \succ s_l \succ r_m$, donde $j+1$ y $l+j+2$ son respectivamente los rangos parciales en $[m+1]$ de $m+1$ y r_m en este caso, estamos considerando todos los candidatos de $[m+1]$. Luego:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1,\overline{A}) &= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{k^{\underline{j}}}{(m+1)^{\underline{j}}} \cdot \frac{1}{m+1-j} \cdot \sum_{l=0}^{i-1-j} \frac{(k-j)^{\underline{l}}}{(m-j)^{\underline{l}}} \cdot \frac{m-k}{m-l} \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{k^{\underline{j}}}{(m+1)^{\underline{j+1}}} \cdot (m-k) \cdot F_1(m-j,k-j) \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{k^{\underline{j}}}{(m+1)^{\underline{j+1}}} \cdot \frac{\cancel{(m-k)}}{\cancel{m-j-(k-j)}} \cdot \left(1 - \frac{(k-j)^{\underline{i-j}}}{(m-j)^{\underline{i-j}}}\right) \\ &= F_1(m+1,k) - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i+1}}} \\ &= \frac{1}{m+1-k} \cdot \left(1 - \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}}\right) - i \cdot \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i+1}}}. \end{aligned}$$

2. $\mathbb{P}(\overline{E_1}, \overline{A})$: los eventos $\overline{E_1}$ y $\overline{A}$ dependen solamente del orden relativo de los candidatos en $[m+1]$. Para calcular la probabilidad buscada, se puede notar que la conjunción de los eventos $\overline{E_1}$ y $\overline{A}$ equivale a que exista $j \in \{0, \dots, i-1\}$ tal que $s_1 \succ s_2 \succ \dots \succ s_j \succ r_m$, donde $j+1$ es el rango parcial en $[m+1]$ de $r_{m+1} = r_m$. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{E_1}, \overline{A}) &= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{k^{\underline{j}}}{(m+1)^{\underline{j}}} \cdot \frac{m-k}{m+1-j} = (m-k) \cdot F_1(m+1, k) \\
&= (m-k) \cdot \frac{1}{m+1-k} \cdot \left(1 - \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{m+1-k}\right) \cdot \left(1 - \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}}\right) = \operatorname{coef}(m+1, i) \cdot (1 - \mathbb{P}(A)).
\end{aligned}$$

Observación Podemos comprobar de las fórmulas anteriores que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1, \overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{E_1}, \overline{A}) &= 1 - \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}} - \frac{i}{m+1-i} \cdot \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}} \\
&= 1 - \frac{k^{\underline{i}}}{(m+1)^{\underline{i}}} \cdot \left(1 + \frac{i}{m+1-i}\right) \\
&= 1 - \frac{k^{\underline{i}}}{\cancel{(m+1)} \cdot m^{\underline{i-1}}} \cdot \frac{\cancel{m+1}}{m+1-i} = 1 - \mathbb{P}(A),
\end{aligned}$$

por lo que $\mathbb{P}(E_1, \overline{A}) = (1 - \operatorname{coef}(m+1, i)) \cdot (1 - \mathbb{P}(A))$, como se podía esperar.

Finalmente reemplazamos las expresiones obtenidas y deducimos:

$$R_1(m, i) = \operatorname{coef}(m+1, i) \cdot R_1(m+1, i) + (1 - \operatorname{coef}(m+1, i)) \cdot Z_1(m+1, i). \quad \square$$

Corolario 3.13 *Para $i \in [k]$ fijo, $R_1(m, i)$ es decreciente en m.*
Además, si existe $m \in \{k+1, \dots, N\}$ tal que $Z_1(m, i) = R_1(m, i)$, entonces $R_1(n, i)$ es constante para todo $n \in \{k+1, \dots, m\}$.

Demostración. Veamos primero el decrecimiento de R_1 en m:

$$\begin{aligned}
R_1(m, i) &= \operatorname{coef}(m+1, i) \cdot R_1(m+1, i) + (1 - \operatorname{coef}(m+1, i)) \cdot Z_1(m+1, i) \\
&\geq \operatorname{coef}(m+1, i) \cdot R_1(m+1, i) + (1 - \operatorname{coef}(m+1, i)) \cdot R_1(m+1, i) = R_1(m+1, i).
\end{aligned}$$

Ahora bien, si existe m tal que $Z_1(m+1, i) = R_1(m+1, i)$, lo anterior se tiene con igualdad, y esto para todo $n \in \{k+1, \dots, m+1\}$ (por inducción inversa sobre $n \geq k+1$), lo que prueba la segunda afirmación. $\square$

Terminemos ahora de probar el Teorema 3.11 con la siguiente proposición:

Proposición 3.14 *El valor del juego asociado a la regla $\mathcal{S}_i$ está dado por $R_0(k, i)$.*

Demostración. Calculemos el valor del juego: después de entrevistar a los k primeros candidatos, queremos elegir la mejor opción entre aceptar y rechazar al candidato $k+1$. Como es el primer y único candidato post-sampleo entrevistado, automáticamente es récord parcial. De aquí surgen dos casos:

- O bien es mejor que el i-ésimo mejor del sampleo: este caso tiene probabilidad $\frac{i}{k+1}$ (la probabilidad que sea uno de los i mejores dentro de los $k+1$ primeros candidatos), y dado esto se gana con probabilidad $Z_1(k+1, i)$.
- O bien es peor que el i-ésimo mejor del sampleo: este caso tiene probabilidad $1 - \frac{i}{k+1}$, y dado esto se gana con probabilidad $Z_0(k+1, i)$.

Por lo tanto el valor del juego está dado por:

$$\begin{aligned}
\text{valor} &= \left(1 - \frac{i}{k+1}\right) \cdot Z_0(k+1, i) + \frac{i}{k+1} \cdot Z_1(k+1, i) \\
&= \left(1 - \frac{i}{k+1}\right) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{k+1-k}\right) \cdot R_0(k+1, i) + \frac{1}{k+1-k} \cdot Z_0(m+1, i)\right] \\
&+ \frac{i}{k+1} \cdot Z_1(m+1, i).
\end{aligned}$$

Extendiendo la definición de $R_0(\cdot, i)$ a $m = k$ via la recurrencia del Teorema 3.12, este último término es $R_0(k, i)$. $\square$

3.1.3. Propiedades de la regla óptima

Proposición 3.15 $\forall\ i \in [k]$, *existe una barrera* $m_1(i) \in \{k+1,\dots,N\}$ *tal que:*

$$\forall m \in \{k+1,\dots,m_1\}, A_1(m,i) \leq R_1(m,i),$$
$$y\ \forall m \in \{m_1+1,\dots,N\}, A_1(m,i) > R_1(m,i).$$

Demostración. Este resultado se puede demostrar de manera más cómoda extendiendo las funciones A_1 y R_1 a todo el intervalo $[k,N]$. Para esto, fijamos $i \in [k]$ e imponemos las condiciones de borde $A_1(k,i) = 0$ y $R_1(k,i) = 1$. Luego se extienden las funciones linealmente por trozos, por lo que ahora ambas son contínuas.

Como A_1 es estrictamente creciente sobre $[k,N]$ desde 0 hasta 1 y R_1 es decreciente sobre $[k,N]$ hasta 0, entonces existe $m_1^* \in [k,N] \subseteq \mathbb{R}_+$ tal que $A_1(n_1^*,i) = R_1(m_1^*,i)$. Tomando $m_1 = \lfloor m_1^* \rfloor$, se cumple lo buscado. $\square$

Observación Como en cada estudio se fija $i \in [k]$, para simplificar las notaciones se escribirá m_1 en vez de $m_1(i)$.

Proposición 3.16 $\forall\ i \in [k]$, *existe una barrera* $m_0(i) \in \{k+1,\dots,N\}$ *tal que:*

$$\forall m \in \{k+1,\dots,m_0\}, A_0(m,i) \leq R_0(m,i),$$
$$y\ \forall m \in \{m_0+1,\dots,N\}, A_0(m,i) > R_0(m,i).$$

Demostración. Como lo hicimos para demostrar la existencia de m_1, demostremos la existencia de m_0 de manera análoga. Vamos a extender las funciones A_0, A_1, R_0 y R_1 a todo el intervalo $[k,N]$. Para esto, fijamos $i \in [k]$ e imponemos $A_0(k,i) = 0 = A_1(k,i)$ y $R_0(k,i) = 1 = R_1(k,i)$. Luego se extienden las funciones linealmente por trozos, por lo que ahora todas son contínuas.

Como A_0 es estrictamente creciente sobre $[k,N]$ desde 0 hasta 1 y R_0 es contínua desde 1 hasta 0, existe al menos un punto de intersección para estas curvas. Sea $m_0^* \in [k,N] \subseteq \mathbb{R}_+$ el último punto de intersección de las curvas, y sea $m_0 = \lfloor m_0^* \rfloor$. Para todo $m \in \{m_0+1,\dots,N\}$, entonces tenemos que $A_0(m,i) > R_0(m,i)$. Además, como la extensión se hizo linealmente por trozos, tenemos que $A_0(m_0,i) \leq R_0(m_0,i)$ y $A_0(m_0+1,i) > R_0(m_0+1,i)$. Veamos ahora que para todo $m \leq m_0$, $A_0(m,i) \leq R_0(m,i)$, resultado que ya se cumple para $m = m_0$.

Sea $m = m_0 - 1$, sabemos que $Z_1(m+1, i) \geq A_1(m+1, i) \geq A_0(m+1, i)$, sabemos que $R_0(m+1, i) \geq A_0(m+1, i)$, y sabemos que A_0 es creciente en m. Luego:

$$\begin{aligned}
R_0(m,i) &= \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{m+1-k}\right) \cdot R_0(m+1,i) + \frac{1}{m+1-k} \cdot Z_0(m+1,i)\right] \\
&+ \frac{i}{m+1} \cdot Z_1(m+1,i) \\
&\geq \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{m+1-k}\right) \cdot A_0(m+1,i) + \frac{1}{m+1-k} \cdot A_0(m+1,i)\right] \\
&+ \frac{i}{m+1} \cdot A_0(m+1,i) \\
&= A_0(m+1,i) \geq A_0(m,i).
\end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $m \in \{m_0 - 1, m_0\}$, tenemos que $A_0(m,i) \leq R_0(m,i)$. Se puede iterar el argumento anterior para todo $m \in \{k+1, \ldots, m_0\}$ ya que todas las hipótesis necesarias para este cálculo ahora se cumplen para $m_0 - 1$, y luego para $m_0 - 2$, etc. Luego m_0 es la barrera buscada. $\square$

Observación Como ya se hizo para m_1, para simplificar las notaciones se usará m_0 en lugar de $m_0(i)$ ya que en cada estudio se fija un $i \in [k]$.

Intuitivamente, se puede pensar que la regla óptima tiene la forma siguiente:

1. En un primer período de tiempo, conviene rechazar a todos los candidatos que se entrevistan, que sean con rango parcial mayor o menor al i-ésimo mejor candidato del sampleo inicial; en otras palabras, para todo $i \in [k]$ existe $m_1(i) \in \{k+1, \ldots, N\}$ tal que para todo $m \leq m_1$, $R_1(m,i) \geq A_1(m,i)$ y $R_0(m,i) \geq A_0(m,i)$;
2. Luego de este primer período, conviene aceptar un récord parcial si es mejor que el i-ésimo mejor candidato del sampleo, pero sigue conveniendo rechazarlo si sigue peor que este mismo candidato; en otras palabras, para todo $i \in [k]$ existe $m_0(i) \in \{m_1(i), \ldots, N\}$ tal que para todo $m_1 + 1 \leq m \leq m_0$, $R_1(m,i) < A_1(m,i)$ y $R_0(m,i) \geq A_0(m,i)$;
3. Últimamente, conviene aceptar cualquier récord parcial encontrado, que sea o no mejor que el i-ésimo mejor candidato del sampleo inicial; en otras palabras, para todo $i \in [k]$ y para todo $m \geq m_0 + 1$, $R_1(m,i) < A_1(m,i)$ y $R_0(m,i) < A_0(m,i)$.

Observación Las Proposiciones 3.13 y 3.14 aseguran la existencia de las barreras m_0 y m_1 intuitivas. Sin embargo, no prueban la intuición que $m_1 \leq m_0$. Este resultado se tendrá que comprobar con los experimentos numéricos, aunque no sea una prueba del resultado.

3.2. Resultados computacionales

El objetivo de esta sección es determinar empíricamente, para N y k dados, cuál de las reglas $\mathcal{S}_i$ definidas en la Sección 3.1 maximiza el valor del juego, en otras palabras cuál es el candidato del sampleo que debe guardar el empleador en memoria. Calculando los valores de A_0 y A_1, computando las recurrencias inversas que cumplen R_0 y R_1 y resolviéndolas para todo $i \in [k]$ y para todo $k \in [N]$, se obtienen los valores óptimos del juego para $N = 100$, 1.000, 10.000 y los i óptimos asociados tales que $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_i$. Dichos valores se grafican en las Figuras 3.1, 3.2 y 3.3.

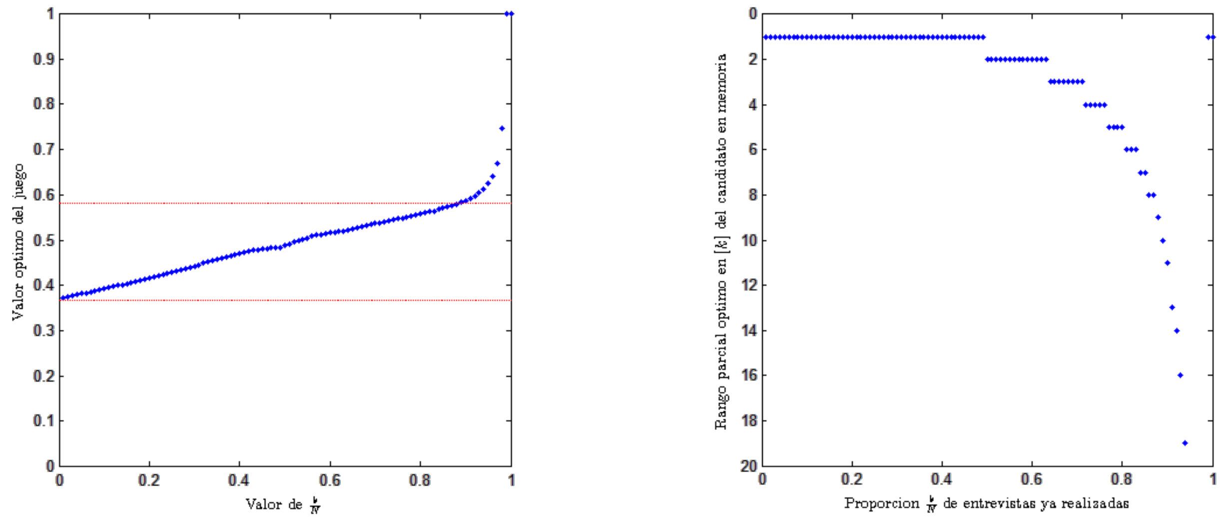

Figura 3.1: Resultados obtenidos para $N = 100$. A la izquierda aparece el valor del juego óptimo, tomando el máximo sobre los valores obtenidos al usar todas las reglas $\mathcal{S}_i$ posibles. A la derecha aparece la evolución del rango $i \in [k]$ del candidato que guardar en memoria en función del valor de $\frac{k}{N}$.

