



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

INFLUENCIA DE LA DENSIDAD DE MUESTRAS EN LA RECONSTRUCCIÓN DE
CUERPOS GEOLÓGICOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

ÁLVARO IGNACIO RIQUELME SANDOVAL

PROFESOR GUÍA:
JULIÁN ORTIZ CABRERA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
BRIAN TOWNLEY CALLEJAS
MANUEL CARABALLO MONGE

SANTIAGO DE CHILE
MARZO 2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS
POR: ÁLVARO IGNACIO RIQUELME SANDOVAL
FECHA: MARZO 2016
PROF. GUÍA: SR. JULIÁN ORTIZ CABRERA

INFLUENCIA DE LA DENSIDAD DE MUESTRAS EN LA RECONSTRUCCIÓN DE CUERPOS GEOLÓGICOS

Una de las principales interrogantes en la minería corresponde a la estimación del recurso geológico que, en la etapa evaluativa, determina la cantidad de reservas y condiciona el potencial económico del yacimiento. Debido a que las inversiones son cuantiosas, la necesidad de contar con información confiable es primordial. Para el caso de yacimientos de vetas, la evaluación de recursos se hace más problemática debido a la continuidad variable que presenta este tipo de yacimientos.

El objetivo de este trabajo de memoria es el estudio de la incidencia de la cantidad de muestras en la reconstrucción de cuerpos geológicos con distintas características geométricas, mediante la estimación realizada incorporando un campo de direcciones variable.

La primera parte de este trabajo consiste en una descripción del formalismo geoestadístico, técnicas de estimación y simulación geoestadística. Además, se hace una revisión bibliográfica de lo realizado en cuanto a incorporar la geología en la evaluación de recursos mineros. Se presenta en detalle la metodología desarrollada para estudiar las variables más importantes a la hora de realizar una estimación de cuerpos sinusoidales, elaborados de manera sintética.

Finalmente, se desarrolla un caso de estudio para ilustrar el impacto que tiene el aumento progresivo de sondajes como datos de entrada para la estimación. Se utilizan datos reales de un pórfido cuprífero, donde se generan realizaciones con la metodología convencional, con una sola dirección principal de anisotropía, y con la que incluye direcciones variables, a modo de comparar las precisiones obtenidas bloque a bloque contra la realidad.

Los resultados del caso de estudio realizado muestran que la metodología convencional dista mucho, en términos de precisión, de la metodología con direcciones variables, y que las variación de un 30% más de información resultó en una reducción de la sobre estimación del contenido de metal desde un 50% a sólo un 0.6%.

Abstract

One of the main questions in mining corresponds to the estimated geological resource that, in the evaluative stage, determines the amount of reserves and conditionate the economic potential of the deposit. Because the investments are substantial, the need for reliable information is paramount. In the case of vein deposits, the resource assessment becomes more problematic due to the continuous variability presented in this type of deposits.

The aim of this thesis is the study of the incidence of the number of samples in the reconstruction of geological bodies with different geometrical characteristics, by the estimation incorporating locally varying anisotropy.

The first part of this study is a description of geostatistical formalism, estimation techniques and geostatistical simulation. In addition, a literature review is made of what has been done in incorporating the geology to the evaluation of mineral resources. Next the methodology developed for the study of the most important variables to make a good estimation of the sinusoidal bodies made in a synthetic form is presented in detail.

Finally, a case study is developed to illustrate the impact of the progressive increase of the amount of drilling, as input for estimation. Real data are used for a porphyry copper deposit, where realizations are generated with conventional methodology, with one main direction of anisotropy, and another which includes locally varying anisotropy, comparing accuracies obtained block by block against reality.

The results of the case study show that the conventional methodology is far, in terms of accuracy, with respect to the methodology with locally varying anisotropy, showing that an increase of 30% of information resulted in a reduction of the overestimation of metal content, varying from 50% to only 0.6%.

El número de páginas de este libro es exactamente infinito. Ninguna es la primera; ninguna, la última.
Jorge Luis Borges,
El libro de arena

A mi familia y en especial a mis padres, Ivón y Germán.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres Ivón y Germán y a mi hermano Pablo, a quienes quiero con todo mi ser, por estar incondicionalmente en cada momento de mi vida, y por haberme brindado siempre todo el apoyo, afecto y comprensión.

A mi querido tío Alejandro quien ha sido mi segundo padre, y a sus hijos, por ser mis hermanos. Gracias por su apoyo y su preocupación.

Y también un agradecimiento grande al resto de mi familia, mis abuelos, mis tíos y primos, que con su compañía y su preocupación han sido un pilar importante en mi vida. A mi abuela María, que en paz descansa, y su hija Claudia, por todo su cariño entregado y haberme acogido en mis primeros años en Santiago.

A mis amigos, de Quilpué y de la universidad, con quienes he vivido gratos momentos.

Agradezco al profesor guía de esta memoria Julián Ortiz, por la constante ayuda, la idea original del tema de investigación y las oportunidades dadas a lo largo de este tiempo que me han ayudado a formarme como ingeniero. Agradecimientos también a los profesores de comisión Brian Townley y Manuel Caraballo por la buena disposición para ayudarme.

Muchas gracias a todas las personas que han compartido conmigo en esta vida.

Tabla de Contenido

1	Introducción	1
1.1	Motivación	1
1.2	Objetivos	2
1.2.1	Objetivos Generales	2
1.2.2	Objetivos Específicos	2
1.3	Descripción por Capítulos	3
2	Antecedentes	5
2.1	Evaluación de Recursos	5
2.1.1	Variable Regionalizada	6
2.1.2	Caracterización de una Función Aleatoria	7
2.2	Métodos de Estimación	12
2.2.1	Kriging Simple (KS)	13
2.2.2	Kriging Ordinario (KO)	15
2.3	Simulación Geoestadística	16
2.3.1	Técnicas Gaussianas	17
2.3.2	Simulación Gaussiana Secuencial	18
2.4	Modelamiento Geológico y Anisotropía	18
2.4.1	La Naturaleza de la Anisotropía	19
2.4.2	Procesos que Causan Anisotropía Geológica	21
2.4.3	Geometrías No Capturadas por Técnicas Convencionales	23
2.5	Incorporación del Campo LVA en Geoestadística	24
2.6	Estimación y Simulación con Anisotropía	28
2.6.1	Distancias Métricas a Geodésicas	28
2.6.2	Aumento de Dimensionalidad del Espacio Euclideo	31
2.6.3	Kriging y Simulación con Anisotropías Variables	34
3	Metodología	37
3.1	Estudio de Casos Sintéticos	37

3.2	Estudio de un Caso Real	42
4	Caso de Estudio Sintético	44
4.1	Resultados	44
4.2	Discusión	48
5	Caso de Estudio Real	52
5.1	Introducción	52
5.2	Información Disponible y Estadísticas Básicas	52
5.2.1	Información de Sondajes	54
5.2.2	Información de Pozos de Tronadura	57
5.2.3	Desagrupamiento	59
5.2.4	Comparación entre Set de Datos	60
5.2.5	Comentarios	62
5.3	Estudio con Metodología Convencional	63
5.3.1	Datos Condicionantes	63
5.3.2	Modelamiento Variográfico	63
5.3.3	Estimación	65
5.3.4	Simulación	66
5.4	Estudio con Metodología de Direcciones Variables	73
5.4.1	Generación del Campo de Direcciones Variables	73
5.4.2	Variografía con Campo de Direcciones Variables	73
5.4.3	Estimación	75
5.4.4	Simulación	75
5.5	Comparación entre Métodos Estudiados	80
6	Conclusiones y Recomendaciones	86
	Bibliografía	88
	Anexos	90
A	Histogramas desagrupados para datos de sondajes	91
B	Datos condicionantes para generación del campo LVA	92
C	Validación de Resultados	95

Índice de Tablas

2.1	Orígenes de datos para inferencia de campo LVA	25
2.2	Técnicas de inferencia de campo LVA a partir de muestras	25
3.1	Parámetros para cálculo de variograma LVA	40
3.2	Parámetros para rutina KT3D_LVA	41
3.3	Parámetros para rutina SGS_LVA	42
5.1	Parámetros para el cálculo del variograma experimental.	65
5.2	Parámetros para el modelamiento del variograma.	65
5.3	Parámetros para estimación.	65
5.4	Parámetros para la definición de la grilla de estimación puntual y simulación.	66
5.5	Parámetros para el modelamiento del variograma de valores normales.	70
5.6	Parámetros para simulación mediante SGSIM	71
5.7	Información de datos condicionantes	74
5.8	Parámetros para el cálculo del variograma experimental LVA.	75
5.9	Parámetros para el modelamiento del variograma.	75
5.10	Parámetros para estimación.	75
5.11	Parámetros para el modelamiento del variograma LVA de valores normales.	76
5.12	Parámetros para simulación mediante SGS_LVA	77
5.13	Cantidad de metal esperado para los distintos casos.	84
B.1	Información de datos condicionantes - pt. 1	92
B.2	Información de datos condicionantes - pt. 2	93
B.3	Información de datos condicionantes - pt. 3	94

Índice de Ilustraciones

1.1	Influencia de la incorporación de un campo de direcciones en la estimación . . .	2
1.2	Influencia de la cantidad de información en la estimación	3
2.1	Los fundamentos de la geoestadística	7
2.2	Vector de separación \mathbf{h}	9
2.3	Modelos de variogramas comunes	11
2.4	Ejemplos de variograma experimental	12
2.5	Estimación mediante inverso de la distancia.	13
2.6	Depósitos de carbón y de vetas de oro	19
2.7	Mapas de variables aleatoria, isotrópica y anisótropa	20
2.8	Variogramas de las variables de la Figura 2.7	21
2.9	Tipos de plegamiento	22
2.10	Ambientes de depósitos fluvial	22
2.11	Flujo idealizado de lava de tipo Komatiíta	23
2.12	Vetas en el Witwatersrand Goldfield en Sudáfrica	23
2.13	Estratos plegados mostrando direcciones variables	24
2.14	Múltiples variogramas para el mapa anisótropo de la Figura 2.7	26
2.15	Anisotropía visualizada como una elipse	26
2.16	Obtención de isotropía con rotación en 2D	27
2.17	Obtención de isotropía con rotación en 3D	28
2.18	Técnicas utilizadas para obtención de distancias entre dos puntos	29
2.19	Grafo representando el problema del camino más corto	30
2.20	Grafos entre vértices conectados con 1 y 3 Offsets	30
2.21	Escalamiento multidimensional de cinco ciudades a un espacio Euclideo . . .	33
2.22	Transformación mediante ISOMAP de una grilla utilizando un campo LVA . .	33
2.23	Localización de un punto utilizando nueve distancias a puntos landmark . . .	34
2.24	Explicación del kriging con LVA	36
3.1	Distribuciones para depósito sintético	38
3.2	Datos condicionantes en el dominio	38

3.3	Simulación de leyes en el dominio	39
3.4	Depósito sintético final	39
3.5	Obtención de muestras y estimación del campo LVA	40
3.6	Cálculo y ajuste del variograma LVA	40
3.7	Estimación y simulación con LVA	41
3.8	Posición media del cuerpo	43
4.1	Errores de validación cruzada	45
4.2	Correlación entre leyes de bloques estimados y del depósito original	46
4.3	Correlación entre leyes de bloques simulados y del depósito original	47
4.4	Error en posición media de los cuerpos simulados	49
4.5	Error en contenido de metal	50
4.6	Posición media del cuerpo	51
5.1	Información disponible de sondajes y pozos de tronadura	53
5.2	Histograma y gráfico de probabilidad para sondajes	54
5.3	Histograma y gráfico de probabilidad para sondajes por dominio	55
5.4	Proyección de los sondajes en distintos planos	56
5.5	Vista en corte de plantas horizontales para sondajes	57
5.6	Vista en planta de dominios	57
5.7	Histograma y gráfico de probabilidad de la ley de cobre en pozos de tronadura	58
5.8	Proyección de los pozos de tronadura en distintos planos	58
5.9	Desagrupamiento	59
5.10	Histograma para los datos de sondajes desagrupados	60
5.11	Gráfico cuantil contra cuantil	61
5.12	Nube de correlación diferida	61
5.13	Media y varianza local a lo largo de la coordenada X	62
5.14	Media y varianza local a lo largo de la coordenada Y	62
5.15	Media y varianza local a lo largo de la coordenada Z	63
5.16	Elevaciones de los subconjuntos de sondajes	64
5.17	Mapas variográficos de base de datos de sondajes	64
5.18	Ajuste variográfico del variograma experimental	66
5.19	Nubes de correlación de la validación cruzada	67
5.20	Anamorfosis Gaussiana	68
5.21	Nubes de correlación diferida para datos Gaussianos	68
5.22	Relación entre variograma, rodograma y madograma	69
5.23	Prom Simulación	70
5.24	Elevaciones de realizaciones con SGSIM	71
5.25	Histograma de todos los valores simulados mediante SGSIM	72

5.26	Media y varianza para realizaciones mediante SGSIM	72
5.27	Q-q plot de realizaciones mediante SGSIM	72
5.28	Datos LVA condicionantes	73
5.29	Campo LVA estimado	74
5.30	Ajuste variográfico LVA	76
5.31	Nubes de correlación de la validación cruzada	77
5.32	Ajuste variográfico del variograma LVA de valores normales.	78
5.33	Elevaciones de realizaciones con SGS_LVA	78
5.34	Histograma de todos los valores simulados mediante SGS_LVA	79
5.35	Media y varianza para realizaciones mediante SGS_LVA	79
5.36	Q-q plot de realizaciones mediante SGS_LVA	80
5.37	Nubes de correlación entre pozos y realizaciones mediante SGSIM	81
5.38	Nubes de correlación entre pozos y realizaciones mediante SGS_LVA	82
5.39	Variograma experimental y modelado de pozos de tronadura	83
5.40	Variación del error en la estimación del tonelaje de metal versus ley de corte .	84
5.41	Valores esperados de leyes en modelo de bloques de mineralogía mixta	85
A.1	Histogramas desagrupados para datos de sondajes	91
C.1	Histograma de todos los valores simulados mediante SGSIM - 70%	95
C.2	Media y varianza para realizaciones mediante SGSIM - 70%	95
C.3	Histograma de todos los valores simulados mediante SGSIM - 80%	96
C.4	Media y varianza para realizaciones mediante SGSIM - 80%	96
C.5	Histograma de todos los valores simulados mediante SGSIM - 90%	97
C.6	Media y varianza para realizaciones mediante SGSIM - 90%	97
C.7	Histograma de todos los valores simulados mediante SGS_LVA - 70%	98
C.8	Media y varianza para realizaciones mediante SGS_LVA - 70%	98
C.9	Histograma de todos los valores simulados mediante SGS_LVA - 80%	99
C.10	Media y varianza para realizaciones mediante SGS_LVA	99
C.11	Histograma de todos los valores simulados mediante SGS_LVA - 90%	100
C.12	Media y varianza para realizaciones mediante SGS_LVA - 90%	100

Capítulo 1

Introducción

La industria minera se encuentra en la constante búsqueda de nuevas alternativas que permitan optimizar el negocio minero en su totalidad, desde el momento de la planificación, ejecución y puesta en marcha del proyecto, precisando para ello constante información del recurso que se desea explotar. Así se crea la necesidad de contar con una estimación aceptable y confiable del elemento en cuestión.

1.1 Motivación

Tanto para la estimación de una variable regionalizada por kriging como para la simulación geoestadística se utilizan herramientas de modelamiento de la estructura espacial (covarianza, variograma), y en función de estas herramientas se definen las direcciones de continuidad presentes en el espacio que se desea estimar.

Las direcciones de anisotropía a menudo se definen constantes dentro de cada unidad geológica por lo que muchas veces las estimaciones presentan algún grado de sesgo con respecto a los valores reales de la variable regionalizada.

La **Figura 1.1** ejemplifica la problemática al utilizar direcciones de anisotropías globales en la estimación, y motiva la consideración de un campo de anisotropías variables (locally varying anisotropy, LVA); la geoestadística tradicional sólo considera una dirección principal de anisotropía. La estimación del recurso se mejoraría al integrar un campo de direcciones locales. Esta memoria integra LVA en el modelamiento geoestadístico.

El error provocado al utilizar direcciones de anisotropías globales en la estimación de cuerpos mineralizados que presentan con claridad más de una única dirección en la anisotropía debe ser corregido a fin de representar de mejor manera la distribución de las leyes. Esto es particularmente relevante en el caso de yacimientos de tipo veta, en los que definir correctamente su potencia y ubicación resulta trascendental para el negocio minero. Resulta

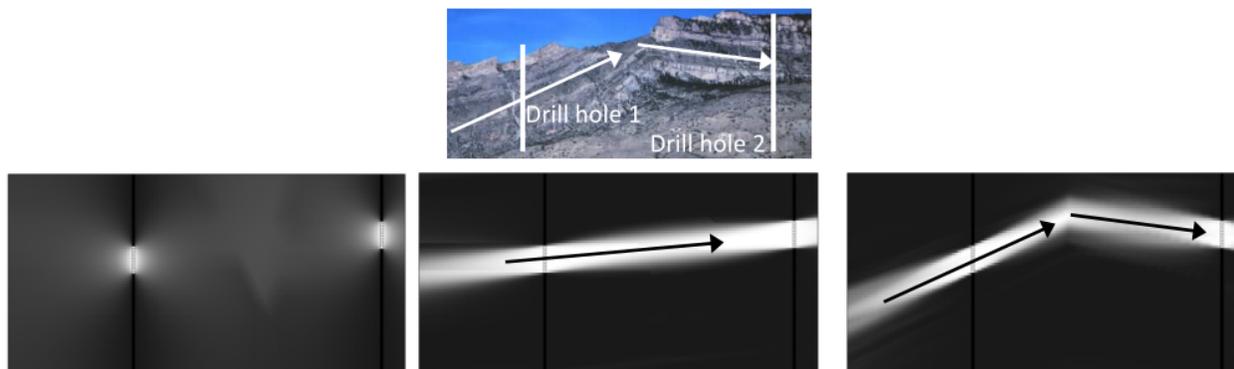


Figura 1.1: Motivación de estudiar la influencia de un campo de direcciones variables en la estimación. Izquierda: Estimación mediante inverso de la distancia. Centro: Estimación mediante kriging con anisotropía horizontal. Derecha: Kriging incorporando un campo de direcciones variables. (www.mkutis.iweb.bsu.edu).

claro el beneficio que se le incorporaría a la técnica de estimación considerar características variables en el espacio para la evaluación de un recurso.

Junto con lo anterior, se hace también interesante el estudio de la influencia que tiene la densidad de muestras a través de sondajes en la estimación de leyes y en la posición del cuerpo geológico (**Figura 1.2**). Es parte de la motivación de esta memoria entender el resultado que se obtiene al tratar de reconstruir cuerpos geológicos con geometrías simples a partir de mallas de muestreo con distinto espaciamiento, de manera de poder cuantificar todas las bondades que posee la integración del campo de direcciones variables, y ayudar a determinar el impacto que tiene la información al momento de definir una campaña de sondajes real.

1.2 Objetivos

En este subcapítulo se describirán detalladamente los objetivos, tanto generales como específicos que guiarán esta memoria.

1.2.1 Objetivos Generales

Esta memoria tiene por objetivo general el estudiar cómo afecta la cantidad de muestras en la reconstrucción de cuerpos geológicos con distintas características geométricas, mediante la estimación realizada incorporando un campo de direcciones variable.

1.2.2 Objetivos Específicos

Los objetivos específicos son:

- Desarrollar una metodología para estudiar la sensibilidad de la estimación frente a la variación en la cantidad de datos de entrada.
- Analizar la influencia de los más importantes parámetros de la metodología diseñada

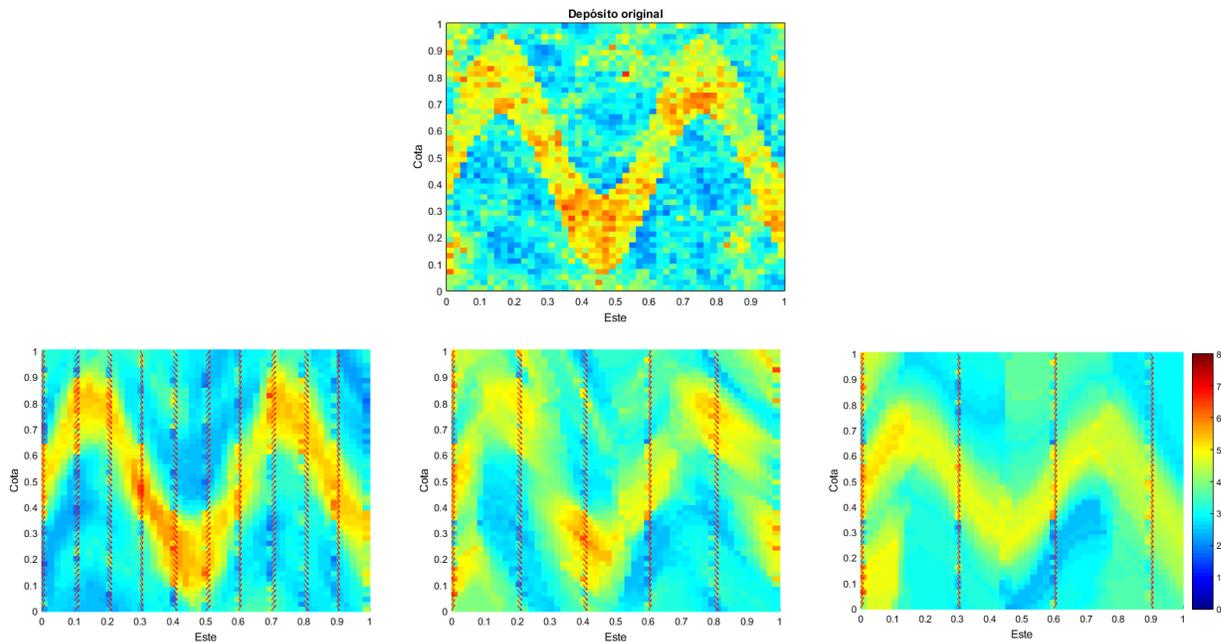


Figura 1.2: Motivación de estudiar la influencia de la cantidad de información en la estimación. Arriba: Cuerpo geológico inicial presentando un campo de anisotropía variable. Abajo: Estimaciones del cuerpo a partir de mallas de sondajes con distinto espaciamiento (flechas rojas). Se aprecia cómo se mejora la estimación en cuanto a la forma y las leyes presentes en el cuerpo a medida que se agrega información mediante sondajes.

mediante el estudio de casos sintéticos.

- Investigar la influencia de la cantidad de muestras en la reconstrucción de un depósito real realizando una reconciliación de las simulaciones con datos de pozos de tronadura de modo de medir la precisión del método.
- Comparar la incorporación de un campo de direcciones variables con los métodos convencionales en términos de precisión y cercanía a la realidad de las simulaciones.

1.3 Descripción por Capítulos

Esta sección pretende describir de forma breve lo que se desarrollará en cada capítulo presente en este trabajo de título para que el lector pueda comprender y situarse de forma más fácil dentro del mismo.

El **Capítulo 2** corresponde al capítulo de Antecedentes. Éste capítulo muestra la revisión bibliográfica relacionada con el desarrollo de los objetivos de este trabajo de título. Se muestra el *estado del arte* en cuanto a incorporar la geología en la evaluación de recursos mineros. Además se presenta un resumen del formalismo geoestadístico, la descripción de técnicas de estimación (kriging ordinario y kriging simple) y de simulación condicional (simulación secuencial gaussiana) y la incorporación de un campo de direcciones variable a

estas técnicas.

El **Capítulo 3** muestra en detalle la metodología desarrollada para la generación de depósitos sintéticos, el cómo se obtienen las muestras a partir de éstos, y cómo incorporar un campo de direcciones variables a la simulación geoestadística de un atributo. En este capítulo se muestra además de la metodología desarrollada, algunos ejemplos de pruebas realizadas con el objetivo de justificar las decisiones impuestas en la metodología.

El **Capítulo 4** corresponde al estudio de casos sintéticos, en donde se muestran los resultados obtenidos de la generación de cuerpos sinusoidales con distintas características geométricas y la estimación resultante de simulación de leyes para distinta cantidad de muestras obtenidas de los depósitos.

El **Capítulo 5** corresponde al estudio de un caso real, en donde se aplica la metodología de incorporación de un campo de direcciones variables, y se realiza el estudio de las leyes estimadas variando la cantidad de muestras en el depósito.

El **Capítulo 6** corresponde a las conclusiones y discusiones del trabajo realizado. Se hace hincapié en destacar las ventajas y defectos que posee la metodología desarrollada en contraste a una simulación que no tome en cuenta direcciones de anisotropías locales. Se propone posibles mejoras y formas de acercamiento a situaciones no consideradas en los alcances de este trabajo.

Finalmente los últimos dos capítulos son complementos para que el lector pueda profundizar más en el tema desarrollado. Se muestra la bibliografía consultada por el autor de esta memoria, mientras que el siguiente capítulo corresponde a los **Anexos** de este trabajo, entre los cuales se contemplan datos utilizados para el estudio del caso real, y otros resultados.

Capítulo 2

Antecedentes

Este capítulo tiene por objetivo describir los antecedentes con los que se cuenta para el desarrollo de esta memoria, y el modelamiento incorporando LVA.

Se comienza por una breve descripción del modelamiento geológico y geoestadística. Debido a que esta última considera la variable regionalizada como una realización de una función aleatoria, resulta interesante ver las herramientas matemáticas que permiten caracterizar una función aleatoria y que permiten tomar en cuenta los aspectos erráticos y estructurales de una variable regionalizada. Se continúa con una descripción de técnicas de simulación de variables categóricas convencionales existentes y que han sido propuestas durante los últimos 15 años, para finalmente considerar las geometrías en donde estos métodos no presentan cercanía a la realidad en sus resultados, lo cual dará paso a las técnicas que utilizan implícitamente la geología en su procedimiento.

Finalmente se mencionan y explican trabajos relacionados con utilización de direcciones variables donde se recurre a una aplicación específica de éstas con el objetivo de interiorizarse en esta técnica que incorpora la geología a la evaluación de recursos. En general, se intenta estandarizar las definiciones presentadas por los distintos autores para que el lector pueda desarrollar una lectura más sencilla.

2.1 Evaluación de Recursos

La evaluación de recursos se hace en base a un modelo geológico en el que se definen unidades de estimación (estadística y geológicamente homogéneas o consistentes). Dentro de cada unidad de estimación se seleccionan los datos y parámetros para estimar o simular, los cuales se explican a continuación.

2.1.1 Variable Regionalizada

Los fenómenos naturales pueden ser caracterizados mediante la medición de una o más variables distribuidas en el espacio. Estas variables se llaman *variables regionalizadas* y el fenómeno subyacente es llamado *regionalización*. La medida de la variable de interés, z , puede ser realizada en cualquier posición \mathbf{u} del espacio. El conjunto de todas las mediciones en el dominio de interés $\{z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in D\}$ representa la "realidad", la cual es desconocida en la práctica. Ejemplos típicos de variables regionalizadas son la ley de cobre en un compósito de largo L , y el grosor de una veta de oro.

La definición de variable regionalizada no posee ninguna interpretación probabilística de por sí; sin embargo, dos aspectos complementarios se observan en la medición de variables regionalizadas: por un lado, tienen una *estructura espacial*. Por ejemplo, cuando se miran las leyes de cobre en un depósito porfírico, se encuentra el siguiente comportamiento estructural: mientras más cercanas se encuentren dos muestras, más parecidas son sus leyes. Por otro lado, también se puede observar un comportamiento aleatorio: dos muestras muy cercanas una de otra pueden diferir de manera impredecible. Se debe considerar, por lo tanto, una formulación que tome en cuenta estos dos aspectos de aleatoriedad y estructura de manera de proveer una representación sencilla de la variabilidad espacial y dar una forma consistente y operacional de solucionar los problemas. Uno de los enfoques es el que toma en cuenta el concepto de *variable aleatoria*.

Una variable aleatoria es una variable que toma un valor de acuerdo a una distribución de probabilidad (**Figura 2.1**). Por ejemplo, si se considera una muestra con ley $z(\mathbf{u}) = 1.5\%$ en un punto particular \mathbf{u} de un depósito de cobre, esta ley se puede considerar como una realización particular de una variable aleatoria $Z(\mathbf{u})$. El conjunto de todas las variables aleatorias en el dominio es llamado *función aleatoria*, y se denota de la forma:

$$\{Z(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in D\}. \quad (2.1)$$

El objetivo de la interpretación probabilística es permitir la inferencia en las zonas sin muestrear. Muchas realizaciones $z_1(\mathbf{u}), z_2(\mathbf{u}), \dots, z_k(\mathbf{u})$ de la función aleatoria $Z(\mathbf{u})$ son requeridas para inferir la distribución de $Z(\mathbf{u})$. Debido a que una medición no puede ser repetida en una misma posición, limitándonos a una sola realización $\{z(\mathbf{u})\}$ de la función aleatoria en el punto \mathbf{u} , ciertos supuestos que involucren algún grado de homogeneidad espacial son necesarios y son introducidos bajo la *hipótesis de estacionariedad*.

Se denotarán con letra mayúscula a las funciones aleatorias como, por ejemplo, $Z(\mathbf{u})$. Las variables regionalizadas y su valor actual son denotados en letra minúscula, $z(\mathbf{u})$.

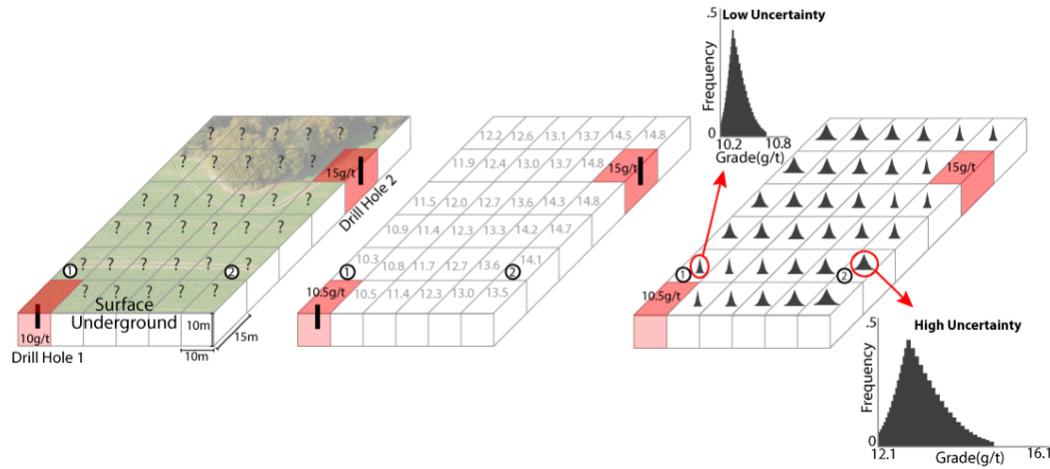


Figura 2.1: Los fundamentos de la geoestadística. Izquierda: Una grilla es ubicada sobre el depósito. Se muestran dos sondajes con leyes de 10 [g/ton] y 15 [g/ton] de oro; la ley es desconocida en las otras posiciones (?). Centro: Estimación en los puntos sin muestrear. Derecha: Una distribución de valores es generado para todos los puntos sin muestrear. Como la posición 1 se encuentra más cerca de un sondaje hay menor incertidumbre, en comparación con la posición 2, que se encuentra a mayor distancia (www.surreyproperty.com).

2.1.2 Caracterización de una Función Aleatoria

En geoestadística se utilizan usualmente los dos primeros momentos para caracterizar la distribución espacial de una función aleatoria. El momento de primer orden corresponde a la esperanza matemática, mientras que por momentos de segundo orden se reconocen la varianza, covarianza y variograma.

Momentos de una Variable Aleatoria

El momento de primer orden corresponde al valor esperado o esperanza de una variable aleatoria. Se puede definir como la suma de la probabilidad de cada suceso multiplicado por su valor. La esperanza se calcula para los valores posibles en cada posición \mathbf{u} en el dominio, luego ésta es también una función $m(\mathbf{u})$ definida para el mismo dominio D , tal como se muestra a continuación:

$$E\{Z(\mathbf{u})\} = m(\mathbf{u}) = \int_D f_z(z(\mathbf{u})) \cdot z(\mathbf{u}) \cdot dz \quad (2.2)$$

Los momentos de segundo orden consideran dos puntos cualquiera en el espacio. La *varianza* es una medida de la divergencia de una variable aleatoria de su valor esperado. También se utilizan la desviación estándar, que corresponde a la raíz cuadrada de la varianza.

$$Var\{Z(\mathbf{u})\} = \sigma^2(\mathbf{u}) = E\{(Z(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u}))^2\} = E\{Z(\mathbf{u})^2\} - m(\mathbf{u})^2 \quad (2.3)$$

Cuando se consideran dos puntos en el espacio, \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 , la *covarianza centrada* se calcula como:

$$Cov\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = E\{(Z(\mathbf{u}_1) - m(\mathbf{u}_1)) \cdot (Z(\mathbf{u}_2) - m(\mathbf{u}_2))\} \quad (2.4)$$

Nótese que cuando $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, la covarianza es equivalente a la varianza.

Otro momento de segundo orden es el *semi-variograma*, definido como la mitad de la varianza de la variable en dos lugares distintos:

$$\gamma(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}Var\{Z(\mathbf{u}_1) - Z(\mathbf{u}_2)\} \quad (2.5)$$

El prefijo *semi-* fue usado para enfatizar que corresponde a la mitad de la varianza de la diferencia $Z(\mathbf{u}_1) - Z(\mathbf{u}_2)$, sin embargo, en la literatura actual el semi-variograma es llamado simplemente *variograma*. Desde ahora el prefijo *semi-* se quitará del *semi-variograma* y se llamará *variograma*.

El *correlograma* se define como la covarianza estandarizada, es decir, la covarianza dividida por la desviación estandar correspondiente:

$$\rho(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{Cov\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}}{\sqrt{Var\{Z(\mathbf{u}_1)\} \cdot Var\{Z(\mathbf{u}_2)\}}} \quad (2.6)$$

La hipótesis de estacionaridad

La estacionaridad es la decisión de que los datos provienen de la misma población y pueden ser utilizados para inferir diferentes estadísticas. Se pueden definir muchos tipos de estacionaridad. En general se puede decir que una función aleatoria es *estacionaria de orden n* si todos los momentos de orden n-ésimo existen y son independientes de la ubicación de los puntos utilizados para el cálculo del momento de orden n , esto es, $\forall \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \text{Orden 1:} & \quad E\{Z(\mathbf{u})\} = m \\ \text{Orden 2 :} & \quad Cov\{\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{h}\} = Cov\{\mathbf{h}\} = E\{Z(\mathbf{u}+\mathbf{h}) \cdot Z(\mathbf{u})\} - m^2 \\ & \quad \dots \\ \text{Orden } n: & \quad Cov_n\{\mathbf{u}+\mathbf{h}_0, \mathbf{u}+\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{u}+\mathbf{h}_{n-1}\} = Cov_n\{\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}\} \\ & \quad = E\left\{\prod_{i=1}^n Z(\mathbf{u}+\mathbf{h}_{i-1}) \cdot Z(\mathbf{u})\right\} - m^2 \end{aligned}$$

Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones en geostatística, se está interesado en los primeros dos momentos definidos anteriormente y, por lo tanto, basta asumir que estos momentos existen, y luego, que la estacionaridad se limita a estos dos, es decir, existe una *estacionaridad de segundo orden*. Esto es:

1. la esperanza matemática $E\{Z(\mathbf{u})\}$ existe y no depende de la posición; es decir:

$$E\{Z(\mathbf{u})\} = m, \forall \mathbf{u};$$

2. para cada par de variables aleatorias $\{Z(\mathbf{u}), Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})\}$ la covarianza existe y depende de la distancia de separación \mathbf{h} ,

$$Cov\{Z(\mathbf{u}), Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})\} = Cov\{\mathbf{h}\} = E\{Z(\mathbf{u}+\mathbf{h}) \cdot Z(\mathbf{u})\} - m^2, \forall \mathbf{u},$$

donde \mathbf{h} representa un vector de coordenadas (h_x, h_y, h_z) en un espacio tridimensional (**Figura 2.2**).

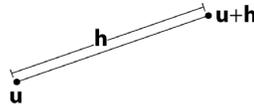


Figura 2.2: Vector de separación \mathbf{h} , entre una posición \mathbf{u} y $\mathbf{u}+\mathbf{h}$.

La estacionaridad de la covarianza implica la estacionaridad de la varianza y del variograma, pudiéndose relacionar estos entre sí:

$$Var\{Z(\mathbf{u})\} = E\{(Z(\mathbf{u}) - m)^2\} = Cov\{\mathbf{0}\}, \forall \mathbf{u} \quad (2.7)$$

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}E\{(Z(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - Z(\mathbf{u}))^2\} = Cov\{\mathbf{0}\} - Cov\{\mathbf{h}\}, \forall \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Inferencia del variograma

Debido a que en geoestadística se trabaja con un número discreto de datos, se debe trabajar con un estimador del variograma. El *variograma experimental* es estimado como la mitad del promedio de la diferencia al cuadrado entre los datos separados por un vector de distancia \mathbf{h} . En la práctica, se definen tolerancias en ángulo y en paso de manera que un número razonable de pares, $n(\mathbf{h})$, se encuentren aproximadamente a una distancia \mathbf{h} :

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2 \cdot n(\mathbf{h})} \cdot \sum_{i=1}^{n(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2 \quad (2.9)$$

El número de pasos, la distancia de separación y tolerancias (ángulos verticales y horizontales y anchos de banda) pueden ayudar a obtener una estimación representativa del variograma, a pesar de que esto no es siempre posible. Malas elecciones generarán estimaciones ruidosas poco representativas de la población subyacente.

El variograma debe ser modelado para ser incorporado a los algoritmos de estimación o simulación. Los modelos se consideran válidos si son definidos positivamente, esto es si son una medida válida de distancia. Esta restricción asegura que la estimación de la varianza sea positiva o cero. De otra forma el modelo matemático no sería válido ya que la varianza debe ser no-negativa por definición.

