



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

**ESTUDIO EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO DE LOS MODOS NORMALES  
DE CUERPOS DE AGUA SOMEROS Y LA INFLUENCIA DE ESTOS EN  
EL TRANSPORTE HORIZONTAL DE MASA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

JONAS SIMÓN VALDIVIESO BRAVO

PROFESOR GUÍA:  
ALBERTO DE LA FUENTE STRANGER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
YARKO NIÑO CAMPOS  
CLAUDIO FALCÓN BEAS

SANTIAGO DE CHILE  
2016



RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL  
POR: JONAS SIMÓN VALDIVIESO BRAVO  
FECHA: 2016  
PROF. GUÍA: SR. ALBERTO DE LA FUENTE STRANGER

## **ESTUDIO EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO DE LOS MODOS NORMALES DE CUERPOS DE AGUA SOMEROS Y LA INFLUENCIA DE ESTOS EN EL TRANSPORTE HORIZONTAL DE MASA**

El trabajo de título realizado consistió en la aplicación del análisis modal a sistemas oscilantes que correspondieron a cuerpos de agua someros, con el que se obtuvieron las formas en que oscila el agua contenida en estos cuerpos, sus frecuencias respectivas, sus evoluciones y su relación con el transporte horizontal de masa. Este análisis se logra gracias a la simplificación que consiste en considerar que las propiedades en la vertical pueden ser representadas por valores promedios o integrados al ser poca la profundidad de estos cuerpos. Gracias a esta simplificación, se obtienen soluciones del tipo oscilante que resuelven las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos. El objetivo general es obtener los modos normales, numérica y experimentalmente, en función de la forma y batimetría de los cuerpos de agua y determinar como los campos de velocidades, que son consecuencia de cada modo, influyen en el transporte horizontal de masa.

Para comprender el sistema, se abordaron básicamente dos fenómenos: la dinámica de los modos normales y el transporte de masa.

Para desarrollar el estudio numérico, se utilizó el modelo numérico implementado por Pérez (2015) para determinar los modos normales de cuerpos de aguas someras. El estudio experimental fue desarrollado utilizando una instalación la cual consistió en una maqueta que simulaba un cuerpo de agua somero circunferencial de 40[cm] de diámetro que vibraba horizontalmente. Con un sensor ADV se determinaron las velocidades alcanzadas y mediante registros de videos, los coeficientes de dispersión de una solución de colorante artificial azul brillante.

Luego del análisis de los resultados, se concluye que existen diferencias entre las frecuencias de los modos normales calculadas numéricamente y las obtenidas mediante los experimentos. Además, se observan fenómenos como perturbaciones que oscilan con una frecuencia igual a la del modo fundamental ( $n=1$ ) una vez detenido el motor que hace vibrar al cuerpo somero. Se observa también que este modo es inestable presentando un campo de velocidades circular.

Se tiene que el decaimiento de las series de velocidad al final de cada experimento depende de la profundidad del cuerpo de agua y obedece relaciones propuestas por otros autores, validando los procedimientos y el registro de datos.

Por último, se concluye que el coeficiente de dispersión de la solución utilizada depende muy fuertemente de la escala de longitud en que actúa este fenómeno. Aunque se observan comportamientos anómalos para las escalas de longitudes utilizadas en este trabajo, los valores de los coeficientes de dispersión se ajustan a relaciones encontradas por otros autores.





*Para Amanda*



# Agradecimientos

Le doy gracias a mis padres por el apoyo que me han brindado en este proceso y en los procesos previos. Que sepan que valoro mucho todo lo que han hecho por mi durante mis 25 años de vida.

Le doy gracias a mis hermanos por el constante interés que han demostrado por mi durante el desarrollo de esta etapa.

Agradezco a mi profesor guía Alberto de la Fuente por tenerme paciencia en lo que respecta a consultas, dudas y a plazos. Gran parte de lo que aprendí durante el desarrollo de la memoria se lo debo a él, al igual que la experiencia ganada en terreno.

Agradezco a mis viejos amigos de la U: Demi, Ichi, Oro y Maya, por tantas horas de re-lajo, muy necesarias cuando uno está estresado y lleno de cosas que hacer. Espero que esta amistad perdure y la pandilla del Joni se siga reuniendo a pesar de los compromisos laborales y familiares que cada uno pueda adquirir en el futuro. ¡Los quiero niños!

Agradezco también a las secretarias más bacanes de la universidad: la Jacqui y la Paty. Ambas dispuestas no solo a cumplir su labor en sus respectivos puestos de trabajo, sino que también a dar consejos sobre distintas situaciones, académicas y no académicas. ¡Muchas gracias a ambas por su paciencia!

Agradezco especialmente a mi polola Valentina Langan, a quien conocí cuando ya llevaba recorrida la mitad de este trabajo. Agradezco su constante interés, preocupación y el que me aguante todas mis tonteras. Agradezco el hecho de que esté siempre cuando la necesito. Desde que llegó a mi vida, no ha hecho más que hacerme feliz y darme muy buenos momentos, los mejores. Lejos, lo mejor que me ha pasado. Por todo lo anterior, ha sido un apoyo fundamental en las etapas finales de mi memoria.

Agradezco a todas las personas que han sido parte de mi vida y a las que ahora lo son, llenándome de buena onda, la cual ha sido fundamental para seguir motivado y haciendo lo que me gusta.

Este trabajo de título fue parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt 1140821

Miau!



# Tabla de Contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.2.1. Generales . . . . .	3
1.2.2. Específicos . . . . .	3
1.3. Metodología . . . . .	3
1.3.1. Marco teórico . . . . .	3
1.3.2. Simulaciones numéricas . . . . .	4
1.3.3. Análisis experimental . . . . .	4
1.3.4. Análisis de resultados . . . . .	4
1.4. Contenidos del informe . . . . .	4
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Introducción . . . . .	6
2.2. Termo-hidrodinámica de lagunas someras . . . . .	7
2.3. Estudio Teórico . . . . .	9
2.3.1. Dinámica de Fluidos . . . . .	9
2.3.2. Tasas de Decaimiento . . . . .	12
2.3.3. Dispersión . . . . .	13
2.4. Conclusiones . . . . .	14
<b>3. Análisis Numérico</b>	<b>16</b>
3.1. Aspectos generales . . . . .	16
3.1.1. Malla Numérica . . . . .	16
3.1.2. Parámetros utilizados . . . . .	17
<b>4. Estudio Experimental</b>	<b>19</b>
4.1. Descripción general . . . . .	19
4.2. Instrumentación . . . . .	23
4.2.1. Acelerómetro . . . . .	23
4.2.2. ADV . . . . .	24
4.2.3. Tacómetro . . . . .	24
4.2.4. GoPro . . . . .	25
4.3. Metodología Experimental . . . . .	25
4.3.1. Experimentos de Dinámica de Modos . . . . .	25
4.4. Experimentos de Coeficiente de Dispersión . . . . .	26

4.5. Procesamiento de Datos . . . . .	27
<b>5. Resultados Numéricos y Experimentales de la Dinámica de los Modos</b>	<b>28</b>
5.1. Resultados numéricos . . . . .	28
5.2. Resultados experimentales . . . . .	30
5.2.1. Análisis de Series de Velocidad . . . . .	30
5.2.2. Velocidades Máximas . . . . .	44
5.2.3. Tasas de Decaimiento . . . . .	45
<b>6. Resultados Experimentales de Dispersión de Sustancias</b>	<b>51</b>
6.1. Relación entre la saturación en la escala de grises y la concentración integrada en la vertical . . . . .	51
6.2. Procesamiento de Videos y Coeficientes de Dispersión Resultantes . . . . .	53
<b>7. Conclusiones y Comentarios</b>	<b>66</b>
<b>8. Bibliografía</b>	<b>68</b>

# Índice de Tablas

5.1.	Frecuencias normales encontradas con el modelo numérico ( $w_1, w_2$ y $w_3$ ) y encontradas experimentalmente ( $w_1^*, w_2^*$ y $w_3^*$ ) . . . . .	28
5.2.	Frecuencias definitivas a utilizar en los experimentos de las series de velocidades en el agua y en los del coeficiente de dispersión. . . . .	30
5.3.	Velocidades máximas en el eje x para todos los puntos ( $V_{x-n}$ corresponde a la velocidad medida en el punto n de medición). . . . .	44
5.4.	Velocidades máximas en el eje y para todos los puntos ( $V_{y-n}$ corresponde a la velocidad medida en el punto n de medición). . . . .	44
5.5.	Tasas de decaimiento e intervalo de confianza de un 95 % para las series de velocidad en su componente x ( $b_{x-n}$ , donde n es el punto de medición). . . . .	45
5.6.	Tasas de decaimiento e intervalo de confianza de un 95 % para las series de velocidad en su componente y ( $b_{y-n}$ , donde n es el punto de medición). . . . .	45
5.7.	Estadística de los valores de las tasas de decaimiento de las series de velocidad en el eje x. . . . .	47
5.8.	Estadística de los valores de las tasas de decaimiento de las series de velocidad en el eje y. . . . .	47
5.9.	Promedio de las tasas de decaimiento con distinta frecuencia y para una misma altura. Los datos corresponden a las tasas de decaimiento de las series de velocidad en el eje x. . . . .	49
5.10.	Datos de decaimiento y profundidad presentados por Wüest et al. (2000) en distintos cuerpos de agua. . . . .	49
6.1.	$K_{ax}$ y el intervalo de confianza para todas las frecuencias y para todas las alturas. . . . .	58
6.2.	$K_{ay}$ y el intervalo de confianza para todas las frecuencias y para todas las alturas. . . . .	58
6.3.	Largo en el eje x de las manchas asociadas a los coeficientes de dispersión en el mismo eje. . . . .	60
6.4.	Largo en el eje y de las manchas asociadas a los coeficientes de dispersión en el mismo eje. . . . .	60
6.5.	Estadística de los valores de los coeficientes de dispersión en el eje x. . . . .	61
6.6.	Estadística de los valores de los coeficientes de dispersión en el eje y. . . . .	61
6.7.	Datos Okubo (1995). . . . .	63

# Índice de Ilustraciones

2.1.	(A) Imagen satelital del salar del Huasco. (B) Imagen general de las cercanías del salar. (C) Condiciones de terreno sin presencia de viento y (D), con presencia de viento en la tarde en donde se generan olas y se observa resuspensión del sedimento. <i>Fuente: de la Fuente &amp; Niño (2014)</i> . . . . .	7
2.2.	Sección transversal y distribución de velocidades promediadas en la vertical en el plano $x=0$ . El perfil de velocidades promediadas muestra jets en las regiones someras. <i>Fuente: Kranenburg (1992)</i> . . . . .	8
2.3.	Ciclos temporales de las variables meteorológicas. Velocidad del viento, dirección del viento, temperatura del aire, humedad relativa, radiación de onda corta entrante al sistema y presión atmosférica. <i>Fuente: de la Fuente &amp; Niño (2010)</i> . . . . .	9
2.4.	Relación entre el coeficiente de dispersión aparente y la escala de difusión para los experimentos señalados. <i>Fuente: Okubo (1995)</i> . . . . .	14
3.1.	Implementación de la malla alternada o staggered. Los cuadrados negros son los nodos en donde se resuelve la variable $\eta$ . Los triángulos que apuntan hacia la derecha son los nodos de la componente $x$ de velocidad y los triángulos que apuntan hacia arriba son los nodos de la componente $y$ de velocidad. El espaciamiento entre puntos está aumentado para facilitar la visualización. B) Distribución espacial de batimetría. <i>Fuente: Pérez (2015)</i> . . . . .	17
4.1.	Instalación experimental . . . . .	19
4.2.	Esquema instalación experimental. <i>Fuente: Pérez, 2015</i> . . . . .	20
4.3.	Motor . . . . .	21
4.4.	Tacómetro. . . . .	21
4.5.	Acelerómetro . . . . .	21
4.6.	Cabezal ADV. <i>Fuente: Pérez (2015)</i> . . . . .	22
4.7.	ADV montado en la instalación. . . . .	22
4.8.	GoPro. . . . .	23
4.9.	GoPro montada en la instalación. . . . .	23
4.10.	Puntos de medición ADV. $R/4$ corresponde a $1/4$ del radio $R$ cuyo valor es de $20[\text{cm}]$ , es decir, los puntos 1, 2, 3 y 4 se encuentran a $5[\text{cm}]$ del centro. . . .	26



5.1. Estructuras espaciales de los modos normales calculados. De arriba hacia abajo, el modo $n=1$ , modo $n=2$ y el modo $n=3$ con simetría longitudinal. El color rojo simboliza $1 \cdot \eta_{max}$ , es decir, a la máxima altura de superficie libre alcanzada, mientras que el color azul representa $-1 \cdot \eta_{max}$ , es decir, a la mínima altura de superficie libre alcanzada. R corresponde al radio de la maqueta el cual tiene un valor de a 20 [cm], mientras que x e y corresponden a las coordenadas cartesianas del modelo. . . . .	29
5.2. Envolvente de los últimos 60 segundos de datos, para $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_2^*=125.5$ [RPM] en el punto 5 de medición. . . . .	31
5.3. Ajuste de los últimos 60 segundos de datos. $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_2^*=125.5$ [RPM] en el punto 5 de medición. . . . .	31
5.4. Análisis de Wavelets para altura máxima. $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_2^*=125.5$ [RPM] en el punto 5 de medición. En línea blanca continua la frecuencia forzante y en línea discontinua la frecuencia fundamental ( $n=1$ ) . . . . .	32
5.5. Componentes x e y para altura máxima $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_2^*=125.5$ [RPM] en el punto 5 de medición. . . . .	33
5.6. Espectro de la serie de aceleración para $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_2^*=125.5$ [RPM] en el punto 5 de medición. En línea continua el espectro, en discontinua la frecuencia forzante . . . . .	34
5.7. Análisis de Wavelets para altura máxima. $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_{2-3}^*=149.8$ [RPM] en el punto 5 de medición. En línea blanca continua la frecuencia forzante y en línea discontinua la frecuencia fundamental ( $n=1$ ) . . . . .	35
5.8. Ajuste exponencial y tasa de decaimiento para altura máxima $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_{2-3}^*=149.8$ [RPM]] en el punto 5 de medición. . . . .	36
5.9. Componentes x e y para altura máxima $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_{2-3}^*=149.8$ [RPM]] en el punto 5 de medición. . . . .	37
5.10. Espectro de la serie de aceleración para $h_0 = 3.6$ [cm] y frecuencia $w_{2-3}^*=149.8$ [RPM]] en el punto 5 de medición. En línea continua el espectro, en discontinua la frecuencia forzante. . . . .	37
5.11. Análisis de Wavelets para altura máxima. $h_0 = 4.5$ [cm] y frecuencia $w_2^*=139.0$ [RPM] en el punto 5 de medición. En línea blanca continua la frecuencia forzante y en línea discontinua la frecuencia fundamental ( $n=1$ ) . . . . .	38
5.12. Ajuste exponencial y tasa de decaimiento para altura máxima $h_0 = 4.5$ [cm] y frecuencia $w_2^*=139.0$ [RPM]] en el punto 5 de medición. . . . .	39
5.13. Componentes x e y para altura máxima $h_0 = 4.5$ [cm] y frecuencia $w_2^*=139.0$ [RPM]] en el punto 5 de medición. . . . .	40
5.14. Espectro de la serie de aceleración para $h_0 = 4.5$ [cm] y frecuencia $w_2^*=139.0$ [RPM]] en el punto 5 de medición. En línea continua el espectro, en discontinua la frecuencia forzante. . . . .	40
5.15. Análisis de Wavelets para altura máxima. $h_0 = 4.5$ [cm] y frecuencia $w_{2-3}^*=168.0$ [RPM] en el punto 5 de medición. En línea blanca continua la frecuencia forzante y en línea discontinua la frecuencia fundamental ( $n=1$ ) . . . . .	41
5.16. Ajuste exponencial y tasa de decaimiento para altura máxima $h_0 = 4.5$ [cm] y frecuencia $w_{2-3}^*=168.0$ [RPM]] en el punto 5 de medición. . . . .	42
5.17. Componentes x e y para altura máxima $h_0 = 4.5$ [cm] y frecuencia $w_{2-3}^*=168.0$ [RPM]] en el punto 5 de medición. . . . .	43

5.18. Espectro de la serie de aceleración para $h_0 = 4.5 [cm]$ y frecuencia $w_{2-3}^* = 168.0 [RPM]$ en el punto 5 de medición. En línea continua el espectro, en discontinua la frecuencia forzante . . . . .	43
5.19. Tasas de decaimiento en función de la frecuencia del forzante. Los marcadores de mayor tamaño indican la tasa de decaimiento asociada al punto 5 de medición. . . . .	46
5.20. Tasas de decaimiento en función de la profundidad del cuerpo de agua. . . . .	46
5.21. Histograma de las tasas de decaimiento de las serie de velocidad en el eje x. . . . .	48
5.22. Histograma de las tasas de decaimiento de las serie de velocidad en el eje y. . . . .	48
5.23. Tasas de decaimiento en función de la profundidad del cuerpo de agua. En el gráfico se muestran los datos presentados por Wüest et al. (2000), los resultados del presente trabajo y una relación ajustada de forma potencial. La tasa de decaimiento es notada como “b” y la profundidad como “H”. . . . .	50
6.1. Muestras utilizadas para obtener la relación saturación-concentración. . . . .	52
6.2. Relación Saturación-Concentración integrada. . . . .	53
6.3. Imagen de experimento antes y después de filtrar. $h_0 = 4.0 [cm]$ y $w_{2-3} = 164.1 [RPM]$ . . . . .	54
6.4. Mancha con el modo $n=1$ ya inestabilizado. $h_0 = 4.5 [cm]$ y $w_1 = 53.0 [RPM]$ . . . . .	54
6.5. Mancha expandiéndose para 0.0 [s], 1.0 [s], 2.0 [s], 4.0 [s] , 8.0 [s] y 16.0 [s]. $h_0 = 4.0 [cm]$ y $w_{2-3} = 164.1 [RPM]$ . . . . .	55
6.6. $M_{0xy}$ para $h_0 = 4.0[cm]$ y $w_{2-3} = 164.1[RPM]$ . G1, G2, G3, G4 y G5 corresponden a los 5 experimentos realizados bajo las condiciones de altura y frecuencia antes mencionado. . . . .	56
6.7. $M_{2x}/M_{0xy}$ para $h_0 = 4.0[cm]$ y $w_{2-3} = 161.4[RPM]$ . G1, G2, G3, G4 y G5 corresponden a los 5 experimentos realizados bajo las condiciones de altura y frecuencia antes mencionado. . . . .	57
6.8. $M_{2y}/M_{0xy}$ para $h_0 = 4.0[cm]$ y $w_{2-3} = 161.4[RPM]$ . G1, G2, G3, G4 y G5 corresponden a los 5 experimentos realizados bajo las condiciones de altura y frecuencia antes mencionado. . . . .	57
6.9. Coeficientes de dispersión en función de la frecuencia del forzante. . . . .	59
6.10. Coeficientes de dispersión en función de la profundidad del cuerpo de agua. . . . .	59
6.11. Histograma de los coeficientes de dispersión en el eje x. . . . .	62
6.12. Histograma de los coeficientes de dispersión en el eje y. . . . .	62
6.13. Gráfico de Coeficiente de Dispersión en función de la Longitud característica. . . . .	64
6.14. Gráfico de Coeficiente de Dispersión en función de la Longitud característica para resultados de este trabajo. . . . .	64
8.1. A) Serie de aceleraciones sin filtrar para $h_0 = 3.6 [cm]$ y $w_3 = 173.8 [RPM]$ . B) Serie de aceleraciones filtradas y con media móvil en torno a 6 puntos aplicada para $h_0 = 3.6 [cm]$ y $w_3 = 173.8 [RPM]$ . . . . .	70
8.2. A) Serie de aceleraciones sin filtrar para $h_0 = 4.0[cm]$ y $w_3 = 187.0 [RPM]$ . B) Serie de aceleraciones filtradas y con media móvil en torno a 6 puntos aplicada para $h_0 = 4.0 [cm]$ y $w_3 = 187.0 [RPM]$ . . . . .	71
8.3. A) Serie de aceleraciones sin filtrar para $h_0 = 4.5 [cm]$ y $w_3 = 195.0 [RPM]$ . B) Serie de aceleraciones filtradas y con media móvil en torno a 6 puntos aplicada para $h_0 = 4.5 [cm]$ y $w_3 = 195.0 [RPM]$ . . . . .	71

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

En el presente trabajo de título se estudió el proceso físico asociado a oscilaciones libres de la superficie del agua en cuerpos de poca profundidad utilizando tres batimetrías distintas. Las oscilaciones libres corresponden a oscilaciones originadas por un forzante externo el cual al dejar de actuar, hace que el sistema vuelva al reposo por amortiguación o decaimiento.

Este trabajo surge de básicamente dos motivaciones principales. La primera de ellas es alcanzar algún grado de comprensión de la dinámica de las oscilaciones en la superficie de estos tipos de cuerpos acuáticos. Se tiene que cualquier oscilación puede ser representada como una superposición de soluciones lineales independientes llamadas modos normales. Interesa de forma particular analizar este tipo de soluciones y la interacción entre ellas. La segunda motivación, un tanto mas práctica, consiste en que una vez obtenidas las soluciones en forma de modos, se puede asociar el campo de velocidades obtenido a procesos de transporte de propiedades. Siguiendo esta línea, por ejemplo, se pueden estudiar patrones o distribuciones en el espacio de compuestos químicos y microorganismos en sistemas cerrados. Un caso particular de esta aplicación son las lagunas altiplánicas en donde existen sensibles ecosistemas, cuyo balance hídrico está usualmente determinado sólo por el afloramiento y posterior evaporación de aguas subterráneas (de la Fuente y Niño, 2010). En estos cuerpos de agua, se podría estudiar como se distribuye el oxígeno o algún nutriente, gracias a la campos de velocidades generados por el viento, afectando así a la alimentación de la fauna de la zona, entre la que se encuentran los *Phoenicopterus spp.*, *Charadrius alticola*, *Chroicocephalus serranus*, entre otros. Un ejemplo de estos cuerpos de agua es el Salar del Huasco ubicado en la Región de Iquique el cual formó parte de una visita enmarcada en esta memoria.

Para obtener las frecuencias y las estructuras espaciales de los modos, se utilizó el modelo implementado por Pérez (2015), desarrollado durante su memoria en del Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, el cual está basado en el esquema de Shimizu e Imberger (2008). Además, se utilizó una instalación experimental que consiste en en una maqueta que simula un cuerpo de agua somero circunferencial de 40 [cm] de diámetro y cuya máxima

profundidad de agua variaba entre 3.6 [cm] y 4.5 [cm]. Esta maqueta fue forzada a vibrar de forma horizontal (en una dirección perpendicular al vector de aceleración de gravedad) utilizando un motor, para que de esta manera, los modos normales se excitaran y pudiesen ser estudiados.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Generales

Determinar los modos normales de sistemas acuáticos someros en función de su geometría y batimetría para luego definir como estos afectan el transporte horizontal.

### 1.2.2. Específicos

1. Establecer un marco teórico asociado al fenómeno de oscilación en sistemas acuáticos someros, es decir, a la aparición en el tiempo campos de velocidades y deformaciones superficiales estacionarios y armónicos.
2. Utilizar el modelo numérico desarrollado por Pérez (2015) que permite obtener los modos normales de oscilación de cuerpos poco profundos considerando las formas y batimetrías propias de los cuerpos de agua en estudio.
3. Estudiar a nivel experimental la generación de oscilaciones forzando a la maqueta de radio 40 [cm] a oscilar a las frecuencias naturales y observar como esto afecta el transporte horizontal.

## 1.3. Metodología

Para el cumplimiento de los objetivos, se desarrollará la siguiente metodología:

### 1.3.1. Marco teórico

Se establece un marco teórico mediante una revisión bibliográfica que abarque la gran mayoría de los aspectos relacionados con los sistemas someros y las oscilaciones en estos. En particular, interesan las variables termohidrodinámicas, dinámicas y de transporte.

Se efectúa un análisis teórico de las ecuaciones de continuidad y conservación de momento, el cual consta de expresar estas en forma matricial, para luego proponer soluciones que tienen la forma de modos, convirtiendo el problema en otros dos equivalentes: primero, se presenta un problema de vectores y valores propios para obtener las estructuras y frecuencias modales y segundo, una ecuación diferencial para la amplitud del modo. Además, se presenta un estudio que resume resultados de tasas de decaimiento de las oscilaciones y propone dependencias entre estas y variables geométricas asociadas a la profundidad de los cuerpos.

Por último, se efectúa un análisis basado en el método de los momentos para poder calcular los valores asociados a los parámetros de dispersión de sustancias. Además, se presenta un

estudio que resume coeficientes de dispersión calculados bajo distintas condiciones y propone dependencias entre estos y la escala en que ocurren estos fenómenos.

### **1.3.2. Simulaciones numéricas**

A partir de los resultados del estudio de modos, se identifican las frecuencias y amplitudes de los modos presentes en las oscilaciones de un cuerpo de agua con cierta forma y batimetría. Considerando esto y utilizando el modelo numérico implementado por Pérez (2015), escrito en Matlab®, se realizaron simulaciones numéricas variando parámetros para obtener la respuesta del sistema. Este modelo numérico resuelve las ecuaciones hidrodinámicas utilizando una malla numérica alternada y esquemas numéricos como Crank Nicolson o Análisis Modal.

### **1.3.3. Análisis experimental**

Se ejecutan una serie de experiencias para estudiar, en el laboratorio, la presencia y evolución de los modos normales en función de la forma y batimetría de los cuerpos de agua, además del transporte horizontal de trazadores. La instalación se encuentra ubicada en el laboratorio de Hidráulica del edificio de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile y consiste en una mesa vibratoria que se desplaza oscilatoriamente con frecuencias y amplitudes controladas. Las variables a medir en este experimento son los valores de velocidad del fluido (componentes ortogonales) en distintos puntos del cuerpo de agua y el coeficiente de dispersión de la solución de azul brillante en el agua. La velocidad se medirá mediante el uso de un sensor ADV mientras que el coeficiente de difusión del trazador se estimará mediante un análisis de momentos espaciales aplicado a imágenes obtenidas con una cámara de video GoPro Hero4. Estas variables serán medidas para tres batimetrías levemente diferentes las cuales utilizan una misma maqueta hecha de poliestireno expandido y se diferencian en la profundidad de agua que tiene el cuerpo contenido en esta maqueta.

### **1.3.4. Análisis de resultados**

Luego de las simulaciones numéricas y experiencias realizadas se procede a analizar los resultados y alcances del análisis modal, poniendo énfasis en cómo los modos de los cuerpos someros afectan al transporte horizontal, además de la evolución temporal de estos.

## **1.4. Contenidos del informe**

1. **Capítulo 1 “Introducción”** : Incluye la motivación, objetivos y metodología.
2. **Capítulo 2 “Marco Teórico”** : Se incluyen los antecedentes teóricos y las ecuaciones a utilizar.

