



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PUNTOS FIJOS DE OPERADORES NO EXPANSIVOS Y REGULARIDAD
ASINTÓTICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

MATIAS NICOLAS PAVEZ SIGNE

PROFESOR GUÍA:
ROBERTO COMINETTI COTTI-COMETTI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARIO BRAVO GONZÁLEZ
ARIS DANIILIDIS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt 1130564.

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: MATIAS NICOLAS PAVEZ SIGNE
FECHA: 2016
PROF. GUÍA: SR. ROBERTO COMINETTI COTTI-COMETTI

PUNTOS FIJOS DE OPERADORES NO EXPANSIVOS Y REGULARIDAD
ASINTÓTICA

En la presente memoria se estudia la propiedad de regularidad asintótica para una variante de la iteración de *Krasnoselskii-Mann* en un espacio de Banach general. Este problema está enmarcado en la teoría métrica de puntos fijos de operadores no expansivos, pues resulta ser que, bajo ciertas hipótesis, la sucesión de iterados de Krasnoselskii-Mann converge a un punto fijo de cierto operador T .

La regularidad asintótica de la iteración de Krasnoselskii-Mann ha sido ampliamente estudiada por muchos autores, ya que sirve para aproximar puntos fijos de un operador no expansivo $T : C \rightarrow C$ definido sobre un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach. Se ha establecido la regularidad asintótica de los iterados de Krasnoselskii-Mann en un espacio de Banach bajo condiciones simples, y además se conoce la tasa de regularidad asintótica en un espacio de Banach general. En esta memoria se prueba la regularidad asintótica de la iteración

$$x_{k+1} = (1 - \alpha_{k+1})x_k + \alpha_{k+1}(Tx_k + e_{k+1}),$$

donde $x_0 \in C$, $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq [0, 1]$, $e_n \rightarrow 0$, $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ y $\sum \alpha_k \|e_k\| < \infty$. Además, se establece la tasa de convergencia de $\|x_n - Tx_n\|$ cuando los coeficientes $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ están lo suficientemente alejados de 0 y 1. Por último, se aplican los resultados obtenidos en esta tesis para estudiar la regularidad asintótica de otros procesos iterativos y para estudiar cotas de la solución de una ecuación de evolución no lineal.

“What you need is that your brain is open”

Paul Erdős

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a muchas personas, porque son muchos los que han pasado por mi vida durante este proceso, y sin lugar a duda, todos han marcado de cierta forma mi historia. Perdón si olvido a alguien, pero este espacio es muy pequeño para mencionarlos a todos.

Primero que todo, quiero agradecer a mis padres y mi hermano, y en general a toda mi familia. Ustedes han sido un constante apoyo y fuente de alegría, gran parte de lo que soy se los debo a ustedes. Quisiera agradecer en particular a mi madre, por el apoyo incondicional durante toda mi vida, en especial, durante los difíciles momentos que tuve que pasar debido a mi enfermedad. A mi hermano, por ser mi amigo, espero nunca separarme de ti. A mis compañeros caninos, Axel y Bongo, por acompañarme durante las largas noches de estudio.

También quisiera agradecer a la gente que conocí durante mi paso por la universidad. A mis compañeros del DIM, por los días de estudio y las tardes de smash, gracias por permitirme conocer a gente tan distinta, sin lugar a dudas aprendí mucho de cada uno de ustedes. A mi equipo de Magic, por los torneos, viajes, tardes y noches de testeo. Gracias a ustedes los tiempos difíciles pasaron mucho más rápido. También quisiera agradecer a mis amigos de eléctrica, por las tardes en la terraza y las largas conversaciones sobre la vida.

Por otro lado, quisiera agradecer a los profesores a quienes tuve el agrado de compartir. En especial a mis profesores guías, Roberto Cominetti y Mario Bravo, por el constante apoyo y confianza que me brindaron. Gracias también por las tardes de trabajo en la pizarra y las conversaciones sobre la vida, aprendí muchísimo de ustedes dos. A la gente del Núcleo Milenio, Información y Coordinación en Redes, gracias por la acogida y por el espacio físico que me facilitaron. En especial, gracias a José Correa por la amabilidad y disposición que tiene con los alumnos, y a Han Hiep por invitarme, y motivarme, a estudiar temas tan interesantes. Agradezco también al profesor Aris Daniilidis, por su característica amabilidad con los alumnos del departamento, y también por aceptar ser parte de la comisión de esta memoria.

Por último quisiera agradecer a mis amigos de la vida. Ustedes son parte de mi familia, doy gracias al universo por crecer junto a ustedes. También, agradecer profundamente a Paula, mi compañera de viaje, gracias por tanto. Esta etapa hubiese sido muchísimo más difícil sin ti a mi lado.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Puntos fijos de operadores no expansivos	3
1.1.1. Definiciones y resultados básicos	3
1.1.2. Operadores no expansivos y aproximación a puntos fijos	7
1.1.3. Iteración de Krasnoselskii-Mann y regularidad asintótica	8
1.1.4. Operadores demicerrados y propiedad de Opial	12
2. Tasa de regularidad asintótica en la iteración de Krasnoselskii-Mann	18
2.1. Resultados auxiliares de probabilidades	19
2.1.1. Definiciones básicas	19
2.1.2. Una función de un paseo aleatorio	20
2.2. Iteración de Krasnoselskii-Mann	23
2.2.1. Identidad simétrica y cota recursiva	23
2.2.2. Un proceso estocástico relacionado y regularidad asintótica	25
3. Iteración de Krasnoselskii-Mann con errores	28
3.1. Cota recursiva para la iteración con errores	29
3.2. Un proceso estocástico relacionado y regularidad asintótica	31
3.3. Tasa de regularidad asintótica	36
3.4. Proyección métrica y la iteración sobre un convexo	38
3.5. Aplicaciones del resultado principal	42
3.5.1. Iteración de Ishikawa	42
3.5.2. Aproximación uniforme por operadores no expansivos	44
3.5.3. Caso continuo: La ecuación $u'(t) + (I - T)u(t) = f(t)$	46
Conclusión	49
Bibliografía	51

Introducción

La teoría de puntos fijos, en el contexto de espacios métricos o normados, tiene una larga historia desde comienzos del siglo pasado. Los primeros resultados importantes son atribuidos a S. Banach con el famoso *principio de contracción de Banach* (cf. [18, 3]). El resultado de Banach, también conocido como teorema de Banach-Picard, establece que todo operador $T : X \rightarrow X$ contractante definido en un espacio de Banach posee un único punto fijo. Además de ser interesante por mérito propio el resultado de Banach, su demostración también entrega información valiosa acerca del punto fijo de T . En la demostración del teorema se prueba que para cualquier $x_0 \in C$ la órbita $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$, llamada iteración de Picard, converge a un punto fijo. Además, la convergencia es uniforme y la tasa de convergencia es de orden $\|T^n x_0 - T^{n+1} x_0\| = O(\alpha^n)$, donde $\alpha \in (0, 1)$ es la constante de Lipchitz de T .

A pesar de la importancia del principio de contracción de Banach, debido a sus aplicaciones en vastas áreas de las matemática y ciencias, el argumento de su demostración no funciona cuando el operador T , en lugar de ser contractante, es simplemente *no expansivo*. Un operador $T : X \rightarrow X$ se dirá **no expansivo** si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ se verifica que $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$. Hay ejemplos simples de operadores no expansivos en los cuales la órbita $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge para casi ningún punto inicial $x_0 \in X$, por ejemplo una rotación en 90 grados definida en la bola cerrada de radio 1 en \mathbb{R}^2 .

El problema de la existencia de puntos fijos para operadores no expansivos $T : C \rightarrow C$ con C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado, puede resolverse utilizando el teorema de Banach. Sin embargo, una demostración constructiva de este teorema tardó varios años en llegar. No fue hasta 1955 cuando Krasnoselskii [23] consideró la órbita del operador $T_{1/2} = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}I$. Suponiendo que $C \subseteq X$ es compacto y X es uniformemente convexo, Krasnoselskii probó que la iteración de Picard de $T_{1/2}$ converge a un punto fijo de T . En 1957 Schaefer [30] extendió el resultado de Krasnoselskii a $T_\alpha = \alpha T + (1 - \alpha)I$ para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ y X uniformemente convexo. Muchos autores han extendido los resultados de Krasnoselskii y Schaefer, destacando los trabajos de Browder [7] y Browder y Petryshyn [8]. Browder y Petryshyn separaron la noción de convergencia de la órbita $(T_\alpha^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ del hecho que $\|T_\alpha^n x - T_\alpha^{n+1} x\| \rightarrow 0$, propiedad que acuñaron como **regularidad asintótica** para el operador T_α .

En 1972 Groetsch [19] consideró la iteración de Mann generalizada, hoy conocida como iteración de Krasnoselskii-Mann, definida por

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \tag{1}$$

donde $\alpha_n \in (0, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En [19], suponiendo que $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$, demostró

la regularidad asintótica de la iteración de Krasnoselskii-Mann cuando X es uniformemente convexo. En 1976 Ishikawa [21] probó la regularidad asintótica de (1) en un espacio de Banach general suponiendo que $\sum \alpha_k$ diverge y $0 \leq \alpha_k \leq \alpha < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Muchos trabajos extendieron el trabajo de Ishikawa a contextos más generales, pero no fue hasta el año 2013 cuando Cominetti, Soto y Vaisman [11] obtuvieron la misma condición que Groetsch para establecer la regularidad asintótica en un espacio de Banach general. De hecho, Cominetti, Soto y Vaisman deducen la regularidad asintótica en un espacio de Banach general de la estimación

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \frac{\text{diam}(C)}{\sqrt{\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}}. \quad (2)$$

La cota (2), probada en [11], fue conjeturada por Baillon y Bruck [1, 2] en la década de 1990. En esta memoria se estudiará una variante de la iteración clásica de Krasnoselskii-Mann al introducir errores en el operador T . Específicamente, se estudiará la iteración

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_{n+1})x_n + \alpha_{n+1}(Tx_n + e_{n+1}) \quad (3)$$

donde $x_0 \in C$ es un punto arbitrario y $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de errores que converge a 0. Esta iteración fue introducida por primera vez por Liu [25] al estudiar las soluciones aproximadas de una ecuación no lineal. En [10] se prueba la convergencia débil de (3) en un espacio de Hilbert, suponiendo que $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ y $\sum \alpha_k \|e_k\| < \infty$. En relación a la tasa de convergencia de (3), esta ha sido estudiada en [24] estableciendo que $\|x_n - Tx_n\| = O(1/\sqrt{n})$ en un espacio de Hilbert, suponiendo que $\sum (k+1)\|e_k\| < \infty$ y $0 < \liminf \alpha_k \leq \limsup \alpha_k < 1$. En este trabajo se probará una generalización de ambos resultados probando los siguientes teoremas.

Teorema 0.1 *Sea x_k la iteración definida por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tx_{k-1} + e_k)$ con $x_0 \in C$, con $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo definido sobre un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach. Además, se supondrá que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfacen que $Tx_k + e_{k+1} \in C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que la iteración esté bien definida. Si $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$, $\sum \alpha_k \|e_k\| < \infty$ y e_n converge a 0, entonces se tiene que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.*

Teorema 0.2 *Sea x_k la iteración definida por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tx_{k-1} + e_k)$ con $x_0 \in C$ y $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de errores que converge a 0. Si $0 < \liminf \alpha_k \leq \limsup \alpha_k < 1$, entonces se tiene que*

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}} \sum_{k \geq 1} \alpha_k \|e_k\| + C_2 \sum_{i \geq n/2} \alpha_i \|e_i\| + 2\|e_{n+1}\|$$

donde $C_1 = \frac{1+2^{3/2}}{\sqrt{\pi\tau}}$, $C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}}$ y $\tau = \inf \alpha_k(1 - \alpha_k) > 0$. Además, suponiendo que $\sum \alpha_k \|e_k\| < \infty$ se concluye que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.

La presente memoria se organiza como sigue. El Capítulo 1 corresponde a los resultados preliminares que se necesitan para entender este trabajo, así como un resumen de los resultados que se tienen hasta la fecha. En el Capítulo 2 se mostrará el teorema probado en [11] que introduce la técnica utilizada para probar los resultados principales de este trabajo. Por último, en el Capítulo 3 se establecen los resultados principales de esta memoria y también una serie de consecuencias obtenidos a partir de los teoremas 0.1 y 0.2.

Capítulo 1

Preliminares

Este trabajo se encuentra dentro del contexto de la teoría métrica de puntos fijos de operadores definidos sobre espacios normados o métricos. Este capítulo busca establecer definiciones y resultados básicos para poder entender este trabajo de la mejor manera posible. En general, los resultados aquí expuestos se presentarán sin demostración puesto que son resultados clásicos de la literatura.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la primera sección se entregan las nociones clásicas de la teoría de espacios de Banach, con énfasis en la definición de la proyección métrica sobre un conjunto convexo y cerrado. La segunda parte corresponde al estudio de los operadores no expansivos definidos sobre un espacio de Banach. Se establecen las definiciones básicas y algunos de los resultados importantes a la fecha en esta área.

1.1. Puntos fijos de operadores no expansivos

1.1.1. Definiciones y resultados básicos

Para fijar notación, las letras \mathbb{R} , \mathbb{Z} y \mathbb{N} denotarán al conjunto de números reales, los números enteros y al conjunto de números enteros no negativos respectivamente. Si f, g son dos funciones definidas sobre los naturales y a valores reales, diremos que $f = O(g)$ si existe una constante positiva $C > 0$ tal que $f(n) \leq Cg(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, diremos que $f = o(g)$ si el cociente $f(n)/g(n)$ converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

A menos que se diga lo contrario, X será un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , con una estructura topológica definida a partir de una norma $\|\cdot\|$. Se entenderá por funcional a una función a valores escalares $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ y por un operador a una función $T : X \rightarrow Y$ entre dos espacios normados X e Y . En esta terminología, el espacio dual de X será el espacio de los funcionales lineales continuos definidos sobre X , que se denotará por X^* . De manera análoga, el espacio bidual de X se define como el espacio dual de X^* , es decir, el espacio de los funcionales lineales continuos definidos sobre X^* . El espacio bidual de X se denotará simplemente por

X^{**} . En el espacio dual X^* es posible definir una norma a partir de la siguiente igualdad

$$\|\ell\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}$$

para $\ell \in X^*$. Esta norma dota al espacio dual de la estructura de espacio de Banach pues \mathbb{R} es completo. En general, si $\ell \in X^*$ es un funcional lineal, entonces se utilizará la notación de producto dualidad $\langle \ell, x \rangle$ en lugar de $\ell(x)$. Por otro lado, la acción de un operador T en $x \in X$ se denotará por Tx en vez de $T(x)$. La topología inducida en X por su norma se llamará topología fuerte, mientras que la topología débil sobre X será la topología más débil que hace continua a cada funcional $\ell \in X^*$. De este modo, una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ convergerá en la topología débil a x , que se denotará por $x_\alpha \rightharpoonup x$, si $\langle \ell, x_\alpha \rangle \rightarrow \langle \ell, x \rangle$ para todo $\ell \in X^*$.

La evaluación de un funcional $\ell \in X^*$ en $x \in X$ define naturalmente una función lineal en su dual. En efecto, el funcional evaluación $J_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definido a partir de la igualdad $\langle J_x, \ell \rangle = \langle \ell, x \rangle$ para todo $\ell \in X^*$ permite identificar a x con un elemento del bidual. El operador $J : X \rightarrow X^{**}$, que asocia $x \mapsto J_x \in X^{**}$, se conoce como *inyección canónica* e identifica a X con un subconjunto de su bidual. Una consecuencia del teorema de Hahn-Banach (cf. [27, 9]) establece que $J : X \rightarrow X^{**}$ es de hecho una isometría, por lo tanto $J(X)$ es un subespacio cerrado de X^{**} cuando X es un espacio de Banach. Un espacio se dirá *reflexivo* si $J(X) = X^{**}$. La razón por la cual se estudia la teoría de operadores no expansivos en un espacio de Banach, y no en un espacio normado general, es simplemente porque es posible extender todo operador no expansivo $T : C \rightarrow C$ a la completación de X . En efecto, sea X un espacio normado no completo y T un operador no expansivo definido en C , un conjunto convexo y cerrado. X tiene una copia isométrica en $\overline{J(X)}$, que es un espacio de Banach, y $\hat{T} : J(C) \rightarrow J(C)$ definido por $\hat{T} = T \circ J^{-1}$ es también no expansivo pues J es una isometría.

Sea $C \subseteq X$ un subconjunto no vacío. El diámetro de C se define como la mayor distancia que pueden tener dos miembros de C , es decir, mediante la fórmula $\text{diam}(C) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in C\}$. Es fácil convencerse de que un conjunto $C \subseteq X$ será acotado si y sólo si su diámetro es finito, por lo tanto el diámetro caracteriza a los subconjuntos acotados en un espacio normado. Un resultado clásico del análisis indica que todo conjunto compacto $K \subseteq X$ es también cerrado y acotado. Si bien el resultado inverso no es cierto en general, esta propiedad caracteriza a los espacios reflexivos.

Teorema 1.1 ([27] Cap. 2) *Un espacio es reflexivo si y sólo si todo conjunto convexo, cerrado y acotado es compacto para la topología débil.*

Aunque la topología definida a partir de los funcionales lineales no es metrizable a priori, debido al teorema de Eberlein-Smulian, la compacidad débil es equivalente a la compacidad por sucesiones. Dicho esto, es posible caracterizar los espacios reflexivos mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.2 ([27] Cap. 2) *Un espacio es reflexivo si y sólo si toda sucesión acotada tiene una subsucesión que converge débil.*

Muchos de los resultados de las próximas secciones se establecen a través de propiedades métricas especiales de la norma definida en X y definen muchos aspectos geométricos y topológicos del espacio, por ejemplo la convexidad estricta y convexidad uniforme de la norma.

Definición 1.3 *Un espacio normado X se dirá estrictamente convexo si para todo $x_1, x_2 \in S_X$ con $x_1 \neq x_2$ y $\alpha \in (0, 1)$, se tiene que $\|\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\| < 1$. Donde S_X es la esfera unitaria en X .*

La noción de convexidad estricta es una propiedad geométrica de la norma, establece que el segmento $\{tx_1 + (1 - t)x_2 : t \in (0, 1)\}$ está completamente contenido dentro del interior de la bola unitaria. Además, la noción de convexidad estricta permite caracterizar la colinealidad a través de la norma, del mismo modo que sucede en un espacio de Hilbert.

Proposición 1.4 ([27] Cap. 5) *Sea X un espacio normado. Entonces son equivalentes:*

1. X es estrictamente convexo.
2. Para todo par $x_1, x_2 \in S_X$ se verifica que $\|\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\| < 1$.
3. Para todo par $x_1, x_2 \in X$ tales que $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 = tx_2$.

La convexidad estricta tiene particular relevancia en el estudio de la proyección métrica sobre un conjunto convexo y cerrado. Sean $x \in X$ y $A \subseteq X$ un conjunto no vacío, la distancia de x a A se define a través de la fórmula $d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$. Un conjunto $A \subseteq X$ se dirá *proximal* si, para todo $x \in X$, existe al menos un elemento $y \in A$ tal que $\|x - y\| = d(x, A)$. Por otro lado, A se dice que es un conjunto de *Chebyshev* si, para todo $x \in X$, existe un único $y \in A$ tal que $\|x - y\| = d(x, A)$. De esta forma, para todo conjunto de Chebyshev será posible definir su proyección métrica.

La proyección métrica es una función $P_A : X \rightarrow A$, que a cada $x \in X$ le asocia el único elemento $P_A(x) \in A$ tal que $\|x - P_A(x)\| = d(x, A)$. En un espacio de Hilbert, siempre es posible definir la proyección métrica sobre los conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados. Sin embargo, nos interesará saber en qué espacios normados, más generales que los espacios de Hilbert, sigue siendo cierta esta propiedad. El siguiente teorema hace evidente que para poder definir la proyección métrica, sobre conjuntos convexos y cerrados, se necesita al menos la noción de convexidad estricta del espacio.

Teorema 1.5 ([27] Cap. 5) *Sea X un espacio normado. Entonces son equivalentes:*

1. X es estrictamente convexo.
2. Para todo $x \in X$ y $C \subseteq X$ subconjunto no vacío, convexo y cerrado, existe a lo más un punto $y \in C$ tal que $d(x, C) = \|y - x\|$.

El teorema anterior establece que la proyección, en caso de existir, está bien definida como función. Por otro lado, el siguiente teorema asegura que los espacios reflexivos están caracterizados mediante los conjuntos proximales.