Algunos modelos de variograma son:

Efecto Pepa Definido por un valor positivo de contribución de varianza c (conocido como *meseta*), es utilizado para incorporar variabilidad de pequeña escala:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{h} = a \\ c & \text{si } \mathbf{h} > a \end{cases} ;$$

Esférico Definido por un *alcance* a y un valor positivo de contribución de varianza c , es la estructura más utilizada:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} c \cdot \left[1,5 \frac{\mathbf{h}}{a} - 0,5 \left(\frac{\mathbf{h}}{a} \right)^3 \right] & \text{si } \mathbf{h} \leq a \\ c & \text{si } \mathbf{h} > a \end{cases} ;$$

Exponencial Definido por un *alcance* a y un valor positivo de contribución de varianza c , es similar al modelo esférico pero crece más rápido en el origen y se acerca asintóticamente al valor máximo:

$$\gamma(\mathbf{h}) = c \cdot \left[1 - \exp \left(-\frac{3\mathbf{h}}{a} \right) \right] ;$$

Gaussiano Definido por un *alcance* a y un valor positivo de contribución de varianza c :

$$\gamma(\mathbf{h}) = c \cdot \left[1 - \exp \left(-\frac{(3\mathbf{h})^2}{a^2} \right) \right] .$$

Efecto Hoyo Definido por un *alcance* a y un valor positivo de contribución de varianza c , es utilizado para incorporar oscilaciones cíclicas en el modelamiento del variograma:

$$\gamma(\mathbf{h}) = c \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{\mathbf{h}}{a} \pi \right) \right] .$$

La forma de estos modelos más comunes se muestra en la **Figura 2.3**. Estas funciones se pueden combinar en forma aditiva de manera de incrementar la flexibilidad del modelamiento:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \gamma_i(\mathbf{h}) \quad (2.10)$$

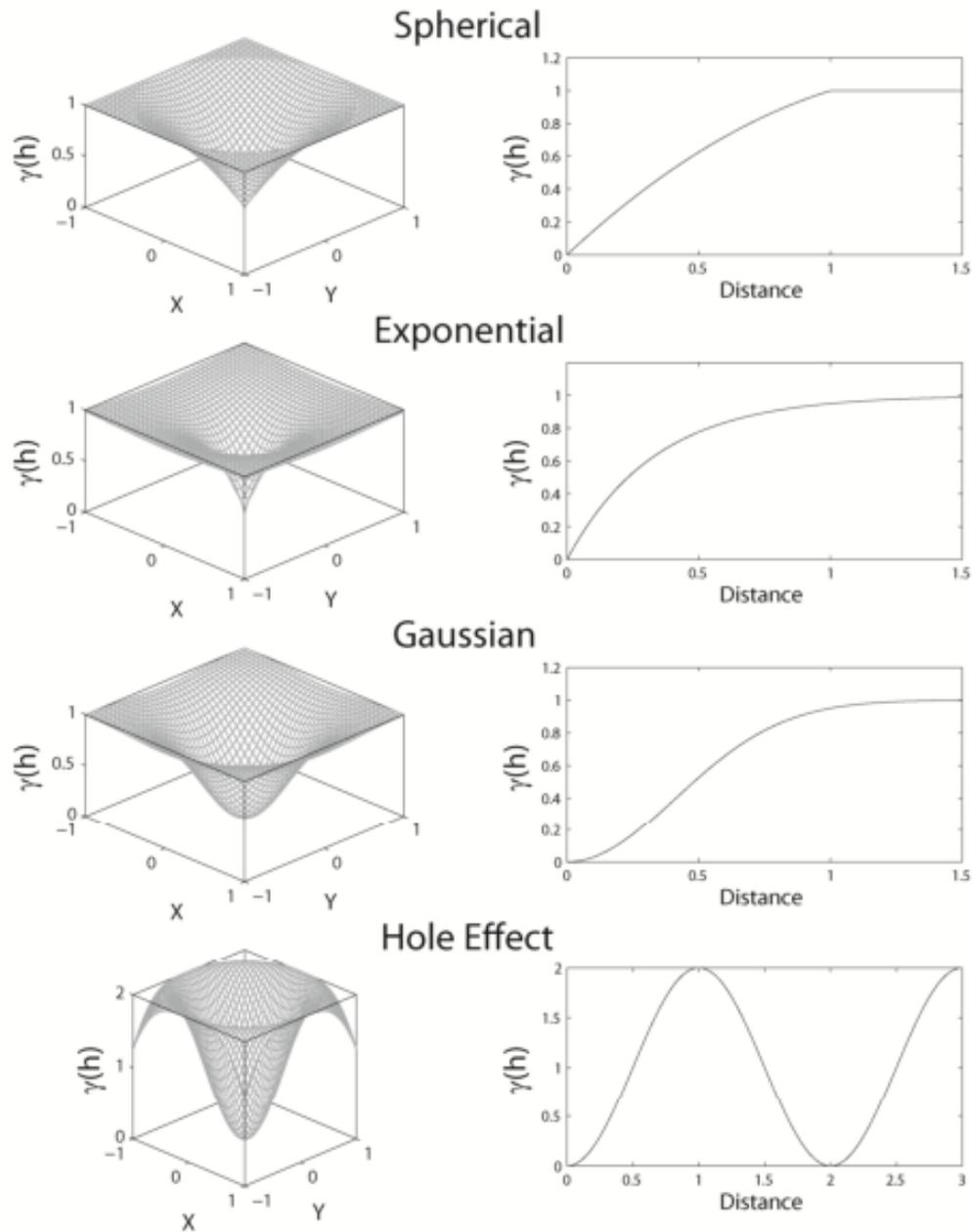


Figura 2.3: Variogramas comúnmente utilizados para modelar la relación espacial entre datos. Izquierda: Se muestran los variogramas estandarizados en el espacio 2D X - Y . Derecha: Se muestran los variogramas en función de la separación entre puntos (Boisvert, 2010).

en donde c_i es la contribución a la varianza asignada a la i -ésima función, γ_i . Nótese que $\sum_{i=1}^n c_i = Cov\{\mathbf{0}\}$ y es denotado como la *meseta* del variograma.

En la **Figura 2.4** se muestra un ejemplo de un variograma experimental para tres direcciones diferentes, y el variograma modelado mediante un modelo de exponenciales anidadas.

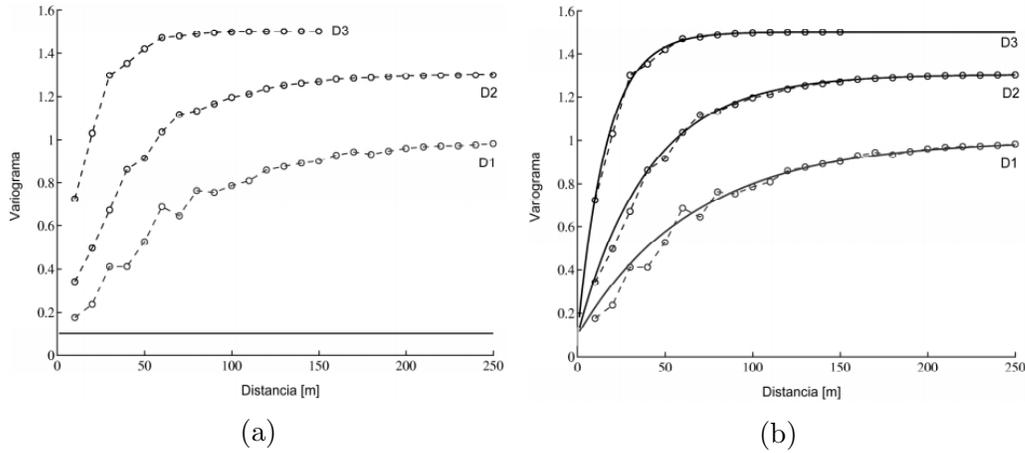


Figura 2.4: Ejemplos de variograma experimental (a) y variograma modelado (b)

2.2 Métodos de Estimación

La estimación del valor de una variable en un punto sin muestrear es realizada considerando la información disponible más cercana. Los métodos geométricos clásicos se basan en la configuración espacial de las muestras usadas para la estimación en la ubicación deseada. Interpolaciones basadas en triangulaciones, por el vecino más cercano o por inverso de la distancia no toman en cuenta la correlación espacial de los datos, es decir, no toman en consideración el variograma como una medida de la cercanía y la redundancia de las muestras en los puntos de interés.

El *inverso de la distancia* es una técnica de estimación lineal (**Ecuación 2.11**) en la cual se asigna un peso lineal a cada dato conocido para realizar la estimación en un lugar sin muestrear (**Figura 2.5**). El peso dado a cada dato se calcula como el recíproco de la distancia al punto de estimación elevado a una potencia w (**Ecuación 2.12**).

$$Z^*(\mathbf{u}_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Z(\mathbf{u}_{\alpha}) \quad (2.11)$$

$$\lambda_{\alpha} = \frac{\frac{1}{d_{\alpha}^w}}{\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{d_{\alpha}^w}} \quad (2.12)$$

El *kriging* es una técnica geoestadística de estimación local que utiliza la covarianza o el variograma, y que provee el *mejor estimador lineal insesgado* (*BLUE* por las siglas en inglés) de la característica desconocida a estudiar.

A continuación se presentan dos de los más importantes tipos de kriging.

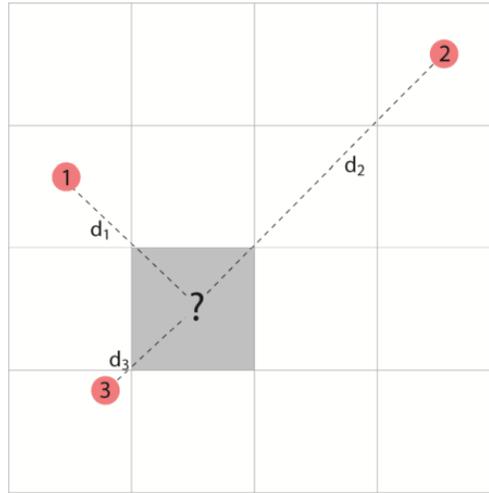


Figura 2.5: Estimación de un valor Z^* en una locación sin muestrear usando $n = 3$ datos conocidos (z_1 , z_2 y z_3). El dato más cercano (i.e. el punto 3) recibe mayor peso que el dato más lejano (i.e. el punto 2).

2.2.1 Kriging Simple (KS)

Se parte del supuesto de que la variable regionalizada z es la realización de la función aleatoria Z , y que la media m de ésta es conocida. El estimador kriging simple es una combinación lineal ponderada (promedio ponderado) de los datos, que denotaremos de la siguiente forma:

$$Z^*(\mathbf{u}_0) = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Z(\mathbf{u}_{\alpha}),$$

donde \mathbf{u}_0 es el sitio donde se busca tener una estimación, $\{\mathbf{u}_{\alpha}, \alpha = 1 \dots n\}$ son los sitios con datos, mientras que los ponderadores $\{\lambda_{\alpha}, \alpha = 1 \dots n\}$ y el coeficiente a son las incógnitas.

Este estimador es una combinación de variables aleatorias y, por lo tanto, es una cantidad aleatoria. Para obtener una estimación numérica, basta con aplicar la fórmula anterior a la realización particular que constituyen los datos experimentales:

$$[z(\mathbf{u}_0)]_{KS}^* = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot z(\mathbf{u}_{\alpha}).$$

Para encontrar los ponderadores se expresa, por un lado, el valor esperado del error de la estimación como:

$$\begin{aligned} E[Z^*(\mathbf{u}_0) - Z(\mathbf{u}_0)] &= a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \underbrace{E[Z(\mathbf{u}_{\alpha})]}_{=m} - \underbrace{E[Z(\mathbf{u}_0)]}_{=m} \\ &= a + \left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} - 1 \right) \cdot m, \end{aligned}$$

Este valor esperado es nulo si:

$$a = \left(1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}\right) \cdot m.$$

Por otro lado, la estimación de la varianza se expresa como:

$$\begin{aligned} \sigma_E^2(\mathbf{u}) &= E\{(Z^*(\mathbf{u})) - Z(\mathbf{u})^2\} \\ &= E\{(Z^*(\mathbf{u}))^2\} - 2 \cdot E\{Z^*(\mathbf{u}) \cdot Z(\mathbf{u})\} + E\{(Z(\mathbf{u}))^2\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} E\{Z(\mathbf{u}_{\alpha}) \cdot Z(\mathbf{u}_{\beta})\} \\ &\quad - 2 \cdot \sum_{\alpha=1}^n E\{Z(\mathbf{u}) \cdot Z(\mathbf{u}_{\alpha})\} + E\{(Z(\mathbf{u}))^2\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} Cov\{\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}\} \\ &\quad - 2 \cdot \sum_{\alpha=1}^n Cov\{\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}\} + Cov\{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

Nótese que la covarianza de la variable Z es requerida.

Para encontrar los ponderadores óptimos, esta expresión es minimizada tomando las derivadas con respecto a los ponderadores λ_{α} , $\alpha = 1 \dots n$ e igualándolos a cero:

$$\frac{\partial \sigma_E^2(\mathbf{u})}{\partial \lambda_{\alpha}} = 2 \cdot \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} Cov\{\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}\} - 2 \cdot Cov\{\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}\} \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Este proceso lleva a la obtención del sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} Cov\{\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}\} = Cov\{\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}\} \quad \alpha = 1, \dots, n$$

En notación matricial, este sistema puede ser escrito de la forma:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{k}$$

La estimación puede ser re-expresada de la forma:

$$[z(\mathbf{u}_0)]_{KS}^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot z(\mathbf{u}_{\alpha}) + \left(1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}\right)$$

La varianza mínima del error de estimación en el sitio \mathbf{u}_0 , llamada varianza de kriging, se simplifica de la siguiente forma:

$$\sigma_{KS}^2(\mathbf{u}_0) = \sigma^2 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Cov\{\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_0\}$$

donde $\sigma^2 = Cov\{\mathbf{0}\}$ es la varianza *a priori* de la función aleatoria Z .

2.2.2 Kriging Ordinario (KO)

Si la media no es conocida, una combinación lineal de los datos también se puede utilizar, sin embargo, se debe agregar una restricción a los ponderadores para asegurar el insesgo, es decir, que el valor esperado de la estimación sea igual al valor esperado de los valores reales. Ésto se traduce simplemente en la condición de que los ponderadores sumen uno. El estimador de kriging ordinario y el sistema de $n + 1$ ecuaciones son:

$$[z(\mathbf{u}_0)]_{KO}^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot z(\mathbf{u}_{\alpha})$$

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} Cov\{\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}\} - \mu = Cov\{\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}\} \quad \alpha = 1, \dots, n$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1$$

Nótese que estas ecuaciones se deducen de minimizar la varianza estimada sujeto a la restricción sobre los ponderadores.

$$\min[\sigma_E^2] \quad \text{s.a.} \quad \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1$$

Esto se logra introduciendo una incógnita adicional llamada multiplicador de Lagrange, que denotaremos como μ . Se minimiza una nueva función definida con $n + 1$ variables $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu$. Calculando las $n + 1$ derivadas parciales de esta función y luego anulándolas, se obtiene el sistema:

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu) = \sigma_E^2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) - 2 \cdot \mu \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial [f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu)]}{\partial \lambda_{\alpha}} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial [f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu)]}{\partial \mu} = 0$$

Siendo el variograma una herramienta equivalente a la covarianza, a partir de la relación $\gamma(\mathbf{h}) = Cov\{\mathbf{0}\} - Cov\{\mathbf{h}\}$, se puede elegir utilizarlo en lugar de la función de covarianza. Las ecuaciones de kriging pasan a ser:

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \gamma\{\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}\} - \mu = \gamma\{\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}\} \quad \alpha = 1, \dots, n$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1$$

En notación matricial, este sistema puede ser escrito de la forma:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \vdots \\ \gamma_{n0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Simulación Geoestadística

La Geoestadística permite simular variables regionalizadas por una distribución espacial, cuya realización debe reproducir las características del yacimiento, no solamente la media estadística y desviaciones, sino también sus características estructurales como relaciones espaciales. Por consiguiente las simulaciones tienen ventaja sobre la estimación por Kriging debido a que éste posee ciertas limitantes como:

- Suavizamiento, el mapa de los valores estimados es más regular que el mapa de los valores verdaderos.
 - No se pueden predecir valores extremos.
 - No se puede trabajar sobre el mapa de valores estimados como si se trataran de valores verdaderos.
- La intensidad del suavizamiento depende de la densidad de la malla de muestreo.
- La varianza de Kriging no mide todas las fuentes de incertidumbre (no toma en cuenta el efecto proporcional).

De esta forma la simulación se basa en la interpretación de la variable regionalizada como una realización de una función aleatoria, con lo cual se busca construir otras realizaciones de esta misma función aleatoria, para lo cual es preciso conocer la distribución espacial de la función, es decir, el conjunto de las distribuciones de probabilidad de múltiples puntos (ej. Histogramas).

Las técnicas de simulación pueden ser condicionales o no condicionales, dependiendo de su construcción, pero dado que se desea representar la realidad, es deseable contar con métodos condicionales, pues estos además de reproducir la variabilidad de la variable en estudio, también toman en cuenta los valores conocidos del sitio de muestreo, condicionando las realizaciones a dichos valores.

En particular, en este estudio, se utilizará como modelo de función aleatoria el modelo *Multi-Gaussiano*.

2.3.1 Técnicas Gaussianas

A pesar de que es raro encontrar una variable aleatoria cuyo histograma sea Gaussiano, los métodos basados en el supuesto de multivariantes Gaussianas son bastante comunes. Debido a que las variables originales son no Gaussianas, una transformación es requerida para hacer de la muestra una distribución normal estándar. Lo anterior no asegura que los momentos de mayor orden sean también Gaussianos, así que se deben chequear si los supuestos se condicen con los datos transformados. Nótese que referirse a una distribución multivariante se refiere al contexto espacial de una sola variable, y no necesariamente al caso de múltiples variables.

Por lo tanto, el primer requerimiento es tener una variable que tenga un histograma Gaussiano. Esto se logra con una transformación que puede ser aplicada en forma gráfica o a través de un ajuste polinomial:

$$y(\mathbf{u}_\alpha) = G^{-1}(F_z(z(\mathbf{u}_\alpha))) = \phi\{\mathbf{u}_\alpha\} \quad \forall \alpha = 1, \dots, N$$

Para chequear bivariabilidad Gaussiana, se deben generar nubes de correlación diferida de la variable transformada. Ésto quiere decir que se deben encontrar pares Y de los valores de la muestra separados aproximadamente por \mathbf{h} . Este procedimiento se debe repetir para distintos vectores de separación \mathbf{h} . Cada uno de los gráficos deben mostrar líneas de contorno elípticas de igual densidad de probabilidad, características de una distribución Gaussiana.

Otro test consiste en graficar la raíz cuadrada del variograma experimental de los valores normales sobre el madograma (o variograma de orden 1) de los valores normales, esto es, la mitad del valor absoluto de las diferencias de los valores normales separados por una distancia \mathbf{h} . Esta razón debería ser constante e igual a $\sqrt{\pi}$ (Emery, 2003):

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} (y(\mathbf{u}) - y(\mathbf{u}+\mathbf{h}))^2}}{\sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} |y(\mathbf{u}) - y(\mathbf{u}+\mathbf{h})|} = \sqrt{\pi}$$

También se puede utilizar el *variograma de orden w* , el cual se define como la mitad del valor esperado de los incrementos de la variable para este vector \mathbf{h} elevado a la potencia w

(Emery, 2005):

$$\gamma_w(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E\{(Z(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - Z(\mathbf{u}))^w\} \quad 0 \leq w \leq 2$$

Así, para $w= 0.5, 1$ y 2 se define el rodograma, madograma y variograma respectivamente. En el caso multi-Gaussiano se tiene la siguiente relación entre el variograma de orden w y el variograma:

$$\gamma_w(\mathbf{h}) = \frac{2^{w-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right) \gamma(\mathbf{h})^{w/2}$$

En escala log-log, esta ecuación representa una recta de pendiente $w/2$.

A continuación se presenta el método de simulación Gaussiana secuencial, que asume que la variable ha sido transformada a valores normales, y que no violan supuestos de normalidad de orden superior. Un último paso es requerido: la transformación de vuelta, es decir, aplicar la transformación inversa a los valores obtenidos de las realizaciones, de modo de obtener los valores simulados de la variable original.

2.3.2 Simulación Gaussiana Secuencial

Es un método sencillo y fácil de ejecutar que permite el condicionamiento directo a valores reales. Sin embargo, es un método lento pues la matriz de kriging se vuelve cada vez más grande a medida que se desarrolla la simulación.

Se nombran a continuación los principales pasos del algoritmo secuencial:

- Definir un camino aleatorio para visitar cada nodo de la grilla una vez.
- Visitar cada uno de los nodos, siguiendo el camino aleatorio, y realizando kriging simple de los valores Gaussianos.
- Generar valor simulado por simulación de Monte-Carlo.
- Agregar a la base de datos que se usará para las estimaciones subsiguientes.
- Repetir hasta que todos los nodos hayan sido visitados.

Se debe tener en cuenta que cualquiera que sea el enfoque elegido para la simulación, el modelo final debe ser chequeado en el sentido que reproduzca los datos originales y sus estadísticas, específicamente su histograma y variograma.

2.4 Modelamiento Geológico y Anisotropía

La noción de anisotropía es central para el desarrollo de esta memoria. Por lo tanto, este concepto debe ser claramente definido.

2.4.1 La Naturaleza de la Anisotropía

La *anisotropía* se define como "tener propiedades que difieren de acuerdo a una dirección" (Morris, 1975). El término es usado en muchos campos de la ciencia con una connotación similar; en evaluación de recursos la anisotropía describe la dependencia direccional de la continuidad de las variables, como por ejemplo: el tipo de roca, porosidad, permeabilidad, ley de mineral, concentración, etc. Los procesos geológicos naturales pueden deformar estas propiedades en direcciones preferenciales. En estos casos se dice que la propiedad es anisótropa y su continuidad difiere según la dirección en la que se examina.

Por otro lado, la definición de *continuidad* no es tan clara como la definición de anisotropía. La continuidad puede ser calificada por examinación visual, como por ejemplo, cuando se observa en la **Figura 2.6** que el depósito de carbón mostrado posee mayor grado de continuidad que el depósito de vetas de oro. La continuidad es mayor en el depósito de carbón debido a que muestras separadas a diez metros, en la dirección horizontal, presentan propiedades similares mientras que para el depósito de vetas de oro muestras separadas por solo unos centímetros no muestran relación.

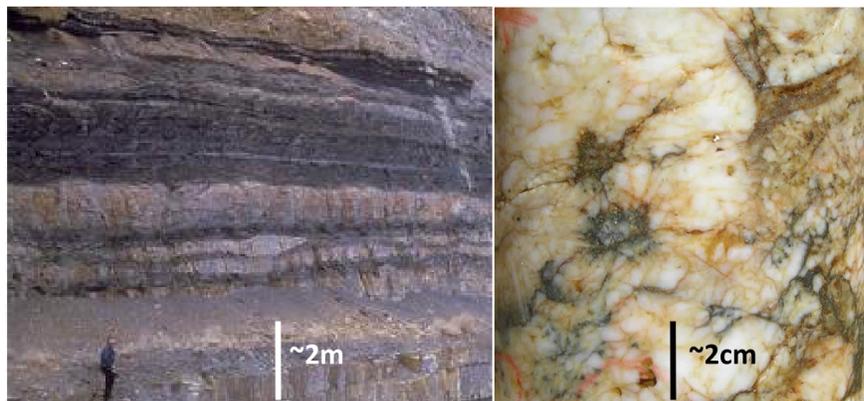


Figura 2.6: Izquierda: Depósito continuo de carbón (www.scienceclarified.com). Derecha: Depósito de vetas de oro, comúnmente discontinuas y erráticas (www.jpgold.com).

El depósito de carbón presenta alto grado de continuidad en la dirección horizontal mientras que la depositación estratigráfica incide en el menor grado de continuidad en la dirección vertical. Por lo tanto, la ley de carbón es anisótropa debido a que la continuidad en el depósito depende de la dirección. Esta observación visual es importante durante la etapa inicial de exploración. Sin embargo, se puede obtener una medida cuantitativa del grado de continuidad si se introduce la anisotropía en el modelamiento numérico.

La continuidad puede ser evaluada cuantitativamente si se considera la distancia a la cual los datos dejan de relacionarse entre sí. La medida más común de continuidad utilizada en geoestadística es la covarianza (definida en la **Subsección 2.1.2**) entre dos posiciones

separadas por una distancia \mathbf{h} ; mayor covarianza entre dos posiciones implica un mayor grado de continuidad. Por definición, la anisotropía existe no sólo cuando la covarianza entre dos posiciones depende de la distancia de separación $|\mathbf{h}|$, sino también de la orientación de \mathbf{h} .

En la **Figura 2.7** se ilustran tres ejemplos de depósitos con distinto grado de continuidad. La isotropía existe cuando la covarianza entre los puntos depende solo de la distancia ($|\mathbf{h}|$). La covarianza entre puntos es idéntica independiente de la dirección y se reduce hasta un valor cercano a cero cuando $|\mathbf{h}| = 20$. En contraste, el alcance para el caso aleatorio es cero para una distancia muy pequeña.

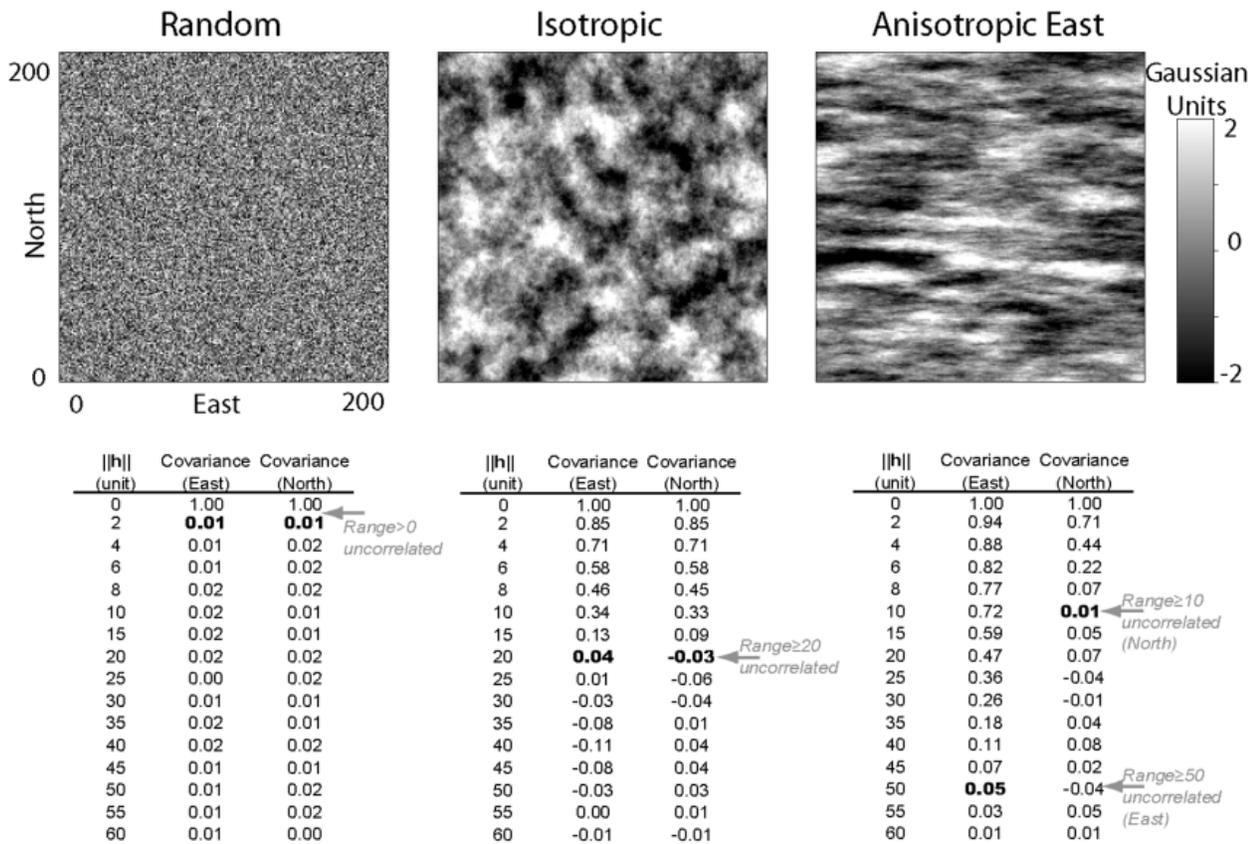


Figura 2.7: Izquierda: Una variable continua aleatoria. Centro: Una variable isotrópica; la continuidad depende sólo de $|\mathbf{h}|$. Derecha: Una variable anisótropa, donde la continuidad depende de la orientación y magnitud de \mathbf{h} (Boisvert, 2010).

La noción de covarianza representando la continuidad de un depósito puede ser extendida al caso anisótropo en donde el grado de continuidad depende de la dirección. Las tablas presentada en la **Figura 2.7** son útiles para el propósito de observar el comportamiento de la covarianza. En el caso anisótropo, existe más continuidad en la dirección Este-Oeste que en la dirección Norte-Sur.

Nótese que el examinar la continuidad en múltiples direcciones simultáneamente se hace más conveniente cuando se grafica la varianza en el variograma (**Figura 2.8**).

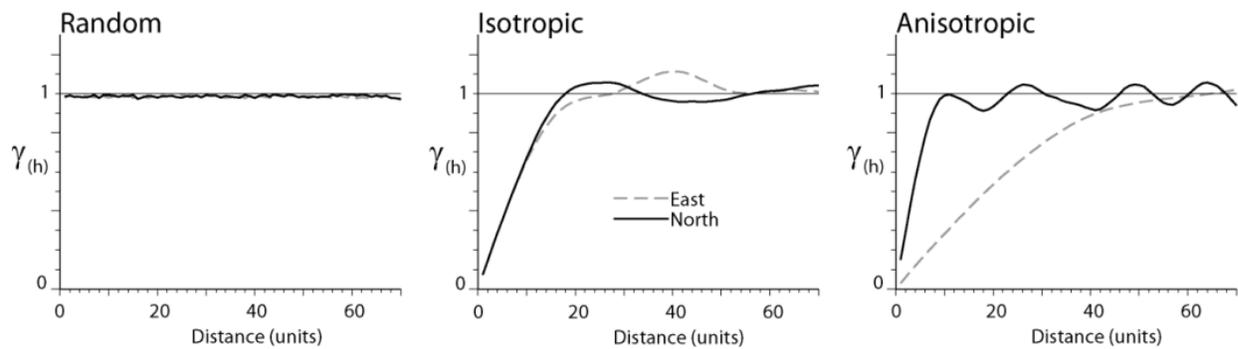


Figura 2.8: Variogramas de las variables de la **Figura 2.7**. $Cov\{\mathbf{0}\} = 1$ (Boisvert, 2010).

2.4.2 Procesos que Causan Anisotropía Geológica

Existen procesos geológicos que cambian la continuidad preferencial de yacimientos en ciertas direcciones. Los procesos más comunes incluyen: fracturas, formación de vetillas, plegamientos, gradientes termales y sistemas fluviales.

Plegamientos

El plegamiento consiste en una deformación dúctil de roca. El tipo y magnitud del plegamiento dependerá de las fuerzas presentes al momento del pliegue y podría dar resultado a formas simétricas, asimétricas, flexión, pandeo o parasitarias (Leeder y Perez-Arlucea, 2006). Este proceso ocurre posteriormente a las mineralizaciones y no se da sólo en rocas sedimentarias, aunque el proceso se ilustra claramente cuando se aplica a este tipo de depósitos (**Figura 2.9**).

Punto importante será que el proceso de pliegue introduce características no estacionarias en yacimientos minerales, lo que da origen al estudio de geoestadística con direcciones de anisotropía variable.

Sistemas fluviales y magmáticos

Los depósitos fluviales son formados del depósito de sedimentos transportados por ríos. Debido a que los ríos muestran bruscos cambios en su dirección debido a condiciones variables del terreno, saturaciones de hidrocarburos que se encuentran en los depósitos fluviales muestran características de variación local en su disposición. En la **Figura 2.10** se presentan cinco tipos de depósitos fluviales: abanicos fluviales, abanicos delta, ríos anastomosados, ríos meándricos y ríos meándricos encajados

Los depósitos magmáticos también pueden mostrar las mismas características de variación local vistas en los sistemas estuarinos. Las características de ramificación y variación local son similares al sistema de estuario porque el mecanismo básico de flujo de fluido es similar (**Figura 2.11**).

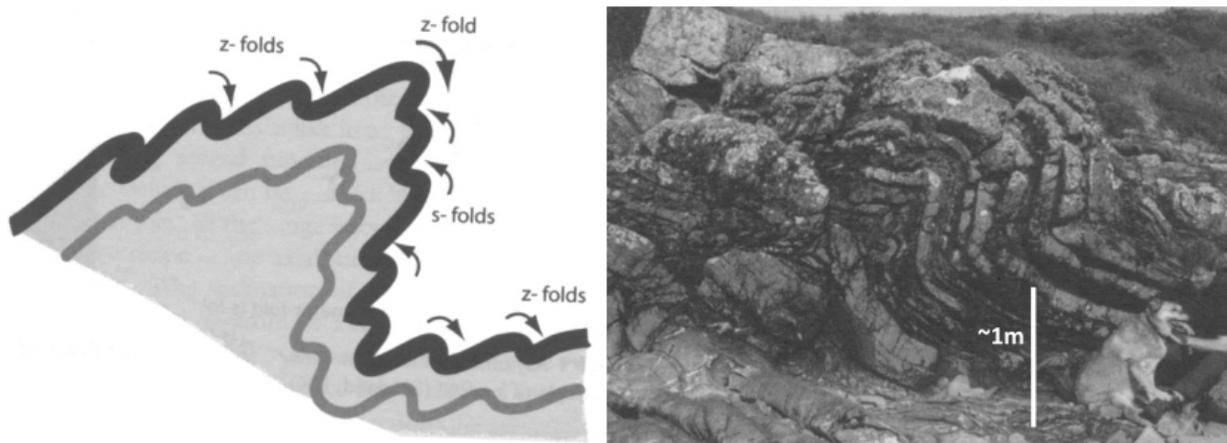


Figura 2.9: Izquierda: Plegamiento simétrico. Derecha: Plegamiento tipo z (Leeder y Perez-Arlucea, 2006).

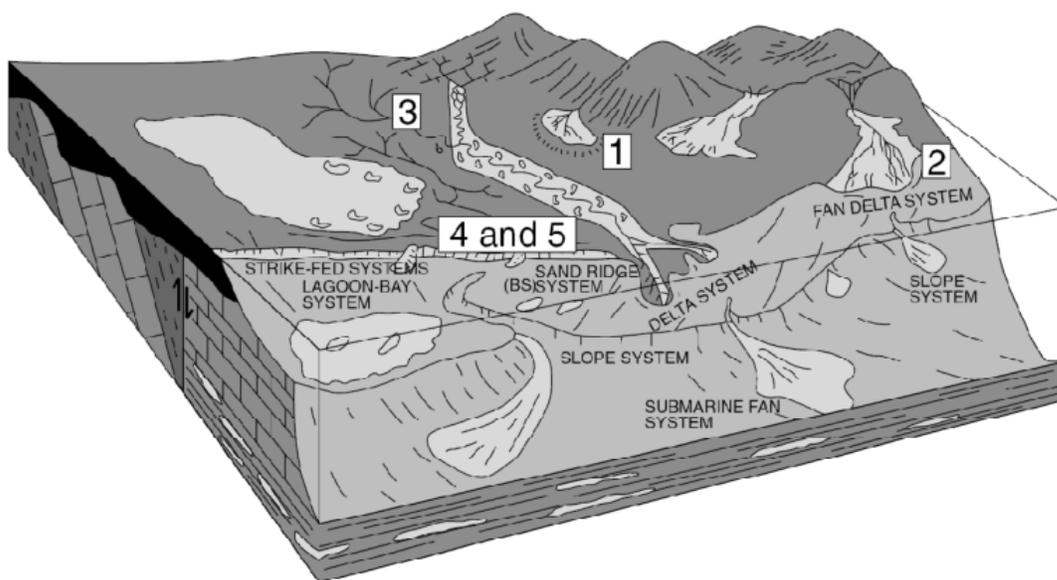


Figura 2.10: Diagrama de bloque que muestra cinco tipos de ambientes de depósitos fluviales: (1) abanicos fluviales, (2) abanicos delta, (3) ríos anastomosados, (4) ríos meándricos y ríos meándricos encajados (Slatt, 2006).

Fracturas y fallas

Cuando el esfuerzo sobre una roca es mayor que la resistencia, ésta se rompe produciendo fracturas o fallas. Hay desplazamientos en el macizo rocoso que pueden ser propicios para el transporte de fluidos. Éstos son concentrados causando el depósito preferencial de minerales formando vetas. Cuando la orientación de las fracturas varía espacialmente, la mineralización resultante mostrará estas características en direcciones variables. Las fracturas en depósito intrusivo pueden ser un ejemplo de cuando las fracturas causan el depósito preferencial de minerales, como ocurre en un depósito de tipo pórfido.

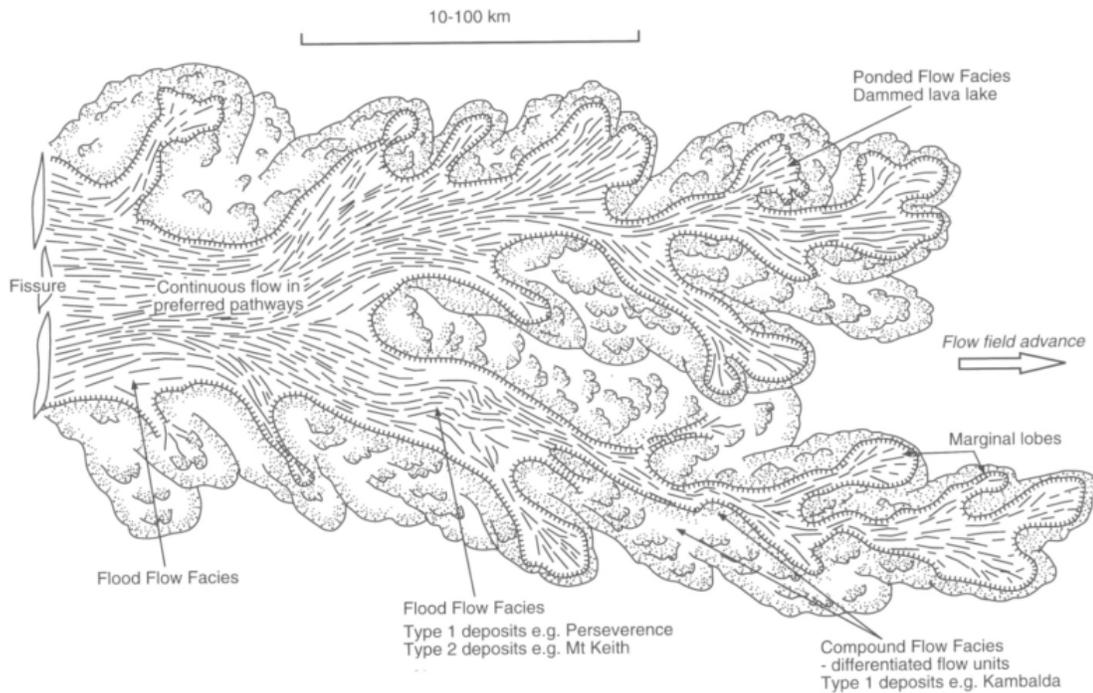


Figura 2.11: El flujo idealizado de lava de tipo Komatiíta ilustra características no lineales (Pirajno, 2000).



