



“Aplicación de Teoría del Caos para refutar Hipótesis Débil
de Eficiencia de Mercado”

Seminario para optar al título de Ingeniero Comercial mención Economía

Profesor guía: Dr. Antonino Parisi Fernandez
Autor: Francisco Torrealba Fuenzalida

Santiago de Chile
Enero 2006

“Aplicación de Teoría del Caos para refutar Hipótesis Débil de Eficiencia de Mercado”

Francisco Torrealba Fuenzalida

Profesor guía: Dr. Antonino Parisi Fernandez

Abstracto

El presente trabajo persigue la aplicación de modelos caóticos recursivos con el objeto de predecir la variación del precio de las acciones. La particularidad de este enfoque es que dichos modelos no se retroalimentan de las series de tiempo de los títulos a predecir, con lo que un nivel de rentabilidad superior a procesos tipo ‘Buy and Hold’ o AR(1) es una fuerte evidencia en contra de la Hipótesis Débil de Eficiencia de Mercado, legado teórico de Fama *et al* que sigue siendo el supuesto hegemónico en el mercado de capitales. Además los modelos de mayor eficiencia encontrados se configuran como herramientas útiles para inversionistas en búsqueda de maximización de rentabilidad. Las funciones con mejores resultados alcanzan aciertos de signo de hasta 63%. Los modelos entregan sistemáticamente – para todas las acciones contrastadas – un retorno en exceso económica y estadísticamente significativo frente al benchmark ‘Buy and Hold’. Creemos este es un aporte sólido a la apreciación de que la estrategia activa de manejo de cartera es capaz de superar al promedio del mercado.

INDICE

Parte I.....	4
I. Introducción.....	4
II. Marco Teórico.....	6
II.1 Eficiencia de Mercado.....	6
II.2 Teoría del Caos y Universos Fractales.....	10
Parte II.....	14
II. Metodología.....	14
II.1 Funciones Recursivas Empleadas.....	14
II.2 Filtros de Aleatoriedad.....	15
II.3 Contraste y Eficiencia de los Modelos.....	19
II.4 Validez Estadística y Económica de los Modelos.....	20
II.5 Datos.....	22
Parte III.....	23
III.1 Resultados.....	23
Parte IV.....	28
IV.1 Conclusiones.....	28
Anexos.....	30
Referencias.....	36

Parte I

I. Introducción

Hasta la fecha, muchos intentos se han realizado con el objeto de poder anticipar la variación en los precios de acciones e índices. Desde los modelos seminales de Box y Pierce (1970) consistentes en series autoregresivas (AR), hasta aproximaciones más sofisticadas por medio de algoritmos genéticos o redes neuronales. La característica común es la retroalimentación de dichos modelos con información histórica del título a predecir.

La novedad de este trabajo es generar miles de especificaciones diferentes para distintas funciones genéricas de comportamiento caótico estacionario. Cada una de aquellas funciones se retroalimentan de sí mismas para generar series numéricas. Individualmente se las hace pasar por el filtro de los test de aleatoriedad de Wald-Wolfowitz y Cox-Stuart. Aquellas que superan las pruebas han logrado engañar al proceso anterior, puesto que jamás fueron aleatorias, ya que la serie completa no es más que la mutación de una única ecuación fundamental conocida *ex ante*. Las series sobrevivientes avanzan al proceso final, que consiste en contrastarlas con la acción a predecir, evaluando su capacidad predictiva con el PPS – porcentaje de predicción de signo – y el test no paramétrico de acierto direccional de Pesaran y Timmerman (1992).

Puesto que ambas series – caótica vs. histórica del precio – son enteramente independientes, el resultado esperado es una predicción cercana al 50%. Esto obedece al hecho que incluso en el hipotético y poco plausible caso de encontrar una función caótica con un movimiento oscilatorio idéntico a la serie temporal del título, seguimos imposibilitados de coordinarlas. No teniendo la primera input de la segunda, no es posible calibrarlas para que se muevan conjuntamente. Contra esta poderosa idea, los resultados de los mejores modelos encontrados entregan PPS estables en el tiempo de

hasta 63%. Esto es radical y pone en evidencia un hecho muy sensible que hasta la fecha ha sido generalmente obviado en los estudios del mercado de capitales.

Si acaso una función ciega – i.e. que no tiene información de la serie a predecir – es capaz de obtener retornos en exceso estadísticamente significativos con respecto a las estrategias ‘Buy and Hold’ o procesos Brownianos¹, estamos frente a una violación de la Hipótesis Débil de Eficiencia de Mercado².

Las implicancias del presente trabajo pueden extenderse en sentido inverso: si acaso los modelos probados son capaces de superar a benchmark característicos – tipo análisis técnico – dentro de manejo activo de carteras, supone evidencia contundente acerca del escaso valor agregado de portfolio managers una vez considerados los costos e implementación de la gestión dinámica.

Por ultimo, las funciones encontradas se constituyen en buenas herramientas para la obtención de rentabilidades por medio de la predicción del comportamiento futuro de títulos financieros.

¹ Martingala. $P_t = P_{t-1} + \varepsilon$, donde $\varepsilon \equiv d(0, \sigma^2)$. La mejor predicción del precio de hoy es el de ayer.

² Fama, Eugene “Random Walks in Stock Market Prices” (1965) empieza la escuela de Eficiencia de Mercado, partiendo de los visionarios y precursores estudios de Bachelier “La Teoría de la Especulación” (1900).

II. Marco Teórico

II.1 Eficiencia de Mercado

Hoy día la idea de eficiencia de mercado – en algunas de sus múltiples formas – es medular dentro del mundo de las finanzas. A grosso modo establece que en mercados competitivos no es posible obtener retornos sistemáticos por sobre aquellos del mercado en su conjunto. Sin embargo no siempre fue así. El primer estudioso del tema fue Bachelier en su tesis para Phd. en matemáticas de la Sorbonne en 1900, “...eventos pasados, presentes e incluso futuros se reflejan en el precio de mercado, pero usualmente no tienen relación aparente con el cambio en los precios...”³. Esto es vanguardista y visionario, adelantándose en espíritu a la revolución cuántica que comienza con Einstein en 1905 de mano de los procesos Einstein-Wiener de movimiento browniano⁴. Las conjeturas de Bachelier quedaron en el anonimato hasta su publicación al inglés a principios de los '60. Al contrario de otras grandes teorías económicas, la revolución de mercados eficientes comenzó con investigaciones empíricas de seguimiento histórico de acciones, que luego generan literatura teórica tratando de modelar los fenómenos caóticos y aleatorios observados.

El modelo Random Walk – o camino aleatorio – resume la idea de que no es posible anticipar el movimiento de una acción o título financiero. La mejor predicción del precio de mañana es el de hoy más un shock de media cero y varianza σ^2 . Otra forma alternativa de definirlo es que la correlación serial de la primera diferencia es cercana a cero. Osborne (1959) muestra con sus estudios que el movimiento de los mercados financieros era análogo al movimiento de una partícula: en un momento del tiempo no es posible saber en que dirección ni cuanto se moverá, pues su carga inercial depende de la colisión irregular con otras partículas de trayectorias indeterminadas. Se deduce entonces que en horizontes medios y largos no es posible sostener ganancias sobre el mercado, puesto que las pérdidas debieran contrarrestarlas perfectamente.

³ Bernstein, Peter. 1992. Ver Referencias.

⁴ Einstein, Albert. 1905. Ver Referencias.

Definición matemática de martingala:

$$E(p(t+T)|\Phi(t)) = p(t)$$

Un proceso Einstein-Wiener se define como:

$$E\{W(t+h)|\mathbf{F}(t)\} = E\{W(t+h) - W(t)|\mathbf{F}(t)\} + E\{W(t)|\mathbf{F}(t)\}$$

pero $E\{W(t+h) - W(t)|\mathbf{F}(t)\} = E\{W(t+h) - W(t)\} = 0$

Fama⁵ argumenta persuasivamente que en un mercado eficiente, ninguna estrategia o análisis puede vencer al benchmark correspondiente: “un mercado eficiente se define como aquel donde interactúan un número elevado de agentes racionales y maximizadores de utilidad compitiendo activamente, con cada uno tratando de predecir los valores futuros de los activos financieros, y donde la información actual relevante se encuentra casi enteramente disponible para buena parte de los participantes. En un mercado eficiente, la competencia entre muchos participantes inteligentes y razonables lleva a una situación donde, en cualquier momento del tiempo, los precios actuales de los títulos individuales ya reflejan los efectos de la información basados tanto en eventos que ya ocurrieron como aquellos que el mercado espera ocurran en el futuro. En otras palabras, un mercado eficiente valora el precio de los activos transados con la mejor estimación existente de su valor intrínseco.”

La hipótesis de eficiencia de mercado tiene bemoles. Se distinguen tres versiones:

1. La forma débil establece que toda la información pasada de los precios de mercado está enteramente integrada en los precios actuales de los activos financieros. Luego el análisis técnico, por su naturaleza backward looking no tiene sentido.
2. La forma semifuerte determina que toda la información pública está plenamente integrada en el precio de los activos financieros. Esto excluye entonces tanto análisis técnico como fundamental.

⁵ Fama, Eugene. 1965. Ver Referencias.

3. La forma fuerte, poco plausible, establece que toda la información existente está integrada, inclusive la privada.

Dada su naturaleza menos restrictiva, este trabajo se enfocara en la refutación de la forma débil de eficiencia de mercado.