Teorema 1.6 ([4]) *Sea X un espacio normado. Entonces son equivalentes:*

1. X es reflexivo.
2. Todo conjunto no vacío $C \subseteq X$, convexo y cerrado, es proximal.

Combinando los últimos dos resultados, es posible caracterizar aquellos espacios donde todo subconjunto $\emptyset \neq C \subseteq X$ convexo y cerrado es un conjunto de Chebyshev. O lo que es equivalente, caracterizar aquellos espacios donde es posible definir la proyección métrica como función univaluada para cualquier subconjunto no vacío, convexo y cerrado.

Corolario 1.7 ([27] Cap. 5) *Sea X un espacio normado. Entonces son equivalentes:*

1. X es estrictamente convexo y reflexivo.
2. Todo subconjunto no vacío, convexo y cerrado, es un conjunto de Chebyshev.
3. Para todo conjunto $\emptyset \neq C \subseteq X$ convexo y cerrado es posible definir la proyección métrica $P_C : X \rightarrow C$.

Otro concepto importante en la teoría de espacios de Banach es la noción de convexidad uniforme. La convexidad uniforme es una propiedad geométrica fuerte que establece que las combinaciones convexas de elementos de norma 1 se mantienen suficientemente alejadas de la frontera de la bola unitaria.

Definición 1.8 *Un espacio normado X será uniformemente convexo si para todo $\varepsilon > 0$ y $x_1, x_2 \in S_X$ tales que $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo que $\|\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\| \leq 1 - \delta$. El módulo de convexidad de X es una función $\delta_X : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ definida a través de la fórmula*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \|\frac{1}{2}(x + y)\| : x, y \in S_X, \|x - y\| \geq \varepsilon\}.$$

Obviamente un espacio uniformemente convexo también será estrictamente convexo, sin embargo la recíproca no es cierta en general. Hay ejemplos de espacios estrictamente convexas donde existen sucesiones de puntos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_X$, con $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, tales que $\|\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n\| \rightarrow 1$. Una propiedad importante de los espacios uniformemente convexas es que son reflexivos, este resultado es conocido como el teorema de Milman-Pettis.

Teorema 1.9 (Milman-Pettis [27] Cap.5) *Sea X un espacio normado. Si X es uniformemente convexo, entonces es estrictamente convexo y reflexivo.*

Corolario 1.10 *Si X es un espacio uniformemente convexo, entonces para todo subconjunto $C \subseteq X$ no vacío, convexo y cerrado, es posible definir la proyección métrica $P_C : X \rightarrow C$.*

Lamentablemente, este último resultado no es suficiente para caracterizar a los espacios normados donde todo conjunto convexo y cerrado es un conjunto de Chebyshev. En efecto, en [12] se demuestra la existencia de espacios estrictamente convexas, separables y reflexivos que no son uniformemente convexas.

La importancia de la proyección métrica en este trabajo radica en poder definir de manera correcta la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores sobre un conjunto convexo y cerrado. Agregar un término de error en la iteración podría hacer que un término de la sucesión salga del conjunto C , por lo que se hace necesario el uso de una proyección para poder definir bien la iteración.

1.1.2. Operadores no expansivos y aproximación a puntos fijos

Sea X un espacio de Banach y $C \subseteq X$ un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado. Un resultado clásico de la teoría métrica de puntos fijos es el teorema de Banach-Picard, que establece la existencia de puntos fijos para la clase de operadores contractantes. Un operador $T : C \rightarrow C$ se dice α -Lipchitz si existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\|$ para todo $x, y \in C$. Además, el operador T se dirá *contractante* si es α -Lipchitz con $\alpha \in (0, 1)$.

Teorema 1.11 ([3, 18]) *Sea (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \rightarrow M$ un operador contractante con constante de Lipchitz $\alpha \in (0, 1)$, entonces T tiene un único punto fijo. Además, para todo $x \in M$ su órbita $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x^* , el único punto fijo de T , y también se tiene que $\|T^n x - x^*\| \leq \alpha^n \|x - x^*\|$ y $\|T^n x - T^{n+1} x\| \leq \alpha^n \|x - Tx\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

El resultado de Banach-Picard es un resultado muy importante en la teoría de espacios de Banach. Además de asegurar la existencia de un punto fijo, también establece que el único punto fijo atrae la órbita de cualquier punto $x \in C$. Sin embargo, la órbita de T no siempre converge a un punto fijo cuando la constante de Lipchitz es $\alpha = 1$. El ejemplo usual es considerar $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ y $T : C \rightarrow C$ la rotación en 90 grados. El conjunto C es claramente no vacío, convexo, cerrado y acotado. T es una isometría, pero la órbita de cualquier punto $(x, y) \neq (0, 0)$ tiene periodo 4 y por lo tanto no converge.

Si bien el ejemplo anterior demuestra que la órbita de una isometría no tiene asegurada su convergencia, hay ejemplos más sofisticados de isometrías que ni siquiera poseen puntos fijos. Considere el espacio c_0 de las sucesiones reales $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\lim x_n = 0$, dotado de la norma $\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Sea $B = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0 : 0 \leq x_n \leq 1\}$ y defina el shift a la derecha $\sigma : B \rightarrow B$ mediante

$$\sigma_1((x_n)) = (1, x_1, x_2, \dots).$$

Es fácil notar que σ es una isometría y que $\sigma(B) \subseteq B$. El único punto fijo posible para σ es $\bar{x} = (1, 1, 1, \dots)$, pero $\bar{x} \notin c_0$ y así σ no posee puntos fijos.

Este trabajo estará centrado en la teoría de puntos fijos para una clase particular de operadores, que incluye a las isometrías y las funciones contractantes, los operadores no expansivos.

Definición 1.12 *Un operador se dirá no expansivo si es 1-Lipchitz, es decir, si para todo $x, y \in C$*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|. \tag{1.1}$$

Algunas preguntas clásicas en la *teoría métrica de puntos fijos* son las siguientes:

- ¿Cuándo un operador $T : C \rightarrow C$ no expansivo posee puntos fijos ?
- ¿Existen sucesiones de aproximación a puntos fijos de T ?
- ¿Cuál es la estructura del conjunto de puntos fijos $\text{Fix}(T)$?

Las preguntas que se abarcarán en este trabajo son las dos primeras, pero con énfasis en la segunda. Si bien los primeros resultados de existencia de puntos fijos fueron de carácter más bien abstractos, los resultados posteriores se establecen en general utilizando una sucesión de aproximación junto con alguna condición de compacidad en el espacio base. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será una *sucesión de aproximación de puntos fijos* de T si $\lim \|x_n - Tx_n\| = 0$. El siguiente resultado establece la existencia de dichas sucesiones a partir del teorema de Banach-Picard.

Teorema 1.13 *Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo definido sobre C convexo, cerrado y acotado. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $\lim \|x_n - Tx_n\| = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon \in (0, 1)$ y $x_0 \in C$, entonces el operador $T^\varepsilon = \varepsilon x_0 + (1 - \varepsilon)T$ es contractante con constante de Lipchitz $(1 - \varepsilon) < 1$. La convexidad de C implica que $T^\varepsilon(C) \subseteq C$, y así se tienen las condiciones para utilizar el teorema de Banach-Picard. Del teorema de Banach-Picard existe un único $x_\varepsilon \in C$ que es punto fijo para T^ε , entonces

$$\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \|T^\varepsilon x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \varepsilon \|x_0 - Tx_\varepsilon\| \leq \varepsilon \text{diam}(C).$$

Si escogemos $\varepsilon_n \rightarrow 0$, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida como $x_n = x_{\varepsilon_n}$ cumplirá que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$, probando lo pedido. \square

Si bien la demostración del teorema anterior sólo funciona cuando el diámetro del conjunto C es finito, o equivalentemente cuando C es un conjunto acotado, el siguiente teorema establece que de cierta forma es necesario que esto ocurra, o al menos por parte de las órbitas.

Teorema 1.14 ([18]) *Sea C un subconjunto no vacío, convexo y cerrado, de un espacio de Banach X y $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo. Entonces son equivalentes:*

1. T tiene al menos una órbita acotada.
2. Todas las órbitas de T son acotadas.
3. C contiene un subconjunto $K \neq \emptyset$ convexo y cerrado T -invariante (i.e. $T(K) = K$).
4. C contiene al menos una sucesión acotada de aproximación a puntos fijos.

1.1.3. Iteración de Krasnoselskii-Mann y regularidad asintótica

Aún cuando la existencia de puntos fijos aproximados está asegurada por los teoremas 1.13 y 1.14, no es claro qué tipo de sucesiones son las que sirven para esto. En la sección anterior se mostró que la órbita no siempre funciona para estos efectos. En lugar de ello, se introducirá una de las herramientas clásicas de la teoría métrica de puntos fijos, la iteración de Krasnoselskii-Mann.

Definición 1.15 Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo, definido sobre C un conjunto convexo, cerrado y acotado. La iteración de Krasnoselskii-Mann, para encontrar puntos fijos de T , se define a partir del siguiente esquema iterativo:

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k T x_{k-1} \quad (1.2)$$

donde x_0 es un punto arbitrario de C y $\alpha_k \in (0, 1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se debe notar que como C es un conjunto convexo, la iteración (1.2) está bien definida para cualquier sucesión de coeficientes $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$. A lo largo de este capítulo, siempre que se hable de T se referirá a un operador definido sobre un subconjunto $C \subseteq X$ no vacío, convexo, cerrado y acotado.

En el caso $\alpha_k = \alpha$ constante, la iteración de Krasnoselskii-Mann tiene relación con la órbita de un operador promediado definido a partir de T . Se define el *operador promediado* $T_\alpha : C \rightarrow C$ mediante la igualdad

$$T_\alpha = (1 - \alpha)I + \alpha T$$

donde I es el operador identidad en X y $\alpha \in [0, 1]$. En el caso $\alpha_k = \alpha$ constante, el n -ésimo término de la iteración (1.2) corresponde simplemente a $T_\alpha^n x_0$, es decir, la iteración de Krasnoselskii-Mann está definida como la órbita del operador ponderado T_α . Resulta ser que T_α es también no expansivo, aunque no necesariamente contractante, y además $\text{Fix}(T) = \text{Fix}(T_\alpha)$. Este hecho fue notado por primera vez por Krasnoselskii [23], y fue la razón por la cual se comenzó a estudiar la iteración (1.2).

Lo que nos interesará estudiar de esta sucesión es el comportamiento asintótico de las diferencias $\|x_n - x_{n+1}\| = \alpha_{n+1}\|x_n - T x_n\|$, de modo que para probar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de aproximación basta demostrar que $\|x_n - x_{n+1}\| \alpha_{n+1}^{-1} \rightarrow 0$. Diremos que un operador T tiene la propiedad de *regularidad asintótica* si $\|T^{m+1}x - T^m x\| \rightarrow 0$ para todo $x \in C$. Esta propiedad fue considerada por primera vez por Browder y Petryshyn [8] al estudiar la convergencia de (1.2) para el caso constante. Sin embargo, para la iteración general la regularidad asintótica de T no entrega mucha información, por ejemplo cuando $\alpha_k \rightarrow 0$. De esta forma, es mejor definir la regularidad asintótica para la iteración de Krasnoselskii-Mann de la siguiente forma.

Definición 1.16 Diremos que la iteración (1.2) tiene la propiedad de regularidad asintótica si $\|x_{n+1} - x_n\| \alpha_{n+1}^{-1} \rightarrow 0$.

Como la iteración de Krasnoselskii-Mann corresponde a la órbita de un operador ponderado, cuando $\alpha_k = \alpha$ constante, ambas definiciones coinciden en este caso. La siguiente proposición muestra que, si bien no se sabe en general si la iteración (1.2) verifica la propiedad de regularidad asintótica, la sucesión $\|x_n - T x_n\|$ es decreciente y por lo tanto siempre existe su límite.

Proposición 1.17 Sea x_n el n -ésimo término de la iteración de Krasnoselskii-Mann, entonces $\|x_{n+1} - T x_{n+1}\| \leq \|x_n - T x_n\|$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es directa de la definición en (1.2). En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - Tx_{n+1}\| &= \|(1 - \alpha_{n+1})x_n + \alpha_{n+1}Tx_n - Tx_{n+1}\| \\
&\leq (1 - \alpha_{n+1})\|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tx_{n+1}\| \\
&\leq (1 - \alpha_{n+1})\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - x_{n+1}\| \\
&\leq (1 - \alpha_{n+1})\|x_n - Tx_n\| + \alpha_{n+1}\|x_n - Tx_n\| = \|x_n - Tx_n\|. \quad \square
\end{aligned}$$

En el artículo fundamental de esta teoría, Krasnoselskii probó que la iteración (1.2) converge fuerte a un punto fijo cuando $\alpha_k = \frac{1}{2}$ es constante y T es un operador compacto en un espacio uniformemente convexo. Dos años más tarde Schaefer [30] extiende el resultado para $\alpha_k = \alpha \in (0, 1)$ bajo las mismas hipótesis. Dicho esto, lo que Krasnoselskii y Shaefer probaron puede resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 1.18 ([23, 30]) *Sea C un conjunto convexo, cerrado y acotado, en un espacio de Banach uniformemente convexo y $T : C \rightarrow C$ un operador compacto no expansivo. Entonces la iteración de Krasnoselskii-Mann, para $\alpha_k = \alpha \in (0, 1)$, converge fuerte a un punto fijo de T .*

Este teorema motivó una serie de resultados que aparecieron en los años posteriores al trabajo de Krasnoselskii. En el estudio de la regularidad asintótica del operador T_α , y de la convergencia de la iteración (1.2), se destacan principalmente los artículos de Browder [7], Browder y Petryshyn [8] y de Edelstein [13]. En ellos se extienden los resultados de Krasnoselskii y Schaefer a espacios estrictamente convexos, suponiendo que T es no expansivo y C es compacto. Con respecto a la iteración general, Groetsch prueba en [19] que la iteración (1.2) converge débil a un punto fijo de T en espacios uniformemente convexos, cuando $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$. En 1976, Ishikawa [21] logra probar un hecho sorprendente para la época, extendiendo todos los resultados anteriores a un espacio de Banach general. Ishikawa probó, suponiendo que $\sum \alpha_k = \infty$ y $\sup \alpha_k < 1$, que la iteración general de Krasnoselskii-Mann tiene regularidad asintótica en un espacio de Banach.

Teorema 1.19 (Teorema de Ishikawa [21]) *Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo definido sobre $C \subseteq X$, un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado. Suponga que $0 \leq \alpha_k \leq \alpha < 1$ y que $\sum \alpha_k = \infty$, entonces $\|x_n - Tx_n\|$ converge a 0.*

Dos años más tarde, pero utilizando métodos completamente distintos, Edelstein y O'Brien [14] prueban un resultado similar al de Ishikawa. Notaron que T_α tiene regularidad asintótica en un espacio de Banach general, pero que además ésta era uniforme en el punto inicial x_0 . Utilizando las ideas de Ishikawa, Edelstein y O'Brien, Goebel y Kirk [17] prueban un resultado aún más general. Demostraron que la convergencia de (1.2) era además uniforme para cualquier operador no expansivo $T : C \rightarrow C$. Estos resultados, para el caso constante, pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 1.20 ([18] Cap. 9) *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Denotemos por $\mathcal{F}(C)$ a la colección de operadores no expansivos $T : C \rightarrow C$ y sea $\alpha \in (0, 1)$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 = n_0(\varepsilon, C)$ suficientemente grande, entonces para todo $x \in C$ y $T \in \mathcal{F}(C)$, si $n \geq n_0$ se tiene que $\|T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x\| \leq \varepsilon$.*

En el caso de la iteración general, el teorema anterior sigue siendo válido bajo las mismas hipótesis del teorema de Ishikawa.

Teorema 1.21 ([17]) *Sea C un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach X . Considere $b < 1$ y $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq [0, b]$ una sucesión que verifica $\sum \alpha_k = \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 = n_0(\varepsilon, C)$ tal que para todo operador $T \in \mathcal{F}(C)$ y $x_0 \in C$, si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es la sucesión definida a partir de (1.2) con punto inicial $x_0 \in C$, entonces $\|x_n - Tx_n\| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.*

Aunque el estudio de la iteración de Krasnoselskii-Mann, en términos de su convergencia fuerte y débil, tuvo un gran auge durante décadas, no hubo muchos resultados con respecto a la velocidad de convergencia de $\|x_n - x_{n+1}\|$. El primer resultado en esta línea se encuentra en el trabajo de Browder y Petryshyn, que fue mencionado por primera vez por Baillon y Bruck en [2], donde probaron que $\sum \|T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x\|^2 < \infty$ en un espacio de Hilbert. Como $T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x = \alpha(Tx_n - x_n)$, la Proposición 1.16 establece que $\|T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x\|$ es decreciente en n . Luego, se puede deducir una versión cuantitativa de la regularidad asintótica para la iteración de Krasnoselskii-Mann en un espacio de Hilbert.

Teorema 1.22 ([2]) *Si H es un espacio de Hilbert y $T : C \rightarrow C$ es un operador no expansivo, donde C es un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado. Entonces, si $\alpha \in (0, 1)$ y $x \in C$ se tiene que $\|T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x\| = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.*

En el caso de un espacio de Banach general, el primer resultado conocido es atribuido a Bruck, el que fue presentado en una conferencia en 1992 pero nunca publicado. Bruck probó que para el caso $\alpha_k = \alpha \in (0, 1)$ constante, el orden de convergencia era $\|T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x\| = O(1/\log n)$. Unos años más tarde, Baillon y Bruck [2] mejoran esta cota probando que $\|T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x\| = O(1/\sqrt{n})$ en un espacio de Banach general, así obteniendo una versión cuantitativa del teorema de Ishikawa-Edelstein-O'Brien. Este resultado fue muy impresionante, en particular pues el método utilizado sólo ocupaba la desigualdad triangular y la no expansividad del operador para establecer una recurrencia sobre las cantidades $\|x_n - x_m\|$ para $0 \leq m \leq n$. Además, encontraron evidencia numérica para establecer una conjetura para el caso general.

Conjetura 1.23 (Baillon-Bruck [2]) *Sea x_k es el k -ésimo punto en la iteración de Krasnoselskii-Mann. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \frac{c}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}}.$$

En el trabajo de Baillon y Bruck [2] se prueba esta conjetura para el caso constante con $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, sin embargo, la demostración de este caso especial estaba, de cierta forma, incompleta. La demostración de la conjetura para caso constante se establece a partir de una recurrencia para los términos $\|x_n - x_m\|$, sin embargo, no lograron resolverla con métodos clásicos, necesitando un programa computacional para generar una recurrencia equivalente que si pudieron resolver. En 2013, Cominetti, Soto y Vaisman [11] logran probar la conjetura para el caso general utilizando el apronte original de Baillon y Bruck [1, 2], pero relacionando las cantidades $\|x_n - x_m\|$, para $0 \leq m \leq n$, con un proceso estocástico definido sobre \mathbb{Z}^2 . La

demostración será detallada en el Capítulo 2 pues utilizaremos una técnica bastante similar para estudiar la iteración con errores. El teorema de Cominetti, Soto y Vaisman se resume de la siguiente forma.

Teorema 1.24 (Cominetti-Soto-Vaisman [11]) *Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo con C un conjunto convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach. Si x_k es el k -ésimo término en la iteración de Krasnoselskii-Mann, entonces se cumple que*

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \frac{\text{diam}(C)}{\sqrt{\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}}.$$

En particular, si $\alpha_k = \alpha \in (0, 1)$ es constante, entonces

$$\|T_\alpha^{n+1}x_0 - T_\alpha^n x_0\| = \alpha \|x_n - Tx_n\| \leq \frac{\alpha \text{diam}(C)}{\sqrt{\pi \alpha(1 - \alpha)n}}.$$

De esta forma, asumiendo que $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ y que C es acotado, del Teorema 1.24 se deduce la regularidad asintótica de la iteración (1.2), obteniendo a su vez la misma condición que Groetsch [19] pero en un espacio de Banach general. Así, se generalizan todos los resultados anteriores obtenidos sobre la convergencia de la iteración de Krasnoselskii-Mann al agregar las hipótesis correspondientes.