3. **Capítulo 3 “Análisis Numérico”** : Este capítulo presenta las características generales del modelo numérico utilizado y de la metodología utilizada para obtener los modos normales de las tres batimetrías.
4. **Capítulo 4 “Estudio Experimental”** : En este capítulo se describe la instalación experimental, así como el procedimiento a utilizar para medir las variables relevantes. También se hace mención a las metodologías utilizadas para procesar los datos.
5. **Capítulo 5 “Resultados Numéricos y Experimentales de la Dinámica de los Modos”** : Se presentan los resultados del análisis numérico y del análisis experimental referido a la parte dinámica de los modos.
6. **Capítulo 6 “Resultados Experimentales de Dispersión de Sustancias”** : Se presentan los resultados del análisis experimental del estudio de dispersión de sustancias en el cuerpo somero de agua.
7. **Capítulo 7 “Conclusiones y comentarios”** : Este capítulo presenta las principales conclusiones del trabajo de memoria. También se recomiendan pasos a seguir para desarrollar aún más el tema del transporte de masa en cuerpos de agua someros.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Introducción

En el presente capítulo, se pretende mostrar los aspectos más relevantes asociados a los cuerpos de agua someros, particularmente, a las lagunas someras ubicadas en salares. Además, se pretende enmarcar teóricamente la obtención de las soluciones lineales de las ecuaciones simplificadas de continuidad y conservación de momentum llamadas modos normales de estas lagunas y el transporte horizontal de sustancias dentro de estos sistemas. Se citan publicaciones relacionadas con la termo-hidrodinámica de lagunas someras además de los procesos de transporte que gobiernan la distribución de sustancias y energía en estos cuerpos de agua. También se presentan los esquemas utilizados para establecer el marco teórico aplicado y obtener los modos normales. A continuación, en la Figura 2.1 se presenta una imagen en donde se puede observar este salar y su paisaje, además de parte del ecosistema asociado:



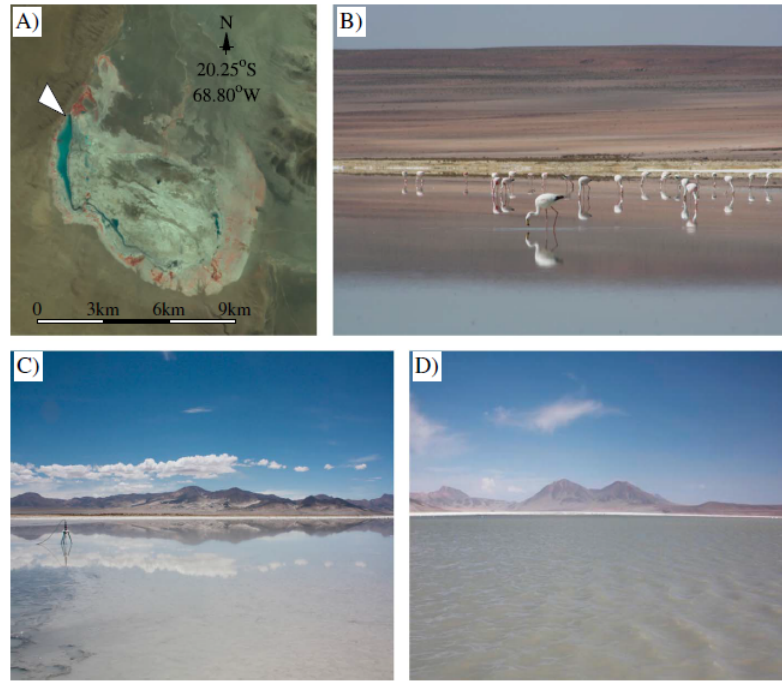


Figura 2.1: (A) Imagen satelital del salar del Huasco. (B) Imagen general de las cercanías del salar. (C) Condiciones de terreno sin presencia de viento y (D), con presencia de viento en la tarde en donde se generan olas y se observa resuspensión del sedimento. *Fuente: de la Fuente & Niño (2014).*

## 2.2. Termo-hidrodinámica de lagunas someras

Las lagunas someras ubicadas en el altiplano de países como Chile, Bolivia y Argentina sustentan importantes ecosistemas cuyo balance hidrológico está dado por flujos que entran proveniente de agua subterránea y flujos salientes que consisten principalmente en evaporación. En estas lagunas, las concentraciones de sal exhiben gradientes longitudinales. Estos gradientes de salinidad observados están relacionados con la estructura biológica y explicarían la existencia de áreas específicas de alimentación de los flamencos en el sistema (de la Fuente & Niño, 2010). Por lo anterior, es interesante estudiar las distribuciones de sustancias (como la sal u otros) y energía bajo condiciones estacionarias o pseudo-estacionarias de flujo como lo son los modos normales sin considerar interacción no lineal.

Latitudes cercanas al Trópico de Capricornio imponen un clima arido caracterizado por bajas precipitaciones y humedad de aire. Esto explica que las tasas potenciales de evaporación sean mayores que 1000 mm al año (Risacher et al., 2003) .

En los salares son encontrados sistemas acuáticos pequeños y superficiales sustentados por afloración de aguas subterráneas en el perímetro del salar (Risacher et al. 2003). Luego, cuando el agua subterránea aflora, es completamente evaporada en el sector definido por el balance entre el volumen que entra y el volumen que sale debido a la evaporación. Este balance produce evapoconcentración de sal, incrementando la salinidad del agua a lo largo de la dirección del flujo (de la Fuente & Niño, 2010).

En lo que respecta a la dinámica de fluidos, Csanady (1975) ha clasificado todos los movimientos que son resultado de un balance entre el esfuerzo del viento y la fricción de fondo como giros topográficos. En lagos homogéneos y poco profundos la topografía determina completamente la configuración de estos giros o patrones de circulación que conforman líneas de corriente cerradas. Ignorando rotación y estratificación, el balance en estado permanente será consecuencia de un balance local entre el esfuerzo aplicado  $\rho_0 \cdot u_*^2$  y la resistencia de fondo  $\rho_0 \cdot U_*^2$  donde  $U_*$  es la velocidad de corte en el fondo (Imberger et. al., 1982) y  $\rho_0$  la densidad del agua contenida en el cuerpo en cuestión. Un caso conocido de lo anterior corresponde a una topografía parametrizada de cuerpo somero de agua utilizada por Kranenburg en 1992 en donde utilizando cierta configuración de viento se encontraron patrones de circulación que correspondían a un estado permanente de flujo. Esta configuración y su parametrización se muestran en la Figura 2.2

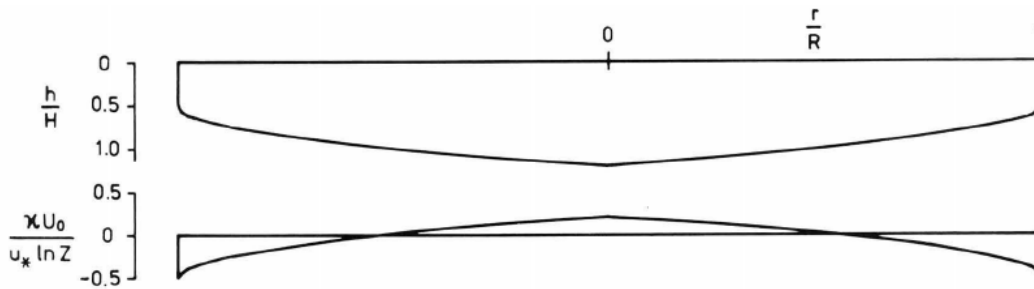


Figura 2.2: Sección transversal y distribución de velocidades promediadas en la vertical en el plano  $x=0$ . El perfil de velocidades promediadas muestra jets en las regiones someras. *Fuente: Kranenburg (1992)*.

La ecuación que parametriza esta geometría corresponde a la ecuación 2.1

$$\frac{h_0(r)}{H} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{r}{R}} \quad (2.1)$$

Donde  $h_0(r)$  [m] corresponde a la altura desde la superficie libre al fondo,  $H$  [m] una escala de altura y  $R$  [m] el radio de una circunferencia que corresponde a la forma en planta de esta parametrización. Es esta la geometría a utilizar como input del modelo y que define el fondo de la maqueta en el experimento.

Cabe destacar, que los principales forzantes de este tipo de sistemas son el viento y la radiación solar y que dada la poca profundidad de estos sistemas, no se presentan fenómenos que si se presentan en lagos de mayor extensión y profundidad como lo son estratificación térmica, resonancia y el efecto de la rotación terrestre.

En la Figura 2.3, se presentan un par de gráficos que muestran ejemplos de los ciclos de las variables meteorológicas destacando por sobre todo, la velocidad del viento y la radiación de onda corta entrante. Estos datos fueron medidos en el salar Punta Negra en Enero del 2006.

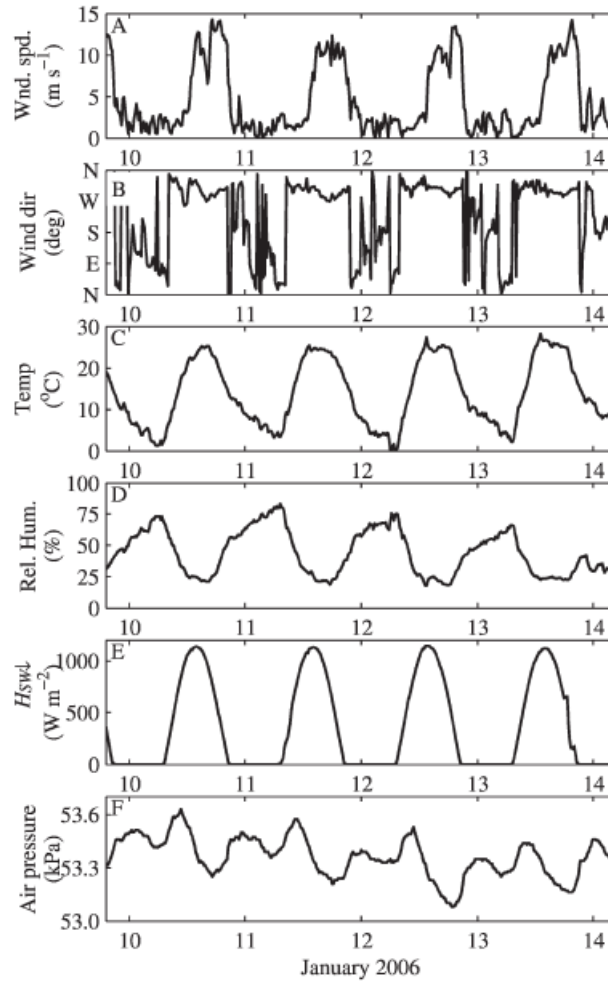


Figura 2.3: Ciclos temporales de las variables meteorológicas. Velocidad del viento, dirección del viento, temperatura del aire, humedad relativa, radiación de onda corta entrante al sistema y presión atmosférica. Fuente: de la Fuente & Niño (2010).

## 2.3. Estudio Teórico

### 2.3.1. Dinámica de Fluidos

Para estudiar los modos normales de las cuerpos someros de agua se utilizará el esquema de trabajo propuesto por Shimizu et al. (2007). Este esquema permite simular la respuesta de un sistema de una capa frente a un forzante oscilatorio o viento, suponiendo que dicha respuesta se compone de una estructura espacial y otra temporal. El procedimiento comienza planteando la ecuación de continuidad y las de momentum para la cuerpos someros de agua (una capa) sin considerar forzamiento externo. Luego de esto, se debe resolver un problema de valores propios y vectores propios generalizado en donde los vectores propios corresponden a la estructura espacial mientras que los valores propios corresponden a las frecuencias de oscilación de cada modo. Se obtiene una ecuación diferencial dependiente del tiempo para las amplitudes de los modos normales de oscilación encontrados en el problema sin forzante. Con toda esta información sobre los modos normales de oscilación del cuerpo, se pueden expresar

respuestas forzadas como combinaciones lineales de modos, en este caso, un forzamiento oscilatorio que hace vibrar a toda el cuerpo.

Para utilizar este esquema se proceden a realizar aproximaciones. La primera es asumir que se pueden promediar las propiedades en el eje vertical ( $\hat{z}$ ). También se utiliza la aproximación de Boussinesq, dado que, en general, la profundidad  $h_o(\vec{x}$  definida como la distancia desde el espejo de agua hasta el fondo del lago en función de la posición en planta) es mucho mas pequeña que las dimensiones horizontales del cuerpo. Se utilizan aproximaciones de capa límite de densidad y se linealizan las ecuaciones, es decir, se asume que las velocidades son pequeñas, por lo que los términos con velocidades cuadráticas son despreciados.

La ecuación de continuidad corresponde a:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(uh_o)}{\partial x} + \frac{\partial(vh_o)}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

donde  $h_o$  corresponde a la altura sobre el fondo,  $\vec{V} = (u, v)$  corresponde al vector de velocidades y  $\eta$  a la superficie libre.

Por otro lado, la ecuación de conservación de momentum para ambas direcciones horizontales es:

$$\frac{\partial(u \cdot h_o)}{\partial t} = -gh_o \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad ; \quad \hat{x} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(v \cdot h_o)}{\partial t} = -gh_o \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{by}}{\rho} \quad ; \quad \hat{y} \quad (2.4)$$

donde  $\tau_b$  y  $\tau_s$  (con los respectivos subindices x e y indicando la componente del tensor) corresponden a los esfuerzos de corte del fondo y de la superficie (viento) respectivamente. Expresando las ecuaciones anteriores vectorialmente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla \cdot (h_o \vec{V}) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial(h_o \vec{V})}{\partial t} = -g \cdot h_o \cdot \nabla \eta + \vec{\tau}_s - \vec{\tau}_b \quad (2.6)$$

suponiendo que los esfuerzos de corte de fondo son lineales, entonces estos se expresaran de la forma  $\tau_b = \rho \cdot \tilde{C}_f \cdot \vec{V}$ . Además, sabiendo que  $i^2 = -1$  se tiene que las ecuaciones que quedan son:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = i^2 \nabla \cdot (h_o \vec{V}) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial(h_o \vec{V})}{\partial t} = i^2 g \cdot h_o \cdot \nabla \eta + \frac{\tau_s}{\rho} + i^2 \rho \cdot \tilde{C}_f \cdot \vec{V} \quad (2.8)$$

Multiplicando la ecuación 2.7 por  $\rho \cdot g$ :

$$\rho \cdot g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = i^2 \rho \cdot g \cdot \nabla \cdot (h_o \vec{V}) \quad (2.9)$$

definiendo el vector de estado  $\xi = (\eta, \vec{V})^T$  se pueden expresar las ecuaciones 2.8 y 2.9 forma matricial de la siguiente manera:

$$M \frac{\partial \xi}{\partial t} = i(K + C)\xi + \vec{F} \quad (2.10)$$

donde:

$$M = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix}$$

corresponde a la matriz de peso,

$$K = i\rho \begin{pmatrix} 0 & \nabla \cdot h_0 \\ h_0 \cdot g \cdot \nabla \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

corresponde al operador lineal no disipativo de aguas someras y tiene la propiedad de ser hermítico.

$$C = i\rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_f \end{pmatrix}$$

corresponde a la matriz de disipación y finalmente el siguiente vector:

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_s \end{pmatrix}$$

que corresponde al vector de forzante externo. Para resolver el sistema de ecuaciones se proponen soluciones del tipo ondas oscilatorias (modo normales), es decir variaciones armónicas de la superficie libre y de la velocidad. Los modos de oscilación caracterizan como oscilan y cuándo las variables, y con que frecuencia lo hacen. La soluciones propuestas son de la forma:

$$\xi(\vec{x}, t) = \tilde{\xi}(\vec{x}) \cdot \exp(i(\omega + i\gamma)t) \quad (2.11)$$

donde  $\omega$  es llamada frecuencia angular y corresponde a un número real que puede ser positivo o negativo. Por otro lado,  $\gamma$  corresponde a la tasa de disipación lineal de energía y también es real pero solo puede ser positivo. Reemplazando (2.11) en (2.10) y despreciando el vector del forzante externo para evaluar como se comporta el sistema naturalmente se tiene la siguiente expresión:

$$M \cdot \tilde{\xi} \cdot i(\omega + i\gamma) \cdot \exp(i(\omega + i\gamma)t) = i(K + C) \cdot \tilde{\xi} \cdot \exp(i(\omega + i\gamma)t) \quad (2.12)$$

o lo que es lo mismo:

$$(\omega + i\gamma) \cdot M \cdot \tilde{\xi} = (K + C) \cdot \tilde{\xi} \quad (2.13)$$

en donde 2.13 corresponde a un problema de vectores y valores propios en donde desde los valores propios resultantes se pueden obtener  $\omega$  y  $\gamma$ , mientras que los vectores propios se pueden obtener las estructuras modales. Cabe destacar que existen dos problemas de vectores propios asociados, por la derecha y por la izquierda. Platzman en 1984 analizó este problema y encontro relaciones entre ambos problemas. Por otro lado existen relaciones de ortogonalidad de donde se obtiene el factor de normalización  $\tilde{e}$  y es real. Como se dijo anteriormente, existen dos problemas relacionados (derecha e izquierda) por lo tanto, existen dos vectores propios para cada modo (r):

$$\tilde{\xi}^{R(r)}(\vec{x})$$

$$\tilde{\xi}^{L(r)}(\vec{x})$$

Dicho esto, se tiene que  $\xi$  puede ser expresado como una superposición de los distintos modos normales. Luego, sabiendo que existen dos problemas (vectores propios por la derecha y por la izquierda) y siendo “ $a$ ” la amplitud de los modos, se tiene:

$$\xi(\vec{x}, t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{a}^{R(r)}(t) \cdot \tilde{\xi}^{R(r)}(\vec{x}) \quad (2.14)$$

o equivalentemente:

$$\xi(\vec{x}, t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{a}^{L(r)}(t) \cdot \tilde{\xi}^{L(r)}(\vec{x}) \quad (2.15)$$

Reemplazando en 2.9 la descomposición de  $\xi$  con modos normales con estructuras espaciales dadas por vectores propios por la derecha se tiene:

$$M \frac{d}{dt} \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{a}^{R(r)}(t) \cdot \tilde{\xi}^{R(r)}(\vec{x}) \right) = i(K + C) \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{a}^{R(r)}(t) \cdot \tilde{\xi}^{R(r)}(\vec{x}) \right) + \vec{F} \quad (2.16)$$

dado que  $\tilde{\xi}^{R(r)}(\vec{x})$  no depende del tiempo:

$$M \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}^{R(r)}(\vec{x}) \cdot \frac{d(\tilde{a}^{R(r)}(t))}{dt} = i(K + C) \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{a}^{R(r)}(t) \cdot \tilde{\xi}^{R(r)}(\vec{x}) \right) + \vec{F} \quad (2.17)$$

Aplicando producto interior en 2.16 con una estructura modal izquierda y dada las relaciones de ortogonalidad anteriormente mencionadas, se tiene que la ecuación final para la amplitud modal es:

$$\tilde{e}^{R(r)} \frac{d\tilde{a}^{R(r)}}{dt} = i(\omega + i\gamma) \cdot \tilde{e}^{R(r)} \cdot \tilde{a}^{R(r)} + \tilde{f}^{R(r)}(\vec{x}, t) \quad (2.18)$$

El proceso por la izquierda es análogo, sin embargo, dadas las relaciones antes mencionadas, basta con lo expuesto.

### 2.3.2. Tasas de Decaimiento

Wüest et al. (2000) en el trabajo *Turbulent kinetic energy balance as a tool for estimating vertical diffusivity in wind-forced stratified waters* definieron que las escalas de tiempo de disipación de energía eran proporcionales a la profundidad de la masa de agua o, equivalentemente, que las tasas de decaimiento eran inversamente proporcionales a la profundidad del cuerpo.

### 2.3.3. Dispersión

#### Método de los momentos espaciales

Para obtener desde los experimentos el coeficiente de dispersión, se utiliza el método de los momentos espaciales, utilizando una variante de la ecuación de difusión-advección 2D, considerando un eje de referencia móvil en el centro de gravedad del trazador en el agua, cuyo contorno será llamado mancha desde ahora. Con esto, el término advectivo desaparece, por lo que solo queda la ecuación de difusión 2D donde el coeficiente de difusión absorbe el efecto de la advección que el fluido ejerce sobre la mancha. Dado que absorbe este efecto, el nuevo coeficiente de difusión “equivalente” es expresado como  $K_a$  y llamado coeficiente de dispersión. La ecuación a utilizar corresponde a la siguiente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_{ax} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_{ay} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (2.19)$$

Cabe destacar que la concentración  $C$ , corresponde a la concentración integrada en la vertical. Dicho esto, se definen los momentos espaciales de la siguiente manera:

$$M_{0xy} = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y) dx dy \quad (2.20)$$

$$M_{1x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot C(x, y) dx dy ; \quad M_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot C(x, y) dx dy \quad (2.21)$$

$$M'_{2x} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_g)^2 \cdot C(x, y) dx dy ; \quad M'_{2y} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - y_g)^2 \cdot C(x, y) dx dy \quad (2.22)$$

El momento de orden 0 ( $M_{0xy}$ ) corresponde a la masa de la mancha. Notar que el momento 2 ( $M_2$ ) corresponde al momento espacial de orden 2 centrado, ya que se puede demostrar que es este el que cumple la ecuación 2.24. A continuación se presentan relaciones útiles para obtener los coeficientes de dispersión. La ecuación 2.23 se utiliza para obtener el centro de gravedad cuyas coordenadas ( $x_g ; y_g$ ) son usadas en cada instante de tiempo para calcular el momento espacial 2 centrado.

$$x_g = M_{1x}/M_{0xy} ; \quad y_g = M_{1y}/M_{0xy} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial M'_{2x}}{\partial t} = 2 \cdot M_{0xy} \cdot K_{ax} ; \quad \frac{\partial M'_{2y}}{\partial t} = 2 \cdot M_{0xy} \cdot K_{ay} \quad (2.24)$$

A continuación, se procede a desarrollar un poco la ecuación anterior. Se define la variable:

$$A = \frac{M'_{2x}}{M_{0xy}} \Rightarrow M'_{2x} = A \cdot M_{0xy} \quad (2.25)$$

Luego, se reemplaza 2.25 en 2.24 y aplicando la regla de la cadena al derivar, la expresión resultante es la siguiente:

$$A \cdot \frac{\partial M_{0xy}}{\partial t} + M_{0xy} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = 2 \cdot M_{0xy} \cdot K_{ax} \quad (2.26)$$

Este resultado será utilizado mas adelante para calcular los coeficientes de dispersión.

## Dispersión natural en pequeños lagos

En 1995, Okubo logró determinar el coeficiente de dispersión aparente en el Twin West Lake a 75[km] al este de Vancouver. Utilizó fotografías que capturaban la evolución del contorno del trazador en este lago y mediante correcciones geográficas y un método muy similar al método de los momentos espaciales, consiguió obtener valores aproximados del coeficiente de dispersión radial. Con este experimento, junto con otros, logró encontrar una relación entre este coeficiente y la escala de dispersión. En la Figura 2.4 se presenta esta relación.

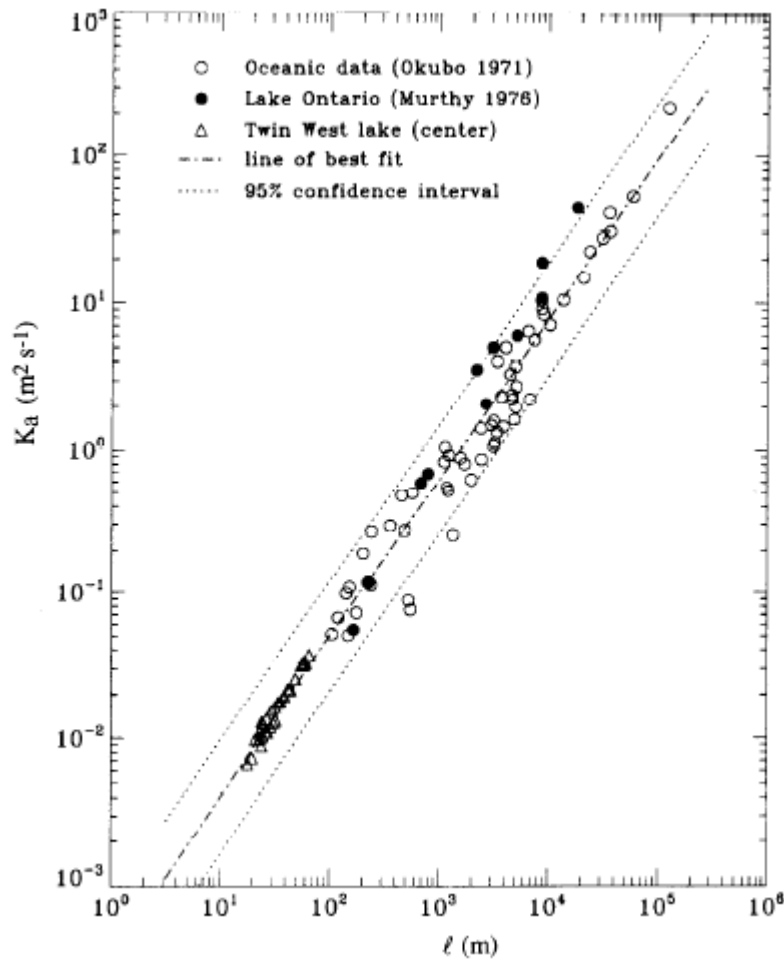


Figura 2.4: Relación entre el coeficiente de dispersión aparente y la escala de difusión para los experimentos señalados. Fuente: Okubo (1995).

## 2.4. Conclusiones

De esta revisión bibliográfica se concluye que estudiar las lagunas someras o salares es interesante desde el punto de vista ambiental ya que los fenómenos termohidrodinámicos que se observan determinan la distribución de nutrientes y sustancias que sostienen ecosistemas frágiles. Se tiene que dada las condiciones ambientales, los salares están expuestos a forzantes



las cuales son principalmente la radiación de onda corta entrante y la velocidad del viento. Cabe destacar que estos cuerpos de agua tienen una hidrología particular la que también influye en el comportamiento de las sustancias disueltas en el volumen de agua. Este trabajo aporta desde un punto vista físico al entendimiento de la dinámica de estos tipos de cuerpos.

Se tiene un esquema teórico para analizar los modos normales de estos cuerpos de agua, dadas ciertas aproximaciones. Se tienen que resolver básicamente dos problemas, los cuales corresponden a un problema de vectores y valores propios de los cuales se obtiene la estructura espacial además de las frecuencias y tasas de disipación de cada modo, siendo el otro problema una ecuación diferencial dependiente del tiempo que entrega la amplitud de los modos. Este esquema fue utilizado para crear un algoritmo numérico por Pérez (2015) con lo que queda resuelto la obtención de los modos más energéticos en los cuerpos someros de agua.

Se tiene disponible el método de los momentos espaciales para calcular los coeficientes de dispersión. Además se tienen resultados anteriores, tanto de tasas de decaimiento como de coeficientes de dispersión, los cuales pueden ser utilizados para comparar con los resultados que se obtuvieron en este trabajo.

# Capítulo 3

## Análisis Numérico

### 3.1. Aspectos generales

El modelo numérico desarrollado por Pérez (2015) se encuentra escrito en Matlab y fue implementado bajo el paradigma de programación de objetos. Este modelo está basado en un trabajo anterior realizado por Rozas (2011). Si se quiere entrar en detalle, revisar ambos trabajos.

#### 3.1.1. Malla Numérica

Los problemas hidrodinámicos que debieron ser resueltos por Pérez (2015) y que se intentan resolver en este trabajo, están asociados a las variables de superficie libre  $\eta$  y al campo de velocidades  $\vec{V}$ . Si es que la malla numérica a utilizar es una malla clásica, aparecen problemas ya que al estar ambas variables almacenadas en un mismo punto, no representan de buena manera las ecuaciones de continuidad de momentum. Es por esto, que el modelo desarrollado por Pérez (2015) utiliza una malla alternada. En la Figura 3.1 se puede observar un ejemplo de este tipo de malla.

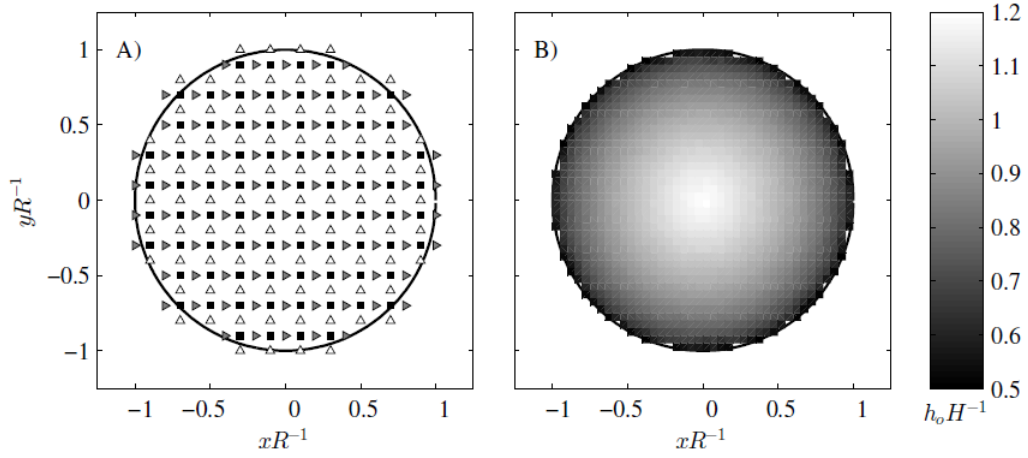


Figura 3.1: Implementación de la malla alternada o staggered. Los cuadrados negros son los nodos en donde se resuelve la variable  $\eta$ . Los triángulos que apuntan hacia la derecha son los nodos de la componente x de velocidad y los triángulos que apuntan hacia arriba son los nodos de la componente y de velocidad. El espaciamento entre puntos está aumentado para facilitar la visualización. B) Distribución espacial de batimetría. Fuente: Pérez (2015).

### 3.1.2. Parámetros utilizados

Para este trabajo, se utiliza solo el módulo del modelo que resuelve la hidrodinámica. El motor de cálculo utilizado fue el Análisis Modal, el cual arroja los resultados de las frecuencias y estructuras espaciales de los modos normales, sin importar el forzante, por lo que se añadió uno arbitrario (en el caso de este trabajo, se utilizó viento como forzante) para que el modelo fuera estable. El fluido elegido para la modelación fue agua, con sus respectivas propiedades estándares, mientras que la geometría (ver Figura 2.2) estaba totalmente determinada por la geometría de Kranenburg o modificaciones de esta, la que incluye batimetría, borde y malla.