Si bien se ha logrado constatar a través de algunos estudios que herramientas de análisis técnico ampliamente usadas, como medias móviles o líneas de soporte y resistencia pueden tener alguna capacidad predictiva, al integrar los costos de transacción asociados no logran mantener su ventaja a nivel estadística y económicamente discernible. La opinión popular y académica preponderante es que el análisis técnico no puede ganar consistentemente al placebo “Buy and Hold”.

Un mercado eficiente donde se intercambia e incorpora información no permite la obtención de retornos anormales. Este es el punto de partida de la enorme mayoría de la literatura empírica existente tratando de testear la eficiencia de mercado. Se requiere entonces un modelo sobre el comportamiento del mercado junto a un modelo de valoración de activos. Modelos extensivamente usados, como CAPM⁶, hacen uso de la idea de equilibrios permanentes y estables en los valores de los títulos financieros. Por tanto los precios tienden a estar siempre en la senda de equilibrio. Aquí se presenta el fuerte de la argumentación de los defensores de la eficiencia de mercado, galvanizado en el famoso estudio de Fama “Market Efficiency, Long Term Returns, and Behavioral Finance” de 1998. Parte gruesa de la defensa es que el rechazo de la eficiencia de mercado puede tener mucho que ver con la metodología utilizada en los modelos benchmark de medición, siendo por tanto los resultados muy sensibles a cambios en la especificación. El problema, afirma Fama, se debe a la escasa veracidad de los modelos como CAPM, que son una pobre aproximación a la realidad. Fama aclara: “la eficiencia de mercado sobrevive el cuestionamiento de la literatura...” ‘...consistente con la predicción de mercados eficientes de que las anomalías encontradas pueden deberse a

⁶ “Capital Asset Pricing Model”, William Sharpe 1964 y otros.

metodología, gran parte de estas tienden a desaparecer con cambios razonables de la técnica utilizada...”

Si bien la literatura tratando de cuestionar la eficiencia de mercado ha sido masiva particularmente en los últimos 20 años, como recuerda Richard Roll (1994), la última instancia de prueba son los retornos en exceso, y sigue siendo extraordinariamente difícil profitar inclusive ante las violaciones más extremas de eficiencia de mercado. El solo hecho de que las oportunidades de inversión con rentabilidad en exceso sigan siendo llamadas “anomalías” es una demostración, se argumenta, de la validez y vigencia del marco teórico de mercados eficientes. La excepción parece justificar la regla.

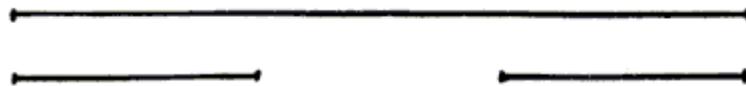
Lo que nunca ha sido intentado previamente es partir de otra premisa. Toda la arquitectura de mercados eficientes se sustenta sobre la base que los títulos financieros siguen un proceso de movimiento browniano en el tiempo. La visión matemática se verbaliza como aleatoriedad de los retornos. Parafraseando a bachelier: “... la esperanza matemática del especulador es cero...” lo que se denomina *fair game*. Si acaso es posible encontrar secuencias numéricas independientes que predigan con razonable nivel de acierto y de manera estadísticamente significativa el movimiento real de los retornos de acciones consistentemente para todos y cada uno de los títulos contrastados – de manera de hacer matemáticamente imposible una coincidencia – la serie independiente ha logrado capturar patrones de la serie de tiempo. Se deduce entonces que todo activo financiero tiene al menos una sección determinística, luego la serie no puede ser aleatoria, si no que tiene un componente anticipable y otro impredecible. La implicancia es que no existe la llamada eficiencia de mercado. Existe en todo proceso accionario una porción del futuro que se puede conocer *ex ante*.

II.2 Teoría del Caos y Universos Fractales

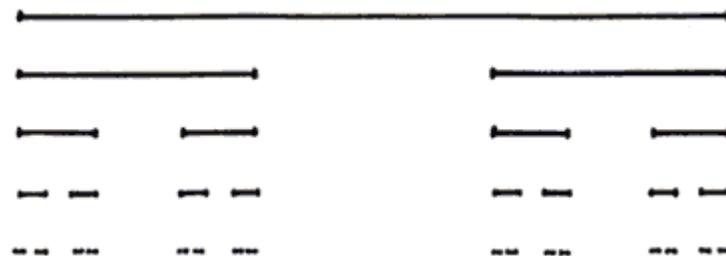
En 1975 Benoit Mandelbrot denominó *fractales* (del latín *factus*, irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional. Adicionalmente, construyó con ellas un conjunto de nuevas *reglas* para explorar la geometría de la naturaleza, y las reconoció como herramientas potencialmente útiles para analizar un gran número de fenómenos físicos.

El interés de Mandelbrot en los fractales nació de su certeza de que "las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta... La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad⁷"

La revolución sin embargo, viene de mucho antes. El conjunto o polvo de Cantor es la primera manifestación fractal. George Cantor, famoso por sus aportes en teoría de conjuntos, lo presenta en 1883: tomamos una recta de longitud L y la seccionamos en tres partes idénticas ($l=L/3$), extrayendo después la sección central (nos queda $N=2$):



Se repite el procedimiento a toda escala:



Fuente: Vicente Talanquer. 1996

⁷ Mandelbrot, Benoit. 1984.

Obteniendo el conjunto de Cantor. Este tiene una dimensión de Hausdorff menor que la unidad, pues cada vez que la longitud de un segmento se reduce a su tercera parte, sólo aparecen dos trozos más, $df = \log(N)/\log(L/l) = \log(2)/\log(3) = 0.6309$. En otras palabras, es más que una colección de puntos, pero menos que una línea. Su estructura está detrás de varios fenómenos del mundo real, habiendo sido utilizado como modelo para representar la distribución no homogénea de los anillos de Saturno, las fluctuaciones en el precio del algodón a partir del siglo pasado, hasta las variaciones que el nivel de las aguas del río Nilo ha experimentado desde hace 2000 años.

Hacia 1977, Mandelbrot se ve forzado a dar una definición formal que permitiera distinguir con más claridad una entidad fractal. Para hacerlo recurrió al antiguo concepto de dimensión de Hausdorff y en respuesta al pragmatismo definió, en general, todos los fractales como el conjunto de formas con dimensión fraccional. Mandelbrot era perfectamente consciente de que esta definición, si bien establecía una frontera bien delimitada con la geometría euclidiana de los conos y las esferas (en la que los cuerpos tienen una dimensión de Hausdorff entera), dejaba una puerta abierta hacia la región del caos geométrico. A continuación Mandelbrot incursionó en un área de las matemáticas que lo llevó a construir algunos de los objetos geométricos más complejos y hermosos que se conocen.

La idea se basa en tomar un número sobre el que se aplica una función, el resultado se utiliza como argumento del siguiente proceso. Esto es la iteración. Formalmente:

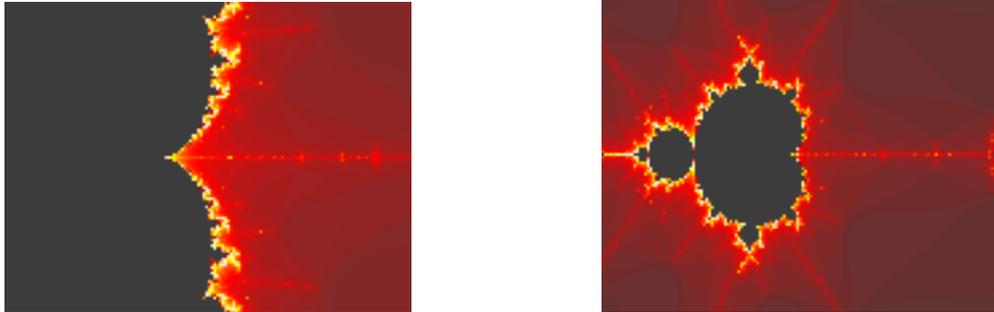
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Supongamos $x_{n+1} = x_n^2$. Si $x_0 = 2$, $2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 16 \Rightarrow 256 \Rightarrow 65536 \Rightarrow \dots \Rightarrow \infty$
 en cambio si $x_0 = 0.5$ $0.5 \Rightarrow 0.25 \Rightarrow 0.0625 \Rightarrow 0.00390625 \Rightarrow \dots \Rightarrow 0$

x_0 es el *iniciador*, la secuencia de números que se genera se denomina *orbita* de la iteración, y el punto al que tiende es el *atractor*.

La novedad de Mandelbrot es utilizar números complejos: un componente real y uno imaginario. Las características impredecibles de los imaginarios se realizan en una simple fórmula cuadrática, que termina constituyéndose en el Conjunto de Mandelbrot:

$Z \leftrightarrow z^2 + c$. La única peculiaridad es que el iniciador es (0,0), y el conjunto queda determinado por todas las constantes c que no hacen explotar la función hacia el infinito. Las condiciones de borde se delimitan por aquellas constantes que generan una serie que se mantiene bajo una magnitud definida a priori durante un determinado número de iteraciones antes de partir hacia el infinito.



Los detalles de la estructura del contorno del conjunto de Mandelbrot se hacen más evidentes cuando se utilizan colores para distinguir las características de la órbita de iteración que le corresponde a cada valor de la constante c .