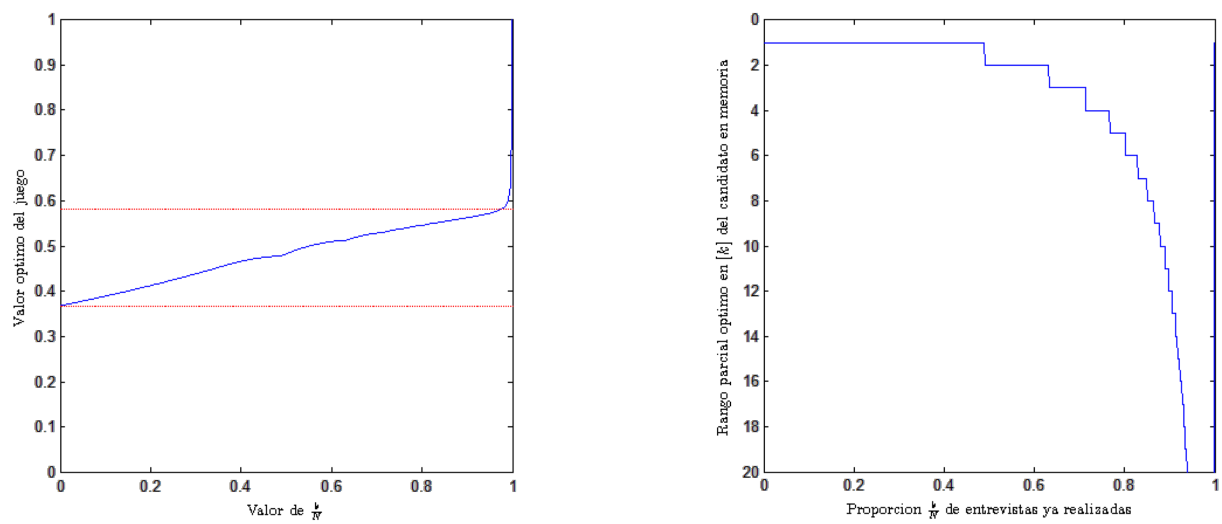

Figura 3.2: Resultados obtenidos para $N = 1.000$. A la izquierda aparece el valor del juego óptimo, tomando el máximo sobre los valores obtenidos al usar todas las reglas $\mathcal{S}_i$ posibles. A la derecha aparece la evolución del rango $i \in [k]$ del candidato que guardar en memoria en función del valor de $\frac{k}{N}$.

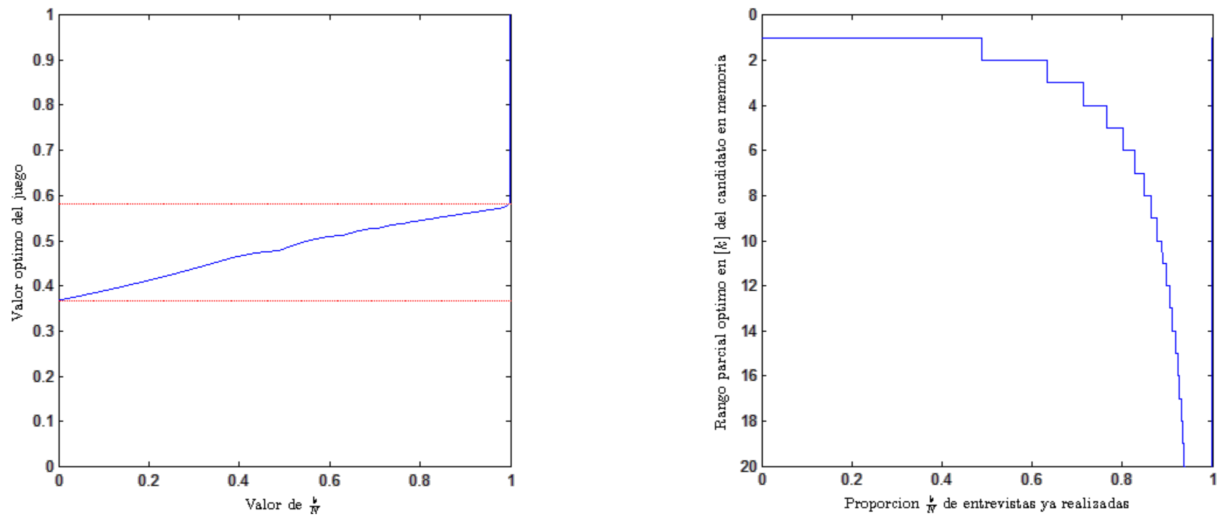

Figura 3.3: Resultados obtenidos para $N = 10.000$. A la izquierda aparece el valor del juego óptimo, tomando el máximo sobre los valores obtenidos al usar todas las reglas $\mathcal{S}_i$ posibles. A la derecha aparece la evolución del rango $i \in [k]$ del candidato que guardar en memoria en función del valor de $\frac{k}{N}$.

El valor del juego graficado corresponde al máximo sobre $i \leq k$ del valor del juego obtenido por la regla $\mathcal{S}_i$, esto es el valor del juego de la regla $\mathcal{S}^*$. Al igual que el estudio realizado en la Sección 2.1, graficamos el valor óptimo del juego en función de la fracción $\frac{k}{N}$. Notamos ciertas similitudes entre esta curva y la curva óptima sin restricción de memoria obtenida en el Capítulo 2: la curva es creciente en $\frac{k}{N}$, parece tender a $\frac{1}{e}$ cuando $\frac{k}{N}$ tiende a 0 (lo que tiene sentido ya que en este caso el juego se parece más y más al (SP) tradicional), y parece crecer hasta un valor cercano a 0,58 cuando $\frac{m}{N}$ tiende a 1.

No obstante, se puede notar una diferencia importante con la obtenida en el capítulo anterior. Ya que esta curva fue calculada como el máximo puntual de las curvas asociadas a cada regla $\mathcal{S}_i$, la curva resultante no es suave y presenta puntos de quiebre en cada razón $\frac{k}{N}$ donde cambia la regla $\mathcal{S}_i$ óptima.

Tanto las similitudes como las diferencias se pueden interpretar como sigue: cuanto más grande es la fracción $\frac{k}{N}$ sampleada, mejor es la información que entrega el candidato guardado en el sampleo sobre los candidatos por venir, por lo que el valor del juego crece. El i-ésimo punto de quiebre, visto como una razón de la forma $\frac{k}{N}$, a partir del cual la regla $\mathcal{S}_{i+1}$ comienza a ser óptima, es cercano pero inferior a $\frac{i}{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$, esto es: la primera barrera está un poco antes de $\frac{1}{2}$, la segunda antes de $\frac{2}{3}$, etc. Esto tiene sentido pues, si llamamos c al mejor candidato de la zona no sampleada, si $\frac{k}{N}$ es exactamente $\frac{i}{i+1}$, entonces el rango esperado de c en $[N]$ tiende a $i+1$ cuando N tiende a infinito. Luego, en esperanza el primer elemento de la zona sampleada que es peor que c tiene rango global $i+1$ en $[N]$.

Recordemos que las reglas estudiadas en esta sección son óptimas para el (TCSP) con memoria de sampleo unitaria. Al igual que las reglas óptimas para el (TCSP) sin restricción de memoria, el valor límite para N grande cuando $\frac{k}{N}$ tiende a 1 parece ser el mismo, y de hecho tendría también sentido que sea el valor óptimo $\approx 0{,}58$ asociado al (FISP). En efecto, si se guarda en memoria el candidato con rango parcial i en $[k]$, se deduce que hay al menos i candidatos en el sampleo. Por lo tanto, al tomar i cada vez más grande, conocer i entrega cada vez más información sobre los candidatos por venir. Si ahora $i \to \infty$, se conoce casi toda la información posible sobre la distribución de “valor” de los candidatos, lo que corresponde al (FISP).

Empíricamente en todos los experimentos, notamos que $m_1 < m_0$, como se puede comprobar en el siguiente gráfico obtenido para $N = 10.000$ y $k = 100$ usando al regla $\mathcal{S}_2$:

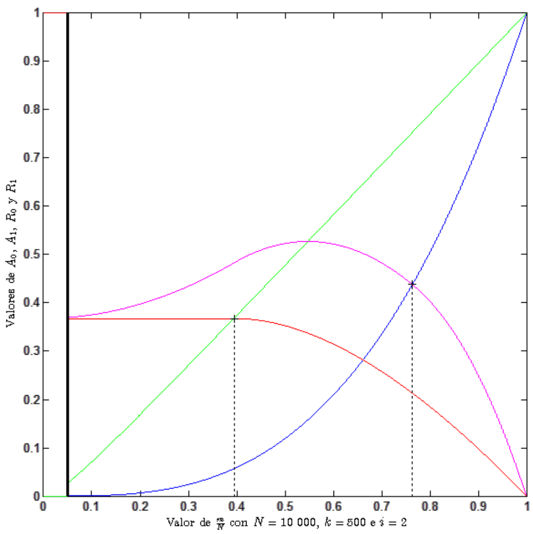

Figura 3.4: Valores de A_0, A_1, R_0 y R_1 en función de la razón $\frac{m}{N}$ usando la regla $\mathcal{S}_2$ para $N = 10.000$ y $k = 100$, respectivamente en azul, verde, magenta y rojo. A la izquierda, una recta vertical negra da cuenta del final del período de sampleo. Dos cruces negras simbolizan los valores de las razones $\frac{m_0}{N}$ y $\frac{m_1}{N}$, y se puede notar aquí que $m_1 < m_0$.

Se puede además notar que en este caso, R_0 no es una función decreciente de m, y parece empezar a ser decreciente después de tener el mismo valor que A_1. En la Figura 3.5 aparecen los valores del juego asociados a las reglas $\mathcal{S}_i$ para $i = 1, 2, 3$ respectivamente en azul, verde y magenta, con líneas de puntos rojos que simbolizan los valores óptimos del juego para el (SP) y el (FISP):

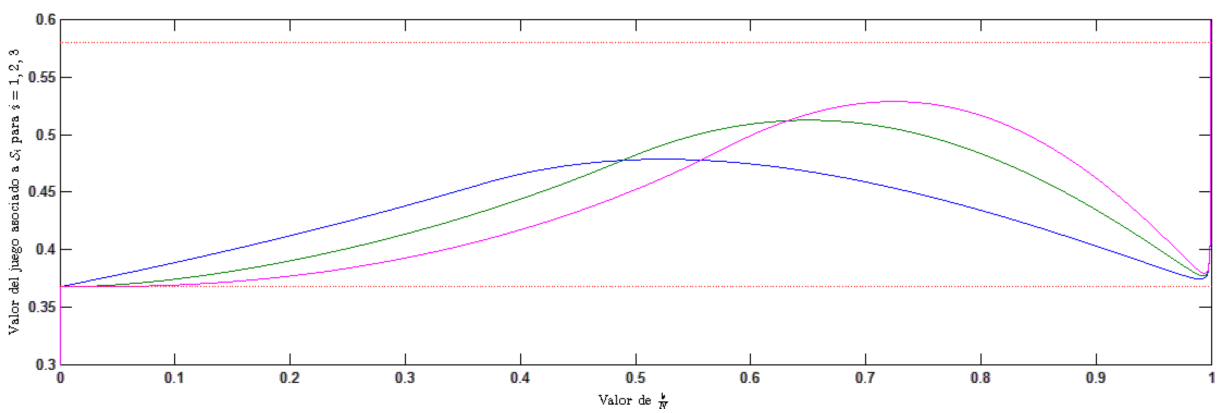

Figura 3.5: Valores del juego al guardar en memoria al primer/segundo/tercer mejor del sampleo respectivamente en azul/verde/rosado. Se agregaron el líneas de puntos rojas las rectas de ecuación $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ que corresponden respectivamente a los valores del juego óptimos para el (SP) y el (FISP).

Observamos que las curvas parecen partir de $\frac{1}{e}$ en 0, crecen hasta un óptimo y luego decrecer a un valor cercano a $\frac{1}{e}$ en 1, para finalmente irse a 1. Si la forma de las curvas es esperada, tiene también sentido que ambos valores límites en 0 y 1 valgan $\frac{1}{e}$. Como el caso $k = 0$ corresponde al (SP) tradicional, tiene sentido que el límite del valor del juego óptimo asociado sea $\frac{1}{e}$. En cambio si $\frac{k}{N} \to 1$, el sampleo es más y más grande $(k \to N)$, así que se vuelve inútil comparar los candidatos siguientes con el único candidato del sampleo que se guardó; más vale ignorarlo y entonces la resolución del problema se acerca de nuevo al (SP).

3.3. Extensión a la versión contínua

En este capítulo estudiamos la versión contínua del (TCSP) con memoria de sampleo unitaria. En este escenario se fija un tiempo T en $(0,1)$ y se desea encontrar y contratar al mejor entrevistado en $(T,1]$ bajo la condición que sólo podemos recordar un candidato entrevistado en el período de sampleo $[0,T]$

El objetivo de esta sección es estudiar los valores del juego asociados a las reglas donde se guardan en memoria el i-ésimo mejor del sampleo para cada i, y tratar de relacionar los resultados obtenidos con los del caso discreto.

3.3.1. Definiciones y resultados preliminares

Se definen las siguientes cantidades para todo $p,q \in (0,1)$:

$$Q_0(p) := \sum_{a_1=1}^{\infty} \left[\frac{p^{a_1}}{a_1}\right],$$

$$Q_n(p) := \sum_{a_1=1}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\sum_{a_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_{n+1}=0}^{\infty} \left[\frac{p^{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}\right], \qquad \forall n \geq 1.$$

$$R_n(p,q) := \sum_{a_1=1}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\sum_{a_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_{n+1}=0}^{\infty} \left[\frac{p^{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-q)^{a_{n+1}}}\right], \qquad \forall n \geq 1.$$

Las sumas anididas anteriores aparecerán con frecuencia durante esta sección, por lo cual es conveniente encontrar fórmulas cerradas simples para ellas.