Figura 2.12: Vista en planta de vetas en el Witwatersrand Goldfield en Sudáfrica mostrando variaciones locales de rumbo (Evans, 1987).

2.4.3 Geometrías No Capturadas por Técnicas Convencionales

Las distribuciones de leyes con continuidad asociada a geometrías curvilíneas resultan sumamente complejas de estimar y simular con las técnicas convencionales. Al utilizar un

variograma global se pierde mucha de la información geológica con la que se cuenta. Esta información sin lugar a dudas debería ser tomada en consideración en las metodologías geoestadísticas. Como se aprecia en la **Figura 2.13** las litologías difícilmente pueden ser representadas por una dirección única de anisotropía y resulta predecible que la utilización de un variograma único conlleve a una reproducción deficiente de su geometría (Boisvert y Deutsch, 2010).

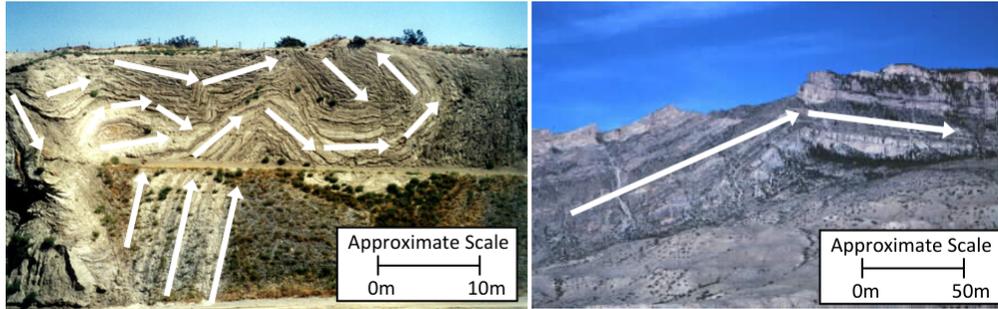


Figura 2.13: Estratos plegados mostrando direcciones variables (Boisvert y Deutsch, 2010).

Definir de forma correcta la potencia y la ubicación de las vetas, estratificaciones o pliegues es fundamental para las etapas posteriores de diseño, planificación, explotación y procesamiento resulta, y por lo tanto trascendental en el negocio minero, en el cual debe asegurarse la rentabilidad de la operación antes de comenzar el desarrollo del proyecto.

Previamente, en la sección 2.4.2, se trataron los procesos que causan las anisotropías variables en depósitos con continuidades no estacionarias. Esto motiva el uso de la información geológica como entrada para las simulaciones en la forma de un *campo de direcciones variables* (o desde su nombre en inglés *campo LVA*).

Se explora una amplia gama de fuentes disponibles para la generación del campo LVA, además de una descripción del método en la **Tabla 2.1**.

Además, se introducen metodologías para generar el campo de direcciones una vez que han sido obtenidos los datos. Las técnicas trabajan con variables categóricas o continuas y son presentadas en **Tabla 2.2**.

2.5 Incorporación del Campo LVA en Geoestadística

Para incorporar la anisotropía en un modelo geoestadístico se requieren dos definiciones: la dirección de continuidad y la razón de anisotropía. Con respecto a este último, la literatura es inconsistente en su definición. Cuando la razón de anisotropía es menor que 1, éste queda definido por la **Ecuación 2.13**, mientras que cuando la razón es mayor que 1, se considera el recíproco de la **Ecuación 2.13**. Una tercera forma de razón de anisotropía es una razón de la forma 10:1, en donde el número más grande representa el alcance relativo de anisotropía en

Origen	Descripción
Datos de sondaje	Muestras de variable de interés
Ángulos de rumbo/manteo	Medidas de rumbo, manteo o buzamiento usando medidores
Sensores remoto	Medidores remotos midiendo propiedades sísmicas, magnéticas y electromagnéticas
Modelos estructurales	Depósitos estratigráficos modelados por capa
Modelos de tipo de roca	Modelos de variables categóricas pueden ser usados para generar campos direcciones variables
Análogo	Características contenidas en los depósitos análogos se puede usar para inferir LVA.

Tabla 2.1: Orígenes de datos para inferencia de campo LVA (Boisvert y Deutsch, 2010).

Técnica	Orientación/ Magnitud	Descripción
Estimación de componentes	Orientación y magnitud	Si las mediciones directas del campo LVA están disponibles, éste se infiere utilizando técnicas geoestadísticas.
Ángulos de rumbo/manteo	Sólo magnitud	Tales métodos tienen la ventaja de incorporar el conocimiento experto y experiencia de un geólogo.
Inferencia manual del campo	Orientación/ magnitud	Un cálculo de momento de inercia puede dar la dirección y la magnitud del campo LVA basado en mediciones de la variable de interés.
Interpolación automática	Sólo orientación	Los valores de datos que son similares en magnitud se unirán automáticamente para generar muestras del campo LVA.

Tabla 2.2: Técnicas de inferencia de campo LVA a partir de muestras (Boisvert y Deutsch, 2010).

la dirección de mayor continuidad (a_{max}), y el número menor representa el alcance relativo en la dirección de menor continuidad (a_{min}). Consideremos, por ejemplo, el variograma de la **Figura 2.14**. La dirección de mayor continuidad es la dirección Este. Se asume que la menor dirección de continuidad es ortogonal a la de mayor continuidad. En tres dimensiones un tercer ángulo es requerido para definir completamente la dirección de continuidad.

$$\text{razón de anisotropía} = \frac{\text{alcance en la dirección menor}}{\text{alcance en la dirección mayor}} = \frac{a_{min}}{a_{max}} \quad (2.13)$$

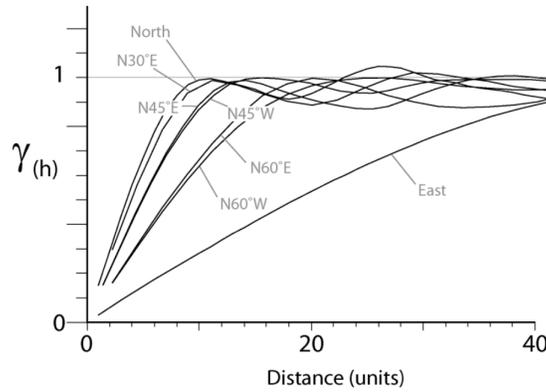


Figura 2.14: Variograma en múltiples direcciones para el mapa anisótropo de la **Figura 2.7** (Boisvert y Deutsch, 2010).

Por lo tanto, la anisotropía puede ser pensada como una elipse, en donde la dirección mayor de anisotropía se corresponde con el semi-eje mayor y la dirección menor, que es perpendicular, se corresponde con el semi-eje menor de la elipse. Las razones de los ejes de la elipse en estas direcciones están dados por los alcances (**Figura 2.15**). En tres dimensiones se requieren tres alcances para definir completamente la anisotropía.

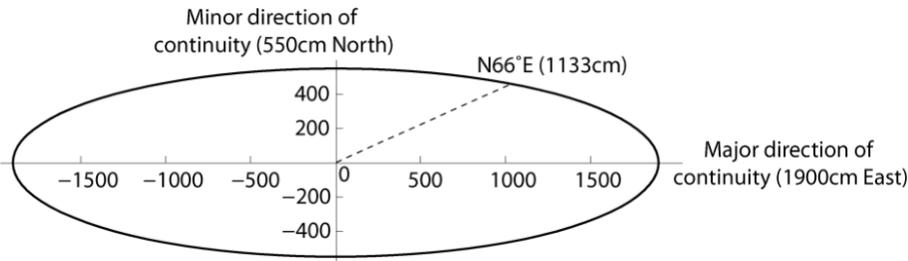


Figura 2.15: Anisotropía visualizada como una elipse. Se muestra que la dirección de mayor continuidad es el Este ($a_{max} = 1900cm$) y la dirección de menor continuidad es el Norte ($a_{min} = 550cm$) (Boisvert y Deutsch, 2010).

La transformación desde el sistema de coordenadas en donde la variable de interés presenta anisotropía a un sistema de coordenadas ortogonales en donde la variable es isotrópica es útil para propósitos computacionales y para captar la anisotropía en una sola matriz (**Ecuación 2.16**).

La transformación a un espacio isotrópico de dos dimensiones se realiza identificando la dirección de anisotropía en primer lugar. Luego de esto, se rotan los ejes X e Y, alineándose con la dirección mayor de anisotropía, y luego escalando para obtener un sistema coordenado isotrópico (**Figura 2.16**). Esta transformación es obtenida mediante la multiplicación de las coordenadas originales de los datos (x, y) , por la matriz de rotación de la **Ecuación 2.14**, de manera de obtener el sistema de coordenadas rotado (x', y') :

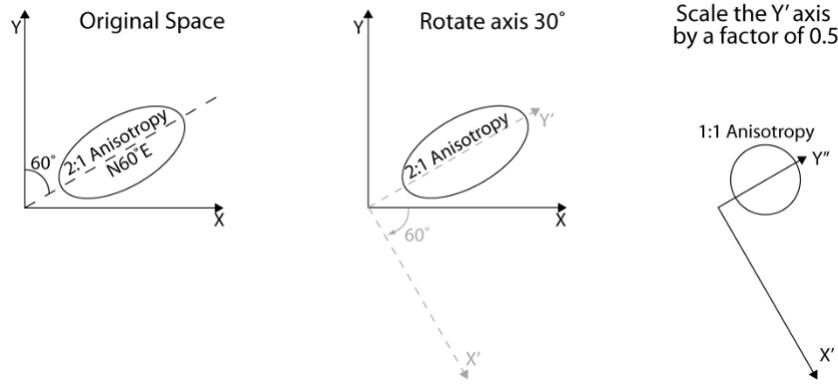


Figura 2.16: Izquierda: Considerese una anisotropía 2 : 1 en la dirección N60°E. Para obtener isotropía se debe rotar el eje Y y alinearlo con la dirección de continuidad, y luego escalar el eje Y' por un factor de 0.5 (Boisvert y Deutsch, 2010).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a_{max} & 0 \\ 0 & 1/a_{min} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

en donde α es la rotación en sentido horario del azimuth medido desde el Norte (eje Y). A continuación se muestra la transformación que se debería aplicar para el ejemplo de la **Figura 2.16**:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

La extensión de la transformación al caso de tres dimensiones es llevado a cabo con tres rotaciones y tres parametros de alcance (**Figura 2.17**). A continuación se presenta la matriz de rotación:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a_{max} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{min} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{vert} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \varphi & -\sin \alpha \cdot \cos \varphi - \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \varphi & \cos \beta \cdot \sin \varphi \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta & \cos \alpha \cdot \cos \beta & \sin \beta \\ -\cos \alpha \cdot \sin \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi & \sin \alpha \cdot \sin \varphi - \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi & \cos \beta \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

en donde α es una rotación en el rumbo, es decir, en torno al eje Z, β es una rotación en el manto, es decir, en torno al eje X, y φ es una rotación en el buzamiento, es decir, en torno al eje Y, y las magnitudes de anisotropía definidas como a_{max} en el eje X'', a_{min} en el eje Y'', y a_{vert} en el eje Z''. La matriz de rotación de la **Ecuación 2.16** se obtiene considerando tres rotaciones sucesivas en 2D (**Ecuación 2.14**) en los planos X – Y, Z – Y' y X' – Z' (**Figura 2.17**).

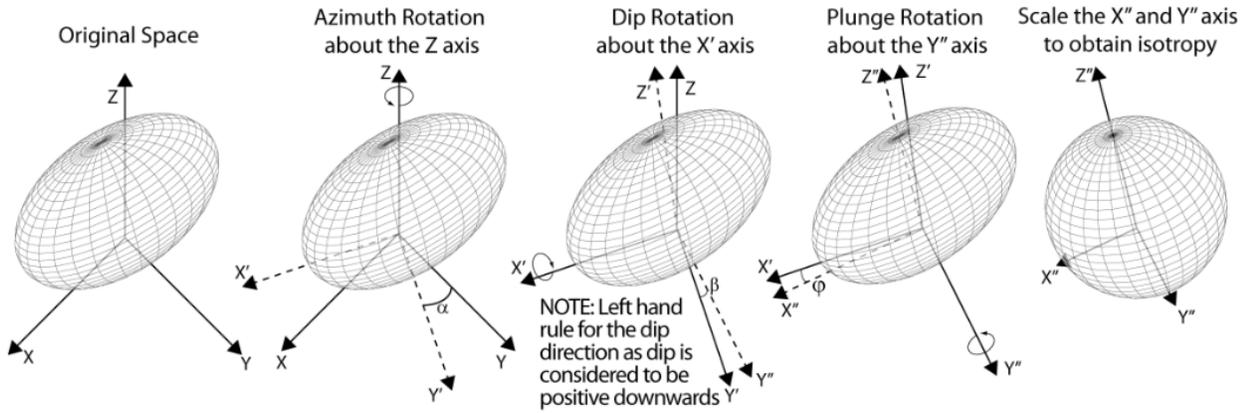


Figura 2.17: Izquierda: Considérese $a_{max} = a_{min} = 2$ mientras que $a_{vert} = 1$. Para obtener isotropía se debe rotar tres veces, la primera en torno al eje Z , luego en torno al eje X' y finalmente en torno al eje Y'' . Luego escalar los ejes X'' e Y'' (Boisvert y Deutsch, 2010).

2.6 Estimación y Simulación con Anisotropía

Los depósitos geológicos muestran aspectos no lineales como vetillas, canales o pliegues que dan como resultado un complejo sistema de anisotropías que dificultan modelar el cuerpo con las técnicas geoestadísticas disponibles. La metodología que será descrita incorpora los campos de direcciones variables en kriging y simulaciones secuenciales Gaussianas y se basa principalmente en modificar las distancias en las que los puntos son separados utilizando distancias geodésicas. Normalmente se usa el camino vía línea recta; sin embargo, cuando existen aspectos no lineales en los cuerpos es apropiado usar un camino entre los puntos que siga los pliegues del mismo.

2.6.1 Distancias Métricas a Geodésicas

Autores ya han considerado la utilización de la anisotropía local en la geoestadística considerando un variograma local de diferentes maneras. Algunas, para obtener el camino entre dos puntos, consideran sólo una anisotropía global y un camino en línea recta y otras consideran un camino no lineal con anisotropías variables. Los tres casos son definidos en **Figura 2.18**:

Caso 1: ruta en línea recta con la anisotropía específica obtenida a partir de la ubicación de estimación.

Caso 2: ruta en línea recta con la anisotropía específica obtenida de todas las celdas atravesadas.

Caso 3: ruta no lineal con la anisotropía específica obtenida de todas las celdas atravesadas

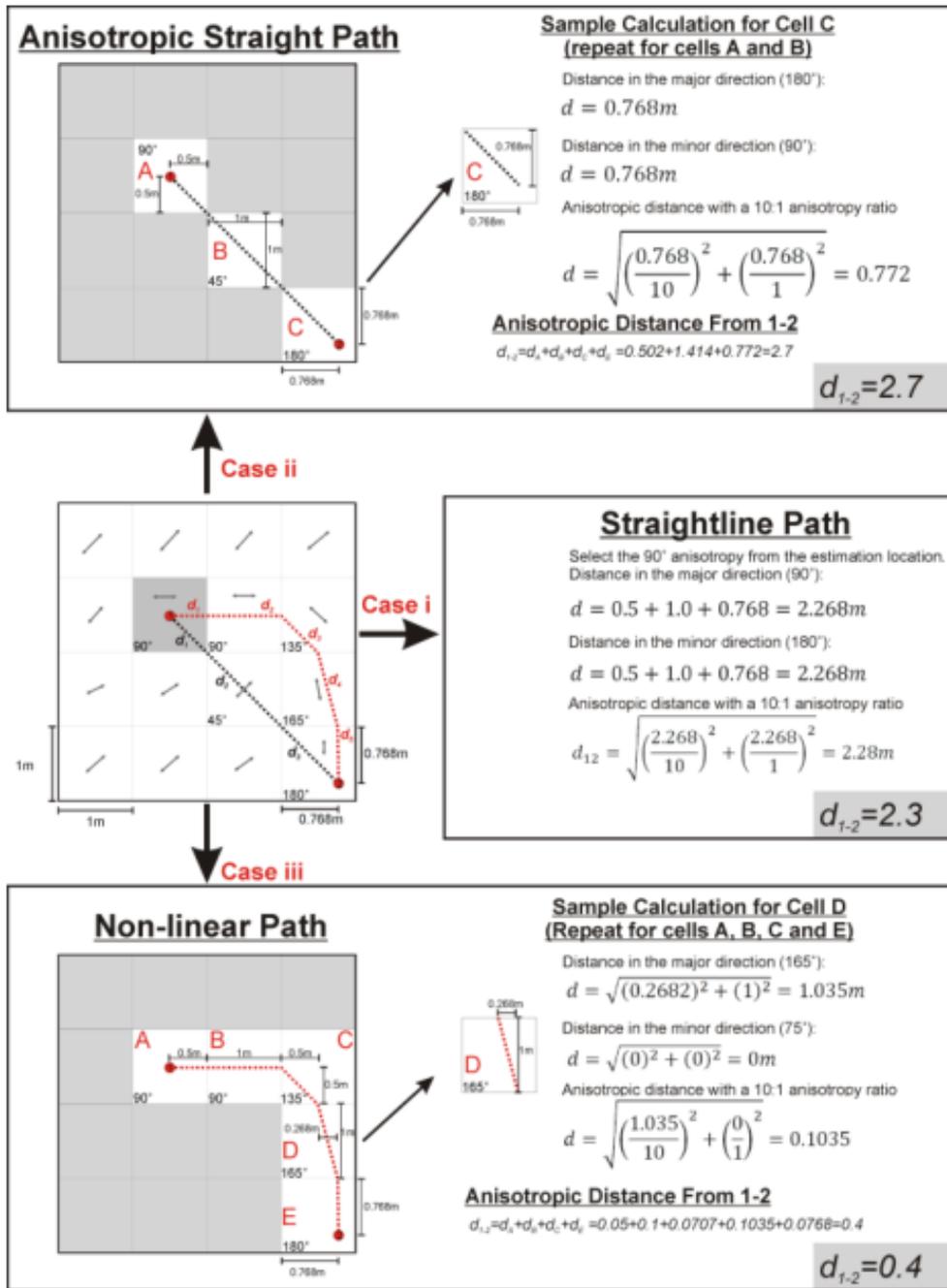


Figura 2.18: Técnicas utilizadas para obtención de distancias entre dos puntos (Boisvert y Deutsch, 2010).

El problema del *camino más corto* es correctamente resuelto mediante la teoría de los grafos. Un grafo conecta vértices (centros de una cuadrícula de celdas) a través de líneas que son conectadas para determinar la distancia (resistencia) entre dos vértices. El problema se reformula a un contexto gráfico dejando de lado el problema matemático de optimización. Se considera el grafo de la **Figura 2.19** con el camino más corto marcado en azul. Cada una de las líneas entre vértices tiene asociada una distancia, donde se observa que una mayor

discretización del campo LVA logra una mayor flexibilidad en los caminos.

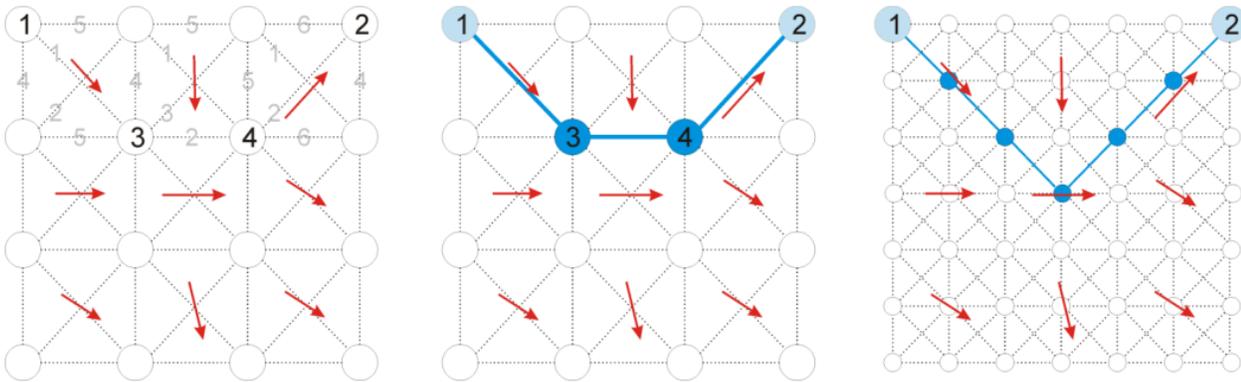


Figura 2.19: Grafo representando el problema del camino más corto en donde se muestra el efecto de la discretización del campo LVA en la definición de distancias entre puntos (Boisvert y Deutsch, 2010).

En la búsqueda del camino más corto entre vértices del campo LVA es usado el algoritmo de Dijkstra (1959). La principal limitación del algoritmo es el costo computacional asociado a la flexibilidad necesaria para encontrar el camino óptimo entre vértices. Esta limitación puede ser mitigada agregando aristas adicionales a las opciones que posee cada vértice, lo cual técnicamente se le llama una adición de *offsets* (**Figura 2.20**). Así, al poseer mayor cantidad de offsets, el número de caminos posibles aumentará y con ello la flexibilidad que el trazado puede tener.

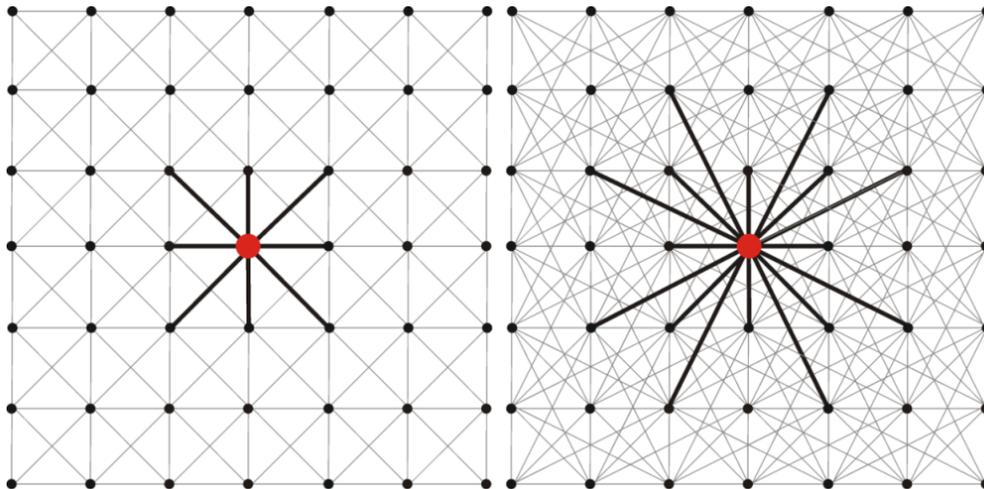


Figura 2.20: Grafos entre vértices conectados con 1 Offset (izquierda) y 3 Offsets (derecha) (Boisvert y Deutsch, 2010).

La implementación de la teoría de grafos en el problema del camino más corto es beneficiosa por dos principales motivos. El primero es que se garantiza encontrar una distancia que es solución óptima global, cuando se siguen las líneas entre los vértices; y el segundo es

que existen implementaciones públicas muy eficientes del algoritmo, el cual puede llegar a ser incluso paralelizable, incrementando así su idoneidad para los propósitos buscados.

2.6.2 Aumento de Dimensionalidad del Espacio Euclideano

El kriging y la simulación secuencial Gaussiana se basan en la solución de un sistema de ecuaciones (**Ecuación 2.17**) definido positiva, esto es, que si se considera una función de covarianza \mathbf{C} y una matriz de $n \times n$ entre n puntos distintos del espacio, se cumple que para un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ y una forma cuadrática $q(\mathbf{x})$ definida como:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov_{ij} \cdot x_i \cdot x_j,$$

la forma cuadrática es mayor que cero para todo $\mathbf{x} \neq 0$ y es cero sólo si $\mathbf{x} = 0$.

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} Cov\{\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}\} = Cov\{\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}\} \quad \alpha = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

Si las covarianzas en la **Ecuación 2.17** forman una matriz definida positiva, la solución para el sistema de ecuaciones kriging es único y se puede determinar (Christakos, 1984; Cresie, 1993). Una matriz de covarianzas definida positiva se asegura, normalmente, utilizando una métrica de distancias Euclidianas y una función de covarianza positiva definida (Christakos 1984), sin embargo, utilizar métricas de distancias geodésicas para el camino más corto no garantiza la definición positiva de la matriz (Curriero 1996 y 2005).

Métrica para la Distancia del Camino Más Corto

La métrica para encontrar la distancia del camino más corto es una métrica válida (Curriero, 2005). Una función de distancia, $d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$, es una métrica válida si cumple las siguientes condiciones para todos los puntos i y j :

$$\begin{aligned} \text{Condición 1: } & d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) \geq 0 \quad y \quad d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = 0 \quad \text{ssi} \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_j \\ \text{Condición 2: } & d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i) \\ \text{Condición 3: } & \text{Desigualdad triangular: } d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) \leq d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k) + d(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_j) \end{aligned} \quad (2.18)$$

La distancia Euclideana, $d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_2$, es una métrica válida ya que cumple las condiciones de la **Ecuación 2.18**. La distancia para el camino más corto que nos entrega el algoritmo de Dijkstra también es una distancia métrica válida puesto que cumple las condiciones de la **Ecuación 2.18**, pero esto no es suficiente para garantizar que la matriz

de covarianza para kriging sea definida positiva (Curriero, 2005). Es por esta razón que la métrica del camino más corto se asigna a un espacio Euclidiano de alta dimensionalidad mediante algoritmos como *ISOMAP* y *L-ISOMAP*. En estos espacios es relativamente sencillo encontrar modelos válidos de covarianza que sean definidos positivamente.

Algoritmos de Aumento/Disminución de Dimensionalidad

Los algoritmos de aumento/disminución de dimensionalidad toman datos de baja/alta dimensión e intentan encontrar una representación más alta/baja en q-dimensiones de los datos de manera tal que las características originales de estos sean mantenidas.

El *Escalamiento Multidimensional* (MDS, por sus siglas en inglés) (Mardia et al, 1979) es una técnica estadística usada para mapear similaridades (por ejemplo covarianzas) o diferencias (por ejemplo tiempos de viajes) entre datos. Una vez que son obtenidas estas distancias Euclidianas a partir de grafos, el MDS realizará un ISOMAP (Tenenbaum et al; 2000; Maaten et al; 2008)

Considérese el ejemplo instructivo de representar espacialmente tiempos de viaje entre ciudades (**Figura 2.21**) donde el mapa puede ser considerado como un grafo con flechas (caminos) y vértices (ciudades). Debido a diferentes particularidades que pueden ocurrir en las rutas, los tiempos de viaje entre ciudades a igual distancia podrían ser diferentes. Así, dos ciudades cercanas pueden requerir mayor tiempo de viaje que ciudades que están más alejadas. Para visualizar estas distancias en dos dimensiones, las ciudades deberán ser reubicadas hasta que sus tiempos de viaje entre ellas sean representados mediante distancias euclidianas. Debido a las diferencias en los tiempos de viaje propuestos será imposible que estas sean representadas exactamente en el escalamiento; este problema podría ser solucionado aumentando el número de dimensiones de la operación. La dimensionalidad de este espacio Euclidiano puede ser tan alta como el número de datos propuestos menos uno. Al disminuir el número de dimensiones ocurre el fenómeno de *Stress*, que indicará la flexibilidad que el modelo escalado tiene contra el modelo original.

En la práctica, el ISOMAP corresponderá a una transformación de coordenadas de los puntos originales. Inicialmente su input será la matriz definida por las distancias entre los puntos originales y posterior a la aplicación del método se tendrá que cada uno de los puntos será definido en sus nuevas coordenadas en q-dimensiones. Una aplicación de ISOMAP para un ejemplo anticlinal es mostrada en la **Figura 2.22**.

Un inconveniente de esta modificación del espacio es que no es perfecta, por lo tanto, el camino más corto entre los lugares es sólo aproximado. Además de que ISOMAP requiere que los valores propios o vectores de la matriz de distancia entre los puntos debe ser transformada, lo que sería la matriz de distancias entre todos los nodos del modelo en la resolución de la

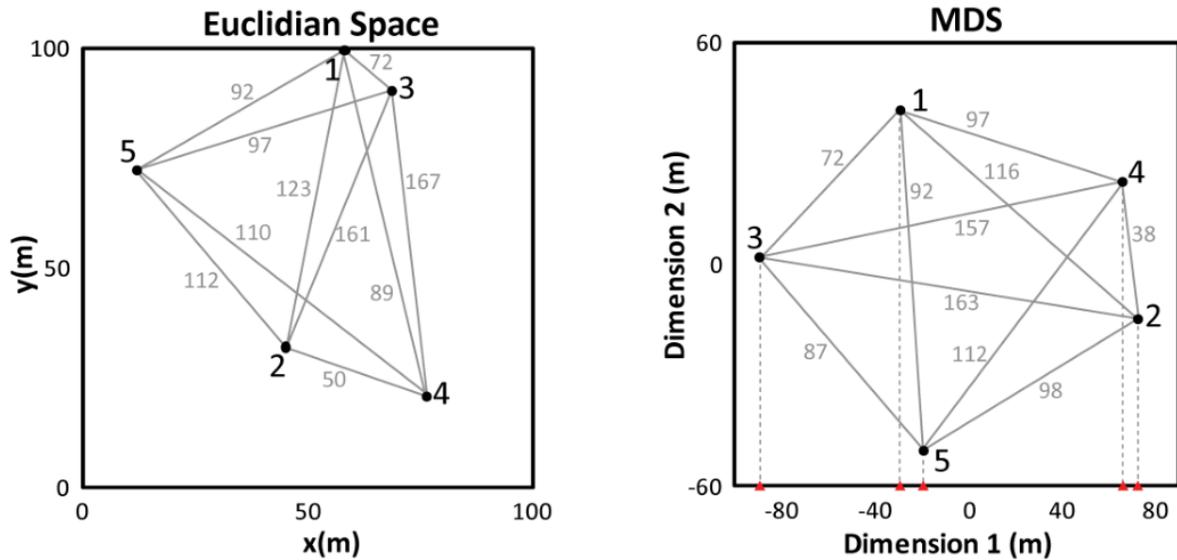


Figura 2.21: Izquierda: Locaciones de cinco ciudades en un espacio Euclideo en donde se indica el tiempo de viaje en horas. Derecha: Ciudades ubicadas en las primeras dos dimensiones (también en un espacio Euclideo). Nótese que también se pueden representar las ciudades en espacio Euclideo de una dimensión considerando la proyección sobre un eje (triángulos en el eje X) (Boisvert, 2010).

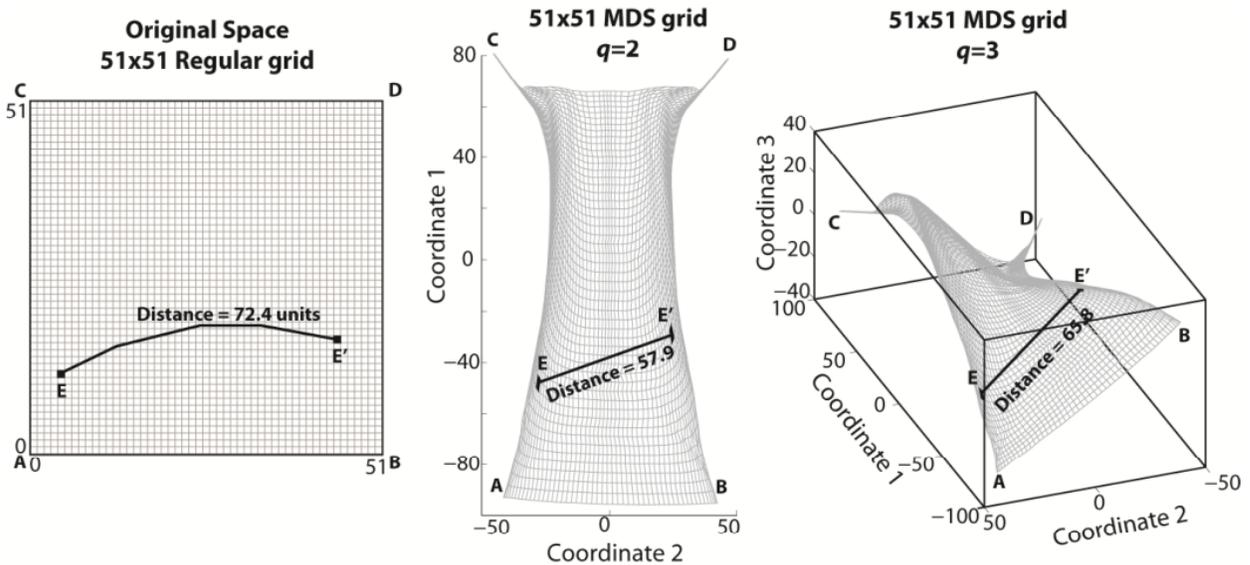


Figura 2.22: Transformación de una grilla de 51×51 mediante ISOMAP utilizando un campo LVA anticlinal, con distancias unitarias. Se muestra el largo del camino $E-E'$ en los dos sistemas de coordenadas. Nótese que en el sistema coordenado del ISOMAP existen 2600 dimensiones ($2601 - 1$), pero la visualización sólo es posible en dos o tres dimensiones (Boisvert, 2010).

cuadrícula deseada. Esto plantea dos problemas: el resolver un sistema denso de gran tamaño no es factible; y la generación de la matriz de diferencias entre todos los nodos de una red utilizando el algoritmo de Dijkstra sería computacionalmente imposible. Hay soluciones

para los problemas anteriores computacionales que involucran usar el ISOMAP de manera aproximada en un subconjunto de la red original.

L-ISOMAP es una técnica de aumento/reducción de dimensionalidad que tiene algunas modificaciones con respecto al ISOMAP (Silva y Tenenmabaum, 2003). El L-ISOMAP usa un conjunto de L puntos marcadores para reducir las demandas del ISOMAP. Se considera la **Figura 2.23** con una grilla de 121 nodos. Aplicando ISOMAP para aumentar su dimensionalidad se requiere una matriz de 121×121 , mientras que con L-ISOMAP sólo los puntos marcadores serán asignados al espacio escalado, luego si usamos $L = 9$ se tendrá una solución de tamaño 9×9 .

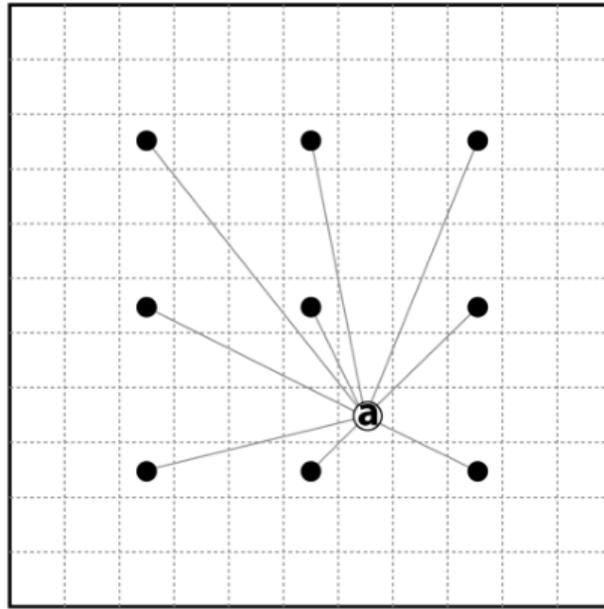


Figura 2.23: Localización de un punto a utilizando nueve distancias a puntos landmark (Boisvert, 2010).

2.6.3 Kriging y Simulación con Anisotropías Variables

Los datos de entrada necesarios para el kriging y la simulación secuencial Gaussiana serán: el campo de direcciones variables, el número de datos cercanos a considerar, el variograma isotrópico en q dimensiones, y los parámetros necesarios para realizar el L-ISOMAP.

Hay dos aspectos que hacen incrementar los requerimientos computacionales del método. El primero es que el uso de datos condicionantes previamente simulados incrementa la cantidad de datos disponibles para la búsqueda de vecinos (para el caso de la simulación), y el segundo es la implementación del algoritmo del camino más corto.

El variograma experimental puede ser calculado para valores discretos de \mathbf{h} por el emparejamiento de los datos muestreados separados por una distancia, h , y el cálculo de la

varianza. La covarianza o el variograma puede depender de la dirección de \mathbf{h} , así como la magnitud ($|\mathbf{h}|$), sin embargo, una función de covarianza isótropa se aplica para el kriging con LVA. La magnitud de la separación h entre dos lugares en el espacio se puede determinar mediante el cálculo de la distancia Euclidiana entre los lugares, una vez que se ha realizado el aumento de dimensionalidad.

Así, la adopción de una función de covarianza isótropa se justifica debido a que la incorporación del campo de direcciones de anisotropía variable elimina toda la anisotropía de los datos (Sampson y Guttorp 1992).