Los fractales no son solamente útiles para describir la geometría de las formas naturales, también nos proveen de nuevas herramientas para analizar sus propiedades dinámicas, la manera en que se desarrollan y evolucionan, o cómo interaccionan entre sí para competir u organizarse. Los fractales son parte fundamental del nuevo lenguaje de la complejidad y el caos.

Muchos sistemas no lineales exhiben un comportamiento caótico porque son altamente sensibles a las influencias externas. Su susceptibilidad en ocasiones raya la histeria: si, por ejemplo, quisiéramos predecir la trayectoria de una bola de billar que choca con otras en su camino, bastaría ignorar el efecto gravitacional de un electrón situado en la frontera de nuestra galaxia para comenzar a obtener resultados erróneos después de un minuto de haberla lanzado. Otro ejemplo famoso es el *efecto mariposa* en la predicción del clima:

en algunos modelos utilizados en climatología, no considerar el aleteo de una mariposa puede tener consecuencias nefastas sobre la predicción del comportamiento atmosférico.

Un sistema caótico resulta impredecible porque es extraordinariamente sensible a la especificación de las condiciones iniciales. Cualquier pequeño cambio en el estado inicial tiene dramáticos efectos sobre el comportamiento futuro. Muchos sistemas son capaces de tener un comportamiento regular o caótico, de acuerdo con las condiciones a las que estén sujetos; desgraciadamente, no existen reglas generales que permitan decidir *a priori* si exhibirán o no una dinámica caótica. El tránsito entre el orden y el caos puede darse de manera brusca o gradual y esto cambia de sistema a sistema.

El presente trabajo rescata ecuaciones interesantes desde un punto de vista geométrico fractal, y se les elimina el componente imaginario. Estos modelos son impredecibles antes de imponerles una constante y un iniciador, por lo que solamente con procedimientos heurísticas de prueba y error vamos delimitando las ecuaciones singulares que participarán en la investigación. En la siguiente sección se explicita el proceso.

Parte II

II. Metodología

La intención de la presente tesis es probar la utilidad predictiva de modelos que se retroalimentan de si mismos para generar secuencias numéricas, que luego son contrastadas contra series de tiempo de acciones. Los títulos a utilizar son 18 ishares⁸ en sus múltiples formas: por sector industrial, replicas de índices, por regiones, commodities, etc.⁹.

Para el desarrollo de la investigación, se utilizó Microsoft Excel así como su complemento Visual Basic en la programación de Macros.

II.1 Funciones Recursivas Empleadas

Las funciones elegidas fueron 15, obtenidas principalmente de la rama de modelos caóticos llamada Fractales¹⁰. Su característica fundamental es:

$$f(X)_t = X_t(f(X)_{t-1})$$

Las formulas mas promisorias desde un punto de vista geométrico fractal se presentan a continuación. En la sección resultados están las que mejor modelan los procesos estocásticos de los títulos. Todas las funciones tienen dos componentes que las individualizan: una semilla c_1 y una constante c_2 . La semilla es el primer valor que alimenta a la función a iterar. Es la carga inercial original. La constante sigue en cada una de las mutaciones del algoritmo.

⁸ Portfolios de acciones que operan de manera idéntica a títulos individuales. Su expansión en los últimos años es enorme, y hoy son instrumentos profundos que permiten diversificación efectiva a los inversionistas a un costo muy bajo.

⁹ Ver II.5 Datos.

¹⁰ Popularizados por Benoit Mandelbrot en la forma de figuras geométricas de infinita complejidad en función de un solo algoritmo recursivo de números complejos con una semilla y una constante.

- i. $Y = c_2 \text{sen}(c_1)$
- ii. $Y = c_2 \cos(c_1)$
- iii. $Y = c_2 \cos(c_1) \text{sen}(c_1)$
- iv. $Y = c_2 (c_1^{-3} + 1)$
- v. $Y = c_1^{-2} + c_2$
- vi. $Y = c_2 (c_1^2 + 1)$
- vii. $Y = c_2 + c_1 \exp(c_1)$

Para la generación de las distintas series, se crearon aleatoriamente 6000 ecuaciones particulares para cada una de las 15 funciones. Las condiciones impuestas sobre la semilla c_1 y la constante c_2 son:

$$-5 \leq c_1, c_2 \leq 5$$

Esto para minimizar la cantidad de procesos no convergentes y explosivos. Las funciones que se retroalimentan suelen tener tendencia a crecer exponencialmente al infinito, o colapsar hacia algún número, mientras nuestra intención deliberada es obtener procesos similares a la primera diferencia de precios históricos de acciones. Es decir, buscamos replicas a movimientos oscilantes en torno al cero.

II.2 Filtros de Aleatoriedad

A cada una de las ecuaciones individuales obtenidas se las hace pasar por un filtro, con el fin de que continúen solo los mejores modelos hacia fases superiores del proceso heurístico. Puesto que muchas de las especificaciones explotan hacia el infinito o se estacionan en un valor, se eliminan todos estos modelos, así como aquellos que tienen patrones reiterativos o determinísticos, que son una mala aproximación a la naturaleza errática de la primera diferencia de una acción real.

Ejemplos de funciones filtradas correspondientes a $Y = c_2 \cos(c_1)$

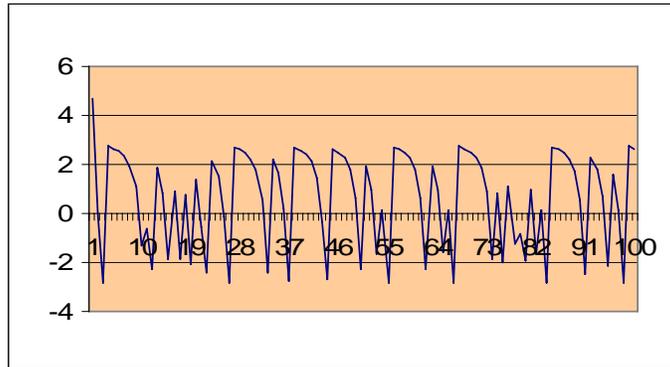


Fig. 1: *Serie de patrones discernibles*

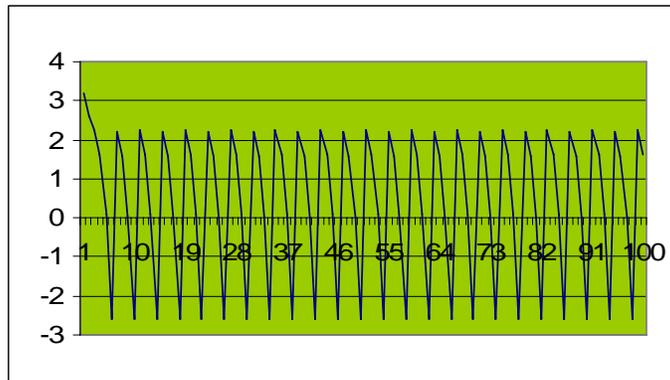


Fig. 2: *Serie deterministica*

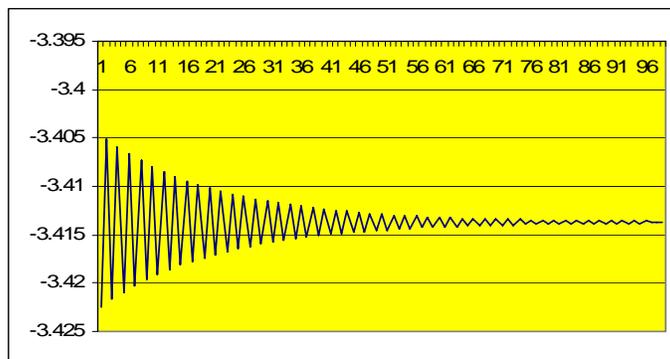


Fig. 3: *Serie con colapso a un valor*

Para depurar la muestra, forzamos a cada modelo a medirse contra dos test de aleatoriedad. Para ello cada una de las ecuaciones particulares se itera para generar una serie de largo $n = 200$, a la que se aplican dos test no parametricos: Wald-Wolfowitz (corridas) y Cox-Stuart (signo).

El test de Wald-Wolfowitz se construye como sigue:

H_0 : *la serie es aleatoria*

H_1 : *la serie presenta tendencia*

Sea n_1 si $n_i = n_{i-1}$, n_2 en caso contrario

$$\mu_R = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

$$\sigma_R^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}$$

$$R \approx N(\mu_R, \sigma_R^2)$$

$$Z_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \approx N(0,1)$$

Y para tamaños de muestra superiores a 40, la distribución del test es aproximadamente normal. Luego para nuestro trabajo se considera un nivel de confianza del 95%, con un Z critico de 1,96.

El test de Cox Stuart de signos no ponderados:

H_0 : *no hay tendencia en los datos*

H_1 : *existe persistencia en los datos*

Sea n el tamaño de la muestra. Condicionamos a este como par, luego aparejamos los datos como $(x_i, x_{\frac{n}{2}+i}) \quad \forall i = 1, \dots, n/2$. Si:

$$(x_{\frac{n}{2}+i} - x_i) > 0 \text{ entonces "+"}$$

$$(x_{\frac{n}{2}+i} - x_i) < 0 \text{ entonces "-"}"$$

$$(x_{\frac{n}{2}+i} - x_i) = 0 \text{ se elimina}$$

Si el número de pares no empatados es mayor a 30, se puede aproximar por distribución normal:

$$Z = \frac{V - \mu_v}{\sigma_v}$$

Donde V es el número de "+"

n número de pares no empatados ("+" y "-")

$$\mu_v = 0.5n$$

$$\sigma_v = \sqrt{0.25n}$$

Considerando un 95% de confianza, nuestro Z crítico es 1,96.