Recientemente, Bravo y Cominetti [5] probaron que la constante $1/\sqrt{\pi}$ es de hecho ajustada. Utilizando un proceso estocástico similar al que utilizan en [11], encontraron una bisucesión $\{d_{mn} : n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq n\}$, definida a partir de un problema de transporte de masas discreto, que cumple que $\|x_n - x_m\| \leq d_{mn}$ para todo $0 \leq m \leq n$. Además, si c_{mn} es la cota encontrada en [11] para $\|x_n - x_m\|$ se tiene que $d_{mn} \leq c_{mn}$. Bravo y Cominetti definieron d_{mn} de modo que fuera la mejor cota posible utilizando las técnicas de [1, 2, 11]. Estas cotas sirven para construir un operador no expansivo $T : [0, 1]^\mathbb{N} \rightarrow [0, 1]^\mathbb{N}$ y x_0 , de modo que la iteración de Krasnoselskii-Mann con punto inicial x_0 verifica que $\|x_n - x_m\| = d_{mn}$. Resulta ser que para todo $\kappa < \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ existe una buena elección de coeficientes $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y un entero $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|x_n - Tx_n\| > \kappa \frac{\text{diam}(C)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}}.$$

1.1.4. Operadores demicerrados y propiedad de Opial

En la sección anterior se presentaron diversos resultados que establecen condiciones bajo las cuales la iteración de Krasnoselskii-Mann verifica la regularidad asintótica. Si bien esta propiedad establece que $\|x_n - Tx_n\|$ converge a 0, la sucesión de iterados $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en general no converge en norma, por lo que será necesaria una condición de compacidad para asegurar la convergencia. Por ejemplo, si T fuese un operador compacto, como en el trabajo original de Krasnoselskii, la regularidad asintótica sería suficiente para obtener un punto fijo de T . Por otro lado, cuando X es un espacio reflexivo obtenemos una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge débil a x^* y además $\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\|$ converge a 0, sin embargo no es claro si $x^* \in \text{Fix}(T)$.

Es importante poder separar las noción de regularidad asintótica de la convergencia de los iterados x_k , como veremos en esta sección no es trivial probar la convergencia débil de x_k a un punto fijo y de hecho necesitaremos hipótesis adicionales en X para poder asegurar la convergencia débil de x_k . Por el lado de la convergencia fuerte, en [16] hay un ejemplo de un operador definido en un subconjunto convexo, cerrado y acotado de $\ell^2(\mathbb{N})$, el espacio de las sucesiones cuadrado sumables, donde la iteración de Krasnoselskii-Mann no converge en norma. De modo que la convergencia fuerte de la iteración de Krasnoselskii-Mann ni siquiera está garantizada en espacios de Hilbert.

En el artículo de Browder [7], estudiando las soluciones de la ecuación $Tx = f$ en un espacio uniformemente convexo, se demuestra una propiedad que permite establecer que los puntos de acumulación, para la topología débil, de la iteración de Krasnoselskii-Mann son puntos fijos.

Definición 1.25 (Operador demicerrado) *Un operador $T : C \rightarrow X$ se dice demicerrado en $y \in X$ si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $x_n \rightarrow x$ y $Tx_n \rightarrow y$, se cumple que $x \in C$ y $Tx = y$.*

Denotemos por $\text{Gr}(T) = \{(x, Tx) \in C \times X : x \in C\}$ al grafo del operador T , notemos que T será demicerrado si y sólo si $\text{Gr}(T)$ es cerrado en $C \times X$, cuando se considera a C con la topología débil, la topología de la norma en X y $C \times X$ con la topología producto usual. Por otro lado, Browder probó que $I - T$ será un operador demicerrado cuando T es un operador no expansivo definido sobre un espacio uniformemente convexo. Para probar este teorema utilizaremos la siguiente proposición, también demostrada por Browder, de donde se deduce la existencia de puntos fijos para operadores no expansivos definidos sobre espacios uniformemente convexos.

Lema 1.26 ([18] Cap. 10) *Sea C un subconjunto no vacío, convexo y acotado, de un espacio uniformemente convexo y sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo. Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de aproximación a puntos fijos en C y considere $z_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n$, entonces $\|z_n - Tz_n\| \rightarrow 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por contradicción que existen dos sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aproximación a puntos fijos donde $z_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n$ no lo es. Es decir, existe $\varepsilon > 0$ y para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe un $n \geq n_0$ con $\|z_n - Tz_n\| \geq \varepsilon > 0$. Como C es acotado también lo son las sucesiones x_n, y_n , luego $(x_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también son acotadas y $\|x_n - z_n\| = \|y_n - z_n\|$. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que existe $r \geq 0$ tal que

$$r = \lim_n \|x_n - z_n\| = \lim_n \|y_n - z_n\|.$$

Pero $0 < \varepsilon \leq \|z_n - Tz_n\| \leq \|z_n - x_n\| + \|Tx_n - Tz_n\| + \|x_n - Tx_n\|$. Tomando n suficientemente grande se tiene que $0 < \varepsilon \leq 2r$. Las desigualdades $\|x_n - z_n\| \leq \|x_n - Tx_n\| + \|x_n - z_n\|$ y

$$\begin{aligned} \|x_n - Tz_n\| &\leq \|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tz_n\| \\ &\leq \|x_n - Tx_n\| + \|x_n - z_n\| \end{aligned}$$

implican que $z_n, Tz_n \in B(x_n, \|x_n - Tx_n\| + \|x_n - z_n\|)$. Ahora, si $t < \varepsilon \text{diam}(C)^{-1}$ entonces para todo n suficientemente grande se tiene que $t < \varepsilon / (\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - z_n\|)$ pues $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow$

0. Luego, de la definición del módulo de convexidad y escalando por $\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - z_n\|$, se deduce que $\|x_n - \frac{1}{2}(z_n + Tz_n)\| \leq (\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - z_n\|)(1 - \delta(t))$. Una desigualdad análoga se obtiene si intercambiamos x_n por y_n . Notemos que

$$\begin{aligned} 2\|z_n - y_n\| = \|x_n - y_n\| &\leq \|x_n - \frac{1}{2}(z_n + Tz_n)\| + \|y_n - \frac{1}{2}(z_n + Tz_n)\| \\ &\leq (\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - z_n\| + \|y_n - Ty_n\| + \|y_n - z_n\|)(1 - \delta(t)), \end{aligned}$$

entonces tomando $n \rightarrow \infty$ se verifica que $2r \leq 2r(1 - \delta(t))$, contradicción. \square

Teorema 1.27 ([18] Cap. 10) *Sea C un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de un espacio uniformemente convexo. Considere $T : C \rightarrow X$ un operador no expansivo tal que $\inf\{\|x - Tx\| : x \in C\} = 0$, entonces T tiene un punto fijo en C .*

DEMOSTRACIÓN. Sea R el conjunto de números $r \geq 0$ tales que $B(0, r) \cap C \neq \emptyset$ e $\inf\{\|x - Tx\| : x \in B(0, r) \cap C\} = 0$, y sea r_0 el ínfimo sobre R . Como C es acotado entonces $r_0 < \infty$, si $r_0 = 0$ entonces $0 \in C$ y $T0 = 0$, por lo que supondremos que $r_0 > 0$. Por definición, podemos escoger una sucesión $x_n \in B(0, r_0 + 1/n) \cap C$ tal que $\|x_n - Tx_n\| \leq \frac{1}{n}$. Si x_n tiene alguna subsucesión que converge fuerte, entonces todo punto de acumulación de x_n será un punto fijo de T . Supongamos entonces que existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \geq \varepsilon$. Sea $y_k = \frac{1}{2}(x_{n_{k+1}} + x_{n_k}) \in B(0, r_0 + 1/n_k) \cap C$ y $t < \frac{\varepsilon}{r_0}$. Como $x_{n_k}, x_{n_{k+1}} \in B(0, r_0 + 1/n_k)$, de la definición de módulo de convexidad se tiene que que

$$\|y_k\| \leq \left(r_0 + \frac{1}{n_k}\right) (1 - \delta(t))$$

y así $\limsup \|y_k\| < r_0$. Del Lema 1.26 se tiene además que $y_k - Ty_k \rightarrow 0$, contradiciendo la minimalidad de r_0 . \square

El siguiente lema muestra que en un espacio estrictamente convexo, el conjunto de puntos fijos de todo operador no expansivo es un conjunto convexo y cerrado.

Lema 1.28 ([18] Cap. 10) *Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo definido sobre C un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado, donde C es un subconjunto de un espacio estrictamente convexo. Entonces $\text{Fix}(T)$ es un conjunto convexo y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero que $\text{Fix}(T)$ es cerrado. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Fix}(T)$ es una sucesión de puntos fijos de T que converge a $x \in C$. Como T es no expansivo, y por lo tanto continuo, se concluye que $Tx = \lim Tx_n = \lim x_n = x$ y por lo tanto $\text{Fix}(T)$ es cerrado. Sean $x, y \in \text{Fix}(T)$, $\lambda \in [0, 1]$ y sea $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, probaremos que $z \in \text{Fix}(T)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|x - Tz\| + \|Tz - y\| &= \|Tx - Tz\| + \|Tz - Ty\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= (1 - \lambda)\|x - y\| + \lambda\|x - y\| \\ &= \|x - y\| \\ &\leq \|x - Tz\| + \|Tz - y\|. \end{aligned}$$

Como X es estrictamente convexo, entonces por la Proposición 1.4 los vectores x, y, Tz son colineales, así existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $Tz = tx + (1 - t)y$. Además, cada desigualdad será de hecho una igualdad, entonces $\|x - y\| = \|x - Tz\| + \|y - Tz\| = (|1 - t| + |t|)\|x - y\|$ y se deduce que $t \in [0, 1]$. También se tiene que $\|x - Tz\| = \|x - z\|$ y $\|Tz - y\| = \|z - y\|$. Luego $(1 - \lambda)\|x - y\| = \|x - Tz\| = (1 - t)\|x - y\|$ y por lo tanto $t = \lambda$. Se concluye que $Tz = z$ y por lo tanto $\text{Fix}(T)$ es convexo. \square

Finalmente, se puede concluir el teorema probado por Browder, que establece que todo operador no expansivo, definido en un espacio uniformemente convexo, será demicerrado en 0. Esto también prueba que $I - T$ será demicerrado en toda la imagen de $I - T$. Pues al considerar el operador $T^w = T - w$, que también es no expansivo, se tendrá que $I - T^w$ es demicerrado en 0 y en consecuencia $I - T$ será demicerrado en w .

Teorema 1.29 (Principio demicerrado [18] Cap. 10) *Sea C un conjunto convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach uniformemente convexo. Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo. Entonces $I - T$ es demicerrado en 0.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en C que converge débil a $x \in C$ y tal que $(I - T)x_n \rightarrow 0$, es decir, x_n es una sucesión de aproximación a puntos fijos. Consideremos $C_n = \overline{\text{co}}(x_n, x_{n+1}, \dots)$ subconjunto convexo y cerrado de C , donde $\overline{\text{co}}(A)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos y cerrados que contienen a A , luego el operador T restringido a C_n posee un punto fijo por el Teorema 1.27. Sea $y_n \in C_n$ tal que $Ty_n = y_n$, como X es reflexivo y C es acotado, existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge débil a y . Luego se tiene que $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \{x\}$ y por lo tanto $y_n \rightarrow x$. Como el conjunto de puntos fijos es convexo y cerrado, también es débil cerrado y por lo tanto $x \in \text{Fix}(T)$, probando lo pedido. \square

Dicho todo esto, se deduce que, en un espacio uniformemente convexo, la iteración de Krasnoselskii-Mann posee subsucesiones que convergen a puntos fijos del operador T . En efecto, de la reflexividad obtendremos una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge débil a $y_0 \in C$ y de la regularidad asintótica se tiene que $\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| \rightarrow 0$. Luego, del principio demicerrado se concluye que $(I - T)y_0 = 0$ y por lo tanto $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $y_0 \in \text{Fix}(T)$. Lo mismo sucede con cualquier subsucesión que converja débil, por lo tanto todo punto de acumulación débil será un punto fijo. No obstante, no es claro si podemos extender la convergencia débil de subsucesiones a la sucesión completa de iterados. Para ello necesitaremos que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de iterados de Krasnoselskii-Mann posea un único punto de acumulación débil.

En [28] Opial probó que la órbita $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ de cualquier punto $x \in C$ converge débil a un punto fijo de T en un espacio de Hilbert. Para ello utilizó el principio demicerrado de Browder para establecer que los puntos de acumulación eran puntos fijos, además, probó una propiedad que le garantizaba que la órbita tendría un único punto de acumulación débil y por consiguiente la sucesión entera convergería débil a un punto fijo.

Definición 1.30 (Propiedad de Opial) *Un espacio de Banach X satisface la propiedad de Opial si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge débil a x_0 , entonces para todo $x \neq x_0$ se tiene que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|. \quad (1.3)$$

Opial probó que la propiedad anterior se verifica en cualquier espacio de Hilbert. En efecto, si $x_n \rightarrow x_0$ y $x \neq x_0$ entonces se verifica que

$$\|x - x_n\|^2 = \|(x - x_0) + (x_0 - x_n)\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - x_n\|^2 + 2\langle x - x_0, x_0 - x_n \rangle.$$

Finalmente, tomando $n \rightarrow \infty$ se concluye la propiedad de Opial en un espacio de Hilbert. Nos gustaría que la propiedad de Opial se verificara en una familia más grande de espacios, como los espacios de Banach uniformemente convexos. Sin embargo, en [28] también se prueba que la propiedad de Opial no se cumple para toda la clase de espacios uniformemente convexos. Opial probó que su propiedad se verifica en cualquier espacio ℓ^p , con $1 < p < \infty$, mediante una caracterización por el mapeo de dualidad. No obstante, también probó que $L^p(\mathbb{R}^N)$ no verifica la propiedad de Opial para $p \neq 2$. De este modo, la propiedad de Opial es independiente de la convexidad uniforme.

Ahora, inspirados en la demostración de Opial [28], probaremos la convergencia débil de la iteración de Krasnoselskii-Mann a un punto fijo de T . Para ello, primero demostraremos un sencillo lema que establece la monotonía de $\|x_n - p\|$ para todo $p \in \text{Fix}(T)$.

Lema 1.31 *Sea x_k el k -ésimo término de la iteración de Krasnoselskii-Mann para el operador $T : C \rightarrow C$ y sea $p \in \text{Fix}(T)$. Entonces $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. De la definición de x_k , y utilizando que $Tp = p$, se tienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_{n+1})x_n + \alpha_{n+1}Tx_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_{n+1})\|x_n - p\| + \alpha_{n+1}\|Tx_n - p\| \\ &\leq \|x_n - p\|. \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 1.32 *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo que satisface la propiedad de Opial y $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de iterados de Krasnoselskii-Mann con punto inicial $x_0 \in C$ y coeficientes satisfaciendo $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$. Entonces x_n converge débil a un punto fijo de T .*

DEMOSTRACIÓN. Debido al Lema 1.31 podemos definir la función $d(y) = \lim_n \|x_n - y\|$ sobre $y \in \text{Fix}(T)$ y consideremos los conjuntos $F_d = \{y \in \text{Fix}(T) : d(y) \leq d\}$ para $d \geq 0$. Resulta ser que los conjuntos F_d son convexos, cerrados y acotados, y para d lo suficientemente grande se tiene además que $F_d \neq \emptyset$. Como X es uniformemente convexo, entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ es convexo, cerrado y acotado, por lo tanto también débil compacto. Luego existe un $\varepsilon > 0$ minimal tal que $F_\varepsilon \neq \emptyset$ y además consta sólo de un punto. Si $y, y' \in F_\varepsilon$ son dos puntos distintos se tiene que $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y' \in F_\varepsilon$, y por la convexidad uniforme existe $\delta = \delta(C) > 0$ tal que

$$d\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y'\right) = \lim_n \left\|x_n - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y'\right\| \leq (1 - \delta)\varepsilon < \varepsilon$$

contradiendo la minimalidad de ε . Sea $y_0 \in C$ tal que $F_\varepsilon = \{y_0\}$, probaremos que x_n converge débil a y_0 . Supongamos que x_n no converge débil a y_0 . Como X es uniformemente convexo, en particular reflexivo, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge débil a $y \neq y_0$. Del hecho que los coeficientes satisfacen $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ se deduce la regularidad

asintótica de la iteración de Krasnoselskii-Mann y así $\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| \rightarrow 0$. X uniformemente convexo implica que $I - T$ es demicerrado y así $y \in \text{Fix}(T)$. De la propiedad de Opial se tiene finalmente que

$$\varepsilon = d(y_0) = \lim_n \|x_n - y_0\| > \liminf_n \|x_n - y\| = d(y)$$

lo que contradice la minimalidad de ε , luego x_n converge débil a $y_0 \in \text{Fix}(T)$. \square

Del Teorema 1.32 se desprenden condiciones suficientes, además de la regularidad asintótica, para poder garantizar la convergencia débil de la iteración de Krasnoselskii-Mann. Estas son:

1. X reflexivo,
2. $\text{Fix}(T)$ convexo,
3. existe $\varepsilon > 0$ tal que $|F_\varepsilon| = 1$,
4. $I - T$ demicerrado y
5. X satisface la propiedad de Opial.

Las propiedades 1-4 se tienen cuando X es uniformemente convexo, mientras que la propiedad 5 es independiente de ser uniformemente convexo. El siguiente teorema muestra que la propiedad de Opial más la reflexividad son suficientes para asegurar que $I - T$ sea demicerrado, así podríamos relajar la convexidad uniforme a convexidad estricta. No obstante, parece ser estrictamente necesario utilizar el módulo de convexidad para probar la propiedad 3, por lo que no parece ser posible relajar más las hipótesis del Teorema 1.32.

Teorema 1.33 ([18] Cap. 10) *Sea X un espacio de Banach reflexivo que satisface la propiedad de Opial. Sea $T : C \rightarrow X$ un operador no expansivo, donde C es un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado. Entonces $I - T$ es demicerrado en C .*

DEMOSTRACIÓN. Como comentamos antes basta probar que $I - T$ es demicerrado en 0. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge débil a $x \in X$ tal que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$. Ahora

$$\|Tx - x_n\| \leq \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - x_n\|$$

y por consiguiente $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|Tx - x_n\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|$. Como $x_n \rightharpoonup x$ se concluye de la propiedad de Opial que $(I - T)x = 0$ probando lo pedido. \square

Capítulo 2

Tasa de regularidad asintótica en la iteración de Krasnoselskii-Mann

Este capítulo está dedicado a la demostración de la tasa de regularidad asintótica para la iteración de Krasnoselskii-Mann. Es interesante por mérito propio estudiar la técnica desarrollada en [11] para establecer la tasa de regularidad asintótica, pues se establece una inesperada conexión entre la iteración de Krasnoselskii-Mann y un proceso aleatorio definido a valores en \mathbb{Z}^2 . Esta técnica, de transferencia del problema de un espacio de Banach a un proceso estocástico en \mathbb{Z}^2 , servirá de inspiración para demostrar la regularidad asintótica para la iteración con errores. De hecho, en el Capítulo 3 se utilizará parte de la demostración original de [11] para probar el resultado principal de esta memoria.

Consideremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la secuencia de iterados de Krasnoselskii-Mann, en este capítulo veremos que existe una bisucesión $\{c_{mn} : n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq n\}$, definida recursivamente, de modo que $\|x_n - x_m\| \leq c_{mn}$ para todo $0 \leq m \leq n$. Notemos que

$$\|x_n - Tx_n\| = \frac{\|x_n - x_{n+1}\|}{\alpha_{n+1}} \leq \frac{c_{nn+1}}{\alpha_{n+1}}$$

entonces para determinar si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifica la regularidad asintótica, bastaría probar que $c_{nn+1} = o(\alpha_{n+1})$. Esta idea aparece por primera vez en los artículos de Baillon y Bruck [1, 2], donde encuentran la tasa de regularidad asintótica para el caso constante probando que $c_{nn+1}^\lambda = O(1/\sqrt{n})$, donde c_{nn+1}^λ corresponde al término c_{nn+1} cuando la iteración de Krasnoselskii-Mann tiene coeficientes constantes $\alpha_k = \lambda$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Cabe destacar que Baillon y Bruck no lograron determinar el valor de c_{mn} directamente, sino mediante una recurrencia equivalente encontrada mediante un computador. Parece ser muy difícil determinar el valor general de c_{mn} con métodos clásicos y analíticos de combinatoria. Sin embargo, Cominetti, Soto y Vaisman [11] lograron probar que

$$\frac{c_{nn+1}}{\alpha_{nn+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \alpha_i)}}$$

mediante una interpretación probabilista de la recurrencia c_{mn} . Resulta ser que el término general c_{mn} corresponde a la probabilidad de que cierta cadena de Markov, definida a partir de

un paseo aleatorio en \mathbb{Z}^2 , llegue a uno de sus estados absorbentes. Aunque la interpretación de c_{mn} parece ser clara, también resulta ser muy complicado encontrar una cota general para c_{mn} analizando dicho proceso aleatorio. Afortunadamente, el término c_{nn+1}/α_{n+1} tiene una interpretación mucho más sencilla, en relación a un paseo aleatorio en \mathbb{Z} , que sí es posible acotar. Probaremos más tarde que el término c_{nn+1}/α_{n+1} corresponde a la probabilidad de que cierto paseo aleatorio en \mathbb{Z} se mantenga no negativo durante n etapas, y así estableceremos la tasa de regularidad asintótica obtenida por Cominetti, Soto y Vaisman [11].