Finalmente, la **Figura 2.24** ilustra los pasos que el método computacional realiza. Éstos son los siguientes y son comunes tanto para la estimación como para la simulación:

1. Generar campo de direcciones variables.
2. Calcular la matriz de distancias iniciales entre puntos.
3. Usar el L-ISOMAP para usar las celdas en un espacio euclidiano de dimensiones.
4. Modelar un variograma isótropo basado en los datos en dimensiones. El variograma es usado para obtener las covarianzas entre las posiciones dado el campo de direcciones variables.
5. Para cada celda determinar los vecinos más cercanos y calcular la matriz de distancias $n \times n$ requerida.
6. Desde la matriz de distancias, calcular la matriz de covarianzas utilizando el variograma.
7. Resolver el sistema de ecuaciones y calcular el valor estimado y la varianza.

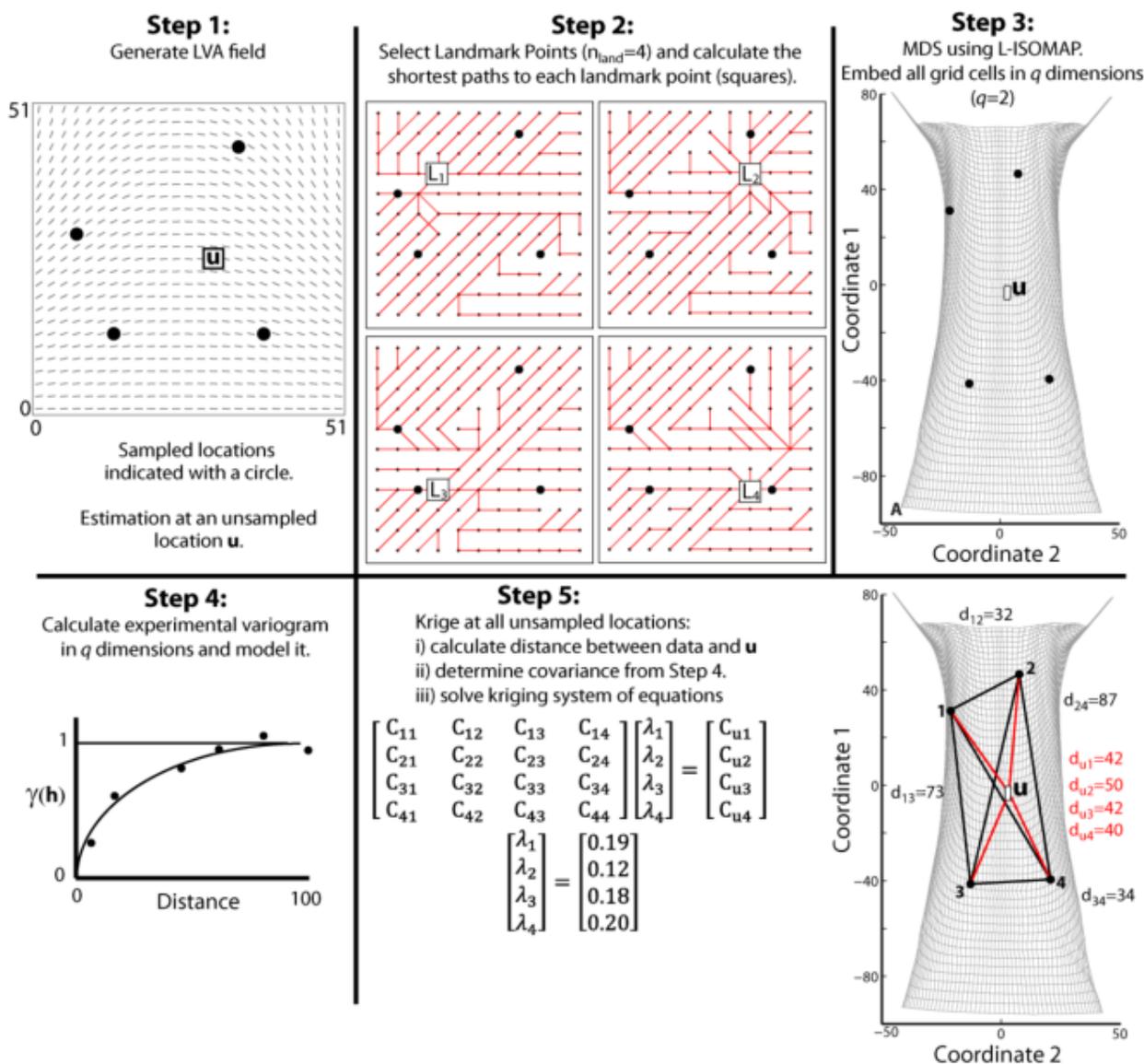


Figura 2.24: Explicación del kriging con LVA. Nótese que en el paso 5 la distancia calculada es la distancia Euclídeana entre los puntos en q dimensiones, la cual es aproximadamente la distancia del camino más corto (Boisvert, 2010).

Capítulo 3

Metodología

Como se ha mencionado con anterioridad el problema que se pretende estudiar en esta memoria corresponde a la *influencia de la densidad de muestras en la reconstrucción de cuerpos geológicos*. Se abordará el estudio de dos formas. Estas son mediante:

1. El estudio de casos sintéticos.
2. El estudio de un caso real.

3.1 Estudio de Casos Sintéticos

Esta parte busca estudiar cómo es afectada la estimación de las leyes para cuerpos geológicos con distintas geometrías. La idea es generar distintos cuerpos con formas sinusoidales en un plano en dos dimensiones, en las cuales se modifican algunos parámetros simples que determinan la geometría de éstos, tales como el espesor, periodo y amplitud. Una vez generados los cuerpos, se procede a emular una evaluación del yacimiento sintético incluyendo un campo de direcciones variables, es decir, se siguen los pasos de estudio y modelamiento variográfico, estimación y simulación y finalmente reconciliación con el cuerpo generado en primera instancia.

Para realizar el estudio de los casos sintéticos se seguirán los siguientes pasos:

1. Se genera el depósito sintético. Para esto:
 - Se generan dos distribuciones log-normales que representarán leyes de Au en unidades de partes por millón (ppm). Una distribución representará leyes de mineral mientras que la otra leyes de estéril (**Figura 3.1**). Nótese que las distribuciones se traslapan levemente para que el resultado del cuerpo geológico no tenga un cambio tan abrupto en términos de leyes entre la zonas de mineral y de estéril.
 - Se generan datos condicionantes en dos grillas de extensión unitaria en \mathbb{R}^2 es decir, de 1×1 , con una discretización de 0.02×0.02 , entregando un total de $51 \times 51 = 2601$

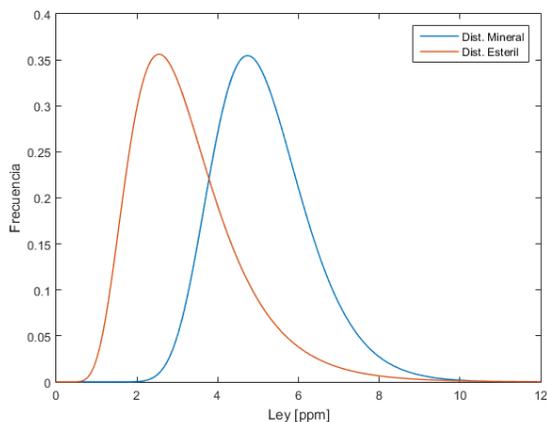


Figura 3.1: Distribuciones log-normales para depósito sintético. La distribución de mineral tiene media igual a 5 y desviación estándar de 1.26, mientras que la distribución de esteril tiene media igual a 3 y desviación estándar de 1.5.

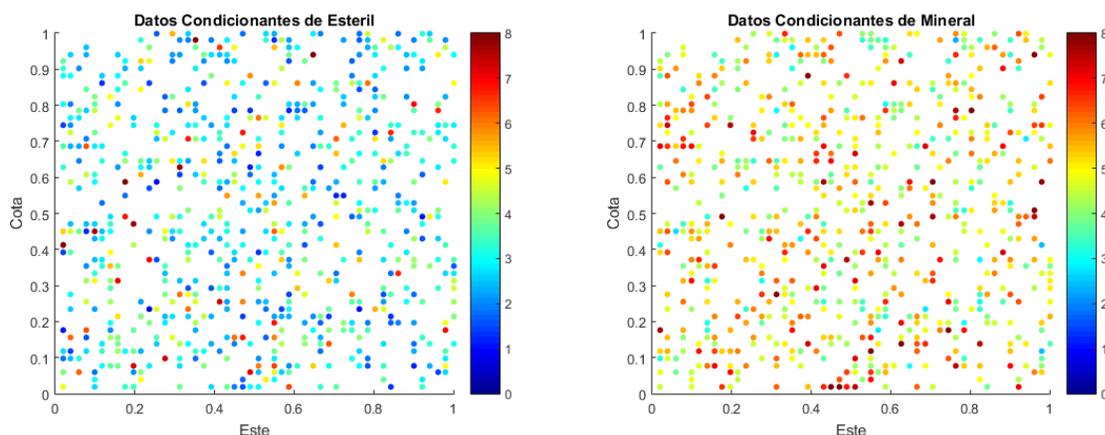


Figura 3.2: Datos condicionantes en el dominio.

nodos. Se posicionan datos condicionantes de manera aleatoria en el 30% de los nodos de cada grilla, los cuales siguen las distribuciones parametrizadas en el punto anterior (**Figura 3.2**).

- Se completa el resto de la grilla mediante una simulación de las leyes mediante la incorporación de un modelo variográfico esférico omnidireccional de alcance 2 (el doble del largo del dominio) (**Figura 3.3**).
- Se define la geometría del depósito sintético a estudiar, es decir, se define el espesor de la zona mineralizada, periodo y amplitud, para luego combinar las grillas mediante *cookie cut* (**Figura 3.4**). Así se tiene el depósito sintético final.
- El proceso anterior de generación de depósitos sintéticos se repite para espesores que van de 0.1 a 0.3, periodos que van desde 0.3 a 2 y amplitudes que van desde 0.1 a 0.4, obteniéndose así un total de 336 casos de estudio.

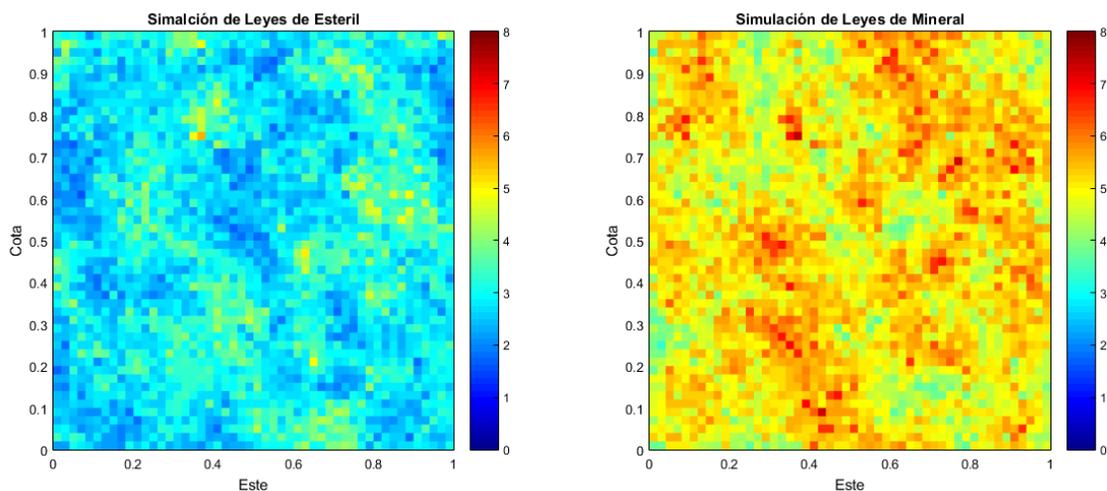


Figura 3.3: Simulación de leyes en el dominio.

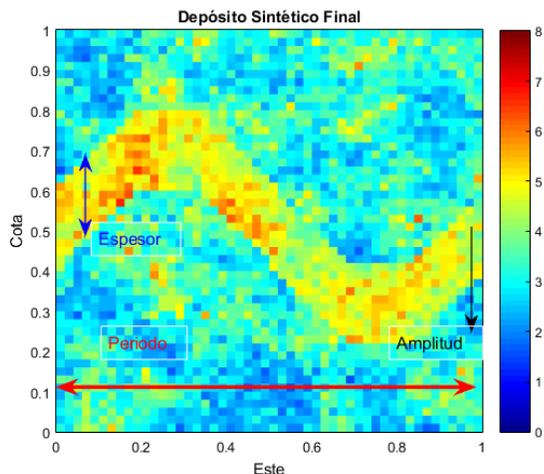


Figura 3.4: Ejemplo de depósito sintético final, de espesor igual a 0.2, periodo igual a 1 y amplitud igual a 0.2.

2. Para cada uno de los depósitos generados se obtienen las muestras mediante la emulación de la extracción de sondajes verticales en el dominio, obteniéndose así información de las leyes además del ángulo de manto en forma exacta en cada posición (**Figura 3.5 (a)**).
3. Una vez obtenido las muestras con las respectivas direcciones de anisotropía local, se procede a la estimación del campo de direcciones variables (LVA) en todo la grilla, mediante inverso de la distancia ($w = 2$) (**Figura 3.5 (b)**).
4. Se realiza el análisis variográfico calculando en primera instancia el variograma experimental bajo el campo de direcciones variables, mediante la rutina GAMV_LVA (Boisvert and Deutsch, 2010), para luego realizar un ajuste automático del variograma (**Figura**

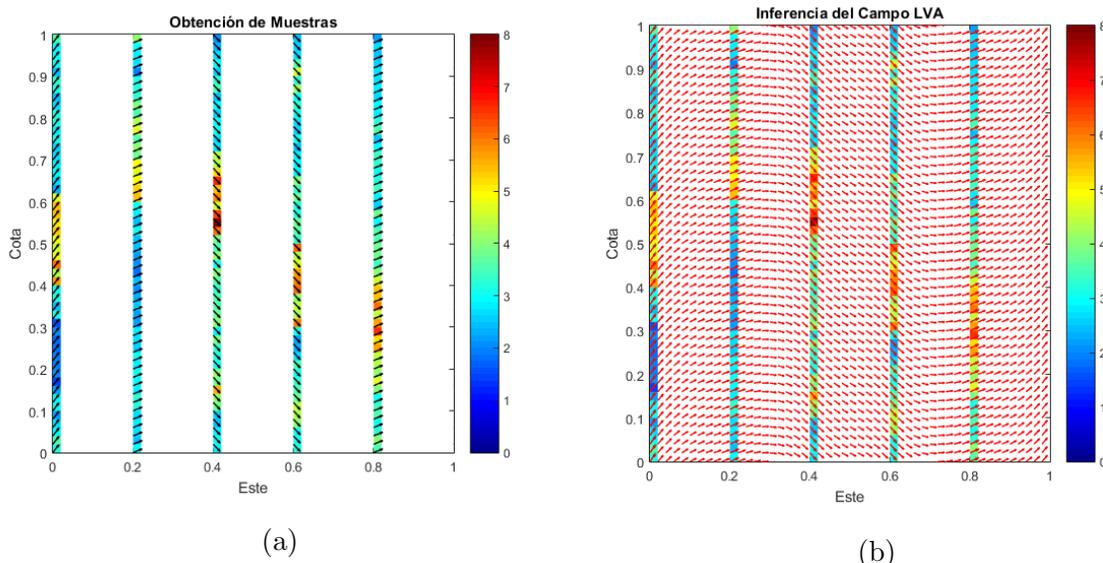


Figura 3.5: Obtención de muestras mediante sondajes verticales (a) y posterior estimación del campo LVA mediante inverso de la distancia ($w = 2$) (b).

3.6). En la **Tabla 3.1** se presentan los parámetros para el cálculo variográfico.

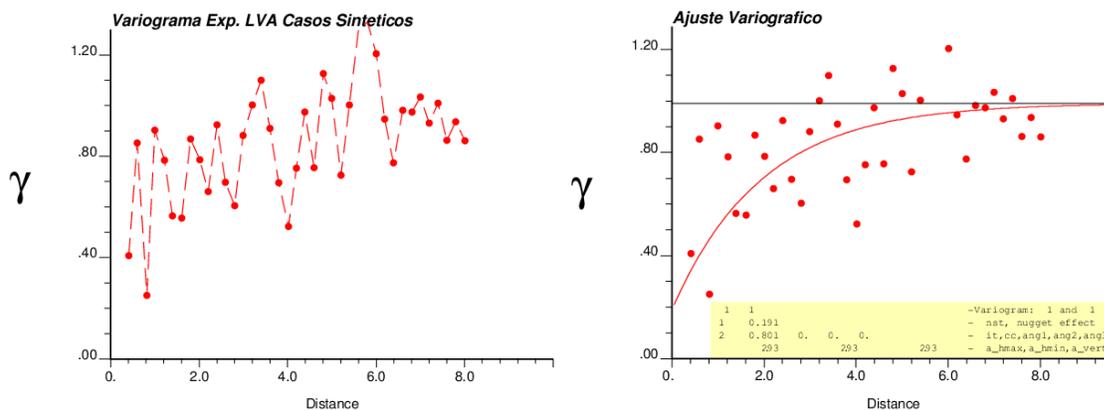


Figura 3.6: Cálculo y ajuste del variograma LVA en forma automática.

Número de pasos	40
Distancia de paso	0.2
Tolerancia de paso	0.1
Núm. de offsets	2
Núm. de puntos landmark (x, y, z)	10 1 10
Máx. núm. de dimensiones a usar	El máximo

Tabla 3.1: Parámetros para el cálculo del variograma LVA.

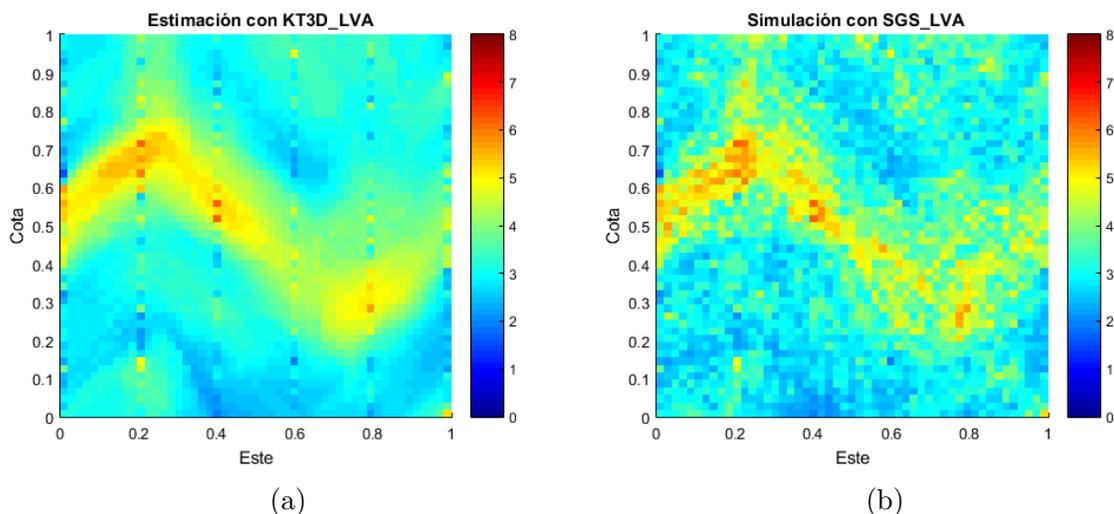


Figura 3.7: Estimación (a) y simulación (b) con LVA.

- Se procede a la realización de la estimación de las leyes en la grilla mediante la rutina KT3D_LVA (**Figura 3.7 (a)**). En la **Tabla 3.2** se presentan los parámetros de entrada para la realización de la rutina.

Núm. de offsets	2
Núm. de puntos landmark (x, y, z)	10 1 10
Máx. núm. de dimensiones a usar	El máximo
Datos min. y máx. para kriging	2 10
Radio de búsqueda máx.	2
Tipo de kriging	Ordinario

Tabla 3.2: Parámetros para rutina KT3D_LVA.

- Luego se procede a la realización de simulaciones de las leyes en la grilla mediante la rutina SGS_LVA (**Figura 3.7 (b)**). En la **Tabla 3.3** se presentan los parámetros de entrada para la realización de la rutina. Para esto se transforman los datos a valores normales mediante anamorfosis Gaussiana, y se realiza el ajuste variográfico de los valores normales en forma automática.
- El último paso consiste en proceder con el análisis del rendimiento de las estimaciones y simulaciones. Para ésto, se realizan validaciones cruzadas para el caso de la estimación y reconciliación con las leyes conocidas del depósito sintético generado para el caso de la simulación. Además se realiza un análisis en términos de la posición media del cuerpo en el espacio y su desviación con respecto al depósito original. Para ésto, se

Núm. de realizaciones	10
Núm. de offsets	2
Núm. de puntos landmark (x, y, z)	10 1 10
Máx. núm. de dimensiones a usar	El máximo
Datos min. y máx. para kriging	2 10
Radio de búsqueda máx.	2
Tipo de kriging	Ordinario

Tabla 3.3: Parámetros para rutina SGS_LVA.

contruye una métrica que nos indique la posición del cuerpo en la vertical en función de la coordenada X , de la siguiente manera:

$$Posición\ media\ vertical = \frac{\sum_{i(x)} (ley\ del\ bloque\ i)^n \cdot y_i}{\sum_{i(x)} (ley\ del\ bloque\ i)^n},$$

con $i(x)$ igual a los bloques en la dirección vertical para la coordenada X .

La métrica es una especie de momento de inercia de las leyes en la vertical. La diferencia al cuadrado de la posición media entre cuerpo original y el depósito esperado de las realizaciones será el error a medir, de manera de cuantificar si se logra reproducir la figura original del depósito (**Figura 3.8**). Se decide escoger un exponente $n = 10$. Finalmente se analiza la diferencia en la cantidad de finos entre la realidad sintética y el promedio de las simulaciones.

3.2 Estudio de un Caso Real

Esta parte del estudio busca comparar la metodología clásica de estimación de leyes en un depósito, es decir, la metodología en donde se incorpora sólo una dirección principal de anisotropía, con la metodología que incorpora un campo de direcciones variables, de manera de determinar si existen mejoras en términos de precisión y exactitud en la estimación.

Para realizar el estudio en un caso real se seguirán los siguientes pasos:

1. Se comienza con el estudio exploratorio de las bases de datos de sondajes y pozos de tronadura. Se despliegan visualizaciones, de modo de encontrar cualquier dato aberrante, además de obtener las dimensiones de las zonas muestreadas y dominios de estimación.

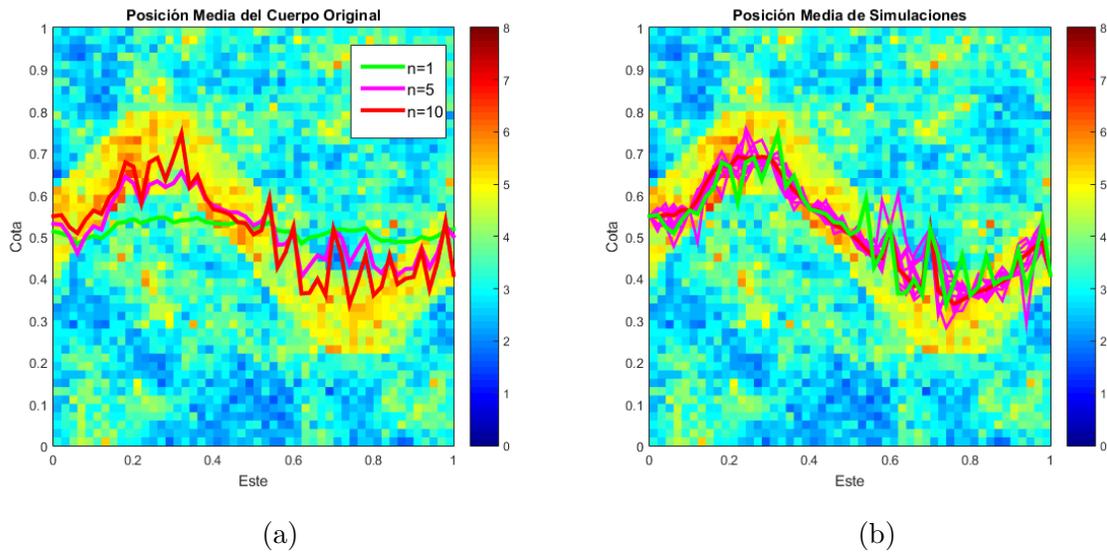


Figura 3.8: Posición media del cuerpo en la vertical obtenida por la ponderación de la posición con la ley a alguna potencia n . En (a) se muestra como varía la métrica para distintas potencias. En (b) se compara el promedio de la posición promedio de las simulaciones (rojo) con la del depósito sintético original (verde).

2. Se prosigue con la estimación de leyes mediante la metodología clásica, para la validación del plan de kriging, realizando el modelamiento variográfico de leyes y la estimación, la cual se valida mediante validación cruzada y jackknife en las zonas de muestreo de los pozos de tronadura.
3. La siguiente etapa es realizar las simulaciones de las leyes del yacimiento mediante la metodología convencional SGSIM (Deutsch and Journel, 1998) mediante adecuados parámetros de búsqueda y una anisotropía global que represente al yacimiento. Se validan las hipótesis de Multi-Gaussianidad de las leyes, para luego realizar simulaciones de éstas. Se valida la precisión de estas simulaciones realizando una reconciliación contra base de pozos de tronadura.
4. Se prosigue con la estimación y simulaciones realizadas con la metodología de direcciones variables. Se comienza con la generación del campo de direcciones variables del yacimiento mediante la estimación por inverso de la distancia a partir de direcciones condicionantes, de manera de caracterizar la forma de los estratos del yacimiento.
5. Se realizan las simulaciones geoestadísticas con la metodología de direcciones variables, llamada SGS_LVA. Todas las realizaciones se validan en reconciliación contra base de datos de pozos de tronadura.
6. Finalmente, se hace una comparación entre las precisiones logradas por método SGS_LVA de direcciones variables versus las precisiones obtenidas inicialmente por el método convencional SGSIM.

Capítulo 4

Caso de Estudio Sintético

Se presentan a continuación los resultados del estudio para casos sintéticos. Los resultados se abordan desde un enfoque estadístico, de manera de indentificar la precisión lograda , y luego desde el punto de vista de la planificación minera.

4.1 Resultados

Se presentan, en primer lugar, los resultados de la validación cruzada, para el caso de la estimación mediante la rutina KT3D_LVA. Para el promedio de los errores, en cada una de las estimaciones por separado, se observa que, en todos los casos este fue positivo, es decir que, en promedio, se sobre estimó la ley de los bloques (**Figura 4.1**). Se puede apreciar, sin embargo, que la desviación es, en promedio, leve (cercano a 0.2 ppm) e independiente del espesor, periodo y amplitud. Sólo existe un aumento en la dispersión de los resultados a medida que se aumenta el espaciamiento de los sondajes, lo que es un comportamiento esperado.

La correlación de los valores estimados con los valores originales es alta para todos los casos, e independiente del periodo y la amplitud que alcanzan los cuerpos. Sólo hay fluctuaciones leves cuando hay cambios en el espesor, incrementándose la correlación a medida que éste aumenta, así como hay un incremento en la densidad de información. La correlación, cuando se mueven estas variables, aumenta de aproximadamente 0.7 a 0.9 en promedio, y disminuye la dispersión de los resultados (**Figura 4.2**).

Para el caso de las simulaciones mediante la rutina SGS_LVA, para cada una de las 10 realizaciones por caso llevadas a cabo, se calculó la correlación existente entre la ley asignada a los bloques con las de los modelos originales. Luego se calculó el promedio de los coeficientes de correlación para cada caso (**Figura 4.3**).

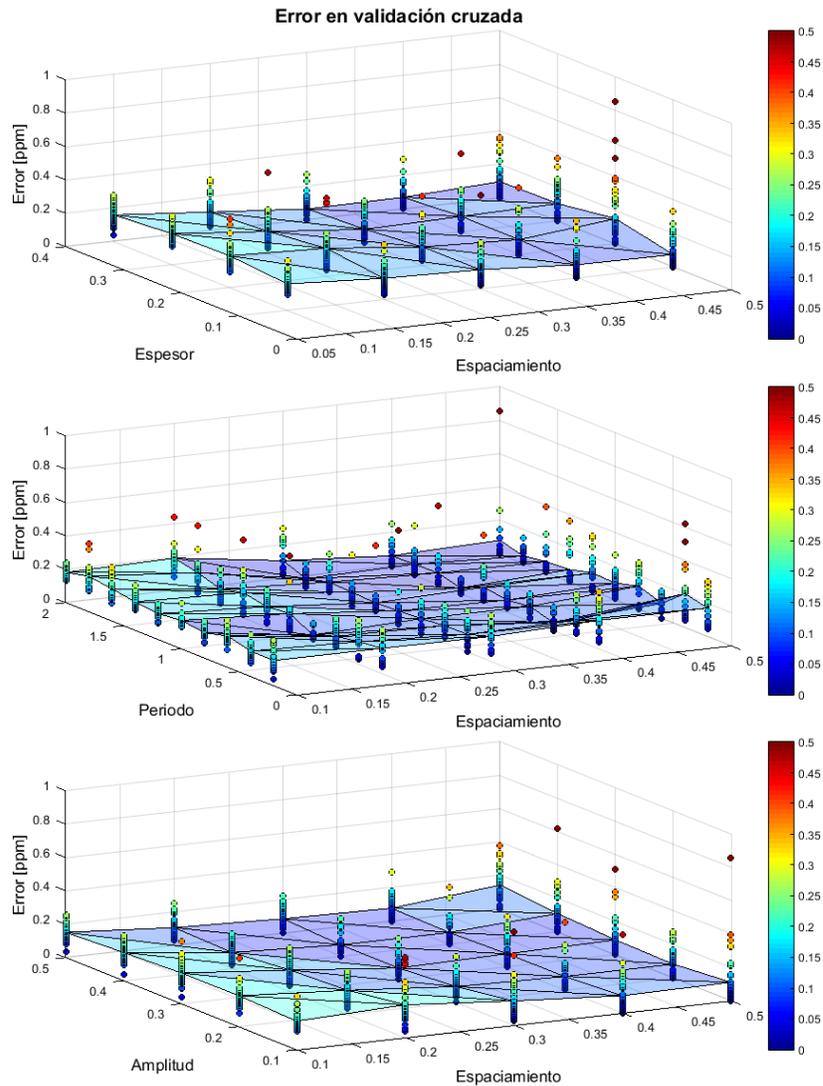


Figura 4.1: Errores de validación cruzada en ppm. Se presentan en puntos el error para cada una de las estimaciones en función de las variables independientes, y en superficie el promedio. Arriba se muestra el error en función del espesor; al medio en función del periodo; y abajo en función de la amplitud del cuerpo mineralizado, para distintos espaciamientos.

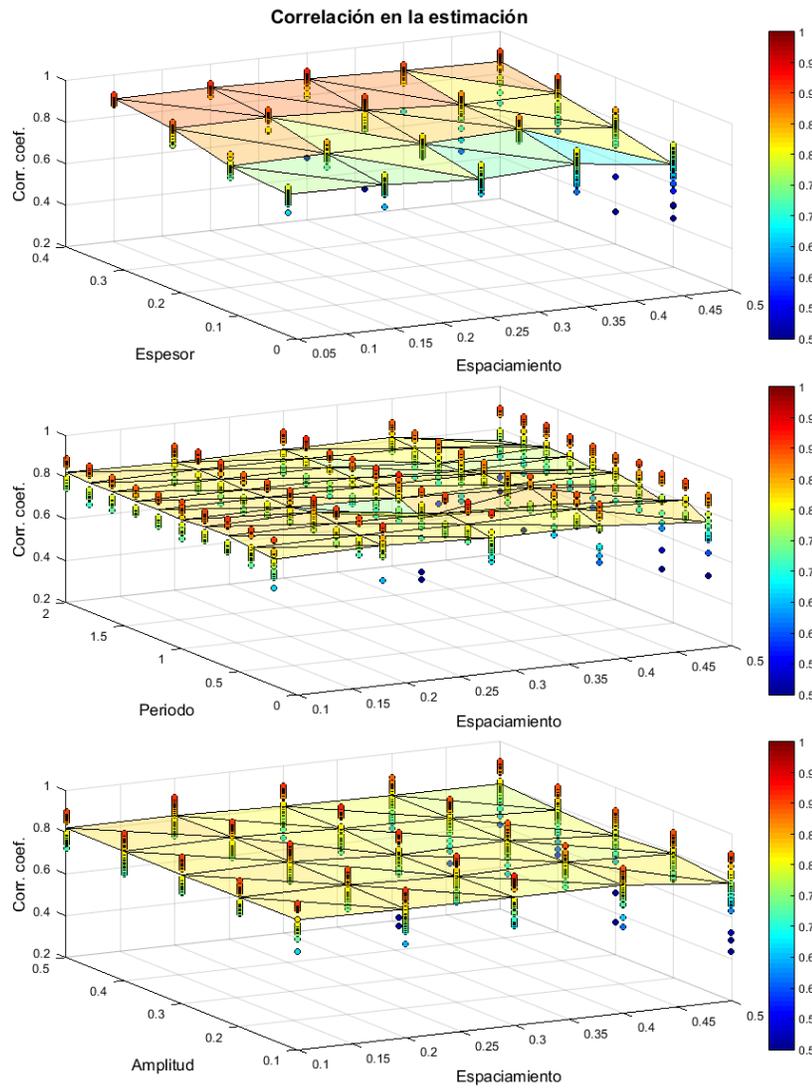


Figura 4.2: Correlación entre leyes de bloques estimados y del depósito sintético original. Arriba se muestra la correlación en función del espesor; al medio en función del periodo; y abajo en función de la amplitud del cuerpo mineralizado, para distintos espaciamientos.

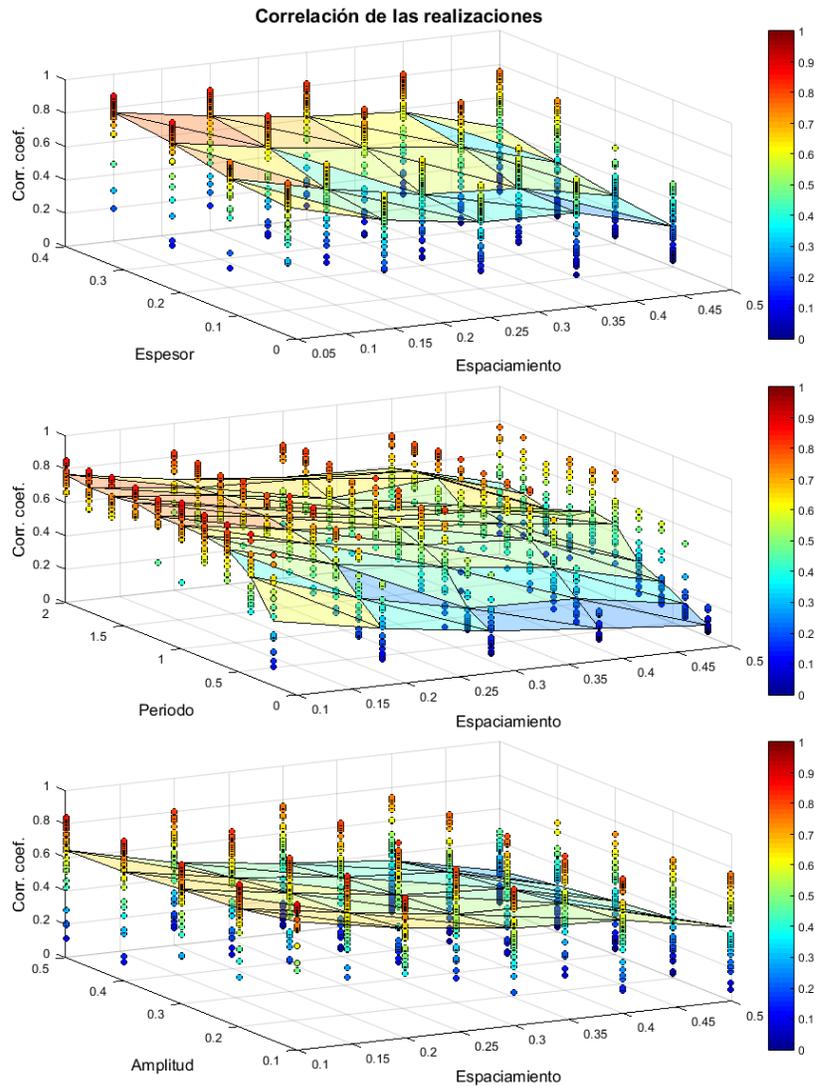


Figura 4.3: Correlación entre leyes de bloques simulados, entre cada una de las realizaciones y del depósito sintético original. Arriba se muestra la correlación en función del espesor; al medio en función del periodo; y abajo en función de la amplitud del cuerpo mineralizado, para distintos espaciamentos.

Se observa que la correlación es altamente sensible a las variables independientes analizadas. Para el caso de la variable espesor, se tiene que la correlación aumenta, en promedio, de 0.4 a 0.8 a medida que se incrementa el espesor y se disminuye el espaciamiento. Para el caso del periodo la variación es aún mayor, partiendo de un bajo valor de 0.1 y llegando a valores cercanos a 0.8, con una apreciable disminución en la dispersión de los resultados.

En términos de la estimación de la posición media del cuerpo en el espacio, se observa que el error cometido es altamente sensible a las variables analizadas. Para la variable espesor, se tiene que el error se mantiene bajo en términos del promedio de los resultados, siendo sólo sensible al espaciamiento entre sondajes, sin embargo, la dispersión de los datos sí se ve afectada, aumentando cuando el espesor se hace mayor. Esto se justifica debido a que, para cuerpos con mayor espesor, mayor es la probabilidad de distribuir de distinta forma valores extremos de leyes en el espacio, cambiando así la posición media de éstos, mientras que para cuerpos delgados, la zona de valores extremos es más limitada. Para el periodo se observa mayor independencia del error con respecto al espaciamiento de los sondajes, pero sí alta sensibilidad en los resultados para bajos periodos, en donde, tanto el promedio como la dispersión de los resultados, se ven incrementados. Lo anterior se debe a que para figuras con altas frecuencias se presentan mayores dificultades a la hora de estimar un buen campo de direcciones, necesitándose alta cantidad de sondajes para hacer una buena estimación de los cuerpos. Con respecto a la variable amplitud, se observan que el promedio del error y la dispersión en los resultados crece para mayores amplitudes y mayores espaciamientos entre sondajes (**Figura 4.4**).