Si una ecuación logra pasar los dos test, a conseguido *parecer* aleatoria. Sabemos *ex ante* la especificación como sus coeficientes, por lo tanto conocemos su proceso de transformación recursivo. En cualquier momento t podemos conocer todo $t+i$. El test de Cox-Stuart es comparativamente más sencillo de engañar por los modelos caóticos recursivos analizados, por lo que se fuerza a que solo las especificaciones que logran sobrevivir a ambos test avancen al siguiente paso¹¹

¹¹ En la sección 'Resultados' se especifica el porcentaje de modelos por cada especificación fractal que logran avanzar hacia la última etapa. Adicionalmente todos los modelos se midieron contra el test Jarque-Bera de normalidad. Muy pocos logran pasarlo, y siempre cumplen simultáneamente con los dos test aleatorios. Sin embargo, no resulta de ningún modo imprescindible exigir normalidad a los modelos en estudio.

II.3 Contraste y Eficiencia de los Modelos

El penúltimo paso consiste en contrastar cada una de las series autogeneradas que lograron avanzar hasta esta etapa contra series históricas de los 18 ishares.

La primera medida de eficacia predictiva es el PPS – porcentaje de predicción de signo – calculado como:

$$\text{Porcentaje} = \frac{\sum_{t=n+1}^{n+m} p_i}{m}$$

$$p_i = \begin{cases} 1, & \text{si } \Delta \text{Index}_i * \hat{\Delta} \text{Index}_i > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, i = [n+1, \dots, n+m]$$

donde Δ representa la variación observada y $\hat{\Delta}$ la variación estimada.

Representa la cantidad de aciertos en signo de los modelos caóticos individuales contra cada uno de los ishares.

A continuación se realiza un test de consistencia y estabilidad. Se generan 4 cortes sobre la muestra total de tamaño no inferior a 100 observaciones c/u, y se estima el PPS individual. Los modelos residuales y finales de todo el proceso realizado deben cumplir simultáneamente el tener un PPS sobre 60%, junto a la regla de estabilidad:

$$|PPS_i - \overline{PPS}| \leq 5\% \quad \forall i = 1, \dots, 4$$

II.4 Validez Estadística y Económica de los Modelos

Los modelos residuales conseguidos deben ser evaluados desde un punto de vista estadístico, para comprobar si acaso tienen poder predictivo sobre la base de correlación de las observaciones versus las mutaciones del algoritmo recursivo. El test a utilizar es el de Certeza Direccional (DA) de Pesaran & Timmermann (1992). Nuevamente intentamos confundir al test, pues este fue creado para capturar dependencia serial entre las proyecciones y los datos observados. Luego si ambas series son por definición independientes, no debiera ser posible rechazar la hipótesis nula.

DA Pesaran & Timmermann:

H_0 : *independencia de las series*

H_1 : *dependencia entre las series*

El test DA se construye mediante la comparación entre el signo de la proyección, \hat{y}_i , con el del valor observado, y_i , para cada i -ésima observación del conjunto ($i=1,2, \dots, m$), donde el signo indica la dirección en que se moverá el mercado accionario: al alza si es positivo, o a la baja si es negativo. Si los signos coinciden, aumentan la efectividad, y en caso de no existir coincidencia, aumenta el error de predicción. El ratio de éxito (SR) se define como:

$$SR = m^{-1} \sum_{i=1}^m I_i[y_i, \hat{y}_i > 0]$$

donde $I_i[\cdot]$ es una función indicador que toma el valor de 1 cuando su argumento es cierto y 0 en otro caso. Además:

$$P = m^{-1} \sum_{i=1}^m I_i[y_i > 0]$$

y

$$\hat{P} = m^{-1} \sum_{i=1}^m I_i[\hat{y}_i > 0]$$

El ratio de éxito en el caso de independencia de \hat{y}_i y y_i , SRI, está dado por:

$$SRI = P \cdot \hat{P} + (1 - P)(1 - \hat{P})$$

cuya varianza es:

$$VAR[SRI] = m^{-2} \left[m(2 \cdot \hat{P} - 1)^2 P(1 - P) + m(2 \cdot P - 1)^2 \hat{P}(1 - \hat{P}) + 4 \cdot P \cdot \hat{P}(1 - P)(1 - \hat{P}) \right]$$

Por su parte, la varianza de SR se define como:

$$VAR[SR] = m^{-1} \cdot SRI(1 - SRI)$$

Finalmente, el test DA de Pesaran & Timmermann (1992) está dado por:

$$DA = (VAR[SR] - VAR[SRI])^{-1/2} (SR - SRI)$$

Para tamaños de la muestra mayores a 40, la distribución del test es convergente a normal. Luego a 95% de confianza, se rechaza la nula si Z es mayor a 1,96.

La significancia económica de los modelos es el retorno en exceso, de existir, obtenido utilizando como benchmark una estrategia tipo “Buy and Hold” o AR(1), replicando el principio de mercados eficientes, donde la mejor predicción del precio de hoy es el precio de ayer mas un error:

$$P_t = P_{t-1} + \varepsilon, \text{ donde } \varepsilon \equiv d(0, \sigma^2)$$

II.5 Datos

El horizonte de tiempo abarcado son 245 semanas, desde el 12 de Marzo del 2001 hasta el 28 de Noviembre del 2005. Los datos corresponden al día martes de cada semana, en previsión de las posibles anomalías observables el primer día de la semana, sobre todo en presencia de información que aparece después del cierre del último día hábil de la semana anterior. Los ishares seleccionados corresponden a los de mayor volumen diario.

ETF	Nemotecnico	Categoría	Familia	Volumen promedio a 3 meses	Maximo 52 semanas	Minimo 52 semanas
iShares Russell 2000 Value Index	IWN	Small Value	Ishares Trust	1,070,950	68.87	57.2
Consumer Discretionary SPDR	XLY	Large Blend	Select Sector Spdr Trust	1,505,840	35.55	30.62
Materials Select Sector SPDR	XLB	Large Value	Select Sector Spdr Trust	2,408,950	32	25.93
iShares Dow Jones US Real Estate	IYR	Specialty-Real Estate	Ishares Trust	2,444,320	68.46	55.35
NASDAQ 100 Trust Shares	QQQQ	Large Growth	NASDAQ 100 TRUST SERIES 1	93,266,300	42.13	34.35
SPDRs	SPY	Large Blend	SPDR TRUST SERIES 1	66,931,700	127.41	113.55
iShares MSCI Japan Index	EWJ	Japan Stock	Ishares Inc	25,782,500	12.79	9.86
iShares Russell 2000 Index	IWM	Small Blend	Ishares Trust	29,431,800	68.85	56.5
Energy Select Sector SPDR	XLE	Specialty-Natural Res	Select Sector Spdr Trust	20,952,700	54.65	34.54
Financial Select Sector SPDR	XLF	Specialty-Financial	Select Sector Spdr Trust	9,287,920	32.6	27.39
DIAMONDS Trust, Series 1	DIA	Large Value	DIAMONDS TRUST SERIES I	7,137,930	109.83	99.89
iShares MSCI Taiwan Index	EWT	Pacific/Asia ex-Japan Stk	Ishares Inc	1,717,580	13	10.5
Technology Select Sector SPDR	XLK	Specialty-Technology	Select Sector Spdr Trust MIDCAP SPDR TRUST SERIES 1	1,317,480	22.14	18.46
MidCap SPDRs	MDY	Mid-Cap Blend	1	2,482,750	136.45	114.13
iShares S&P SmallCap 600 Index	IJR	Small Blend	Ishares Trust	1,373,420	59.69	49.19
iShares MSCI Mexico (Free) Index	EWW	Latin America Stock	Ishares Inc	618,828	36.13	22.58
Utilities Select Sector SPDR	XLU	Specialty-Utilities	Select Sector Spdr Trust	2,706,140	34.05	26.8
iShares MSCI Brazil (Free) Index	EWZ	Latin America Stock	Ishares Inc	1,499,170	35.43	19.8

Parte III

III.1 Resultados

Las especificaciones funcionales con mejores resultados se presentan a continuación. Se observa que las funciones trigonométricas son hegemónicas en cuanto a habilidad de replicar comportamientos aleatorios de las secuencias numéricas. Si bien primeramente se aproxima a la búsqueda de funciones por medio de aquellas mejor comportadas en el campo fractal, las con mejores resultados terminan siendo las mas sencillas y poco interesantes desde un punto de vista geométrico fractal. De hecho, el universalmente famoso Conjunto de Mandelbrot $Z \leftrightarrow z^2 + c$ es enteramente deficiente, incluso cuando la potencia se modifica a negativa en previsión de su tendencia exponencial. Lo anterior se reduce simplemente a la simplificación que condicionamos a las funciones: contrariamente a la teoría fractal, que hace uso de números complejos, donde el componente imaginario es el que provee de las fascinantes propiedades observables a escala grafica, este trabajo hizo uso solamente de números reales.