Este capítulo se divide en dos secciones. La primera sección está dedicada a entregar las nociones básicas sobre paseos aleatorios y a deducir las cotas obtenidas en [11] para c_{nn+1}/α_{n+1} . Luego hay una sección para describir la interpretación probabilista que comentamos antes, y así determinar la tasa de regularidad asintótica para la iteración de Krasnoselskii-Mann.

2.1. Resultados auxiliares de probabilidades

2.1.1. Definiciones básicas

Un espacio de probabilidad es una tupla $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ donde Ω es un conjunto, \mathcal{B} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y \mathbf{P} una medida de probabilidad. Es decir, una función $E \mapsto \mathbf{P}(E) \in [0, 1]$ para $E \in \mathcal{B}$, σ -aditividad, con $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ y $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$. Una variable aleatoria es una función medible $Y : \Omega \rightarrow R$ donde (R, \mathcal{R}) es un espacio medible, se dice entonces que Y toma valores en R . Así, la probabilidad de que Y tome valores en $S \subseteq R$ es simplemente $\mathbf{P}(Y^{-1}(S))$. Una variable aleatoria discreta es una variable aleatoria que toma valores en $(R, \mathcal{P}(R))$ cuando R es un conjunto numerable, donde $\mathcal{P}(R)$ corresponde a la colección de subconjuntos de R .

Sea $Y : \Omega \rightarrow R$ una variable aleatoria. La *distribución o ley* de Y es una medida de probabilidad μ_Y en el espacio (R, \mathcal{R}) , donde μ_Y está definida por la fórmula

$$\mu_Y(S) = \mathbf{P}(Y \in S).$$

El valor esperado de Y , cuando $R \subseteq \mathbb{R}$, se define por $\mathbf{E}(Y) = \int_R Y d\mu_Y$. En el caso de una variable aleatoria discreta, el valor esperado se reduce a $\mathbf{E}(Y) = \sum_{r \in R} r \mathbf{P}(Y = r)$.

En este trabajo sólo se trabajará con variables aleatorias discretas. De hecho, sólo se utilizará la siguiente lista de variables aleatorias.

1. **Bernoulli:** Toma valores en $R = \{0, 1\}$ y su ley está definida por $\mathbf{P}(Y = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(Y = 0)$ para algún $p \in [0, 1]$.
2. **Bernoulli con signo:** Toma valores en $R = \{-1, +1\}$ y su ley está definida por $\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y = -1) = 1/2$ para algún $p \in [0, 1]$.
3. **Bernoulli con signo y descanso:** Toma valores en $R = \{-1, 0, +1\}$ y su ley está definida por $\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y = -1) = p/2$ y $\mathbf{P}(Y = 0) = 1 - p$ para algún $p \in [0, 1]$.

Un paseo aleatorio en \mathbb{Z} es una secuencia de variables aleatorias S_n definidas por $S_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$, donde Y_i son variables aleatorias independientes. Típicamente, Y_i es una variable de Bernoulli o alguna de sus dos variantes antes enlistadas. El valor de Y_0 es el punto de partida del paseo, la ley del proceso partiendo en $Y_0 = x$ se denota típicamente por

$$\mathbf{P}_x(S_n = k) = \mathbf{P}(S_n = k | Y_0 = x).$$

Un paseo aleatorio también puede ser definido en términos de una cadena de Markov (cf. [15, Cap. 15]). Una *cadena de Markov* es una sucesión de variables aleatorias $X_k : \Omega \rightarrow S$, donde S se denomina espacio de estados de la cadena. Los estados de una cadena de Markov se clasifican en dos tipos. Un estado $s \in S$ se dice absorbente si $\mathbf{P}(X_{n+1} = s | X_n = s) = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y transiente si $\mathbf{P}_s(X_n = s \text{ para algún } n \in \mathbb{N}) < 1$. Una cadena de Markov está definida por su espacio de estados, por sus probabilidades de transición $\mathbf{P}(X_{k+1} = i | X_k = j)$ y por la distribución inicial X_0 . La propiedad que caracteriza a las cadenas de Markov, respecto a otros procesos aleatorios, es la famosa *propiedad de Markov*. Si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ es la σ -álgebra de información de la cadena durante las primeras n etapas, la propiedad de Markov establece que $\mathbf{P}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} | X_n)$, es decir, el próximo estado sólo depende del estado actual.

Evidentemente, la noción de paseo aleatorio puede extenderse a más dimensiones. Un paseo aleatorio en \mathbb{Z}^d será un proceso aleatorio $S_k = X_1 + \dots + X_k$, donde $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias con soporte en $\{e_1, \dots, e_d\}$, el conjunto de vectores unitarios en \mathbb{R}^d . De este modo, una trayectoria del proceso será un camino a través del reticulado \mathbb{Z}^d .

Un tiempo de parada es una función $\mathcal{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, de modo que el evento $\{\mathcal{T} = n\}$ es \mathcal{F}_n -medible para cada $n \in \mathbb{N}$. Los tiempos de parada serán utilizados para definir una condición de término sobre el paseo aleatorio. Algunos tiempos de paradas comunes son los siguientes:

- Sea $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ y k un entero no negativo. Entonces $\mathcal{T}_A = \inf\{n \geq k : S_n \in A\}$ es el primer momento, a partir de k , en que el proceso llega al conjunto A y define un tiempo de parada. Es de particular interés cuando $A = \{x\}$ es un punto de \mathbb{Z}^d , de modo que \mathcal{T}_x es el primer momento en que el proceso tiene valor x .
- Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos tiempos de parada, entonces $\max\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$ y $\min\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$ son tiempos de parada.
- Sean $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}, (Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dos procesos aleatorios sobre \mathbb{Z} , entonces $\mathcal{T} = \inf\{k : X_k \geq Y_k\}$ es un tiempo de parada y será utilizado en el Capítulo 3.

2.1.2. Una función de un paseo aleatorio

Recordemos que nos interesa encontrar una cota para las diferencias $\|x_n - x_m\|$ para $0 \leq m \leq n$, aunque en realidad sólo nos interesarán los términos $\|x_n - x_{n+1}\| = \alpha_{n+1} \|x_n - Tx_n\|$ para $n \in \mathbb{N}$. Se probará en la siguiente sección que las cantidades $\|x_n - x_m\|$ están dominadas por una bisucesión $\{c_{mn} : n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq n\}$ de modo que

$$\|x_n - Tx_n\| = \frac{\|x_n - x_{n+1}\|}{\alpha_{n+1}} \leq \frac{c_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} := P^n.$$

Se probará en la siguiente sección que P^n es en efecto la probabilidad de que un paseo aleatorio se mantenga no negativo durante n etapas, sin embargo en esta sección asumiremos esta interpretación. Mostraremos que P^n está de cierta forma dominada por una función $R^n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$. De hecho, no acotaremos P^n directamente sino que a través de la función $R^n(p)$, que estará definida a partir de la suma de n variables de Bernoulli con signo y descanso.

Consideremos $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dos procesos aleatorios donde F_i y H_i son variables aleatorias independientes de Bernoulli de parámetro α_i para cada $i \in \mathbb{N}$. El proceso $Z_i = F_i - H_i$ define una variable aleatoria de Bernoulli con signo y descanso. En efecto, Z_i toma valores en $\{-1, 0, +1\}$, es igual a 0 cuando F_i y H_i toman el mismo valor y ± 1 dependiendo de cuál sea 0 o 1. Como H_i y F_i tienen la misma ley, entonces $2\mathbf{P}(Z_i = 1) = 2\mathbf{P}(Z_i = -1) = 1 - \mathbf{P}(Z_i = 0)$, y así Z_i es una variable Bernoulli con signo y descanso.

Sean $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ variables de Bernoulli con signo y descanso independientes, con probabilidades de éxito $\mathbf{P}(Z_i = 1) = \mathbf{P}(Z_i = -1) = p_i$ y de fallo $\mathbf{P}(Z_i = 0) = 1 - 2p_i$. Nos interesa estudiar cuál es la probabilidad de que un paseo aleatorio, definido a través de variables aleatorias Bernoulli con signo y descanso, se mantenga no negativo durante n etapas. Para ello, se utilizará una relación entre las variables aleatorias Bernoulli con signo y las con signo y descanso. Sea D_i una variable Bernoulli con signo, es decir, con ley $\mathbf{P}(D_i = 1) = \mathbf{P}(D_i = -1) = 1/2$. Entonces existe una descomposición $Z_i = M_i D_i$ donde M_i es una variable de Bernoulli estándar con probabilidad de éxito $\mathbf{P}(M_i = 1) = 2p_i = 1 - \mathbf{P}(M_i = 0)$. El siguiente lema es un resultado clásico de la teoría de paseos aleatorios y establece cuál es la probabilidad que un paseo aleatorio, definido a partir de Bernoulli con signo, se mantenga no negativo durante n etapas.

Lema 2.1 ([15] Cap. 3) *Para $i \in \{1, \dots, m\}$ sea D_i una variable de Bernoulli con signo, es decir, $\mathbf{P}(D_i = 1) = \mathbf{P}(D_i = -1) = 1/2$. Entonces $\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{\ell} D_j \geq 0, \text{ para } \ell = 1, \dots, m\right) = \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} 2^{-m}$.*

De esta forma, y utilizando la identidad $F_i = M_i D_i$, será posible establecer un resultado similar para un paseo aleatorio definido a partir de variables Bernoulli con signo y descanso. En efecto, la siguiente proposición establece que la probabilidad de que un paseo aleatorio, definido a través de variables de Bernoulli con signo y descanso, se mantenga no negativo durante n etapas corresponde al valor esperado de una función a valores enteros definida a partir del Lema 2.1.

Proposición 2.2 ([11]) *Sean F_1, \dots, F_n variables de Bernoulli con signo y descanso independientes donde $\mathbf{P}(F_i = 1) = \mathbf{P}(F_i = -1) = p_i/2$ y $\mathbf{P}(F_i = 0) = 1 - p_i$. Denotemos por P^n a la probabilidad de que el paseo aleatorio $S_k = \sum_{i=k}^n F_i$ se mantenga no negativo durante n etapas. Sea $M = M_1 + \dots + M_n$ una suma de n variables Bernoullis estándar independientes con $\mathbf{P}(M_i = 1) = p_i$. Considere la función $F(m) = \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} 2^{-m}$ definida sobre \mathbb{Z} , entonces $P^n = \mathbf{E}(F(M))$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que $P^n = (\sum_{j=k}^n Z_j \geq 0 \text{ para } k = n, \dots, 1)$ y utilizemos la relación $Z_i = M_i D_i$ donde D_i es una variable de Bernoulli con signo, es decir, con $\mathbf{P}(D_i = 1) = \mathbf{P}(D_i = -1) = \frac{1}{2}$. Condicionando sobre el valor de M se obtiene que

$$\begin{aligned}
P^n &= \sum_{m=0}^n \mathbf{P} \left(\sum_{i=k}^n M_i D_i \geq 0 \text{ para } k = n, \dots, 1 \mid M = m \right) \mathbf{P}(M = m) \\
&= \sum_{m=0}^n \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^{\ell} D_i \geq 0 \text{ para } \ell = 1, \dots, m \right) \mathbf{P}(M = m).
\end{aligned}$$

El último paso se justifica pues las variables D_i son intercambiables. Finalmente, del Lema 2.1 se tiene que $\mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^{\ell} D_i \geq 0 \text{ para } \ell = 1, \dots, m \right) = \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} 2^{-m}$ probando la proposición. \square

Sean M_1, \dots, M_n variables de Bernoulli independientes con probabilidades de éxito $\mathbf{P}(M_i = 1) = p_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Considere $M = M_1 + \dots + M_n$ un paseo aleatorio y sea $F(m) = \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} 2^{-m}$ tal como en la Proposición 2.2. Sea $p = (p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$, se define la función $R^n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$R^n(p) = \sqrt{p_1 + \dots + p_n} \mathbf{E}[F(M)].$$

Nos interesará encontrar una cota para P^n de la siguiente forma

$$P^n \leq \frac{c}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \alpha_i)}}, \quad (2.1)$$

donde P^n es como en la Proposición 2.2 y $c > 0$ es una constante. Como $P^n = \mathbf{E}[F(M)]$, entonces demostrar (2.1) es equivalente a mostrar que $\max_{x \in [0, 1]^n} R^n(p) \leq c\sqrt{2}$ tomando $p_i = 2\alpha_i(1 - \alpha_i)$. El siguiente teorema determina que el máximo de la función $R^n(p)$ se alcanza cuando todas las coordenadas p_i toman sólo uno de los tres valores $\{0, u, \frac{1}{2}\}$, donde $u \in (0, \frac{1}{2})$. Más importante, también establece que $R^n(p) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto se cumple (2.1) con $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Teorema 2.3 ([11]) *La función $R^n(p)$ es estrictamente cóncava en cada variable separadamente y el máximo se alcanza cuando $p_i \in \{0, u, \frac{1}{2}\}$ donde $u \in (0, \frac{1}{2})$. Además, para todo $n \geq 1$ se cumple que $R^n(p) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.*

La demostración de este teorema utiliza propiedades de las funciones hipergeométricas y una desigualdad de tipo Hoeffding(cf. [11]) para sumas de variables de Bernoulli y Poisson. Usando la Proposición 2.2 y el Teorema 2.3 también se obtiene como corolario la cota (2.1) con $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ como se comentó anteriormente.

Corolario 2.4 *Sean Z_1, \dots, Z_n variables de Bernoulli con $\mathbf{P}(Z_i = 1) = \mathbf{P}(Z_i = -1) = \alpha_i(1 - \alpha_i)$ y $\mathbf{P}(Z_i = 0) = 1 - 2\alpha_i(1 - \alpha_i)$. Entonces para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que*

$$\mathbf{P} \left(\sum_{j=k}^n Z_j \geq 0 \text{ para } k = n, \dots, i+1 \right) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \sum_{j=i+1}^n \alpha_j (1 - \alpha_j)}}.$$

2.2. Iteración de Krasnoselskii-Mann

2.2.1. Identidad simétrica y cota recursiva

Como siempre, X será un espacio de Banach y $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo definido sobre $C \subseteq X$ un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado. Como C es acotado, reescalando la norma si es necesario, podemos suponer sin perder generalidad que $\text{diam}(C) = 1$. Recordemos que la iteración de Krasnoselskii-Mann, para encontrar puntos fijos de T , se define mediante la fórmula

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k T x_{k-1} \quad (2.2)$$

donde $x_0 \in C$ es un punto arbitrario y $\alpha_k \in (0, 1)$. Olvidemos por un momento el operador T presente en (2.2) y simplemente definamos $y_k = T x_k$. La iteración (2.2) equivalente a la iteración

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k y_{k-1} \quad (2.3)$$

con punto inicial $y_{-1} = x_0$. Las siguientes proposiciones permitirán escribir x_k como una combinación convexa de los puntos $(y_j)_{j \leq k-1}$, y así poder establecer una cota recursiva para $\|x_n - x_m\|$ en términos de las diferencias $\|y_i - y_j\|$, para $-1 \leq i < m$ y $-1 \leq j < n$.

Lema 2.5 *Sea $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión de coeficientes en la iteración (2.2) y definamos $\rho_k = \prod_{j=1}^k (1 - \alpha_j)$, donde $\rho_0 = \alpha_0 = 1$. Definamos los coeficientes $\pi_k^n = \alpha_k \frac{\rho_n}{\rho_k} = \alpha_k \prod_{j=k+1}^n (1 - \alpha_j)$ para $k = 0, \dots, n$. Entonces,*

1. Para todo $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n \pi_k^n = 1$.

2. Para $0 \leq m \leq n$ y $0 \leq k \leq m$ se cumple que $\pi_k^m - \pi_k^n = \sum_{j=m+1}^n \pi_j^n \pi_k^m$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de la primera identidad será por inducción sobre n . El caso base es trivial de la condición $\rho_0 = \alpha_0 = 1$. Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{k=0}^n \pi_k^n = 1$. Del hecho que $\pi_k^{n+1} = (1 - \alpha_{n+1})\pi_k^n$ para $k \in \{0, \dots, n\}$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \pi_k^{n+1} = \pi_{n+1}^{n+1} + (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=0}^n \pi_k^n = \alpha_{n+1} + (1 - \alpha_{n+1}) = 1$$

probando lo pedido. Para la segunda afirmación, notemos que $\pi_k^n = \pi_k^m \prod_{j=m+1}^n (1 - \alpha_j)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\pi_k^m - \pi_k^n &= \pi_k^m \left(1 - \prod_{j=m+1}^n (1 - \alpha_j)\right) \\
&= \pi_k^m \left(1 - \prod_{j=m+2}^n (1 - \alpha_j) + \pi_{m+1}^n\right) \\
&= \pi_k^m \left(1 - \prod_{j=m+3}^n (1 - \alpha_j) + \pi_{m+2}^n + \pi_{m+1}^n\right) \\
&\vdots \\
&= \pi_k^m \left(1 - \prod_{j=n}^n (1 - \alpha_j) + \sum_{j=m+1}^{n-1} \pi_j^n\right) \\
&= \pi_k^m \sum_{j=m+1}^n \pi_j^n.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.6 (Identidad Simétrica) *Sea $x_0 \in C$ y x_k definido por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k y_{k-1}$ donde $y_k \in C$ es un punto cualquiera. Entonces para $n \geq 1$ se tiene la fórmula general $x_n = \sum_{k=0}^n \pi_k^n y_{k-1}$ donde $y_{-1} = x_0$. Además, para $m \leq n$ se verifica*

$$x_m - x_n = \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n [y_{i-1} - y_{j-1}]. \quad (2.4)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de la primera parte es por inducción. En efecto, para $k = 1$ se tiene que $x_1 = (1 - \alpha_1)x_0 + \alpha_1 y_0 = \pi_0^1 y_{-1} + \pi_1^1 y_0$. Supongamos que el resultado es correcto para n y probémoslo para $n + 1$. Usando la fórmula de la iteración se tiene que

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_{n+1})x_n + \alpha_{n+1}y_n = \alpha_{n+1}y_n + (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=0}^n \pi_k^n y_{k-1}.$$

Notando el hecho que $\alpha_{n+1} = \pi_{n+1}^{n+1}$ y $(1 - \alpha_{n+1})\pi_k^n = \pi_k^{n+1}$ se concluye el resultado. Para la segunda parte consideremos $m \leq n$ y la fórmula que se acaba de probar, se tiene que

$$x_m - x_n = \sum_{i=0}^m \pi_i^m y_{i-1} - \sum_{j=0}^n \pi_j^n y_{j-1} = \sum_{i=0}^m (\pi_i^m - \pi_i^n) y_{i-1} - \sum_{j=m+1}^n \pi_j^n y_{j-1}.$$

De las identidades $\sum_{i=0}^m \pi_i^m = 1$ y $\pi_k^m - \pi_k^n = \pi_k^m \sum_{l=m+1}^n \pi_l^n$ se tiene que

$$x_m - x_n = \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n y_{i-1} - \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n y_{j-1} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (y_{i-1} - y_{j-1}).$$

□

Con la Proposición 2.6 podemos establecer una cota para el término $\|x_n - x_m\|$ en la iteración de Krasnoselskii-Mann mediante la no expansividad del operador T . Los siguientes corolarios de esta proposición definen la estrategia a seguir para establecer la tasa de regularidad asintótica de la iteración de Krasnoselskii-Mann.

Corolario 2.7 Sea x_k el k -ésimo término en la iteración de Krasnoselskii-Mann. Para $m \leq n$ se verifica

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n \|x_{i-1} - x_{j-1}\|. \quad (2.5)$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $y_i = Tx_i$ en la Proposición 2.6. Notar que x_{-1} será un punto tal que $Tx_{-1} = x_0$, aunque esto será sólo una convención. Ahora, la desigualdad triangular y la no expansividad $\|Tx_i - Tx_j\| \leq \|x_i - x_j\|$ concluyen el resultado usando la identidad simétrica de la Proposición 2.6. \square

Corolario 2.8 Para $m \leq n$ definamos c_{mn} recursivamente mediante la fórmula

$$c_{mn} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n c_{i-1j-1} \quad (2.6)$$

con las condiciones de borde $c_{-1n} = 1$ y $c_{nn} = 0$ para todo $n \geq 0$. Entonces $\|x_n - x_m\| \leq c_{mn}$ para todo $0 \leq m \leq n$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es por inducción. Los casos base son directos del hecho que $\|x_{-1} - x_n\| \leq \text{diam}(C) = 1 = c_{-1n}$ y $\|x_n - x_n\| = 0 = c_{nn}$ para n arbitrario. Supongamos que para todo $-1 \leq i < m$ y $-1 \leq j < n$ se tiene que $\|x_i - x_j\| \leq c_{ij}$, entonces por el resultado anterior

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n \|x_{i-1} - x_{j-1}\| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n c_{i-1j-1} = c_{mn}.$$

\square

2.2.2. Un proceso estocástico relacionado y regularidad asintótica

En esta sección describiremos un proceso estocástico en \mathbb{Z}^2 subyacente en la estructura de la recurrencia c_{mn} . Mediante esta relación es posible establecer que la tasa de convergencia cumple $\|x_n - Tx_n\| = O((\sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \alpha_i))^{-\frac{1}{2}})$. Esto resuelve una conjetura enunciada por Baillon y Bruck en [1], demostrada para el caso $\alpha_k = \alpha$ constante, y probada 20 años después por Cominetti, Soto y Vaissman en [11]. Utilizando la misma técnica que en [11] es posible establecer la regularidad asintótica para el caso de la iteración de Krasnoselskii-Mann con error y también determinar su tasa de convergencia.