Para estudiar los resultados desde un enfoque de planificación minera, se mide el desempeño obtenido considerando la precisión obtenida en la predicción de la cantidad de metal. Utilizando la información del depósito sintético original guardado para la validación, se calcula la cantidad de metal considerando una ley de corte de 4 ppm, y un peso unitario para cada bloque. El resultado se compara en términos porcentuales con la simulación de los depósitos. Los resultados se muestran en la **Figura 4.5**. Se observa que la cantidad de metal es subestimada en términos del promedio de los casos, y con leves variaciones para las variables independientes analizadas, viéndose mayores aumentos en la dispersión de los resultados a medida que se aumenta el espaciamiento entre sondajes.

4.2 Discusión

En términos generales, los resultados entregados presentan los comportamientos esperados en función del espesor, periodo y amplitud, para distintos espaciamientos entre sondajes. Para el caso de la simulación con direcciones variables, se puede decir que el factor

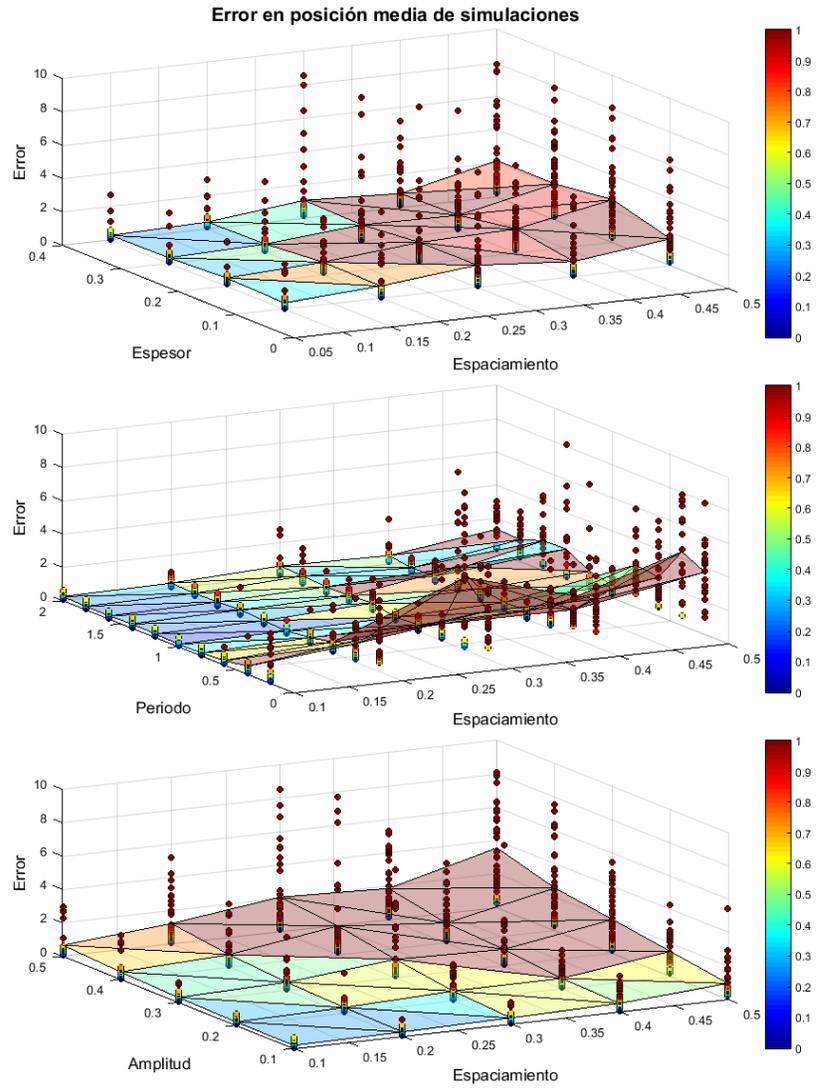


Figura 4.4: Error en posición media de los cuerpos simulados.

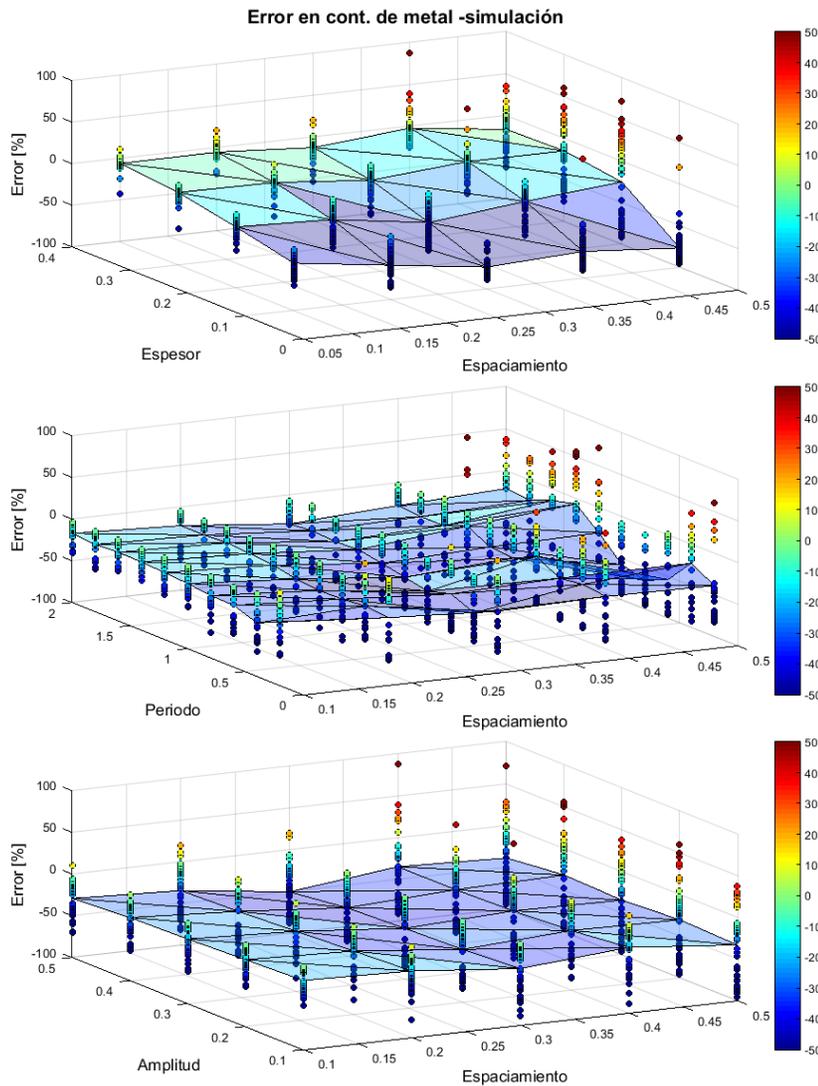


Figura 4.5: Error en contenido de metal, para una ley de corte sobre 4 ppm. Arriba se muestra el error en función del espesor; al medio en función del periodo; y abajo en función de la amplitud del cuerpo mineralizado, para distintos espaciamientos.

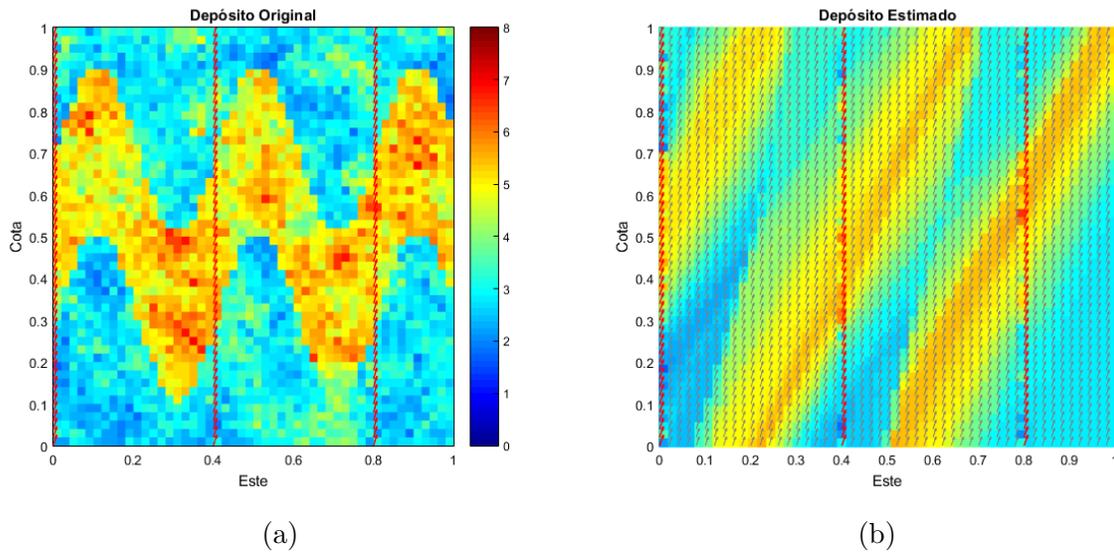


Figura 4.6: Posición media del cuerpo en la vertical obtenida por la ponderación de la posición con la ley a alguna potencia n . En (a) se muestra como varia la métrica para distintas potencias. En (b) se compara el promedio de la posición promedio de las simulaciones (rojo) con la del depósito sintético original (verde).

más sensible es el periodo de las figuras sintéticas, ya que la variación leve entre el espaciamiento entre sondajes puede provocar una mala interpretación del depósito y en el campo de direcciones (**Figura 4.6**). Es clave incorporar siempre más sondajes de reconocimiento para evitar malas interpretaciones y, consecuentemente, malas estimaciones de las leyes producto de un mal estimado campo de direcciones variables.

Capítulo 5

Caso de Estudio Real

Este capítulo presenta un estudio llevado a cabo con información de un depósito de tipo pórfido cuprífero en Chile. El objetivo es mostrar las diferencias obtenidas en la estimación realizada mediante la metodología tradicional, es decir, mediante el uso de Kriging Ordinario, y la propuesta, mediante la incorporación de un campo de direcciones variables.

El estudio es introducido en la **Sección 5.1**. Una descripción de la información disponible y estadísticas básicas de los sondeos y de los pozos de tronadura son presentados en la **Sección 5.2**.

Se comienza realizando la estimación mediante la metodología convencional en la **Sección 5.3**. Luego se realiza la estimación mediante la metodología que incluye direcciones variables en la **Sección 5.4**. Finalmente se comparan los resultados en la **Sección 5.5**.

5.1 Introducción

El objetivo de este caso de estudio es mostrar el mejoramiento de los modelos de leyes para los planes mineros, cuando se considera información adicional como un campo de direcciones variables. El método es comparado en términos de las diferencias que se logran con un modelo de kriging, y se validan con la información de datos de pozos de tronadura. También se realiza simulación secuencial Gaussiana y se compara con el método tradicional, altamente utilizado en minería.

5.2 Información Disponible y Estadísticas Básicas

Para este estudio se cuenta con dos bases de datos de una mina de cobre. La información ha sido levemente alterada para proteger su origen; sin embargo, la ubicación espacial de los datos se mantiene. Por razones de confidencialidad, la ubicación exacta y la geología de los datos no pueden ser expuestas en esta memoria.

Se provee una base de datos de 610 sondajes para las variables Cu total, Cu soluble, y Au, entre otros elementos, conteniendo más de 7300 datos; sin embargo, sólo se considerará la variable Cu total (simplemente denotado como Cu). Los datos están localizados en un volumen definido entre 70880 y 74400 en la coordenada Este, 82105 y 84364 en la coordenada Norte, y 2102 y 2471 en la coordenada de elevación. La información está bastante espaciada. El espaciamiento aproximado de la malla de sondaje es de 150 m, aunque existen zonas en donde se hace más densa. La mayoría de los sondajes son verticales, variando levemente en buzamiento. Se entrega una clasificación por dominios, separando la información en dos unidades de estimación.

La segunda base de datos contiene información de pozos de tronadura en cerca 2600 de locaciones. El rango de coordenadas va desde los 71808 a los 73933 en la dirección Este, de los 82904 a los 83850 en la dirección Norte, y de los 2295 a los 2455 en la elevación. Los pozos de tronadura están regularmente espaciados en una grilla cuadrada en donde la distancia de separación es de 8 m.

Finalmente se cuenta con el modelo de bloques de la mina, del cual no se utilizará la información de las leyes reportadas, pero si la categoría de los bloques, de manera de cuantificar la cantidad de finos asociada a la categoría de mixtos, la cual será objeto de estudio de esta memoria.

Se presenta en la **Figura 5.1** la disposición espacial correspondiente a los sondajes por dominio, los pozos de tronadura, y se muestra la grilla correspondiente a los bloques a estimar para la mineralogía de tipo mixto.

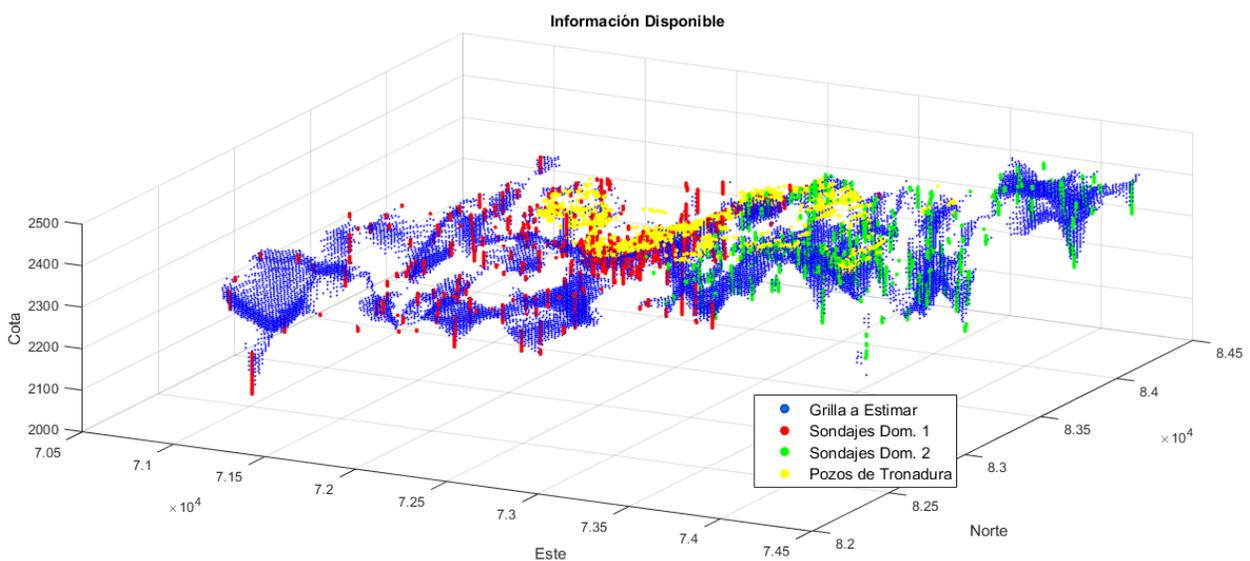


Figura 5.1: Información disponible de sondajes, pozos de tronadura y grilla.

5.2.1 Información de Sondajes

Esta base de datos contiene compósitos de largo equivalente a 2 m. Para esta información se incluye coordenadas Este, Norte, y elevación, ley de cobre total y soluble en porcentaje de peso, entre otros minerales. Existen codificaciones para el tipo de mineral, litología y alteración. La mineralogía se clasifica en: cobertura, lixiviado, óxido, sulfuros, mixto, hipógeno, y sin clasificación. Sin embargo, para el estudio sólo es de interés la mineralogía de tipo mixto, la cual posee mayor contenido de Cu. Por lo tanto, el estudio sólo considerará este tipo de datos. A su vez existen dos áreas principales en el depósito, los cuales se clasifican como dominio 1 (D1) y dominio 2 (D2). El estudio se realizará para ambos dominios en forma separada para hacer el estudio más exhaustivo y cercano a los procedimientos reales de la evaluación de recursos.

La **Figura 5.2** muestra el histograma y el gráfico de probabilidad considerando el total de las muestras correspondientes a la mineralogía de tipo mixto. El rango de los datos va desde 0 a cerca de 4 %Cu y la distribución es levemente asimétrica negativamente. El coeficiente de variación es aproximadamente 0.6, lo cual se puede considerar relativamente bajo. El gráfico de probabilidad se presenta para comparar la distribución de ley con una distribución lognormal. Se puede observar un quiebre claro de la línea, indicando comportamientos diferente de las leyes bajas y altas. En principio se podría pensar que es debido a la mezcla de dominios que se hace para el análisis. Sin embargo, al realizar la separación por dominios (**Figura 5.3**), se observa que el quiebre es propio de los datos en ambos dominios por separado, siendo el quiebre más suave para el dominio 2 que en el del 1. Se muestra que la media de los datos es más alta en el dominio 1 (0.51 %Cu versus 0.39 %Cu del dominio 2), además del mayor rango de los datos.

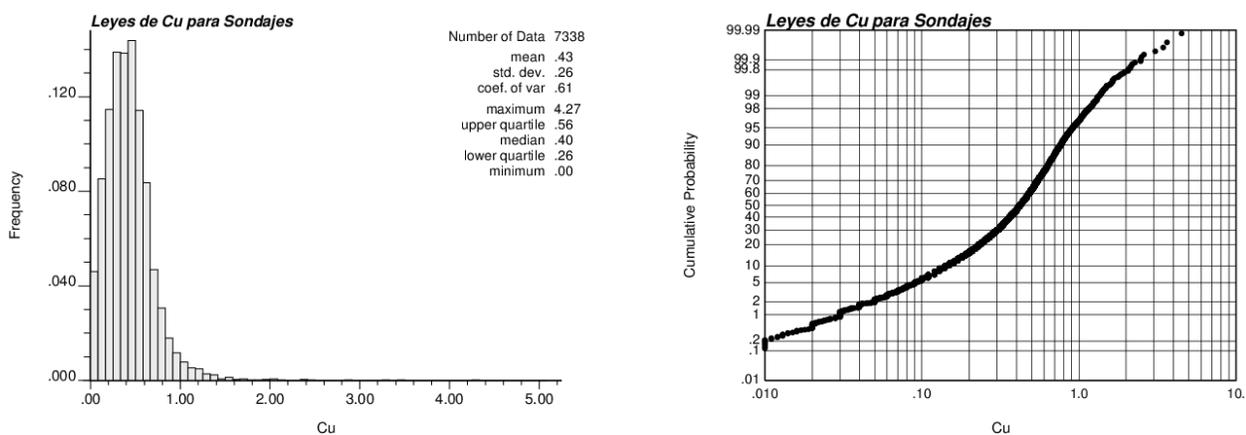


Figura 5.2: Histograma y gráfico de probabilidad de la ley de cobre para el total de datos de sondajes.

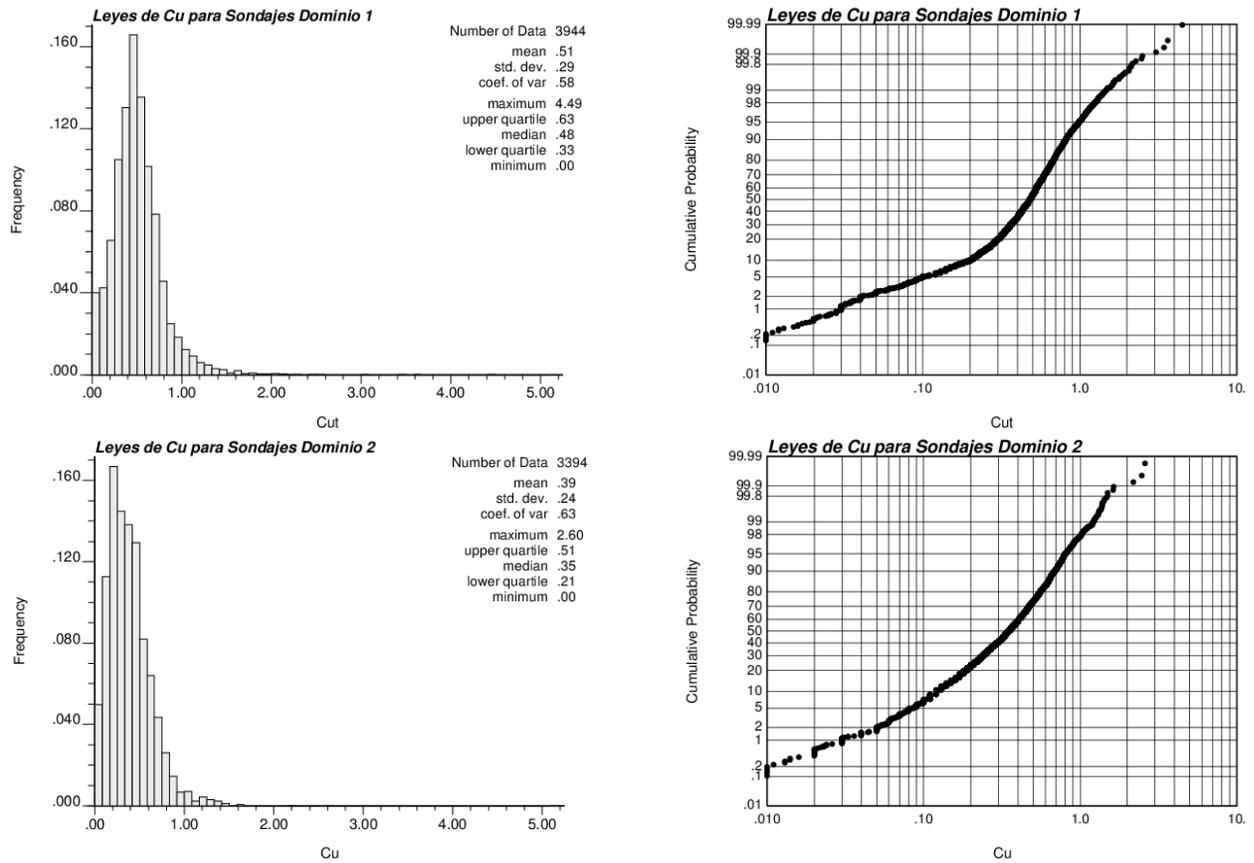


Figura 5.3: Histograma y gráfico de probabilidad de la ley de cobre para sondajes: dominio 1 (arriba) y dominio 2 (abajo).

Los sondeos se muestran en la **Figura 5.4**. Estos mapas son proyecciones de todas las muestras en el plano horizontal, plano vertical a lo largo de la dirección Este-Oeste, y en el plano horizontal lo largo de la dirección Norte-Sur. Nótese que en la proyección en el plano horizontal, los sondeos verticales aparecen como un punto, debido a que las proyecciones de las muestras del sondeo caen en el mismo punto del plano.

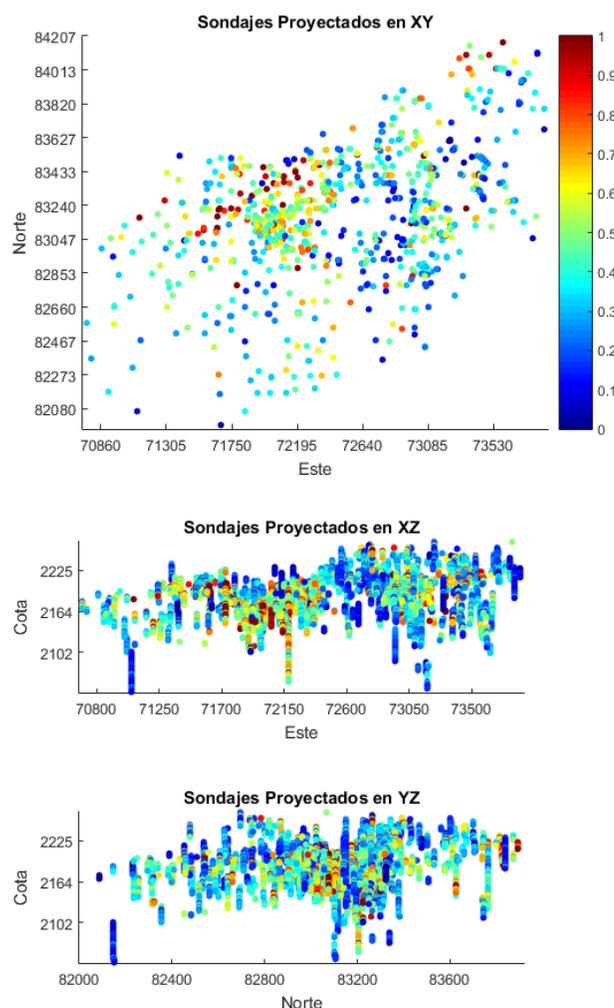


Figura 5.4: Proyección de los sondeos en el plano horizontal, vertical a lo largo de la dirección Este-Oeste, y en el plano vertical a lo largo de la dirección Norte-Sur.

Se muestran algunas vistas en corte en la **Figura 5.5**. Se muestran las plantas con una tolerancia de 10 m. El espaciamiento entre sondeos es cercano a los 150 m. En algunas zonas el espaciamiento es menor.

Se muestra una planta de la separación por dominios en la **Figura 5.6**. En blanco se muestran las muestras del dominio 1, mientras que en negro se muestran las del dominio 2. Es claro que la separación entre dominios es en la dirección Este-Oeste.

5.2.2 Información de Pozos de Tronadura

Los pozos de tronadura son perforaciones del largo de la altura de banco más cerca del 10% de sobre perforación (pasadura). Sin embargo, una vez que se alcanza el largo de la altura de banco en la perforación (que en este caso es de 10 m), la sobre perforación no se incluye en la muestra.

El histograma para los pozos de tronadura considerados para este estudio acompañado del gráfico de probabilidad lognormal son presentados en la **Figura 5.7**. Proyecciones de los pozos de tronadura en los planos horizontal, vertical a lo largo de la dirección Este-Oeste, y

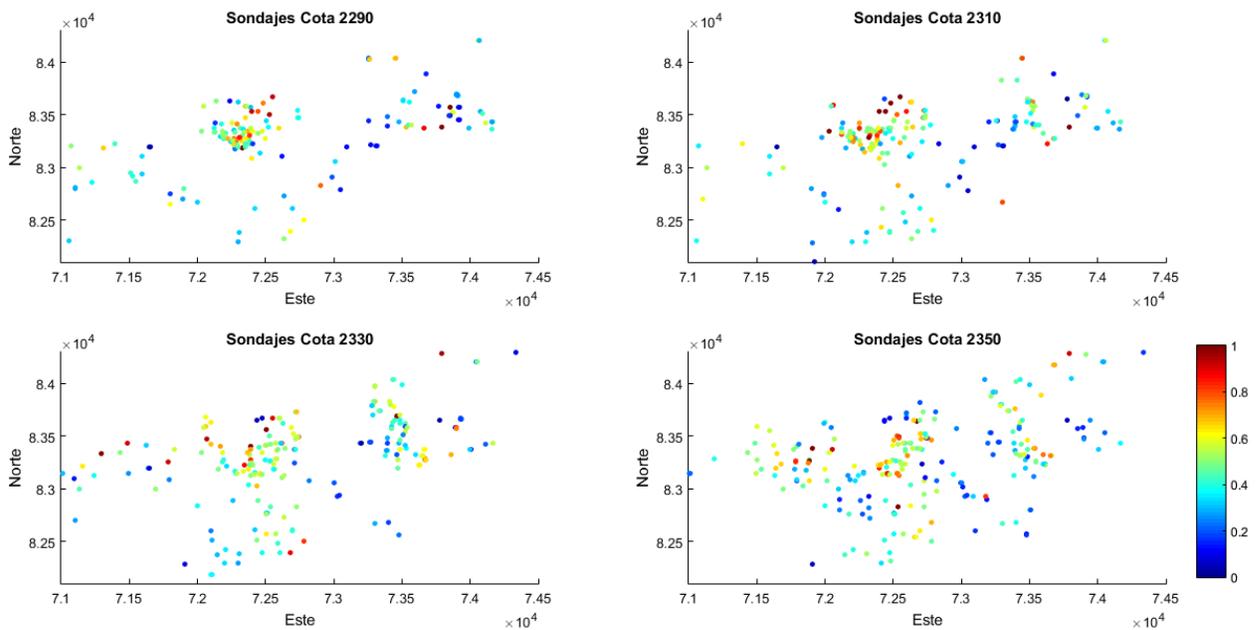


Figura 5.5: Vista en corte de plantas horizontales mostrando la información de sondajes.

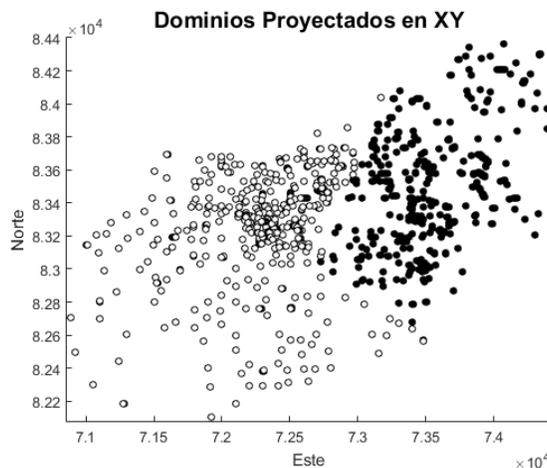


Figura 5.6: Vista en planta que muestra en blanco las locaciones de los sondajes del dominio 1, y en negro las del dominio 2.

en el plano vertical a lo largo de la dirección Norte-Sur se muestran en la **Figura 5.8**.

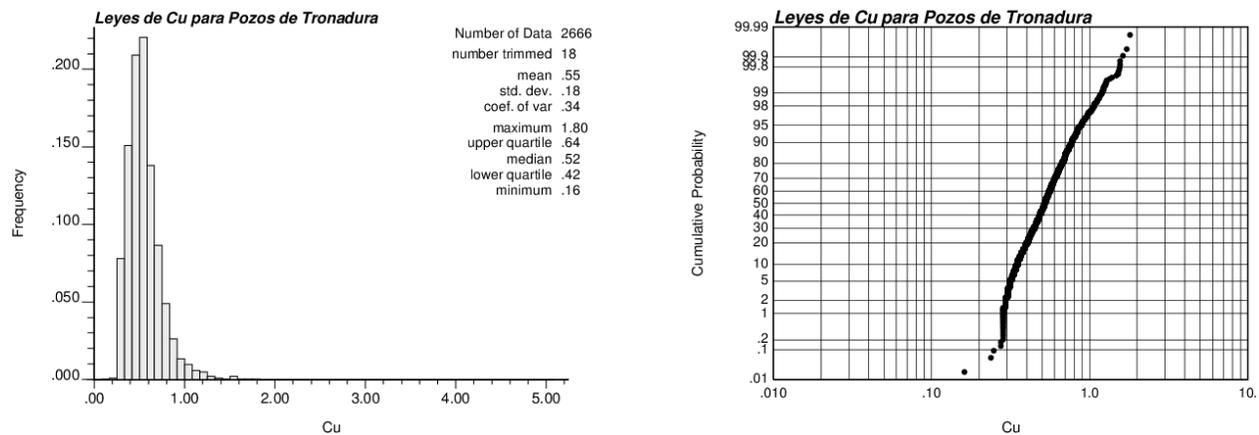


Figura 5.7: Histograma y gráfico de probabilidad de la ley de cobre para los pozos de tronadura.

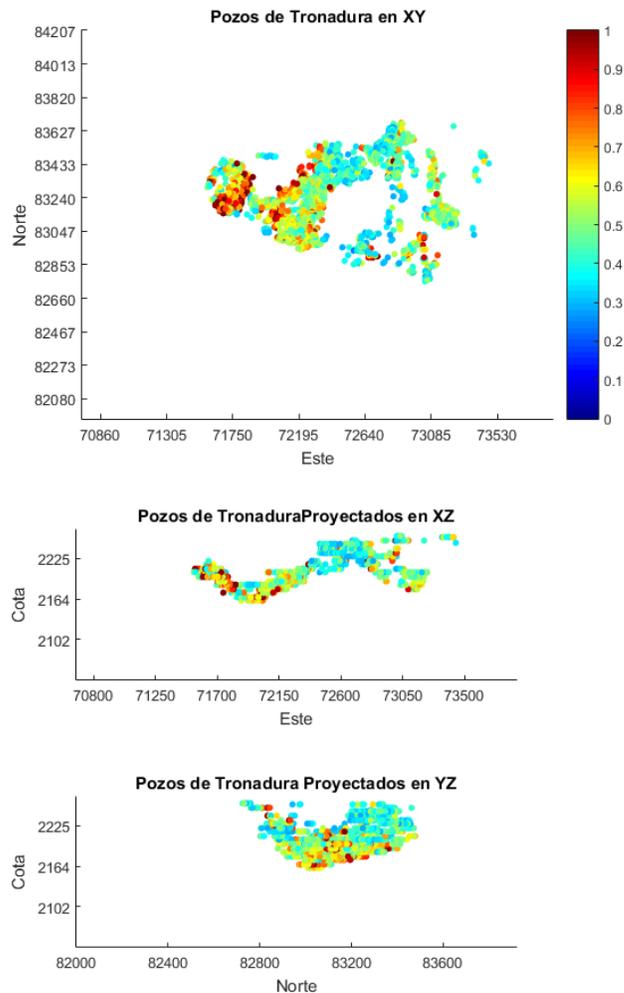


Figura 5.8: Proyección de los pozos de tronadura en el plano horizontal, vertical a lo largo de la dirección Este-Oeste, y en el plano vertical a lo largo de la dirección Norte-Sur.

La información de los datos de los pozos de tronadura quedará aparte de los procedimientos de inferencia y estimación, debido a que se utilizarán para una comparación final del desempeño de los métodos empleados.

5.2.3 Desagrupamiento

Se requiere desagrupar los datos para obtener una distribución de referencia representativa para la simulación. A pesar de que las muestras de los sondajes parezcan espaciadas de forma regular, es difícil juzgar visualmente si las zonas de mayor o menor ley están sobre muestreadas. Se realiza, por lo tanto, un desagrupamiento para encontrar el tamaño de celda adecuado. Dado el espaciamiento de los datos, es utilizada una celda anisotrópica con una razón de tamaño horizontal sobre vertical de 75 a 1, debido a que el espaciamiento vertical es de 2 m y el espaciamiento de los sondajes es cercano a 150 m. El tamaño de celda más apropiado para obtener una distribución representativa es de $150 \times 150 \times 2 \text{ m}^3$ (**Figura 5.9**), dado que se toma como decisión elegir una celda correspondiente al espaciamiento promedio entre los datos o a la malla de muestreo subyacente.

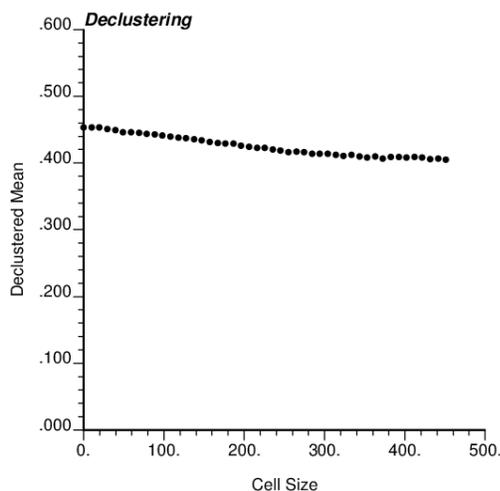


Figura 5.9: Tamaño de celda versus media del desagrupamiento. Se considera que el tamaño de celda óptimo es de 150 m en las direcciones horizontales.

El histograma desagrupado para los sondajes considerados para este estudio es presentado en la **Figura 5.10**. Se observa que el histograma representativo de los datos, considerando los ponderadores, muestra una disminución del valor medio de 0.43 %Cu a 0.41 %Cu para el total de sondajes. El estadístico considerado por zona baja de %Cu 0.51 %Cu a 0.48 %Cu para el dominio 1 y de 0.39 %Cu a 0.38 %Cu para el dominio 2, y la varianza permanece casi constante para ambos dominios. La reducción de la media es menor al 10% en todo los casos, lo que se considera dentro del rango normal para el tipo de depósito, e indica que el desagrupamiento no tiene mayor impacto en las estadísticas globales.

Los ponderadores de desagrupamiento serán utilizados para corregir el valor de la función de distribución acumulada debajo de cada umbral.

5.2.4 Comparación entre Set de Datos

La información de los sondeos y los pozos de tronadura puede ser comparada de distintas maneras:

Distribución global Ambas distribuciones pueden ser comparadas por un gráfico cuantil contra cuantil (**Figura 5.11**). Si las distribuciones son iguales, se graficará una recta con pendiente igual a uno que intersecta el origen. Cualquier desviación de los 45 grados refeja diferencias en las distribuciones. Para el caso de comparar la distribuciones de los sondeos con los pozos de tronadura, se observa que las distribuciones poseen la misma forma, pero no la misma dispersión ni la misma media. Uno de los factores causantes de lo anterior podría ser la diferencia de soporte entre los sets de datos. Además, es importante mencionar que el menor cuartil se alcanza para una ley de 0.26 %Cu para los datos de sondeos, mientras que para los datos de los pozos de tronadura se alcanza para una ley de 0.42 %Cu. Nótese que el dominio sobre el cual se distribuyen los sondeos es mucho más grande que el volumen informado por los pozos de tronadura.

Distribución espacial Cada muestra de los pozos de tronadura puede ser asociada a la muestra más cercana de sondeos. Una nube de correlación de los pares puede dar una idea de la correlación espacial, la cual debería ser alta pero no uno, debido al error de muestreo para ambos tipos de muestra, el efecto pepa, y la tolerancia en la distancia, que hacen que la correlación disminuya. Se puede apreciar en la **Figura 5.12** los gráficos de las muestras cruzadas para tres tolerancias incrementales entre el espaciamiento de los datos. El número de pares encontrados crece mientras se aumenta la tolerancia del espaciamiento. La correlación es baja, lo que indica que la poca relación entre las bases de datos. Se puede notar que las

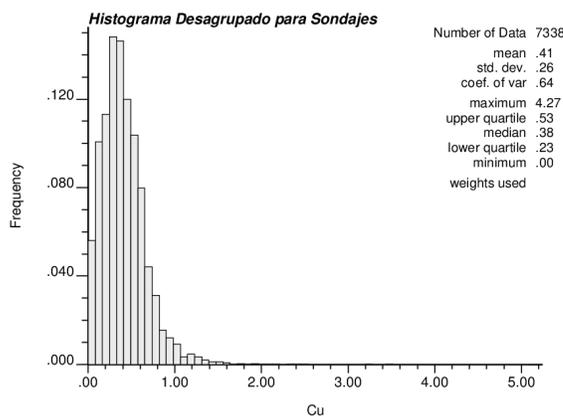


Figura 5.10: Histograma para los datos de sondeos desagrupados.

medias de los datos de los sondeos y los pozos de tronadura se acercan a medida que se encuentran más muestras. Cuando se utiliza una tolerancia de 10 m, las medias son casi iguales.