Fig.1: Numero¹² de Modelos que Superan Filtros

	<i>Superan Wald-Wolfowitz y Cox-Stuart</i>	<i>Adicionalmente superan Jarque-Bera</i>
$Y = c_2 \cos(c_1)$	832	70
$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	839	74
$Y = c_2 \text{sen}(c_1)$	205	17
$Y = c_2 \text{sen}(c_{1t}) - c_2 \text{sen}(c_{1(t-1)})$	364	37
$Y = c_2 \cos(c_1) \text{sen}(c_1)$	196	11
$Y = c_2 \cos(c_{1t}) \text{sen}(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)}) \text{sen}(c_{1(t-1)})$	387	24
$Y = c_2 (c_1^{-3} + 1)$	51	0
$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	1110	6

¹² Compiten 6000 ecuaciones individuales por cada especificación.

ETF	Modelo Ganador	c_2	c_1	PPS	PPS_1	PPS_2	PPS_3	PPS_4
NASDAQ 100 Trust Shares (QQQQ)	<i>Desierto</i>	-	-	-	-	-	-	-
SPDRs (SPY)	$Y = c_2 \text{sen}(c_1)$	-4.4991	1.973992	62.04%	0.640777	0.699029	0.61165	0.592233
iShares MSCI Japan Index (EWJ)	<i>Desierto</i>	-	-	-	-	-	-	-
iShares Russell 2000 Index (IWM)	$Y = c_2 \text{sen}(c_{1t}) - c_2 \text{sen}(c_{1(t-1)})$	2.96262	3.467512	60.25%	0.598039	0.582524	0.572816	0.592233
Energy Select Sector SPDR (XLE)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	-2.7615	-1.42396	63.52%	0.617647	0.601942	0.650485	0.660194
Financial Select Sector SPDR (XLF)	<i>Desierto</i>	-	-	-	-	-	-	-
DIAMONDS Trust, Series 1 (DIA)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	-2.7615	-1.42396	61.48%	0.598039	0.601942	0.621359	0.621359
iShares MSCI Taiwan Index (EWT)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	-1.3728	4.556586	61.07%	0.607843	0.572816	0.601942	0.621359
Technology Select Sector SPDR (XLK)	<i>Desierto</i>	-	-	-	-	-	-	-
MidCap SPDRs (MDY)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	-2.7615	-1.42396	61.48%	0.607843	0.563107	0.582524	0.650485
iShares S&P SmallCap 600 Index (IJR)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	-2.7615	-1.42396	62.70%	0.627451	0.582524	0.601942	0.640777
iShares MSCI Mexico (Free) Index (EWW)	<i>Desierto</i>	-	-	-	-	-	-	-
Utilities Select Sector SPDR (XLU)	<i>Desierto</i>	-	-	-	-	-	-	-
iShares MSCI Brazil (Free) Index (EWZ)	$Y = c_2 \cos(c_1)$	4.69929	2.897573	60.41%	0.582524	0.61165	0.61165	0.61165
iShares Dow Jones US Real Estate (IYR)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	-1.9351	2.612835	63.11%	0.607843	0.631068	0.660194	0.631068
Materials Select Sector SPDR (XLB)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	-1.7845	0.589099	61.07%	0.607843	0.621359	0.592233	0.61165
Consumer Discretionary SPDR (XLY)	$Y = c_2 \cos(c_1) \text{sen}(c_1)$	-4.015	2.379029	61.22%	0.631068	0.631068	0.563107	0.592233
iShares Russell 2000 Value Index (IWN)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	-2.7615	-1.42396	61.07%	0.578431	0.553398	0.621359	0.640777

Fig. 2: Modelos Ganadores para cada uno de los ishares

Los modelos ganadores cumplen simultáneamente con obtener un PPS sobre el 60%, y además cumplir la regla de estabilidad $\left|PPS_i - \overline{PPS}\right| \leq \nu\% \quad \forall i = 1, \dots, 4$. Para los ishares desiertos ningún modelo cumplió los criterios anteriores. Esto nos asegura que el modelo se mantenga estructuralmente estable en todo el horizonte de predicción. La posible deducción de lo anterior es que el catalizador del proceso,

c_1 , genera – para los modelos ganadores – series cuyo largo deja de ser dependiente en PPS a la semilla original. En otras palabras, la serie no degenera al aumentar la distancia del último dato con respecto al iniciador. Queda por investigar si la eficiencia predictiva se ve alterada al resetear la serie de vuelta a c_1 cada determinado número de observaciones. Un patrón curioso es el de $Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$, que presenta idénticos valores para la constante y el catalizador en los 5 ishares en que participa como modelo final. Esto es inesperado pues una vez definidos los valores originales del proceso caótico, la serie generada es determinística. Luego una única serie numérica es capaz de anticipar con gran acierto el signo de procesos estocásticos independientes. Debe recalcar lo novel del hallazgo: el trabajar con modelos caóticos autogenerados debiera dar un calce con respecto a series de tiempo reales cercano al 50%. Sin embargo se obtienen PPS sobre 60%, y como se verá a continuación, rentabilidades en exceso económicamente explotables. Pero adicionalmente se encuentra una serie determinística que predice con certeza procesos aparentemente no coordinados e independientes. Esto viola frontalmente la hipótesis de eficiencia de mercado, pues existe un patrón colectivo – que captura el modelo – que siguen acciones de naturaleza completamente distinta.

ETF	Modelo Ganador	PPS	DA Test
SPDRs (SPY)	$Y = c_2 \text{sen}(c_1)$	62.04%	3.68
iShares Russell 2000 Index (IWM)	$Y = c_2 \text{sen}(c_{1t}) - c_2 \text{sen}(c_{1(t-1)})$	60.25%	3.96
Energy Select Sector SPDR (XLE)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	63.52%	5.60
DIAMONDS Trust, Series 1 (DIA)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	61.48%	4.72
iShares MSCI Taiwan Index (EWT)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	61.07%	4.12
MidCap SPDRs (MDY)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	61.48%	4.84
iShares S&P SmallCap 600 Index (IJR)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	62.70%	5.32
iShares MSCI Brazil (Free) Index (EWZ)	$Y = c_2 \cos(c_1)$	60.41%	5.01
iShares Dow Jones US Real Estate (IYR)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	63.11%	3.13
Materials Select Sector SPDR (XLB)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	61.07%	2.78
Consumer Discretionary SPDR (XLY)	$Y = c_2 \cos(c_1) \text{sen}(c_1)$	61.22%	3.50
iShares Russell 2000 Value Index (IWN)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	61.07%	4.76

Fig. 3: DA Test Pesaran y Timmermann (1992)

En la figura 3 se presentan los resultados del test DA de Pesaran y Timmermann. A un nivel de confianza del 95% el Z crítico corresponde a 1.97. En todos los modelos se rechaza la hipótesis nula de independencia serial con holgura. Nuevamente es posible obtener deducciones novedosas. Puesto que por definición de la presente investigación las series autogeneradas son independientes, el obtener dependencia y correlación estadísticamente significativa de las acciones con respecto a la serie caótica¹³ refuerza la idea de ciertos patrones en las series de tiempo que son posibles de modelar. Resulta entonces claro que al menos capacidad predictiva sistemática existe, y queda por ver a continuación si esta puede traducirse en rentabilidad al considerar costos de transacción.

La figura 4 muestra las rentabilidades obtenidas siguiendo distintos métodos a lo largo del periodo muestral comprendido entre marzo del 2001 y noviembre del 2005. La primera metodología es un manejo pasivo de cartera “buy and hold”, o lo que es lo mismo, un AR(1), en el que al suponer un proceso tipo martingala no se intenta – no se puede – ganar al mercado, por lo que se mantiene la cartera por horizontes de tiempo prolongados. La segunda metodología consiste en seguir las recomendaciones de compra o venta de los modelos estudiados a lo largo de esta investigación. Esta se subdivide en dos secciones: una en la cual se prohíbe y la otra en que se autoriza realizar venta corta. Para imprimir realismo al ejercicio se considera una inversión original de US\$10.000 y un costo por transacción de compra o venta equivalente a US\$10. Los resultados son auspiciosos: en todos los casos salvo uno la estrategia sin venta corta supera al “Buy and Hold”. Cuando se considera venta corta, se obtienen rentabilidades muy superiores, llegando incluso a sextuplicar el retorno que se hubiera obtenido pasivamente. Otro resultado palpable es que en series de tiempo sin tanta pendiente – que tienen un crecimiento orgánico modesto – los modelos caóticos son categóricamente mejores en cualquiera de sus variantes.

¹³ Es evidente que la causalidad es unidireccional, ya que como se ha mencionado reiteradamente, los modelos caóticos usan como único argumento su propio resultado previo.