La iteración de Krasnoselskii-Mann tiene relación con el siguiente proceso aleatorio. Consideremos un coyote y un correcaminos situados en $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq m < n$ respectivamente. El coyote y el correcaminos intentarán moverse a través de la recta \mathbb{Z} , sin embargo sobre cada entero no negativo $i \in \mathbb{N}$ hay una valla que deben saltar para poder avanzar desde la posición i a la posición $i - 1$. El coyote y el correcaminos logran superar la i -ésima valla con probabilidad $1 - \alpha_i$, o lo que es equivalente, se caen en la posición i con probabilidad α_i . El coyote es el primero en moverse y su objetivo es alcanzar al correcaminos. Si el coyote logra

pasar la valla ubicada en la posición n , entonces intenta saltar la valla en $n - 1$, así hasta caerse o alcanzar al correcaminos. Si el coyote se cae en la valla ubicada en i , entonces avanza a la posición $i - 1$ a recuperarse y luego comienza el turno del correcaminos para moverse. El correcaminos sigue las mismas reglas que el coyote hasta caerse o alcanzar la posición -1 . Esto se repite hasta que el coyote atrape al correcaminos o cuando este último llega a la posición -1 donde termina el proceso.

Notemos que la probabilidad que el coyote(respectivamente correcaminos), partiendo de la posición n , caiga en la posición $-1 \leq k < n$ es en efecto π_k^n , como se definió en el Lema 2.5. La siguiente proposición muestra que la recurrencia definida por c_{mn} es efectivamente la probabilidad que el correcaminos se salve, cuando el coyote y el correcaminos parten en las posiciones n y $-1 \leq m \leq n$ respectivamente. Esto es consistente con las condiciones de borde para c_{mn} . Por un lado $c_{mm} = 0$ es consistente con que el coyote capture al correcaminos siempre si ambos parten en la posición m . Por otro lado $c_{-1n} = 1$ coincide con el hecho que el correcaminos siempre se salvará si parte en -1 . Es importante notar también que $\alpha_0 = 1$, por lo que al llegar a la posición 0 el correcaminos siempre se cae en la valla ubicada en 0 y por consiguiente llegará a -1 a salvo. Dicho esto, el correcaminos sólo debe llegar vivo hasta la posición 0 para salvarse.

También podemos pensar el proceso del coyote y el correcaminos como una cadena de Markov con espacio de estados soportado en el cuadrante positivo de \mathbb{Z}^2 . Siendo más precisos, el espacio de estados se define como $\mathcal{S} = \{(i, j) : 0 \leq i < j\} \cup \{h, f\}$, donde h y f corresponden a estados absorbentes de la cadena. El estado h corresponde al evento en que el correcaminos se salva, es decir, son las posiciones de la forma $(-1, j)$ con $j \geq 0$. Por otro lado, el estado f corresponde al evento en que el coyote atrapa al correcaminos, es decir, representa todos las posiciones de la forma (i, j) con $i \geq j$.

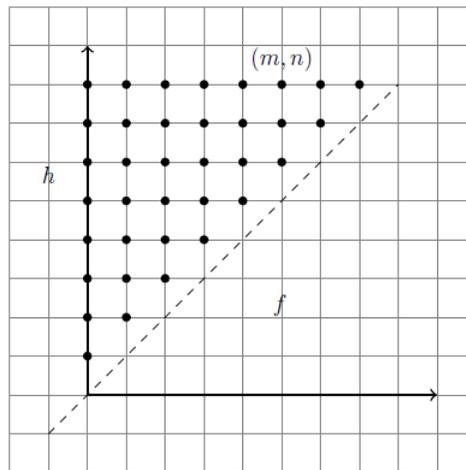


Figura 2.1: Espacio de estados \mathcal{S}

Consideremos el proceso partiendo desde la posición (m, n) con $0 \leq m \leq n$, entonces el proceso puede durar a lo más m etapas pues en cada paso el correccaminos avanza al menos una posición. Sea $P_F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ y $P_H = (h_1, h_2, \dots, h_k)$ un camino transiente del proceso, es decir, que $P_H \times P_F = \{(h_i, f_i) : i = 1, \dots, k\} \subseteq \mathcal{S} \setminus \{h, f\}$. Por otro lado, como el coyote es el primero que se mueve $P_H \times P_F$ debe cumplir que $h_i \leq f_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, k-1$. Fijemos $i \in \{1, \dots, k\}$ y sea $k(i)$ el menor entero tal que $h_{k(i)+1} < i-1$, por lo tanto $h_{k(i)} \geq i$. Luego el correccaminos se cayó exactamente $k(i)-1$ veces en el intervalo $\{i, i+1, \dots, k\}$. Por el lado del coyote se tiene que $f_{k(i)+1} \geq h_{k(i)} \geq i$ y por lo tanto el coyote cayó al menos $k(i)$ veces en el intervalo $\{i, i+1, \dots, k\}$. Es decir, en cada intervalo de la forma $\{i, i+1, \dots, k\}$ el coyote siempre se cae más veces que el correccaminos. Dicho esto, podemos enunciar la siguiente proposición, la que establece la conexión explícita entre el proceso definido anteriormente y la recurrencia c_{mn} .

Proposición 2.9 Sean $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dos secuencias de variables aleatorias Bernoulli independientes, representando cuando el coyote y el correccaminos caen en el i -ésimo obstáculo respectivamente. Si $\mathbf{P}(H_i = 1) = \mathbf{P}(F_i = 1) = \alpha_i$, entonces

$$c_{mn} = \mathbf{P} \left(\sum_{i=k}^n F_i > \sum_{i=k}^m H_i \text{ para todo } k = m+1, \dots, 1 \right). \quad (2.7)$$

Además, si denotamos $Z_i = F_i - H_i$ se tiene que

$$P^n := \frac{c_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} = \mathbf{P} \left(\sum_{i=k}^n Z_i \geq 0 \text{ para todo } k = n, \dots, 1 \right). \quad (2.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera parte, notemos que la condición $\sum_{i=k}^n F_i > \sum_{i=k}^m H_i$ para todo $k = m+1, \dots, n$ es equivalente a que el coyote se caiga más veces que el correccaminos en cada intervalo de la forma $\{k, k+1, \dots, n\}$. Luego, utilizando la fórmula de probabilidades condicionales en (2.7) se deduce que (2.7) verifica la misma recurrencia que c_{mn} . Por lo tanto, c_{mn} es la probabilidad que el correccaminos se salve partiendo de la posición (m, n) . La fórmula (2.8) se deduce directamente del hecho que, partiendo de la posición $(n, n+1)$, el coyote siempre debe caerse en la posición $n+1$. \square

Notemos que de la Proposición 2.9 se deduce que P^n es la probabilidad de que un paseo aleatorio sobre \mathbb{Z} se mantenga no negativo durante n etapas. En efecto, considere $p_i = 2\alpha_i(1-\alpha_i)$, entonces $Z_i = F_i - H_i$ toma valores $\{-1, 0, 1\}$ con probabilidad $p_i/2$, $1-p_i$ y $p_i/2$ respectivamente. Según la definición, sería natural definir la variable aleatoria $L_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ para construir un paseo aleatorio con las variables Z_i . Sin embargo, fijando $n \in \mathbb{N}$, la variable aleatoria $S_k = \sum_{i=k}^n Z_i$ también define un paseo aleatorio sobre $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$. Claramente $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es un proceso de Markov que termina luego de n etapas, donde las probabilidades de transición son Bernoulli con signo y descanso pues las variables $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son independientes, es decir, $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es un paseo aleatorio en n etapas. Ahora, podemos utilizar la Proposición 2.2 y el Corolario 2.4 para deducir el siguiente teorema.

Teorema 2.10 ([11]) Para todo $n \geq 1$ la iteración de Krasnoselskii-Mann verifica

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \frac{\text{diam}(C)}{\sqrt{\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i(1-\alpha_i)}}.$$

Capítulo 3

Iteración de Krasnoselskii-Mann con errores

El método original definido por Mann [26] y Krasnoselskii [23] para encontrar puntos fijos permite, en teoría, calcular puntos fijos de operadores no expansivos generales. Sin embargo, en términos computacionales, no siempre es posible calcular el valor Tx de manera exacta si T está definido en un espacio suficientemente complejo. En [25] Liu define la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores para encontrar soluciones aproximadas de la ecuación $Tx = f$. La iteración de Krasnoselskii-Mann con errores fue definida por Liu de la siguiente forma

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_{n+1})x_n + \alpha_{n+1}Tx_n + u_n \quad (3.1)$$

donde $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de errores tales que $\sum \|u_n\| < \infty$. Liu probó que la iteración (3.1) converge fuerte a un punto fijo de T en espacios uniformemente suaves y donde T satisface una condición técnica similar, pero más complicada, a la no expansividad. A modo de observación, se debe notar que la iteración (3.1) es equivalente a la iteración

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_{n+1})x_n + \alpha_{n+1}(Tx_n + e_{n+1}) \quad (3.2)$$

bajo la condición $\sum \alpha_k \|e_k\| < \infty$. En cuanto a la tasa de regularidad asintótica para la iteración (3.2), en [24] se prueba que $\|x_n - Tx_n\| = O(1/\sqrt{n})$ cuando X es un espacio de Hilbert, con los coeficientes $0 < \liminf \alpha_k \leq \limsup \alpha_k < 1$ y los errores satisfaciendo $\sum (k+1)\|e_k\| < \infty$. La demostración explota fuertemente la geometría de un espacio de Hilbert y no parece posible adaptar dicho método al caso de espacios de Banach generales.

En este capítulo se estudiará la iteración (3.2) en un espacio de Banach general utilizando la idea de [11, 5] para interpretar las cantidades $\|x_n - x_m\|$ en (3.2) en términos de un proceso aleatorio relacionado con el presentado en el Capítulo 2. Probaremos que la condición $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ y $\sum \alpha_k \|e_k\| < \infty$ son suficientes para asegurar la regularidad asintótica de (3.2) y además se obtendrá una tasa de convergencia explícita para $\|x_n - Tx_n\|$ que sólo depende del conjunto C , la sucesión $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y los errores.

3.1. Cota recursiva para la iteración con errores

Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo donde $C \subseteq X$ es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach X . La iteración de Krasnoselskii-Mann con errores $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ para el operador T se define como

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tx_{k-1} + e_k) \quad (3.3)$$

donde $x_0 \in C$ es un punto arbitrario. Supondremos, a menos que se diga lo contrario, que $\text{diam}(C) = 1$, al igual que en el capítulo anterior.

En la iteración original de Krasnoselskii-Mann se tiene que el punto x_k está contenido en C , simplemente por la definición de convexidad. Un detalle que se debe aclarar en la fórmula (3.3) es qué significa evaluar Tx_k si no es claro si $x_k \in C$. Una formulación alternativa de esta iteración es simplemente definirla a través de una proyección, es decir, definirla de la siguiente forma

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(T \circ P_C x_{k-1} + e_k) \quad (3.4)$$

Cuando la proyección P_C exista, la iteración (3.4) estará bien definida y por lo tanto tendrá sentido estudiar la regularidad asintótica de esta sucesión. Sin embargo, la existencia de la proyección P_C en un conjunto convexo y cerrado sólo está garantizada cuando X es estrictamente convexo y reflexivo. De momento se olvidará este problema en la definición de la iteración con errores, este inconveniente se resolverá más adelante mediante una aproximación de la proyección. A partir de ahora, supondremos que los errores $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfacen que $Tx_k + e_{k+1} \in C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y así la iteración con errores no tendrá ningún problema en su definición.

La siguiente proposición establece una cota para el término general $\|x_m - x_n\|$ en la iteración con errores. Es un sencillo corolario de la identidad simétrica probada en el capítulo anterior para el proceso iterativo $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k y_{k-1}$. Este resultado es una consecuencia directa de la Proposición 2.6 utilizando $y_k = Tx_k + e_{k+1}$.

Proposición 3.1 *Sea x_k el k -ésimo término de la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$, es decir, la iteración dada por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tx_{k-1} + e_k)$. Para $m \leq n$ se verifica*

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (\|x_{i-1} - x_{j-1}\| + \|e_i - e_j\|) \quad (3.5)$$

donde $x_{-1} \in C$ es tal que $Tx_{-1} = x_0$ y $e_0 = 0$.

Al igual que en la iteración original de Krasnoselskii-Mann, para obtener una cota para $\|x_n - x_m\|$ es necesario conocer una para los términos anteriores más lo que aportan los términos de error $\|e_k\|$. El mismo argumento para crear una cota iterativa en la iteración original puede ser aplicado en este caso. El siguiente resultado determina una sucesión w_{mn} que domina al término $\|x_m - x_n\|$, además es una consecuencia directa de aplicar la proposición anterior.

Corolario 3.2 Para $m \leq n$ definamos w_{mn} recursivamente mediante la fórmula

$$w_{mn} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (w_{i-1j-1} + \|e_i\| + \|e_j\|) \quad (3.6)$$

con las condiciones de borde $w_{-1n} = 1$ y $w_{nn} = 0$ para todo $n \geq 0$. Entonces $\|x_n - x_m\| \leq w_{nm}$ para todo $0 \leq m \leq n$.

DEMOSTRACIÓN. Se procederá por inducción. En primer lugar, los casos base son directos del hecho que $\text{diam}(C) = 1$ y que $\|\cdot\|$ es una norma. Supongamos que para $-1 \leq i < m$ y $-1 \leq j < n$ se cumple que $\|x_i - x_j\| \leq w_{ij}$. Usando la proposición anterior y la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (\|x_{i-1} - x_{j-1}\| + \|e_i - e_j\|) \\ &\leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (w_{i-1j-1} + \|e_i\| + \|e_j\|) = w_{mn}. \end{aligned}$$

□

La estrategia para encontrar una cota efectiva para w_{nn+1} será dividirla en tres partes. La primera parte consiste en la recurrencia c_{mn} que se lleva las condiciones de borde de w_{mn} y que además ya sabemos calcular. Las otras dos partes son a_{mn} y b_{mn} que controlan el aporte del error por columnas y filas respectivamente. Para ser más preciso se enuncia el siguiente lema.

Lema 3.3 Para $0 \leq m \leq n$ sean a_{mn} y b_{mn} definidos recursivamente mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (a_{i-1j-1} + \|e_i\|), \\ b_{mn} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (b_{i-1j-1} + \|e_j\|), \end{aligned}$$

con las condiciones de borde $a_{nn} = a_{-1n} = b_{nn} = b_{-1n} = 0$. Entonces la iteración de Krasnoselskii-Mann con error verifica la siguiente desigualdad

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \frac{c_{nn+1} + a_{nn+1} + b_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} + \|e_{n+1}\|. \quad (3.7)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea w_{mn} la cota para $\|x_m - x_n\|$ definida recursivamente y consideremos $\delta_{mn} = w_{mn} - a_{mn} - b_{mn}$. Es directo verificar que δ_{mn} satisface la misma recurrencia que c_{mn} y con las mismas condiciones de borde, de lo cual se sigue que $\delta_{mn} = c_{mn}$ para todo $-1 \leq m \leq n$. Por consiguiente $w_{mn} = c_{mn} + a_{mn} + b_{mn}$. Como $\|x_n - x_{n+1}\| = \alpha_{n+1} \|x_n - Tx_n - e_{n+1}\|$ y usando la desigualdad triangular se concluye que

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \frac{\|x_n - x_{n+1}\|}{\alpha_{n+1}} + \|e_{n+1}\| = \frac{c_{nn+1} + a_{nn+1} + b_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} + \|e_{n+1}\|.$$

□

3.2. Un proceso estocástico relacionado y regularidad asintótica

En el Capítulo 2 se probó que $c_{nn+1}\alpha_{n+1}^{-1} = O((\sum_{i=1}^n \alpha_i(1-\alpha_i))^{-\frac{1}{2}})$, por lo que para conocer el comportamiento asintótico de $\|x_n - Tx_n\|$ es suficiente probar que $a_{nn+1} = o(\alpha_{n+1})$ y $b_{nn+1} = o(\alpha_{n+1})$. Para resolver este problema se utilizará una estrategia similar a la utilizada para encontrar la cota de c_{nn+1} . Primero notemos que

$$a_{nn+1} = \alpha_{n+1} \sum_{i=0}^n \pi_i^n (a_{i-1n} + \|e_i\|) \quad ; \quad b_{nn+1} = \alpha_{n+1} \sum_{i=0}^n \pi_i^m (b_{i-1n} + \|e_{n+1}\|).$$

De la identidad $\sum_{i=0}^n \pi_i^n = 1$ nace la interpretación de las cantidades a_{nn+1} y b_{nn+1} como el valor esperado de una cierta función. Para ser más precisos, se definirá nuevamente el proceso del coyote y el correcaminos pero ahora se añadirá una *recompensa* o *pago* en cada estado que transiten. Considere al coyote situado en n y al correcaminos en la posición $0 \leq m < n$. Supongamos que en una iteración el proceso avanza desde (m, n) hasta la posición (i, j) con $i < j$. Como el correcaminos sigue vivo cuando llegan a la posición (i, j) , este obtendrá una recompensa r_{ij} por haber llegado hasta ahí. Luego el coyote intentará nuevamente atrapar al correcaminos en la siguiente etapa y continuarán del mismo modo. La siguiente proposición muestra que a_{mn} y b_{mn} son en efecto la recompensa total esperada que recibirá el correcaminos cuando el proceso comience en la posición (m, n) .

Proposición 3.4 *Consideremos dos procesos del correcaminos y el coyote partiendo desde la posición (m, n) con $m \leq n$. En cada etapa, del proceso respectivo, el correcaminos recibe una recompensa*

$$r_{ij}^1 = \begin{cases} \|e_{i+1}\| & \text{cuando } j > i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad r_{ij}^2 = \begin{cases} \|e_{j+1}\| & \text{cuando } j > i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces a_{mn} es la recompensa total esperada que recauda el correcaminos cuando el proceso parte desde la posición (m, n) con recompensas r_{ij}^1 . Del mismo modo, b_{mn} será la recompensa total esperada que recauda el correcaminos cuando el proceso parte desde la posición (m, n) con recompensas r_{ij}^2 .