Las tres batimetrías seleccionadas están definidas por las siguientes expresiones:

$$\frac{h_0(r)}{H} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{r}{R}} \quad (3.1)$$

$$\frac{h_0(r) - 0.0044m}{H} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{r}{R}} \quad (3.2)$$

$$\frac{h_0(r) - 0.0094m}{H} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{r}{R}} \quad (3.3)$$

para un  $R=0,2$  [m] y una altura  $H=0,03$  [m]. Las alturas  $h_0$  máximas son 0,036[m], 0,040[m] y 0,045[m] respectivamente. Se utilizó un espaciado de  $dx = 0,02$ [m] y  $dy = 0,02$ [m]. Se espera poder obtener los primeros tres modos normales compatibles con el tipo de forzante (modos simétricos con respecto al centro y al eje perpendicular al movimiento) para cada una de estas tres geometrías. Cabe destacar que estas tres parametrizaciones son posibles de lograr con la

maqueta utilizada en la fase experimental de este trabajo definida por la ecuación 3.1, solo basta con verter agua dentro de ella hasta alcanzar en el centro de la maqueta, las alturas  $h_0$  máximas antes mencionadas. En el Capítulo 5, la Tabla 5.1 presenta los modos normales calculados por el modelo para estas tres configuraciones geométricas. Cabe destacar que las pequeñas dimensiones de esta maqueta no se acercan a las proporciones de las lagunas someras reales, sin embargo, este trabajo pretende acercarse desde el punto de vista experimental al estudio de estos fenómenos, por lo que no es factible utilizar dimensiones mayores.

# Capítulo 4

## Estudio Experimental

Para el estudio experimental se utiliza la instalación de la Figura 4.1 ubicada en el laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. La Figura 4.2 presenta un esquema de la misma instalación. El diseño y construcción de esta instalación fue desarrollado por Pérez (2015).

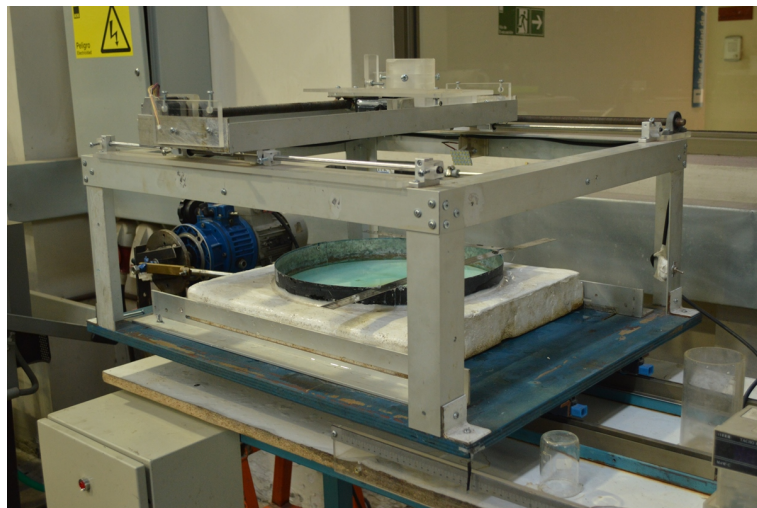


Figura 4.1: Instalación experimental

### 4.1. Descripción general

Esta instalación consta de una maqueta de cuerpo de agua somero cuya geometría esta definida por la geometría de Kranenburg con parámetros  $R=0.20$  [m] y  $H=0.03$  [m] y que se ubica sobre una plataforma horizontal sobre rieles la cual es agitada horizontalmente y a lo largo de una sola dirección por un brazo metálico el que a su vez es movido por el giro del motor de

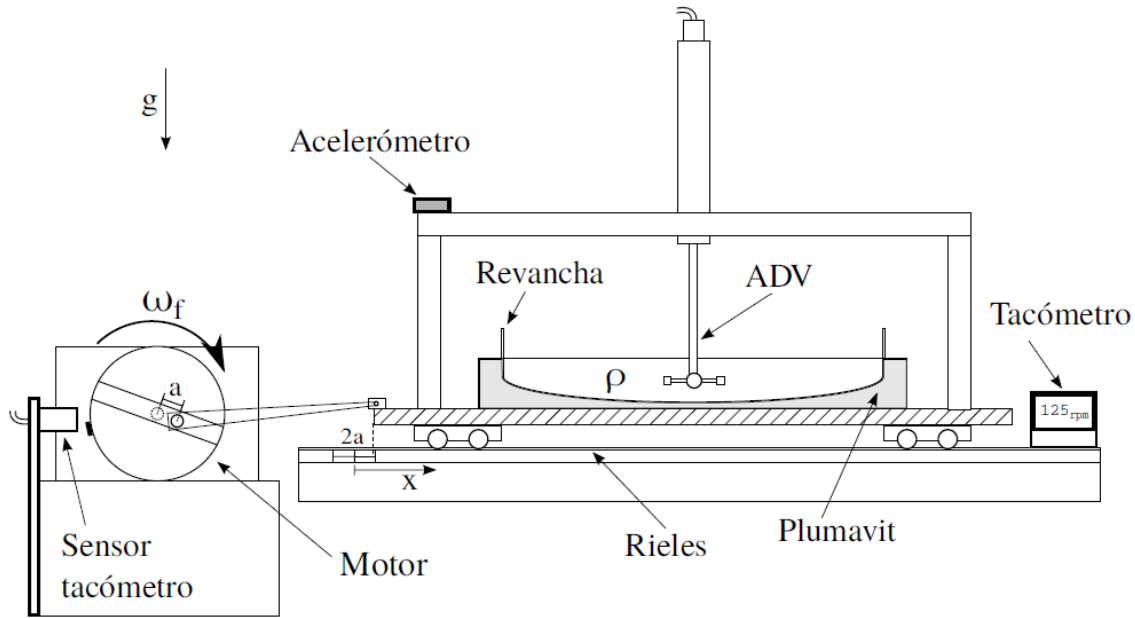


Figura 4.2: Esquema instalación experimental. Fuente: Pérez, 2015.

la Figura 4.3 instalado inmediatamente al lado. Esta plataforma horizontal se encuentra soportada por una mesa. Esta única maqueta puede simular las tres batimetrías propuestas. La configuración del sistema experimental consigue generar una trayectoria de forma horizontal y aproximadamente sinusoidal de la plataforma, cuya amplitud de movimiento está dada por la diferencia que existe entre el centro del motor y el eje que conecta la rueda giratoria del motor con el brazo metálico, es decir, por la excentricidad. La frecuencia con la que gira el motor depende del panel de control ubicado abajo de la mesa y es medida por el tacómetro de la Figura 4.4 que muestra la frecuencia de giro en unidades de revoluciones por minuto.

La velocidad del flujo que es producto de la oscilación de la mesa, es medida con un sensor de velocidad llamado ADV el cual utiliza sonido y el efecto Doppler para calcular la velocidad de un volumen de agua ubicado a 5.0 [cm] del cabezal. El diámetro del cabezal es de 1.56 [cm]. Al igual que Pérez (2015), asumiendo que la velocidad representativa en la vertical se encuentran en la mitad de la altura desde el fondo a la superficie libre, se debe calcular la altura a la que debe estar sumergido el cabezal del ADV con la siguiente fórmula.

$$h_{ADV} = (h_0 - 1.56[cm])/2 \quad (4.1)$$

Tal y como se aprecia en la Figura 4.7, el cuerpo del ADV se encuentra montado en un eje el cual posee los dos grados de libertad horizontal, por lo que el ADV se puede ubicar en cualquier parte de la maqueta. En la Figura 4.6 se puede apreciar el cabezal del ADV.

Sobre este mismo eje, se puede montar la cámara GoPro (ver Figura 4.9 y Figura 4.8) responsable de grabar los videos necesarios para el análisis de las manchas del trazador (azul brillante). Cabe destacar que los experimentos de medición de velocidad y los experimentos de grabación de videos se efectuarán de forma separada, ya que si el ADV se encuentra instalado, este bloquea visualmente a la cámara GoPro, perdiendo información.

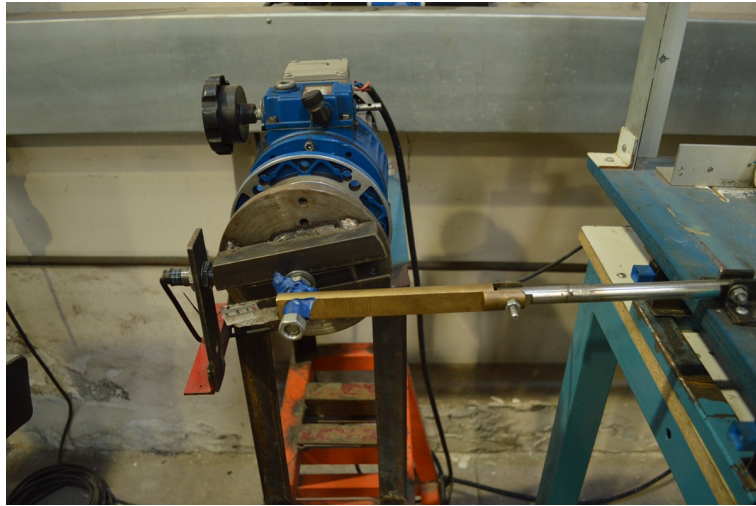


Figura 4.3: Motor

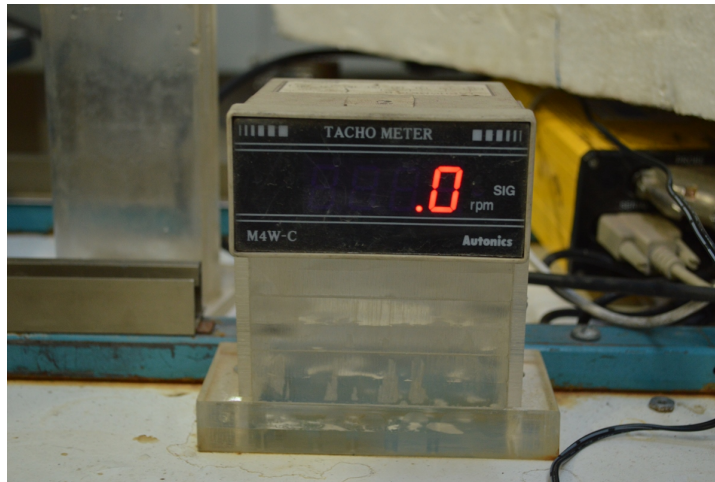


Figura 4.4: Tacómetro.

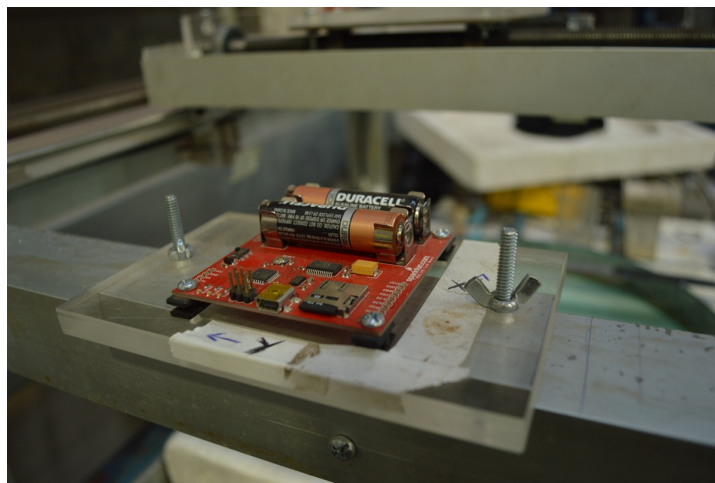


Figura 4.5: Acelerómetro

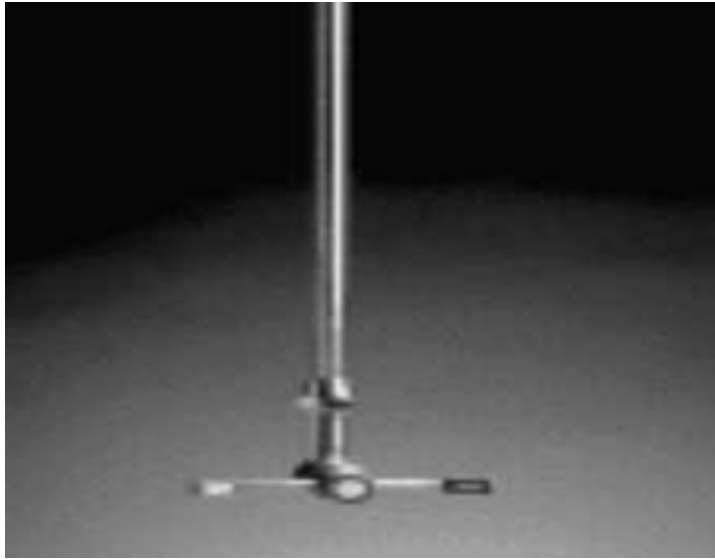


Figura 4.6: Cabezal ADV. *Fuente: Pérez (2015)*

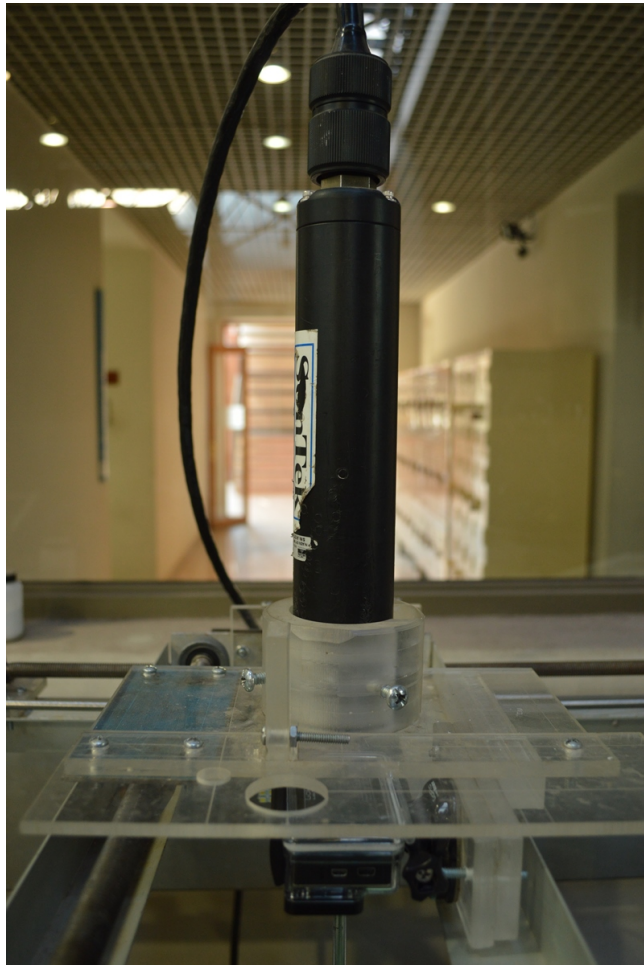


Figura 4.7: ADV montado en la instalación.





Figura 4.8: GoPro.

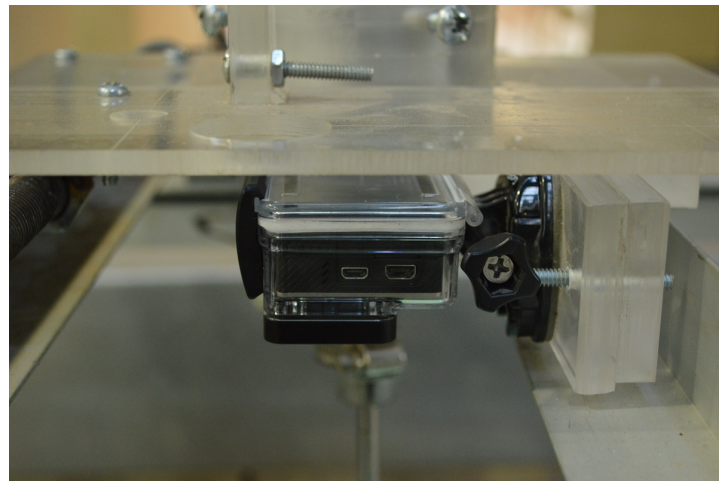


Figura 4.9: GoPro montada en la instalación.

## 4.2. Instrumentación

### 4.2.1. Acelerómetro

El acelerómetro de la Figura 4.5 corresponde a una Evaluation Board del sensor ADXL345 fabricado por Sparkfun Electronics. Este mide aceleración en un eje cartesiano tridimensional cuyo origen se encuentra fijo al sensor. Esta Evaluation Board es energizada con dos pilas AA

y cuenta con una ranura de memoria microSd, la cual es utilizada para escribir los datos que el sensor registra cuando se encuentra prendido y operando. Si la tarjeta de memoria microSd se encuentra funcionando, el sensor crea un nuevo archivo cada vez que se enciende, lo que desencadena que sus luces pestañen cuatro veces. Por defecto, la frecuencia de muestreo es de 100 [Hz], sin embargo, se verifica experimentalmente que esta frecuencia no es tal, ya que al comparar los registros de aceleraciones con los de velocidad, los cuales registran por el mismo periodo de tiempo, estos no coinciden temporalmente. Utilizando un cronómetro, se observa que la frecuencia de muestreo del acelerómetro no es 100 [Hz], si no de 85 [Hz]. Además, el rango de aceleraciones que por defecto puede medir, corresponde a 2 veces la aceleración de gravedad. Los datos son escritos en formato hexadecimal y corresponden al voltaje medido en unidades de Least Significant Bit (LSB). La expresión para transformar los datos de voltaje a aceleración es:

$$a [m/s^2] = f \cdot a_{LSB} \cdot 9.8 [m/s^2] \quad (4.2)$$

donde  $f=0.0039 [g/LSB]$  según el fabricante. Se comprueba que en los experimentos no existe el problema de tener aceleraciones menor a la aceleración mínima posible dada por el ruido del sensor equivalente a 1 [LSB].

Este instrumento será utilizado para corroborar las frecuencias de oscilaciones de la plataforma.

### 4.2.2. ADV

Como fue dicho anteriormente, este instrumento mide la velocidad del flujo a 5 [cm] de su cabezal, en un volumen de 0.09 [cm<sup>3</sup>] y en dos direcciones horizontales ortogonales. La frecuencia de muestreo utilizada en los experimentos fue de 50 [Hz] y el rango de medición quedo definido en 30 [cm/s]. La precisión de este instrumento es del máximo entre un 1 [%] de la velocidad medida y 0.25 [cm/s].

Se debe mantener el cuociente de señal sobre el ruido (SNR) entre 40 [db] y 60 [db] ya que esto asegura mediciones de buena calidad. Para esto, se utilizan partículas de polvo en suspensión. Además, se debe verificar que el coeficiente de correlación se mantenga lo mas alto posible. Se medirán 5 series de velocidades en distintos puntos para cada batimetría y para cada frecuencia propuesta. No se utiliza el modelo numérico para comparar las velocidades ya que este solo se usa de referencia para obtener la frecuencia y estructura espacial de los primeros tres modos normales.

### 4.2.3. Tacómetro

El tacómetro se utiliza para saber instantáneamente la frecuencia a la que está girando el motor. Esto se logra a través de una placa de bronce adherida a la rueda del motor y que es detectada por el sensor del tacómetro cada vez que esta pasa por al frente. La mínima frecuencia que puede medir el tacómetro es de 40 [RPM], sin embargo, el motor mucha veces no puede superar los 50 [RPM].

#### 4.2.4. GoPro

La cámara de video utilizada corresponde a una GoPro Hero 4 y la configuración para los experimentos es de videos cuya calidad son de 720p y a 30 fps. Los videos son grabados con extensión .mp4 y deben ser procesados por el software de GoPro para remover el efecto “ojo de pez” y conseguir una imagen rectangular corregida. La cámara se instala al centro de la maqueta, en el mismo eje donde se monta el ADV, cubriendo toda la circunferencia. Cuatro luces leds a los costados y una cobertura de fieltro negro que tapa la parte superior de la plataforma eliminan sombras y radiación difusa permitiendo una mejor captura de videos.

### 4.3. Metodología Experimental

#### 4.3.1. Experimentos de Dinámica de Modos

Gracias al resultado del modelo numérico (ver Tabla 5.1) se tiene una referencia para encontrar experimentalmente los primeros tres modos normales con simetría longitudinal de oscilación de la maqueta para las tres alturas distintas de agua. Esto se logra por simple inspección visual, ya que cuando la maqueta entra en resonancia, las velocidades del agua son tan altas, que la superficie se desestabiliza y no se observa una oscilación armónica en la superficie, si no más bien un comportamiento caótico.

Se proceden a medir las velocidades del agua en cinco puntos de la maqueta ubicados a una misma profundidad desde el agua, para frecuencias cercanas a las frecuencias de los tres primeros modos normales. Además, se procederán a realizar las mismas cinco mediciones de velocidad del agua en los mismos puntos pero con el sistema oscilando en frecuencias intermedias ubicadas en el promedio de dos frecuencias normales consecutivas, contabilizando un total de  $3 \times 5 \times 5 = 75$  experimentos de medición de velocidad. La amplitud de oscilación del sistema es fija y corresponde a 1 [mm]. Para las frecuencias normales, la duración de las series será de 5 minutos con 1 minuto final sin forzante, mientras que para las frecuencias intermedias, la duración del registro de datos será de 4 minutos con 1 minuto final sin forzante, ya que al ser menos intensos los campos de velocidad, el polvo suspendido que actúa como trazador para mejor el registro de datos del ADV decanta, disminuyendo dramáticamente el SNR. El polvo utilizado corresponde a tierra común y no cumple estandar alguno, sin embargo, esto no afecta la medición. Es muy importante destacar que las mediciones no se hicieron exactamente para las frecuencias normales detectadas experimentalmente sino que a 1 o 2 RPM de diferencia, ya que como fue mencionado anteriormente, al llegar a la frecuencia de resonancia, se alcanzan altas velocidades y la superficie del agua se rompe por lo que se inestabiliza el modo. Cabe destacar que no se realizaron mediciones de velocidad en la vertical ya que Pérez (2015), se asume que la velocidad representativa integrada se ubica a la mitad de altura entre el fondo y la superficie libre.

Los puntos de medición se pueden observar en la Figura 4.10. Los puntos 1, 2, 3, 4 son medidos a 5 [cm] desde el centro, es decir, desde el punto 5. Por otro lado, el punto 5 es medido a 5 centímetros desde el punto 3. Las frecuencias finalmente utilizadas son las encon-

tradas experimentalmente y se resumen en la sección de Resultados Numéricos en la Tabla 5.1.

Para cada serie, se registrarán con el ADV la velocidad del agua en el eje x (paralelo al cabezal del sensor), velocidad del agua en el eje y (perpendicular al cabezal del sensor) y con el acelerómetro, las series de aceleraciones de la plataforma en el eje x (paralelo al movimiento de la maqueta).

Para este experimento, se debe corroborar que el motor se encuentra conectado a la corriente trifásica, que se encuentren energizados los instrumentos, además del computador con el software, que el ADV sea reconocido por este computador y que el acelerómetro posee una tarjeta microSD en buen estado.

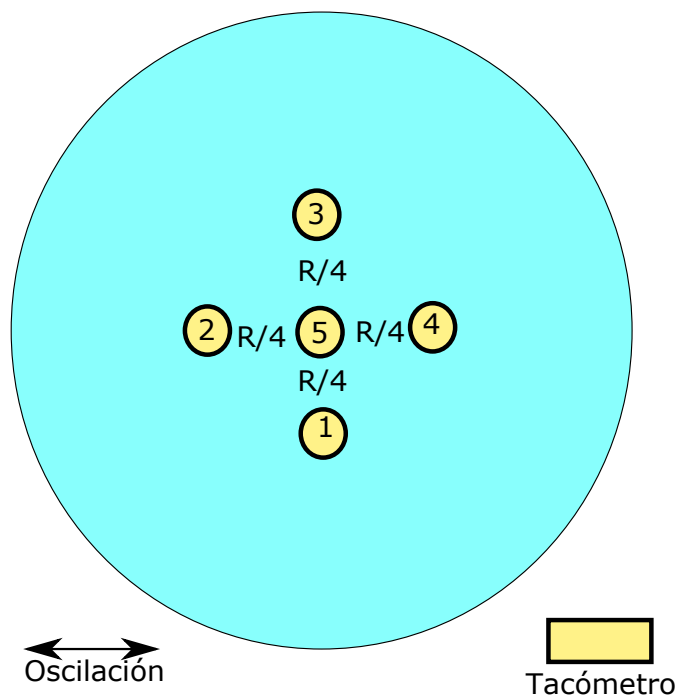


Figura 4.10: Puntos de medición ADV.  $R/4$  corresponde a  $1/4$  del radio  $R$  cuyo valor es de  $20[\text{cm}]$ , es decir, los puntos 1, 2, 3 y 4 se encuentran a  $5[\text{cm}]$  del centro.

## 4.4. Experimentos de Coeficiente de Dispersión

Antes de realizar los experimentos para estimar el coeficiente de dispersión, se debe establecer una relación entre la concentración integrada en la vertical y la intensidad o saturación de grises que detecta la cámara. Desde aquí en adelante, la intensidad o saturación en escala de grises será llamada saturación y varía entre 0 y 255, en donde el 0 corresponde al color negro, mientras que el 255 corresponde al blanco. Para esto, se utilizaron dos pequeños recipientes iguales, con muestras de  $1 [\text{ml}]$  y  $3 [\text{ml}]$  de solución de azul brillante. Cada recipiente tiene una altura de agua y distintas concentraciones conocidas, por lo que la integración en la vertical resulta trivial para cada muestra. Se obtienen las imágenes con la cámara GoPro y se comparan los valores de saturación de grises captados con la concentración integrada ya conocida.

Luego, al igual que para los experimentos de la dinámica de los modos, gracias al modelo numérico (ver Tabla 5.1) se tiene una referencia para encontrar experimentalmente los primeros tres modos normales con simetría longitudinal de oscilación de la maqueta para las tres distintas alturas de agua.

Se proceden a grabar cinco videos de la maqueta para frecuencias cercanas a las frecuencias normales y cinco videos para las frecuencias intermedias ubicadas en el promedio de dos frecuencias normales consecutivas, contabilizando un total de  $3 \times 5 \times 5 = 75$  videos. En cada video, se deja que la frecuencia cercana al modo normal (a 1 o 2 RPM) o la oscilación correspondiente a las frecuencias intermedias alcancen un estado estacionario y luego se le inyecta, mediante una pipeta, 6 [ml] de solución de azul brillante en el centro de la maqueta. La concentración de la solución de azul brillante es de 0.3125 [mg/ml]. Se trata de que el trazador quede bien distribuido en la vertical, subiendo y bajando la pipeta al momento de depositar la solución en el agua. Es importante señalar, que la densidad de esta solución es aproximadamente la misma del agua. Tanto el volumen inyectado como la concentración no son arbitrarios, si no que fueron determinadas experimentalmente siendo una de las pocas combinaciones con las que se logró, que luego de analizada la imagen, la masa inferida fuese relativamente constante.

La amplitud de oscilación se mantiene en 1 [mm] y el acelerómetro registra series de aceleraciones para cada video.

## 4.5. Procesamiento de Datos

Tanto el acelerómetro como las series de velocidad medidas con el ADV tienen ruido de alta frecuencia asociado al instrumento. Es por esto que a ambas series se les aplica un filtro pasabajo tipo Butterworth de orden  $n=6$  y frecuencias de corte de 25 [Hz] para el acelerómetro y 20 [Hz] para las series de velocidades. Estas frecuencias de corte son las mismas utilizadas por Pérez (2015) para el procesamiento de datos. Ambas frecuencias cumplen con ser menores que la frecuencia de Nyquist para cada instrumento (85/2 [Hz] y 50/2 [Hz]). Luego, ya que la serie de aceleraciones medida con el acelerómetro tiene una mayor densidad de datos, solo a esta serie se le aplica una media móvil centrada con una vecindad de 6 datos. En el Anexo A, se presentan algunas series de aceleración brutas y las mismas filtradas. esto, para mostrar el efecto que tiene el filtro mas la media móvil en los datos.

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos y Experimentales de la Dinámica de los Modos

### 5.1. Resultados numéricos

La Tabla 5.1 presenta las frecuencias de los modos encontrados numéricamente ( $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$ ) y las compara con las encontradas experimentalmente ( $w_1^*$ ,  $w_2^*$  y  $w_3^*$ ) para las tres batimetrías propuestas. En la Figura 5.1 se presenta la estructura espacial de los primeros tres modos.