Teorema 3.17

$$\forall\ p,q \in (0,1), \qquad Q_0(p) = -\ln(1-p).$$

Demostración. Esto es directo del desarrollo en serie entera del logaritmo natural:

$$\ln(1+p) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{p^i}{i}, \qquad \forall\ |p| < 1. \quad \square$$

Teorema 3.18

$$\forall\ p \in (0,1),\ \forall\ n \geq 1, \quad Q_n(p) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{(1-p)^n} - 1\right)$$

Demostración. Recordemos la noción de factorial creciente, definida como sigue:

$$k^{\overline{i}} := (k+(i-1))^{\underline{i}} = k\cdot(k+1)\cdot\dots\cdot(k+i-1).$$

Calculemos ahora $Q_n(p)$:

$$\begin{aligned}
Q_n(p) &= \sum_{a_1=1}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\sum_{a_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_{n+1}=0}^{\infty}\left[\frac{p^{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}\right]\\
&= \sum_{a_1=1}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\sum_{a_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{a_n=0}^{\infty}\sum_{s=a_1+a_2+\cdots+a_n}^{\infty}\left[\frac{p^s}{s}\right]\\
&= \sum_{s=1}^{\infty}\frac{p^s}{s}\cdot\left[\sum_{(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{N}^n|\sum_{i=1}^{n}a_i\le s-1}[1]\right]\\
&= \sum_{s=1}^{\infty}\frac{p^s}{s}\cdot\left[\mathrm{Card}\left(\left\{(a_1,\dots,a_{n+1})\in\mathbb{N}^{n+1}|\sum_{i=1}^{n+1}a_i=s-1\right\}\right)\right]\\
&= \sum_{s=1}^{\infty}\binom{n+s-1}{s-1}\cdot\frac{p^s}{s}.
\end{aligned}$$

Derivemos esta función de p:

$$\frac{dQ_n}{dp}(p) = \sum_{s=1}^{\infty}\binom{n+s-1}{s-1}\cdot\frac{\cancel{s}\cdot p^{s-1}}{\cancel{s}} = \sum_{s=0}^{\infty}\binom{n+s}{s}\cdot p^s = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)^{\underline{s}}}{s!}\cdot p^s$$

Usando la definición del factorial creciente, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_n}{dp}(p) &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{\overline{s}}}{s!}\cdot p^s = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-(n+1))^{\underline{s}}}{s!}\cdot(-p)^s = \sum_{s=0}^{\infty}\binom{-(n+1)}{s}\cdot(-p)^s\\
&= (1-p)^{-(n+1)}.
\end{aligned}$$

donde se usó el teorema generalizado del binomio. Integrando el resultado y usando que $Q_n(0)=0$, se obtiene:

$$Q_n(p) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{(1-p)^n}-1\right). \quad \square$$

Teorema 3.19

$$\forall\ p,q\in(0,1),\quad R_1(p,q) = \frac{1-q}{q}\cdot\left[Q_0\left(\frac{p}{1-q}\right)-Q_0(p)\right].$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
R_1(p,q) &= \sum_{a_1=1}^{\infty}\sum_{a_2=0}^{\infty}\left[\frac{p^{a_1+a_2}}{a_1+a_2}\cdot\frac{1}{(1-q)^{a_2}}\cdot\frac{(1-q)^{a_1}}{(1-q)^{a_1}}\right] = \sum_{a_1=1}^{\infty}\sum_{s=a_1}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s}\cdot(1-q)^{a_1}\right]\\
&= \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s}\cdot\left[\sum_{a_1=1}^{s}(1-q)^{a_1}\right] = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s}\cdot(1-q)\cdot\frac{1-(1-q)^s}{\cancel{1}-(\cancel{1}-q)}\\
&= \frac{1-q}{q}\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s}-\frac{p^s}{s}\right] = \frac{1-q}{q}\cdot\left[Q_0\left(\frac{p}{1-q}\right)-Q_0(p)\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.20

$$\forall\ p,q \in (0,1),\ \forall\ n \geq 2, \qquad R_n(p,q) = \frac{1}{q} \cdot R_{n-1}(p,q) - \frac{1-q}{q} \cdot Q_{n-1}(p).$$

Demostración. Sea $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
R_n(p,q) &= \sum_{a_1=1}^{\infty} \sum_{a_2=0}^{\infty} \sum_{a_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_{n+1}=0}^{\infty} \left[\frac{p^{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-q)^{a_{n+1}}} \cdot \frac{(1-q)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{(1-q)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}} \right] \\
&= \sum_{a_1=1}^{\infty} \sum_{a_2=0}^{\infty} \sum_{a_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_n=0}^{\infty} \sum_{s=a_1+\cdots+a_n}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s} \cdot (1-q)^{a_1+a_2+\cdots+a_n} \right] \\
&= \sum_{a_1=1}^{\infty} \sum_{(a_2,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-2}}^{\infty} \sum_{s=a_1+\cdots+a_{n-1}}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s} \cdot \left[\sum_{a_n=0}^{s-a_1-\cdots-a_{n-1}} (1-q)^{a_1+a_2+\cdots+a_n} \right] \\
&= \sum_{a_1=1}^{\infty} \sum_{(a_2,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-2}}^{\infty} \sum_{s=a_1+\cdots+a_{n-1}}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s} \cdot (1-q)^{a_1+\cdots+a_{n-1}} \cdot \frac{1-(1-q)^{s-a_1-\cdots-a_{n-1}+1}}{\cancel{1}-(\cancel{1}-q)}
\end{aligned}$$

Se saca $\frac{1}{q}$ en factor antes de la suma y obtenemos:

$$\begin{aligned}
R_n(p,q) &= \frac{1}{q} \cdot \sum_{a_1=1}^{\infty} \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-2}}^{\infty} \sum_{s=a_1+\cdots+a_{n-1}}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s} \cdot \left[(1-q)^{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} - (1-q)^{s+1} \right] \\
&= \frac{1}{q} \cdot \sum_{a_1=1}^{\infty} \sum_{a_2=0}^{\infty} \sum_{a_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_{n-1}=0}^{\infty} \sum_{s=a_0+\cdots+a_{n-1}}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{p}{1-q}\right)^s}{s} \cdot (1-q)^{a_1+\cdots+a_{n-1}} - (1-q) \cdot \frac{p^s}{s} \right] \\
&= \frac{1}{q} \cdot R_{n-1}(p,q) - \frac{1-q}{q} \cdot Q_{n-1}(p),
\end{aligned}$$

donde se reconocen $R_{n-1}(p,q)$ y $Q_{n-1}(p,q)$ en el último paso para concluir. □

Corolario 3.21 $\forall\ n \geq 1,\ \forall\ p,q \in (0,1)$*:*

$$R_n(p,q) = (1-q) \cdot \left[\frac{1}{q^n} \cdot Q_0\left(\frac{p}{1-q}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^{n-i}} \cdot Q_i\left(p\right) \right].$$

Demostración. Usando la recurrencia anterior:

$$\begin{aligned}
R_n(p,q) &= \frac{1}{q^2} \cdot R_{n-2}(p,q) - \frac{1-q}{q^2} \cdot Q_{n-2}(p) - \frac{1-q}{q} \cdot Q_{n-1}(p) = (\ldots) \\
&= \frac{1}{q^{n-1}} \cdot R_1(p,q) - (1-q) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{q^{n-i}} \cdot Q_i(p) \\
&= (1-q) \cdot \left[\frac{1}{q^n} \cdot Q_0\left(\frac{p}{1-q}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^{n-i}} \cdot Q_i(p) \right].
\end{aligned}$$

□

Terminemos esta parte preliminar demostrando propiedades de límite de ambas funciones, que serán de gran interés al momento de interpretar los resultados numéricos obtenidos.

Teorema 3.22 *Para todo* $q \in (0,1)$, $\lim_{q\to 0} Q_n(q) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
Además, si $p := \gamma \cdot (1-q)$ *para una constante* $\gamma \in (0,1)$ *dada, entonces* $\lim_{q\to 1} R_n(p,q) = 0$.

Demostración. Usando los Teoremas 3.17 y 3.18, notamos que $\lim_{q\to 0} [-\ln(1-q)] = 0$ y que $\lim_{q\to 0} \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{(1-q)^n} - 1\right)\right] = 0$. Esto prueba la primera afirmación del teorema. Usemos este resultado para demostrar la segunda afirmación, suponiendo ahora que $p = \gamma \cdot (1-q)$ para alguna constante $\gamma \in (0,1)$.

Observación Si $p = \gamma \cdot (1-q)$, entonces $\lim_{q\to 1} p = 0$. Por la primera afirmación del presente teorema, se deduce que $\lim_{q\to 1} Q_n(p) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Probemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}^*$ que $\lim_{q\to 1} R_n(p,q) = 0$:

Caso base:

Por el Teorema 3.19, tenemos que:

$$R_1(p,q) = \frac{1-q}{q} \cdot Q_0\left(\frac{p}{1-q}\right) - \frac{1-q}{q} \cdot Q_0(p).$$

Por la observación anterior, el segundo término de R_1 se va a 0 cuando q tiende a 1. Veamos ahora que el primer término también se va a 0. En efecto:

$$\frac{1-q}{q} \cdot Q_0\left(\frac{p}{1-q}\right) = -\frac{1-q}{q} \cdot \ln\left(1 - \frac{\gamma \cdot \cancel{(1-q)}}{\cancel{1-q}}\right) = -\frac{1-q}{q} \cdot \ln(1-\gamma),$$

lo que tiende a 0 cuando q tiende a 1 (pues c es fijo). Por lo tanto, $\lim_{q\to 1} R_1(p,q) = 0$.

Paso inductivo:

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\lim_{q\to 1} R_n(p,q) = 0$. Usando el Teorema 3.20, tenemos que:

$$R_{n+1}(p,q) = \frac{1}{q} \cdot R_n(p,q) - \frac{1-q}{q} \cdot Q_n(p).$$

Por hipótesis de inducción, el primer término se va a 0 cuando q tiende a 1, y por la observación previa el segundo término también se va a 0 cuando q tiende a 1. Luego $\lim_{q\to 1} R_{n+1}(p,q) = 0$, lo que prueba el paso inductiva y termina la demostración de la segunda afirmación del teorema. □

3.3.2. Analogía configuración/palabra

Recordemos que en la formulación discreta del (TCSP) con memoria de sampleo unitaria, existen dos barreras m_0 y m_1 tales que, definiendo los elementos $m^* := \text{mín}\{m_0, m_1\}$ y $m_\infty := \text{máx}\{m_0, m_1\}$, se tiene que:

- para todo $m \in \{k+1, \dots, m^*\}$, se rechaza el candidato m,
- para todo $m \in \{m^*+1, \dots, m_\infty\}$, se acepta m si es el primer récord parcial entrevistado que sea: o bien mejor que el i-ésimo mejor candidato del sampleo si $m^* = m_1$, o bien peor que el i-ésimo mejor candidato del sampleo si $m^* = m_0$,
- para todo $m \in \{m_\infty+1, \dots, N\}$, se acepta m si es el primer récord parcial entrevistado.

En esta sección queremos estudiar la extensión de la regla óptima anterior a la formulación contínua del (TCSP). Por lo tanto tenemos que dividir el intervalo $[0, 1]$ en 4 intervalos, el primero que sea $[0, T]$ el período de sampleo, y los tres siguientes que sean los análogos a los tres períodos de elección definidos en la lista anterior.

Definición 3.23 ***Barreras***

Para $i \in \mathbb{N}^*$ se definen:

- $T_0 \in (T, 1]$ *el tiempo de barrera antes del cual se rechaza todo récord parcial, y se acepta a un récord parcial entrevistado después de T_0 si es peor que el i-ésimo mejor del sampleo. Esta barrera también se denominará* ***barrera 0****.*
- $T_1 \in (T, 1]$ *el tiempo de barrera antes del cual se rechaza todo récord parcial, y se acepta a un récord parcial entrevistado después de T_1 si es mejor que el i-ésimo mejor del sampleo. Esta barrera también se denominará* ***barrera 1****.*
- $T^* := \text{mín}\{T_0, T_1\} \in (T, 1]$ *el tiempo antes del cual se rechazan a todos los candidatos, y después del cual se compara un candidato con el i-ésimo mejor del sampleo y con el récord ya entrevistado en $(T, 1]$.*
- $T_\infty := \text{máx}\{T_0, T_1\} \in [T_i, 1]$ *el tiempo antes del cual se compara un candidato con el i-ésimo mejor del sampleo y con el récord ya entrevistado en $(T, 1]$, y después del cual solamente se compara un candidato en el tiempo t con el récord parcial dentro de los entrevistados en $(T, t]$ (no se comparan más los candidatos con el i-ésimo mejor del sampleo después de T_∞).*

Observación Los resultados numéricos obtenidos en el caso discreto revelaron que las barreras óptimas para i fijo cumplen $m_0 \geq m_1$. Esto permite intuir que en el presente caso contínuo, se debería tener lo análogo con $T_0 \geq T_1$. Como no se pudo probar teóricamente este resultado en el caso discreto, se estudiarán entonces las dos posibilidades en paralelo para el caso contínuo y se comprobará cuál de las dos es óptima.

Definición 3.24 ***División del intervalo [0,1], probabilidad asociada***

Se definen ahora las reglas consideradas con los intervalos asociados:

1. *en* $I_1 = [0, T]$ *se rechazan a todos los candidatos, y se guarda en memoria al i-ésimo mejor de ellos;*
2. *en* $I_2 = (T, T^*]$*, se rechazan a todos los candidatos entrevistados, y después de cada entrevista se actualiza al récord parcial guardado en memoria;*
3. *en* $I_3 = (T^*, T_\infty]$*, se elige a un candidato si es mejor que el récord en memoria y si es mejor o peor que el i-ésimo mejor del sampleo (dependiendo de si* $T^* = T_0$ *o* T_1*);*
4. *en* $I_4 = (T_\infty, 1]$*, se elige a un candidato si es solamente récord parcial (independiente de lo que haya ocurrido durante el sampleo antes de* T*), y si la probabilidad de ganar al elegirlo es más alta que la de ganar al rechazarlo (si no, se rechaza).*

Se denota p_n *a la probabilidad que un candidato tenga su entrevista en el intervalo* I_n*, para* $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ *(de hecho* $p_1 = T$*,* $p_2 = T^* - T$*,* $p_3 = T_\infty - T^*$ *y* $p_4 = 1 - T_\infty$*, donde* T^* *y* T_∞ *son desconocidos y son los parámetros que optimizar). Finalemente se denota por* $\mathbb{P}_0(T, p_3, p_4, i)$ *la probabilidad de ganar si se guarda en memoria el i-ésimo mejor del sampleo en el caso* $T_0 \leq T_1$*, y se denota por* $\mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i)$ *la misma probabilidad de ganar en el caso* $T_1 \leq T_0$*.*

Observación En lo que sigue, se calcularán probabilidades de eventos ganadores usando las probabilidades p_n definidas antes. Por lo tanto, en cada estudio ulterior se buscarán los valores de p_3 y p_4 que optimizan los valores del juego, más fáciles de deducir que los tiempos T^* y T_∞ óptimos. De todos modos se pueden deducir estos tiempos desde p_3 y p_4 ya que $T^* = 1 - p_3 - p_4$ y $T_\infty = 1 - p_4$.

Con el fin de calcular las probabilidades $\mathbb{P}_j(T, p_3, p_4, i)$ $(j \in \{0, 1\})$, codificaremos información relevante de los tiempos de entrevistas como palabras en $\{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$.

Definición 3.25 ***Configuración***

Decimos que los tiempos de entrevista $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ *tienen* ***configuración*** $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$ *si para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $t_n \in I_i \Leftrightarrow \omega_n = i$*.*

Introduciremos notación para codificar conjuntos de configuraciones (de una forma gráfica) y su probabilidad de ganar. Un gráfico de configuraciones es una expresión como sigue:

$$1 : 1^a (a > 1) \begin{cases} 2 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 3 \text{ X} \\ 4 \text{ X} \end{cases}$$

formada por distintos símbolos. La interpretación de los gráficos se describe a continuación (para $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \leq i$):

- El símbolo $\{$ permite (cuando se necesita) dividir la configuración en distintos casos debidos a los posibles símbolos siguientes,

- La expresión $n : m^{a_j}(a_j \geq 0, 1)$ quiere decir que después del símbolo n vienen a_j símbolos m's, donde se precisan entre paréntesis los valores posibles de a_j,
- La expresión $(n*)$ significa que a partir de este momento, los símbolos n que aparecen no afectan la probabilidad de ganar; en otras palabras, si se sacan todos los símbolos n que aparecen en lo que sigue, esto no afecta la probabilidad de ganar,
- Los símbolos ✓ y X terminan secuencias que representan respectivamente configuraciones ganadoras y perdedoras,
- Al final de una secuencia de símbolos, si la secuencia es ganadora (tiene un símbolo ✓), se agrega entre [ ] la probabilidad de ganar con esta misma secuencia (probabilidad que hay que multiplicar con todo lo anterior), pero si no se puede ganar (tiene un símbolo X) no se agrega nada.

La interpretación es la siguiente para calcular la probabilidad:

- Un símbolo n se reemplaza por p_n; un símbolo n que se encuentra después de $(m*)$ se reemplaza por $\frac{p_n}{1-p_m}$; un símbolo n después de $(m*)$ y $(l*)$ se reemplaza por $\frac{p_n}{1-p_m-p_l}$,
- Una sucesión de símbolos corresponde al producto de la probabilidades asociadas;
- Un $m^{a_j}(a_j \geq l)$ se reemplaza por $\displaystyle\sum_{a_j=l}^{\infty} m^{a_j}$, tomando así en cuenta todos los casos posibles de valores de a_j,
- Un { equivale a sumar entre sí los distintos casos que representa.

Ejemplos: 1) Consideremos el gráfico sugerido antes:

$$1 : 1^a(a > 1) \begin{cases} 2 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 3 \text{ X} \\ 4 \text{ X} \end{cases}$$

Este gráfico indica que para todo $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$, cada configuración de la forma $11^a2\omega$ es ganadora con probabilidad $\frac{1}{a}$ si $a > 1$, mientras que las configuraciones de la forma $11^a3\omega$ y $11^a4\omega$ son perdedoras.