DEMOSTRACIÓN. Dado que los procesos sólo se diferencian en la recompensa, demostraremos sólo la relación de a_{mn} pues el caso b_{mn} es completamente análogo. Supongamos que el proceso parte en la posición (m, n) con $m < n$. La probabilidad de caer en la posición (i, j) es $\pi_{i+1}^m \pi_{j+1}^n$, y en tal caso el correcaminos recoge r_{ij} y se reinicia el proceso desde (i, j) . Luego,

si el proceso cae en (i, j) entonces recauda r_{ij}^1 más lo recaudado por el proceso partiendo desde (i, j) . Habiendo dicho esto se procede por inducción. El caso base es notar que si el proceso parte desde $(-1, k)$ entonces no sucede nada y por lo tanto el correcaminos obtiene recompensa $0 = a_{-1, k}$. Supongamos que a_{ij} corresponde a la recompensa total obtenida por el correcaminos cuando el proceso parte desde la posición (i, j) . Utilizando probabilidades condicionales, la recompensa obtenida partiendo desde (m, n) es efectivamente

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (a_{i-1, j-1} + r_{i-1, j-1}^1) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (a_{i-1, j-1} + \|e_i\|) = a_{mn}.$$

□

Habiendo definido el proceso, también se puede interpretar como una cadena de Markov discreta. Sean $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}, (Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dos procesos de Markov que definen la posición del correcaminos y coyote en la k -ésima etapa respectivamente. Las probabilidades de transición son idénticas para ambos y están dadas por

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = s | X_k = t) = \mathbf{P}(Y_{k+1} = s | Y_k = t) = \begin{cases} \pi_{s+1}^t & \text{si } -1 \leq s < t \\ 1 & \text{si } s = t = -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El proceso se encontrará activo siempre que $Y_k > X_{k-1} \geq 0$, lo que representa la situación en que el coyote no ha atrapado al correcaminos y el último no se ha salvado aún. Dicho esto, por simplicidad en la definición, es mejor definir este proceso como una cadena de Markov en el plano \mathbb{Z}^2 . Sea $W_k = (X_k, Y_k)$ la posición del proceso en la k -ésima etapa, donde el espacio de estados será $\mathcal{S} = \{(i, j) : 0 \leq i < j\} \cup \{h, f\}$ con h y f son dos estados absorbentes tal como se definió en el Capítulo 2. Sea R_{mn}^1 la variable aleatoria correspondiente a la recompensa obtenida por el correcamino cuando el proceso parte en la posición $W_0 = (X_0, Y_0) = (m, n)$. Sea ω la trayectoria del proceso, es directo verificar la siguiente igualdad

$$R_{mn}^1(\omega) = \sum_{i=1}^m r_{X_i Y_i}^1 = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{m-1} \|e_{k+1}\| 1_{\{Y_i=k, X_i>k\}}(\omega) = \sum_{k=0}^{m-1} \|e_{k+1}\| \sum_{i=1}^m 1_{\{Y_i=k, X_i>k\}}(\omega)$$

donde 1_A es la función indicadora del conjunto A , es decir, $1_{\{Y_i=k, X_i>k\}}(\omega) = 1$ si y sólo si el correcamino llega vivo a la posición k en la i -ésima etapa. El correcaminos no puede permanecer dos etapas en la misma posición, a menos que se encuentre en un estado absorbente. Luego, si R_k^1 es el evento que indica si el correcaminos recoge la recompensa de la posición k , entonces se verifica que

$$\mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^m 1_{\{Y_i=k, X_i>k\}}(\omega) \right] = \mathbf{P}(R_k^1)$$

y así se tiene que $a_{mn} = \mathbf{E}[R_{mn}^1] = \sum_{k=0}^{m-1} \|e_{k+1}\| \mathbf{P}(R_k^1)$. Evidentemente b_{nn+1} tiene una fórmula análoga, haciendo el mismo desarrollo con R_{mn}^2 en lugar de R_{mn}^1 , la que detallaremos más adelante.

Proposición 3.5 Para todo $n \geq -1$, a_{nn+1} verifica la siguiente desigualdad

$$\frac{a_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i \|e_i\|}{\sqrt{\pi \sum_{j=i+1}^n \alpha_j (1 - \alpha_j)}} + \alpha_n \|e_n\|. \quad (3.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Considere A_i el evento en que el correcaminos llega vivo a la posición i y sea R_i^1 el evento donde el correcaminos recibe la recompensa de la posición i . La recompensa esperada, partiendo desde la posición $(n, n+1)$ es igual a a_{nn+1} , y tiene la expresión

$$a_{nn+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \|e_{i+1}\| \mathbf{P}(R_i^1).$$

La suma sólo llega hasta $n-1$ pues el correcamino parte en n y puede alcanzar las posiciones $k < n$ después de eso. Luego debemos calcular $\mathbf{P}(R_i^1)$. El correcaminos sólo recibirá recompensa en i si alcanza a llegar vivo a la posición $i+1$ y luego cae, dado que el coyote no lo alcanza entremedio, entonces $\mathbf{P}(R_i^1) = \mathbf{P}(R_i^1 \cap A_{i+1}) = \mathbf{P}(R_i^1 | A_{i+1}) \mathbf{P}(A_{i+1})$. Por un lado, $\mathbf{P}(R_i^1 | A_i) = \alpha_{i+1}$ pues cuando el correcaminos llega vivo a la posición $i+1$, recibirá recompensa en i si y sólo si se cae en $i+1$. Sólo resta calcular $\mathbf{P}(A_i)$ para cada i y así obtener la cota esperada. Sean $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}, (F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de variables Bernoulli independientes, donde $H_i = 1$ es el evento donde el correcaminos se cae en la posición i y $\mathbf{P}(H_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(H_i = 0) = \alpha_i$. Del mismo modo, $F_i = 1$ corresponde al evento donde el coyote se cae en la posición i y $\mathbf{P}(F_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(F_i = 0) = \alpha_i$. Condicionando en que el coyote se caiga en la posición $n+1$, de otro modo el proceso no se recibe recompensa, y definiendo la variable aleatoria $Z_k = H_k - F_k$, para $i < n$ se tiene la expresión

$$\mathbf{P}(A_i) = \alpha_{n+1} \mathbf{P} \left(\sum_{j=k}^n Z_j \geq 0 \text{ para } k = n, \dots, i+1 \right).$$

Por otro lado, el correcaminos estará vivo en la posición n si y sólo si el coyote se cae en el primer paso, luego $\mathbf{P}(A_n | F_{n+1} = 1) = \alpha_{n+1}$. Además, la probabilidad que el correcaminos recoja la recompensa de $n-1$ es simplemente $\alpha_n \alpha_{n+1}$, es decir, el suceso en que ambos se caen en el primer paso. Para $i < n$ tendremos la siguiente cota que viene del Corolario 1.30.

$$\mathbf{P}(A_i) \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\sqrt{\pi \sum_{j=i+1}^n \alpha_j (1 - \alpha_j)}}.$$

Finalmente, sumando sobre i , se obtiene la cota para a_{nn+1} luego de hacer un cambio de índices en la desigualdad

$$\frac{a_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\alpha_{i+1} \|e_{i+1}\|}{\sqrt{\pi \sum_{j=i+2}^n \alpha_j (1 - \alpha_j)}} + \alpha_n \|e_n\|.$$

□

Proposición 3.6 Para $0 \leq m \leq n$, b_{nn+1} verifica la siguiente desigualdad

$$\frac{b_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha_j \|e_j\|}{\sqrt{\pi \sum_{k=j+1}^n \alpha_k (1 - \alpha_k)}} + \alpha_n \|e_n\| + \|e_{n+1}\|. \quad (3.9)$$

DEMOSTRACIÓN. Similar a la proposición anterior, sea R_j^2 el evento donde el proceso recoge la j -ésima recompensa. Entonces, en particular se tiene que $\mathbf{P}(R_n^2) = \alpha_{n+1}$ pues es necesario que el coyote se caiga en la primera posición para poder recibir la recompensa $\|e_{n+1}\|$. Luego b_{nn+1} verifica una ecuación similar a la de a_{nn+1} , en efecto se cumple que

$$b_{nn+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \|e_{j+1}\| \mathbf{P}(R_j^2) + \alpha_{n+1} \|e_{n+1}\|.$$

Notemos que en R_j^2 el coyote debe caerse en la posición $j+1$, además el correccaminos debe seguir vivo en alguna posición $k < j+1$. Sea como antes $Z_k = F_k - H_k$ el paseo aleatorio que define la dinámica del correccaminos y el coyote cuando el coyote se cae en la posición $n+1$. Condicional a la caída del coyote en la posición $n+1$ se verifica la siguiente igualdad:

$$\mathbf{P}(R_j^2 | F_{n+1} = 1) = \mathbf{P}\left(F_{j+1} = 1, \sum_{k=l}^n Z_k \geq 0 \text{ para } l = n, \dots, j+1\right).$$

Pues el evento en que $\sum_{k=l}^n Z_k \geq 0$ para todo $k \in \{j+1, \dots, n\}$ es precisamente la condición de que el correccaminos permanezca vivo hasta la posición j . Notemos que si $F_{j+1} = 1$ y $\sum_{k=j+2}^n Z_k \geq 0$ entonces $\sum_{k=j+1}^n Z_k \geq 1 - H_{j+1} \geq 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_j^2 | F_{n+1} = 1) &= \mathbf{P}(F_{j+1} = 1, \sum_{k=l}^n Z_k \geq 0 \text{ para } l = n, \dots, j+1) \\ &= \mathbf{P}(F_{j+1} = 1, \sum_{k=l}^n Z_k \geq 0 \text{ para } l = n, \dots, j+2) \\ &= \alpha_{j+1} \mathbf{P}(\sum_{k=l}^n Z_k \geq 0 \text{ para } l = n, \dots, j+2) \end{aligned}$$

donde el último paso se justifica simplemente por la independencia de F_{j+1} con Z_k para $k \in \{j+2, \dots, n\}$. Entonces para $j \leq n-2$ se tiene que

$$\mathbf{P}(R_j^2 | F_{n+1} = 1) \leq \frac{\alpha_{j+1}}{\sqrt{\pi \sum_{k=j+2}^n \alpha_k (1 - \alpha_k)}}.$$

Para $j = n-1$ notemos que el proceso recogerá recompensa, condicional al hecho que $F_{n+1} = 1$, si y sólo si $F_n = 1$. Entonces $\mathbf{P}(R_{n-1}^2 | F_{n+1} = 1) = \alpha_n$ y así la cota para b_{nn+1} queda como sigue:

$$\frac{b_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\alpha_{j+1} \|e_{j+1}\|}{\sqrt{\pi \sum_{k=j+2}^n \alpha_k (1 - \alpha_k)}} + \alpha_n \|e_n\| + \|e_{n+1}\|.$$

□

La demostración de las cotas para a_{nn+1} y b_{nn+1} además permiten establecer que $\mathbf{P}(R_i^1) = o(\alpha_{n+1})$ y $\mathbf{P}(R_j^2) = o(\alpha_{n+1})$ para todo $i, j \leq n$. Aunque no fue dicho explícitamente en las demostraciones de las proposiciones 3.5 y 3.6, las probabilidades $\mathbf{P}(R_i^1), \mathbf{P}(R_i^2)$ son una función del punto de partida del proceso, es decir, de $(n, n+1)$. Para evitar confusión, se denotará por $\mathbf{P}(R_i^1|(n, n+1))$ a la probabilidad de que el correccaminos recoja la i -ésima recompensa cuando comienza en la posición $(n, n+1)$. Similiariamente, $\mathbf{P}(R_j^2|(n, n+1))$ será la probabilidad de que el coyote recoja la j -ésima recompensa cuando el proceso comienza en $(n, n+1)$. Si bien las cotas obtenidas para a_{nn+1} y b_{nn+1} controlan el comportamiento asintótico de $\|x_n - Tx_n\|$, no es claro cuándo esas cotas convergen efectivamente a 0. De hecho, las cotas (3.8) y (3.9) no bastan para asegurar la regularidad asintótica en el caso de la iteración con errores general. Sin embargo, las cotas para $\mathbf{P}(R_i^1)$ y $\mathbf{P}(R_j^2)$ si son suficientes para establecer que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.

Teorema 3.7 *Sea x_k la iteración definida por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tx_{k-1} + e_k)$ con $x_0 \in C$ y $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de errores que converge a 0. Suponga que $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ y $\sum \alpha_k \|e_k\| < \infty$, entonces $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que para todo n se verifica la desigualdad

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}} + \frac{a_{nn+1} + b_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} + \|e_{n+1}\|.$$

Como $e_n \rightarrow 0$, entonces sólo es necesario probar que a_{nn+1} y b_{nn+1} son de orden $o(\alpha_{n+1})$. Probaremos sólo el orden de convergencia de a_{nn+1} pues el argumento para b_{nn+1} es completamente análogo. De la identidad $a_{nn+1} = \sum_{i=0}^{n-2} \|e_{i+1}\| \mathbf{P}(R_i^1|(n, n+1)) + \alpha_{n+1} \alpha_n \|e_n\|$ y del hecho que $\alpha_n \|e_n\| \rightarrow 0$, todo se reduce a probar que $S_n = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \sum_{i=0}^{n-2} \|e_{i+1}\| \mathbf{P}(R_i^1|(n, n+1))$ converge a 0. De los cálculos de la Proposición 3.6 se obtiene que

$$\mathbf{P}(R_i^1|(n, n+1)) = \alpha_{n+1} \alpha_{i+1} \mathbf{P}(A_{i+1}|(n, n+1)). \quad (3.10)$$

Consideremos la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(i) = \begin{cases} \mathbf{P}(A_i|(n, n+1)) & \text{cuando } i \leq n-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y considere μ la medida finita sobre \mathbb{N} definida por $\mu(\{i\}) = \alpha_i \|e_i\|$. Usando (3.10) podemos interpretar S_n como una integral, en efecto se tiene que

$$S_n = \int f_n d\mu. \quad (3.11)$$

La función $g \equiv 1$ es integrable bajo μ y además se tiene que $f_n \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, la función $f_n(i)$ está también acotada por

$$f_n(i) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \sum_{j=i+1}^n \alpha_j(1 - \alpha_j)}}.$$

Del hecho que $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ se deduce que $f_n(i) \rightarrow 0$ puntualmente y usando el teorema de convergencia dominada se concluye que $\lim S_n = \int \lim f_n d\mu = 0$ probando lo pedido. \square

Aunque no se ha mencionado de manera explícita, de la demostración de la regularidad asintótica se puede deducir que la convergencia de $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$ es uniforme, tanto en el punto inicial como en el operador $T : C \rightarrow C$ escogido. Esto se deduce fácilmente del hecho que la cota $\|x_n - Tx_n\| \leq a_{nn+1} + b_{nn+1} + c_{nn+1} + \|e_{n+1}\|$ no depende ni del punto inicial ni del operador T involucrado. De esta forma, si $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $n_0 = n_0(\varepsilon, \text{diam}(C), (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}, (e_k)_{k \in \mathbb{N}})$ tal que $\|x_n - Tx_n\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

3.3. Tasa de regularidad asintótica

En esta sección se establecerá la versión cuantitativa del Teorema 3.7 cuando los coeficientes α_k satisfacen que $0 < \liminf \alpha_k \leq \limsup \alpha_k < 1$. En particular, se obtendrá una cota para el caso constante $\alpha_k = \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Resumiendo lo discutido en el capítulo anterior, podemos dar una primera versión cuantitativa de la regularidad asintótica para la iteración con errores.

Teorema 3.8 *La iteración de Krasnoselskii-Mann con errores $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ verifica*

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i \|e_i\|}{\sqrt{\pi \sum_{k=i+1}^n \alpha_k(1 - \alpha_k)}} + 2\alpha_n \|e_n\| + 2\|e_{n+1}\|$$

DEMOSTRACIÓN. Al considerar la norma $\|\cdot\| \cdot \text{diam}(C)^{-1}$ podemos usar el Lema 3.3 y obtener la desigualdad

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{a_{nn+1} + b_{nn+1} + c_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} + \|e_{n+1}\|.$$

De las cotas para a_{nn+1} , b_{nn+1} y c_{nn+1} se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} &\leq \frac{a_{nn+1} + b_{nn+1} + c_{nn+1}}{\alpha_{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i \|e_i\|}{\sqrt{\pi \sum_{k=i+1}^n \alpha_k(1 - \alpha_k)}} + 2\alpha_n \|e_n\| + 2\|e_{n+1}\|. \end{aligned}$$

□

De esta forma, para establecer la regularidad asintótica en la iteración con errores, habría que probar que el lado derecho en la cota del Teorema 3.8 converge a 0. Notemos que para que el lado derecho converja, bajo las condiciones del Teorema 3.7, sólo será necesario que el término

$$L_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i \|e_i\|}{\sqrt{\pi \sum_{k=i+1}^n \alpha_k(1 - \alpha_k)}}$$

converja a 0. La técnica utilizada en el Teorema 3.7 no se aplica en este caso pues los términos de la suma L_n , que están dentro de la raíz, podrían no estar acotados por 1 y por consiguiente no podemos usar el teorema de convergencia dominada como en el Teorema 3.7.

Es claro que $S_n \leq L_n$ y además los primeros términos de cada suma son similares para n suficientemente grande. Sin embargo, la cota obtenida para los últimos términos de L_n no es lo suficientemente buena. Por ejemplo, el último término $1/\sqrt{\pi\alpha_n(1-\alpha_n)}$ puede ser arbitrariamente grande si $\alpha_n \sim 0$. Por lo tanto no es claro si L_n es convergente a 0 bajo las condiciones del Teorema 3.7.

Una condición necesaria para que $L_n \rightarrow 0$ es que el último término de la suma converja a 0, es decir, que $\alpha_{n-1}\|e_{n-1}\|/\sqrt{\pi\alpha_n(1-\alpha_n)}$ converja a 0. Como $e_n \rightarrow 0$, bastará que el cociente $\alpha_{n-1}/\sqrt{\pi\alpha_n(1-\alpha_n)}$ esté acotado para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, no es claro que la condición $\sum \alpha_k(1-\alpha_k) = \infty$ implique que $\alpha_{n-1}/\sqrt{\pi\alpha_n(1-\alpha_n)} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y algún $M > 0$. No obstante, asumir que $0 < \liminf \alpha_k \leq \limsup \alpha_k < 1$ es suficiente para poder asegurarlo. Consideremos primero cuando $\alpha_k = \alpha$ es constante.

Teorema 3.9 *Sea x_k la iteración definida por $x_k = (1-\alpha)x_{k-1} + \alpha(Tx_{k-1} + e_k)$ con $x_0 \in C$ y $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de errores que converge a 0. Entonces se tiene que*

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}} \sum_{k \geq 1} \|e_k\| + C_2 \sum_{i \geq n/2} \|e_i\| + 2\|e_{n+1}\| \quad (3.12)$$

donde $C_1 = \frac{1+2^{3/2}\alpha}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}}$ y $C_2 = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}}$. Además, suponiendo que $\sum \|e_k\| < \infty$ se concluye que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.

DEMOSTRACIÓN. Primero, del Teorema 3.8 se deduce que

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\|e_i\|}{\sqrt{n-i}} + 2\alpha\|e_n\| + 2\|e_{n+1}\|. \quad (3.13)$$

Sea $L_n(\alpha)$ la suma que falta por acotar, es decir

$$L_n(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\|e_i\|}{\sqrt{n-i}}.$$

Consideremos $i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ entonces $\frac{n}{n-i} = 1 + \frac{i}{n-i} \leq 2$. Además notemos que

$$\sum_{i=1}^{n/2-1} \frac{\|e_i\|}{\sqrt{n-i}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n/2-1} \sqrt{\frac{n}{n-i}} \|e_i\| \leq \frac{C'}{\sqrt{n}}$$

donde $C' = \sqrt{2} \sum \|e_k\|$. Así, $L_n(\alpha)$ queda acotado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} L_n(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}} \sum_{i=1}^{n/2-1} \frac{\|e_i\|}{\sqrt{n-i}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}} \sum_{i=n/2}^{n-1} \frac{\|e_i\|}{\sqrt{n-i}} \\ &\leq \frac{\alpha C'}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi\alpha(1-\alpha)}} \sum_{i=n/2}^{n-1} \|e_i\|. \end{aligned}$$

Usando la cota (3.13) y del hecho que $\pi\alpha(1-\alpha) \leq \pi/4 < 1$ se deduce la cota del teorema. En el caso que $\sum \|e_k\| < \infty$ se tiene que $\sum_{k \geq n} \|e_k\|$ converge a 0 y del hecho que $\|e_n\| \rightarrow 0$ se deduce de la cota (3.12) que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$. \square

Para dar una cota efectiva para la regularidad asintótica en el caso no constante, se supondrá que los coeficientes α_k están lo suficientemente alejados de 0 y 1. De este modo, podremos definir la cantidad $\tau = \inf \alpha_k(1-\alpha_k)$ y hacer un análisis similar al del teorema anterior. El resultado obtenido para este caso es el siguiente.

Teorema 3.10 *Sea x_k la iteración definida por $x_k = (1-\alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tx_{k-1} + e_k)$ con $x_0 \in C$ y $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de errores que converge a 0. Si $0 < \liminf \alpha_k \leq \limsup \alpha_k < 1$, entonces se tiene que*

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}} \sum_{k \geq 1} \alpha_k \|e_k\| + C_2 \sum_{i \geq n/2} \alpha_i \|e_i\| + 2\|e_{n+1}\| \quad (3.14)$$

donde $C_1 = \frac{1+2^{3/2}}{\sqrt{\pi\tau}}$, $C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}}$ y $\tau = \inf \alpha_k(1-\alpha_k) > 0$. Además, suponiendo que $\sum \alpha_k \|e_k\| < \infty$ se concluye que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.