Se observa que en general, los modos encontrados experimentalmente tiene frecuencias menores a las predichas por el modelo. Esto se puede deber a todas las suposiciones que se hacen para encontrar las soluciones para las variables dinámicas en forma de modos en un cuerpo de agua somero. Se observa que para todas las alturas, las frecuencias de los modos experimentales y numéricos se diferencian más cuando el modo es de mayor orden. Los blancos corresponden a las frecuencias experimentales que presumiblemente eran inferiores a 50 [RPM] por lo que el motor no fue capaz de girar. En la Tabla 5.2, se muestran las frecuencias normales a utilizar (las encontradas experimentalmente) y las frecuencias intermedias ( $w_{1-2}^*$ ,  $w_{2-3}^*$ ) para cada altura.

Tabla 5.1: Frecuencias normales encontradas con el modelo numérico ( $w_1, w_2$  y  $w_3$ ) y encontradas experimentalmente ( $w_1^*$ ,  $w_2^*$  y  $w_3^*$ )

$h_0$ max [cm]	$w_1$ [RPM]	$w_1^*$ [RPM]	$w_2$ [RPM]	$w_2^*$ [RPM]	$w_3$ [RPM]	$w_3^*$ [RPM]
3.6	45.7		131.6	125.5	201.5	173.8
4.1	48.7		141.3	133.0	219.6	187.0
4.5	52.5	53.0	152.8	139.0	237.8	195.0

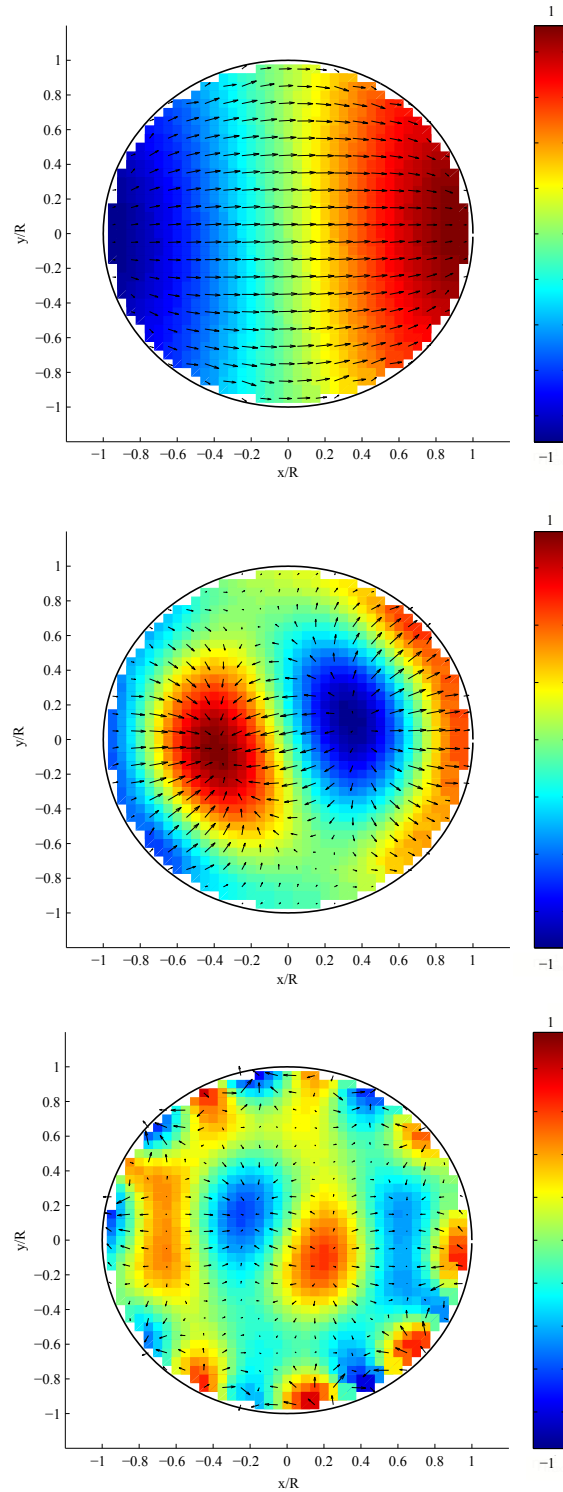


Figura 5.1: Estructuras espaciales de los modos normales calculados. De arriba hacia abajo, el modo  $n=1$ , modo  $n=2$  y el modo  $n=3$  con simetría longitudinal. El color rojo simboliza  $1 \cdot \eta_{max}$ , es decir, a la máxima altura de superficie libre alcanzada, mientras que el color azul representa  $-1 \cdot \eta_{max}$ , es decir, a la mínima altura de superficie libre alcanzada.  $R$  corresponde al radio de la maqueta el cual tiene un valor de  $a$  20 [cm], mientras que  $x$  e  $y$  corresponden a las coordenadas cartesianas del modelo.

Tabla 5.2: Frecuencias definitivas a utilizar en los experimentos de las series de velocidades en el agua y en los del coeficiente de dispersión.

$h_0$ max [cm]	$w_1^*$ [RPM]	$w_{1-2}^*$ [RPM]	$w_2^*$ [RPM]	$w_{2-3}^*$ [RPM]	$w_3^*$ [RPM]
3.6		85.6	125.5	149.8	173.8
4.0		91.2	133.0	161.4	187.0
4.5	53.0	97.0	139.0	168.0	195.0

Los blancos en la Tabla 5.2 se deben a que no es posible llegar al modo fundamental ( $n=1$ ) para esas dos alturas máximas de agua, ya que el motor se detiene al ser muy baja la frecuencia. Llama de particular manera la atención el comportamiento del modo  $n=1$  para la altura 4.5 [cm], el cual, en un principio, se presenta como aparece en la Figura 5.1, para luego inestabilizarse y formar una corriente circular que recorre la maqueta de forma angular. En el siguiente capítulo, se muestran fotos de la mancha de azul brillante que deja en evidencia este comportamiento.

## 5.2. Resultados experimentales

### 5.2.1. Análisis de Series de Velocidad

Para analizar las series de velocidad, se procedió a utilizar wavelets para estudiar el comportamiento de las frecuencias en el tiempo. Este análisis se efectúa en todas las series de velocidad, sin embargo, para efectos de ilustrar el proceso y presentar fenómenos, solo se muestran los análisis del punto 5 de medición el cual alcanza mayores velocidades. Las series en otros puntos o para otras frecuencias presentan bajas amplitudes y comportamientos no armónicos. Por otro lado, se hará un ajuste exponencial al final de la serie para determinar la tasa de decaimiento. Se muestran, a modo de ejemplo, solo para ciertas alturas, las series de velocidad en el eje  $x$  e  $y$  a modo de comparación y el análisis de Fourier sobre la serie de aceleración para verificar que la frecuencia que marcó el tacómetro en el momento del experimento fue efectivamente a la que giró el motor.

Mediante análisis de wavelets y utilizando la onda de Morlet real, se estudia el comportamiento de las frecuencias que presenta la serie de velocidad a lo largo del tiempo. Este análisis funciona comparando una forma de onda estándar para distintas frecuencias con una ventana de la serie analizada. Colores más cálidos corresponden a una mayor correlación entre esta onda estándar a cierta frecuencia y la ventana analizada de la serie de velocidad.

Por otro lado, se intenta obtener la tasa de decaimiento al final de las series de velocidades del fluido con un ajuste exponencial a los datos comprendidos entre los instantes en que el motor deja de forzar al sistema y un minuto después. La expresión ajustada es de la forma:

$$a \cdot \exp(-b \cdot t) \tag{5.1}$$



en donde  $b$  es positivo si es que el movimiento es amortiguado. Para ilustrar este análisis, se presenta a continuación las Figuras 5.2 y 5.3 que muestran la serie en el intervalo mencionado con la envolvente y el ajuste sobre la envolvente respectivamente.

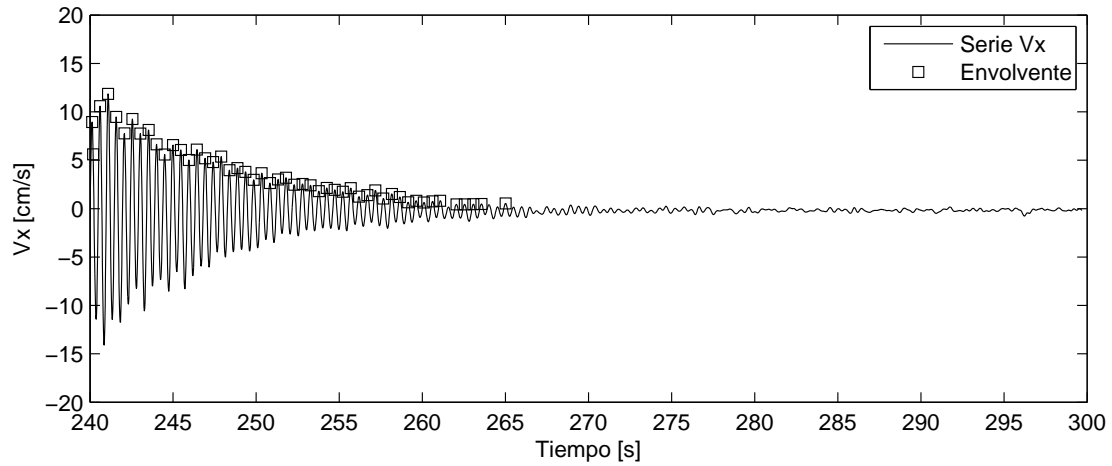


Figura 5.2: Envolvente de los últimos 60 segundos de datos, para  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_2^* = 125.5$  [RPM] en el punto 5 de medición.

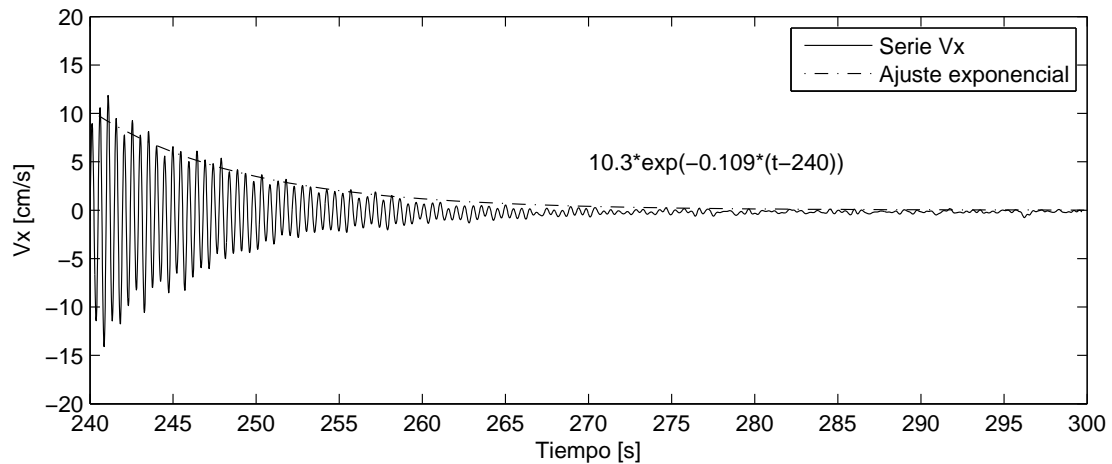


Figura 5.3: Ajuste de los últimos 60 segundos de datos.  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_2^* = 125.5$  [RPM] en el punto 5 de medición.

En la Figura 5.3 se infiere del ajuste que la tasa de decaimiento es de  $0.109$  [1/s].

A continuación, se presentan las Figuras de los múltiples análisis para las frecuencias  $w_2^*$  y  $w_{2-3}^*$  y para las alturas  $h_0 = 3.6$  [cm] y  $h_0 = 4.5$  [cm]. Solo se presentan los análisis para el punto 5 de medición que resulta ser el más interesante dadas las amplitudes de velocidad que se presentan en en el eje x. Cabe destacar que el resumen de los datos de velocidades máximas y las tasas de decaimiento se encuentra en las siguientes dos subsecciones. Por otro lado, el análisis de wavelets se explica solo con las presentadas en esta subsección.

**Análisis**  $h_0 = 3.6$  [cm] y  $w_2^* = 125.5$  [RPM]

En la Figura 5.4 se presenta el análisis de wavelets para la serie de velocidad asociada al par  $h_0 = 3.6$  [cm] y  $w_2^* = 125.5$  [RPM] y punto de medición 5. Se observa que la serie de velocidad en x oscila en todo momento con una frecuencia de 2.09 [Hz] o equivalentemente, 125.5 [RPM] (línea blanca continua) con amplitudes de velocidad superiores a los 5 [cm/s] lo que indica que efectivamente 125.5 [RPM] corresponde a una frecuencia muy cercana a un modo normal. Al final de la serie, se observa una leve perturbación que oscila con poca claridad a 0.76 [Hz] o equivalentemente a 45.7 [RPM] (línea blanca discontinua) lo que corresponde al modo fundamental para una profundidad de  $h_0 = 3.6$  [cm], por lo tanto, cuando el sistema tiende al reposo luego de dejar de ser forzado, lo hace con frecuencias parecidas a la del modo fundamental, sin embargo, con poca claridad. Por último, se observa que en la perturbación anteriormente mencionada hacia la frecuencia fundamental, la magnitud de la velocidad aumenta. Esto se explica porque como se mencionó anteriormente, la frecuencia  $w_2^* = 125.5$  [RPM] no es exactamente la frecuencia del modo normal n=2, sino que se encuentra cerca ya que las altas velocidades que se presentan rompen la superficie del agua y desestabilizan el modo, sin embargo, cuando el sistema deja de ser forzado y entra en reposo, este tiende a transferir la energía restante al modo fundamental, situación que no puede ser controlada y por lo tanto es libre de alcanzar las velocidades características de un modo normal por un instante antes de decaer.

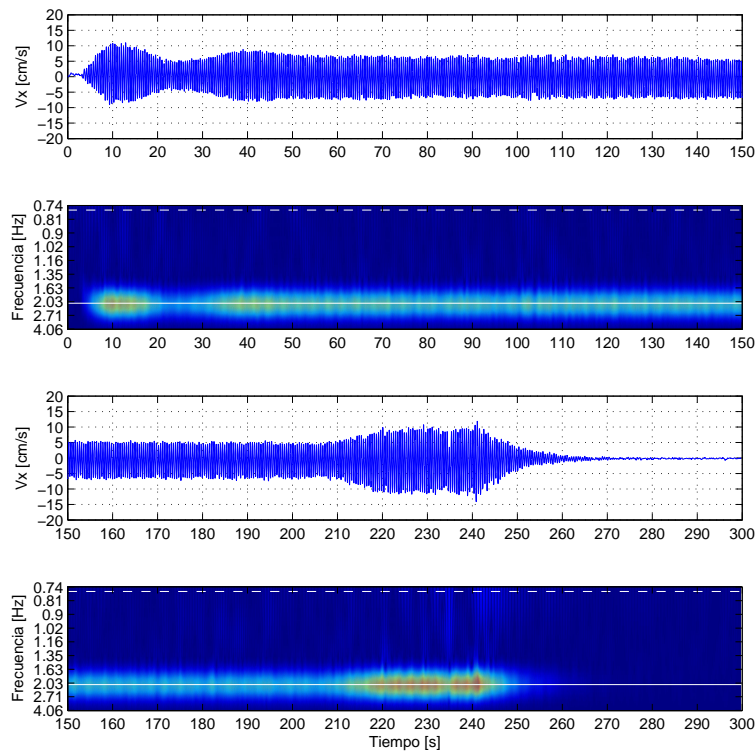


Figura 5.4: Análisis de Wavelets para altura máxima.  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_2^*=125.5$  [RPM] en el punto 5 de medición. En línea blanca continua la frecuencia forzante y en línea discontinua la frecuencia fundamental (n=1)

La Figura correspondiente al ajuste exponencial de  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_2^*=125.5$  [RPM] en el punto 5 de medición, se encuentra como ejemplo para ilustrar la metodología a seguir al principio de esta subsección con el nombre de Figura 5.3. En esta Figura, se observa a simple vista que las altas velocidades al final de la serie permiten un buen ajuste de la exponencial obteniendo una tasa de decaimiento de  $b = 0.109$  [1/s]

En la Figura 5.5 correspondiente a las series de velocidad en x y en y de  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_2^*=125.5$  [RPM], se observa una gran diferencia de amplitud entre las series en la parte estacionaria del experimento, predominando los valores de la componente x de la velocidad del fluido. Esto se debe principalmente a que como se concluyó anteriormente,  $w_2^*=125.5$  [RPM] está cerca de un modo normal (n=2) y en general, la estructura espacial de estos, requiere que las velocidades en la dirección de la forzante (x) sean mucho mayores que en la dirección perpendicular.

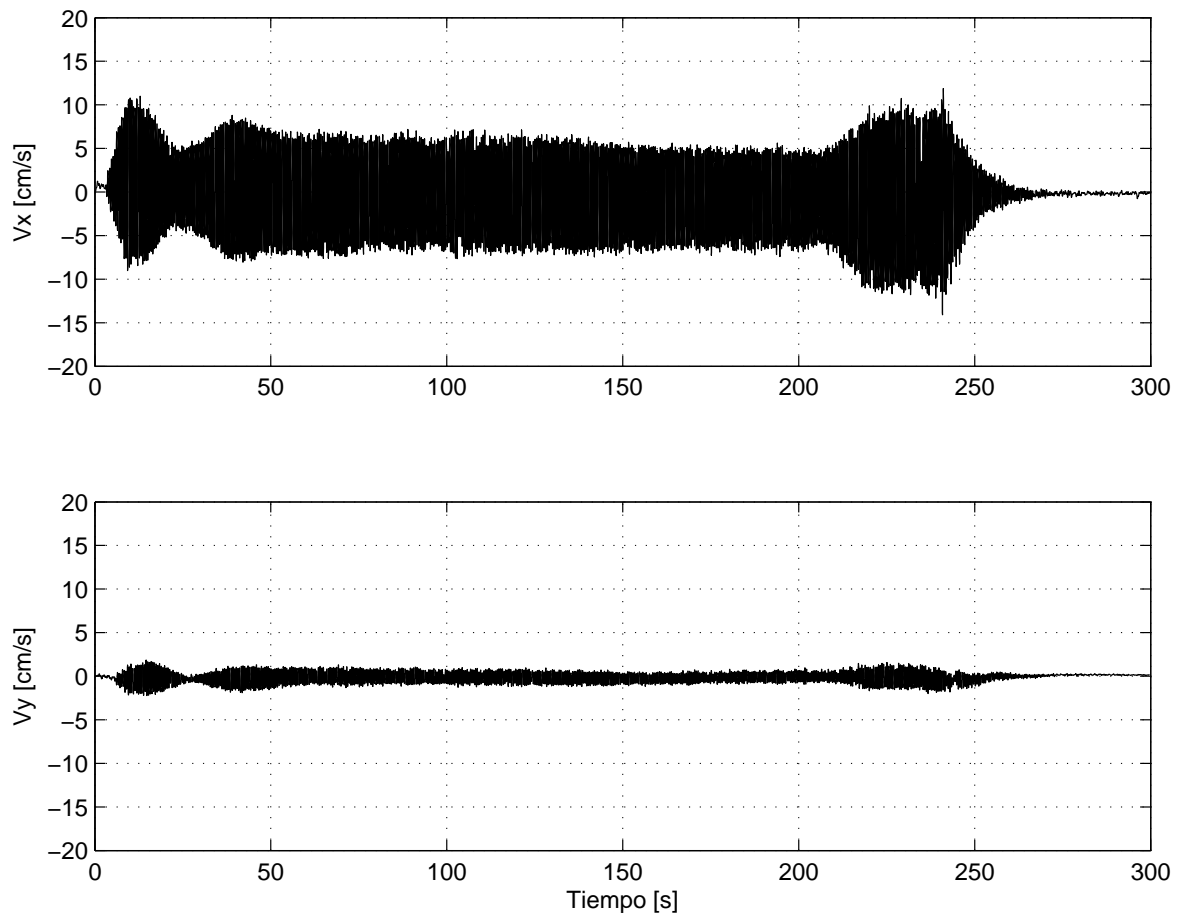


Figura 5.5: Componentes x e y para altura máxima  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_2^*=125.5$  [RPM] en el punto 5 de medición.

En la Figura 5.6 correspondiente a la serie de aceleración en x, se observa que el sistema osciló efectivamente a la frecuencia requerida.

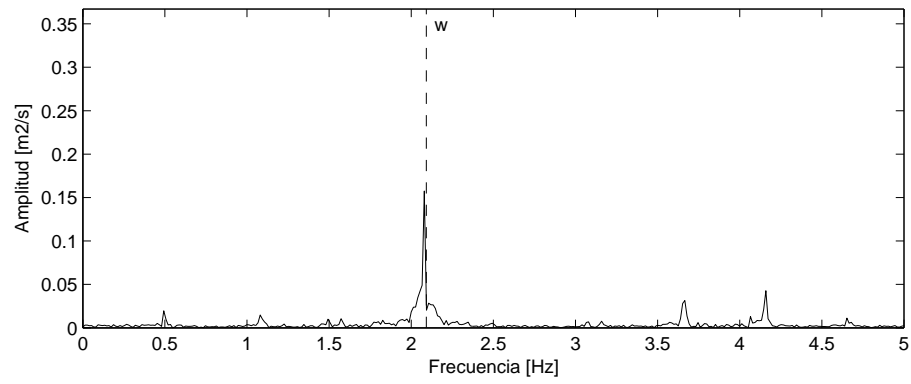


Figura 5.6: Espectro de la serie de aceleración para  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_2^* = 125.5$  [RPM] en el punto 5 de medición. En línea continua el espectro, en discontinua la frecuencia forzante

**Análisis**  $h_0 = 3.6$  [cm] y  $w_{2_3}^* = 149.8$  [RPM]

En la Figura 5.7 se presenta el análisis de wavelets para la serie de velocidad asociada al par  $h_0 = 3.6$  [cm] y  $w_{2_3}^* = 149.8$  [RPM] y punto de medición 5. Se observa que la serie de velocidad en x no muestra una frecuencia de oscilación definida y las amplitudes de velocidad no superan los 2 [cm/s] lo que indica que efectivamente 149.8 [RPM] corresponde a una frecuencia intermedia y no es capaz de excitar a ninguno de los modos normales del sistema. Al principio y al final de la serie, se observan notorias perturbaciones que oscilan con poca claridad a 0.76 [Hz] o equivalentemente a 45.7 [RPM] (línea blanca discontinua) y a 2.09 [Hz], lo que corresponde al modo fundamental y al modo  $w_2^* = 125.5$  [RPM] respectivamente, para una profundidad de  $h_0 = 3.6$  [cm], por lo tanto, cuando el sistema tiende al reposo luego de dejar de ser forzado o sale del reposo, lo hace con frecuencias parecidas a la del modo fundamental y a la del modo n=2, sin embargo, durante el forzamiento no presenta frecuencias dominantes. Por último, se observa que en las perturbaciones anteriormente mencionada hacia la frecuencia fundamental, la magnitud de la velocidad aumenta. Esto se explica porque cuando el sistema comienza a oscilar o deja de ser forzado y entra en reposo, este tiende a transferir la energía al modo fundamental, situación que no puede ser controlada y por lo tanto es libre de alcanzar las velocidades características de un modo normal por un instante antes de alcanzar el régimen estacionario o decaer.

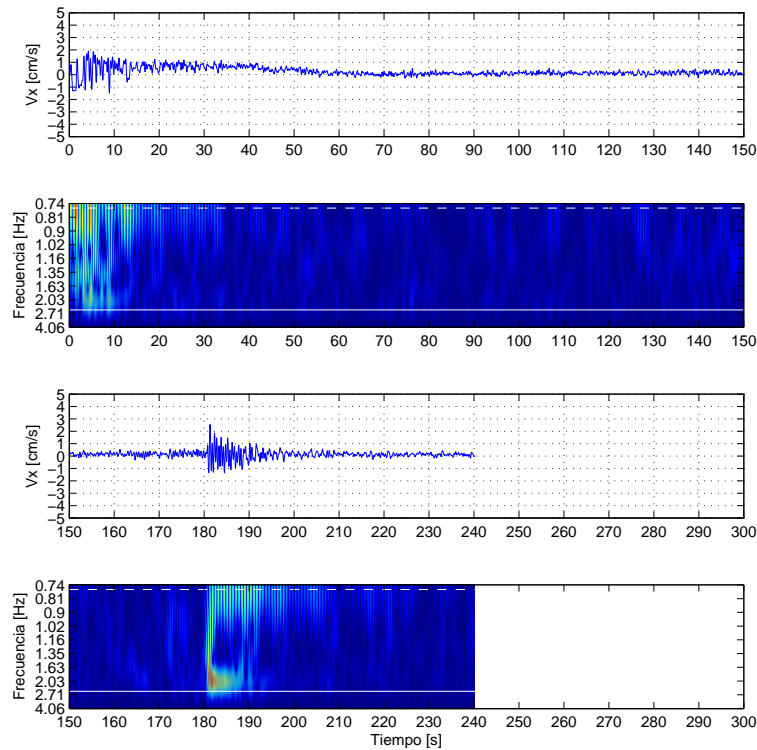


Figura 5.7: Análisis de Wavelets para altura máxima.  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_{2_3}^* = 149.8$  [RPM] en el punto 5 de medición. En línea blanca continua la frecuencia forzante y en línea discontinua la frecuencia fundamental (n=1)

La Figura 5.8 corresponde al ajuste exponencial de  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^*=149.8$  [RPM] en el punto 5 de medición. En esta Figura, se observa que las velocidades son más bien bajas, sin embargo, el ajuste sigue siendo válido obteniendo una tasa de decaimiento de  $b = 0.056$  [1/s]

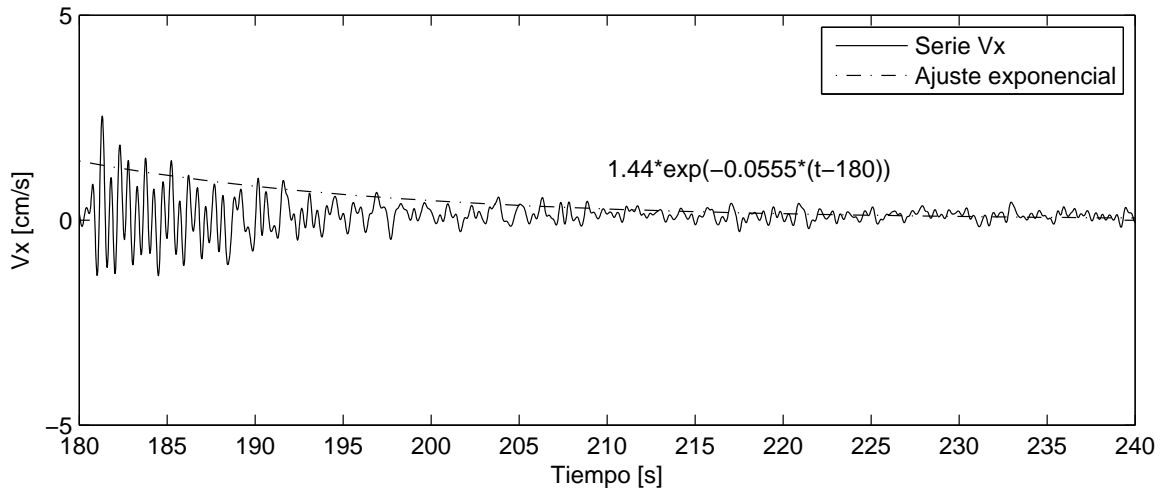


Figura 5.8: Ajuste exponencial y tasa de decaimiento para altura máxima  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^*=149.8$  [RPM] en el punto 5 de medición.

En la Figura 5.9 correspondiente a las series de velocidad en x y en y de  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^*=149.8$  [RPM], casi no se observa diferencia de amplitud entre las series en la parte estacionaria del experimento. Esto se debe principalmente a que como se concluyó anteriormente,  $w_{2-3}^*=149.8$  [RPM] no es capaz de activar ningún modo normal por lo que no existe mayor diferencia entre un campo de velocidades y el ortogonal. Se observa diferencia en la perturbación final ya que el modo fundamental está orientado en la dirección de la forzante, es decir, que las velocidades en x son mayores a las velocidades en y.