Derivas En términos generales, los sondeos y los pozos de tronadura deberían mostrar las mismas tendencias de leyes cuando se observan los promedios de leyes en forma local en las distintas direcciones. Se observan los gráficos de de las medias y varianzas locales a lo largo de las tres direcciones principales en las **Figuras 5.13, 5.14, y 5.15**. El resultado presentado en estos gráficos de derivas muestra que los dos set de datos se comportan, en general, de manera similar tanto para las medias como para las varianzas.

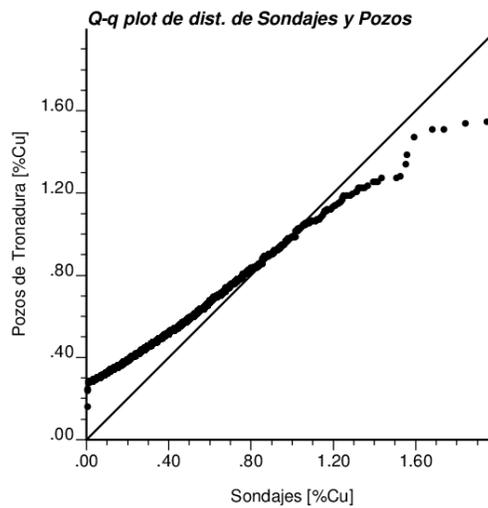


Figura 5.11: Gráfico cuantil contra cuantil para valores de cobre de sondeos y pozos de tronadura.

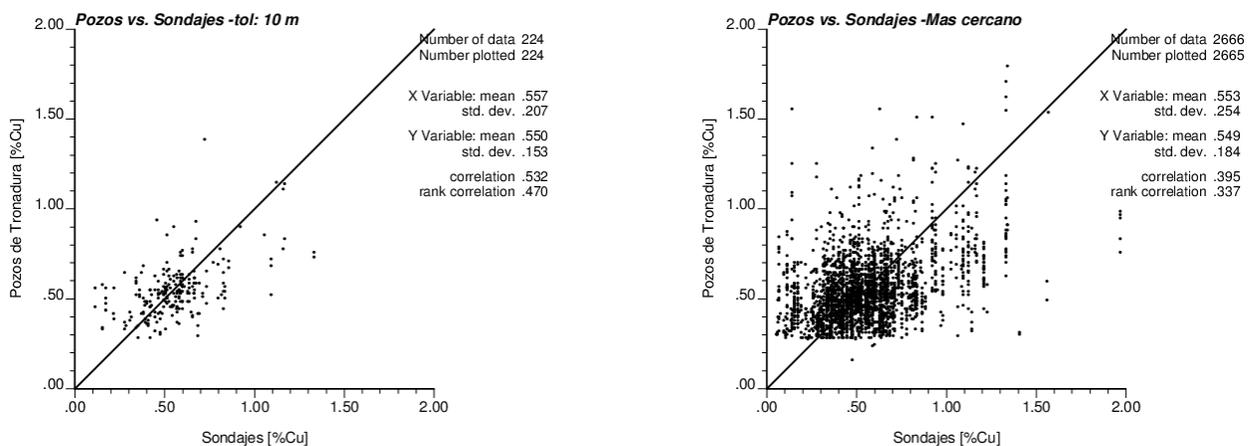


Figura 5.12: Nube de correlación para valores de cobre de sondeos y pozos de tronadura a una tolerancia de 10 m de espaciamiento y cuando se busca el dato de sondeos más cercano para cada pozo.

5.2.5 Comentarios

Del análisis anterior, parece razonable proceder con la estimación de leyes considerando ambos dominios analizados como uno sólo, ya que, por un lado, las variaciones de la media y varianza local se consideran razonablemente estacionarias cuando se consideran vecindades locales.

Por el otro, se puede ver que a pesar de la gran diferencia que se puede apreciar entre las leyes promedio entre sondajes y pozos de tronadura, esto se puede justificar considerando el gran volumen de información de sondajes en comparación con el volumen de información de los pozos de tronadura. Éstos últimos tienden a muestrear sólo en el centro del depósito, en donde existen mayores leyes en comparación con los bordes, los cuales están mejor

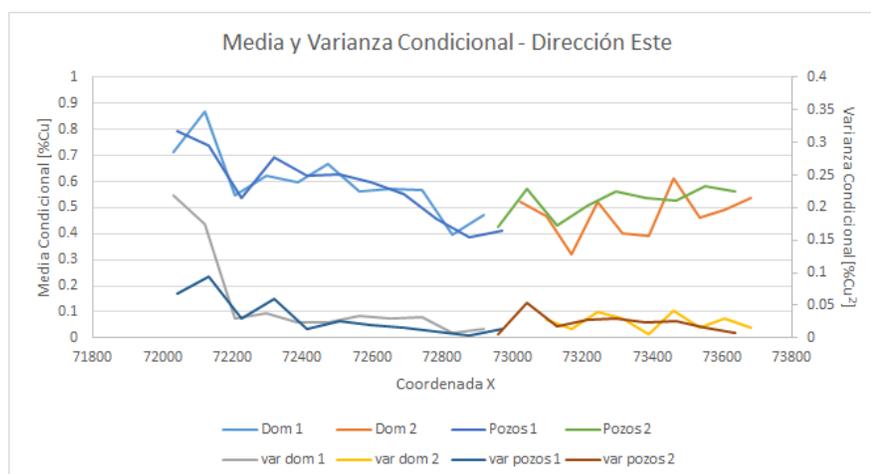


Figura 5.13: Media y varianza local a lo largo de la coordenada X para datos de sondajes (media: Dom 1 y 2, varianza: var dom 1 y 2) y pozos de tronadura (media: Pozos 1 y 2, varianza: var pozos 1 y 2) .

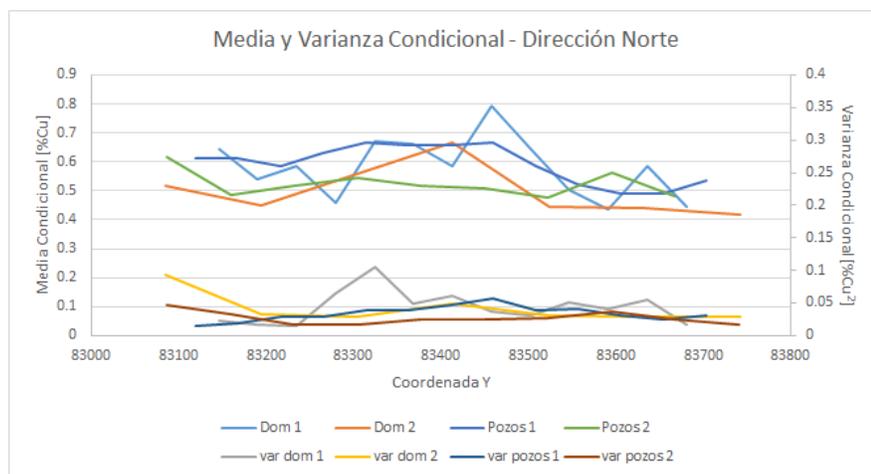


Figura 5.14: Media y varianza local a lo largo de la coordenada Y para datos de sondajes y pozos de tronadura.

muestreados por los sondajes.

5.3 Estudio con Metodología Convencional

Este subcapítulo se enfocará en las simulaciones con la metodología convencional. Primero se comenzará con el estudio variográfico para posteriormente realizar la simulación de las leyes.

5.3.1 Datos Condicionantes

Para estudiar la influencia de la cantidad de muestras en la reconstrucción del yacimiento, se seleccionarán tres subconjuntos del total de sondajes considerando ambos dominios, los cuales han sido escogidos en forma aleatoria del total: 427 sondajes de un total de 610 (70%), lo que equivale a aproximadamente un 70% de datos condicionantes; 487 sondajes (80%), lo que equivale a aproximadamente un 81% de datos condicionantes; y 547 sondajes (90%), lo que equivale a aproximadamente un 90% de datos condicionantes. Estos subconjuntos, sumados a la base de datos con la cantidad total de sondajes, componen el estudio con un total de 4 casos con muestras condicionantes crecientes en cantidad (**Figura 5.16**).

5.3.2 Modelamiento Variográfico

Se efectúa el análisis variográfico para los datos. Los variogramas son generados con el programa GSLIB GAMV (Deutsch and Journel, 1998) y visualizados con el programa GSLIB VARGPLT (Deutsch and Journel, 1998)

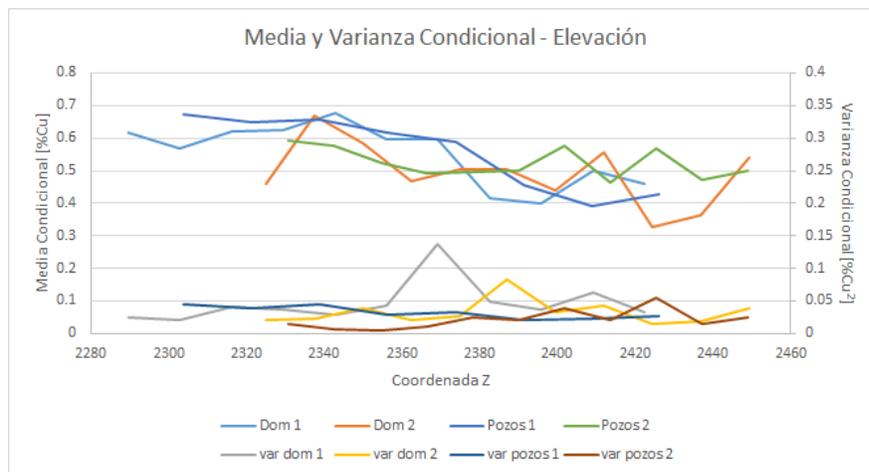


Figura 5.15: Media y varianza local a lo largo de la coordenada Z para datos de sondajes y pozos de tronadura.

Anisotropía

Para determinar las direcciones principales de anisotropía, se calcula el variograma experimental en todas las direcciones del espacio, visualizando el cálculo bajo la forma de un mapa variográfico. La **Figura 5.17** muestra el mapa variográfico estandarizado en los planos X - Y , X - Z e Y - Z para los dos dominios. Se determina que las direcciones principales de anisotropía son la omnihorizontal y la vertical para ambos casos.

Cálculo del Variograma Experimental

Se calculó el variograma experimental en las dos direcciones principales: omnihorizontal, y vertical. Los parámetros usados para el cálculo del variograma se muestran en la **Tabla 5.1**, y son los mismos para ambos dominios. Debido al amplio espaciamiento entre sondajes, se utilizan tolerancias relativamente amplias.

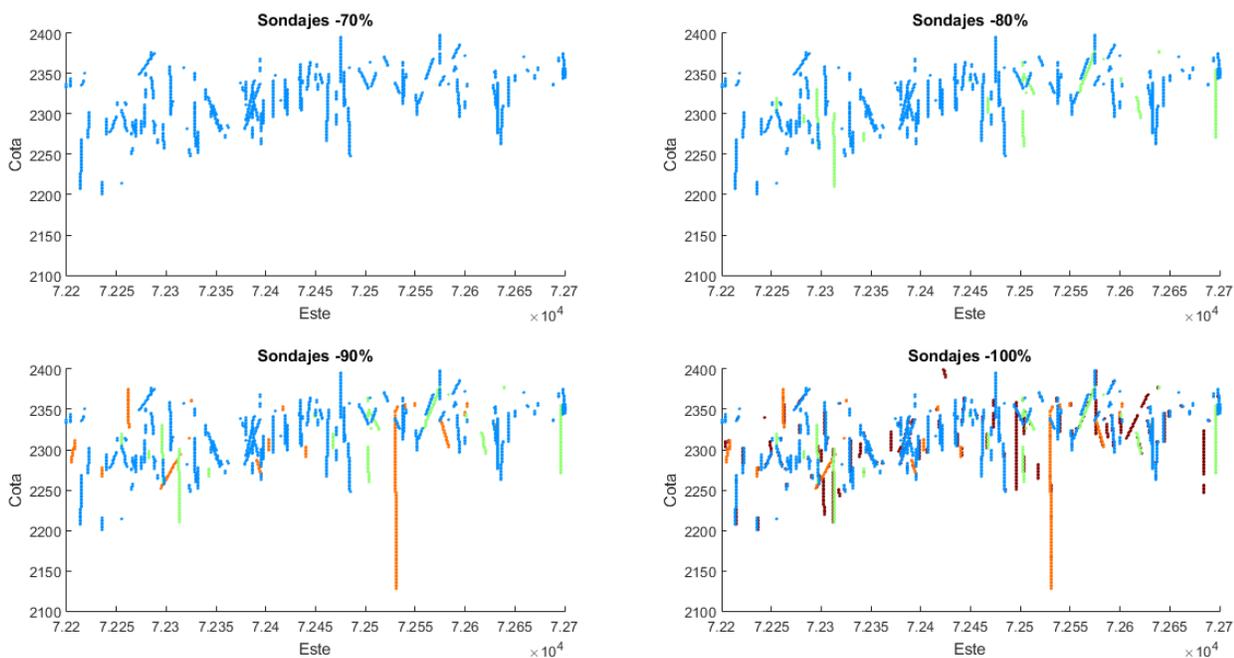


Figura 5.16: Elevaciones de los subconjuntos de sondajes.

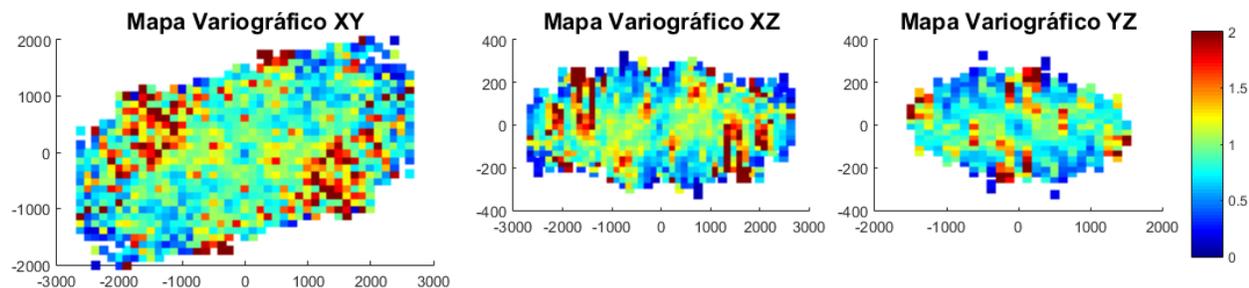


Figura 5.17: Mapas variográficos de base de datos de sondajes.

Modelamiento Variográfico

En la **Tabla 5.2** se muestran los parámetros utilizados para el ajuste de los variogramas experimentales. El ajuste se presenta en la **Figura 5.18**. Fueron utilizadas tres estructuras esféricas anidadas.

5.3.3 Estimación

Se realiza la estimación de las leyes de Cu, mediante kriging ordinario, para el dominio de estudio, considerando los modelos variográficos ajustados en la sección anterior. Esto tiene como fin validar el plan de kriging para la realización posterior de las simulaciones gaussianas, en términos de los parámetros seleccionados, como el radio de búsqueda y número de muestras para la estimación.

Los parámetros de entrada para la estimación se presentan en la **Tabla 5.3**. La grilla esta definida por los parámetros mostrados en la **Tabla 5.4**.

Parámetro	Dirección Horizontal	Dirección Vertical
Número de Pasos	20	12
Distancia de Paso	15	6
Tolerancia de Paso	7.5	3
Tolerancia de Azimut	90	90
Ancho de Banda Horizontal	∞	50.0
Tolerancia de Dip	22.5	12.5
Ancho de Banda Vertical	100	50

Tabla 5.1: Parámetros para el cálculo del variograma experimental.

	Pepíta	Esférico			Esférico			Esférico		
		Mes.	Alcance		Mes.	Alcance		Mes.	Alcance	
			Omn.	Vert.		Omn.	Vert.		Omn.	Vert.
70%	0.025	0.015	60	50	0.05	400	70	0.015	∞	70
80%	0.02	0.015	60	50	0.05	400	70	0.015	∞	70
90%	0.02	0.015	60	50	0.05	400	70	0.05	∞	70
100%	0.01	0.02	40	30	0.04	250	50	0.005	∞	50

Tabla 5.2: Parámetros para el modelamiento del variograma.

Cantidad de datos máxima para kriging	32
Radio de búsqueda horizontal	150
Radio de búsqueda vertical	150

Tabla 5.3: Parámetros para estimación.

El rendimiento de la estimación se mide mediante la correlación existente en la validación cruzada (**Figura 5.19**).

5.3.4 Simulación

A continuación se presenta la implementación de la Simulación Gaussiana Secuencial (SGS).

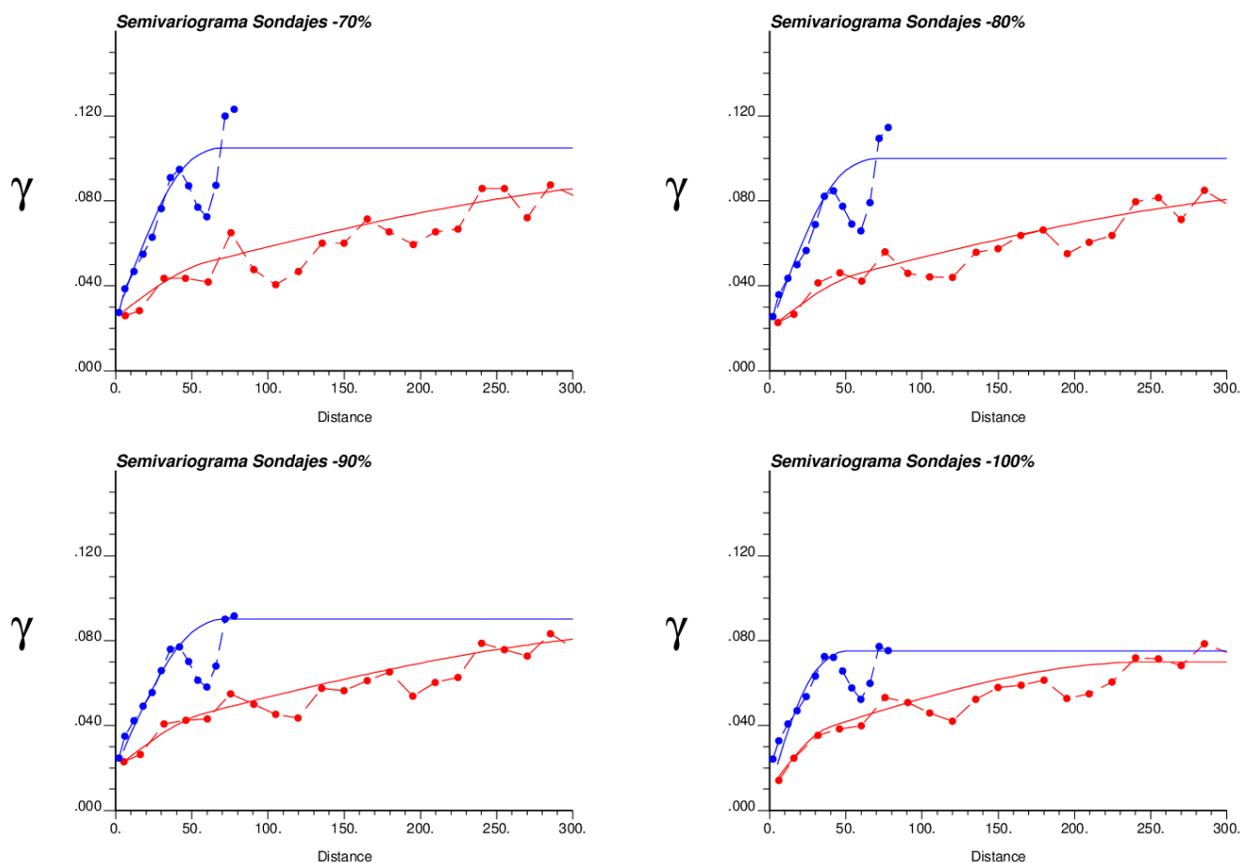


Figura 5.18: Ajuste variográfico del variograma experimental en las dos direcciones principales de anisotropía: omnihorizontal (rojo) y vertical (azul).

Dirección	Número de nodos	Coordenada del centro del primer nodo	Espaciamiento de la grilla
Este	178	70870.0	20.0
Norte	116	82090.0	20.0
Elevación	43	2055.0	10.0

Tabla 5.4: Parámetros para la definición de la grilla de estimación y simulación.

Transformación a Valores Normales

Se requiere transformar las leyes originales a valores normales para el cálculo del variograma utilizado en la simulación Gaussiana. Este procedimiento es realizado por un método gráfico. Se asocia a cada valor de la muestra un valor normal, de manera que existe una relación uno a uno entre los valores originales y los transformados. La interpolación se realiza en forma lineal, mientras que la extrapolación de la cola superior se realiza con un modelo hiperbólico de parámetro $w = 1$ hasta una ley de 5.0 %Cu (**Figura 5.20**).

Verificación de Hipótesis Multi-Gaussiana

Se verifica a continuación la hipótesis bigaussiana examinando las nubes de correlación diferida de los datos y comparando el variograma con el madograma y rodograma.

Se realizan nubes de correlación diferida para distintas distancias de separación (5, 20, y 40 metros). Para el cálculo se consideró una búsqueda omnidireccional. Los gráficos de nubes de correlación se muestran en la **Figura 5.21**.

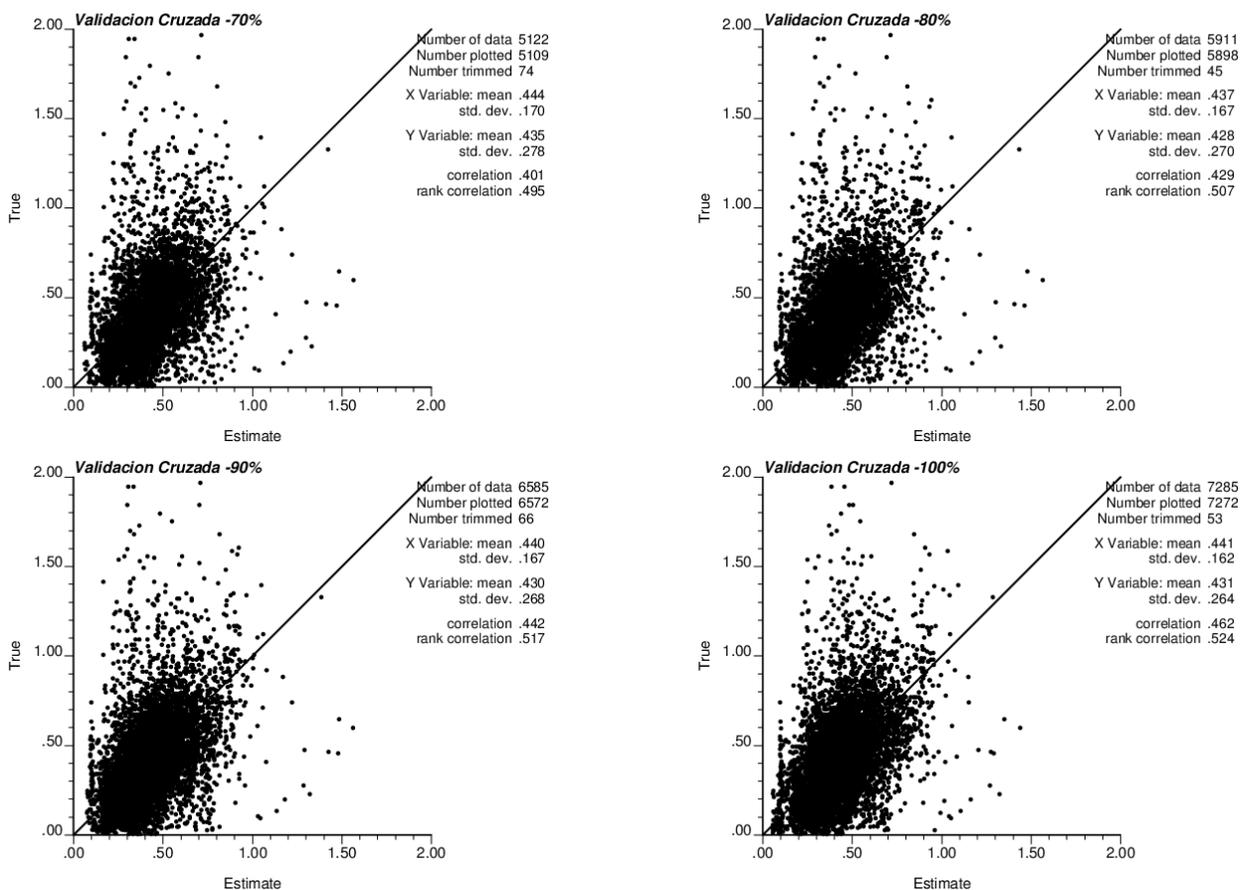


Figura 5.19: Nubes de correlación de la validación cruzada para las distintas densidades de muestras.

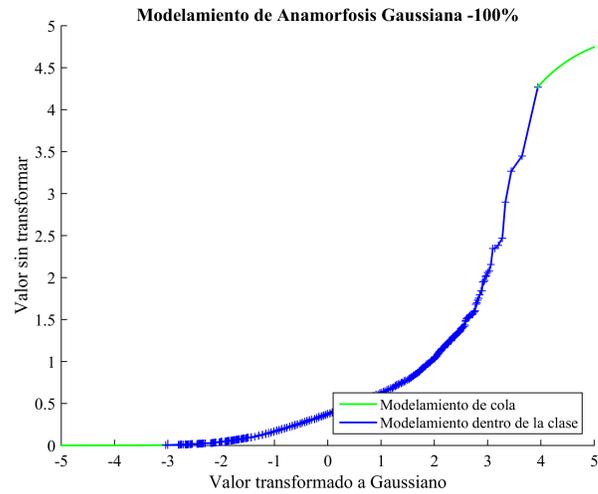


Figura 5.20: Anamorfofis Gaussiana para el caso del estudio con el total de sondajes.

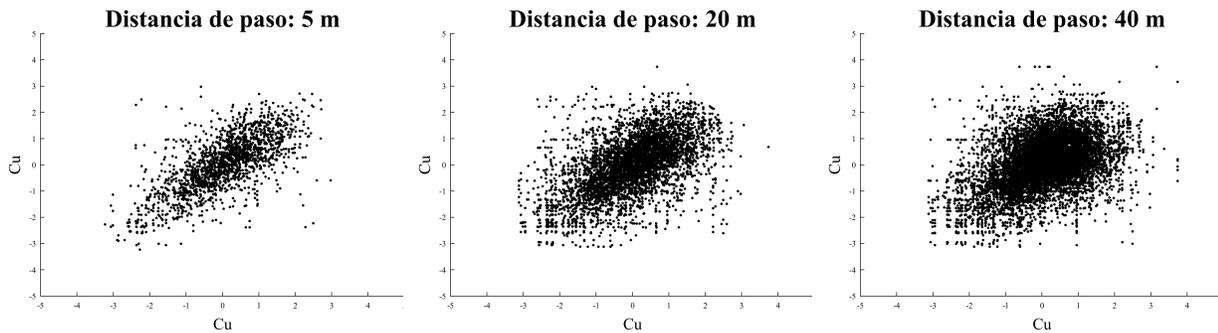


Figura 5.21: Nubes de correlación diferida para datos Gaussianos. Distancias 5, 20, y 40 metros.

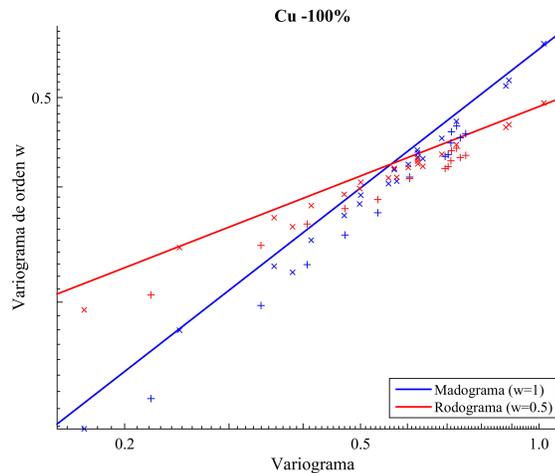


Figura 5.22: Relación entre variograma y madograma (azul) y variograma y rodograma (rojo). Cruces: valores experimentales; líneas: modelo teórica.

Se tiene que, cuando la distancia de separación es pequeña (en este caso 5 metros), la nube de correlación se restringe en torno a la diagonal, mientras que cuando la distancia es mayor, la nube tiene forma circular. Además muestra formas aproximadamente elípticas (acorde a lo esperado en el modelo multigaussiano) para valores intermedios de la distancia, por lo que los resultados de este test son satisfactorios.

Para que los datos tengan una distribución bigaussiana se debe cumplir la relación entre variogramas de orden w dada por la ecuación vista en la **Subsección 2.3.1**. El gráfico de la **Figura 5.22**, en escala log-log, muestra la relación entre el variograma ($w = 2$) y el madograma ($w = 1$) y el rodograma ($w = 0.5$). Se tiene que los valores experimentales se ajustan bien a la relación teórica. Los variogramas, madogramas y rodogramas fueron calculados en la dirección omnihorizontal y vertical.

Finalmente, considerando ambos tests realizados, es posible concluir que los datos transformados de ley de Cu poseen una distribución Gaussiana univariable y bivariable. Por lo tanto, es posible realizar las simulaciones bajo el modelo multi-gaussiano.

Variograma de Valores Normales

Luego de haber comprobado el comportamiento multigaussiano de las variables transformadas, se realiza el análisis variográfico, construyendo primero los variogramas experimentales y luego ajustando un modelo lineal de regionalización.

En la **Tabla 5.5** se presentan los modelos ajustados con sus respectivos parámetros. El ajuste se muestra en la **Figura 5.23**. El modelamiento se realiza en las direcciones omnihorizontal y vertical.

Parámetros

Se utiliza el programa SGSIM de GSLIB para generar realizaciones Gaussianas. Los datos fueron asignados a los nodos. Se presentan en la **Tabla 5.6** el resto de los parámetros utilizados. Los mapas de las primeras dos realizaciones, además del promedio de las realizaciones obtenidas, se muestran en la **Figura 5.24**.

	Pepíta	Esférico			Esférico			Esférico		
		Mes.	Alcance		Mes.	Alcance		Mes.	Alcance	
			Omn.	Vert.		Omn.	Vert.		Omn.	Vert.
70%	0.15	0.22	20	60	0.63	400	120	-	-	-
80%	0.15	0.2	20	20	0.65	400	130	-	-	-
90%	0.15	0.2	20	10	0.65	420	180	-	-	-
100%	0.15	0.18	20	20	0.2	420	50	0.47	420	400

Tabla 5.5: Parámetros para el modelamiento del variograma de valores normales.

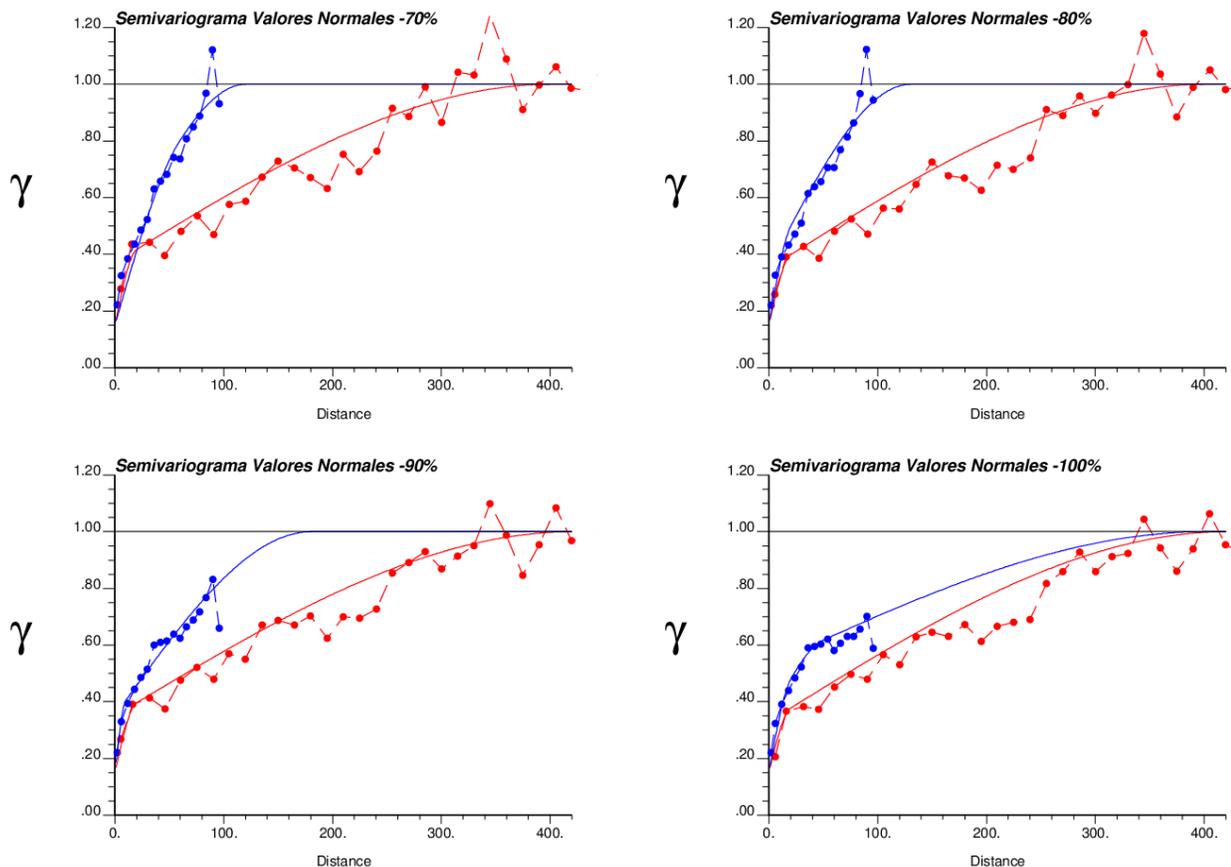


Figura 5.23: Ajuste variográfico del variograma experimental en las dos direcciones principales de anisotropía: omnihorizontal (rojo) y vertical (azul).

Validación de Resultados

El histograma de todas las realizaciones simuladas juntas, para el caso con el total de información de sondajes, se presenta en la **Figura 5.25**. Se observa que la reproducción de la media y la varianza disminuyen con respecto a la distribución de referencia.

Se presentan los histogramas de las medias y varianzas calculadas para cada realización individual en la **Figura 5.26**, para el caso con el 100% de los datos. Estos gráficos muestran la buena reproducción del histograma. El gráfico cuantil contra cuantil de todas las realizaciones simuladas se presentan juntos en la **Figura 5.27**. Se observa una buena reproducción de los cuantiles de la distribución de referencia, con una leve desviación para las altas leyes. Los gráficos para el resto de los casos con menor información se presentan en **Anexos**.

Número de realizaciones	30
Número semilla	32146
Máx. datos originales y previamente simulados	32
Tamaño de grilla múltiple	3
Radio de búsqueda horizontal.	300 m
Radio de búsqueda vertical.	300 m

Tabla 5.6: Parámetros para simulación convencional mediante SGSIM.

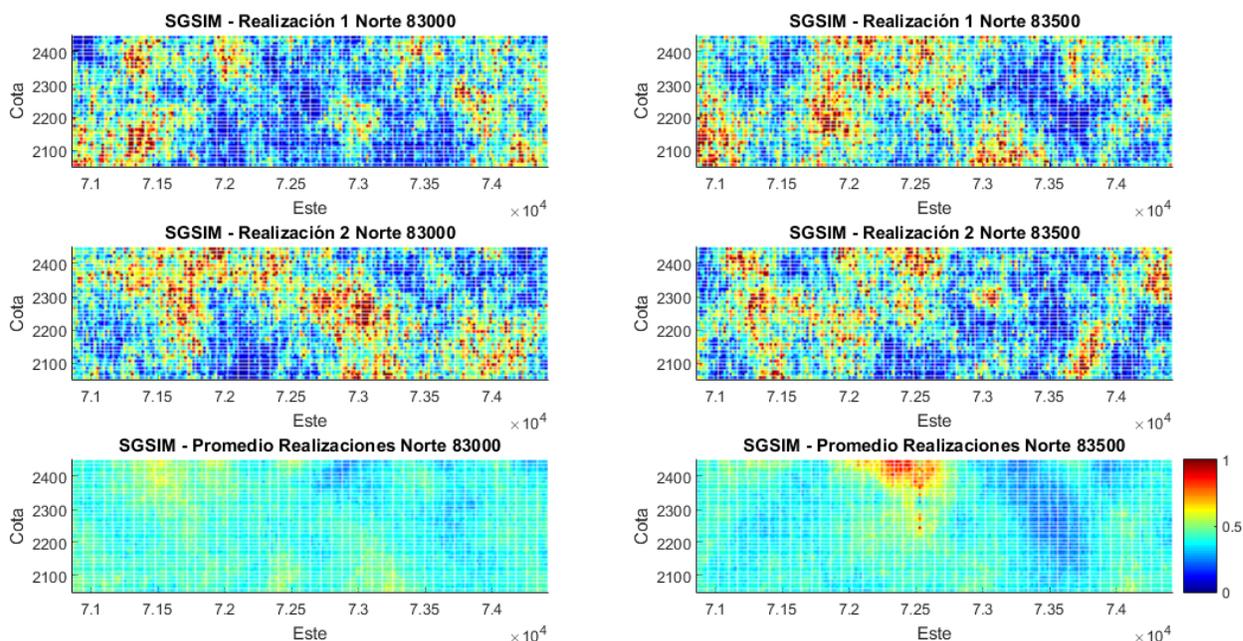


Figura 5.24: Elevaciones de realizaciones con metodología convencional SGSIM.