DEMOSTRACIÓN. De las hipótesis del enunciado, se deduce que $\frac{1}{4} \geq \tau > 0$ y por lo tanto para $0 \leq i \leq n-1$ se tiene que

$$\sum_{j=i+1}^n \alpha_j(1-\alpha_j) \geq (n-i)\tau > 0$$

Con esta observación, más el Teorema 3.8, se puede deducir la siguiente cota

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi\tau n}} + 2J_n(\tau) + 2\alpha_n \|e_n\| + 2\|e_{n+1}\|$$

donde $J_n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i \|e_i\|}{\sqrt{n-i}}$. Usando la misma técnica que en la demostración del Teorema 3.9, para probar que la cota para $L_n(\alpha)$, se obtiene que

$$J_n(\tau) \leq \frac{C'}{\sqrt{\pi\tau}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{i=n/2}^{n-1} \alpha_i \|e_i\|$$

donde $C' = \sqrt{2} \sum \alpha_k \|e_k\|$. Usando esta desigualdad, más el hecho que $\pi\tau < 1$, es directo concluir el resultado del teorema. \square

3.4. Proyección métrica y la iteración sobre un convexo

Como se mencionó al comienzo de este capítulo, la iteración con errores no está bien definida cuando el operador tiene como dominio un subconjunto. De hecho, como $Tx_{k-1} + e_k$ podría no estar en C , no podemos deducir que $x_k \in C$ sólo de la convexidad. Una alternativa

es definir la iteración a través de una proyección sobre C , para eso existen al menos estas dos opciones

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k P_C(Tx_{k-1} + e_k), \quad (3.15)$$

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(T \circ P_C x_{k-1} + e_k). \quad (3.16)$$

No obstante, para la primera opción no funcionan las cotas que hemos encontrado. De la identidad simétrica es directo verificar que la iteración (3.15) cumple

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n \|P_C(Tx_{i-1} + e_i) - P_C(Tx_{j-1} + e_j)\|.$$

El problema es que, en el caso de un espacio de Banach general, aunque la proyección P_C esté bien definida, podría fallar la no expansividad. De hecho, existe una caracterización probada por Phelps [29] para la no expansividad de la proyección métrica.

Teorema 3.11 ([29]) *Sea X un espacio normado de dimensión al menos 3. Si para todo subconjunto no vacío, convexo y cerrado, la proyección métrica es no expansiva, entonces X es un espacio de Hilbert.*

De esta forma utilizaremos la idea de (3.16) para definir la iteración. Como en general no siempre es posible definir la proyección métrica $P_C : X \rightarrow C$, la iteración (3.16) podría no estar bien definida. En lugar de ello, considere la sucesión generada a partir de la siguiente fórmula

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tz_{k-1} + e_k) \quad (3.17)$$

donde $x_0 \in C$ y $z_k \in C$ es tal que $\|z_k - x_k\| \leq d(x_k, C) + \gamma_k$, es decir, z_k actúa como una γ_k -proyección del punto x_k en C . La siguiente proposición establece una cota iterativa similar a la de secciones anteriores.

Proposición 3.12 *Sea x_k la sucesión de puntos en X definida a partir de la iteración (3.17), donde $x_0 \in C$ es un punto arbitrario y z_k es tal que $\|z_k - x_k\| \leq d(x_k, C) + \gamma_k$. Supongamos que $\gamma_k \leq \alpha_{k+1}\|e_k\|$ y definamos $\delta_k = d(x_k, C)$. Para $0 \leq m \leq n$ se verifica*

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (\|x_{i-1} - x_{j-1}\| + \|e_i\| + \|e_j\| + \delta_{i-1} + \delta_{j-1} + \gamma_{i-1} + \gamma_{j-1}). \quad (3.18)$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $y_k = Tz_k + e_{k+1}$, entonces la iteración x_k es un proceso simétrico y verifica la cota

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n \|y_{i-1} - y_{j-1}\|.$$

Notemos que $\|y_i - y_j\| \leq \|Tz_i - Tz_j\| + \|e_{i+1} - e_{j+1}\| \leq \|z_i - z_j\| + \|e_{i+1}\| + \|e_{j+1}\|$. Por otro lado, de la definición de z_k se tiene que

$$\|z_i - z_j\| \leq \|z_i - x_i\| + \|x_j - z_j\| + \|x_i - x_j\| \leq \delta_i + \delta_j + \gamma_i + \gamma_j + \|x_i - x_j\|.$$

Así, $\|y_i - y_j\| \leq \|x_i - x_j\| + \delta_i + \delta_j + \gamma_i + \gamma_j + \|e_{i+1}\| + \|e_{j+1}\|$ y se deduce la proposición. \square

Nos gustaría usar las técnicas del Teorema 3.7 y Teorema 3.10 para establecer la regularidad asintótica para esta iteración. Para ello considere $\hat{e}_i = \|e_i\| + \delta_{i-1} + \gamma_{i-1}$ y así la cota (3.18) es equivalente a

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^m (\|x_{i-1} - x_{j-1}\| + \hat{e}_i + \hat{e}_j).$$

Si definimos \hat{w}_{mn} recursivamente mediante

$$\hat{w}_{mn} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=m+1}^n \pi_i^m \pi_j^n (w_{i-1j-1} + \hat{e}_i + \hat{e}_j),$$

sabemos que \hat{w}_{nn+1} converge a 0 cuando $\hat{e}_n \rightarrow 0$ y $\sum \alpha_k \hat{e}_k < \infty$, y por consiguiente debemos probar ambas condiciones. Notemos que $x_k = (1 - \alpha_k)z_{k-1} + \alpha_k Tz_{k-1} + (1 - \alpha_k)(x_{k-1} - z_{k-1}) + \alpha_k e_k$ y $(1 - \alpha_k)z_{k-1} + \alpha_k Tz_{k-1} \in C$. Por lo tanto $\delta_k = d(x_k, C)$ verifica la siguiente desigualdad

$$\delta_k \leq \|(1 - \alpha_k)(x_{k-1} - z_{k-1}) + \alpha_k e_k\| \leq (1 - \alpha_k)(\delta_{k-1} + \gamma_{k-1}) + \alpha_k \|e_k\|. \quad (3.19)$$

El siguiente lema establece que δ_k converge a 0 y además $\sum \alpha_{k+1} \delta_k < \infty$. Así se deduce la convergencia de \hat{w}_{nn+1} a 0 y consecuentemente la regularidad asintótica de (3.17).

Lema 3.13 *Sea δ_k una sucesión real que cumple $0 \leq \delta_{k+1} \leq (1 - \alpha_{k+1})(\delta_k + \gamma_k) + \alpha_{k+1} \varepsilon_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica la siguiente desigualdad*

$$\delta_{k+1} \leq e^{-\sum_{i=2}^{k+1} \alpha_i} \delta_1 + \sum_{i=1}^k \gamma_i e^{-\sum_{j=i+1}^{k+1} \alpha_j} + \sum_{i=2}^k \alpha_i \varepsilon_i e^{-\sum_{j=i+1}^{k+1} \alpha_j} + \alpha_{k+1} \varepsilon_{k+1}.$$

Además, si $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(\alpha_k \varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son sumables y $\sum \alpha_k = \infty$, se tiene que $\delta_k \rightarrow 0$ y que $(\alpha_{k+1} \delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es sumable.

DEMOSTRACIÓN. Si denotamos $\beta_k = 1 - \alpha_k$ e iterando la desigualdad del enunciado se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &\leq (1 - \alpha_{k+1})(\delta_k + \gamma_k) + \alpha_{k+1} \varepsilon_{k+1} \\ &= \beta_{k+1} \delta_k + \beta_{k+1} \gamma_k + \alpha_{k+1} \varepsilon_{k+1} \\ &\leq \beta_{k+1} (\beta_k \delta_{k-1} + \beta_k \gamma_{k-1} + \alpha_k \varepsilon_k) + \beta_{k+1} \gamma_k + \alpha_{k+1} \varepsilon_{k+1} \\ &= \beta_{k+1} \beta_k \delta_{k-1} + \beta_{k+1} \beta_k \gamma_{k-1} + \beta_{k+1} \gamma_k + \beta_{k+1} \alpha_k \varepsilon_k + \alpha_{k+1} \varepsilon_{k+1} \\ &\leq \prod_{i=2}^{k+1} \beta_i \delta_1 + \sum_{i=1}^k \gamma_i \prod_{j=i+1}^{k+1} \beta_j + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{i+1} \varepsilon_{i+1} \prod_{j=i+2}^{k+1} \beta_j + \alpha_{k+1} \varepsilon_{k+1}. \end{aligned}$$

De la desigualdad $1 + x \leq e^x$ se tiene que $\beta_i = 1 - \alpha_i \leq e^{-\alpha_i}$ y se deduce la cota del lema. Consideremos n fijo y apliquemos la cota anterior a δ_{n+k} y del hecho que $\alpha_k \in (0, 1)$, se tiene que

$$\delta_{n+k} \leq e^{-\sum_{j=n+1}^{n+k} \alpha_j} \delta_n + \sum_{j=n+1}^{n+k-1} \gamma_j + \sum_{i=n+1}^{n+k} \alpha_i \varepsilon_i.$$

Como $\sum \alpha_j = \infty$ tomando $k \rightarrow \infty$ se tiene que $0 \leq \lim \delta_k \leq \sum_{j \geq n+1} \gamma_j + \sum_{j \geq n+1} \alpha_j \varepsilon_j$ para todo $n \geq 0$. Del hecho que $(\alpha_j \varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ y $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ son sumables, se deduce que $\lim \delta_k = 0$. Ahora resta probar que la serie $\sum \alpha_{k+1} \delta_k$ es convergente, para ello se utilizará la desigualdad que ya probamos

$$\alpha_{k+1} \delta_k \leq \alpha_{k+1} e^{-\sum_{i=2}^k \alpha_i} \delta_1 + \alpha_{k+1} \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i e^{-\sum_{j=i+1}^k \alpha_j} + \alpha_{k+1} \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i \varepsilon_i e^{-\sum_{j=i+1}^k \alpha_j} + \alpha_{k+1} \alpha_k \varepsilon_k.$$

Luego debemos probar que cada uno de los términos del lado derecho es sumable. El término $\alpha_{k+1} \alpha_k \varepsilon_k \leq \alpha_k \varepsilon_k$ es sumable por hipótesis. Sea $T_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y calculemos la n -ésima suma parcial del primer término

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_{k+1} e^{-\sum_{i=2}^k \alpha_i} \delta_1 &= e^{\alpha_1} \delta_1 \sum_{k=1}^n \alpha_{k+1} e^{-\sum_{i=1}^k \alpha_i} \\ &\leq e^{\alpha_1} \delta_1 \int_0^{T_n} e^{-t} dt \\ &= e^{\alpha_1} \delta_1 (1 - e^{-T_n}). \end{aligned}$$

Como $T_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ diverge se concluye que $0 \leq \sum \alpha_{k+1} e^{-\sum_{i=2}^k \alpha_i} \leq e^{\alpha_1} \delta_1$. La convergencia del segundo y tercer término es un cálculo directo. Como los términos son todos positivos, del teorema de Fubini-Tonelli se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k+1} \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i e^{-\sum_{j=i+1}^k \alpha_j} &= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \sum_{k=i+1}^{\infty} \alpha_{k+1} e^{-\sum_{j=i+1}^k \alpha_j} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e^{-\alpha_{i+1}} < \infty. \end{aligned}$$

De manera análoga, para el tercer término se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k+1} \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i \varepsilon_i e^{-\sum_{j=i+1}^k \alpha_j} &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_i \sum_{k=i+1}^{\infty} \alpha_{k+1} e^{-\sum_{j=i+1}^k \alpha_j} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1} \varepsilon_i e^{-\alpha_{i+1}} < \infty. \end{aligned} \quad \square$$

Finalmente, podemos escoger $\gamma_k \leq \alpha_k \|e_k\|$ y usar el lema anterior con $\varepsilon_k = \|e_k\|$ para deducir la regularidad asintótica de la iteración (3.17). Dicho todo esto, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.14 *Sea x_k la iteración definida por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tz_{k-1} + e_k)$ con $x_0 \in C$ y $z_k \in C$ tal que $\|x_k - z_k\| \leq d(x_k, C) + \alpha_{k+1}\|e_{k+1}\|$. Si $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ y $\sum \alpha_k\|e_k\| < \infty$, entonces $\|x_k - z_k\| \rightarrow 0$ y $\|z_k - Tz_k\| \rightarrow 0$.*

Notemos que, si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posee algún punto de acumulación débil, entonces existirá una subsucesión $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge débil a un punto fijo del operador T en un espacio uniformemente convexo. También, si X posee la propiedad de Opial entonces podemos extender la convergencia a toda la sucesión y así $z_n \rightarrow z$ par algún $z \in \text{Fix}(T)$. En particular, podemos enunciar el siguiente resultado en un espacio de Hilbert respecto a las iteraciones (3.15) y (3.16).

Teorema 3.15 *Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo definido sobre un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado en un espacio de Hilbert X . Sea x_k la iteración definida por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(T \circ P_C x_{k-1} + e_k)$ con $x_0 \in C$, donde P_C es la proyección métrica sobre C . Si $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k)$ diverge entonces x_k converge débil a $x \in \text{Fix}(T)$. Similarmente, si y_k es la iteración definida por $y_k = (1 - \alpha_k)y_{k-1} + \alpha_k P_C(Ty_{k-1} + e_k)$ con $y_0 \in C$ y $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$, entonces y_k converge débil a $y \in \text{Fix}(T)$.*

3.5. Aplicaciones del resultado principal

En esta sección discutiremos algunos resultados que se pueden obtener a partir del resultado principal de esta tesis, el Teorema 3.7. Se estudiarán una serie de iteraciones que aparecen en diferentes contextos, probando su regularidad asintótica en un espacio de Banach general.

Se deducirá la regularidad asintótica para la famosa iteración de Ishikawa en espacios de Banach, también obteniendo una versión cuantitativa de este teorema. Se obtendrá un resultado de aproximación a puntos fijos a través de una secuencia de operadores no expansivos y cotas para las soluciones de una ecuación de evolución no lineal no homogénea, que corresponde a la versión continua de la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores.

3.5.1. Iteración de Ishikawa

Browder y Petryshyn [6] clasificaron algunos tipos de operadores que admitían procesos iterativos para encontrar sus puntos fijos. Obviamente los operadores no expansivos fueron estudiados por ellos, pero también lo hicieron para una clase más general denominada operadores pseudo contractivos. Un operador $T : C \rightarrow X$ se dirá *pseudo contractivo* si para todo $x, y \in C$

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|(I - T)x - (I - T)y\|^2. \quad (3.20)$$

Es claro que todo operador no expansivo es también pseudo contractivo, pero existen ejemplos de operadores pseudo contractivos que fallan la no expansividad. En 1974 Ishikawa [20] introduce una nueva iteración para encontrar puntos fijos de operadores pseudo contractivos, la que consiste en dos pasos de la iteración de Krasnoselskii-Mann. La iteración de Ishikawa

se define a través del siguiente esquema

$$\begin{cases} y_{k-1} &= (1 - \beta_{k-1})x_{k-1} + \beta_{k-1}Tx_{k-1} \\ x_k &= (1 - \alpha_{k-1})x_{k-1} + \alpha_{k-1}Ty_{k-1} \end{cases} \quad (3.21)$$

donde $x_0 \in C$ es un punto arbitrario. Ishikawa probó que la iteración (3.21), para un operador Lipchitz y pseudo contractivo definido en un espacio de Hilbert, converge fuerte a un punto fijo suponiendo que

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq 1 \text{ para todo } k \geq 1, \\ \lim \beta_k = 0, \\ \sum \alpha_k \beta_k = \infty. \end{cases}$$

Cuando T es un operador no expansivo, se probó en [31] que la iteración de Ishikawa converge débil a un punto fijo en un espacio de Banach uniformemente convexo y con norma suave, asumiendo las siguientes condiciones sobre los coeficientes

$$\begin{cases} \sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty, \\ \sum \beta_k(1 - \alpha_k) < \infty, \\ \limsup \beta_k < 1. \end{cases}$$

La iteración de Ishikawa puede identificarse con una iteración de Krasnoselskii-Mann con errores apropiados. Por lo tanto, usando el Teorema 3.7 probaremos la regularidad asintótica de la iteración de Ishikawa en un espacio de Banach general. Además, la convergencia será uniforme con respecto al punto inicial $x_0 \in C$ y a la clase de operadores no expansivos definidos sobre C .

Teorema 3.16 *Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo definido sobre un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado. Sea x_n el n -ésimo término de la iteración definida por $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTy_n$ donde $y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n$ y $x_0 \in C$. Si $\beta_n \rightarrow 0$, $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ y $\sum \alpha_k \beta_k < \infty$, entonces $\|x_n - Tx_n\|$ converge a 0, uniformemente en $x_0 \in C$ y $T \in \mathcal{F}(C)$, donde $\mathcal{F}(C)$ es la familia de operadores no expansivos $f : C \rightarrow C$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea x_k el k -ésimo término de la iteración de Ishikawa, entonces podemos escribir $x_k = (1 - \alpha_{k-1})x_{k-1} + \alpha_{k-1}Ty_{k-1} = (1 - \alpha_{k-1})x_{k-1} + \alpha_{k-1}(Tx_{k-1} + Ty_{k-1} - Tx_{k-1})$. Entonces x_k es el k -ésimo término de una iteración de Krasnoselskii-Mann con errores $e_k = Ty_k - Tx_k$, y está bien definida pues $x_k \in C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando la no expansividad de T se tiene que $\|e_k\| \leq \|x_k - y_k\| = \beta_k \|x_k - Tx_k\| \leq \beta_k \text{diam}(C)$ y así $\sum \alpha_k \|e_k\| \leq \text{diam}(C) \sum \alpha_k \beta_k < \infty$. Como $\beta_n \rightarrow 0$, del Teorema 3.7 se deduce que $\|x_n - Tx_n\|$ converge a 0. Además, la convergencia es uniforme en el punto inicial y en $\mathcal{F}(C)$. \square

Lo primero interesante de este resultado son las condiciones bajo las cuales se obtiene la regularidad asintótica para la iteración de Ishikawa. Bajo las condiciones del resultado original de Ishikawa, podemos observar que la condición $\alpha_k \leq \beta_k$ implica que los coeficientes $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ están suficientemente alejados de 1 pues $\beta_k \rightarrow 0$. De esto se deduce que la condición $\sum \alpha_k \beta_k = \infty$ implica que $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ pues $\beta_k \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por considerar la

condición $\sum \alpha_k \beta_k < \infty$, el Teorema 3.16 es una suerte de dual del resultado original obtenido por Ishikawa para operadores no expansivos. Además, en el caso de un espacio de Hilbert se recupera la convergencia débil de la iteración de Ishikawa para un operador no expansivo. Por último, de acuerdo al Teorema 3.10 es posible dar una tasa de convergencia para $\|x_n - Tx_n\|$. Con el Teorema 3.10 y utilizando que $\|e_k\| \leq \beta_k$ podemos deducir la versión cuantitativa de la iteración de Ishikawa para un operador no expansivo.

Teorema 3.17 *Sea x_k el k -ésimo término de la iteración de Ishikawa y supongamos que $0 < \liminf \alpha_k \leq \limsup \alpha_k < 1$. Entonces se tiene que*

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}} \sum_{k \geq 1} \alpha_k \beta_k + C_2 \sum_{i \geq n/2} \alpha_i \beta_i + 2\|\beta_n\| \quad (3.22)$$

donde $C_1 = \frac{1+2^{3/2}}{\sqrt{\pi\tau}}$, $C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}}$ y $\tau = \inf \alpha_k(1-\alpha_k) > 0$. Además, suponiendo que $\sum \alpha_k \beta_k < \infty$ y $\beta_n \rightarrow 0$, se concluye que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.

3.5.2. Aproximación uniforme por operadores no expansivos

En [32] se considera una variante de la iteración de Krasnoselskii-Mann para resolver el siguiente problema. Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y $A : H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal y acotado. Sean $C \subseteq H_1$ y $Q \subseteq H_2$ dos conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados, queremos encontrar un punto tal que

$$x \in C \text{ y } Ax \in Q. \quad (3.23)$$

Suponiendo que existe un punto x satisfaciendo (3.23), se menciona en [32] que x cumple (3.23) si y solamente si satisface

$$x = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)x, \quad (3.24)$$

donde $\gamma > 0$ es cualquier número, A^* es el operador adjunto de A y P_C, P_Q son las proyecciones métricas de C y Q respectivamente. Resulta ser que el operador $T = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)$ es no expansivo definido en este contexto, por lo tanto el punto x que satisface (3.23) es un punto fijo de T . Claramente podemos utilizar la iteración de Krasnoselskii-Mann para resolver este problema, no obstante en [32] se considera la iteración

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k T_k(x_{k-1}) \quad (3.25)$$

donde $x_0 \in C$ es un punto arbitrario, para resolver el problema. Los operadores T_k se definen del mismo modo que T , pero en lugar de considerar C y Q , se utilizan conjuntos convexos y cerrados C_k y Q_k donde es más sencillo calcular la proyección métrica. En efecto, el operador T_k está definido por $T_k = P_{C_k}(I - \gamma A^*(I - P_{Q_k})A)$ donde $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de conjuntos convexos y cerrados que convergen a C y Q respectivamente.