2) Consideremos el siguiente gráfico:

$$2 : (4*)\ 2^a(a > 0) \begin{cases} 3 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 1 \text{ X} \end{cases}$$

Este gráfico indica que para todo $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$, cada configuración de la forma $24^*2(4^*2^*)^*3\omega$ es ganadora con probabilidad $\frac{1}{a}$ si $a > 0$, mientras que las configuraciones de la forma $24^*2(4^*2^*)^*1\omega$ son perdedoras.

En este último ejemplo, podemos entonces notar que las configuraciones 223, 24423 y 24442443 son ganadoras con la misma probabilidad $\frac{1}{2}$.

Usando la notación anterior, calcularemos el valor del juego en los casos donde la primera barrera es la barrera 0 ($T_0 \leq T_1$) y donde es la barrera 1 ($T_1 \leq T_0$). En ambas casos, se estudiará primero el caso $i = 1$ donde está guardado en memoria el mejor elemento del sampleo (análogo a un caso base), antes de estudiar el caso general $i \geq 2$ que se puede definir a través del caso $i - 1$ via recurrencia.

Teorema 3.26 ***Caso*** $T_0 < T_1$

Sea $\omega \in \{1,2,3,4\}^{\mathbb{N}}$. Si se guarda en memoria el i-ésimo mejor elemento del sampleo con $i \in \mathbb{N}^*$ y si $T_0 < T_1$, entonces solamente importan los i primeros símbolos 1 que aparecen en ω. Más aún, si z denota el primer símbolo distinto de 1 en ω, se tienen los siguientes casos:

- *Si $z = 2$, entonces la configuración es perdedora.*
- *Si $z = 3$, entonces los símbolos 4 que aparecen después de z no afectan la probabilidad de ganar; si además el i-ésimo 1 está antes de z y aparecen $a \geq 1$ símbolos 3 antes del primer 2 de ω, la configuración es ganadora con probabilidad $\frac{1}{a}$.*
- *Si $z = 4$, sea $a \geq 1$ el número de símbolos 4 que aparecen antes del primer símbolo s distinto de 1 y 4 en ω; si $s = 2$, o si $s = 3$ y que no aparecen i símbolos 1 antes de s en ω, entonces la configuración es ganadora con probabilidad $\frac{1}{a}$.*

Demostración. Sea una configuración $\omega \in \{1,2,3,4\}^{\mathbb{N}}$. Estamos comparando los entrevistados con el i-ésimo mejor candidato del sampleo. Dicho candidato está representado por el i-ésimo 1 de ω. Luego de este i-ésimo 1, los símbolos 1 que aparecen después no influyen en la probabilidad de ganar.

Llamemos z al primer símbolo distinto de 1 de ω y c al candidato que representa. Entonces queremos elegir a c, ya que representa el mejor elemento después del período de sampleo. Analicemos las distintas posibilidades para z.

Si z es un 2, quiere decir que se entrevista en el intervalo de tiempos I_2 en el que se rechazan todos los candidatos, por lo que la configuración es perdedora.

Consideremos el caso $z = 3$ y veamos que no importan los símbolos 4 que aparecen después de este 3. En efecto, el algoritmo toma decisiones solamente con los candidatos ya entrevistados: si se elige c se gana, y si no se elige c se pierde, cualquieras candidatos pueden estar entrevistados en I_4.

Recordemos que $T_0 < T_1$, es decir se elige un candidato entrevistado en I_3 si y sólo si éste es récord parcial y es peor que el i-ésimo mejor candidato del sampleo. Si $z = 3$, no se podrá elegir c si z aparece antes del i-ésimo 1 de ω. Por lo tanto se necesita que hayan aparecidos i símbolos 1 antes del primer 3 para esperar ganar, esto es que $\omega = 1^j\omega'$ donde $j \geq i$ y $\omega' \in \{1,2,3,4\}^{\mathbb{N}}$ empieza con $z = 3$. Sea además $a \geq 1$ el número de símbolos 3 antes del primer 2 de ω' y sea C el conjunto de los candidatos a estos símbolos 3. Luego los candidatos de C son los únicos récords parciales entrevistados en I_3, por lo que se gana si el tiempo de entrevista de c es el mínimo de los tiempos de entrevista de los candidatos de C. Como $\mathrm{Card}(C) = a$, este evento tiene probabilidad $\frac{1}{a}$ pues corresponde a la probabilidad de elegir uniformemente al azar una permutación de los a candidatos donde c es el primer elemento.

Si z es un 4, llamemos s al primer símbolo distinto de 1 y 4 en ω. Supongamos que aparecen $a \geq 1$ símbolos 4 en ω antes que s y sea C el conjunto de los candidatos asociados a estos a candidatos. Notemos que estos a candidatos son los únicos récords parciales entrevistados después del candidato c_s asociado al símbolo s. Si $s = 2$, como el candidato asociado a s

no se puede elegir, nadie entrevistado en I_3 puede ser elegido, y entonces se gana si c es el primer entrevistado de ellos, lo que tiene probabilidad $\frac{1}{a}$ de ocurrir. Si ahora $s = 3$, notemos que si aparecen más que i símbolos 1 antes que s, entonces en el momento de entrevistar c_s, si nadie ha sido elegido todavía, se elige c_s y se pierde. Si por el contrario hay $i-1$ o menos símbolos 1 que aparecen en ω antes que s, se gana si c es el primer entrevistado de los a candidatos de C, lo que tiene probabilidad $\frac{1}{a}$ de ocurrir. $\square$

Teorema 3.27 ***Caso*** $T_1 < T_0$

Sea $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$. *Si se guarda en memoria el* i*-ésimo mejor elemento del sampleo con* $i \in \mathbb{N}^*$ *y si* $T_1 < T_0$, *entonces solamente importan los* i *primeros símbolos 1 que aparecen en* ω. *Más aún, si* z *denota el primer símbolo distinto de 1 en* ω, *se tienen los siguientes casos:*

- *Si* $z = 2$, *entonces la configuración es perdedora.*
- *Si* $z = 3$, *entonces los símbolos 4 que aparecen después de* z *no afectan la probabilidad de ganar; si además aparecen* $a \geq 1$ *símbolos 3 antes del primer 2 o antes que aparezca el* i*-ésimo 1 de* ω, *la configuración es ganadora con probabilidad* $\frac{1}{a}$.
- *Si* $z = 4$, *entonces si aparecen* $a \geq 1$ *símbolos 4 antes del primer 2 de* ω *o antes del primer 3 que aparece después de los* i *primeros símbolos 1 de* ω, *entonces la configuración es ganadora con probabilidad* $\frac{1}{a}$.

Demostración. Los resultados "solamente importan los i primeros símbolos 1 de ω", "si $z = 2$ se pierde" y "si $z = 3$ los símbolos 4 después de z no afectan la probabilidad de ganar" ya fueron demostrados en el teorema anterior. Veamos ahora los dos otros resultados, considerando que $T_1 < T_0$, es decir que se elige un candidato entrevistado en I_3 si y sólo si éste es récord parcial y es mejor que el i-ésimo mejor candidato del sampleo. Llamemos z al primer símbolo distinto de 1 en ω y c al candidato asociado a z.

Si z es un 3, no se podrá elegir c si z aparece después de i o más símbolos 1. Por lo tanto se necesita que hayan a lo más $i-1$ símbolos 1 antes del primer 3 para esperar ganar, esto es que $\omega = 1^j\omega'$ donde $j < i$ y $\omega' \in \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$ empieza con $z = 3$. Sea ahora s el símbolo de ω que corresponde al primer símbolo encontrado entre el i-ésimo 1 y el primer 2 de ω. Si aparecen $a \geq 1$ antes de s, los a candidatos asociados son los únicos récords parciales entrevistados en I_3 y mejores que el $i$ésimo mejor candidato del sampleo que se pueden aceptar. Luego se gana si el primer entrevistado entre ellos es c, lo que ocurre con probabilidad $\frac{1}{a}$.

Si ahora z es un 4, llamemos s al primer símbolo distinto de 1 y 4 en ω. Supongamos que aparecen $a \geq 1$ símbolos 4 en ω antes que s, y sea C el conjunto de los candidatos asociados a estos a símbolos 4. Notemos que los candidatos de C son los únicos récords parciales entrevistados después del candidato asociado a s. Si $s = 2$, como el candidato c_s asociado a s no se puede elegir, nadie entrevistado en I_3 puede ser elegido, y entonces se gana si c es el primer entrevistado de ellos, lo que tiene probabilidad $\frac{1}{a}$ de ocurrir. Si ahora $s = 3$, notemos que si aparecen menos que $i-1$ símbolos 1 antes que s, entonces en el momento de entrevistar c_s, si nadie ha sido elegido todavía, se elige c_s y se pierde. Si por el contrario hay i o más símbolos 1 que aparecen en ω antes de s, se gana si c es el primer entrevistado de los a candidatos de C, lo que tiene probabilidad $\frac{1}{a}$ de ocurrir. $\square$

3.3.3. Valor del juego con primera barrera 0

Con las definiciones anteriores, se desea calcular $\mathbb{P}_0(T, p_3, p_4, i)$ para $i \geq 1$. Con lo visto antes, se interpretan los tiempos de entrevista via una palabra $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}^*$, donde para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n = i \in \{1, 2, 3, 4\} \Leftrightarrow t_n \in I_i$.

Primero, se puede notar que toda palabra empezando por un 2 es una palabra correspondiente a un caso donde se pierde (ya que el mejor entrevistado en $(T, 1]$ justamente se rechaza si $t_1 \in I_2$). Más aún, toda palabra empezando por un 3 también se interpreta como un caso donde se pierde. En efecto, el mejor entrevistado en $(T, 1]$ necesariamente será mejor que cualquier elemento del sampleo, en particular mejor que el i-ésimo del sampleo, por lo que se rechazará.

Por lo tanto solamente se consideran las palabras empezando por otro número, es decir por un 1 o un 4. Además, si el primer símbolo de ω es un 1, se puede notar que la probabilidad de ganar es la misma que la probabilidad que la subpalabra obtenida al eliminar el primer 1 de ω sea ganadora bajo la regla que guarda en memoria el $(i-1)$-ésimo mejor entrevistado en $[0, T]$ (con la misma idea evocada en los capítulos anteriores del experimento virtual donde ignoramos al mejor candidato del sampleo y lo sacamos del conjunto de los candidatos).

Las observaciones anteriores permiten seguir la siguiente estrategia para calcular la probabilidad $P_0(T, p_3, p_4, i)$:

1. Para $i = 1$, calcularemos primero $P_{0,1}(T, p_3, p_4, i = 1)$ y $P_{0,4}(T, p_3, p_4, i = 1)$ las probabilidades de ganar guardando el mejor del sampleo, cuando la palabra empieza respectivamente con un símbolo 1 o 4. Notamos que su suma vale $P_0(T, p_3, p_4, i = 1)$;
2. Para $i \geq 2$, resulta útil calcular $P_{0,4}(T, p_3, p_4, i)$, es decir es igual a la probabilidad de ganar guardando el i-ésimo mejor del sampleo, cuando la palabra empieza con un símbolo 4.

Valor del juego para $i = 1$

Teorema 3.28

$$\mathbb{P}_0(T, p_3, p_4, 1) = \frac{T \cdot p_2}{1-T} \cdot Q_0\left(\frac{p_3}{p_2 + p_3}\right) + \frac{p_2}{1-T} \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1-T}\right) + p_3 \cdot Q_0(p_4).$$

Demostración. Aplicando el Teorema 3.26 al caso $i = 1$ con configuraciones empezando con un 1, se deduce el siguiente gráfico asociado a las configuraciones posibles de las entrevistas si el primer símbolo es un 1:

$$1 : (1*) \begin{cases} 2 \text{ X} \\ 3 : (4*)\ 3^{a-1} (a \geq 1) \left\{ 2 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \right. \\ 4 : 4^{a-1} (a \geq 1) \begin{cases} 2 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 3 \text{ X} \end{cases} \end{cases}$$

En efecto, como la palabra asociada a la configuración enmieza por el único 1 que nos interesa, después de éste 1 los siguientes no influyen la probabilidad de ganar. Luego la probabilidad de ganar está dada por:

$$\begin{aligned} P_{0,1}(T, p_3, p_4, i=1) &= T \cdot \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{p_3}{1-T} \cdot \left(\frac{p_3}{p_2+p_3} \right)^{a-1} \cdot \frac{p_2}{p_2+p_3} + \left(\frac{p_4}{1-T} \right)^{a} \cdot \frac{p_2}{1-T} \right] \\ &= \frac{T \cdot p_2}{1-T} \cdot \left(Q_0 \left(\frac{p_3}{p_2+p_3} \right) + Q_0 \left(\frac{p_4}{1-T} \right) \right). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 3.26 al caso $i = 1$ con configuraciones empezando con un 4, deduzcamos ahora el gráfico asociado a las configuraciones posibles de las entrevistas si el primer símbolo es un 4:

$$4 : 4^{a-1}(a \geq 1) \begin{cases} 3 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 2 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 1 : (1*)\ 4^b (b \geq 0) \begin{cases} 3 \text{ X} \\ 2 \left[\frac{1}{a+b}\right] \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

Luego la probabilidad de ganar está dada por:

$$\begin{aligned} P_{0,4}(T, p_3, p_4, i=1) &= p_4 \cdot \sum_{a=1}^{\infty} p_4^{a-1} \cdot \left[(p_2+p_3) \cdot \frac{1}{a} + T \cdot \sum_{b=0}^{\infty} \left(\frac{p_4}{1-T} \right)^{b} \cdot \frac{p_2}{1-T} \cdot \frac{1}{a+b} \right] \\ &= (p_2+p_3) \cdot Q_0(p_4) + \frac{T \cdot p_2}{1-T} \cdot R_1(p_4, T) \\ &= (\cancel{p_2} + p_3) \cdot Q_0(p_4) + p_2 \cdot \left(Q_0 \left(\frac{p_4}{1-T} \right) - \cancel{Q_0(p_4)} \right) \\ &= p_3 \cdot Q_0(p_4) + p_2 \cdot Q_0 \left(\frac{p_4}{1-T} \right). \end{aligned}$$

Dado que las palabras empezando con un 2 o un 3 representan casos donde se pierde, se deduce el valor del juego para $i = 1$ sumando las dos probabilidades anteriores:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(T, p_3, p_4, 1) &= P_{0,1}(T, p_3, p_4, i=1) + P_{0,4}(T, p_3, p_4, i=1) \\ &= \frac{T \cdot p_2}{1-T} \cdot Q_0 \left(\frac{p_3}{p_2+p_3} \right) + \frac{p_2}{1-T} \cdot Q_0 \left(\frac{p_4}{1-T} \right) + p_3 \cdot Q_0(p_4). \qquad \square \end{aligned}$$

Subvalor del juego en el cuarto intervalo para i cualquiera

Lema 3.29

$$P_{0,4}(T,p_3,p_4,i) = (p_2+p_3)\cdot\sum_{j=0}^{i-1} T^j\cdot Q_j(p_4) + T^i\cdot\frac{p_2}{1-T}\cdot R_i(p_4,T).$$

Demostración. Si $i=1$, se puede obtener el mismo resultado como obtenido en la demostración del Teorema 3.28 simplificando el resultado sugerido por el lema.