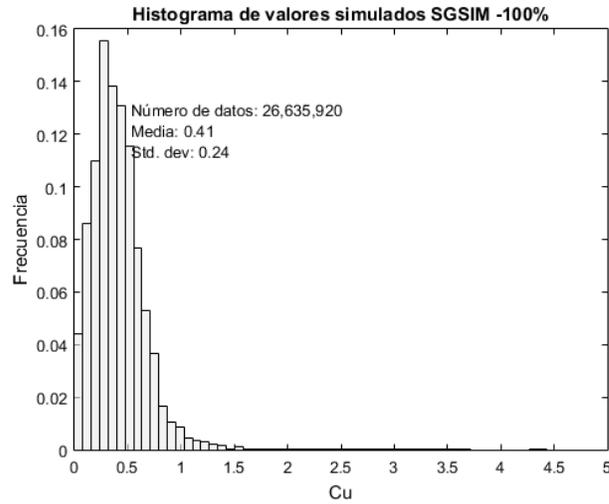


Figura 5.25: Histograma de todos los valores simulados mediante SGSIM para el caso con el 100% de los datos. Media, dev. est. y varianza de la distribución de referencia: 0.41, 0.26 y 0.067 respectivamente.

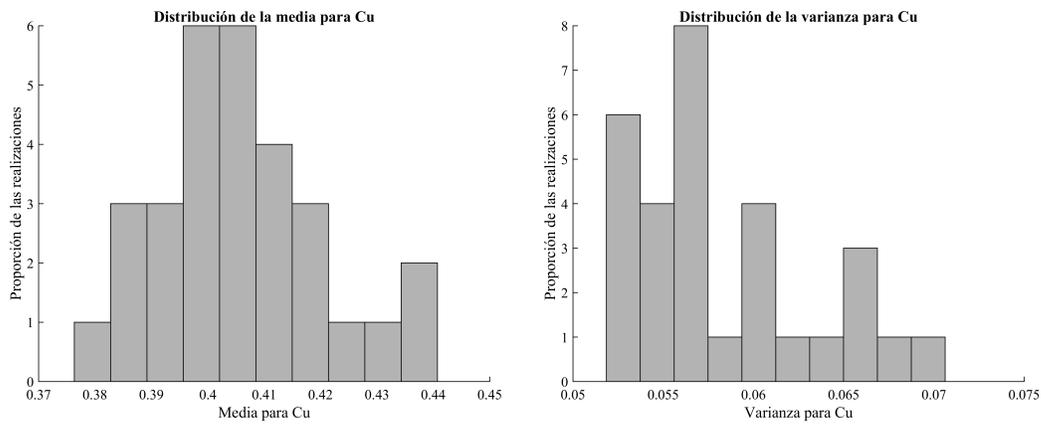


Figura 5.26: Media y varianza para realizaciones mediante SGSIM.

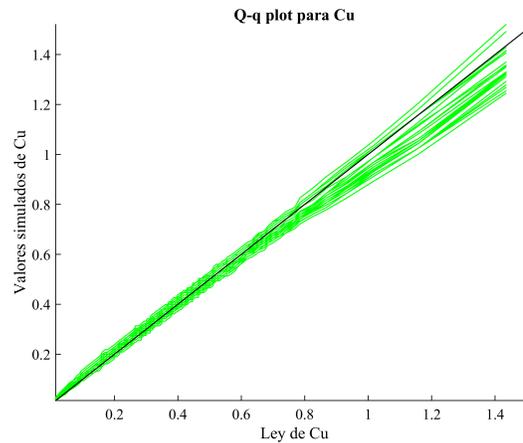


Figura 5.27: Q-q plot de realizaciones mediante SGSIM.

5.4 Estudio con Metodología de Direcciones Variables

Esta sección se enfoca en la simulación de leyes utilizando un campo de direcciones variables. Se comienza generando el campo de direcciones variables a partir de mediciones condicionantes de los ángulos de azimut y dip para las muestras, los cuales presentan direcciones variables. El objetivo es generar el campo en tres dimensiones, el cual será dato de entrada en los programas GAMV_LVA, KT3D_LVA y SGS_LVA (Boisvert and Deutsch, 2010), los cuales se utilizarán para realizar el estudio variográfico para luego realizar la estimación y simulación de leyes.

5.4.1 Generación del Campo de Direcciones Variables

Para la generación del campo de direcciones variables se utiliza el método de interpolar del campo a partir de los datos condicionantes entregados en la base de datos de mineral de tipo mixto (**Figura 5.28**). En la **Tabla 5.7** se resume información parcial de los datos condicionantes. La totalidad de las muestras se presentan en **Anexos**.

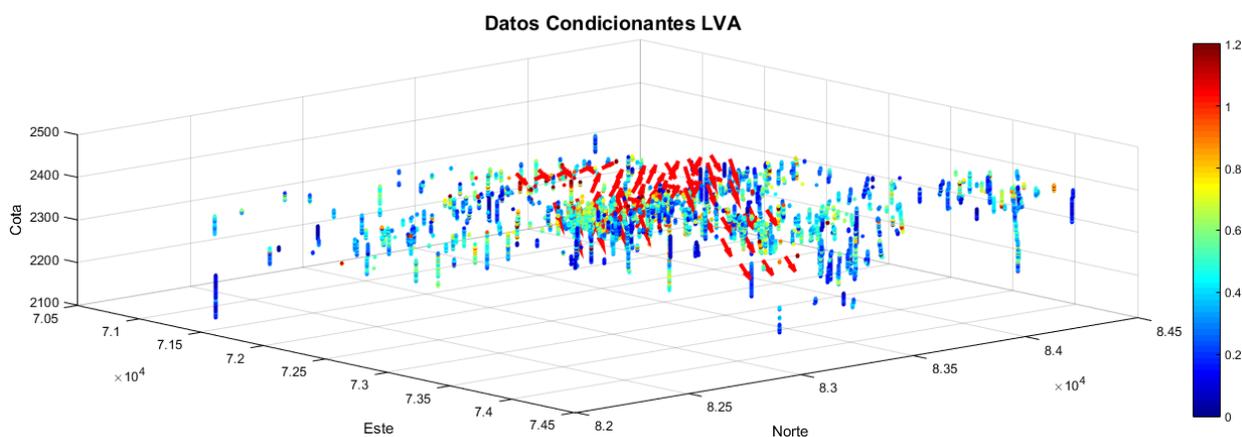


Figura 5.28: Vista isométrica de los datos condicionantes LVA.

La estimación del campo de direcciones variables se realiza con inverso de la distancia, con un valor de w igual a 3. Se realiza la separación en componentes de la información de azimut y buzamiento de las muestras para proceder luego con la estimación de las componentes por separado. Se decide utilizar una razón de anisotropía max:min de 4:1, el cual se obtiene de los variogramas experimentales de la metodología convencional, con una sola dirección principal de anisotropía, como una aproximación de esta razón para todo el dominio. El campo estimado se presenta en la **Figura 5.29**.

5.4.2 Variografía con Campo de Direcciones Variables

Se efectúa el análisis variográfico para los datos, esta vez considerando los datos de entrada de la geología plasmada en el campo de direcciones variable. Los variogramas son

Dato	X	Y	Z	Azimut	Dip
1	71,775	83,250	2,375	90	-13.5
2	71,925	83,250	2,375	90	11.3
3	72,075	83,250	2,325	90	-42.0
4	72,225	83,250	2,275	90	-38.7
5	72,225	83,250	2,325	90	-39.4
6	72,375	83,250	2,275	90	35.0
7	72,375	83,250	2,325	90	43.8
8	72,375	83,250	2,375	90	37.2
9	72,525	83,250	2,325	90	16.7
10	72,525	83,250	2,375	90	29.2

Tabla 5.7: Información de datos condicionantes.

generados con el programa GSLIB GAMV_LVA (Boisvert y Deutsch, 2010) y visualizados con el programa GSLIB VARGPLT (Deutsch y Journel, 1998). Posteriormente se realiza el modelamiento de estos variogramas isotrópos para dar origen a los variogramas modelados que serán datos de entrada en las estimaciones y simulaciones secuenciales con direcciones variables que se realizan con el programa KT3D_LVA y SGS_LVA, respectivamente.

Se comienza por los variogramas experimentales omnidireccionales. En la **Tabla 5.8** se muestran los parámetros ingresados para los variogramas experimentales, tomando cuidado que ahora las dimensiones de las zonas se verán modificadas por el escalamiento L-ISOMAP y podrían ser incrementadas las dimensiones originalmente descritas sin restricción en la dimensionalidad.

Una vez definidos los parámetros necesarios para la construcción de los variogramas experimentales se procede a su modelamiento. En la **Tabla 5.9** se presentan los modelos

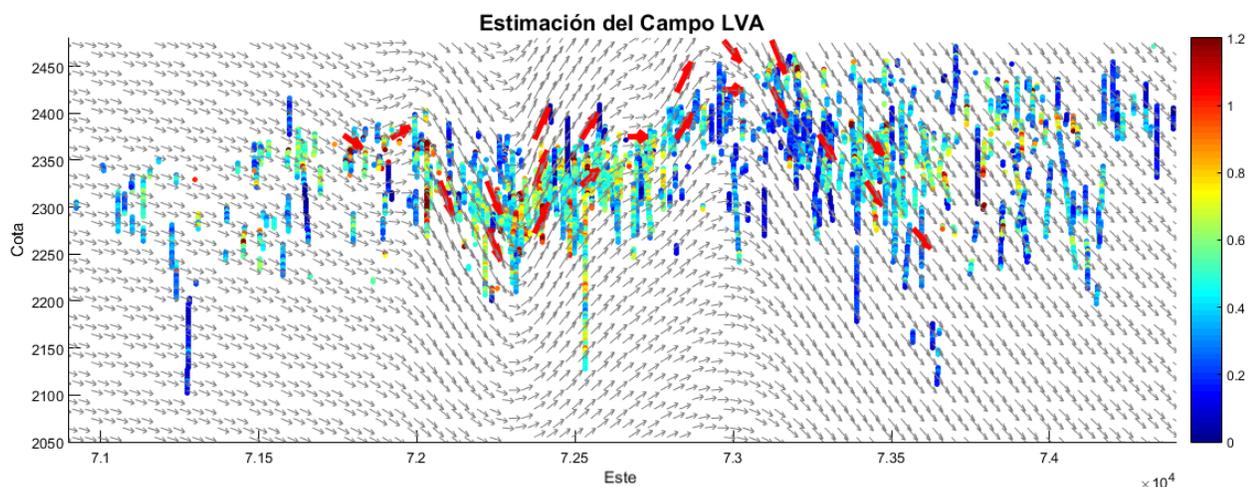


Figura 5.29: Resultado de la estimación del campo LVA a partir de los datos condicionantes, mediante inverso de la distancia.

ajustados con sus respectivos parámetros. El ajuste se muestra en la **Figura 5.30**. Fueron utilizadas dos estructuras esféricas anidadas.

5.4.3 Estimación

Se realiza la estimación de las leyes de Cu, mediante kriging ordinario, a través de la rutina KT3D_LVA, para el dominio completo, considerando los modelos variográficos ajustados en la sección anterior.

Los parámetros de entrada para la estimación se presentan en la **Tabla 5.10**. La grilla de estimación es la misma que se utilizó anteriormente, definida por los parámetros mostrados en la **Tabla 5.4**.

Se presentan en la **Figura 5.31** las nubes de correlación para la validación cruzada, mediante las cuales se puede observar el desempeño de la estimación.

5.4.4 Simulación

A continuación se presenta la implementación de la Simulación Gaussiana Secuencial con direcciones variables (SGSLVA).

Parámetro	Dir. Omnidireccional
Número de Pasos	16
Distancia de Paso	50
Tolerancia de Paso	52
Tolerancia de Paso	52
Núm. de offsets del grafo	1
Núm. de puntos landmark (x, y ,z)	5 5 2
Máx. núm de dimensiones a usar	100

Tabla 5.8: Parámetros para el cálculo del variograma experimental LVA.

	Pepíta	Esférico		Esférico	
		Mes.	Alcance	Mes.	Alcance
70%	0.0049	0.027	65	0.045	370
80%	0.0051	0.025	60	0.045	400
90%	0.0051	0.025	60	0.041	350
100%	0.005	0.022	60	0.043	400

Tabla 5.9: Parámetros para el modelamiento del variograma.

Cantidad de datos máxima para kriging	32
Máx. radio de búsqueda isótropo	1000

Tabla 5.10: Parámetros para estimación.

Variograma de Valores Normales

Al igual que para la metodología anterior, se realiza el análisis variográfico, construyendo primero los variogramas experimentales y luego ajustando un modelo lineal de regionalización.

En la **Tabla 5.11** se presentan los modelos ajustados con sus respectivos parámetros. El ajuste se muestra en la **Figura 5.32**. El modelamiento se realiza en las dirección omnidireccional.

	Pepita	Esférico		Esférico	
		Mes.	Alcance	Mes.	Alcance
70%	0.1	0.21	70	0.69	500
80%	0.12	0.19	70	0.69	500
90%	0.21	0.1	70	0.69	500
100%	0.21	0.1	70	0.69	550

Tabla 5.11: Parámetros para el modelamiento del variograma LVA de valores normales.

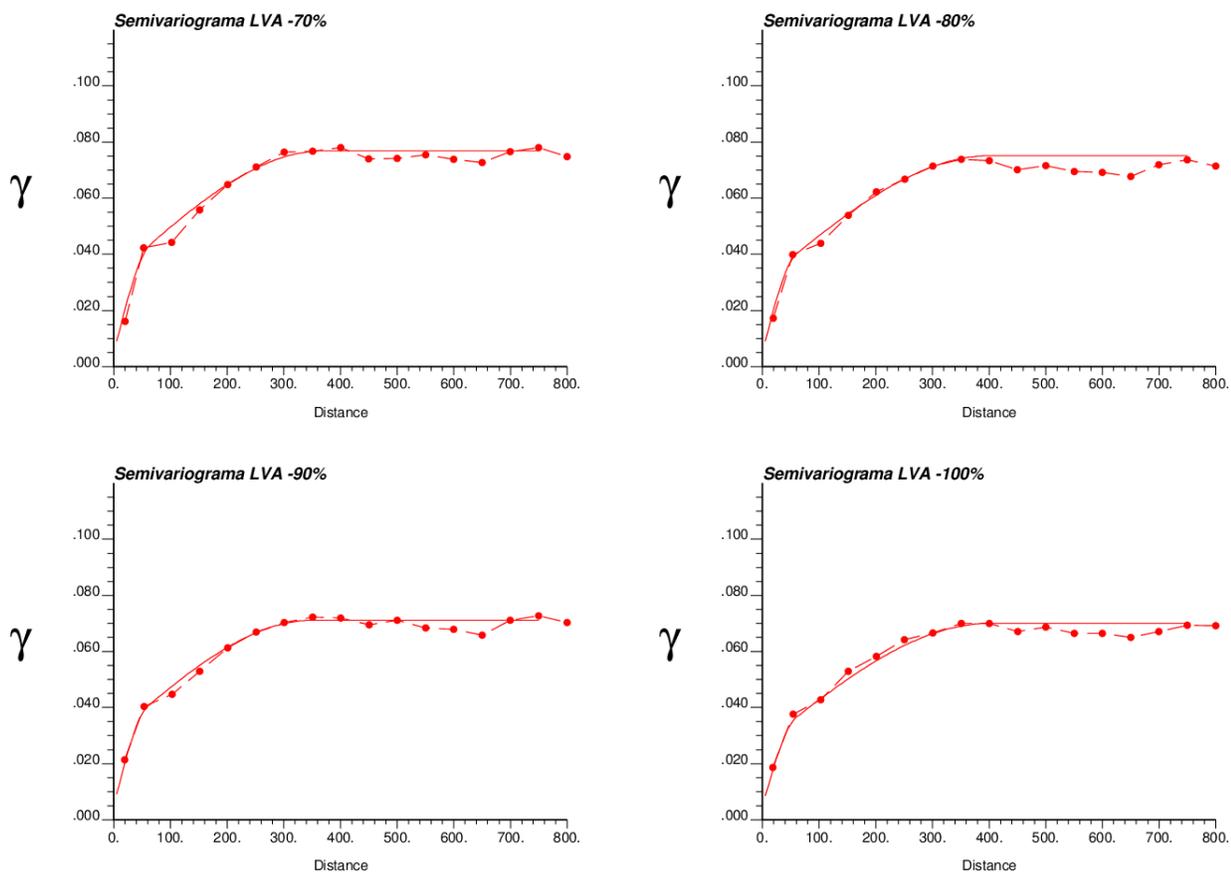


Figura 5.30: Ajuste variográfico LVA..

Parámetros

Se utiliza el programa SGS_LVA para generar realizaciones Gaussianas. Se presentan en la **Tabla 5.12** los parámetros utilizados. Los mapas de las primeras dos realizaciones, además del promedio de las realizaciones obtenidas, se muestran en la **Figura 5.33**.

Número de realizaciones	30
Número semilla	32146
Máx. datos originales y previamente simulados	32
Máx. radio de búsqueda isotrópico.	1000 m

Tabla 5.12: Parámetros para simulación convencional mediante SGS_LVA.

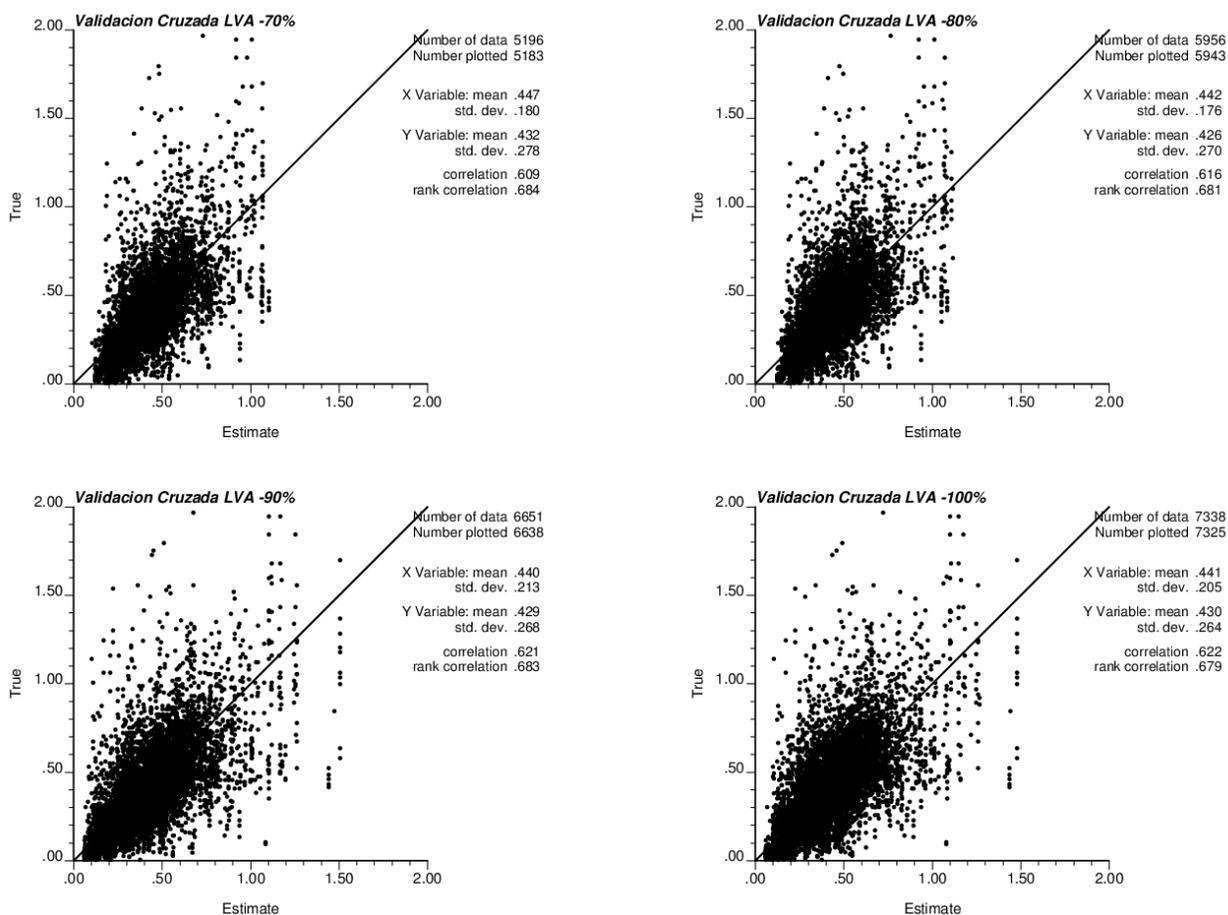


Figura 5.31: Nubes de correlación de la validación cruzada para las distintas densidades de muestras.

Validación de Resultados

El histograma de todas las realizaciones simuladas juntas, para el caso con el total de información de sondajes, se presenta en la **Figura C.11**. Se observa que la reproducción de

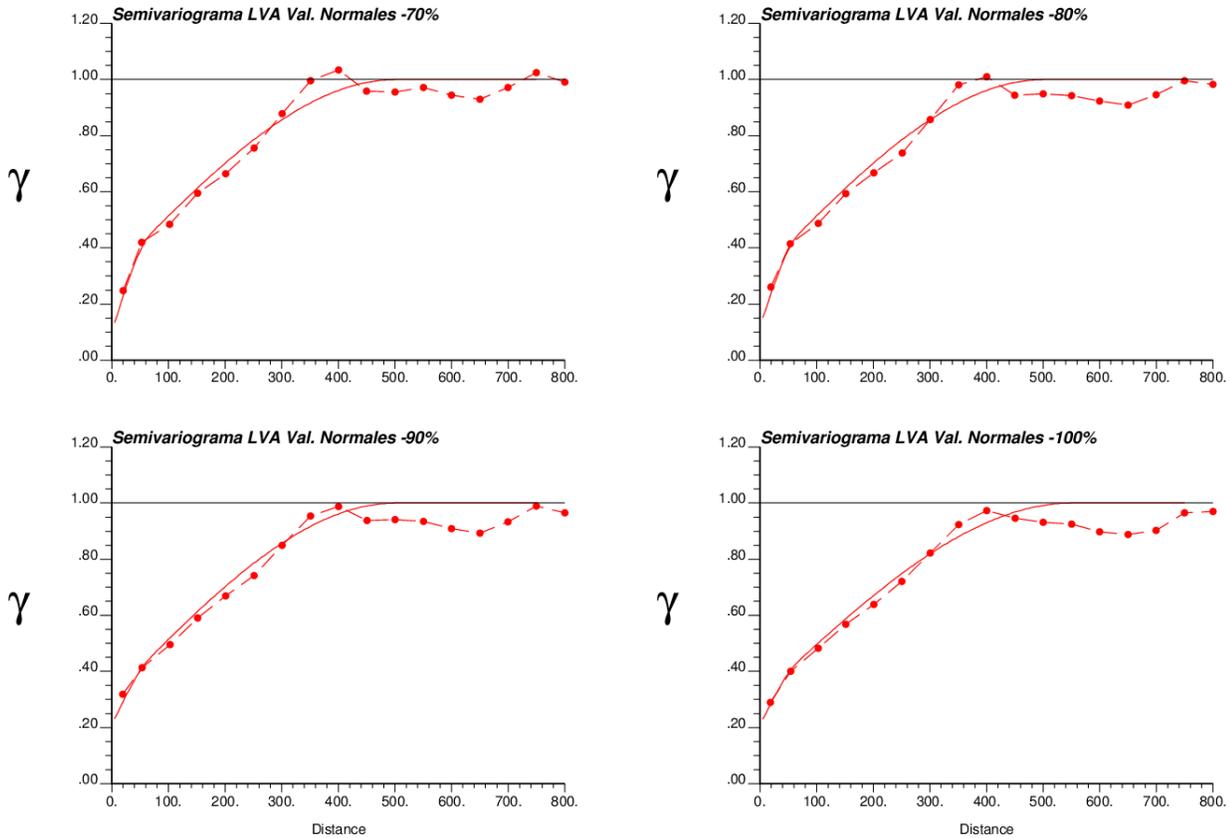


Figura 5.32: Ajuste variográfico del variograma LVA de valores normales.

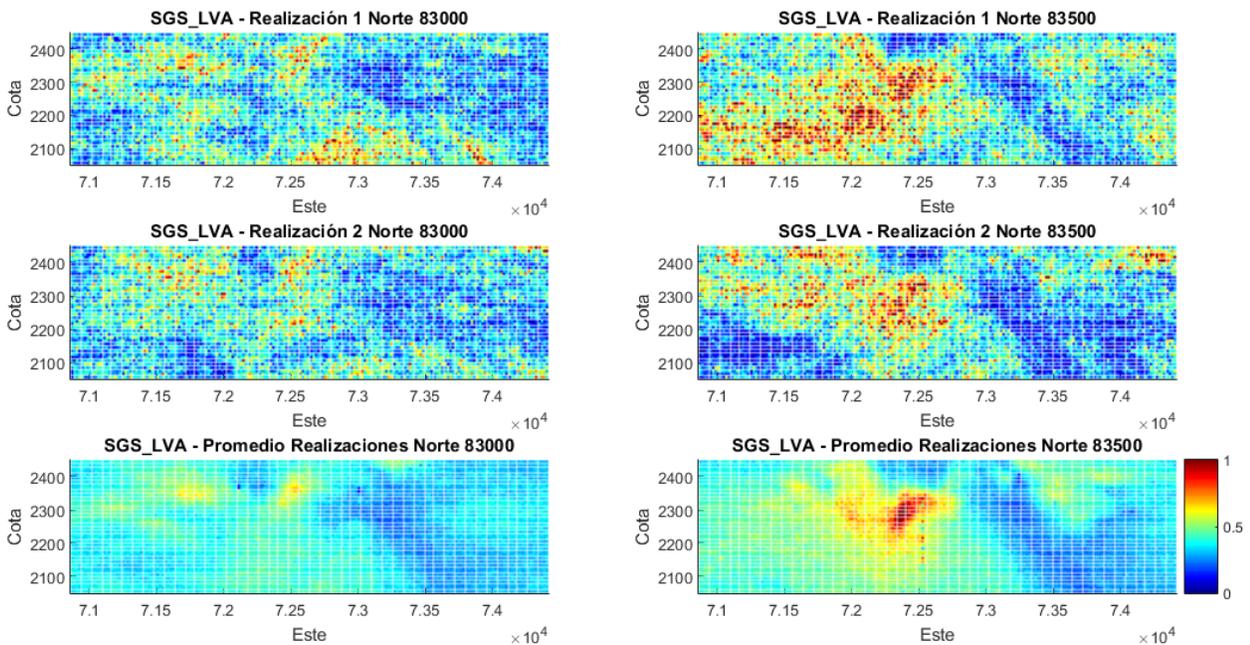


Figura 5.33: Elevaciones de realizaciones con metodología convencional SGS_LVA.

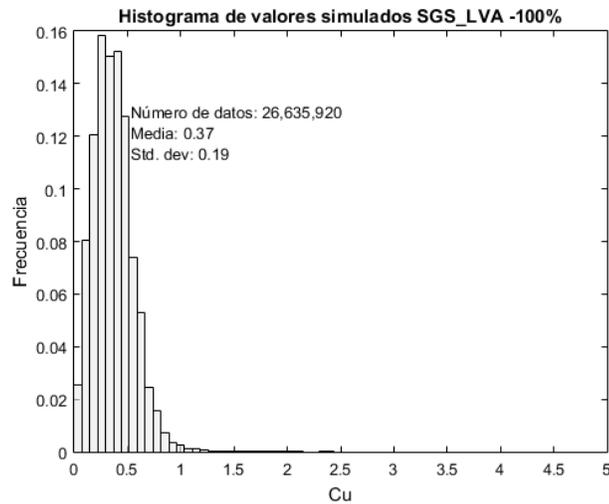


Figura 5.34: Histograma de todos los valores simulados mediante SGS_LVA para el caso con el 100% de los datos. Media, desv. est. y varianza de la distribución de referencia: 0.41, 0.26 y 0.067 respectivamente.

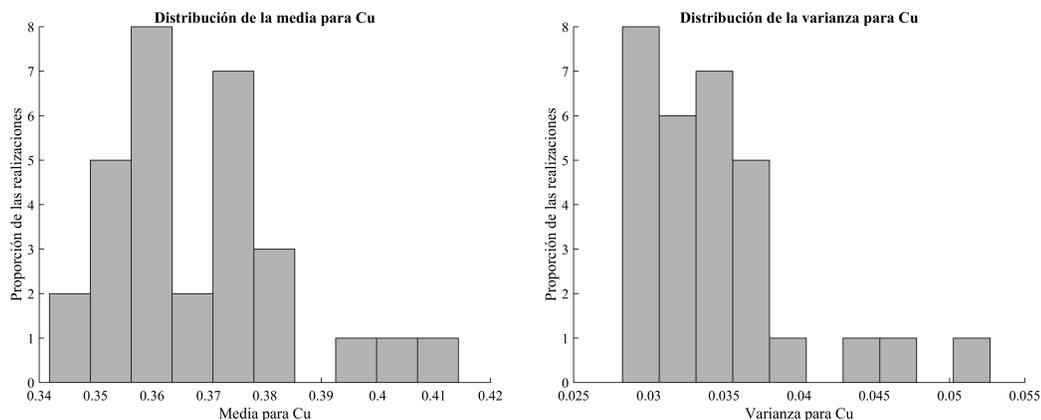


Figura 5.35: Media y varianza para realizaciones mediante SGS_LVA.

la media y la varianza disminuyen con respecto a la distribución de referencia.

Se presentan los histogramas de las medias y varianzas calculadas para cada realización en forma individual en la **Figura C.12**, para el caso con el 100% de los datos. Estos gráficos muestran una sesgada reproducción del histograma. El gráfico cuantil contra cuantil de todas las realizaciones simuladas se presentan juntos en la **Figura 5.36**. Se observa una mala reproducción de los cuantiles de la distribución de referencia, con grandes desviaciones para las altas leyes.

Los gráficos presentados para el resto de los casos con menor información se presentan en **Anexos**.

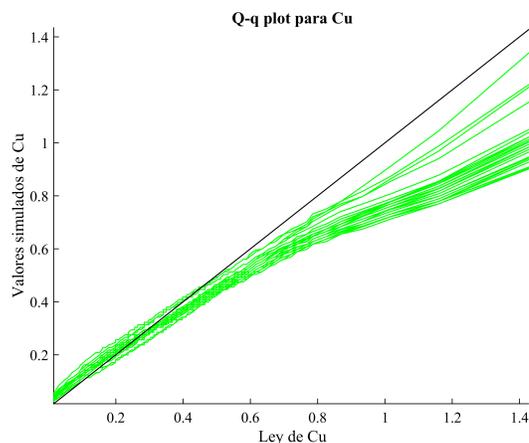


Figura 5.36: Q-q plot de realizaciones mediante SGS_LVA.

5.5 Comparación entre Métodos Estudiados

Finalizado el estudio entre ambos métodos, para distintas densidades de información, se procede a la comparación del desempeño obtenido entre los métodos, tanto en términos de estadísticos como en términos de la planificación minera.

Para estudiar el desempeño, las realizaciones son comparadas con la información disponible de los pozos de tronadura guardada para la validación. Para el promedio de las realizaciones, la información de los pozos es comparada con los nodos más cercanos en el modelo simulado, con una distancia máxima de búsqueda de hasta 10 m, y el coeficiente de correlación es calculado. Se observa que, para el caso de la simulación convencional, los coeficientes de correlación son menores a 0.2, lo que se considera bajo, y se mantienen relativamente constante variando erráticamente con la densidad de información. La mala correlación se debe a la gran diferencia entre las distribuciones de la información entre sondajes y pozos. Para el caso de la simulación con direcciones variables, se observa un mejoramiento importante en la correlación. El coeficiente de correlación, para el caso con menor densidad de información, es de 0.43, y mejora levemente a medida que se agregan sondajes, hasta un valor de 0.49. Lo anterior indica que integrar un campo de direcciones variables en el depósito es clave a la hora de realizar la estimación.

Las nubes de correlación para el promedio de las simulaciones se presentan en la **Figura 5.37 y 5.38**, para cada uno de los casos de estudio con distinta densidad de información.

En términos del enfoque de la planificación minera, y la medición de la precisión obtenida prediciendo la cantidad de metal, se utiliza la información de los pozos de tronadura guardados para la validación.

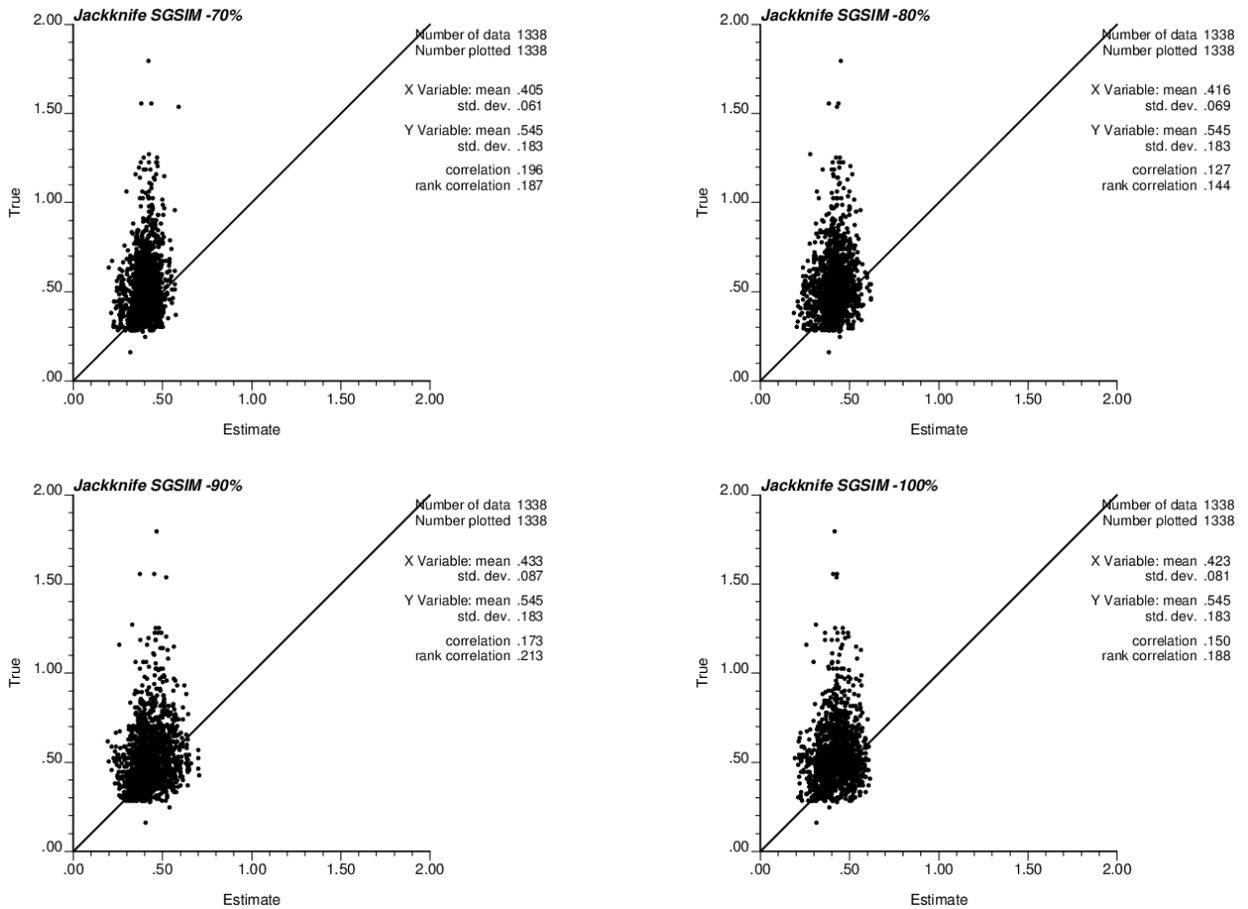


Figura 5.37: Nubes de correlación entre los datos de pozos de tronadura y el valor promedio de las simulaciones en los nodos más cercanos, mediante SGSIM.

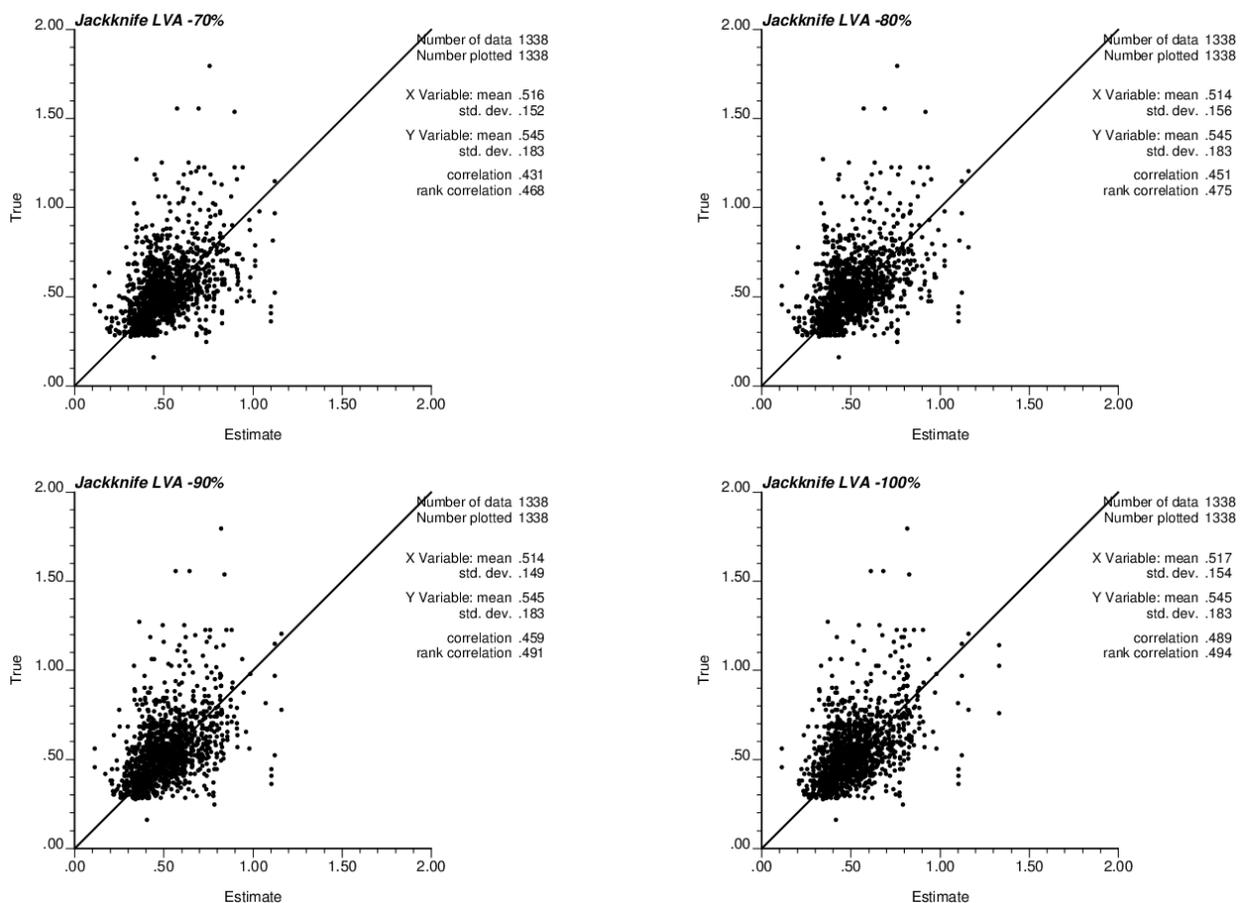


Figura 5.38: Nubes de correlación entre los datos de pozos de tronadura y el valor promedio de las simulaciones en los nodos más cercanos, mediante SGS_LVA.