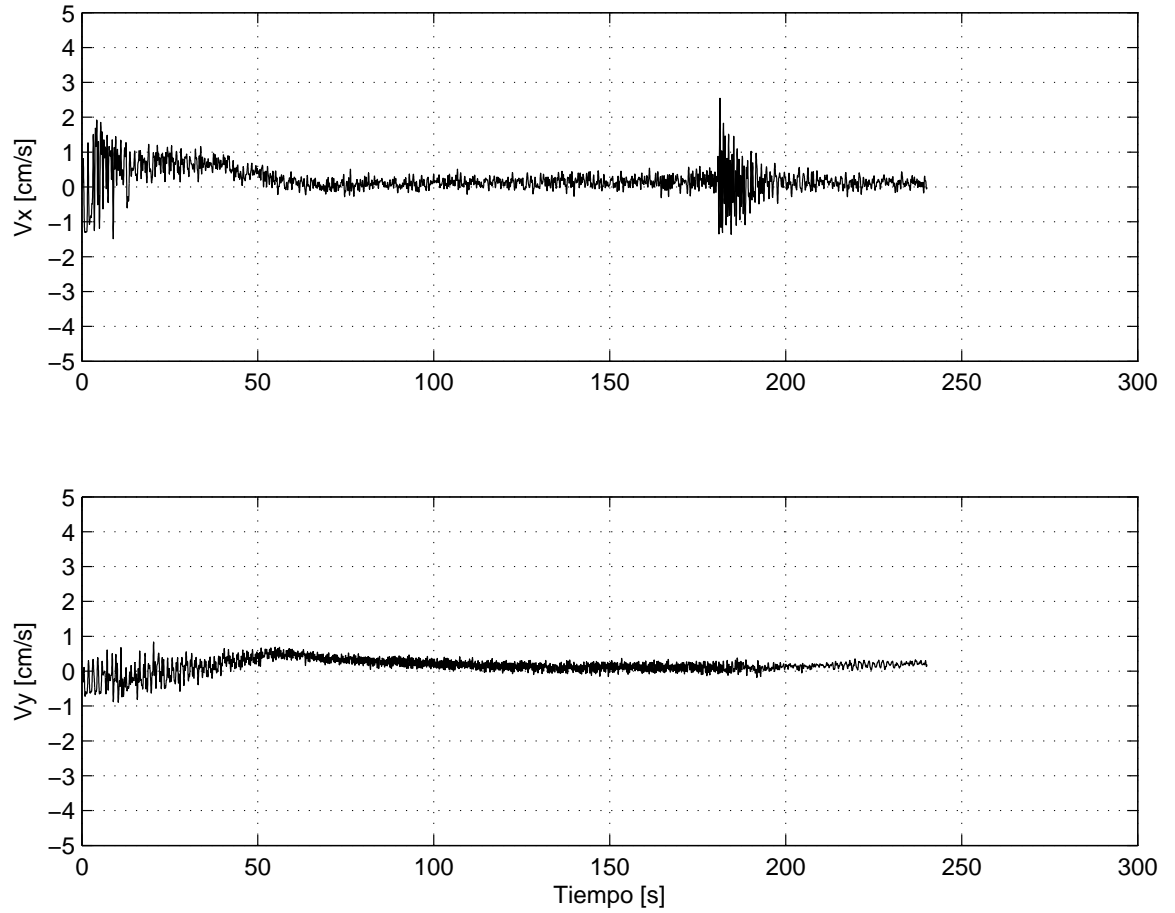


Figura 5.9: Componentes x e y para altura máxima  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^* = 149.8$  [RPM] en el punto 5 de medición.

En la Figura 5.10 correspondiente a la serie de aceleración en x, se observa que el sistema osciló efectivamente a la frecuencia requerida.

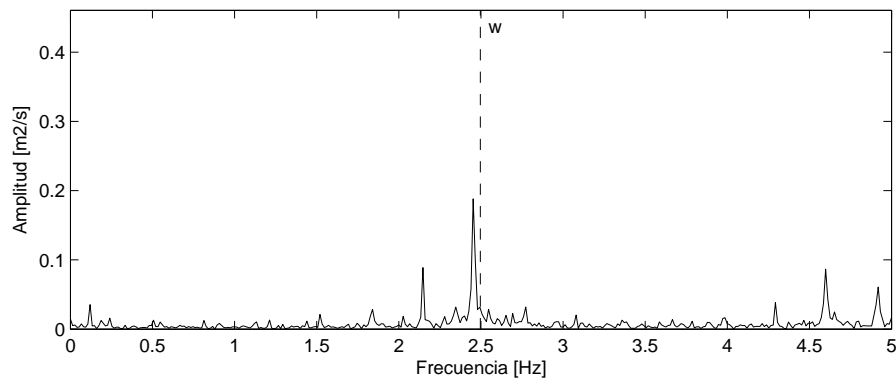


Figura 5.10: Espectro de la serie de aceleración para  $h_0 = 3.6$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^* = 149.8$  [RPM] en el punto 5 de medición. En línea continua el espectro, en discontinua la frecuencia forzante.

### Análisis $h_0 = 4.5 [cm]$ y $w_2^* = 139.0[RPM]$

En la Figura 5.11 se presenta el análisis de wavelets para la serie de velocidad asociada al par  $h_0 = 4.5 [cm]$  y  $w_2^* = 139.0 [RPM]$  y punto de medición 5. Se observa que la serie de velocidad en x oscila en todo momento con una frecuencia de 2.32 [Hz] o equivalentemente, 139.0 [RPM] (línea blanca continua) con amplitudes de velocidad superiores a los 4 [cm/s] lo que indica que efectivamente 139.0 [RPM] corresponde a una frecuencia muy cercana a un modo normal. Al principio y al final de la serie, se observa una leve perturbación que oscila con poca claridad a 0.88 [Hz] o equivalentemente a 52.5 [RPM] (línea blanca discontinua) lo que corresponde al modo fundamental para una profundidad de  $h_0 = 4.5 [cm]$ , por lo tanto, cuando el sistema comienza a ser forzado o tiende al reposo luego de dejar de ser forzado, lo hace con frecuencias parecidas a la del modo fundamental. Por último, se observa que en las perturbaciones anteriormente mencionada hacia la frecuencia fundamental, la magnitud de la velocidad aumenta. Esto se explica porque como se mencionó anteriormente, la frecuencia  $w_2^* = 139.0 [RPM]$  no es exactamente la frecuencia del modo normal  $n=2$ , sino que se encuentra cerca ya que las altas velocidades que se presentan rompen la superficie del agua y desestabilizan el modo, sin embargo, cuando el sistema deja de ser forzado y entra en reposo, este tiende a transferir la energía restante al modo fundamental, situación que no puede ser controlada y por lo tanto es libre de alcanzar las velocidades características de un modo normal por un instante antes de decaer.

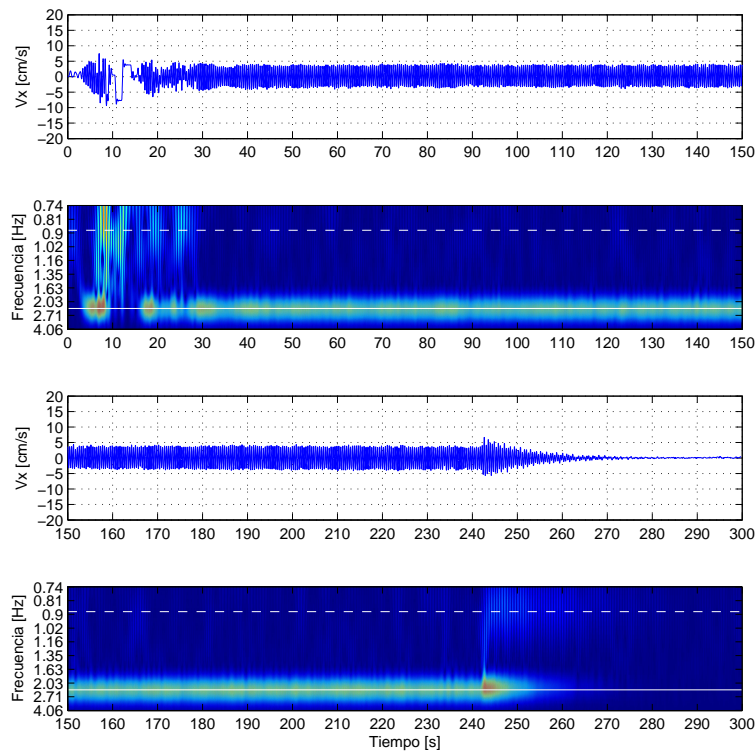


Figura 5.11: Análisis de Wavelets para altura máxima.  $h_0 = 4.5 [cm]$  y frecuencia  $w_2^*=139.0 [RPM]$  en el punto 5 de medición. En línea blanca continua la frecuencia forzante y en línea discontinua la frecuencia fundamental ( $n=1$ )



La Figura 5.12 corresponde al ajuste exponencial de  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_2^*=139.0$  [RPM] en el punto 5 de medición. En esta Figura, se observa que las velocidades son altas al dejar de forzar el sistema el ajuste es válido, obteniendo una tasa de decaimiento de  $b = 0.052$  [1/s]

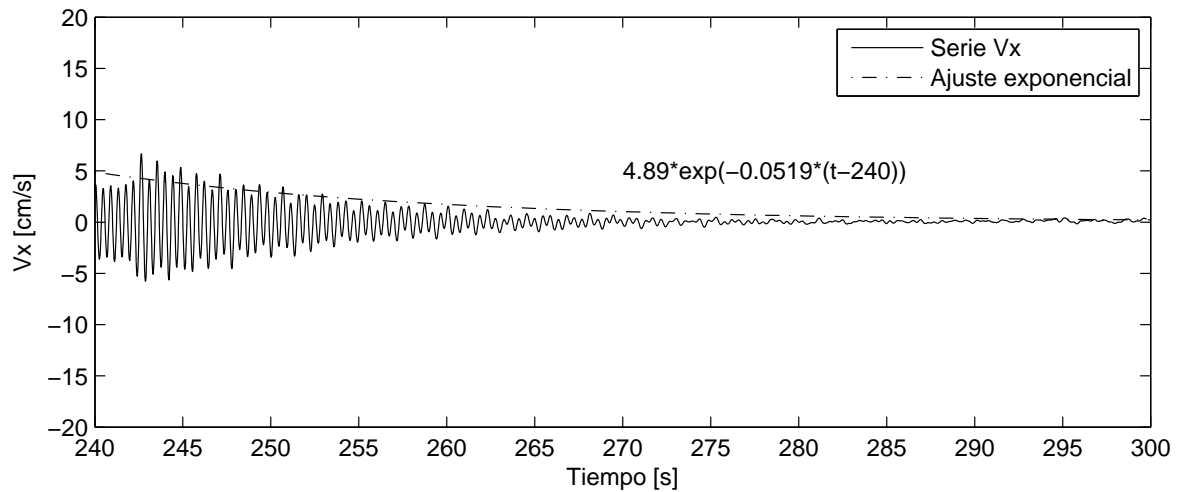


Figura 5.12: Ajuste exponencial y tasa de decaimiento para altura máxima  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_2^*=139.0$  [RPM] en el punto 5 de medición.

En la Figura 5.13 correspondiente a las series de velocidad en x y en y de  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_2^*=139.0$  [RPM], se observa una gran diferencia de amplitud entre las series en la parte estacionaria del experimento, predominando los valores de la componente x de la velocidad del fluido. Esto se debe principalmente a que como se concluyó anteriormente,  $w_2^*=139.0$  [RPM] está cerca de un modo normal ( $n=2$ ) y en general, la estructura espacial de estos, requiere que las velocidades en la dirección de la forzante (x) sean mucho mayores que en la dirección perpendicular.

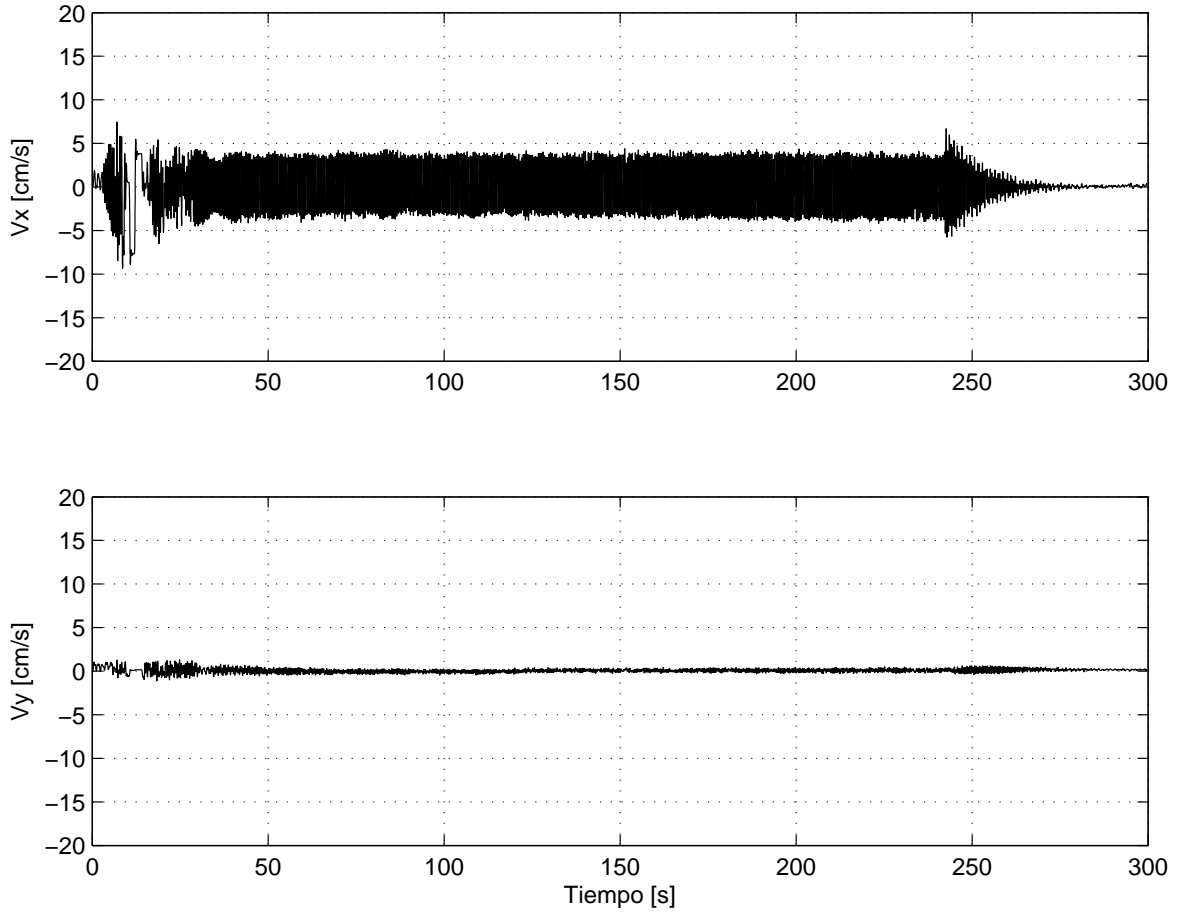


Figura 5.13: Componentes x e y para altura máxima  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_2^* = 139.0$  [RPM] en el punto 5 de medición.

En la Figura 5.14 correspondiente a la serie de aceleración en x, se observa que el sistema osciló efectivamente a la frecuencia requerida.

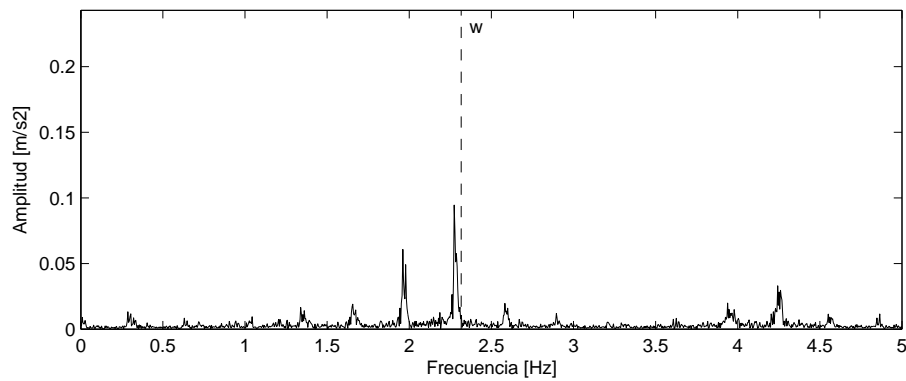


Figura 5.14: Espectro de la serie de aceleración para  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_2^* = 139.0$  [RPM] en el punto 5 de medición. En línea continua el espectro, en discontinua la frecuencia forzante.

### Análisis $h_0 = 4.5 [cm]$ y $w_2^* = 168.0[RPM]$

En la Figura 5.15 se presenta el análisis de wavelets para la serie de velocidad asociada al par  $h_0 = 4.5 [cm]$  y  $w_{2_3}^* = 168.0[RPM]$  y punto de medición 5. Se observa que la serie de velocidad en x no muestra una frecuencia de oscilación definida y las amplitudes de velocidad no superan los  $1 [cm/s]$  lo que indica que efectivamente  $168.0 [RPM]$  corresponde a una frecuencia intermedia y no es capaz de excitar a ninguno de los modos normales del sistema. Al principio y al final de la serie, se observan notorias perturbaciones que oscilan con poca claridad a  $0.88 [Hz]$  o equivalentemente a  $52.5 [RPM]$  (línea blanca discontinua) y a  $2.32 [Hz]$ , lo que corresponde al modo fundamental y al modo  $w_2^* = 139.0 [RPM]$  respectivamente, para una profundidad de  $h_0 = 4.5 [cm]$ , por lo tanto, cuando el sistema tiende al reposo luego de dejar de ser forzado o sale del reposo, lo hace con frecuencias parecidas a la del modo fundamental y a la del modo  $n=2$ , sin embargo, durante el forzamiento no presenta frecuencias dominantes. Esto se explica porque cuando el sistema comienza a oscilar o deja de ser forzado y entra en reposo, este tiende a transferir la energía al modo fundamental, situación que no puede ser controlada y por lo tanto es libre de alcanzar las velocidades características de un modo normal por un instante antes de alcanzar el régimen estacionario o decaer.

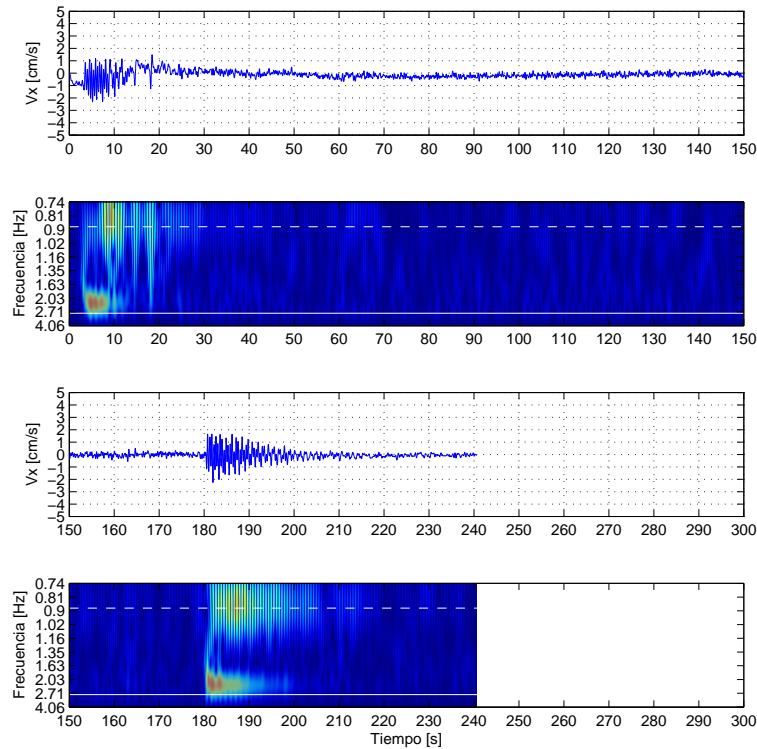


Figura 5.15: Análisis de Wavelets para altura máxima.  $h_0 = 4.5 [cm]$  y frecuencia  $w_{2-3}^*=168.0 [RPM]$  en el punto 5 de medición. En línea blanca continua la frecuencia forzante y en línea discontinua la frecuencia fundamental ( $n=1$ )

La Figura 5.16 corresponde al ajuste exponencial de  $h_0 = 4.5 [cm]$  y frecuencia  $w_{2-3}^*=168.0$

[RPM] en el punto 5 de medición. En esta Figura, se observa que las velocidades son más bien bajas, sin embargo, el ajuste sigue siendo válido obteniendo una tasa de decaimiento de  $b = 0.007$  [1/s]

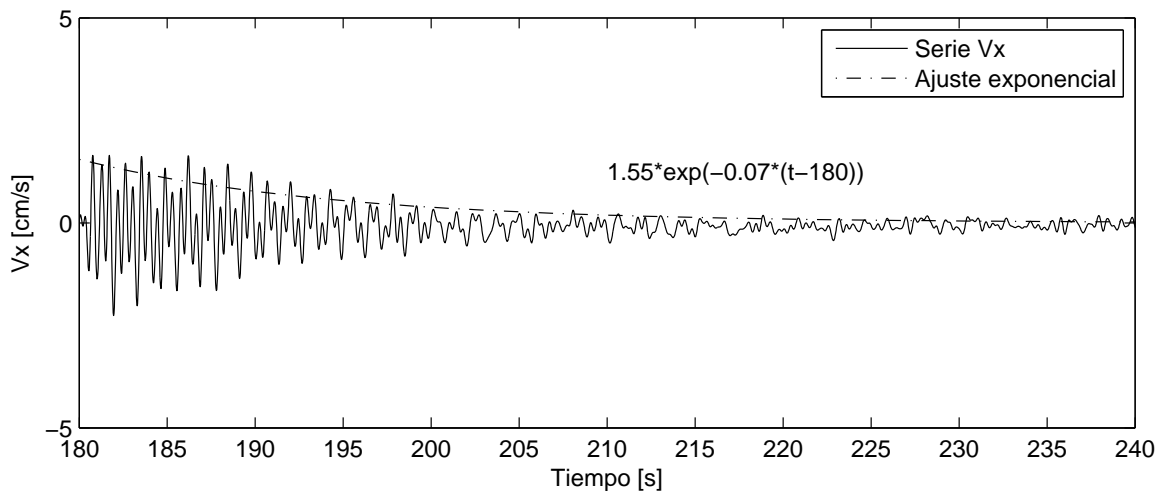


Figura 5.16: Ajuste exponencial y tasa de decaimiento para altura máxima  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^* = 168.0$  [RPM] en el punto 5 de medición.

En la Figura 5.17 correspondiente a las series de velocidad en x y en y de  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^* = 168.0$  [RPM], casi no se observa diferencia de amplitud entre las series en la parte estacionaria del experimento. Esto se debe principalmente a que como se concluyó anteriormente,  $w_{2-3}^* = 168.0$  [RPM] no es capaz de activar ningún modo normal por lo que no existe mayor diferencia entre un campo de velocidades y el ortogonal. Se observa diferencia en la perturbación final ya que el modo fundamental está orientado en la dirección de la forzante, es decir, que las velocidades en x son mayores a las velocidades en y.

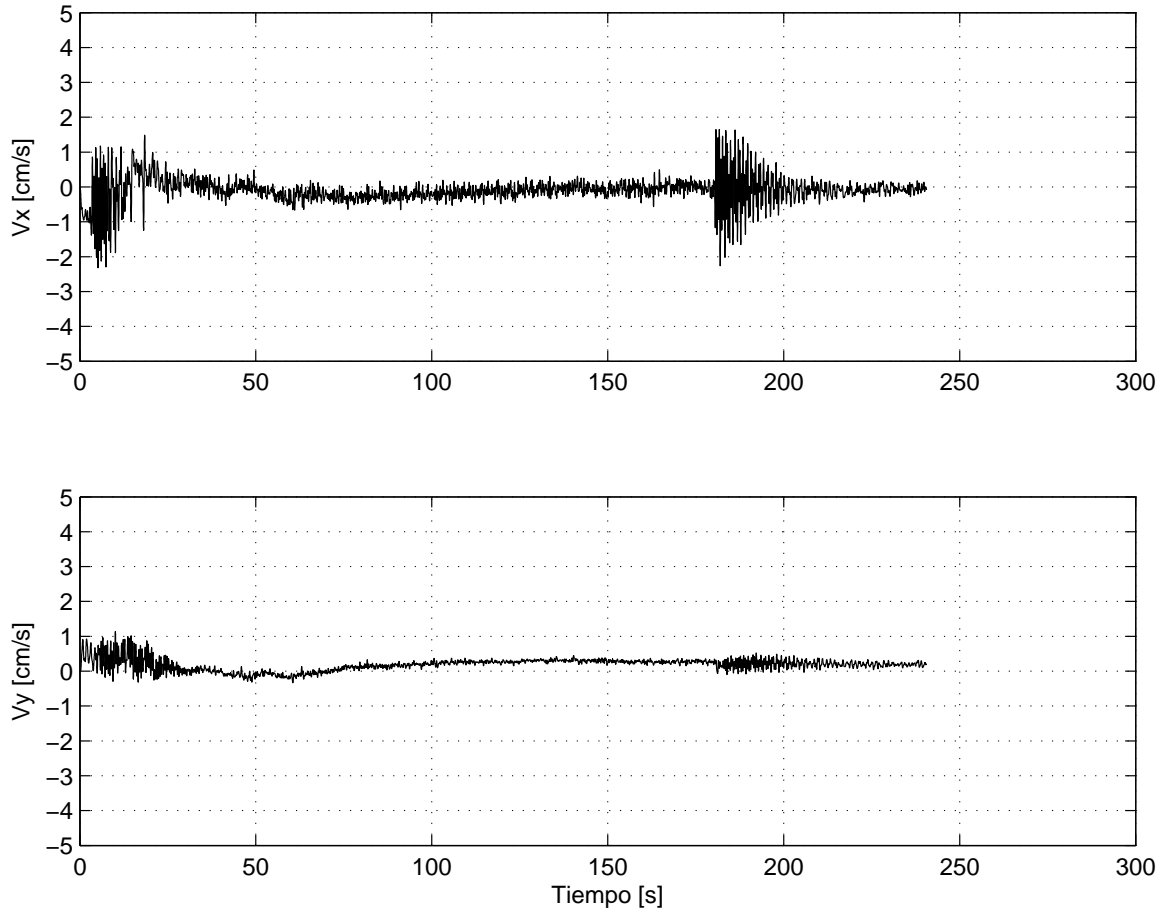


Figura 5.17: Componentes x e y para altura máxima  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^* = 168.0$  [RPM] en el punto 5 de medición.

En la Figura 5.18 correspondiente a la serie de aceleración en x, se observa que el sistema osciló efectivamente a la frecuencia requerida.

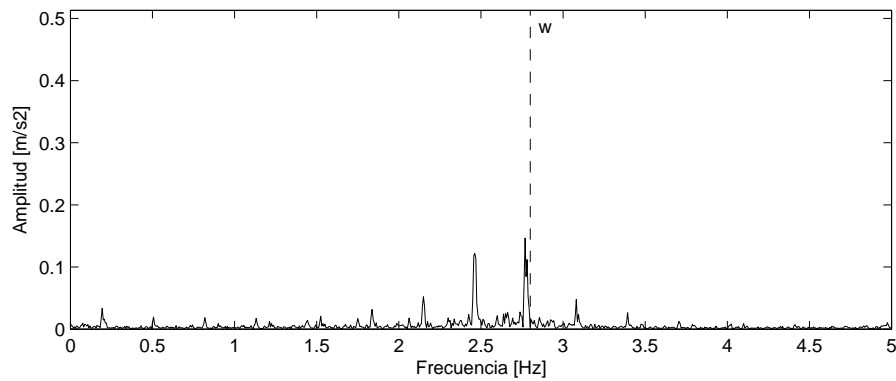


Figura 5.18: Espectro de la serie de aceleración para  $h_0 = 4.5$  [cm] y frecuencia  $w_{2-3}^* = 168.0$  [RPM] en el punto 5 de medición. En línea continua el espectro, en discontinua la frecuencia forzante

## 5.2.2. Velocidades Máximas

A continuación, se presentan las Tablas 5.3 y 5.4 con el resumen de las velocidades máximas registradas en cada uno de los 75 experimentos durante el lapso de tiempo en que el agua dentro de la maqueta se encuentra oscilando en un estado estacionario, es decir, temporalmente lejos de las perturbaciones del principio y del final de la serie de velocidades.

Tabla 5.3: Velocidades máximas en el eje x para todos los puntos ( $V_{x-n}$  corresponde a la velocidad medida en el punto n de medición).