De forma más general, podemos enunciar el problema (3.23) mediante una sucesión convergente de operadores. Considere $\mathcal{F}(C)$ a la colección de operadores no expansivos $T : C \rightarrow C$,

donde C es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado en un espacio de Banach X . Definiremos la distancia uniforme en $\mathcal{F}(C)$ mediante

$$\rho(T, S) = \sup\{\|Tx - Sx\| : x \in C\},$$

que resulta ser una métrica en $\mathcal{F}(C)$. De esta forma, una sucesión de operadores $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}(C)$ converge uniforme a T si $\rho(T_n, T) \rightarrow 0$. Con esta topología los operadores contractantes son densos en $\mathcal{F}(C)$ y las isometrías son un conjunto cerrado. En [32] consideran la iteración (3.25), y suponiendo que

$$\begin{cases} \sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty \text{ y} \\ \sum \alpha_k \rho(T_k, T) < \infty, \end{cases}$$

prueban la convergencia débil de (3.25) en un espacio de Banach uniformemente convexo donde la norma es de clase \mathcal{C}^1 . Acá extendemos este resultado probando que la iteración (3.25) verifica la regularidad asintótica en un espacio de Banach general y por lo tanto se tendrá convergencia débil a un punto fijo cuando se verifique el principio demicerrado y la propiedad de Opial.

Teorema 3.18 *Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo y $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}(C)$ una sucesión de operadores no expansivos que converge a T . Sea x_k la sucesión definida por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k T_k(x_{k-1})$ y $x_0 \in C$. Si $\sum \alpha_k(1 - \alpha_k) = \infty$ y $\sum \alpha_k \rho(T_k, T) < \infty$, entonces $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_k \in C$, por lo que no tendremos que utilizar proyecciones aproximadas. Consideremos $e_k = T_k x_{k-1} - T x_{k-1}$ y así la iteración (3.25) se escribe como una iteración de Krasnoselskii-Mann con errores $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En efecto, se tiene que

$$x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tx_{k-1} + T_k x_{k-1} - Tx_{k-1}) = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k(Tx_{k-1} + e_k).$$

De las hipótesis se tiene que $\|e_n\| \leq \rho(T_n, T) \rightarrow 0$ y $\sum \alpha_k \|e_k\| \leq \sum \alpha_k \rho(T_k, T) < \infty$. Por lo tanto, del Teorema 3.7 se deduce directamente el resultado. \square

Como se ha mencionado antes, en este caso la convergencia será uniforme con respecto al punto inicial $x_0 \in C$. También es posible dar una versión cuantitativa de este teorema cuando los coeficientes α_k están lo suficientemente lejos de los extremos, se dejará sin demostración por ser una consecuencia directa del Teorema 3.10 y la demostración anterior.

Teorema 3.19 *Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo y $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}(C)$ una sucesión de operadores no expansivos que converge a T . Sea x_k una sucesión definida por $x_k = (1 - \alpha_k)x_{k-1} + \alpha_k T_k(x_{k-1})$. Suponga que $0 < \liminf \alpha_k \leq \limsup \alpha_k < 1$, entonces*

$$\frac{\|x_n - Tx_n\|}{\text{diam}(C)} \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}} \sum_{k \geq 1} \alpha_k \rho(T_k, T) + C_2 \sum_{i \geq n/2} \alpha_i \rho(T_i, T) + 2\rho(T_{n+1}, T) \quad (3.26)$$

donde $C_1 = \frac{1+2^{3/2}}{\sqrt{\pi\tau}}$, $C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}}$ y $\tau = \inf \alpha_k(1 - \alpha_k) > 0$. Además, suponiendo que $\sum \alpha_k \rho(T_k, T) < \infty$ se concluye que $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$.

3.5.3. Caso continuo: La ecuación $u'(t) + (I - T)u(t) = f(t)$

En el artículo de Baillon y Bruck [2], además de determinar la velocidad de regularidad asintótica para el caso constante, también establecen una conexión entre la iteración de Krasnoselskii-Mann con la discretización clásica para estimar la solución de la ecuación $u'(t) + (I - T)u(t) = 0$. En esta sección consideraremos un problema similar, estudiaremos una versión continua de la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores. Como siempre, consideremos X un espacio de Banach y $C \subseteq X$ un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado con $\text{diam}(C) \leq 1$. Sea $T : C \rightarrow C$ un operador no expansivo y $u : [0, +\infty) \rightarrow C$ una solución \mathcal{C}^1 del problema

$$\begin{cases} u(0) = x_0 \in C \\ \frac{du(t)}{dt} + (I - T)u(t) = f(t) \quad \text{para } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Donde $f : [0, +\infty) \rightarrow C$ es una función continua e integrable en \mathbb{R} . Consideremos el operador $\phi : \mathcal{C}([0, t], X) \rightarrow \mathcal{C}([0, t], X)$ definido por $\phi(u)(s) = (T - I)u(s) + f(s)$, del hecho que ϕ es 2-Lipchitz para la norma uniforme en $\mathcal{C}([0, t], X)$ se deduce que la ecuación (3.27) tiene una única solución.

Lema 3.20 ([9]) *La ecuación (3.27) tiene una única solución \mathcal{C}^1 .*

El siguiente lema establece la conexión entre la iteración de Krasnoselskii-Mann con la solución de la ecuación (3.27). En efecto, resulta ser que la discretización de tipo Euler para la ecuación (3.27), con paso $\frac{t}{n}$ en el intervalo $[0, t]$, corresponde a una iteración de Krasnoselskii-Mann con errores apropiados.

Lema 3.21 *Sea u la solución de (3.27), $t > 0$ y $\lambda_n = \frac{t}{n}$. Sea x_k^n el k -ésimo término de la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores a coeficiente constante λ_n , es decir, $x_{k+1}^n = (1 - \lambda_n)x_k^n + \lambda_n(Tx_k^n + e_k^n)$ donde $x_0^n = x_0$ y $e_k = f(kt/n)$. Entonces $x_n^n \rightarrow u(t)$ y $(x_n^n - x_{n-1}^n)/\lambda_n \rightarrow u'(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $t > 0$ consideremos $P_n = \{t_0^n, \dots, t_n^n\}$ una partición del intervalo $[0, t]$, con $t_k^n = k\lambda_n$ para $k = 0, \dots, n$. Definiremos una función lineal por trozos $u_n : [0, t] \rightarrow C$ mediante

$$\begin{cases} u_n(t_{k+1}^n) - u_n(t_k^n) = -\frac{t}{n}[(I - T)u_n(t_k^n) + f(t_k^n)] & \text{para } k = 1, \dots, n, \\ u_n(\lambda t_k^n + (1 - \lambda)t_{k+1}^n) = \lambda u_n(t_k^n) + (1 - \lambda)u_n(t_{k+1}^n) & \text{para todo } \lambda \in [0, 1], \\ u_n(0) = x_0 \in C. \end{cases} \quad (3.28)$$

De este modo, $u_n(t_k^n) = x_k^n$ para todo $k \leq n$, donde x_k^n es el k -ésimo término de la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores como en el enunciado del lema. Supongamos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en la topología uniforme en $\mathcal{C}([0, t], C)$ a una función $\bar{u} : [0, t] \rightarrow C$ y definamos $\Delta_k^n = t_{k+1}^n - t_k^n = \frac{t}{n}$. Para $s \in [0, t]$ consideremos $k_n(s) = \max\{k \leq n : t_k^n \leq s\}$, sumando en

(3.28) hasta $k_n(s)$ se tiene que

$$u_n(t_{k_n(s)}^n) = x_0 - \sum_{i=0}^{k_n(s)} (I - T)u_n(t_i^n) \Delta_i^n + \sum_{i=0}^{k_n(s)} f(t_i^n) \Delta_i^n.$$

Notemos que $t_{k_n(s)}^n \rightarrow s$ cuando $n \rightarrow \infty$. Del teorema de convergencia dominada, para medidas con valores en espacios de Banach, se deduce que para todo $s \in [0, t]$

$$u(s) = u(0) - \int_0^s (I - T)u(m)dm + \int_0^s f(m)dm.$$

Luego $\bar{u} \in C^1$ y por lo tanto \bar{u} es la única solución de la ecuación (3.27), por lo que sólo debemos probar que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene algún punto de acumulación. Para hacer esto utilizaremos la versión del teorema de Arzelà-Ascoli para funciones a valores en un espacio de Banach. Sea $s \in [0, t]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $u_n(s) \in C$ y por lo tanto $(u_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotado pues C es acotado. Sea $\varepsilon > 0$ y $s_0 \in [0, t]$, sólo es necesario probar que $\|u_n(s) - u_n(s_0)\| \leq \varepsilon$ para todo $s \in V(\varepsilon)$ una vecindad de s_0 y n lo suficientemente grande. Sea $k_n(x) = \max\{k \leq n : t_k^n \leq x\} = \lfloor \frac{xn}{t} \rfloor$, como $x \in [t_{k_n(x)}^n, t_{k_n(x)+1}^n]$ y las funciones u_n son lineales por trozos se tiene que

$$\|u_n(x) - u_n(t_{k_n(x)}^n)\| \leq \|u_n(t_{k_n(x)+1}^n) - u_n(t_{k_n(x)}^n)\| = \frac{t}{n} \|(I - T)u_n(t_{k_n(x)}^n) + f(t_{k_n(x)}^n)\| \leq \frac{Kt}{n}$$

donde $K = 2 + \max_{s \in [0, t]} \|f(s)\|$. Supongamos sin perder generalidad que $x \geq s_0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n(x) - u_n(s_0)\| &\leq \|u_n(x) - u_n(t_{k_n(x)}^n)\| + \|u_n(t_{k_n(x)}^n) - u_n(t_{k_n(s_0)}^n)\| + \|u_n(t_{k_n(s_0)}^n) - u_n(s_0)\| \\ &\leq \frac{2Kt}{n} + \|u_n(t_{k_n(x)}^n) - u_n(t_{k_n(s_0)}^n)\| \\ &\leq \frac{2Kt}{n} + \sum_{i=k_n(s_0)}^{k_n(x)-1} \|u_n(t_{i+1}^n) - u_n(t_i^n)\| \\ &\leq \frac{2Kt}{n} + \frac{t}{n} \sum_{i=k_n(s_0)}^{k_n(x)-1} \|(I - T)u_n(t_i^n) + f(t_i^n)\| \\ &\leq \frac{2Kt}{n} + \frac{Kt}{n} \left(\lfloor \frac{xn}{t} \rfloor - \lfloor \frac{s_0 n}{t} \rfloor \right) = \frac{2Kt}{n} + K(|x - s_0| + o(1)). \end{aligned}$$

Por lo que si n es suficientemente grande y $|x - s_0| \leq \delta$, para cierto $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$, se tiene que $\|u_n(x) - u_n(s_0)\| \leq \varepsilon$ probando la equicontinuidad en s_0 . Ahora, podemos usar Arzelà-Ascoli y encontrar una subsucesión $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a u , la única solución de la ecuación (3.27). Finalmente, notemos que $(x_n^n - x_{n-1}^n)/\lambda_n = -(I - T)u(t_{n-1}^n) + f(t_{n-1}^n)$ y así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^n - x_{n-1}^n}{\lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -(I - T)u(t_{n-1}^n) + f(t_{n-1}^n) = -(I - T)u(t) + f(t) = u'(t).$$

Teorema 3.22 Sea $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty), C)$ la solución del problema (3.27). Luego, para todo $t \geq 0$ se verifica que

$$\|u'(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \|f(t)\| + o(1).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $t > 0$ y consideremos la misma notación que en el Lema 3.20. Entonces x_k^n es el k -ésimo término de la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores a coeficiente constante $\lambda_n = \frac{t}{n}$, es decir, $x_{k+1}^n = (1 - \lambda_n)x_k^n + \lambda_n(Tx_k^n + e_k^n)$ donde $x_0^n = x_0$ y $e_k = f(kt/n)$. Del Lema 3.20 sabemos que $x_n^n \rightarrow u(t)$, donde $u : [0, +\infty) \rightarrow C$ es la única solución \mathcal{C}^1 de la ecuación (3.27). De las cotas para la iteración de Krasnoselskii-Mann se tiene que

$$\frac{\|x_n^n - x_{n-1}^n\|}{\lambda_n} \leq \frac{a_{n-1n}^{\lambda_n} + b_{n-1n}^{\lambda_n} + c_{n-1n}^{\lambda_n}}{\lambda_n}.$$

Del Teorema 2.10 se deduce que

$$\frac{c_{n-1n}^{\lambda_n}}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (3.29)$$

para n suficientemente grande. Ahora, la cota de la Proposición 3.5 establece que

$$\frac{a_{n-1n}^{\lambda_n}}{\lambda_n} \leq \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\frac{t}{n}\|f(\frac{it}{n})\|}{\sqrt{\pi\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})(n-1-i)}} + \frac{t}{n}\|f(t-t/n)\| \sim \int_0^t \frac{\|f(s)\|}{\sqrt{\pi(t-s)}} ds \quad (3.30)$$

si n es lo suficientemente grande. Lamentablemente la integral que aparece en (3.30) tiene una singularidad en el punto $s = t$ y no es claro ni siquiera si la integral es finita. Este problema es el mismo por el cual el Teorema 3.8 no es suficiente para asegurar la regularidad asintótica para la iteración de Krasnoselskii-Mann general y sólo funciona cuando los coeficientes están alejados de los bordes, lo que justamente falla en este caso. En lugar de utilizar esta estrategia, ocuparemos el argumento de la demostración del Teorema 3.7 para acotar ambas cantidades. Con la misma notación del Teorema 3.7 se tiene que

$$\frac{a_{n-1n}^{\lambda_n} + b_{n-1n}^{\lambda_n}}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-3} \|e_{i+1}\| [\mathbf{P}(R_i^1|(n-1, n)) + \mathbf{P}(R_i^2|(n-1, n))] + \frac{2t}{n}\|f(t-t/n)\| + \|f(t)\|.$$

Del mismo modo, se tiene que

$$\frac{\mathbf{P}(R_i^1|(n-1, n))}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})(n-1-i)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

si n es lo suficientemente grande y similarmente para $\mathbf{P}(R_i^2|(n-1, n))$. Por lo tanto tomando $n = 2^t$ y usando el Lema 3.20, se deduce que para t suficientemente grande

$$\|u'(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \|f(t)\| + o_t(1).$$

□

Conclusión

En primer lugar, el principal resultado obtenido en esta memoria, el Teorema 3.7, establece la regularidad asintótica de la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores en un espacio de Banach general. La regularidad asintótica de esta iteración ya había sido probada en un espacio de Hilbert bajo las mismas hipótesis, de modo que el Teorema 3.7 permitirá el estudio de puntos fijos aproximados en una vasta clase de espacios de Banach, como los espacios L^p para $p \neq 2$. Por otro lado, el Teorema 3.10 entrega la tasa de regularidad asintótica cuando los coeficientes involucrados en la iteración están lo suficientemente alejados de 0 y 1. La tasa encontrada en este trabajo es una mejora a los resultados previos, pues se determina en el caso de un espacio de Banach general. Aún más, las hipótesis requeridas en el Teorema 3.10 son bastante débiles en comparación con los resultados previos en esta dirección, y probablemente la cota obtenida en el Teorema 3.10 está cerca de ser la mejor posible.

Se debe destacar que los resultados obtenidos, para la iteración de Krasnoselskii-Mann con errores, permiten el estudio de otros procesos iterativos conocidos. Gracias al Teorema 3.7 se extienden resultados de convergencia de otros procesos, como la iteración de Ishikawa, a espacios de Banach generales y con hipótesis muy débiles. El Teorema 3.10 por su parte, permite deducir versiones cuantitativas de estos teoremas, obteniendo nuevos resultados que podrán ser utilizados en la implementación de algoritmos de cómputo de puntos fijos.

Por otra parte, la técnica utilizada para demostrar el Teorema 3.7 ha demostrado ser muy versátil. Sería interesante estudiar si se puede seguir explotando este recurso para obtener nuevos resultados. Por ejemplo determinar si en un espacio de Hilbert existe $\gamma > \frac{1}{2}$ tal que $\|T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x\| = O(n^{-\gamma})$ para todo $\alpha \in (0, 1)$. Por otro lado, resultaría interesante estudiar qué relación exacta existe entre los promedios en un espacio de Banach y los procesos aleatorios definidos en \mathbb{R}^N . Por ejemplo, si se define la sucesión $x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \dots + \alpha_k T^d x_n$ donde $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$, ¿existirá un proceso aleatorio en \mathbb{Z}^d que domine el comportamiento asintótico de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Finalmente, la iteración de Krasnoselskii-Mann también ha sido estudiada para encontrar puntos fijos de operadores definidos sobre espacios métricos con estructura convexa, probándose la convergencia a un punto fijo bajo hipótesis similares a las del caso normado. Un ejemplo clásico de espacios métricos convexos es la esfera unitaria de un espacio de Hilbert complejo, donde las funciones holomorfas, definidas sobre la esfera, resultan ser no expansivas usando la métrica hiperbólica. Resulta natural entonces preguntar si será posible adaptar el método utilizado en la demostración del Teorema 3.7 al contexto de espacios métricos convexos.

Bibliografía

- [1] J. B. Baillon and R. E. Bruck. Optimal rates of asymptotic regularity for averaged nonexpansive mappings. *Proceedings of the Second International Conference on Fixed Point Theory and Applications*, pages 27 – 66, 1992.
- [2] J. B. Baillon and R. E. Bruck. The rate of asymptotic regularity is $O(1/\sqrt{n})$. *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Types, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 178:51 – 81, 1996.
- [3] V. Berinde. *Iterative Approximation of Fixed Points*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [4] J. M. Borwein. Proximity and Chebyshev sets. *Optimization Letters*, 1(1):21–32, 2007.
- [5] M. Bravo and R. Cominetti. Sharp convergence rates for averaged nonexpansive maps. <http://arxiv.org/abs/1606.05300>, 2016.
- [6] F. Browder and W. Petryshyn. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 20(2):197 – 228, 1967.
- [7] F. E. Browder. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 54:1041 – 1044, 1965.
- [8] F. E. Browder and W. V. Petryshyn. The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72(3):571–575, 05 1966.
- [9] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York, New York, 2010.
- [10] P. L. Combettes. Quasi-Fejérian analysis of some optimization algorithms. *Studies in Computational Mathematics*, 8:115 – 152, 2001.
- [11] R. Cominetti, J. Soto, and J. Vaisman. On the rate of convergence of Krasnosel’skii-Mann iterations and their connections with sums of Bernoullis. *Israel Journal of Mathematics*, 199, 2014.
- [12] M. M. Day. Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 47(4):313–317, 04 1941.

- [13] M. Edelstein. A remark on a theorem of M. A. Krasnoselski. *The American Mathematical Monthly*, 73(5):509–510, 1966.
- [14] M. Edelstein and R. C. O’Brien. Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-17(3):547–554, 1978.
- [15] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol.1.* John Wiley & Sons, New York, 1950.
- [16] A. Genel and J. Lindenstrauss. An example concerning fixed points. *Israel Journal of Mathematics*, 22(1):81–86, 1975.
- [17] K. Goebel and W. A. Kirk. Iteration processes for nonexpansive mappings. *Contemporary Mathematics, Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis*, 21:115–123, 1983.
- [18] K. Goebel and W. A. Kirk. *Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics no. 28.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [19] C. Groetsch. A note on segmenting Mann iterates. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 40(2):369 – 372, 1972.
- [20] S. Ishikawa. Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(1):147–150, 1974.
- [21] S. Ishikawa. Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a banach space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 59(1):65–71, 1976.
- [22] W. A. Kirk and B. Sims. *Handbook of Metric Fixed Point Theory.* Springer Netherlands, 2001.
- [23] M. A. Krasnoselskii. Two remarks on the method of successive approximations. *Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10:123 – 127, 1955.
- [24] J. Liang, J. Fadili, and G. Peyré. Convergence rates with inexact non-expansive operators. *Mathematical Programming*, pages 1–32, 2014.
- [25] L. Liu. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 194(1):114 – 125, 1995.
- [26] W. R. Mann. Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4:506–510, 1953.
- [27] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics.* Springer New York, 1998.

- [28] Z. Opial. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(4):591–597, 07 1967.
- [29] R. Phelps. Convex sets and nearest points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(4):790–797, 1957.
- [30] H. Schaefer. Über die methode sukzessiver approximationen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 59:131 – 140, 1957.
- [31] K. Tan and H. Xu. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 178(2):301 – 308, 1993.
- [32] H. Xu. A variable Krasnoselskii-Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem. *Inverse Problems*, 22(6):2021, 2006.