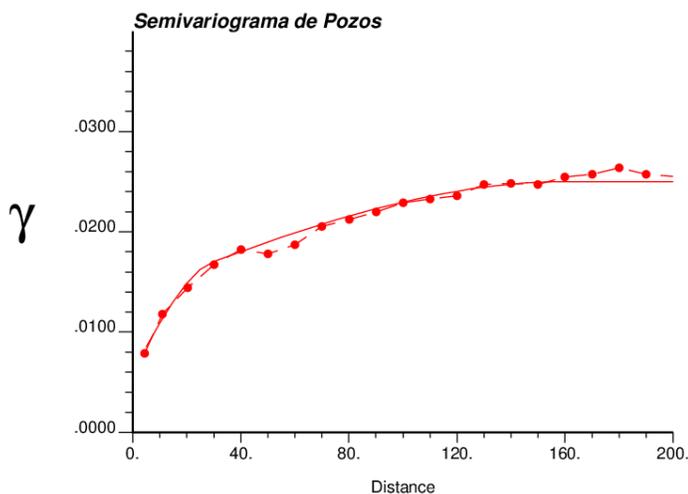


Figura 5.39: Variograma experimental y modelado para leyes de Cu de pozos de tronadura utilizado para kriging ordinario.

Se realiza kriging ordinario con la información para reconstruir la realidad. Debido a que los datos están localizados con gran densidad en el espacio, el efecto suavizador del kriging no tiene mayor incidencia. El variograma experimental es calculado y modelado para la dirección omnidireccional (**Figura 5.39**).

La cantidad de metal es calculada considerando bloques de 20 por 20 por 10 m^3 , para leyes de corte que van de 0.3 %Cu a 0.9 %Cu, en los bloques del espacio categorizados con la mineralogía mixta, próximos en términos espaciales a las muestras utilizadas. El desempeño de los métodos estudiados muestra grandes diferencias. Por ejemplo, para una ley de corte de 0.7 %Cu, se tiene que la metodología convencional no estima ninguna cantidad de metal por sobre esta ley, mientras que la metodología que incluye direcciones variables de anisotropía muestra un error inicial de 55% para el caso con menor información, y mejorando progresivamente el desempeño a medida que se agregan sondeos hasta obtener un error de 0.6% para el caso con el 100% de la información de sondeos.

La cantidad de metal esperada para las 30 realizaciones de la simulación gaussiana secuencial convencional y la que incluye direcciones variables, para una ley de corte de 0.7 %Cu, y para distintas densidades de información se comparan con la cantidad real de metal, estimada con kriging ordinario, en la **Tabla 5.13**, y la variación del error para distintas leyes de cortes en la **Figura 5.40**.

La gran diferencia se atribuye a que, a pesar de que la simulación convencional es capaz de reproducir valores extremos, se incluye el efecto proporcional, por lo que los valores esperados de las realizaciones mantienen la distribución del histograma de los datos de entrada, mientras que al incluir direcciones variables en la estimación, la reproducción de la información en el espacio se modifica de forma importante, de manera ya apreciada en los gráficos

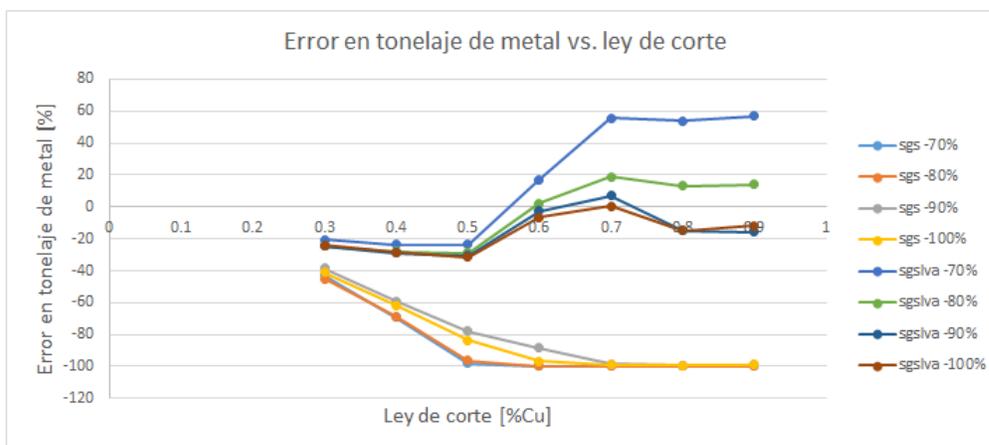


Figura 5.40: Variación del error en la estimación del tonelaje de metal versus ley de corte.

cuantil contra cuantil para cada una de las realizaciones. El valor esperado de las leyes en los bloques del espacio categorizados con la mineralogía mixta, próximos a las muestras de los pozos utilizadas se muestra en la **Figura 5.41**, comparándose la realidad estimada, y los métodos descritos para el caso con el 100 % de la información.

Caso	Toneladas de Cu	Diferencia	Error %
Realidad	38512		
SGSIM	70%	0	-38512
	80%	0	-38512
	90%	619	-37893
	100%	326	-38186
SGS_LVA	70%	59972	21460
	80%	45793	7281
	90%	41197	2684
	100%	38733	220

Tabla 5.13: Cantidad de metal esperado sobre ley de corte para los distintos casos, compados con la realidad del kriging ordinario de los pozos de tronadura.

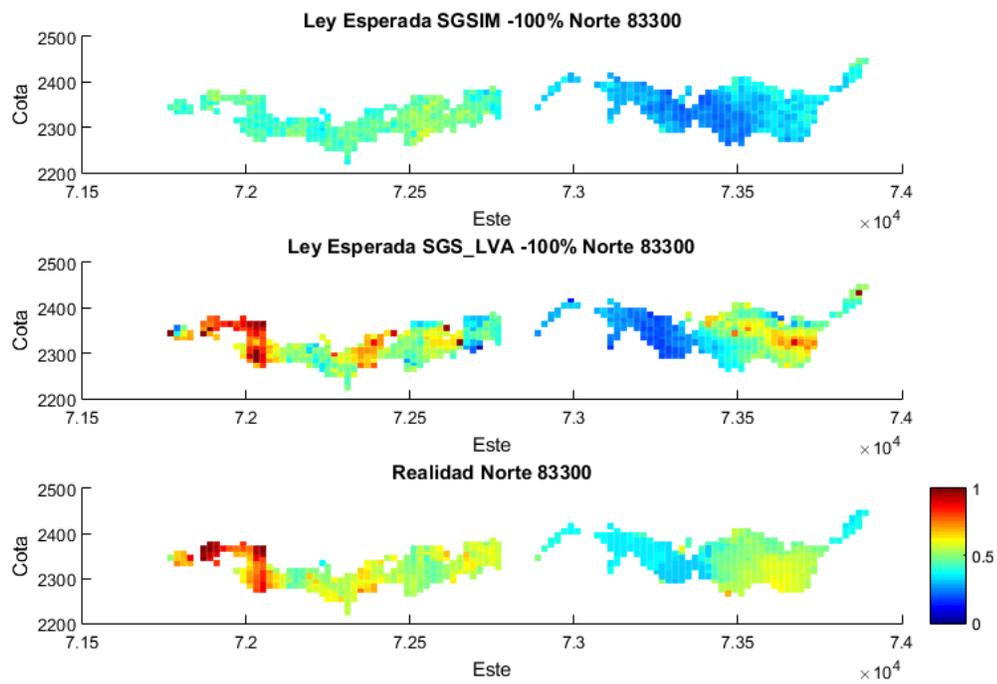


Figura 5.41: Comparación de valores esperados de leyes en modelo de bloques de mineralogía mixta, entre los métodos estudiados y la realidad.

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

Se presentan a continuación las principales conclusiones extraídas de esta memoria.

Cuando existe conocimiento de características no lineales en los depósitos, éstas deben ser modeladas. La principal ventaja de incorporar un campo de direcciones variables en la estimación de leyes es un aumento de la precisión lograda.

Luego de hacer un estudio sobre cuales son las variables más importantes a la hora de reproducir un cuerpo geológico con características de plegamiento, sin duda el factor más importante para que la tarea sea lograda con éxito es la densidad de muestras, caracterizada en términos mineros a través de la obtención de sondajes para etapas de prospección y exploración. Es de vital importancia el incluir la cantidad de sondajes adecuados para evitar cualquier tipo de imprecisiones en la caracterización de los cuerpos.

El estudio de los casos sintéticos muestra los resultados esperados, aumentándose la precisión de la estimación para figuras suaves, con baja amplitud y mayor periodo y espesor. Un número de sondajes mayor se hace necesario para depósitos con alta irregularidad y mayores cambios en el manto.

Para el caso de estudio es importante mencionar que con respecto al Campo LVA generado, si bien la metodología que se propuso no es considerada como una generalidad para obtener cualquier campo, sino que fue obtenido de forma particular para el caso estudio, viene al caso discutir acerca de su manera de obtención. Ésta se realizó mediante inverso de la distancia, el cual tuvo un desempeño apropiado, con el incremento de la correlación entre datos simulados y la realidad. Queda propuesto la comparación de los resultados al momento de obtener un campo mediante kriging. Otro punto importante es la obtención de los ratio de anisotropía en el campo de direcciones variables. Si bien éste fue impuesto como supuesto para el presente estudio de acuerdo a los alcances de los variogramas con una sola dirección principal, con resultados positivos, se recomienda realizar un ajuste del ratio

mediante la técnica del momento de inercia del mapa de covarianza local, obteniéndose así la orientación y magnitud de la anisotropía en cada una de las celdas. Ésto podría ayudar aún más al incremento en la precisión de los resultados.

La metodología convencional, mediante la simulación de leyes incluyendo sólo una dirección principal de anisotropía dista mucho, en términos del desempeño de la estimación, con respecto a la metodología que incluye direcciones variables. Para la primera metodología, por un lado, se obtiene una buena reproducción del histograma de los datos de entrada, por lo que las realizaciones son válidas. Sin embargo, el problema se produce en la poca correlación existente entre los datos de pozos de tronadura y los de sondajes, por lo que, la selección de la vecindad mediante distancias euclidianas no es la mejor opción. Es necesario, por lo tanto, incluir un campo de direcciones variables. Para esta segunda metodología es importante mencionar que no fue capaz de conservar las propiedades estadísticas de los datos de entrada, debiéndose esto a la ya mencionada distorsión de las distancias al momento de cambiar la dimensionalidad del espacio, por lo que la selección de la vecindad escogida para la simulación de leyes se realiza de manera distinta. Se recomienda el estudio de la distorsión del histograma para la simulación bajo un campo de direcciones variables.

Como resultado de lo anterior, se obtiene un aumento en el coeficiente de correlación entre las realizaciones y la realidad, variando en forma positiva a medida que se agrega mayor densidad de información, mientras que para la simulación convencional no se observa un comportamiento predecible para la correlación de los datos.

Además se logran mejores resultados, en términos de la planificación minera, al estimar el contenido de metal para una cierta ley de cobre en el depósito. En este análisis sí es de gran incidencia el número de sondajes con los que se cuenta, ya que, en este caso, un 30% menos de información resultó en una sobre estimación del contenido de metal de un 50% con respecto a la realidad proveniente de la información de los pozos de tronadura guardados para la validación, mientras que con el total de sondajes la sobre estimación fue sólo de un 0.6%. Utilizar un campo de direcciones variables fue clave para este caso de estudio.

Bibliografía

- Boisvert, J., Deutsch, C. V., 2010. *Programs for kriging and sequential Gaussian simulation with locally varying anisotropy using non-Euclidean distances*. Computers and Geosciences 37, 495 a 510.
- Christakos, G., 1984. *On the problem of permissible covariance and variogram models*. WaterResourcesResearch 20, 251 a 265.
- Curriero F., 1996. *The use of non-Euclidean distance in geostatistics*. Ph.D. Thesis, Kansas State University, 213p.
- Curriero F., 2005. *On the use of non-Euclidean distance measures in geostatistics*. Mathematical Geology, 38(8):907 a 926.
- Dijkstra E., 1959. *A note on two problems in connection with graphs*. In Numerische Mathematik. 1: 269- 271.
- Emery, X., 2003. *Simulación Estocástica y Geoestadística No Lineal*. Departamento de Ingeniería de Minas - Universidad de Chile.
- Emery X., 2005. *Variograms of Order w: A Tool to Validate a Bivariate Distribution Model*. Mathematical Geology, Vol. 37, n.º2, p. 163 a 181.
- Leeder, M and Perez-Arlucea, M. 2006. *Physical Processes in Earth and Environmental Sciences*. Blackwell Publishing, Oxford, 321p.
- van der Maaten L., Postma E. and van den Herik H., 2008. *Dimensionality reduction: A comparative review*. Maastricht University. Elsevier. 22p.
- Mardia K., Kent J. and Bibby J., 1979. *Multivariate Analysis*. Academic Press, 521
- Matheron, G., 1963. *Principles of geostatistics*. Economic Geology 58, 1246 a 1266.
- Morris W., 1975. *The Heritage Illustrated Dictionary of the English Language: International Edition*. American Heritage Publishing Co. 1550p.
- Silva V. and Tenenbaum J., 2003. *Global versus local methods for nonlinear dimensionality reduction*. In Becker S, Thrun S and Obermayer K (eds.). Advances in Neural Information Processing Systems 15. MIT Press, Cambridge. 721-728.

- Slatt R., 2006. *Stratigraphic Reservoir Characterization for Petroleum Geologists, Geophysicists, and Engineers*. Elsevier, Oxford. 478p.
- Tenenbaum J., Silva V. and Langford J., 2000. *A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction*. Science, 290(550):2319 a 2323.

Anexos

Anexo A

Histogramas desagrupados para datos de sondajes

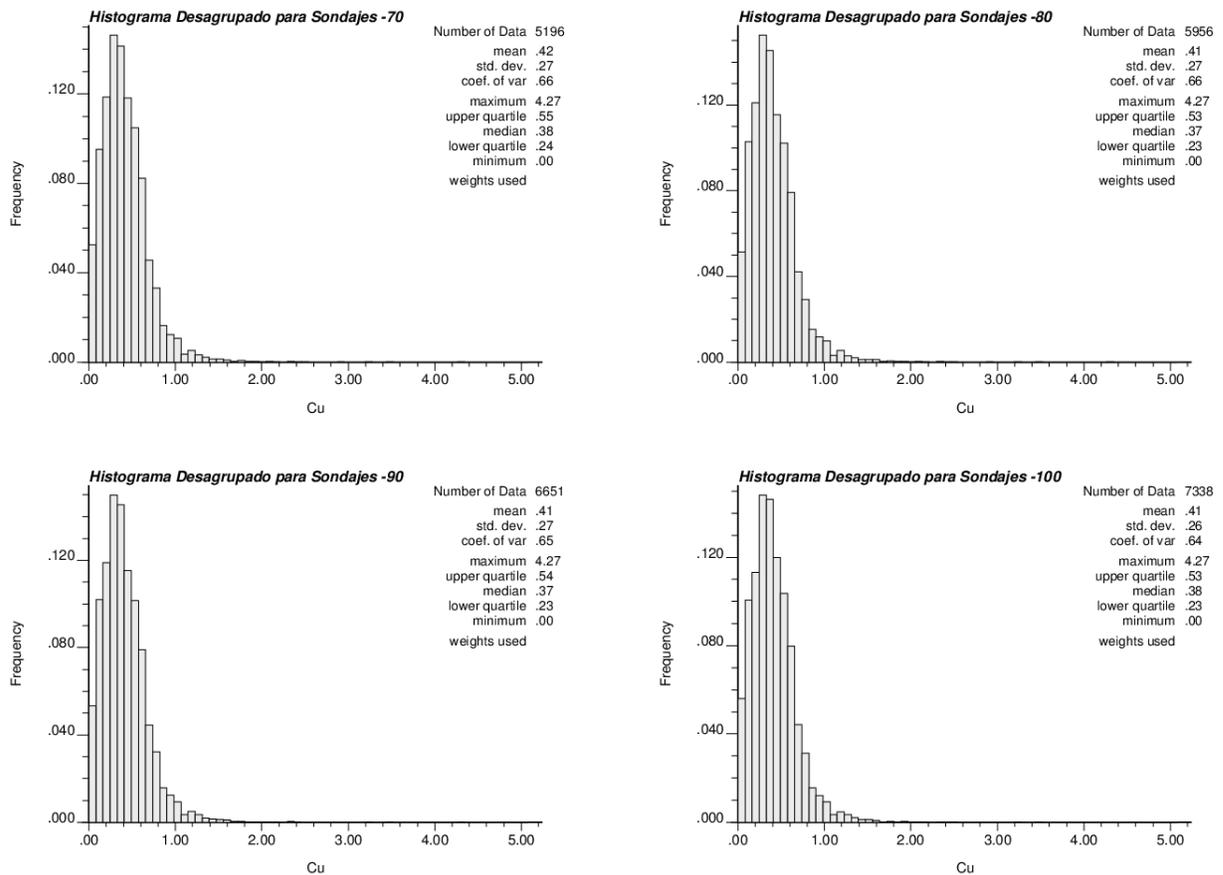


Figura A.1: Histogramas desagrupados para datos de sondajes.

Anexo B

Datos condicionantes para generación del campo LVA

Dato	X	Y	Z	Azimut	Dip
1	71775	83250	2375	90	-13.5
2	71925	83250	2375	90	11.3
3	72075	83250	2325	90	-42.0
4	72225	83250	2275	90	-38.7
5	72225	83250	2325	90	-39.4
6	72375	83250	2275	90	35.0
7	72375	83250	2325	90	43.8
8	72375	83250	2375	90	37.2
9	72525	83250	2325	90	16.7
10	72525	83250	2375	90	29.2
11	72675	83250	2375	90	0.1
12	72825	83250	2375	90	28.4
13	72825	83250	2425	90	35.0
14	72975	83250	2425	90	0.1
15	72975	83250	2475	90	-22.8
16	73125	83250	2425	90	-35.0
17	73125	83250	2475	90	-40.0
18	73275	83250	2375	90	-29.2
19	73425	83250	2325	90	-26.6
20	73425	83250	2375	90	-21.8
21	73575	83250	2275	90	-20.8
22	71775	83350	2375	90	-13.5
23	71925	83350	2375	90	11.3
24	72075	83350	2325	90	-42.0

Tabla B.1: Datos condicionantes para generación del campo LVA - pt. 1.

Dato	X	Y	Z	Azimut	Dip
25	72225	83350	2275	90	-38.7
26	72225	83350	2325	90	-39.4
27	72375	83350	2275	90	35.0
28	72375	83350	2325	90	43.8
29	72375	83350	2375	90	37.2
30	72525	83350	2325	90	16.7
31	72525	83350	2375	90	29.2
32	72675	83350	2375	90	0.1
33	72825	83350	2375	90	28.4
34	72825	83350	2425	90	35.0
35	72975	83350	2425	90	0.1
36	72975	83350	2475	90	-22.8
37	73125	83350	2425	90	-35.0
38	73125	83350	2475	90	-40.0
39	73275	83350	2375	90	-29.2
40	73425	83350	2325	90	-26.6
41	73425	83350	2375	90	-21.8
42	73575	83350	2275	90	-20.8
43	71775	83450	2375	90	-13.5
44	71925	83450	2375	90	11.3
45	72075	83450	2325	90	-42.0
46	72225	83450	2275	90	-38.7
47	72225	83450	2325	90	-39.4
48	72375	83450	2275	90	35.0
49	72375	83450	2325	90	43.8
50	72375	83450	2375	90	37.2
51	72525	83450	2325	90	16.7
52	72525	83450	2375	90	29.2
53	72675	83450	2375	90	0.1
54	72825	83450	2375	90	28.4
55	72825	83450	2425	90	35.0
56	72975	83450	2425	90	0.1
57	72975	83450	2475	90	-22.8
58	73125	83450	2425	90	-35.0
59	73125	83450	2475	90	-40.0
60	73275	83450	2375	90	-29.2
61	73425	83450	2325	90	-26.6
62	73425	83450	2375	90	-21.8
63	73575	83450	2275	90	-20.8
64	71775	83550	2375	90	-13.5

Tabla B.2: Datos condicionantes para generación del campo LVA - pt. 2.

Dato	X	Y	Z	Azimut	Dip
65	71925	83550	2375	90	11.3
66	72075	83550	2325	90	-42.0
67	72225	83550	2275	90	-38.7
68	72225	83550	2325	90	-39.4
69	72375	83550	2275	90	35.0
70	72375	83550	2325	90	43.8

Tabla B.3: Datos condicionantes para generación del campo LVA - pt. 3.

Anexo C

Validación de Resultados

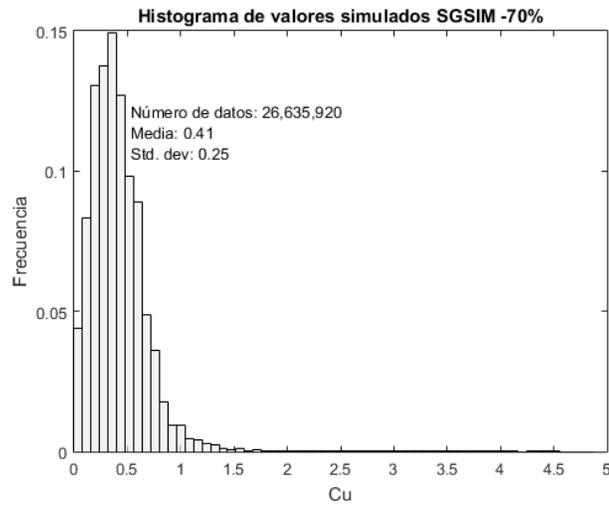


Figura C.1: Histograma de todos los valores simulados mediante SGSIM para el caso con el 70% de los datos. Media, desv. est. y varianza de la distribución de referencia: 0.42, 0.27 y 0.073 respectivamente.

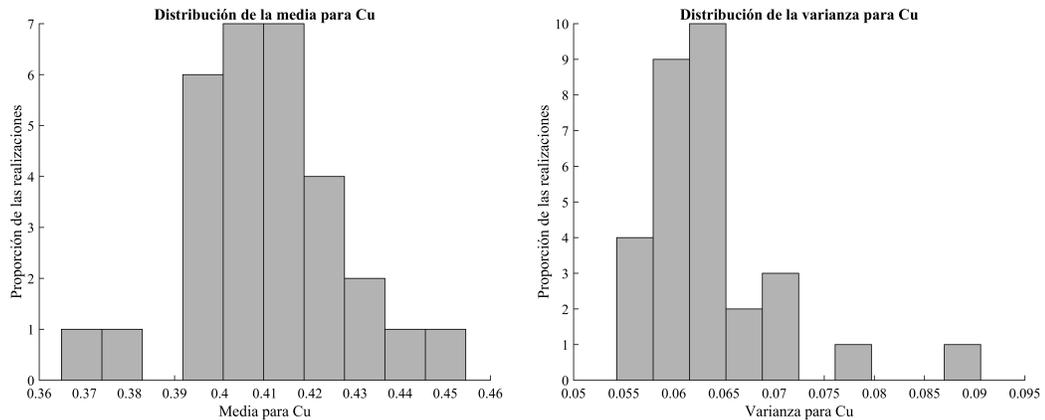


Figura C.2: Media y varianza para realizaciones mediante SGSIM - 70%.

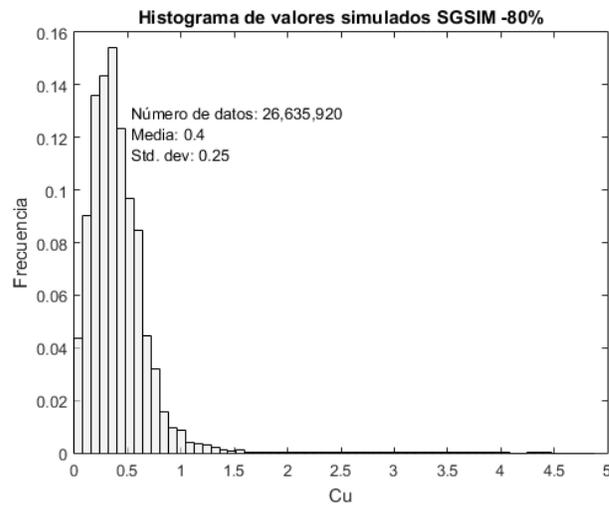


Figura C.3: Histograma de todos los valores simulados mediante SGSIM para el caso con el 80% de los datos. Media, dev. est. y varianza de la distribución de referencia: 0.41, 0.27 y 0.073 respectivamente.

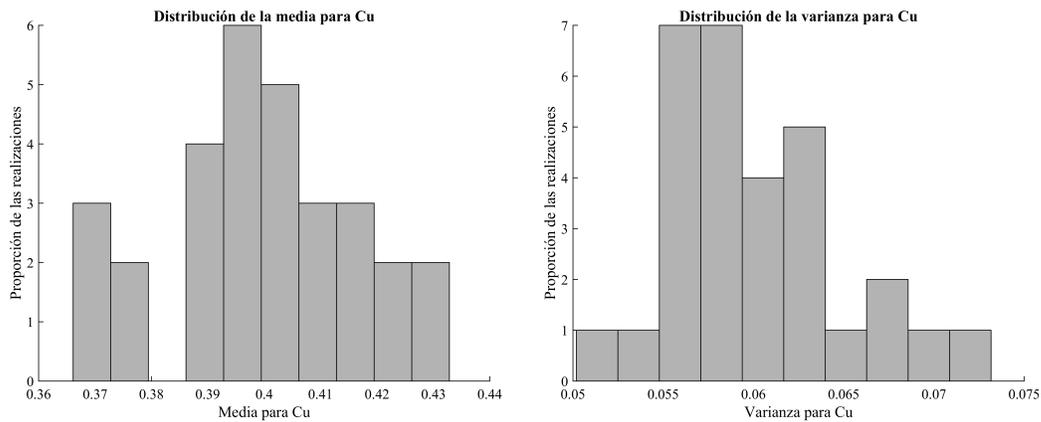


Figura C.4: Media y varianza para realizaciones mediante SGSIM - 80%.

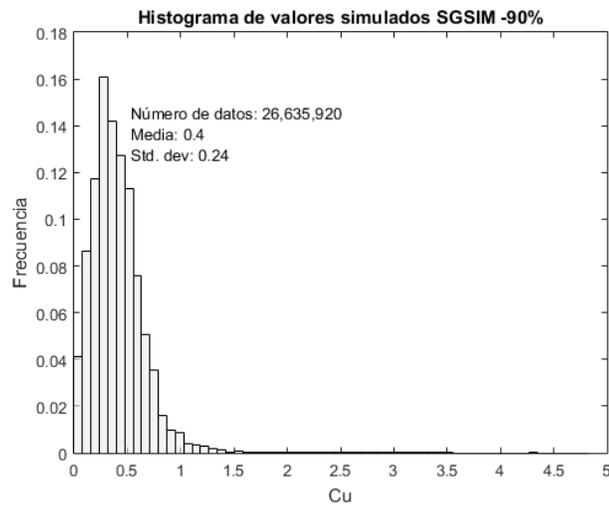


Figura C.5: Histograma de todos los valores simulados mediante SGSIM para el caso con el 90% de los datos. Media, desv. est. y varianza de la distribución de referencia: 0.41, 0.27 y 0.073 respectivamente.

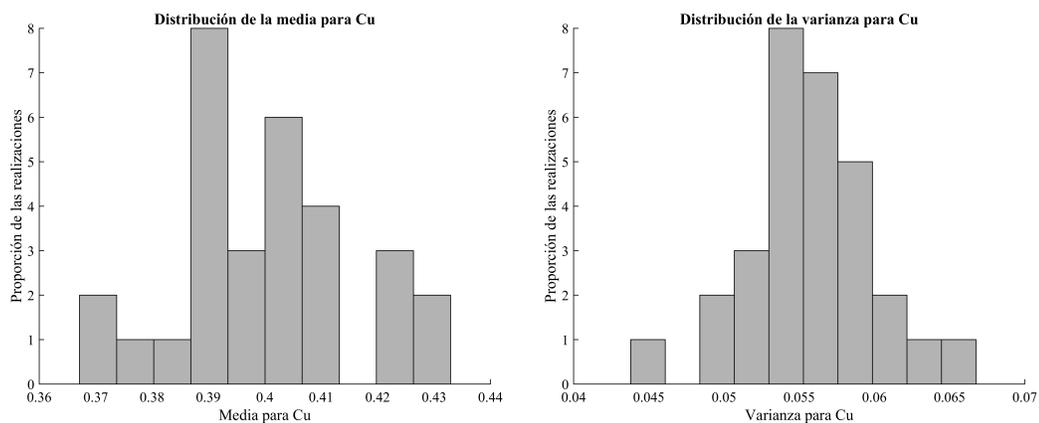


Figura C.6: Media y varianza para realizaciones mediante SGSIM - 90%.

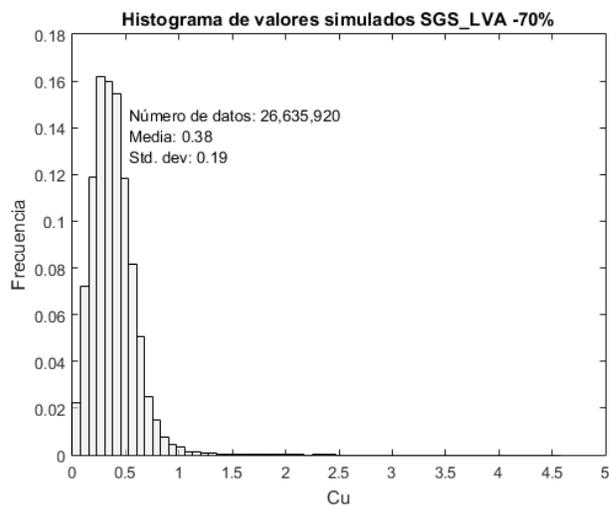


Figura C.7: Histograma de todos los valores simulados mediante SGS_LVA para el caso con el 70% de los datos. Media, dev. est. y varianza de la distribución de referencia: 0.42, 0.27 y 0.073 respectivamente.

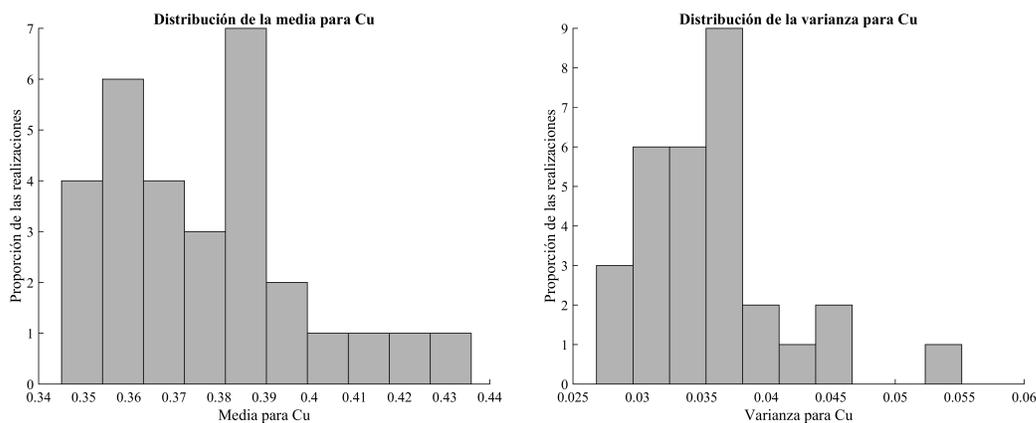


Figura C.8: Media y varianza para realizaciones mediante SGS_LVA - 70%.

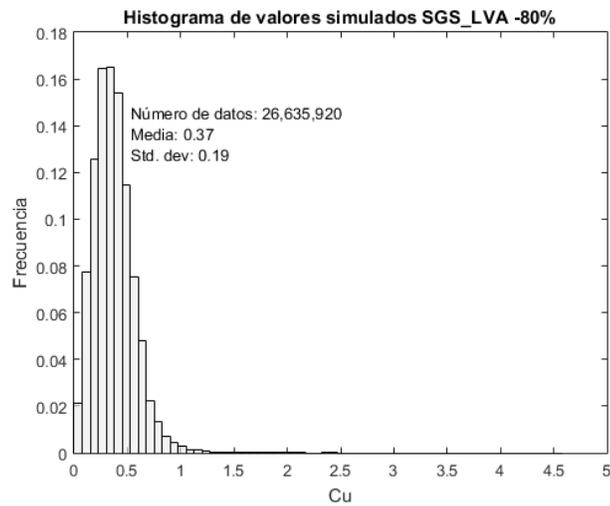


Figura C.9: Histograma de todos los valores simulados mediante SGS_LVA para el caso con el 80% de los datos. Media, desv. est. y varianza de la distribución de referencia: 0.41, 0.27 y 0.073 respectivamente.

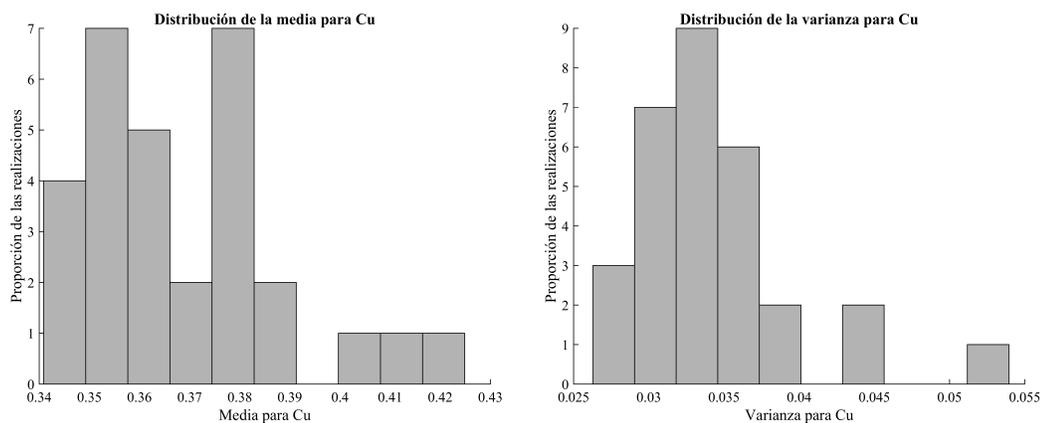


Figura C.10: Media y varianza para realizaciones mediante SGS_LVA - 80%.

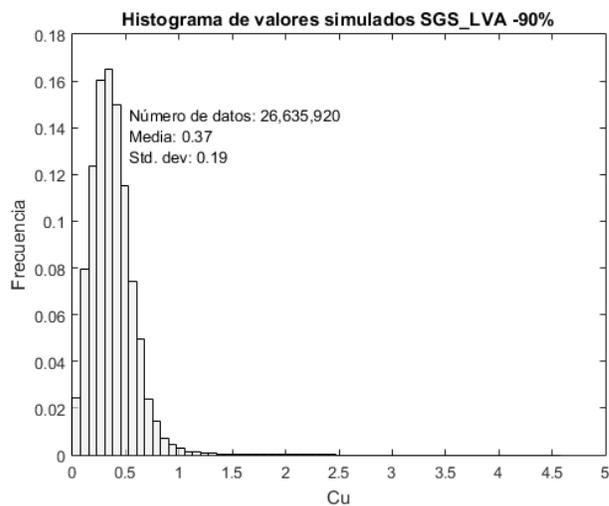


Figura C.11: Histograma de todos los valores simulados mediante SGS_LVA para el caso con el 90% de los datos. Media, desv. est. y varianza de la distribución de referencia: 0.41, 0.27 y 0.073 respectivamente.

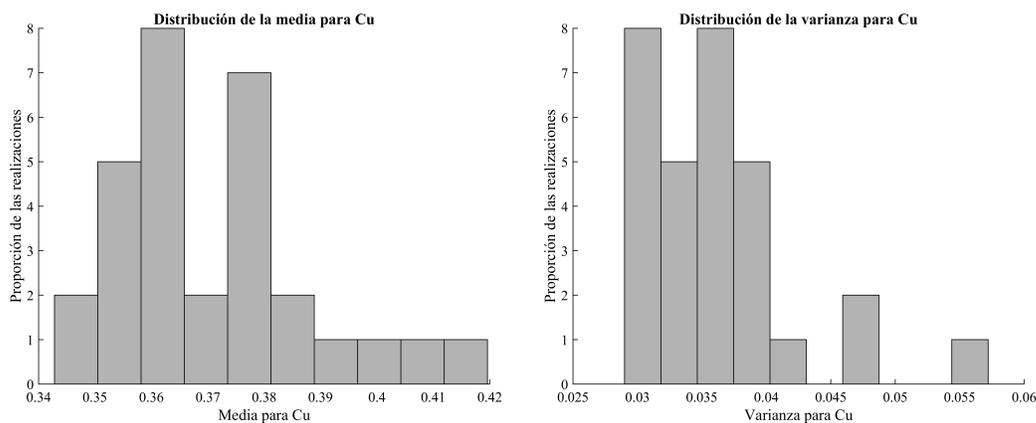


Figura C.12: Media y varianza para realizaciones mediante SGS_LVA - 90%.