Aplicando ahora el Teorema 3.26 al caso $i\geq 2$ con configuraciones empezando con un 4, se deduce el siguiente gráfico asociado a las configuraciones posibles de las entrevistas si el primer símbolo es un 4:

$$4 : 4^{a_1-1}(a_1\geq 1)\begin{cases} 3\left[\frac{1}{a_1}\right]\checkmark \\ 2\left[\frac{1}{a_1}\right]\checkmark \\ 1 : 4^{a_2}(a_2\geq 0)\begin{cases} 3\left[\frac{1}{a_1+a_2}\right]\checkmark \\ 2\left[\frac{1}{a_1+a_2}\right]\checkmark \\ 1 : \;\cdots\begin{cases} 3\left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_i}\right]\checkmark \\ 2\left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_i}\right]\checkmark \\ 1 : (1*)\;4^{a_{i+1}}(a_{i+1}\geq 0)\begin{cases} 3\ \text{X} \\ 2\left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{i+1}}\right]\checkmark \end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Luego la probabilidad de ganar está dada por:

$$\begin{aligned}P_{0,4}(T,p_3,p_4,i) &= p_4\sum_{a_1=1}^{\infty}(p_4)^{a_1-1}\cdot\left[(p_2+p_3)\cdot\frac{1}{a_1}+T\sum_{a_2=0}^{\infty}(p_4)^{a_2}\cdot\left[(p_2+p_3)\cdot\frac{1}{a_1+a_2}\right.\right. \\ &\quad\left.\left.+\ T(\cdots)\left[(p_2+p_3)\frac{1}{\sum_{l=1}^{i}a_l}+T\sum_{a_{i+1}=0}^{\infty}\left(\frac{p_4}{1-T}\right)^{a_{i+1}}\cdot\frac{p_2}{1-T}\cdot\frac{1}{\sum_{l=1}^{i+1}a_l}\right](\cdots)\right]\right] \\ &= (p_2+p_3)\cdot\sum_{j=0}^{i-1}T^j\cdot Q_j(p_4)+T^i\cdot\frac{p_2}{1-T}\cdot R_i(p_4,T).\end{aligned}$$

□

Valor del juego en el caso $T_0 < T_1$

Teorema 3.30 *Si se considera el problema del (TCSP) contínuo con memoria de sampleo unitaria donde el candidato guardado es el i-ésimo mejor del sampleo ($i\geq 1$), el valor del juego asociado si $T_0\leq T_1$ cumple la siguiente recurrencia:*

$$\mathbb{P}_0(T,p_3,p_4,i=1) = \frac{T\cdot p_2}{1-T}\cdot Q_0\left(\frac{p_3}{p_2+p_3}\right)+\frac{p_2}{1-T}\cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1-T}\right)+p_3\cdot Q_0(p_4).$$

$$\mathbb{P}_0(T,p_3,p_4,i\geq 2) = T\cdot\mathbb{P}_0(T,p_3,p_4,i-1)+(p_2+p_3)\cdot\sum_{j=0}^{i-1}T^j\cdot Q_j(p_4)+T^i\cdot\frac{p_2}{1-T}\cdot R_i(p_4,T).$$

Demostración. El caso $i = 1$ ya se determinó con el Teorema 3.28.

Para el caso $i \geq 2$, como toda palabra empezando por un 2 o un 3 no corresponde a una configuración donde se gana, quedan dos casos dependiendo del primer símbolo:

- Si es un 1, basta con sacarlo y calcular la probabilidad de ganar guardando el $(i-1)$-ésimo mejor del sampleo, luego se gana con probabilidad $T \cdot \mathbb{P}_0(T, p_3, p_4, i-1)$;
- Si es un 4, se gana con probabilidad $P_{0,4}(T, i)$.

Basta entonces con sumar las dos probabilidades anteriores, y usando el lema anterior se concluye. $\square$

3.3.4. Valor del juego con primera barrera 1

Ahora deseamos realizar el mismo estudio en el caso en el que la primera barrera es la barrera 1, es decir:

- se rechaza todo candidato entrevistado en el intervalo de tiempos I_2,
- se acepta un candidato entrevistado en el intervalo de tiempos I_3 si es el primer récord parcial entrevistado que sea también mejor que el i-ésimo mejor candidato del sampleo,
- se acepta un candidato entrevistado en el intervalo de tiempos I_4 si es el primer récord parcial entrevistado.

Primero, se puede notar que toda configuración empezando por un 2 es una configuración correspondiente a un caso donde se pierde (ya que el mejor entrevistado en $(T, 1]$ justamente se rechaza si $t_1 \in I_2$), así que solamente consideramos las palabras empezando por otro número. Además, si el primer símbolo de ω es un 1, se puede notar que la probabilidad de ganar es la misma que la probabilidad que la subpalabra obtenida al eliminar el primer 1 se ω sea ganadora bajo la regla que guarda en memoria el $(i-1)$-ésimo mejor elemento entrevistado en $[0, T]$ (con la misma idea evocada en los capítulos anteriores del experimento virtual donde ignoramos al mejor candidato del sampleo y lo sacamos del conjunto de los candidatos).

Las observaciones anteriores permiten seguir la siguiente estrategia para calcular la probabilidad $P_1(T, p_3, p_4, i)$:

1. Para $i = 1$, calcularemos primero las probabilidades de ganar guardando el mejor del sampleo $P_{1,1}(T, p_3, p_4, i = 1)$, $P_{1,3}(T, p_3, p_4, i = 1)$ y $P_{1,4}(T, p_3, p_4, i = 1)$, cuando la palabra empieza respectivamente con un símbolo 1, 3 o 4. Notamos que su suma vale $\mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i = 1)$;
2. Para $i \geq 2$, resulta útil calcular $P_{1,3}(T, p_3, p_4, i)$ y $P_{1,4}(T, p_3, p_4, i)$, es decir son iguales a las probabilidades de ganar guardando el i-ésimo mejor del sampleo cuando la palabra empieza respectivamente con un símbolo 3 o 4.

Valor del juego para $i = 1$

Teorema 3.31

$$\mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i = 1) = (1 - p_3 - p_4) \cdot Q_0\left(\frac{p_3}{1 - p_4}\right) + \left(1 - \frac{p_4}{1 - T}\right) \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1 - T}\right) - p_3 \cdot Q_0(p_4).$$

Demostración. Aplicando el Teorema 3.27 al caso $i = 1$ con configuraciones empezando con un 1, se deduce el siguiente gráfico asociado a las configuraciones posibles de las entrevistas si el primer símbolo es un 1:

$$1 : (1*) \begin{cases} 2 \text{ X} \\ 3 \text{ X} \\ 4 : \ 4^{a-1}(a \geq 1) \begin{cases} 3 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 2 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

Luego la probabilidad de ganar en este caso está dada por:

$$P_{1,1}(T, p_3, p_4, i = 1) = T \cdot \sum_{a=1}^{\infty} \left(\frac{p_4}{1 - T}\right)^a \cdot \left(\frac{p_2 + p_3}{1 - T}\right) \cdot \frac{1}{a} = T \cdot \left(1 - \frac{p_4}{1 - T}\right) \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1 - T}\right).$$

Aplicando el Teorema 3.27 al caso $i = 1$ con configuraciones empezando con un 3, veamos ahora el gráfico asociado a las configuraciones posibles de las entrevistas si el primer símbolo es un 3:

$$3 : (4*) \ 3^{a-1}(a \geq 1) \begin{cases} 2 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 1 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \end{cases}$$

Luego la probabilidad de ganar en este caso está dada por:

$$\begin{aligned} P_{1,3}(T, p_3, p_4, i = 1) &= p_3 \cdot \sum_{a=1}^{\infty} \left[\left(\frac{p_3}{1 - p_4}\right)^{a-1} \cdot \frac{T + p_2}{1 - p_4} \cdot \frac{1}{a}\right] \\ &= (1 - p_3 - p_4) \cdot \sum_{a=1}^{\infty} \left[\left(\frac{p_3}{1 - p_4}\right)^a \cdot \frac{1}{a}\right] = (1 - p_3 - p_4) \cdot Q_0\left(\frac{p_3}{1 - p_4}\right). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 3.27 al caso $i = 1$ con configuraciones empezando con un 4, veamos finalmente el gráfico asociado a las configuraciones posibles de las entrevistas si el primer símbolo es un 4:

$$4 : 4^{a-1}(a \geq 1) \begin{cases} 3 \text{ X} \\ 2 \left[\frac{1}{a}\right] \checkmark \\ 1 : (1*)\ 4^b(b \geq 0) \begin{cases} 3 \left[\frac{1}{a+b}\right] \checkmark \\ 2 \left[\frac{1}{a+b}\right] \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

Luego la probabilidad de ganar en este caso está dada por:

$$\begin{aligned} P_{1,4}(T, p_3, p_4, i = 1) &= p_4 \sum_{a=1}^{\infty} (p_4)^{a-1} \cdot \left[p_2 \cdot \frac{1}{a} + T \sum_{b=0}^{\infty} \left(\frac{p_4}{1-T}\right)^b \cdot \frac{p_2 + p_3}{1-T} \cdot \frac{1}{a+b}\right] \\ &= p_2 \cdot Q_0(p_4) + T \cdot \left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot R_1(p_4, T) \\ &= p_2 \cdot Q_0(p_4) + \cancel{T} \cdot \frac{1 - T - p_4}{\cancel{1-T}} \cdot \frac{\cancel{1-T}}{\cancel{T}} \cdot \left(Q_0\left(\frac{p_4}{1-T}\right) - Q_0(p_4)\right) \\ &= (1-T) \cdot \left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1-T}\right) - p_3 \cdot Q_0(p_4). \end{aligned}$$

Como las palabras empezando con un 2 representan casos donde se pierde, se deduce el valor del juego para $i = 1$ sumando las tres probabilidades anteriores:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i = 1) &= P_{1,1}(T, p_3, p_4, i = 1) + P_{1,3}(T, p_3, p_4, i = 1) + P_{1,4}(T, p_3, p_4, i = 1) \\ &= \cancel{T \cdot \left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1-T}\right)} + (1 - p_3 - p_4) \cdot Q_0\left(\frac{p_3}{1-p_4}\right) \\ &\quad + (1 - \cancel{T}) \cdot \left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1-T}\right) - p_3 \cdot Q_0(p_4). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i = 1) = (1 - p_3 - p_4) \cdot Q_0\left(\frac{p_3}{1-p_4}\right) + \left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1-T}\right) - p_3 \cdot Q_0(p_4).$$

$\square$

Subvalor del juego en el tercer intervalo para i cualquiera

Lema 3.32 $\forall\ i \geq 1$*:*

$$P_{1,3}(T,p_3,p_4,i) = p_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-2} \left[\left(\frac{T}{1-p_4} \right)^j Q_j \left(\frac{p_3}{1-p_4} \right) \right] + (1-p_3-p_4) \cdot \left(\frac{T}{1-p_4} \right)^{i-1} \cdot Q_{i-1} \left(\frac{p_3}{1-p_4} \right).$$

Demostración. En el caso $i = 1$, notamos que la suma se definiría de $j = 0$ hasta -1, lo que se puede interpretar como una suma vacía. Luego el resultado obtenido via esta fórmula evaluando en $i = 1$ es el mismo como calculado en la demostración del Teorema 3.31.

Aplicando ahora el Teorema 3.27 al caso $i \geq 2$ con configuraciones empezando con un 3, se deduce el siguiente gráfico:

$$3:(4*)\ 3^{a_1-1}(a_1 \geq 1) \begin{cases} 2\left[\frac{1}{a_1}\right] \checkmark \\ 1 : 3^{a_2}(a_2 \geq 0) \begin{cases} 2\left[\frac{1}{a_1+a_2}\right] \checkmark \\ 1 : \ \cdots \ \cdots \begin{cases} 2\left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}}\right] \checkmark \\ 1 : 3^{a_i}(a_i \geq 0) \begin{cases} 2\left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_i}\right] \checkmark \\ 1\left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_i}\right] \checkmark \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Con esto se deduce:

$$\begin{aligned} P_{1,3}(T,p_3,p_4,i) = p_3 \cdot \sum_{a_1=1}^{\infty} \left(\frac{p_3}{1-p_4} \right)^{a_1-1} \cdot \Bigg[\frac{p_2}{1-p_4} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{T}{1-p_4} \cdot \sum_{a_2=0}^{\infty} \left(\frac{p_3}{1-p_4} \right)^{a_2} \cdot \Bigg[\frac{p_2}{1-p_4} \cdot \frac{1}{a_1+a_2} \\ + \cdots \left[\frac{p_2}{1-p_4} \cdot \frac{1}{\sum_{l=1}^{i-1} a_l} + \frac{T}{1-p_4} \cdot \sum_{a_i=0}^{\infty} \left(\frac{p_3}{1-p_4} \right)^{a_i} \left(1 - \frac{p_3}{1-p_4} \right) \frac{1}{\sum_{l=1}^{i} a_l} \right] \cdots \Bigg] \Bigg]. \end{aligned}$$

Simplificando la expresión, se pueden reconocer las expresiones de $Q_n\left(\frac{p_3}{1-p_4}\right)$ para varios n's, hasta llegar a la fórmula siguiente:

$$P_{1,3}(T,p_3,p_4,i) = p_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-2} \left[\left(\frac{T}{1-p_4} \right)^j \cdot Q_j \left(\frac{p_3}{1-p_4} \right) \right] + \left(\frac{T}{1-p_4} \right)^{i-1} \cdot (1-p_3-p_4) \cdot Q_{i-1} \left(\frac{p_3}{1-p_4} \right).$$

$\square$

Subvalor del juego en el cuarto intervalo para i cualquiera

Lema 3.33 *$\forall\ i \geq 1$:*

$$P_{1,4}(T, p_3, p_4, i) = p_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-1} T^j \cdot Q_j(p_4) + T^i \cdot \left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot R_i(p_4, T).$$

Demostración. Notamos que el resultado obtenido via esta fórmula evaluando en $i = 1$ es el mismo como calculado en la demostración para determinar $\mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i = 1)$.

Aplicando ahora el Teorema 3.27 al caso $i \geq 2$ con configuraciones empezando con un 4, se deduce el siguiente gráfico:

$$4 : 4^{a_1-1}(a_1 \geq 1) \begin{cases} 3 \text{ X} \\ 2 \left[\frac{1}{a_1}\right] \checkmark \\ 1 : 4^{a_2}(a_2 \geq 0) \begin{cases} 3 \text{ X} \\ 2 \left[\frac{1}{a_1+a_2}\right] \checkmark \\ 1 : \ \cdots \begin{cases} 3 \text{ X} \\ 2 \left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_i}\right] \checkmark \\ 1 : (*)\ 4^{a_{i+1}}(a_{i+1} \geq 0) \begin{cases} 3 \left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{i+1}}\right] \checkmark \\ 2 \left[\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{i+1}}\right] \checkmark \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Con esto se deduce:

$$\begin{aligned} P_{1,4}(T, p_3, p_4, i) = p_4 \cdot \sum_{a_1=1}^{\infty} (p_4)^{a_1-1} \cdot \Bigg[p_2 \cdot \frac{1}{a_1} + T \cdot \sum_{a_2=0}^{\infty} (p_4)^{a_2} \cdot \Bigg[p_2 \cdot \frac{1}{a_1+a_2} + T(\cdots) \Bigg[p_2 \cdot \frac{1}{\sum_{l=1}^{i} a_l} \\ + \ T \cdot \sum_{a_{i+1}=0}^{\infty} \left(\frac{p_4}{1-T}\right)^{a_{i+1}} \left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot \frac{1}{\sum_{l=1}^{i+1} a_l} \Bigg] (\cdots) \Bigg] \Bigg]. \end{aligned}$$

Simplificando la expresión, se pueden reconocer las expresiones de $Q_n\,(p_4)$ para varios n's y la de $R_i(p_4)$, hasta llegar a la fórmula siguiente:

$$P_{4,i}(T) = p_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-1} T^j \cdot Q_j(p_4) + T^i \cdot \left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot R_i(p_4, T). \quad \square$$

Valor del juego en el caso $T_1 < T_0$

A continuación presentamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.34 *Si se considera el problema del (TCSP) contínuo con memoria de sampleo unitaria donde el candidato guardado es el i-ésimo mejor del sampleo ($i \geq 1$), el valor del juego asociado si $T_1 \leq T_0$ cumple la siguiente recurrencia:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i = 1) = (1 - p_3 - p_4) \cdot Q_0\left(\frac{p_3}{1 - p_4}\right) + \left(1 - \frac{p_4}{1 - T}\right) \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1 - T}\right) \\ - p_3 \cdot Q_0(p_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i \geq 2) = T \cdot \mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i - 1) + p_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-2}\left[\left(\frac{T}{1 - p_4}\right)^j \cdot Q_j\left(\frac{p_3}{1 - p_4}\right)\right] \\ + (1 - p_3 - p_4) \cdot \left(\frac{T}{1 - p_4}\right)^{i-1} \cdot Q_{i-1}\left(\frac{p_3}{1 - p_4}\right) \\ + p_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-1} T^j \cdot Q_j(p_4) + T^i \cdot \left(1 - \frac{p_4}{1 - T}\right) \cdot R_i(p_4, T).\end{aligned}$$

Demostración. El caso base ya se determinó en el Teorema 3.31.