ETF	Modelo Ganador	PPS	"Buy and Hold"	Sin Venta Corta	Con Venta Corta
SPDRs (SPY)	$Y = c_2 \text{sen}(c_1)$	62.04%	18.25%	44.92%	115.11%
iShares Russell 2000 Index (IWM)	$Y = c_2 \text{sen}(c_{1t}) - c_2 \text{sen}(c_{1(t-1)})$	60.25%	64.92%	68.92%	105.54%
Energy Select Sector SPDR (XLE)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	63.52%	75.36%	123.33%	236.07%
DIAMONDS Trust, Series 1 (DIA)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	61.48%	21.17%	47.32%	112.53%
iShares MSCI Taiwan Index (EWT)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	61.07%	0.93%	75.22%	164.72%
MidCap SPDRs (MDY)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	61.48%	68.91%	109.71%	207.21%
iShares S&P SmallCap 600 Index (IJR)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	62.70%	85.72%	132.53%	239.27%
iShares MSCI Brazil (Free) Index (EWZ)	$Y = c_2 \cos(c_1)$	60.41%	150.35%	131.70%	129.71%
iShares Dow Jones US Real Estate (IYR)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	63.11%	131.44%	129.18%	167.17%
Materials Select Sector SPDR (XLB)	$Y = c_2 (c_{1t}^{-3} + 1) - c_2 (c_{1(t-1)}^{-3} + 1)$	61.07%	62.11%	75.08%	121.80%
Consumer Discretionary SPDR (XLY)	$Y = c_2 \cos(c_1) \text{sen}(c_1)$	61.22%	35.83%	84.28%	176.90%
iShares Russell 2000 Value Index (IWN)	$Y = c_2 \cos(c_{1t}) - c_2 \cos(c_{1(t-1)})$	61.07%	93.48%	106.14%	152.52%

Figura 4: Rentabilidad distintas estrategias

Parte IV

IV.1 Conclusiones

Los modelos caóticos autoalimentados revisados en el presente trabajo han demostrado poseer capacidad predictiva económicamente aprovechable para un conjunto de ishares que replican a mercados e industrias muy diversas. Se configuran por tanto como herramientas efectivas dentro del conjunto de modelos y métodos de análisis técnico existente en la actualidad. En particular, cuando se permite la venta corta, los modelos evaluados son capaces de rentabilidades muy por sobre¹⁴ las obtenidas siguiendo una estrategia pasiva "Buy and Hold". Considerando la variedad de ETF's¹⁵ utilizados, replicas de índices, industrias, commodities, países, etc. se puede afirmar la generalización de los resultados a casi cualquier activo financiero tranzado en volúmenes considerables, quedando pendiente la medición en mercados típicamente poco predecibles y erráticos, como el de divisas.

Pero de aún más interés, la naturaleza misma de los modelos autogenerados prevé una capacidad predictiva de estos en la vecindad del 50%. Esto porque aún si se logra replicar perfectamente las oscilaciones de una serie en primera diferencia, no hay modo de coordinarlas para que se muevan conjunta y simétricamente. Los resultados sin embargo otorgan a los mejores modelos encontrados PPS y rentabilidad acumulada elevados y estadísticamente significativos.

Indefectiblemente se ha de pensar en las implicancias de lo anterior. La hipótesis de eficiencia de mercado se sustenta en procesos brownianos para las series de tiempo. Se propone como un movimiento intrínsecamente aleatorio. La obtención de capacidad predictiva de una serie numérica que jamás se retroalimenta de información histórica del título a predecir – esto es, ciega – hace impensable una proposición como la HEM. Si una secuencia de números autogenerados logra sistemáticamente *para todos los casos evaluados* replicar patrones y comportamiento de otra serie supuestamente aleatoria, se deduce necesariamente que esta última no es intrínsecamente impredecible. Existe una

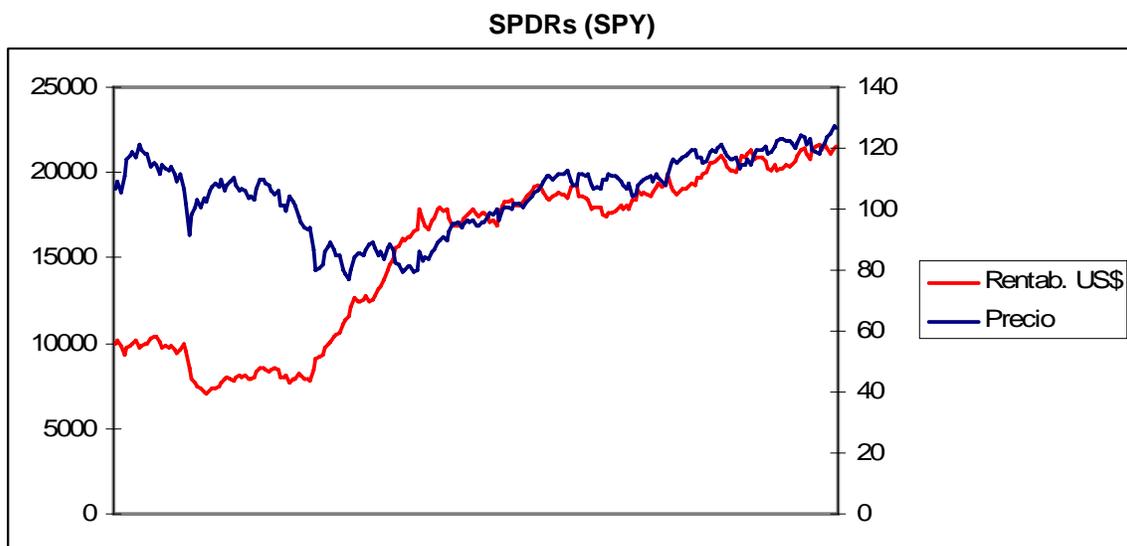
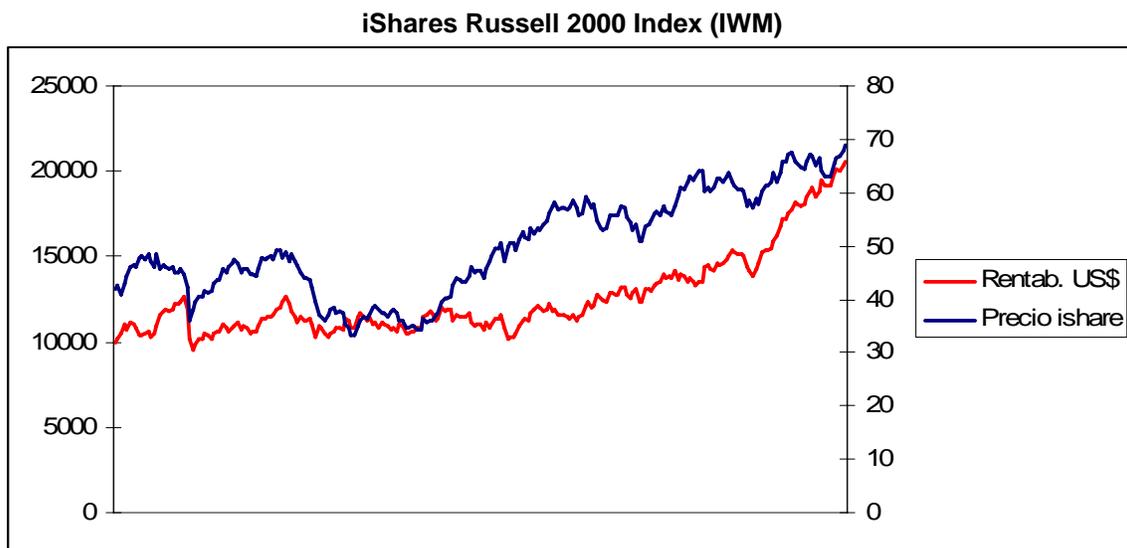
¹⁴ En múltiplos de hasta 6 veces la rentabilidad pasiva.

¹⁵ Exchange Traded Fund, familia dentro de la que se encuentran los ishares.

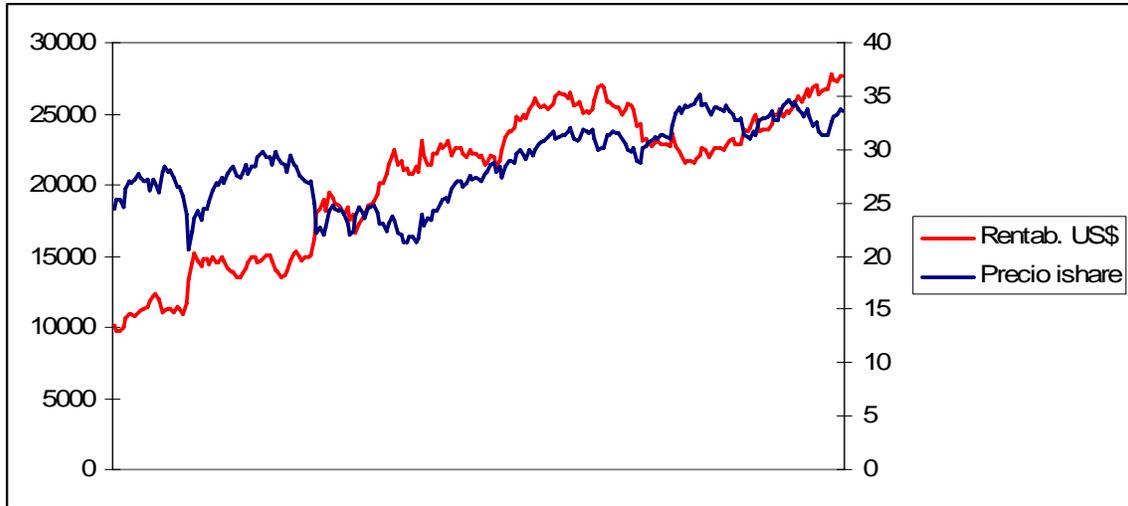
porción del futuro posible de conocer *ex ante*. No puede ser cierto que toda la información se compacte en el último precio disponible, lo que inhabilita un proceso tipo martingala. La implicancia inmediata es que no es posible la existencia de la llamada eficiencia de mercado, ni siquiera en su versión más permisiva, que es la evaluada en este trabajo.