	$V_{x-1}$ [cm/s]	$V_{x-2}$ [cm/s]	$V_{x-3}$ [cm/s]	$V_{x-4}$ [cm/s]	$V_{x-5}$ [cm/s]
$h_0 = 3.6w_{1-2}$	3.28	2.41	3.16	2.22	2.10
$h_0 = 3.6w_2$	8.62	8.16	6.53	4.55	11.86
$h_0 = 3.6w_{2-3}$	2.31	2.06	1.82	1.57	2.54
$h_0 = 3.6w_3$	2.97	1.16	2.31	1.91	5.30
$h_0 = 4.0w_{1-2}$	2.49	2.91	3.43	3.17	3.30
$h_0 = 4.0w_2$	8.62	6.65	8.13	9.50	9.45
$h_0 = 4.0w_{2-3}$	2.21	2.20	1.58	0.49	2.44
$h_0 = 4.0w_3$	4.03	3.88	2.75	2.45	6.51
$h_0 = 4.5w_1$	13.67	16.37	14.50	14.55	13.47
$h_0 = 4.5w_{1-2}$	4.32	2.38	3.09	3.01	3.09
$h_0 = 4.5w_2$	10.81	9.15	8.41	5.95	7.46
$h_0 = 4.5w_{2-3}$	2.37	2.30	1.81	1.93	1.65
$h_0 = 4.5w_3$	4.38	3.56	2.73	2.93	6.94

Tabla 5.4: Velocidades máximas en el eje y para todos los puntos ( $V_{y-n}$  corresponde a la velocidad medida en el punto n de medición).

	$V_{y-1}$ [cm/s]	$V_{y-2}$ [cm/s]	$V_{y-3}$ [cm/s]	$V_{y-4}$ [cm/s]	$V_{y-5}$ [cm/s]
$h_0 = 3.6w_{1-2}$	0.83	0.71	0.84	0.81	0.77
$h_0 = 3.6w_2$	2.44	3.06	1.46	2.85	1.85
$h_0 = 3.6w_{2-3}$	0.96	1.97	1.17	0.87	0.84
$h_0 = 3.6w_3$	0.90	1.47	0.50	1.41	1.43
$h_0 = 4.0w_{1-2}$	0.98	1.18	1.22	0.83	0.74
$h_0 = 4.0w_2$	3.43	4.39	2.03	2.44	6.24
$h_0 = 4.0w_{2-3}$	0.65	1.35	0.82	2.69	0.67
$h_0 = 4.0w_3$	3.52	1.42	0.59	4.57	1.99
$h_0 = 4.5w_1$	14.54	13.49	15.06	17.01	16.25
$h_0 = 4.5w_{1-2}$	1.20	0.55	0.97	0.98	0.84
$h_0 = 4.5w_2$	1.54	2.31	1.66	2.42	1.31
$h_0 = 4.5w_{2-3}$	1.28	0.65	0.61	1.02	1.13
$h_0 = 4.5w_3$	1.58	1.79	0.33	2.02	1.23

Se observa que la magnitud de las componente de la velocidad en x y en y aumentan notoriamente cuando la forzante se acerca a una frecuencia normal, excepto en los modos 3 ( $w_3^*$ ) para todas las alturas, ya que la variación con respecto a las frecuencias intermedias es

despreciable. Se tiene que las máximas velocidades se alcanzan en el modo fundamental ( $w_1^*$ ) para la mayor altura ( $h_0 = 4.5 [cm]$ ), caso que corresponde a la inestabilidad en forma de corriente circular mencionada anteriormente. Se observa también, que en general, las velocidades máximas alcanzadas por las series de la componente x son mayores que la componente y, lo que confirma que la estructura espacial de los modos es simétrica en torno al eje y, obligando al fluido a ir y volver en la dirección en que actúa el forzante sobre la maqueta (x). Lo anterior no es cierto para el par  $w_1^*$  y  $h_0 = 4.5 [cm]$ , en donde las velocidades son similares, esto debido a la inestabilidad.

### 5.2.3. Tasas de Decaimiento

Se presentan las Tablas resúmenes 5.5 y 5.6 del parámetro ajustado de tasa de decaimiento y su intervalo de confianza de un 95 % para las series pertenecientes a frecuencias normales, ya que la despreciable amplitud de las oscilaciones de velocidad para las frecuencias intermedias hace que no sea interesante analizar el ajuste de la función exponencial al intervalo de interés. Las tasas de decaimiento cuyos valores de velocidades al momento de dejar de forzar el sistema eran tan pequeños que generaron errores en el cálculo de los valores, no se incluyeron y corresponden a espacios en blanco. Se puede inferir que tasas de decaimiento dependen del punto de medición ya que la magnitud de las velocidades varían en función de estos. Para el punto 1 y 5, se observa que los valores de la tasa para la componente x disminuyen cuando aumenta la altura-frecuencia. No se observa una tendencia similar para el caso de la componente en y. Los valores varían entre 0.18 y 0.00.

Tabla 5.5: Tasas de decaimiento e intervalo de confianza de un 95 % para las series de velocidad en su componente x ( $b_{x-n}$ , donde n es el punto de medición).

	$b_{x-1} [1/s]$	$b_{x-2} [1/s]$	$b_{x-3} [1/s]$	$b_{x-4} [1/s]$	$b_{x-5} [1/s]$
$h_0 = 3.6w_2$	$0.1103 \pm 0.0247$	$0.0910 \pm 0.0094$	$0.1109 \pm 0.0179$	$0.0752 \pm 0.0301$	$0.1085 \pm 0.0132$
$h_0 = 3.6w_3$	$0.1071 \pm 0.0276$	$0.0243 \pm 0.0073$	$0.0503 \pm 0.0236$	$0.0180 \pm 0.0140$	$0.1339 \pm 0.0416$
$h_0 = 4.0w_2$	$0.1086 \pm 0.0319$	$0.1042 \pm 0.0107$	$0.0694 \pm 0.0126$	$0.0845 \pm 0.0105$	$0.1466 \pm 0.0125$
$h_0 = 4.0w_3$		$0.0330 \pm 0.0286$	$0.0468 \pm 0.0194$	$0.0423 \pm 0.0076$	$0.1898 \pm 0.0842$
$h_0 = 4.5w_1$	$0.0496 \pm 0.0205$	$0.0344 \pm 0.0048$	$0.0605 \pm 0.0049$	$0.0422 \pm 0.0047$	$0.0317 \pm 0.0101$
$h_0 = 4.5w_2$	$0.0785 \pm 0.0128$	$0.0558 \pm 0.0163$	$0.0599 \pm 0.0186$	$0.1007 \pm 0.0172$	$0.0255 \pm 0.0201$
$h_0 = 4.5w_3$	$0.0437 \pm 0.0235$	$0.0357 \pm 0.0288$	$0.0509 \pm 0.0292$	$0.0335 \pm 0.0449$	$0.0498 \pm 0.0156$

Tabla 5.6: Tasas de decaimiento e intervalo de confianza de un 95 % para las series de velocidad en su componente y ( $b_{y-n}$ , donde n es el punto de medición).

	$b_{y-1} [1/s]$	$b_{y-2} [1/s]$	$b_{y-3} [1/s]$	$b_{y-4} [1/s]$	$b_{y-5} [1/s]$
$h_0 = 3.6w_2$	$0.0044 \pm 0.0023$	$0.0159 \pm 0.0184$	$0.0205 \pm 0.0084$	$0.0701 \pm 0.0220$	$0.0171 \pm 0.0061$
$h_0 = 3.6w_3$	$0.0026 \pm 0.0026$	$0.0056 \pm 0.0094$		$0.0261 \pm 0.0127$	$0.0556 \pm 0.0164$
$h_0 = 4.0w_2$	$0.0336 \pm 0.0134$	$0.0274 \pm 0.0218$		$0.0225 \pm 0.0160$	$0.0472 \pm 0.0089$
$h_0 = 4.0w_3$	$0.0810 \pm 0.0238$	$0.0209 \pm 0.0152$	$0.0103 \pm 0.0095$	$0.0084 \pm 0.0195$	$0.0824 \pm 0.0250$
$h_0 = 4.5w_1$	$0.0379 \pm 0.0030$	$0.0506 \pm 0.0101$	$0.0407 \pm 0.0031$	$0.0436 \pm 0.0036$	$0.0464 \pm 0.0029$
$h_0 = 4.5w_2$	$0.0098 \pm 0.0125$	$0.0158 \pm 0.0164$	$0.0134 \pm 0.0092$	$0.0519 \pm 0.0261$	$0.0094 \pm 0.0051$
$h_0 = 4.5w_3$		$0.0404 \pm 0.0263$		$0.0636 \pm 0.0259$	$0.0041 \pm 0.0075$

A continuación, se presentan las Figuras 5.19 y 5.20 las cuales muestran las tasas de decaimiento resultantes en función de la frecuencia y de la profundidad respectivamente.

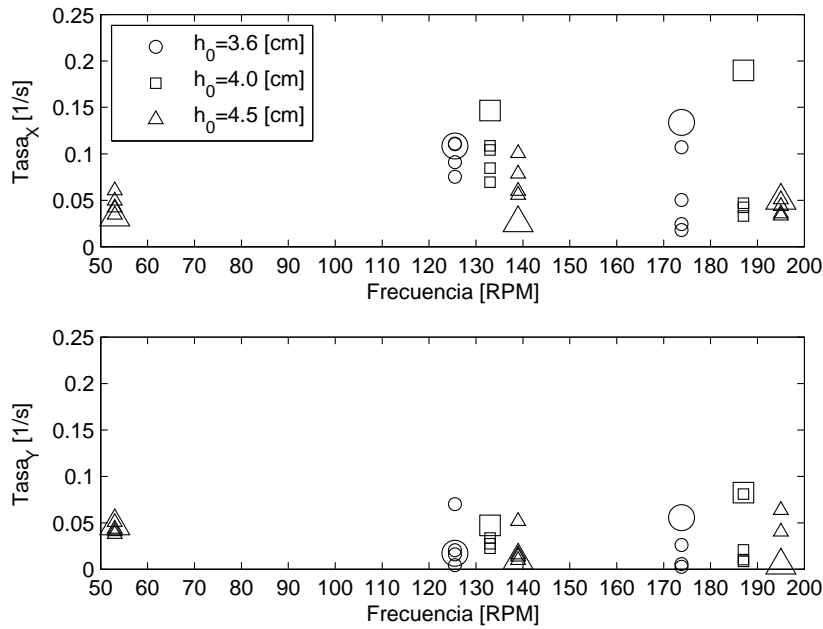


Figura 5.19: Tasas de decaimiento en función de la frecuencia del forzante. Los marcadores de mayor tamaño indican la tasa de decaimiento asociada al punto 5 de medición.

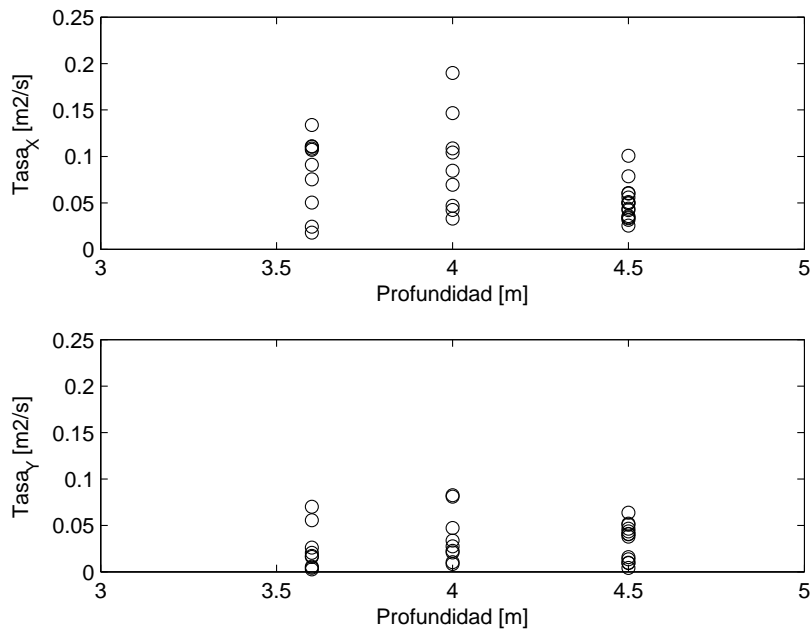


Figura 5.20: Tasas de decaimiento en función de la profundidad del cuerpo de agua.

De las Figuras 5.19 y 5.20 y observando la gran dispersión de los datos, se concluye que en



general, las tasas de decaimiento no dependen fuertemente ni de la frecuencia del forzante ni de la profundidad del cuerpo de agua, sin embargo, en la Figura 5.19 se observa que las tasas calculadas para el punto 5 de medición (el cual corresponde al único punto que presenta siempre la profundidad indicada) parecieran aumentar en función de la frecuencia para todas las profundidades. En la Figura 5.20 no se observa tendencia clara, sin embargo, más adelante se mostrará como los resultados obtenidos en este trabajo comparados con tasas mucho menores y profundidades mucho mayores si parecieran seguir una relación. Los datos mencionados han sido presentados por Wüest et al. (2000).

En la Tabla 5.7 y en la Tabla 5.8, se presentan los datos estadísticos mas relevantes de las tasas de decaimiento resultantes para el eje x y para el eje y respectivamente. Además, en la Figura 5.21 y en la 5.22 se presentan los histogramas de las tasas de decaimiento para el eje x y eje y respectivamente.

Tabla 5.7: Estadística de los valores de las tasas de decaimiento de las series de velocidad en el eje x.

	Promedio	Min	Max	Desv STD
$h_0 = 3.6w_2$	0.0992	0.0752	0.1109	0.0157
$h_0 = 3.6w_3$	0.0667	0.0180	0.1339	0.0514
$h_0 = 4.0w_2$	0.1027	0.0694	0.1466	0.0292
$h_0 = 4.0w_3$	0.0780	0.0330	0.1898	0.0748
$h_0 = 4.5w_1$	0.0437	0.0317	0.0605	0.0117
$h_0 = 4.5w_2$	0.0641	0.0255	0.1007	0.0279
$h_0 = 4.5w_3$	0.0427	0.0335	0.0509	0.0079

Tabla 5.8: Estadística de los valores de las tasas de decaimiento de las series de velocidad en el eje y.

	Promedio	Min	Max	Desv STD
$h_0 = 3.6w_2$	0.0256	0.0044	0.0701	0.0256
$h_0 = 3.6w_3$	0.0225	0.0026	0.0556	0.0244
$h_0 = 4.0w_2$	0.0327	0.0225	0.0472	0.0107
$h_0 = 4.0w_3$	0.0406	0.0084	0.0824	0.0378
$h_0 = 4.5w_1$	0.0438	0.0379	0.0506	0.0049
$h_0 = 4.5w_2$	0.0200	0.0094	0.0519	0.0180
$h_0 = 4.5w_3$	0.0360	0.0041	0.0636	0.0300

En la Tabla 5.7 se observa que el promedio de la tasa de decaimiento de las series de velocidad en el eje x pareciera disminuir con la profundidad y disminuir con la frecuencia, sin embargo, ambas tendencias son más bien poco claras. El autor realizó un análisis dimensional utilizando el Teorema de Pi, sin embargo, los esfuerzos fueron infructuosos ya que a pesar de intentar con varias variables geométricas, dinámicas y propiedades del fluido, no existía función alguna que ligara los adimensionales resultantes.

En la Tabla 5.8 y al contrario que en el caso de las tasas de decaimiento de las series de

velocidad para la componente x, se observa que las tasas de decaimiento de las series de velocidad para la componente y aparentemente no siguen ninguna tendencia ya que aumentan y disminuyen con la altura y la frecuencia, no observándose relación alguna.

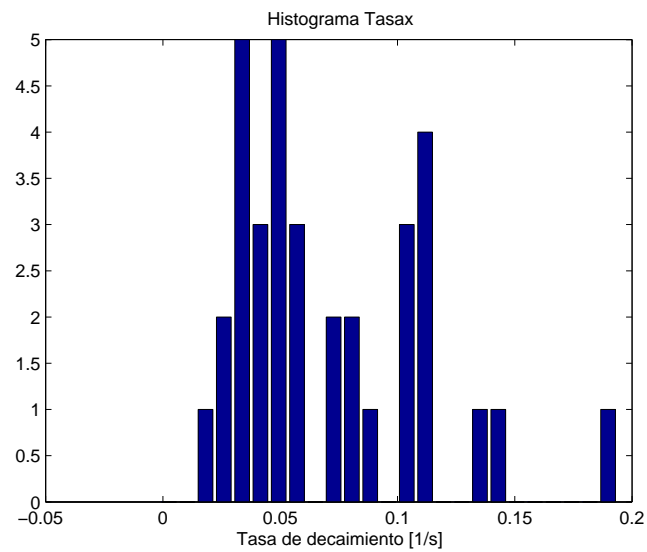


Figura 5.21: Histograma de las tasas de decaimiento de la serie de velocidad en el eje x.

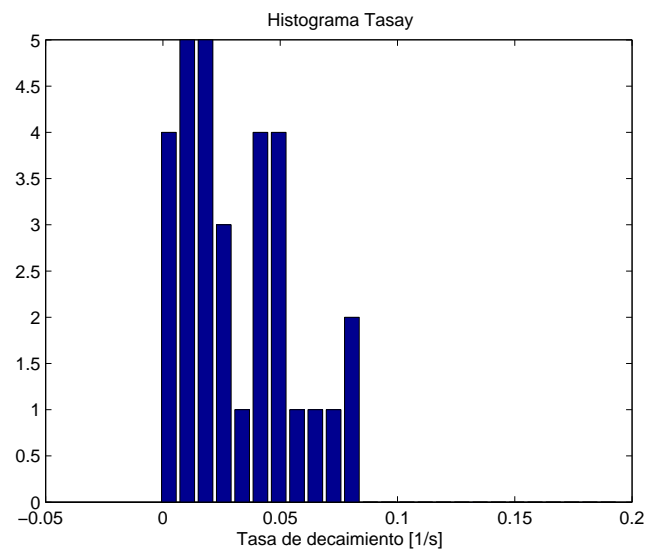


Figura 5.22: Histograma de las tasas de decaimiento de la serie de velocidad en el eje y.

De las Figuras 5.21 y 5.22 se puede concluir que los valores de las tasas de decaimiento no siguen ninguna distribución conocida.

Para comparar los datos de decaimiento resultantes en este trabajo con los presentados por Wüest et al. (2000), se procedió a promediar las tasas de decaimiento del punto de medición 5 para una misma altura ya que es en este punto que al estar al centro es el único que tiene una profundidad  $h_0$  relativamente constante debido a que los tres modos presentan un nodo en este lugar. Los resultados considerados corresponden solo a las tasas de decaimiento en el eje x ya que son las de mayor importancia dado la estructura de los modos normales. A continuación, en la Tabla 5.9 se presentan las tasas de decaimiento medias calculadas.

Tabla 5.9: Promedio de las tasas de decaimiento con distinta frecuencia y para una misma altura. Los datos corresponden a las tasas de decaimiento de las series de velocidad en el eje x.

Profundidad [m]	$\tau$ [d]	b [1/d]
0.036	-	10471.680
0.04	-	14532.480
0.045	-	3081.600

En la Tabla 5.10 se muestran los datos de decaimiento y profundidad presentados en Wüest et al. (2000).

Tabla 5.10: Datos de decaimiento y profundidad presentados por Wüest et al. (2000) en distintos cuerpos de agua.

Profundidad [m]	$\tau$ [d]	b [1/d]
3800	90	0.011
1400	40	0.025
147	3	0.333
87	2	0.500
34	1	1.000

En la Figura 5.23 se presenta un gráfico de dispersión con los ejes en escala logarítmica que muestra los datos del autor y los presentados en Wüest et al. (2000) para además del ajuste de una relación potencial entre las variables.

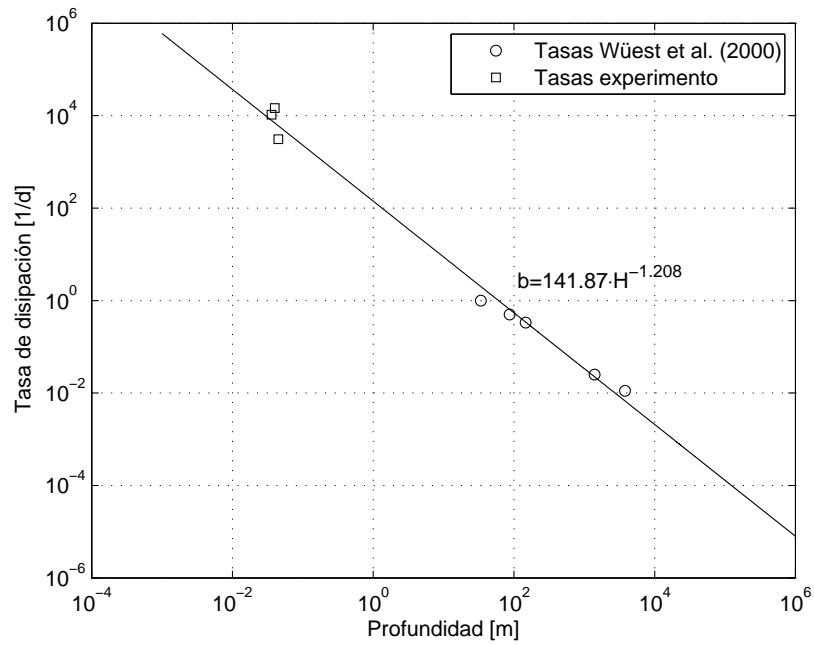


Figura 5.23: Tasas de decaimiento en función de la profundidad del cuerpo de agua. En el gráfico se muestran los datos presentados por Wüest et al. (2000), los resultados del presente trabajo y una relación ajustada de forma potencial. La tasa de decaimiento es notada como “b” y la profundidad como “H”.

De la Figura 5.23 se vislumbra que la variable que afecta de una mayor forma a las tasas de decaimiento es la profundidad ya que se observa claramente que existe un tendencia que relaciona estas dos variables de forma inversamente proporcional. Llama la atención el hecho de que los resultados del autor ajusten tan bien a los datos presentados por Wüest et al. (2000) considerando que existen grandes diferencias en ordenes de magnitud entre ambos packs de datos para las dos variables presentadas (tasa de decaimiento y profundidad).

# Capítulo 6

## Resultados Experimentales de Dispersión de Sustancias

### 6.1. Relación entre la saturación en la escala de grises y la concentración integrada en la vertical

En la Figura 6.1 se muestran las imágenes analizadas para obtener la relación entre color y concentración.

El primer panel de la Figura 6.1 corresponde a muestras de 3 [ml] con concentraciones en [mg/ml] de 1.236, 1.100, 0.900, 0.500, 0.200, 0.090, 0.050 y 0.030. Las muestras se encuentran ordenadas de mayor concentración a menor, empezando en la esquina superior izquierda, avanzando hacia la derecha para después pasar a la segunda fila y terminar en la esquina inferior derecha.

El segundo panel de la Figura 6.1 corresponde a muestras cuyas concentraciones son las mismas que las del primer panel, sin embargo el volumen de las muestras es de 1 [ml]. El orden de las muestras es el mismo que el del primer panel.

El tercer panel de la Figura 6.1 corresponde a muestras de 3 [ml] con concentraciones en [mg/ml] de 0.200, 0.180, 0.160, 0.140, 0.120, 0.100, 0.080 y 0.060. El orden de las muestras es el mismo que el del primer panel.

El último panel de la Figura 6.1 corresponde a muestras cuyas concentraciones son las mismas que las del tercer panel, sin embargo el volumen de las muestras es de 1 [ml]. El orden de las muestras es el mismo que el del primer panel.

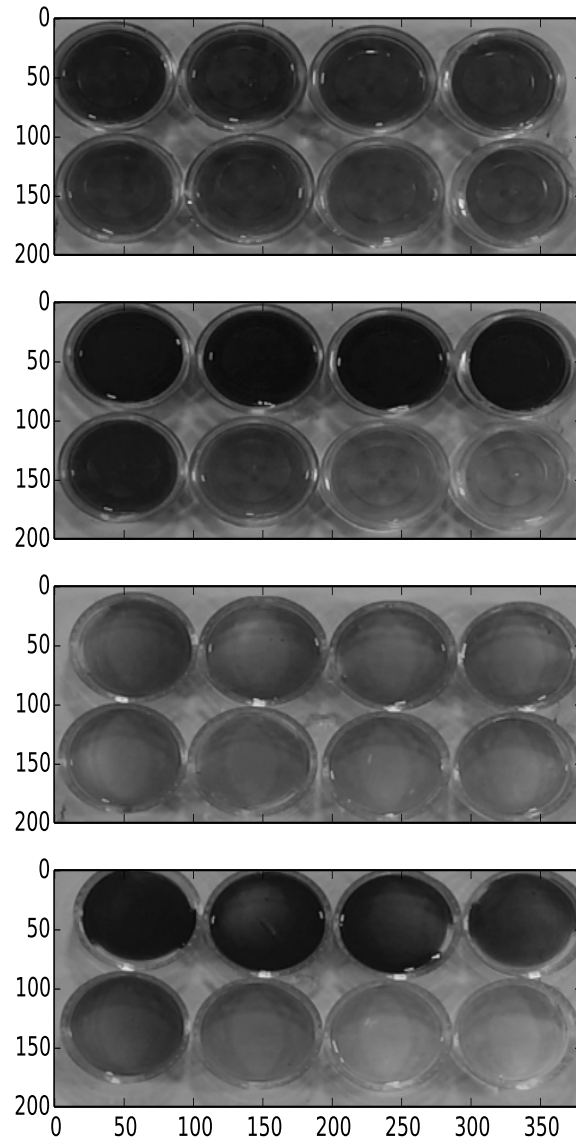


Figura 6.1: Muestras utilizadas para obtener la relación saturación-concentración.

Con el concepto de saturación o intensidad de color definido previamente, se proceden a analizar las imágenes observando la saturación dada por la escala de grises en cada muestra a lo largo del eje x, manteniendo fijo el eje y en el centro de cada una. Como el trozo analizado para cada muestra corresponde a los píxeles contenidos en el diámetro (paralelo al eje x) se tiene que para la misma concentración se tienen distintos valores de saturación. Es por esto que se decide utilizar la saturación media y asociarla a concentraciones conocidas. Luego de esto, las concentraciones se multiplican por las alturas de las muestras obteniendo la Figura 6.2.

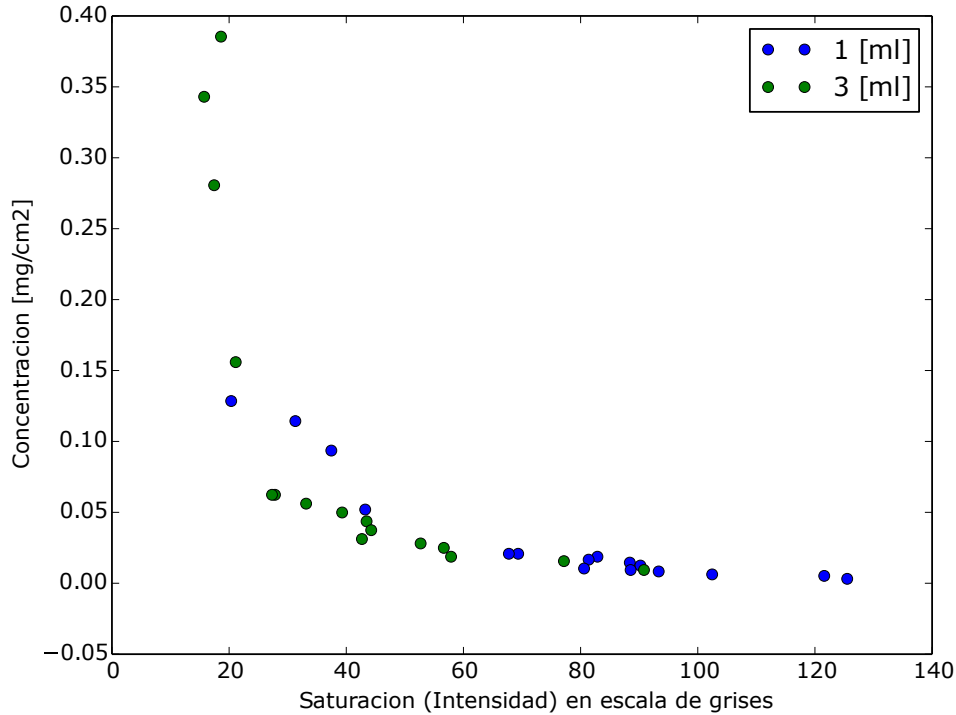


Figura 6.2: Relación Saturación-Concentración integrada.

La Figura 6.2 muestra que a partir de una saturación de 20 en escala de grises, la relación entre la concentración integrada y la saturación de gris es lineal. Es por esto que se procede a ajustar una regresión lineal cuya expresión resulta:

$$C[\text{mg}/\text{cm}^2] = -0.00059 \cdot S + 0.06632 \quad (6.1)$$

con un  $R^2 = 0.8344$ . Es esta expresión la que se utilizará para obtener los momentos espaciales y así poder estimar el valor de los coeficientes de dispersión.

Cada experimento constó de la inyección de 6 [ml] de solución con una concentración de 0.3125 [mg/ml]. Recordar que son 5 experimentos por frecuencia y altura.