Para el caso $i \geq 2$, como toda palabra empezando por un 2 no corresponde a una configuración donde se gana, quedan tres casos dependiendo del primer símbolo:

- Si es un 1, basta con sacarlo y calcular la probabilidad de ganar guardando el $(i - 1)$-ésimo mejor del sampleo, luego se gana con probabilidad $T \cdot \mathbb{P}(T, p_3, p_4, i - 1)$;
- Si es un 3, se gana con probabilidad $P_{1,3}(T, p_3, p_4, i)$;
- Si es un 4, se gana con probabilidad $P_{1,4}(T, p_3, p_4, i)$.

Basta entonces con sumar las tres probabilidades anteriores, y usando los dos lemas anteriores se concluye. $\square$

El siguiente corolario será muy útil al momento de interpretar los resultados númericos.

Corolario 3.35 *Para todo* $i \in \mathbb{N}^*$*, si* $p_3 = \delta \cdot (1-T)$ *y* $p_4 = \gamma \cdot (1-T)$ *para algunas constantes* $\delta, \gamma \in (0,1)$*, entonces:*

$$\lim_{T \to 1} \mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i) = -(1-\gamma) \cdot \ln(1-\gamma).$$

Demostración. Probemos el resultado por inducción sobre $i \in \mathbb{N}^*$.

Caso base:

Usando el Teorema 3.22, se puede notar que el primer término y el tercer término de $\mathbb{P}_1$ se van a 0 cuando T tiende a 1, ya que $\lim_{T \to 1} \frac{p_3}{1-p_4} = \lim_{T \to 1} \frac{\delta \cdot (1-T)}{1-\gamma \cdot (1-T)} = 0$. Estudiemos ahora el segundo término de $\mathbb{P}_1$:

$$\left(1 - \frac{p_4}{1-T}\right) \cdot Q_0\left(\frac{p_4}{1-T}\right) = -\left(1 - \frac{\gamma \cdot \cancel{(1-T)}}{\cancel{1-T}}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\gamma \cdot \cancel{(1-T)}}{\cancel{1-T}}\right) = -(1-\gamma) \cdot \ln(1-\gamma),$$

lo que tiende a $-(1-\gamma) \cdot \ln(1-\gamma)$ cuando T tiende a 1 y prueba el resultado pedido para $i = 1$.

Paso inductivo:

Supongamos que se tiene el resultado para algún $i \in \mathbb{N}^*$ y veamos que se tiene para $i+1$. Por el teorema anterior, tenemos la expresión de $\mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i+1)$ donde aparecen los términos $Q_n\left(\frac{p_3}{1-p_4}\right)$ y $Q_n(p_4)$ para todo $n \in \{0, \ldots, i\}$, y $R_{i+1}(p_4, T)$.

Usando el teorema 3.22, y dado que $\lim_{T \to 1} \frac{p_3}{1-p_4} = 0$ y $\lim_{T \to 1} p_4$, entonces los términos anteriores se van a 0 cuando T tiende a 1. Además, como están multiplicados que quedan acotados cuando T tiende a 1, se deduce que:

$$\begin{aligned} \lim_{T \to 1} \mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i+1) &= \lim_{T \to 1} T \cdot \mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i) \\ &= \lim_{T \to 1} T \cdot \mathbb{P}_1(T, p_3, p_4, i), \end{aligned}$$

donde se concluye el resultado usando la hipótesis de inducción. Luego se concluye la demostración del corolario. $\square$

3.4. Resultados computacionales

Usando los fórmulas cerradas para las funciones Q_n y R_n encontradas en la parte 3.3.1, se pueden encontrar varios gráficos para distintos valores de T, desde 0 hasta 1 con un paso de 10^{-3}. Se estudia el caso donde $i = 1$ para tratar de relacionar los resultados del (TCSP) con memoria de sampleo unitaria con el (SP) tradicional, ya que para $i = 1$ se acepta un candidato entrevistado en $t \in I_3$ si es el mejor de todos los entrevistados antes de t, que es el mismo criterio para el (SP) sobre todo $[0, 1]$. Se estudian también los casos $i = 2$ e $i = 3$ para ver cómo los primeros valores de i afectan la división en intervalos óptima y el valor del juego.

En las Figuras 3.6 a 3.11 aparecen los resultados asociados a los casos $i = 1, 2$ y 3, es decir la división óptima del intervalo $[0, 1]$ dado T y los valores del juego asociados. En el caso de la división del intervalo $[0, 1]$, los distintos valores tomados por T aparecen en el eje vertical, así que al fijar $T = t$, basta con dibujar la recta horizontal $y = t$ para deducir la división óptima de $[0, 1]$ asociada de la siguiente forma:

- I_1 está delimitado por el borde izquierdo y la curva azul,
- I_2 está delimitado por las curvas azul y verde,
- I_3 está delimitado por las curvas verde y roja,
- I_4 está delimitado por la curva roja y el borde derecho.

Otra forma de verlo es la siguiente: al fijar $T = t$, la recta $y = t$ intersecta las curvas azul, verde y roja en los puntos con abscisa respectiva T, T^* y T_∞. En estos gráficos se agrega en negro la curva dada por $\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot T$, que representa la división de $[T, 1]$ sugerida por la regla óptima para el (SP) tradicional (es decir: rechazar a todos antes de este tiempo y luego contratar al primero encontrado que sea mejor que todos los ya entrevistados).

Se realizan en las Figuras 3.6 3.7 y 3.8 los gráficos con la división de $[0, 1]$ óptima para $T_0 < T_1$ y $T_1 < T_0$. La Figura 3.6 representa estas divisiones para el caso $i = 1$, a la izquierda con $T_1 \leq T_0$ y a la derecha con $T_0 \leq T_1$. La Figura 3.7 son los gráficos análogos para el caso $i = 2$ y la Figura 3.8 son los análogos para el caso $i = 3$. Finalmente, en los gráficos de las Figuras 3.9 3.10 y 3.11 aparecen las probabilidades optimales para todo T. En ambos aparecen $\mathbb{P}_0$ en negro y $\mathbb{P}_1$ en azul, donde la Figura 3.9 corresponde al caso $i = 1$, la Figura 3.10 al caso $i = 2$ y la Figura 3.11 al caso $i = 3$. En cada uno se agrega con cruces rojas el valor asociado al (SP).

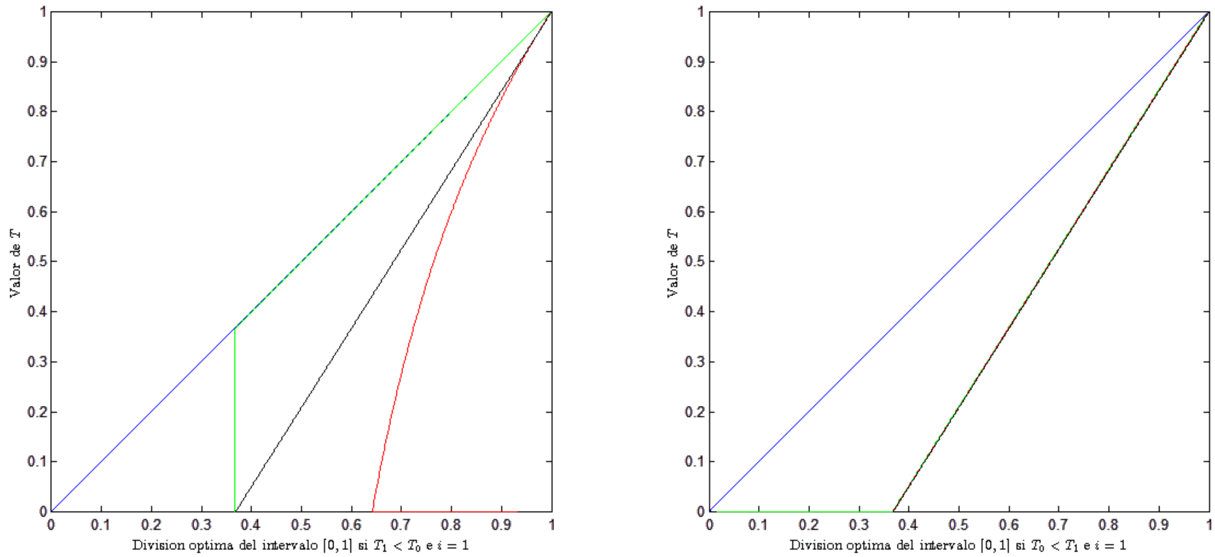

Figura 3.6: División óptima en intervalos de $[0,1]$ para las reglas asociadas a $i = 1$ con $T_1 < T_0$ a la izquierda y $T_0 < T_1$ a la derecha. Se agregó en negro en ambos gráficos la división de $[T,1]$ al aplicar la regla de elección óptima asociada al (SP) tradicional, es decir la recta $x = \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot T$.

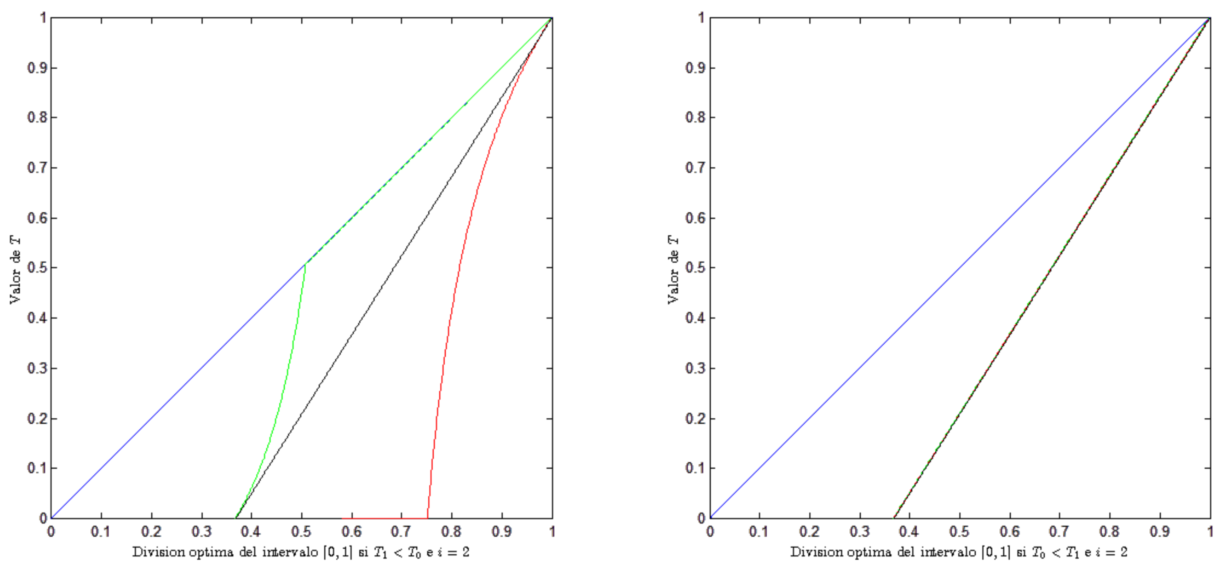

Figura 3.7: División óptima en intervalos de $[0,1]$ para las reglas asociadas a $i = 2$ con $T_1 < T_0$ a la izquierda y $T_0 < T_1$ a la derecha. Se agregó en negro en ambos gráficos la división de $[T,1]$ al aplicar la regla de elección óptima asociada al (SP) tradicional, es decir la recta $x = \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot T$.

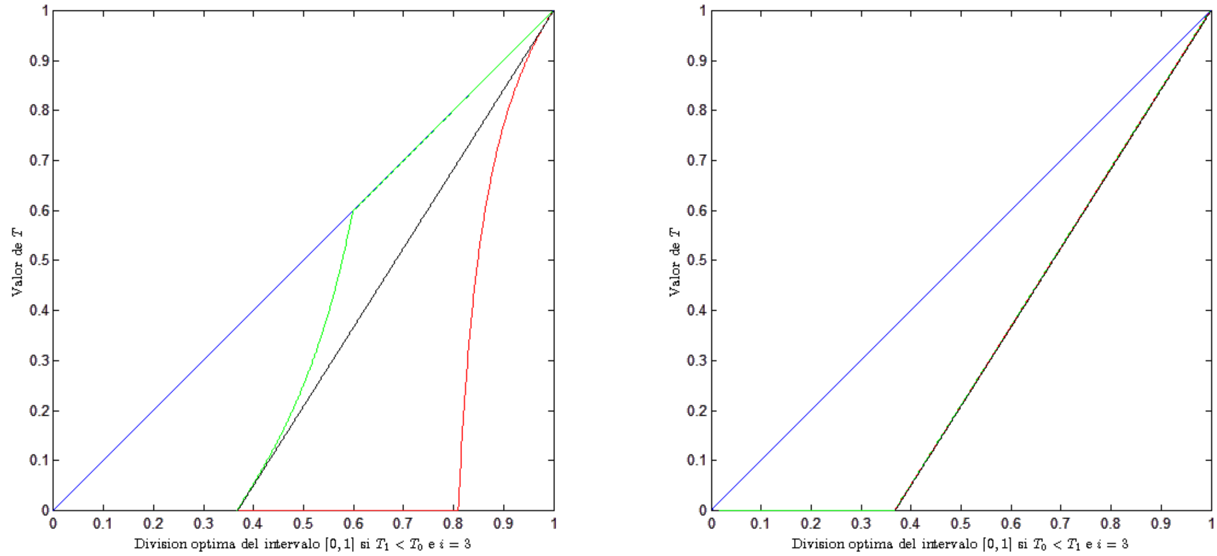

Figura 3.8: División óptima en intervalos de $[0, 1]$ para las reglas asociada a $i = 3$ con $T_1 < T_0$ a la izquierda y $T_0 < T_1$ a la derecha. Se agregó en negro en ambos gráficos la división de $[T, 1]$ al aplicar la regla de elección óptima asociada al (SP) tradicional, es decir la recta $x = \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot T$.

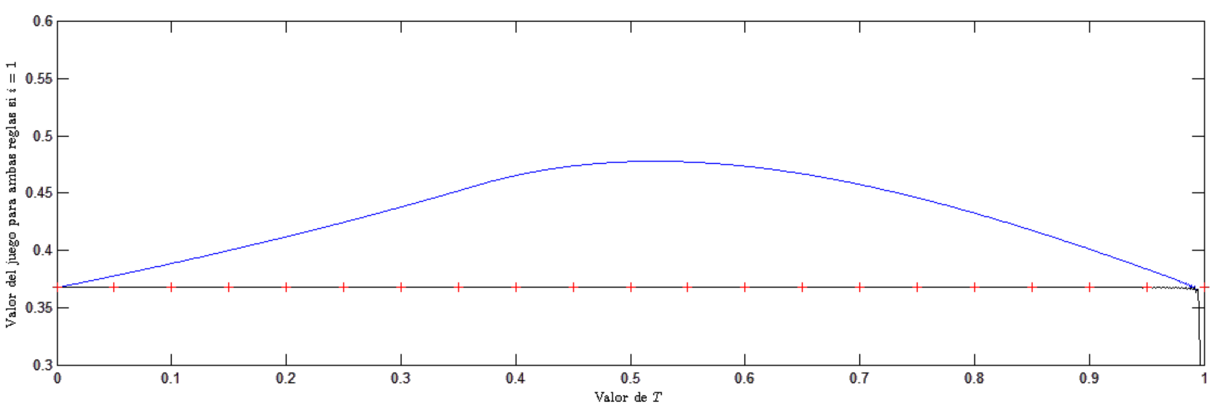

Figura 3.9: Valor del juego óptimo con la regla asociada a $i = 1$, en azul para $T_1 < T_0$ y en negro para $T_0 < T_1$. Se agregó con cruces rojas el valor óptimo del juego para el (SP) tradicional.