Anexos

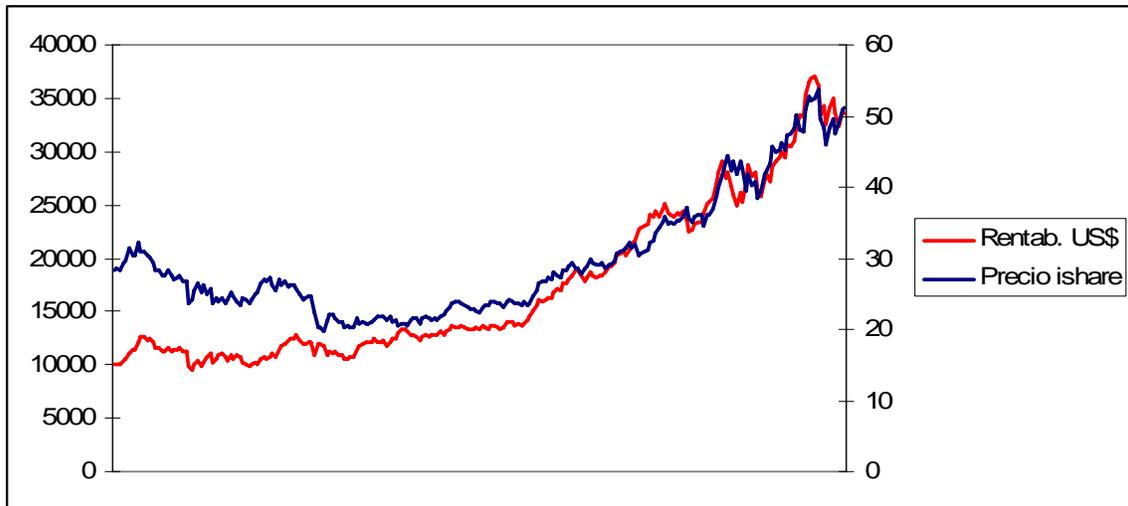
Se presentan los gráficos con la rentabilidad de la estrategia con venta corta partiendo de US\$10.000, además de la evolución del precio de cada ishare. El periodo abarcado va desde el 12 de Marzo del 2001 hasta el 28 de Noviembre del 2005.



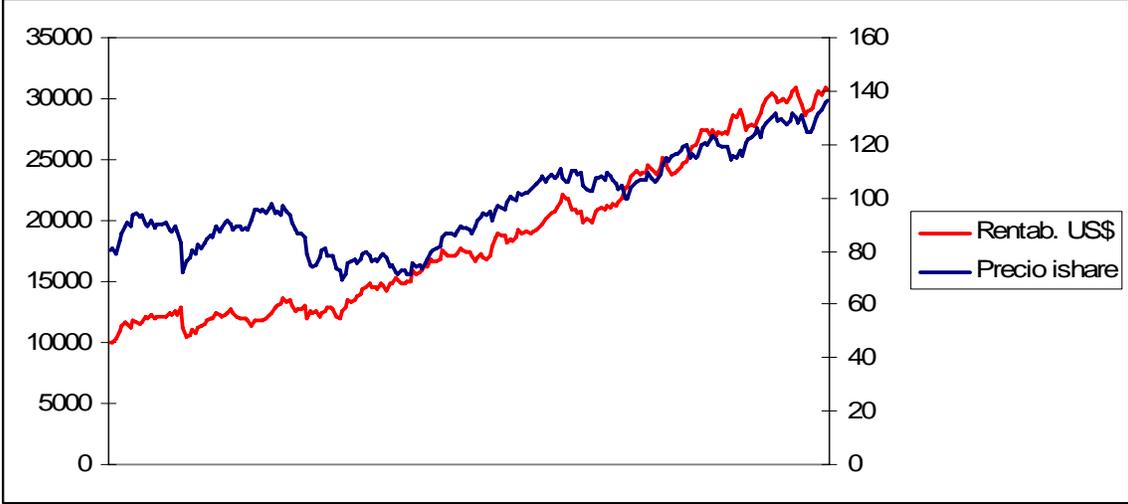
Consumer Discretionary SPDR (XLY)



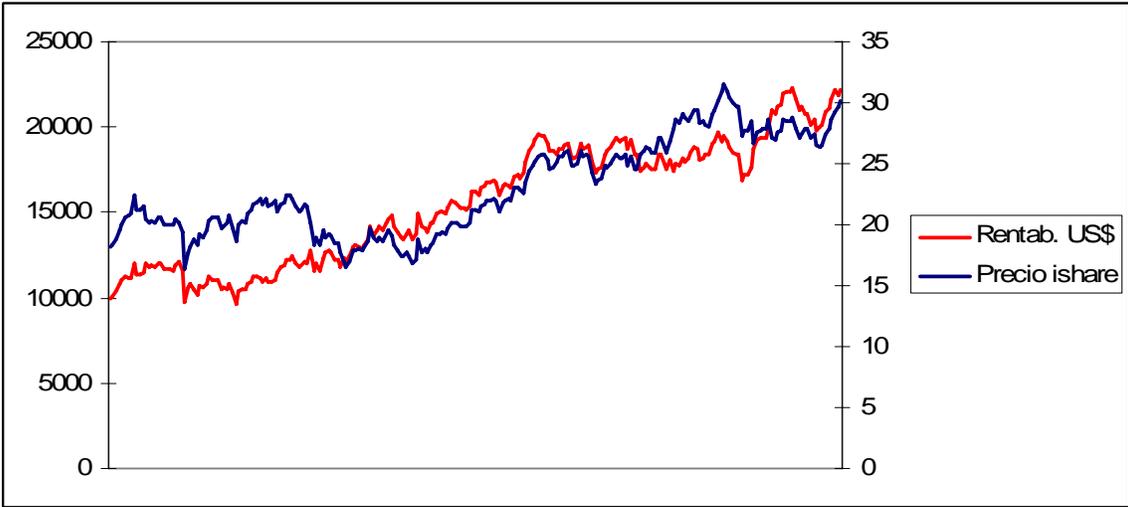
Energy Select Sector SPDR (XLE)



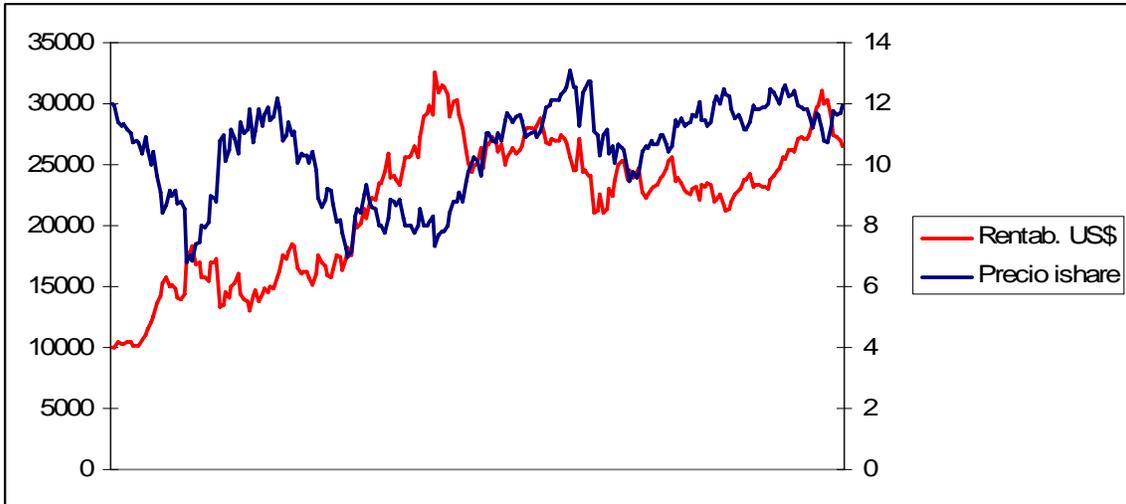
MidCap SPDRs (MDY)



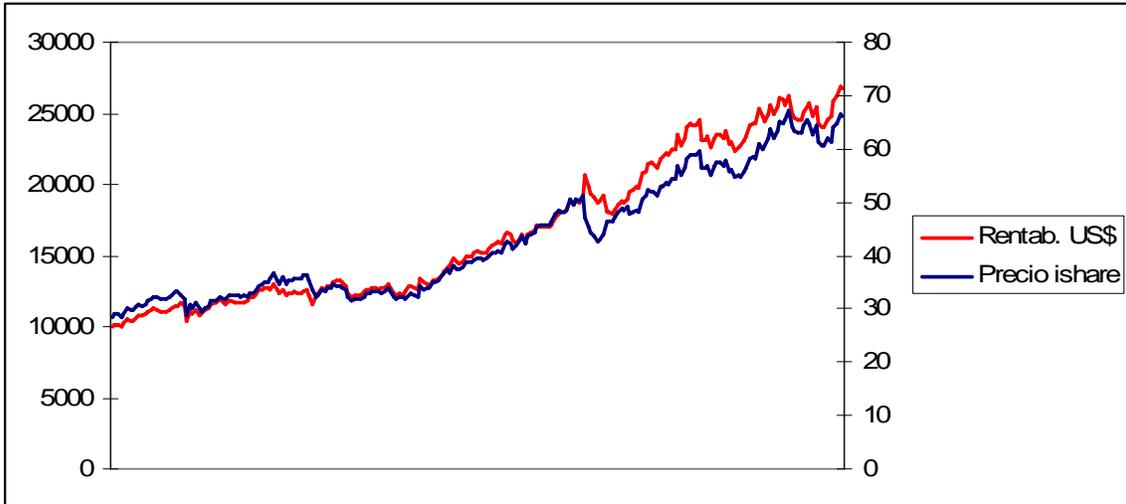
Materials Select Sector SPDR (XLB)