## 6.2. Procesamiento de Videos y Coeficientes de Dispersión Resultantes

Para analizar los videos se utiliza python y sus modulos cv2, numpy y matplotlib. El algoritmo es mas bien sencillo: se procede a acotar la imagen al dominio (circunferencia dada por la geometría de Kranenburg), luego se aplica un filtro que deja pasar el color azul para luego convertir toda la imagen a escala de grises. Como se conoce la relación entre saturación en

escala de grises y la concentración integrada en la vertical, se obtienen la concentración a partir de la saturación, luego se integra numéricamente y se obtienen los momentos espaciales. La Figura 6.3 muestra el efecto del filtro sobre la imagen. La Figura 6.4 muestra como actúa el modo normal  $n=1$  de la batimetría con altura máxima 4.5 [cm] y por último, la Figura 6.5 muestra la evolución de una mancha ya filtrada.

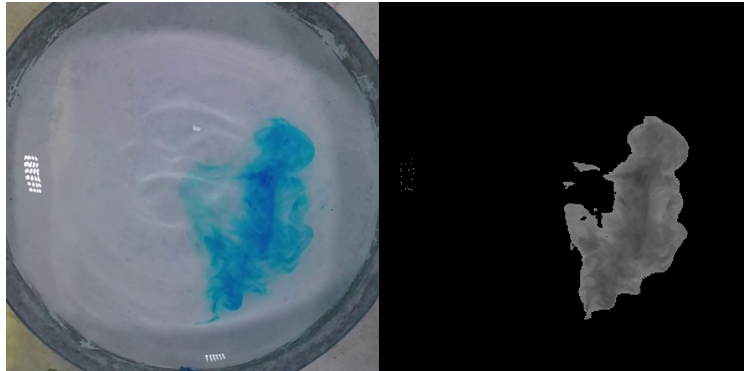


Figura 6.3: Imagen de experimento antes y después de filtrar.  $h_0 = 4.0$  [cm] y  $w_{2-3} = 164.1$  [RPM]

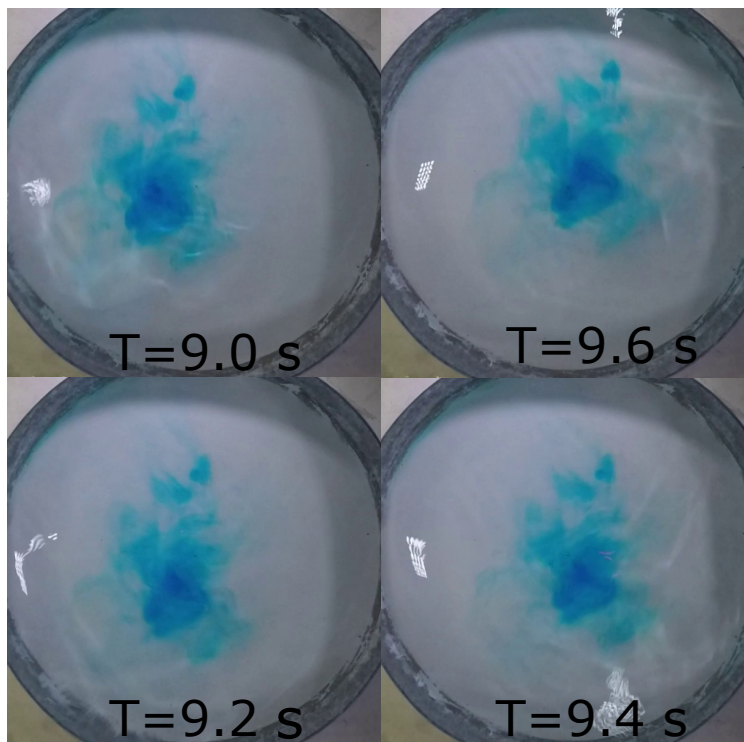


Figura 6.4: Mancha con el modo  $n=1$  ya inestabilizado.  $h_0 = 4.5$  [cm] y  $w_1 = 53.0$  [RPM]



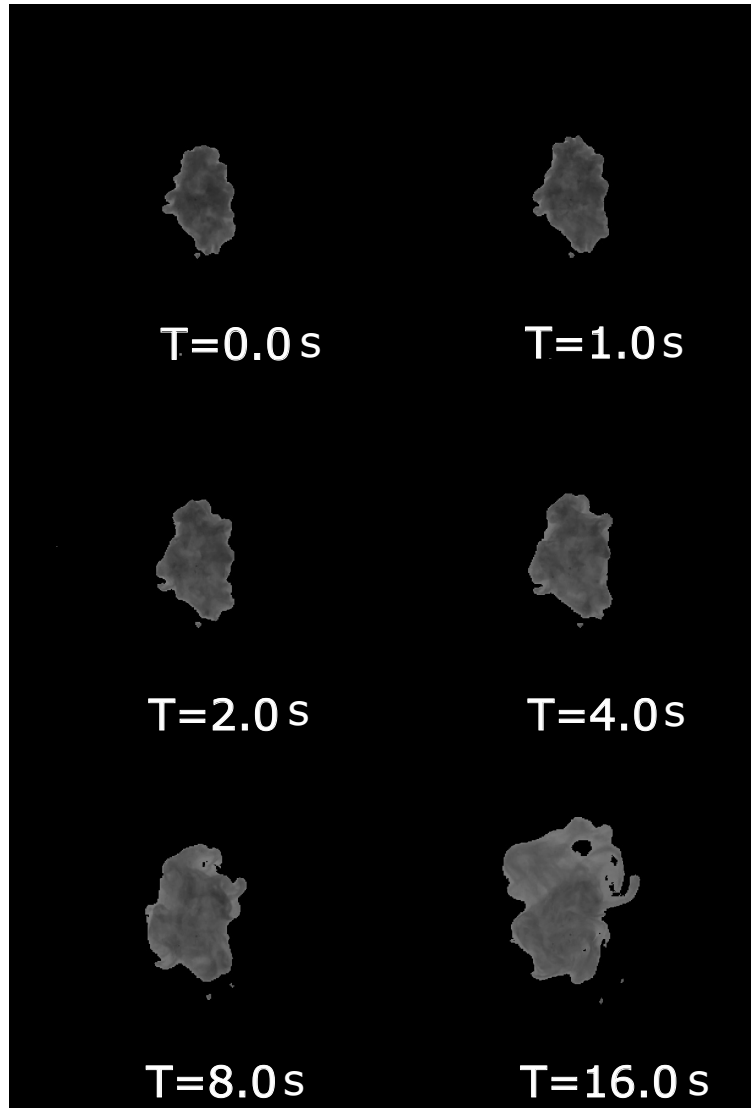


Figura 6.5: Mancha expandiéndose para 0.0 [s], 1.0 [s], 2.0 [s], 4.0 [s] , 8.0 [s] y 16.0 [s].  $h_0 = 4.0$  [cm] y  $w_{2-3} = 164.1$  [RPM]

Una vez calculados los momentos, se debe utilizar la ecuación 2.26 vista en el subsección 2.3.2:

$$A \cdot \frac{\partial M_{0xy}}{\partial t} + M_{0xy} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = 2 \cdot M_{0xy} \cdot K_{ax} \quad (6.2)$$

Las derivadas temporales no deben ser calculadas punto a punto para obtener el coeficiente de dispersión, ya que este se presume constante. Es por esto que el paso a seguir consiste en ajustar rectas a partir de los datos a los términos involucrados y que las pendientes sean las derivadas temporales. Dado que la mancha de azul brillante es conservativa, la masa se debería mantener constante, aunque esto no siempre pasa ya que no se está midiendo masa directamente, si no que la saturación de gris que ella logra en el agua. Por lo tanto, muchas veces se tienen incrementos o disminuciones bruscos de esta propiedad. Por simplicidad, para este trabajo se consideraron solo las series o los intervalos a los cuales se les podía ajustar una recta con pendiente aproximadamente 0 para el término  $\frac{\partial M_{0xy}}{\partial t}$  ya que de no ser

así, el termino antes mencionado no podría ser eliminado de la ecuación anterior haciendo muy complejo el encontrar el coeficiente de dispersión. El argumento físico es que el azul brillante se comporta de manera conservativa en el lapso de tiempo en el que se desarrolla el experimento, por lo que la masa total no debería variar y la variación debería ser nula. Dado esto, la ecuación 2.26 queda:

$$M_{0xy} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = 2 \cdot M_{0xy} \cdot K_{ax} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = 2 \cdot K_{ax} \Rightarrow \frac{\partial \frac{M'_{2x}}{M_{0xy}}}{\partial t} = 2 \cdot K_{ax} \quad (6.3)$$

Luego, solo se debe ajustar una recta a la función  $\frac{M'_{2x}}{M_{0xy}}(t)$  y dividir por el factor 2.0 para obtener los coeficientes de dispersión  $K_{ax}$  y  $K_{ay}$ . Como criterio, se establece que el tiempo de análisis de las series de  $M_{0xy}$  y de  $\frac{M'_{2x}}{M_{0xy}}(t)$  debe ser igual a 5-6 ciclos, considerando la frecuencia del forzante externo. esto debido a que si pasa mucho más tiempo, la mancha comienza a confundirse con el fondo de la maqueta por lo que para el video, se empieza a perder masa. Las Figuras 6.6, 6.7, 6.8 muestran la evolución de la masa y de los cuocientes  $\frac{M'_{2x}}{M_{0xy}}$  para 5-6 ciclos.

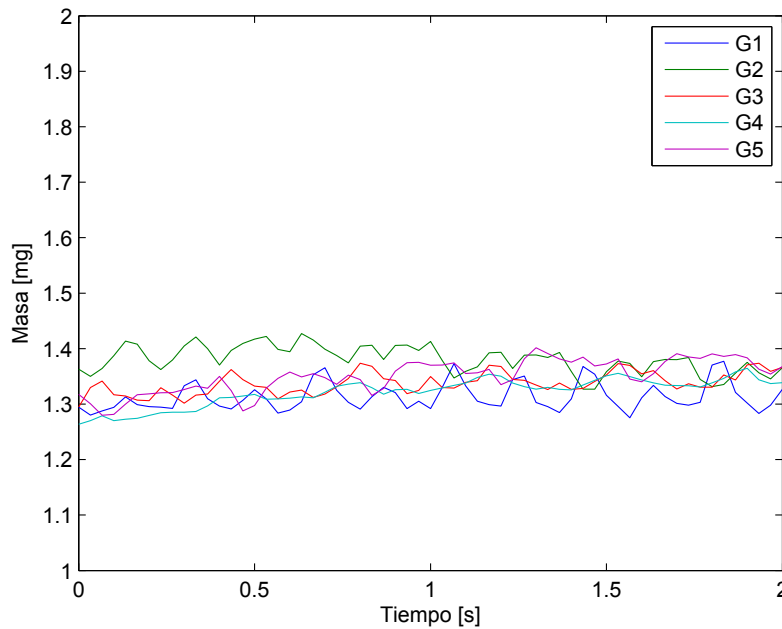


Figura 6.6:  $M_{0xy}$  para  $h_0 = 4.0[cm]$  y  $w_{2-3} = 164.1[RP M]$ . G1, G2, G3, G4 y G5 corresponden a los 5 experimentos realizados bajo las condiciones de altura y frecuencia antes mencionado.

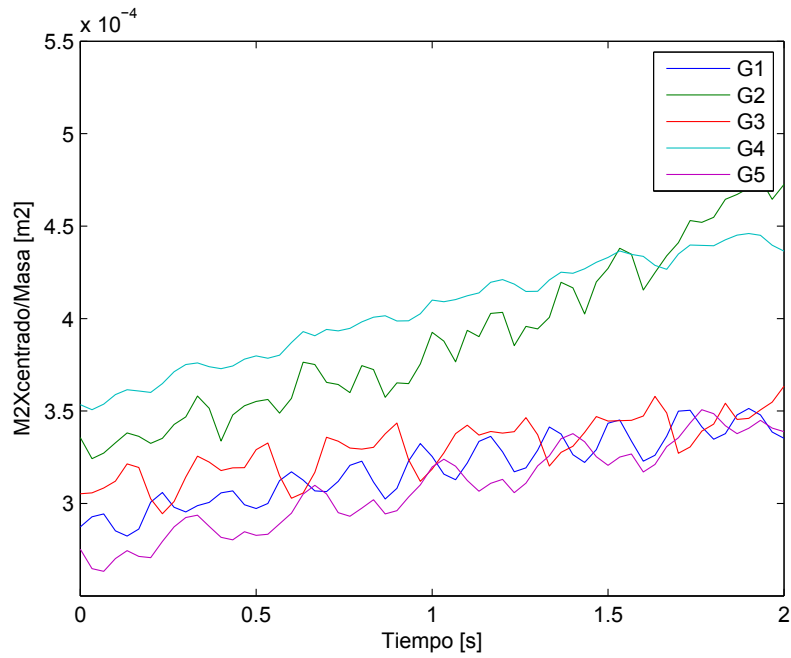


Figura 6.7:  $M_{2x}/M_{0xy}$  para  $h_0 = 4.0[cm]$  y  $w_{2-3} = 161.4[RPM]$ . G1, G2, G3, G4 y G5 corresponden a los 5 experimentos realizados bajo las condiciones de altura y frecuencia antes mencionado.

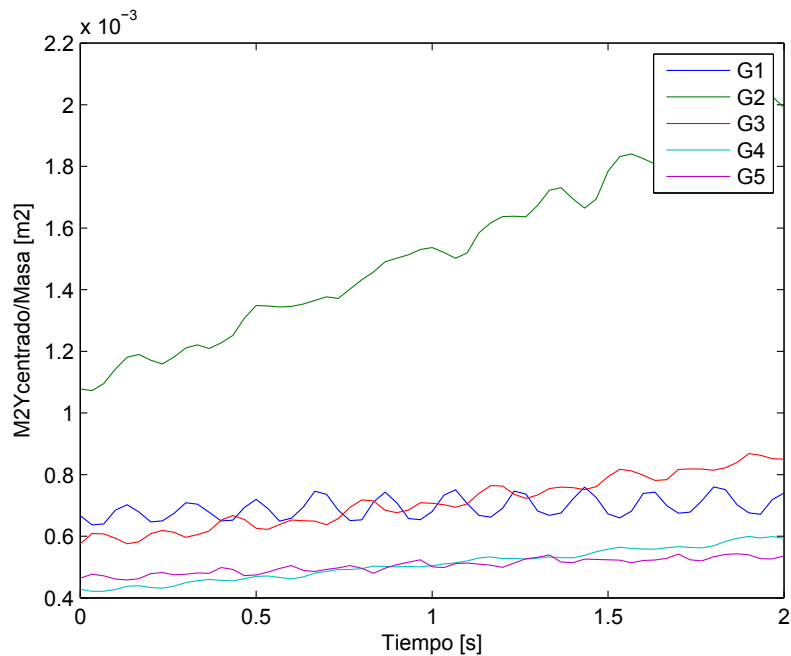


Figura 6.8:  $M_{2y}/M_{0xy}$  para  $h_0 = 4.0[cm]$  y  $w_{2-3} = 161.4[RPM]$ . G1, G2, G3, G4 y G5 corresponden a los 5 experimentos realizados bajo las condiciones de altura y frecuencia antes mencionado.

Se observa que al menos en el rango mostrado, la masa oscila pero en torno a un mismo

valor, por lo que los ajustes lineales poseen una pendiente muy cerca de ser nula. Por otro lado, se observa que es posible ajustar una recta a la evolución de los cocientes  $M_{2x}/M_{0xy}$  y  $M_{2y}/M_{0xy}$ , que, de todas formas, se mantienen oscilando pero entorno a un punto central el cual cumple con la tendencia lineal.

En las Tablas 6.1 y 6.2 se muestran los coeficientes de dispersión obtenidos para todas las frecuencias y todas las alturas. Cada combinación frecuencia-altura tiene 5 coeficientes de dispersión asociados ya que son 5 experimentos por cada par altura-frecuencia. En las tablas se muestran los valores extremos del intervalo de confianza del ajuste a un 95%. Los blancos corresponden a datos que no presentaron un comportamiento lineal dentro de los ciclos requeridos o presentaban coeficientes de dispersión negativos a causa de la inyección de la solución o problemas en el registro de imágenes.

Tabla 6.1:  $K_{ax}$  y el intervalo de confianza para todas las frecuencias y para todas las alturas.

	$K_{x-1}$ [m <sup>2</sup> /s]	$K_{x-2}$ [m <sup>2</sup> /s]	$K_{x-3}$ [m <sup>2</sup> /s]	$K_{x-4}$ [m <sup>2</sup> /s]	$K_{x-5}$ [m <sup>2</sup> /s]
$h_0 = 3.6w_{1-2}$		4.5E-6±2.6E-7	1.1E-5±4.9E-7	6.8E-5±1.3E-6	2.9E-5±3.6E-7
$h_0 = 3.6w_2$	4.4E-5±4.8E-6	1.6E-5±1.4E-6	2.4E-5±2.6E-6	1.3E-5±7.0E-7	4.7E-6±6.6E-7
$h_0 = 3.6w_{2-3}$	1.6E-5±1.5E-6	4.9E-5±1.5E-6	1.5E-5±6.3E-7		5.7E-5±1.9E-6
$h_0 = 3.6w_3$	4.1E-5±1.0E-5	5.2E-5±1.4E-5	1.1E-5±1.3E-6	1.5E-5±1.6E-6	4.4E-5±2.7E-6
$h_0 = 4.0w_{1-2}$	2.5E-5±8.5E-7	6.6E-6±2.7E-7	5.4E-6±2.1E-7		2.0E-5±4.5E-7
$h_0 = 4.0w_2$	1.5E-5±3.3E-6	1.3E-5±3.5E-8	2.1E-5±1.4E-6	1.2E-5±1.1E-6	2.1E-5±1.2E-6
$h_0 = 4.0w_{2-3}$	1.4E-5±1.6E-6	3.6E-5±2.4E-6	1.1E-5±2.0E-6	2.4E-5±9.8E-7	1.9E-5±1.6E-6
$h_0 = 4.0w_3$	2.6E-5±2.5E-6	1.1E-5±2.5E-6	1.3E-5±2.9E-6	4.3E-5±2.3E-6	3.7E-5±1.9E-6
$h_0 = 4.5w_1$		2.2E-5±3.3E-6	4.4E-5±3.9E-6	2.6E-5±1.5E-6	
$h_0 = 4.5w_{1-2}$	3.0E-5±1.4E-6	6.5E-5±1.6E-6	9.3E-6±1.3E-6	2.0E-4±5.9E-6	
$h_0 = 4.5w_2$	3.6E-6±5.7E-7	1.2E-5±1.7E-6	2.1E-5±1.1E-6	5.8E-5±2.5E-6	1.9E-5±1.2E-6
$h_0 = 4.5w_{2-3}$	1.6E-5±1.1E-6	3.4E-5±3.7E-6	1.4E-5±1.2E-6	1.9E-5±4.5E-6	6.9E-5±1.9E-6
$h_0 = 4.5w_3$	9.8E-6±2.7E-6	7.7E-6±2.2E-6	2.4E-5±1.8E-6	2.9E-6±2.6E-6	6.8E-6±1.4E-6

Tabla 6.2:  $K_{ay}$  y el intervalo de confianza para todas las frecuencias y para todas las alturas.

	$K_{y-1}$ [m <sup>2</sup> /s]	$K_{y-2}$ [m <sup>2</sup> /s]	$K_{y-3}$ [m <sup>2</sup> /s]	$K_{y-4}$ [m <sup>2</sup> /s]	$K_{y-5}$ [m <sup>2</sup> /s]
$h_0 = 3.6w_{1-2}$	6.7E-6±2.6E-7	5.5E-7±4.2E-7	4.8E-5±7.8E-7	3.5E-6±1.4E-6	6.9E-7±1.1E-6
$h_0 = 3.6w_2$	2.6E-5±1.1E-5	4.08E-05		1.6E-6±1.2E-5	2.9E-5±8.4E-6
$h_0 = 3.6w_{2-3}$	6.5E-7±1.8E-6		3.8E-5±1.2E-6	1.6E-5±1.6E-6	
$h_0 = 3.6w_3$			2.3E-5±3.5E-6	9.6E-6±4.0E-6	
$h_0 = 4.0w_{1-2}$	1.4E-5±3.1E-7		2.5E-5±5.2E-7	1.0E-4±2.4E-6	
$h_0 = 4.0w_2$	2.0E-5±1.5E-5	9.6E-6±1.2E-5	2.7E-5±8.9E-6	2.3E-5±6.2E-6	4.8E-5±1.1E-5
$h_0 = 4.0w_{2-3}$	1.2E-5±6.9E-6	2.4E-4±7.5E-6	7.0E-5±4.0E-6	4.4E-5±1.4E-6	1.8E-5±2.0E-6
$h_0 = 4.0w_3$	6.5E-5±6.4E-6	1.2E-5±7.5E-6	1.3E-5±8.1E-6	2.4E-5±1.6E-5	5.7E-5±1.1E-5
$h_0 = 4.5w_1$	9.0E-6±4.5E-6	3.1E-5±2.8E-6		7.5E-7±1.4E-6	1.3E-4±4.0E-6
$h_0 = 4.5w_{1-2}$	1.9E-5±2.6E-6		1.0E-4±2.6E-6	2.9E-5±3.5E-6	
$h_0 = 4.5w_2$	3.2E-5±1.7E-6	3.5E-5±6.9E-6		3.9E-5±6.3E-6	1.7E-5±2.6E-6
$h_0 = 4.5w_{2-3}$	9.8E-6±3.5E-6	1.2E-5±1.8E-6	6.5E-5±4.8E-6	4.9E-5±5.6E-6	1.0E-4±1.6E-5
$h_0 = 4.5w_3$	2.5E-5±1.3E-5	1.9E-5±1.4E-5	4.7E-6±1.0E-5	1.4E-6±4.3E-6	1.6E-5±1.3E-5

A continuación se presentan las Figuras 6.9 y 6.10 las cuales muestran los coeficientes de dispersión resultantes en función de la frecuencia y de la profundidad respectivamente.

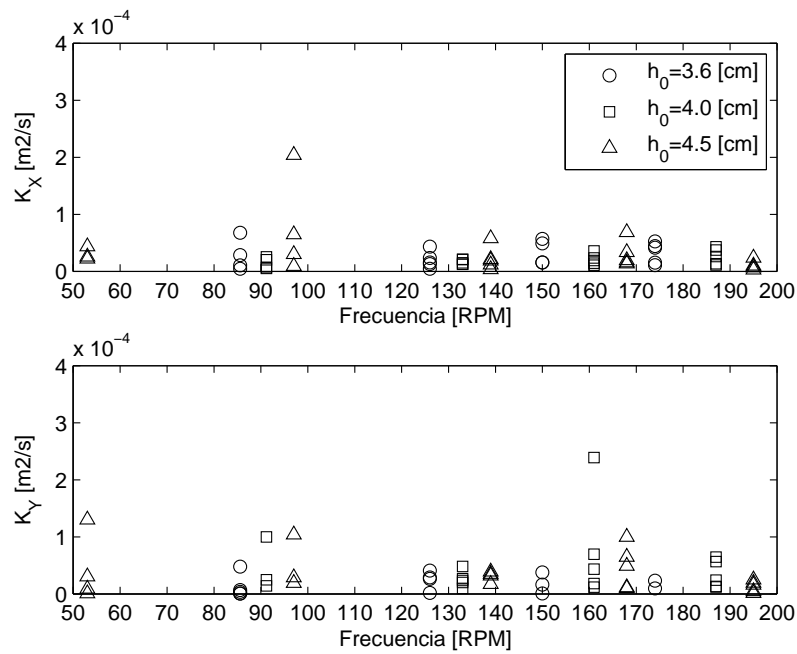


Figura 6.9: Coeficientes de dispersión en función de la frecuencia del forzante.

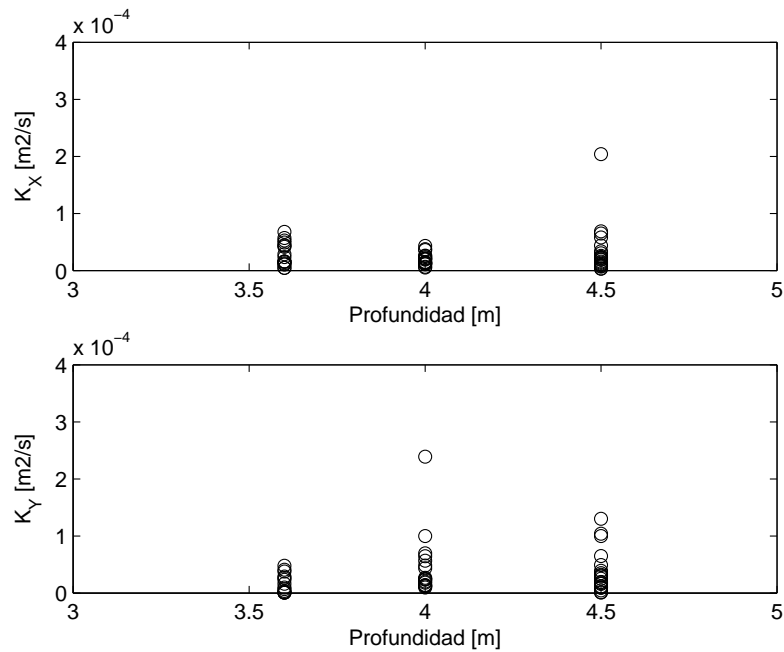


Figura 6.10: Coeficientes de dispersión en función de la profundidad del cuerpo de agua.

De las Figuras 6.9 y 6.10 y observando la gran dispersión de los datos, se concluye que al menos independientemente, los coeficientes de dispersión no dependen fuertemente ni de la frecuencia del forzante ni de la profundidad del cuerpo de agua.

En las Tablas 6.3 y 6.4 se presentan los largos de la mancha de azul brillante a través de los

ejes correspondientes. Estos largos fueron calculados mediante procesamiento de imágenes utilizando la relación conocida entre un pixel y la distancia física que este cubre. Se trató de aproximar la forma de la mancha a una elipse, por lo que el largo en una coordenada corresponde al semieje de la elipse en esa coordenada.

Tabla 6.3: Largo en el eje x de las manchas asociadas a los coeficientes de dispersión en el mismo eje.

	$L_{x-1}$ [m]	$L_{x-2}$ [m]	$L_{x-3}$ [m]	$L_{x-4}$ [m]	$L_{x-5}$ [m]
$h_0 = 3.6w_{1-2}$		0.10	0.09	0.13	0.11
$h_0 = 3.6w_2$	0.14	0.10	0.11	0.07	0.07
$h_0 = 3.6w_{2-3}$	0.12	0.13	0.10		0.16
$h_0 = 3.6w_3$	0.11	0.10	0.09	0.09	0.13
$h_0 = 4.0w_{1-2}$	0.10	0.11	0.10		0.13
$h_0 = 4.0w_2$	0.08	0.11	0.11	0.08	0.12
$h_0 = 4.0w_{2-3}$	0.09	0.15	0.11	0.13	0.11
$h_0 = 4.0w_3$	0.11	0.12	0.10	0.12	0.10
$h_0 = 4.5w_1$		0.13	0.17	0.13	
$h_0 = 4.5w_{1-2}$	0.11	0.13	0.13	0.22	
$h_0 = 4.5w_2$	0.07	0.08	0.11	0.13	0.11
$h_0 = 4.5w_{2-3}$	0.11	0.12	0.10	0.12	0.16
$h_0 = 4.5w_3$	0.08	0.09	0.12	0.09	0.07

Tabla 6.4: Largo en el eje y de las manchas asociadas a los coeficientes de dispersión en el mismo eje.

	$L_{y-1}$ [m]	$L_{y-2}$ [m]	$L_{y-3}$ [m]	$L_{y-4}$ [m]	$L_{y-5}$ [m]
$h_0 = 3.6w_{1-2}$	0.11	0.10	0.17	0.14	0.17
$h_0 = 3.6w_2$	0.13	0.16		0.14	0.15
$h_0 = 3.6w_{2-3}$	0.11		0.14	0.12	
$h_0 = 3.6w_3$			0.02	0.06	
$h_0 = 4.0w_{1-2}$	0.11		0.12	0.15	
$h_0 = 4.0w_2$	0.13	0.14	0.15	0.15	0.16
$h_0 = 4.0w_{2-3}$	0.12	0.24	0.15	0.15	0.16
$h_0 = 4.0w_3$	0.15	0.14	0.13	0.14	0.15
$h_0 = 4.5w_1$	0.19	0.14		0.11	0.19
$h_0 = 4.5w_{1-2}$	0.20		0.18	0.15	
$h_0 = 4.5w_2$	0.16	0.15		0.16	0.14
$h_0 = 4.5w_{2-3}$	0.11	0.09	0.16	0.15	0.20
$h_0 = 4.5w_3$	0.15	0.13	0.13	0.10	0.13

En la Tabla 6.5 y en la Tabla 6.6, se presentan los datos estadísticos mas relevantes de los coeficientes de dispersión resultantes para el eje x y para el eje y respectivamente. Además, en la Figura 6.11 y en la 6.12 se presentan los histogramas de los coeficientes de dispersión para el eje x y eje y respectivamente.