Observación Las tres curvas representativas de los valores del juego asociados a los casos $i = 1, 2, 3$ caen rápidamente a 0 un poco antes de $T = 1$. Se puede suponer que esto está debido a errores numéricos de *Matlab*. En efecto, al mirar las Figuras 3.6 a 3.8, cuando T tiende a 1, la división de $[T, 1]$ parece tender a ser la división óptima para el (SP) tradicional. Por lo tanto se puede suponer que cuando T tiende a 1 para $i = 1, 2, 3$, $p_3 = \delta \cdot (1 - T)$ y $p_4 = \gamma \cdot (1 - T)$, aquí con $\delta = 0$ y $\gamma = 1 - frac1e$. Aplicando el resultado del Corolario 3.35, deducimos que los valores del juegos tienden a $-(1 - \gamma) \ln(1 - \gamma) = \frac{1}{e}$ cuando T tiende a 1. Este resultado permite comprobar que esta caída rápida de las curvas no es esperada en la teoría, por lo que se deben tener por errores numéricos internos a *Matlab*.

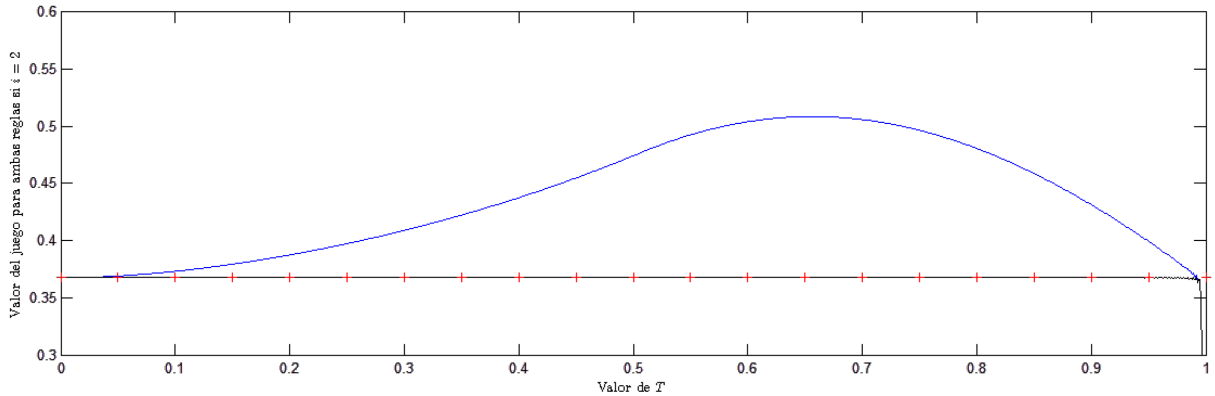

Figura 3.10: Valor del juego óptimo con la regla asociada a $i = 2$, en azul para $T_1 < T_0$ y en negro para $T_0 < T_1$. Se agregó con cruces rojas el valor óptimo del juego para el (SP) tradicional.

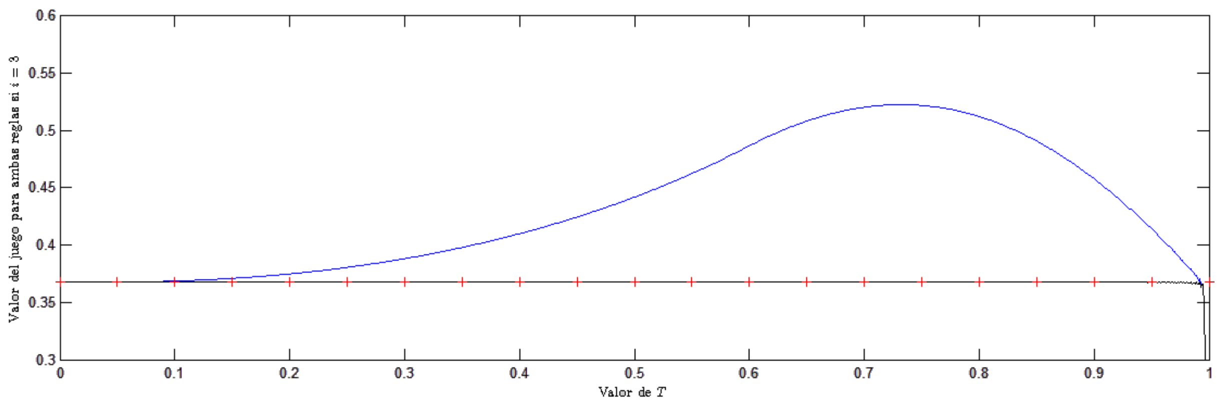

Figura 3.11: Valor del juego óptimo con la regla asociada a $i = 3$, en azul para $T_1 < T_0$ y en negro para $T_0 < T_1$. Se agregó con cruces rojas el valor óptimo del juego para el (SP) tradicional.

Observación Los gráficos permiten deducir que la regla óptima para el (TCSP) con memoria de sampleo unitaria se obtiene con $T_1 \leq T_0$. En efecto, en el caso $T_0 \leq T_1$, la probabilidad queda pegada al valor del juego óptimo del (SP) tradicional. Se nota además que, para $i = 1, 2, 3$, la división en intervalos óptima asociada queda con $T_0 = T_1$ para todo T, es decir con I_3 vacío. Al final, la estrategia óptima con $T_0 \leq T_1$ corresponde a aplicar la estrategia óptima del (SP) tradicional en $(T, 1]$, es decir que durante el intervalo de tiempo $\left[T, \frac{1-T}{e}\right]$ se rechazan todos los candidatos entrevistados, y luego se elige al primer mejor que el mejor ya entrevistado después de T. No se usa en ninguna parte la información recogida en el sampleo inicial.

Estudiemos ahora los resultados obtenidos para $T_1 \leq T_0$. Para todos los casos $i = 1, 2, 3$, las probabilidades obtenidas valen $\frac{1}{e}$ en $T = 0$, luego crecen hasta alcanzar un máximo antes de decrecer hasta 1, donde salvo errores numéricos tienden a $\frac{1}{e}$ cuando T tiende a 1. Entonces en ambos límites (T cercano a 0 y 1) el valor óptimo del juego se acerca del óptimo para el (SP) tradicional, lo que tiene el mismo sentido como se interpretó en la sección anterior para el caso discreto. Esta observación se nota también a través de la división de $[0, 1]$ en ambos límites, lo que se comentará después de la siguiente comparación de gráficos.

Los siguientes gráficos comparan las divisiones en intervalos de $[0,1]$ obtenidas en los casos discreto (para $N = 10.000$) y contínuo, así como los valores del juego para $i = 1, 2, 3$ en los casos discreto (en magenta) y contínuo (en azul), con las líneas de puntos rojos que representan los valores del juego óptimos para el (SP) y el (FISP):

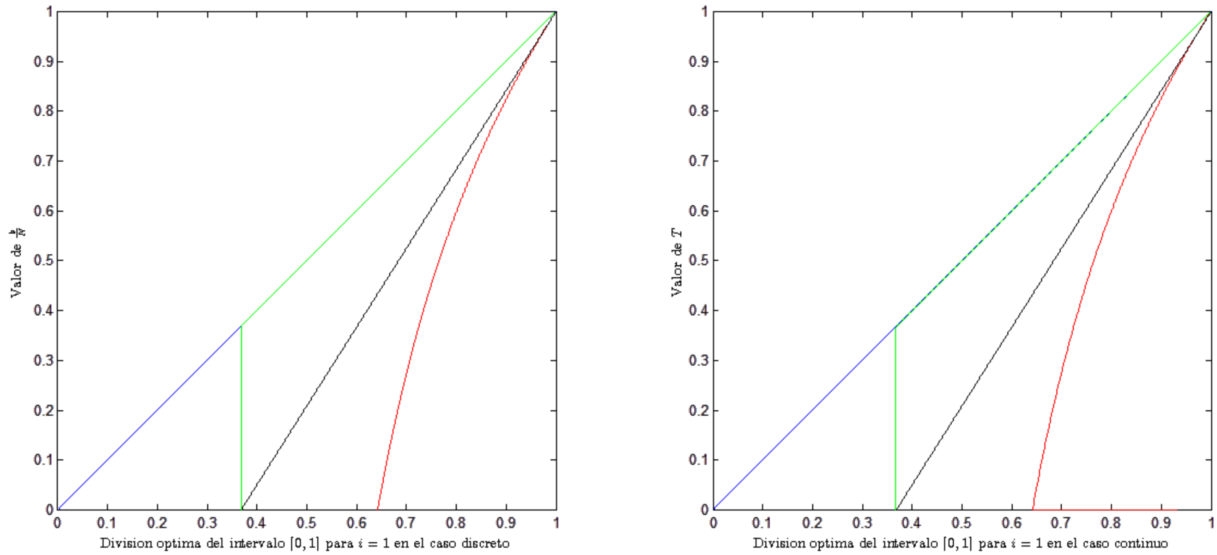

Figura 3.12: División óptima en intervalos de $[0,1]$ para la regla asociada a $i = 1$, en el caso discreto a la izquierda ($N = 10.000$, en rojo) y en el caso contínuo con $T_1 < T_0$ a la derecha (precisión de 10^{-3}, en azul); para el caso discreto el intervalo $[0,1]$ se refiere a las razones $\frac{m}{N}$ donde $\frac{N}{N} = 1$ es el borde derecho del intervalo. Se agregó en negro en ambos gráficos la división de $[T,1]$ al aplicar la regla de elección óptima asociada al (SP) tradicional, es decir la recta $x = \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot T$.

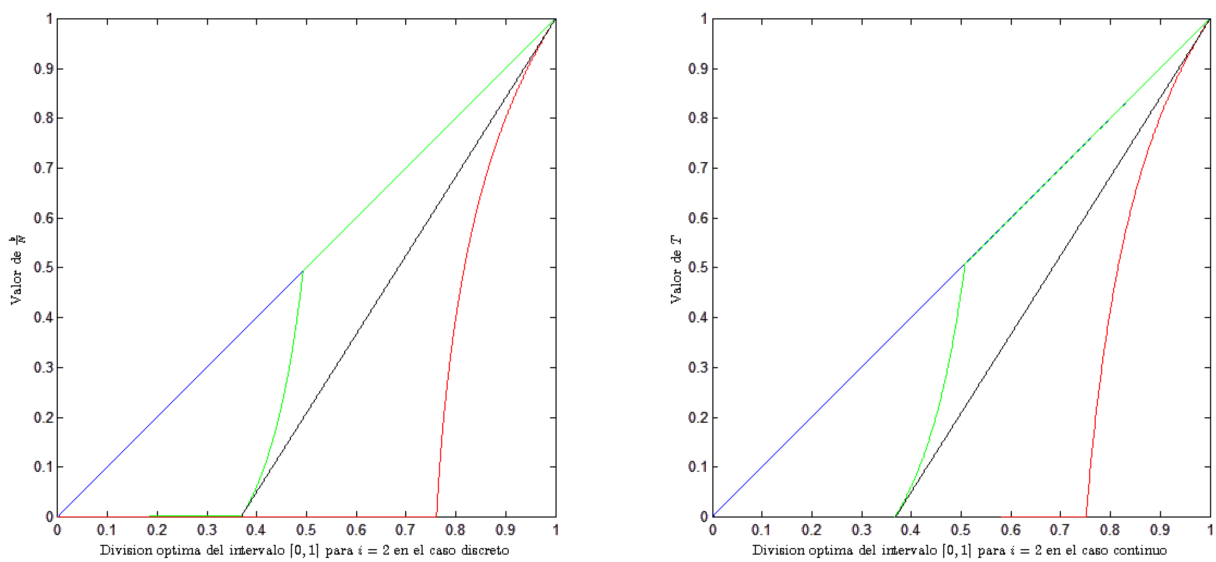

Figura 3.13: División óptima en intervalos de $[0,1]$ para la regla asociada a $i = 2$, en el caso discreto a la izquierda ($N = 10.000$, en rojo) y en el caso contínuo con $T_1 < T_0$ a la derecha (precisión de 10^{-3}, en azul); para el caso discreto el intervalo $[0,1]$ se refiere a las razones $\frac{m}{N}$ donde $\frac{N}{N} = 1$ es el borde derecho del intervalo. Se agregó en negro en ambos gráficos la división de $[T,1]$ al aplicar la regla de elección óptima asociada al (SP) tradicional, es decir la recta $x = \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot T$.

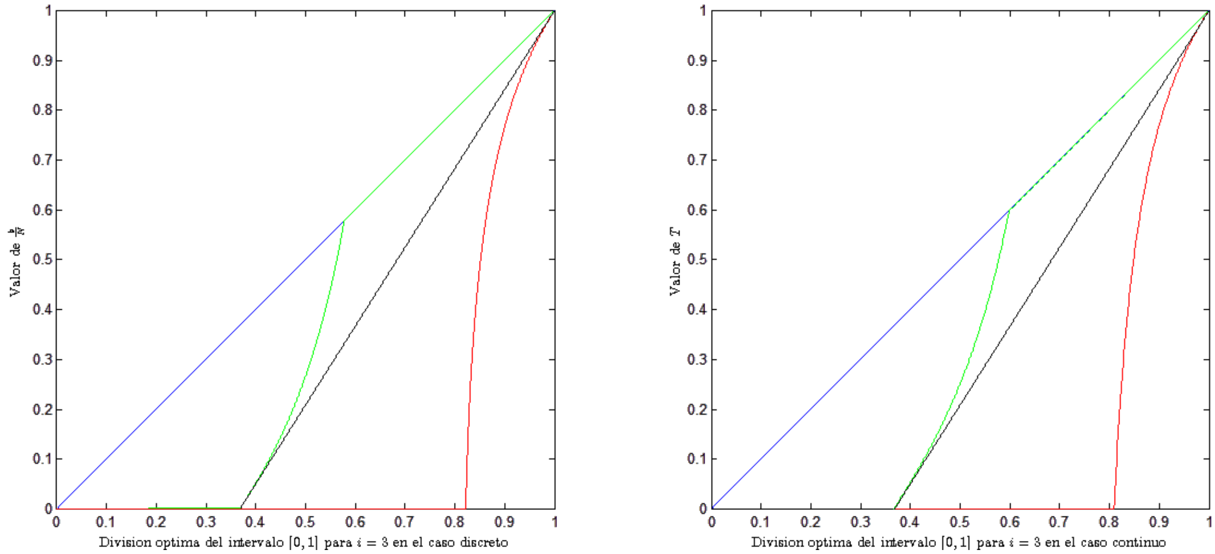

Figura 3.14: División óptima en intervalos de $[0,1]$ para la regla asociada a $i = 3$, en el caso discreto a la izquierda ($N = 10.000$, en rojo) y en el caso contínuo con $T_1 < T_0$ a la derecha (precisión de 10^{-3}, en azul); para el caso discreto el intervalo $[0,1]$ se refiere a las razones $\frac{m}{N}$ donde $\frac{N}{N} = 1$ es el borde derecho del intervalo. Se agregó en negro en ambos gráficos la división de $[T,1]$ al aplicar la regla de elección óptima asociada al (SP) tradicional, es decir la recta $x = \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot T$.