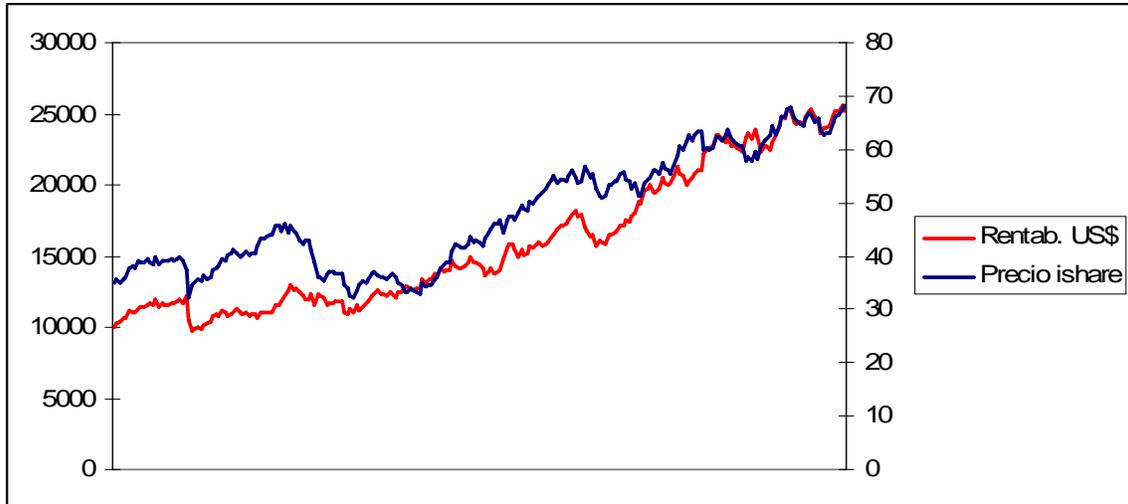
iShares MSCI Taiwan Index (EWT)



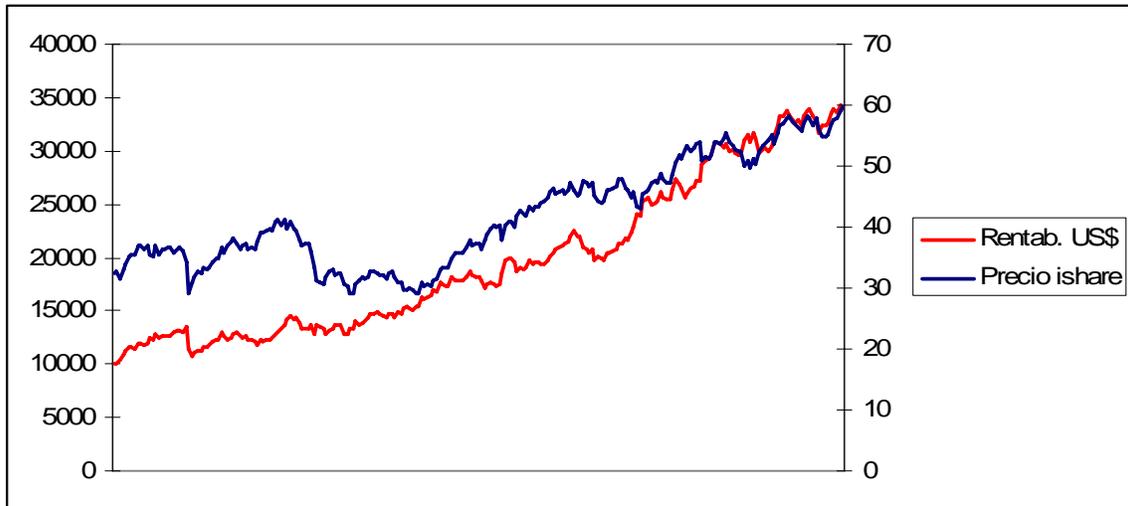
iShares Dow Jones US Real Estate (IYR)



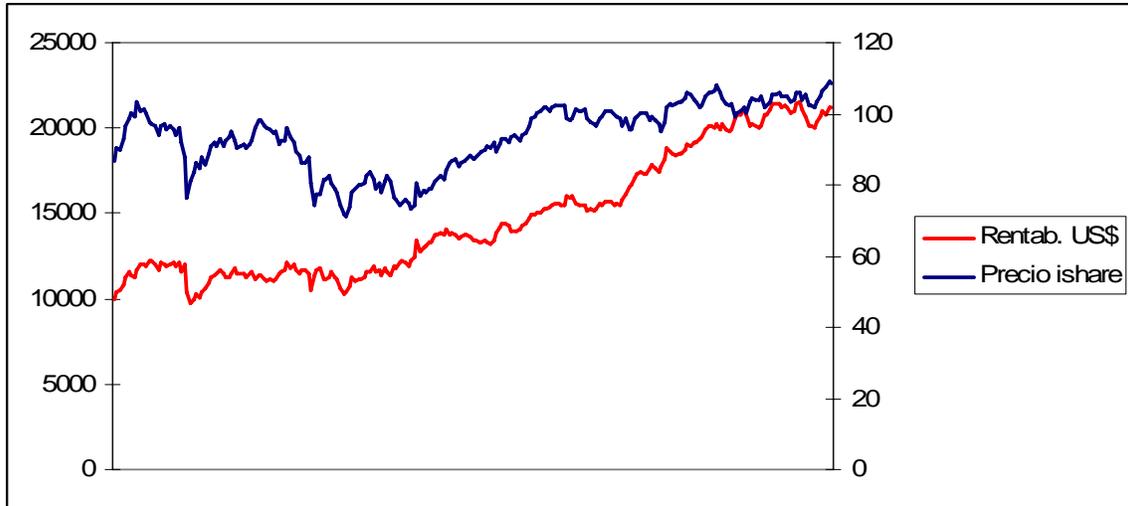
iShares Russell 2000 Value Index (IWN)



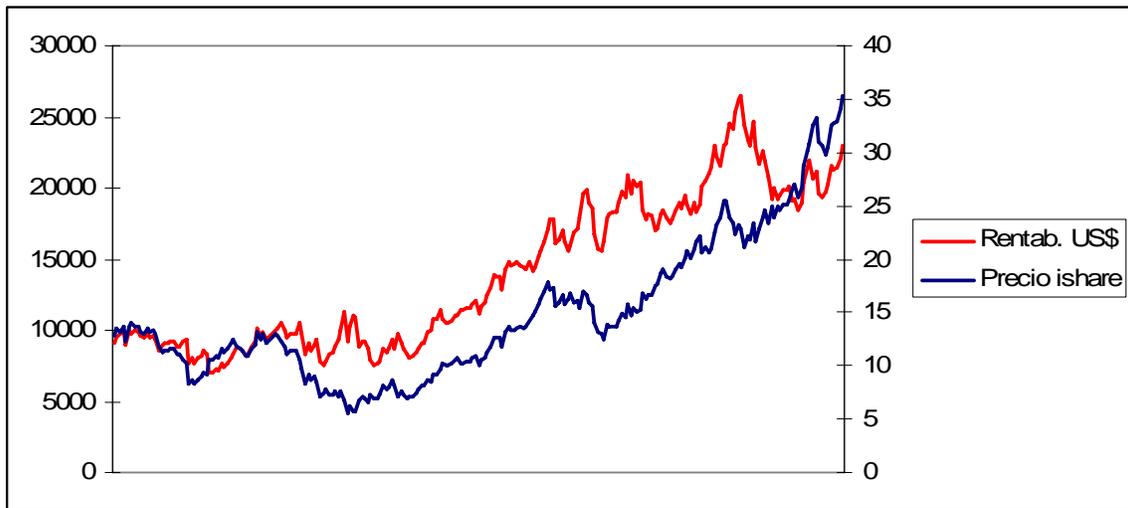
iShares S&P SmallCap 600 Index (IJR)



DIAMONDS Trust, Series 1 (DIA)



iShares MSCI Brazil (Free) Index (EWZ)



Referencias

Bernstein, Peter “Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street”. Free Press. 1992

Einstein, Albert “Investigations on the Theory of the Brownian Motion”. Dover Publications. 1905.

Falconer, Kenneth “Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications”. John Wiley and Sons Editores. 2000.

Fama, Eugene F. “Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work.” Journal of Finance. Mayo 1970.

Fama, Eugene F. “Efficient Capital Markets: II”. Journal of Finance. Diciembre 1991.

Fama, Eugene F. “Random Walks in Stock Market Prices” Financial Analysts Journal. Septiembre 1965.

Fama, Eugene F. “Market Efficiency, Long Term Returns, and Behavioral Finance”. Journal of Financial Economics. Octubre 1997.

Kroger, H. “Fractal Geometry in Quantum Mechanics, Field Theory and Spin Systems”. Elsevier Physics Report. Mayo 2000.

Mandelbrot, Benoit “A Multifractal Model of Asset Returns”. Discussion Paper Yale University. Septiembre 1997.

Pesaran, M. y Timmermann, A. “A Simple Non Parametric Test of Predictive Performance”. Journal of Business and Economic Statistics, 1992.

Peters, Edgar “Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics”. John Wiley and Sons Editores. 1994.

Talanquer, Vicente “Fractales, de Laberintos y Espejos”. Fondo de Cultura Económica. 1996.