Tabla 6.5: Estadística de los valores de los coeficientes de dispersión en el eje x.

	Promedio	Min	Max	Desv STD
$h_0 = 3.6w_{1-2}$	2.358E-05	4.467E-06	6.770E-05	2.647E-05
$h_0 = 3.6w_2$	2.003E-05	4.661E-06	4.352E-05	1.477E-05
$h_0 = 3.6w_{2-3}$	3.424E-05	1.546E-05	5.687E-05	2.183E-05
$h_0 = 3.6w_3$	3.284E-05	1.089E-05	5.238E-05	1.858E-05
$h_0 = 4.0w_{1-2}$	1.444E-05	5.359E-06	2.533E-05	9.991E-06
$h_0 = 4.0w_2$	1.638E-05	1.249E-05	2.119E-05	4.241E-06
$h_0 = 4.0w_{2-3}$	2.082E-05	1.099E-05	3.588E-05	9.680E-06
$h_0 = 4.0w_3$	2.614E-05	1.106E-05	4.297E-05	1.417E-05
$h_0 = 4.5w_1$	3.056E-05	2.227E-05	4.367E-05	1.148E-05
$h_0 = 4.5w_{1-2}$	7.707E-05	9.288E-06	2.039E-04	8.759E-05
$h_0 = 4.5w_2$	2.265E-05	3.589E-06	5.778E-05	2.080E-05
$h_0 = 4.5w_{2-3}$	3.019E-05	1.382E-05	6.858E-05	2.283E-05
$h_0 = 4.5w_3$	1.015E-05	2.876E-06	2.365E-05	7.953E-06

Tabla 6.6: Estadística de los valores de los coeficientes de dispersión en el eje y.

	Promedio	Min	Max	Desv STD
$h_0 = 3.6w_{1-2}$	1.187E-05	5.525E-07	4.787E-05	2.029E-05
$h_0 = 3.6w_2$	2.448E-05	1.632E-06	4.079E-05	1.646E-05
$h_0 = 3.6w_{2-3}$	1.809E-05	6.464E-07	3.755E-05	1.854E-05
$h_0 = 3.6w_3$	1.640E-05	9.615E-06	2.318E-05	9.594E-06
$h_0 = 4.0w_{1-2}$	4.624E-05	1.410E-05	9.998E-05	4.683E-05
$h_0 = 4.0w_2$	2.553E-05	9.575E-06	4.802E-05	1.411E-05
$h_0 = 4.0w_{2-3}$	7.646E-05	1.181E-05	2.392E-04	9.380E-05
$h_0 = 4.0w_3$	3.415E-05	1.208E-05	6.457E-05	2.478E-05
$h_0 = 4.5w_1$	4.249E-05	7.538E-07	1.297E-04	5.946E-05
$h_0 = 4.5w_{1-2}$	5.083E-05	1.910E-05	1.044E-04	4.663E-05
$h_0 = 4.5w_2$	3.074E-05	1.715E-05	3.895E-05	9.495E-06
$h_0 = 4.5w_{2-3}$	4.717E-05	9.803E-06	1.004E-04	3.812E-05
$h_0 = 4.5w_3$	1.334E-05	1.449E-06	2.519E-05	1.000E-05

En la Tabla 6.5 y Tabla 6.6 se observa que los promedios de los coeficientes de dispersión no obedecen ninguna tendencia o al menos no relacionada con la frecuencia de oscilación del forzante ni con la profundidad del cuerpo de agua. No se observan mayores diferencias entre los coeficientes de dispersión del eje x y los coeficientes de dispersión del eje y.

Al igual que para la tasa de decaimiento de las series de velocidad, el autor realizó un análisis dimensional utilizando el Teorema de Pi, sin embargo, los esfuerzos fueron infructuosos ya que a pesar de intentar con varias variables geométricas, dinámicas y propiedades del fluido, no existía función alguna que ligara los adimensionales resultantes.

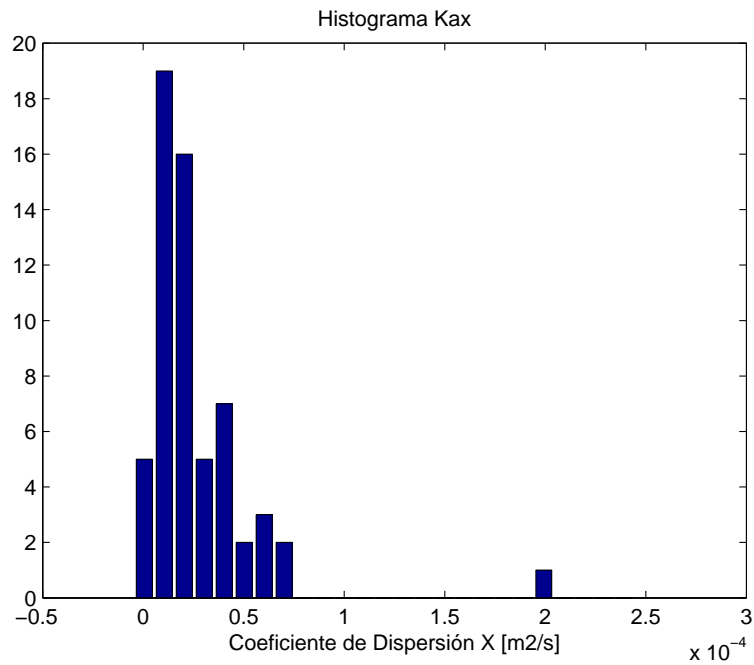


Figura 6.11: Histograma de los coeficientes de dispersión en el eje x.

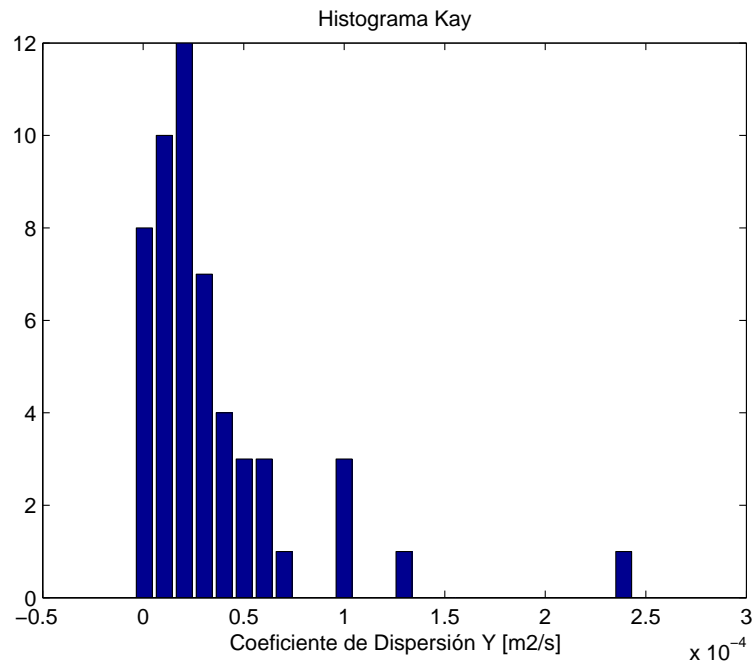


Figura 6.12: Histograma de los coeficientes de dispersión en el eje y.

De las Figuras 6.11 y 6.12 se observa que los histogramas son más bien similares. Además, pareciera que los valores siguiesen alguna distribución, sin embargo, al no tener argumento físico para hacerlo, se decide no ajustar ninguna.



A continuación, en la Tabla 6.7 se presentan los datos que Okubo (1995) utilizó en su investigación. Además, se presenta la Figura 6.13 que contiene los datos recopilados y presentados por Okubo (1995). En la investigación de Okubo (1995) se propone una relación exponencial la cual es presentada también en la Figura 6.13 y a la que los resultados de este trabajo se ajustan, considerando que las cantidades resultantes son varios órdenes de magnitud más pequeñas. De todas formas, en la Figura 6.14 que corresponde a un zoom de la 6.13 que muestra solo los datos resultantes de este trabajo, se observan tendencias locales distintas a la relación propuesta por Okubo (1995). Estas tendencias se pueden investigar haciendo permanecer constante, por ejemplo, el largo de la mancha, sin embargo, la metodología utilizada en este trabajo no permite hacer ese tipo de análisis ya que el procesamiento de los datos debe realizarse imperativamente en los tiempos cercanos a la inyección de sustancia en el cuerpo de agua por los motivos ya comentados. Debido a esto, no se puede manejar el tamaño de la mancha (es más bien, consecuencia de muchas factores aleatorios presentes en el momento de inyectar la solución) por lo que no es posible, al menos con esta metodología, hacer un análisis de como afectan la otras variables al comportamiento dispersivo del cuerpo de agua.

Tabla 6.7: Datos Okubo (1995).

Ka [cm <sup>2</sup> /s]	L [cm]	Ka [cm <sup>2</sup> /s]	L [cm]	Ka [cm <sup>2</sup> /s]	L [cm]
5,65E+04	7,41E+05	1,08E+04	3,15E+05	7,21E+02	1,76E+04
1,05E+05	1,36E+06	2,30E+04	4,65E+05	1,90E+03	2,02E+04
1,48E+05	2,08E+06	1,46E+04	3,87E+05	2,95E+03	3,57E+04
2,78E+05	3,12E+06	1,98E+04	5,04E+05	5,00E+03	5,70E+04
3,08E+05	3,66E+06	1,04E+05	8,58E+05	9,37E+02	1,42E+04
5,20E+05	5,85E+06	1,42E+04	2,40E+05	1,16E+03	2,24E+04
2,20E+06	1,24E+07	3,80E+04	5,01E+05		
1,48E+04	3,00E+05	8,40E+04	8,97E+05		
2,76E+04	5,10E+05	1,12E+03	2,38E+04		
7,20E+04	1,03E+06	2,75E+03	4,86E+04		
2,20E+05	2,38E+06	8,80E+02	5,28E+04		
4,10E+05	3,60E+06	7,70E+02	5,50E+04		
1,34E+04	3,39E+05	2,60E+03	1,34E+05		
1,61E+04	4,90E+05	1,05E+04	1,13E+05		
5,50E+03	1,17E+05	8,40E+03	1,11E+05		
8,10E+03	1,70E+05	9,30E+03	1,22E+05		
2,36E+04	3,70E+05	4,10E+04	3,39E+05		
2,42E+04	4,65E+05	5,04E+04	4,05E+05		
8,90E+03	1,56E+05	5,13E+02	1,05E+04		
1,58E+04	3,15E+05	5,04E+02	1,48E+04		
5,10E+04	6,78E+05	1,07E+03	1,52E+04		
6,50E+04	6,54E+05	1,16E+03	2,26E+04		
3,30E+04	4,47E+05	2,68E+03	2,41E+04		
9,20E+04	8,70E+06	4,81E+03	4,56E+04		
5,20E+03	1,20E+05	6,67E+02	1,20E+04		

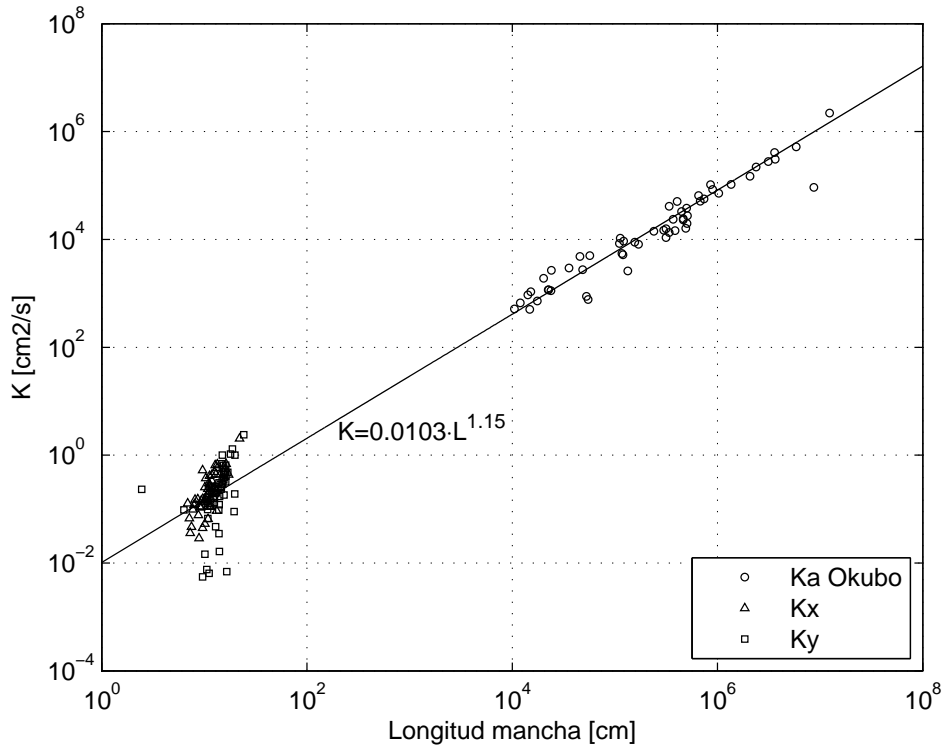


Figura 6.13: Gráfico de Coeficiente de Dispersión en función de la Longitud característica.

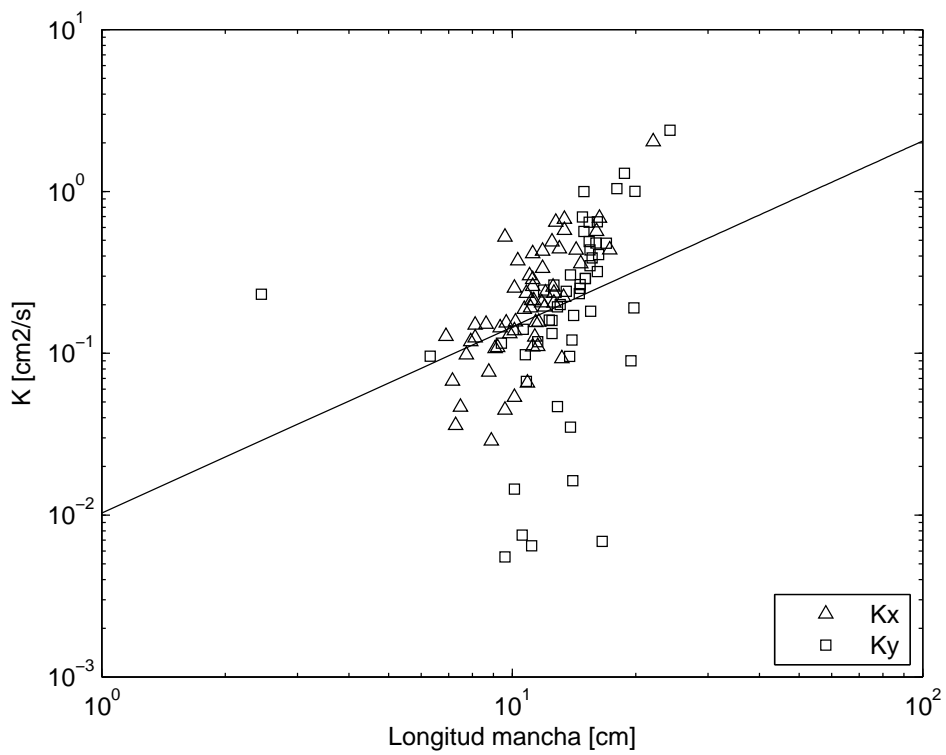


Figura 6.14: Gráfico de Coeficiente de Dispersión en función de la Longitud característica para resultados de este trabajo.

La principal conclusión es que según la Figura 6.13, los coeficientes de dispersión resultantes se acercan a la tendencia propuesta por Okubo (1995), sin embargo, presentan anomalías y tendencias locales tal y como se observa en la Figura 6.14.

Además, con las Figuras 6.9 y 6.10 se constata que los coeficientes de dispersión no dependen, al menos de forma importante, de la frecuencia del forzante ni de la profundidad del cuerpo de agua.

# Capítulo 7

## Conclusiones y Comentarios

En este capítulo se presentan las conclusiones del trabajo y comentarios

Se ha logrado enmarcar el fenómeno en un contexto teórico en donde la principal herramienta consiste en el esquema de Shimizu & Imberger (2008) el cual entrega una aproximación de las ecuaciones de conservación de momento y continuidad, cuyas soluciones pueden ser expresadas en forma de modos. Se concluye que el esquema resulta útil y práctico cuando se quiere trabajar con este tipo de soluciones. Un ejemplo de las utilidades de este esquema es el modelo que fue desarrollado por Pérez (2015), el cual resulta útil para tener una idea de la frecuencia y estructura espacial de los modos dominantes en un cuerpo de agua somero, sobre todo para frecuencias pequeñas. Cabe destacar también, la utilización del método de los momentos como herramienta simple y sencilla para aproximarse al entendimiento de la dispersión de contaminantes en el agua.

Observando los resultados de la dinámica de los modos, se tiene que en general, encontrar y excitar los modos normales no resulta tan complicado, sin embargo, los modos experimentales difieren de los modos calculados numéricamente. Las frecuencias de los modos aumentan, a medida que aumenta la altura del agua. Observando las series en los análisis de wavelets y las tablas de velocidades máximas, se tiene que existe una directa relación entre los modos y las amplitudes que presentan las series de velocidades, siendo la resonancia nuestra principal herramienta de identificación.

Como se mencionó en el capítulo correspondiente, también respecto a la dinámica, se observan fenómenos no esperados como lo son la perturbación al principio y al final de las series de velocidad hacia las frecuencias fundamentales (modos  $n=1$ ). Otro fenómeno inesperado consiste en la inestabilidad que presenta el primer modo normal para una altura de 4.5 [cm], el cual luego de alcanzar la estructura predicha por el modelo de Pérez (2015), comienza paulatinamente a girar en círculos, creando una corriente estacionaria en el agua. Esta corriente quizás pueda corresponder a otro modo, pero al menos el modelo de Pérez (2015) no lo predice.

En lo que respecta a las tasas de decaimiento, se observa que los resultados presentan algún tipo de tendencia inversamente proporcional a la profundidad del cuerpo de agua. Al graficar

los datos de tasas de decaimiento recopilados por Wüest (2000) junto con los resultantes de este trabajo, se observa que existe una relación potencial entre las tasas de decaimiento y la profundidad del cuerpo que se ajusta muy bien a los datos a pesar de la gran diferencia en ordenes de magnitud de estos.

En lo que respecta al transporte de sustancias en el cuerpo de agua, se concluye que en general, el coeficiente de dispersión no depende de la frecuencia de oscilación de la maqueta lo que contradice la intuición, ya que se espera que velocidades con mayor amplitud caucen mayor transporte. Tampoco depende de la profundidad del cuerpo de agua, lo que se puede deber al acotado intervalo de tiempo analizado impuesto por la escala de longitud del sistema, además del hecho de que la intensidad de color o la saturación en escala de grises de la solución de “azul brillante” llega rápidamente al umbral desde el cual no se puede distinguir entre la mancha y el fondo de la maqueta. Se observa una relación en función del largo de la mancha ajustándose a tendencias propuestas por otros autores como Okubo (1995).

Se recomienda profundizar en el fenómeno del modo normal  $n=1$  para la altura de  $h_0 = 4.5$  [cm], además de entender cual es el componente externo que hace que la inestabilidad circular aparezca.

Se recomienda también, utilizar distintos tipos de batimetría, e incluso, distintos tipos de fluidos para explorar las posibilidades que entregan los forzantes externos armónicos y seguir obteniendo datos para robustecer las relaciones verificadas (dispersión) y encontradas (tasas de decaimiento).

# Capítulo 8

## Bibliografía

de la Fuente, A. 2014. Heat and dissolved oxygen exchanges between the sediment and water column in a shallow salty lagoon. *J. Geophys. Res. Biogeosci.*, 119, doi:10.1002/2013JG002413.

de la Fuente, A., & Niño, Y. 2010. Temporal and spatial features of thermohydrodynamics of shallow salty lagoons in northern Chile. *Limnology and Oceanography*, **55**(1), 279-288.

de la Fuente, A., Shimizu, K., Imberger, J., & Niño, Y. 2008. The evolution of internal waves in a rotating, stratified, circular basin and the influence of weakly nonlinear and nonhydrostatic accelerations. *Limnology and Oceanography*, **53**(6), 2738-2748.

Fischer, H. 1973. Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open channel flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **5**, 59-78.

Imberger, J., Hamblin, P., 1982. Dynamics of lakes, reservoirs, and cooling ponds. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 14:153-187.

Kranenburg, C., 1992. Wind-driven chaotic advection in a shallow model lake. *Journal of Hydraulic Research*, 30:1, 29-46.

Okubo, A., 1995. Natural dispersion in a small lake. *Limnology and Oceanography*, **40**(8), 1519-1526.

Ryvez, D., Battarbee, R., Juggins, S., Fritz, S., Anderson, N., 2006. Physical and chemical predictors of diatom dissolution in freshwater and saline lake sediments in North America and West Greenland. *Limnology and Oceanography*, **51**(3), 1355-1368

Rozas, C. 2011. Análisis modal para el estudio de resonancia de ondas internas excitadas por el viento en el lago Villarica. *Tesis para optar al grado de Magíster en ciencias de la Ingeniería Mención Recursos y Medio Ambiente Hídrico*.

Shimizu, K., Imberger, J & Kumagai, M. 2007. Horizontal structure and excitation of pri-

mary motions in a strongly stratified lake. *Limnology and Oceanography*, **52**(6), 2641-2655.

Shimizu, K., & Imberger, J. 2008. Energetics and damping of basin-scale internal waves in a strongly stratified lake. *Limnology and Oceanography*, **53**(4), 1574-1588.

Wüest, A., Piepke, P., Van Senden, D. 2000. Turbulent kinetic energy balance as a tool for estimating vertical diffusivity in wind-forced stratified waters. *Limnology and Oceanography*, **45**(6), 1388-1400.

# ANEXO A

## EFFECTOS DEL FILTRO Y MEDIA MÓVIL EN LAS SERIES DE ACELERACIÓN

Las siguientes figuras presentan un tramo de las series de aceleraciones con datos anteriores y posteriores al filtrado y a la aplicación de la media móvil.

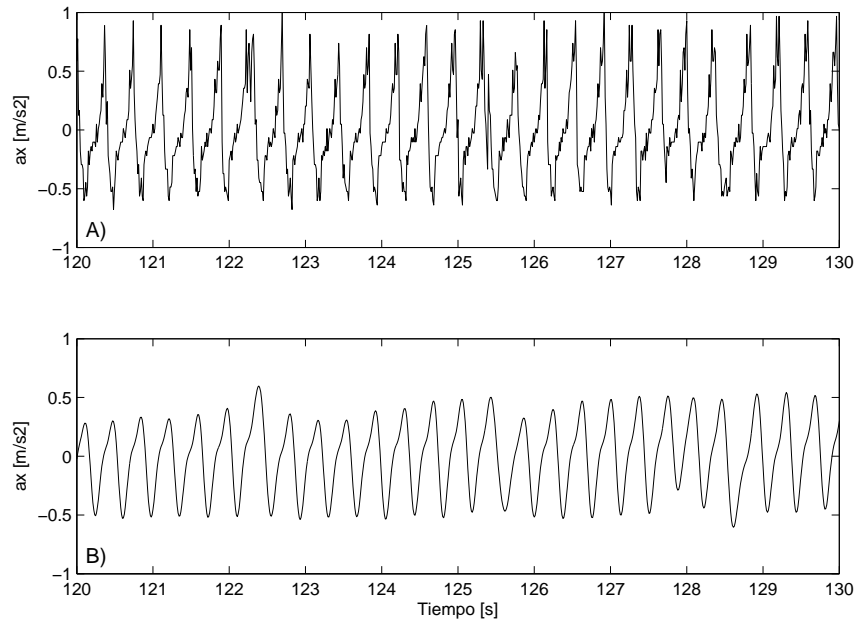


Figura 8.1: A) Serie de aceleraciones sin filtrar para  $h_0 = 3.6$  [cm] y  $w_3 = 173.8$  [RPM]. B) Serie de aceleraciones filtradas y con media móvil en torno a 6 puntos aplicada para  $h_0 = 3.6$  [cm] y  $w_3 = 173.8$  [RPM]



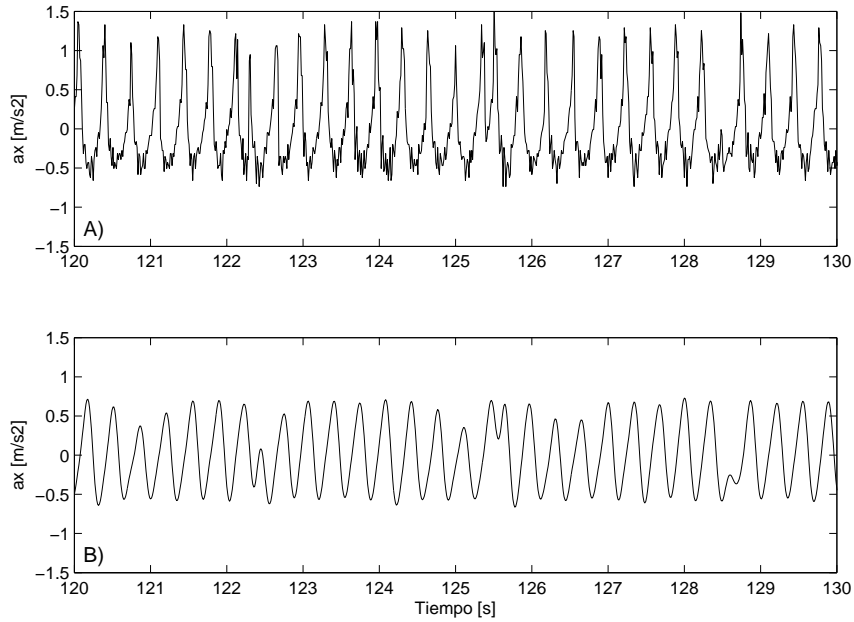


Figura 8.2: A) Serie de aceleraciones sin filtrar para  $h_0 = 4.0[cm]$  y  $w_3 = 187.0 [RPM]$ . B) Serie de aceleraciones filtradas y con media móvil en torno a 6 puntos aplicada para  $h_0 = 4.0 [cm]$  y  $w_3 = 187.0 [RPM]$

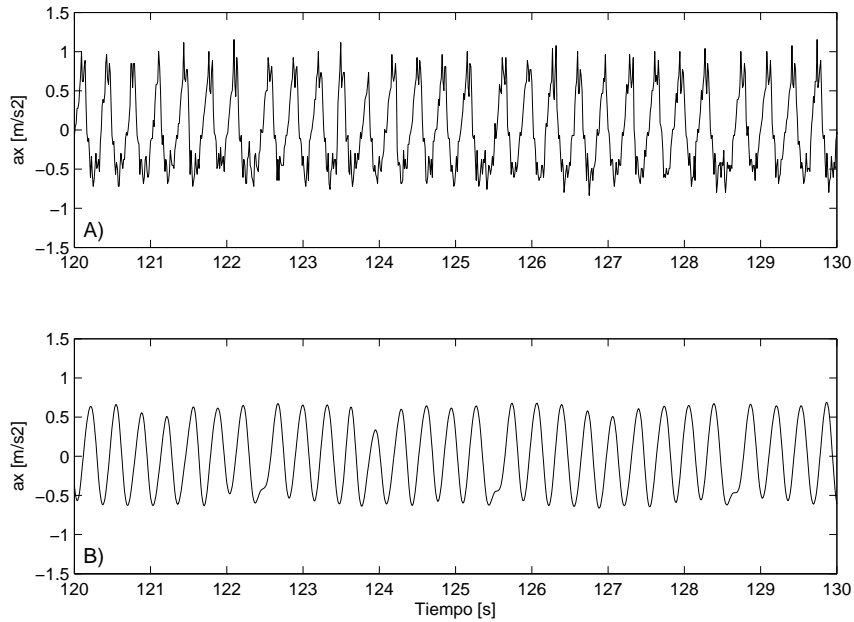


Figura 8.3: A) Serie de aceleraciones sin filtrar para  $h_0 = 4.5 [cm]$  y  $w_3 = 195.0 [RPM]$ . B) Serie de aceleraciones filtradas y con media móvil en torno a 6 puntos aplicada para  $h_0 = 4.5 [cm]$  y  $w_3 = 195.0 [RPM]$