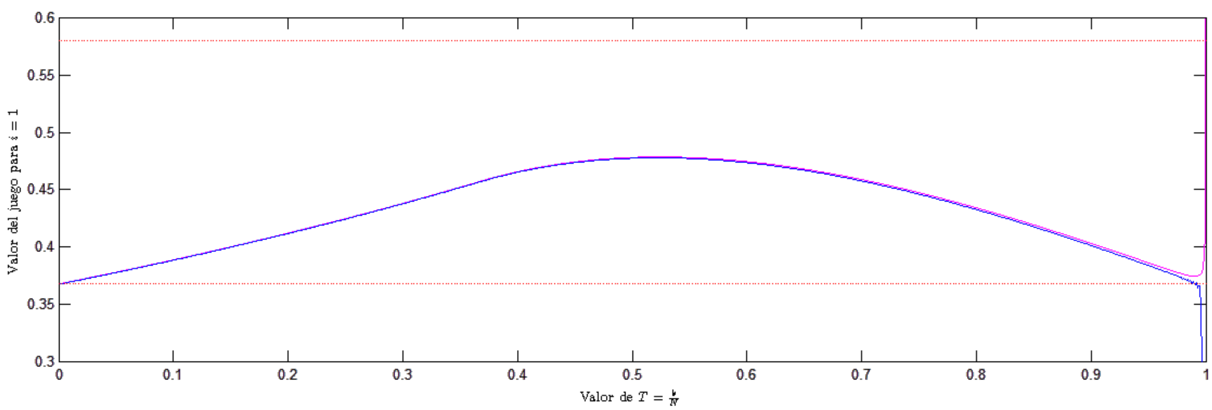

Figura 3.15: Valores del juego obtenidos en ambos casos discreto (para $N = 10.000$) y contínuo (precisión 10^{-3}) para la regla asociada a $i = 1$. Se agregaron en lineas de puntos rojas las rectas de ecuación $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas respectivamente a los valores del juego óptimos del (SP) y del (FISP).

Primero que todo, se nota que los resultados obtenidos en cada caso son muy similares, tanto en el valor óptimo del juego para $i = 1, 2, 3$ como en la división de intervalos óptima. Con respecto a la división de intervalos, tiene sentido en ambos casos que después de cierto valor T el intervalo I_2 quede vacío. Si T es bastante grande, ya se tiene una buena muestra de los candidatos con este sampleo inicial (si uno elige bien el rango del candidato que guardar en memoria), así que no se necesita una segunda muestra después de T.

Con respecto al hecho que cuando $T \to 1$ el problema se parece al (SP), se puede notar que en ambos casos la división óptima tiende a rechazar los candidatos hasta el tiempo $\frac{1-T}{e}$. Luego para $T \to 1$, esta regla recomienda contratar al mejor que se encuentre después de este tiempo $\frac{1-T}{e}$, ya que la curva roja viene a pegarse a la negra que justamente representa la división óptima para el (SP) aplicado al segmento $[T,1]$.

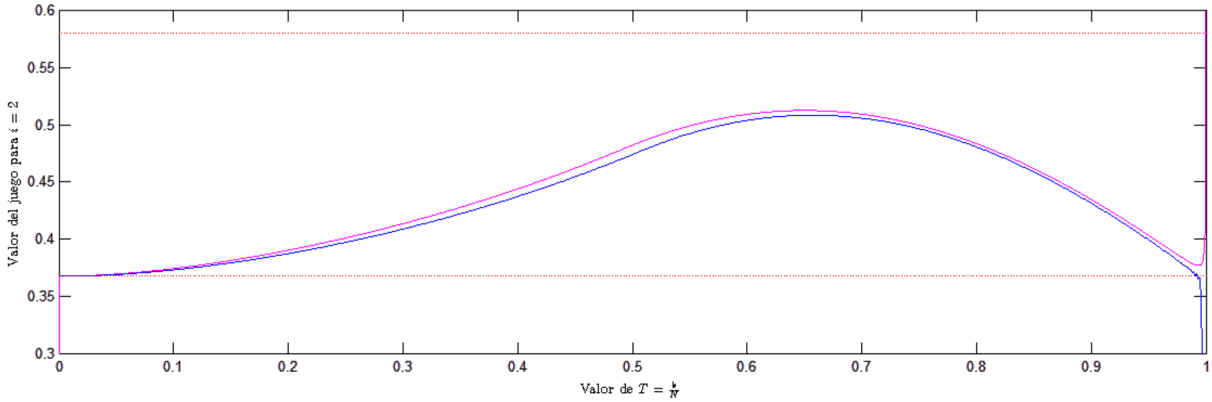

Figura 3.16: Valores del juego obtenidos en ambos casos discreto (para $N = 10.000$) y contínuo (precisión 10^{-3}) para la regla asociada a $i = 2$. Se agregaron en lineas de puntos rojas las rectas de ecuación $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas respectivamente a los valores del juego óptimos del (SP) y del (FISP).

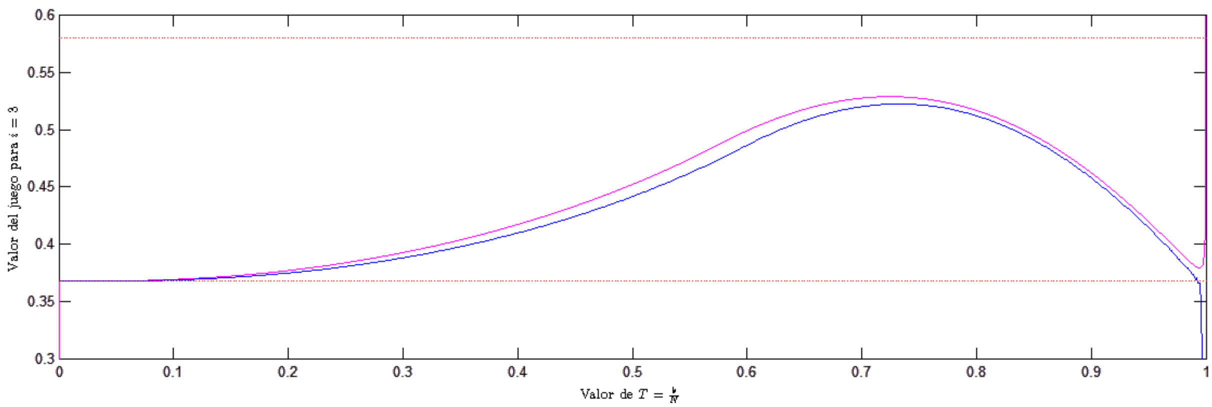

Figura 3.17: Valores del juego obtenidos en ambos casos discreto (para $N = 10.000$) y contínuo (precisión 10^{-3}) para la regla asociada a $i = 3$. Se agregaron en lineas de puntos rojas las rectas de ecuación $y = \frac{1}{e}$ e $y = 0{,}580164$ asociadas respectivamente a los valores del juego óptimos del (SP) y del (FISP).

Se puede comentar más específicamente el caso $i = 1$. En efecto, un candidato se elige en $t \in (T_1, 1]$ primero si es el mejor parcial de $[0, t]$ (si $t \leq T_0$), segundo si es solamente récord parcial de $(T, t]$ (si $t \geq T_0$). Como en el primer caso podría ser el mejor de $[0, t]$ (al igual como cuando se elige un candidato en el (SP) de manera óptima), tiene sentido que el borde derecho de I_2 quede pegado al tiempo $\frac{1}{e}$ mientras T es menor, y luego que este intervalo quede vacío en otro caso (como para el (SP)). Se puede suponer que un razonamiento similar puede justificar el hecho que I_2 quede vacío a partir de cierto tiempo T de sampleo inicial.

Conclusión

Durante esta memoria, se presentó y estudió una variante del Problema de la Secretaria (SP) agregando Restricciones de Tiempo, llamada (TCSP). Solamente se estudiaron restricciones de tiempo donde los candidatos presentados en un periodo de sampleo inicial fijo deben ser rechazados, y el objetivo corresponde a contratar el mejor candidato de los restantes.

En el primer capítulo, se definió formalmente el (TCSP) en sus formas discreta y contínua. Luego se estudiaron estrategias simples para el caso contínuo llamadas reglas de barreras. En estas reglas, el empleador usa el i-ésimo mejor candidato del sampleo como referente y luego acepta al primer candidato que es simultáneamente mejor que el mejor candidato post-sampleo y que el referente. Para cada $i \in \mathbb{N}^*$ se encontró la fórmula analítica del valor del juego asociado como función de T, y se determinó el valor de T que maximiza el valor del juego bajo la regla i-ésima.

El objetivo del segundo capítulo de la memoria fue encontrar una estrategia óptima para resolver el problema del (TCSP) con un periodo de sampleo fijo y dado. Se buscó la forma de la regla óptima a través de la formulación discreta del (TCSP) usando programación dinámica. Denotando N el número de candidatos y k el tamaño del sampleo inicial, se demostró que a todo candidato m entre $k+1$ y N se le asocia un rango minimal de aceptación $\bar{l}(m)$, es decir: suponiendo que m es el mejor candidato ya entrevistado después del sampleo, m se elige si y sólo si m es mejor que el $\bar{l}(m)$-ésimo mejor del sampleo. Luego se dedujo que la regla óptima tiene la siguiente forma: existe una sucesión creciente de barreras $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ que indican cuando cambiar de referente de comparación en el sampleo inicial. Esto quiere decir que un candidato entre el candidato b_n y el candidato $b_{n+1}-1$ se elige si y sólo si es el mejor de los ya entrevistados después del sampleo y si es mejor que el n-ésimo mejor del sampleo. Se comprobó empíricamente usando métodos computacionales que cada razón $\frac{b_n}{N}$ es convergente a un valor real fijo cuando N tiende a infinito. Se conjeturó además que el valor óptimo del juego tiende al valor óptimo $\approx 0{,}580164$ para el caso del (FISP) cuando k tiende a N y N tiende a infinito.

En el mismo segundo capítulo se continuó el estudio de la formulación contínua del (TCSP). Se definieron para todo $n \in \mathbb{N}^*$ reglas de elección que permiten comparar un candidato con los n mejores candidatos entrevistados en el sampleo. A cada r_n, referente de comparación n-ésimo mejor del sampleo, se le asocia un tiempo T_n tal que se acepta un candidato c entrevistado en el intervalo de tiempos $(T_n, T_{n+1}]$ si y sólo si c es mejor que todos los ya entrevistados después del sampleo y si es mejor que r_n. Se determinó el valor del juego asociado a cada regla para todo $n \in \mathbb{N}^*$, lo que permitió deducir ecuaciones que cumplen los tiempos T_n, y se determinaron valores aproximados de estos tiempos usando *Maple*. De nuevo, se comprobó via métodos numéricos que los tiempos T_n son los límites de las razones $\frac{b_n}{N}$ anteriores cuando N tiende a infinito.

Finalmente, se estudió un caso particular del (TCSP) con memoria de sampleo unitaria. Esto es, además de comparar un candidato entrevistado c con el mejor ya entrevistado después del sampleo, se puede también comparar c con algún candidato c_i fijo en el sampleo, sabiendo que c_i es el i-ésimo mejor candidato del sampleo. El objetivo de este capítulo era, análogamente al segundo capítulo, encontrar la forma de la regla óptima que resuelve el (TCSP) con memoria de sampleo unitaria. Se buscó primero la forma de la regla óptima para i fijo via programación dinámica en la formulación discreta del problema. Se demostró que existen dos barreras $m_1 \leq m_0$ tales que si un candidato m está entrevistado antes de m_1, m se rechaza; si por otro lado m está entrevistado entre $m_1 + 1$ y m_0, m se acepta si y sólo si m es el mejor de los ya entrevistados después del sampleo y si es mejor que c_i; finalmente si m está entrevistado después de $m_0 + 1$, m se acepta si y sólo si m es el mejor de los ya entrevistados después del sampleo, olvidándose de c_i. Aunque no se logró demostrar formalmente que $m_1 \leq m_0$, los resultados numéricos obtenidos con *Matlab* fueron sin duda a favor de esta relación entre las barreras. Los resultados numéricos permitieron además encontrar el valor del juego óptimo y determinar el candidato del sampleo óptimo que guardar en memoria en función del tamaño k del sampleo.

Finalmente se estudió la extensión de esta regla en el caso contínuo para encontrar el límite cuando N tiende a infinito del valor del juego obtenido en el caso discreto para todo i. Se encontró una fórmula general del valor del juego para todo i y se compararon los resultados numéricos para $i = 1, 2, 3$ de los modelamientos discreto y contínuo. De nuevo se pudo comprobar una correspondencia entre los resultados obtenidos via cada modelamiento.

Con estos estudios, quedan algunos problemas abiertos. Como trabajo futuro, el problema principal es resolver la Conjetura 2.1 (página 27), es decir demostrar que el valor del juego tiende a $\approx 0{,}580164$ cuando k tiende a N y N tiende a infinito. También se sugiere demostrar un resultado similar para las variantes estudiadas el los capítulos 1 y 3, ya que ambos valores del juego parecen tender al mismo valor $\approx 0{,}580164$.

Otra línea de trabajo futuro puede corresponder a generalizaciones del (TCSP), por ejemplo generalizaciones con memoria finita, donde el sampleo se extendería a un conjunto de candidatos cualquiera guardados en memoria, que no tendría por qué ser el conjunto de los primeros candidatos entrevistados. También se podría extender el (TCSP) a una generalización con múltiple eleción, donde el sampleo se extendería a un conjunto de candidatos que se eligen y con los cuales se pueden comparar los siguientes candidatos entrevistados.

Bibliografía

[1] Thomas Ferguson. Who solved the secretary problem? *Statistical Science*, pages 282–289, 1989.

[2] D. Lindley. Dynamic programming and decision theory. *Journal of the Royal Statistical Society*, pages 39–51, 1961.

[3] M. J. Beckmann. Dynamic programming and the secretary problem. *Computers and Mathematics with Applications*, pages 25–28, 1990.

[4] E. Dynkin. The optimum choice of the instant for stopping a markov process. *Soviet Math. Dokl*, 4:627–629, 1963.

[5] Y. S. Chow, S. Moriguti, H. Robbins, and S.M. Samuels. Optimal selection based on relative rank. *Israel Journal of Mathematics*, pages 81–90, 1964.

[6] T.-H. Hubert Chan, Fei Chen, and Shaofeng H.-C. Jiang. Revealing optimal thresholds for generalized secretary problem via continuous LP: impacts on online K-item auction and bipartite K-matching with random arrival order. *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2015, San Diego, CA, USA, January 4-6, 2015*, pages 1169–1188, 2015.

[7] Robert J. Vanderbei. The postdoc variant of the secretary problem. *Technical Reviews, Princeton*, 1995.

[8] John Gilbert and Frederick Mosteller. Recognizing the maximum of a sequence. *Journal of the American Statistical Association*, pages 35–73, 1966.

[9] Joseph Petruccelli. On a best choice problem with partial information. *The Annals of Statistics*, pages 1171–1174, 1980.

[10] M. Smith and J. Deely. A secretary problem with finite memory. *Journal of the American Statistical Association*, pages 357–361, 1975.

[11] Robert Kleinberg. A multiple-choice secretary algorithm with applications to online auctions. *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, page 2, 2007.

[12] Moshe Babaioff, Nicole Immorlica, David Kempe, and Robert Kleinberg. A knapsack

secretary problem with applications. *Algorithms and Techniques*, pages 16–28, 2007.

[13] Michael Dinitz. Recent advances on the matroid secretary problem. *ACM SIGACT News*, pages 126–142, 2013.

[14] R. Bartoszynski and Z. Govindarajulu. The secretary problem with interview cost. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, pages 11–28, 1978.