



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN CANAL DE OLAS CON ABSORCIÓN DE ONDAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MECANICO

JOSÉ MANUEL FAÚNDEZ ALARCÓN

PROFESOR GUÍA:  
RODRIGO HERNANDEZ PELLICER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JOSÉ MIGUEL AHUMADA  
JUAN CARLOS ELICER CORTÉS

SANTIAGO DE CHILE  
2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO  
POR: JOSÉ MANUEL FAÚNDEZ ALARCÓN  
FECHA: MARZO, 2017  
PROF. GUÍA: SR. RODRIGO HERNANDEZ PELLICER

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN CANAL DE OLAS CON ABSORCIÓN DE ONDAS

Actualmente existe un gran interés científico por las distintas formas de conversión de energías renovables no convencionales (ERNC). Una de ellas, que pretende ser una alternativa a las ya presentes en el mercado, es la energía undimotriz. El estado actual de este tipo de energía se encuentra a nivel de laboratorio, con algunos prototipos instalados a modo de prueba. Todos estos sistemas de conversión de energía marina necesitan ser caracterizados bajo condiciones controladas de laboratorio, típicamente utilizando un canal con generación artificial de ondas de superficie que represente lo mejor posible las condiciones reales del mar. Las simulaciones numéricas representan una etapa inicial de diseño de bajo costo para distintos mecanismos, entre los que se encuentran los canales de olas.

El objetivo de este trabajo de título es realizar una simulación numérica transiente 2D, mediante el software comercial Fluent, de un canal longitudinal para estudiar la propagación de ondas de superficie en agua. Las simulaciones numéricas son realizadas en el cluster de cómputo paralelo del laboratorio de Estudios Avanzados en Fenómenos No Lineales (LEAF-NL) del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Chile.

La simulación es realizada para una onda bajo la teoría lineal. Esta onda es generada por un generador de tipo pistón en un canal de dos dimensiones, donde la generación se realiza por el borde izquierdo del canal y la absorción por el derecho. Los resultados obtenidos mediante el software CFD se ajustan a la teoría lineal de ondas, lo que se comprobó con el registro del nivel de superficie de agua en distintos puntos del canal y su posterior comparación con los valores teóricos.

Se estudia y diseña el mecanismo de atenuación de las ondas reflejadas en la pared opuesta a la de generación, el cual consiste en un mecanismo de atenuación activo del tipo cinemático. Este diseño se realiza estudiando la respuesta dinámica del sistema ante una entrada de tipo escalón, en donde se registra la amplitud de onda generada para distintas velocidades de entrada del pistón y se caracteriza el sistema como uno de segundo orden.

En base a este diseño se plantean dos mecanismos de absorción del tipo cinemático mediante un sistema de control, los cuales son simulados y comparados por su desempeño frente a una onda armónica bajo la teoría lineal. Además, se realiza la simulación de uno de los mecanismos de absorción ante una onda de tipo impulsiva. Para los dos tipos de onda probados los mecanismos diseñados logran atenuar las ondas reflejadas a lo largo del canal.

# Agradecimientos

A mis padres y familia, por ser quienes me han aguantado y acompañado a lo largo de toda mi vida. Por apoyarme en cada una de mis decisiones, incluso cuando no tienen ni idea de qué estudié.

Al profesor Rodrigo Hernandez, por permitirme realizar este trabajo de título, facilitándome el uso del cluster del LEAF-NL. Por su conocimiento y apoyo.

A Charlie Barraud, por siempre tener un tiempo disponible para explicarme y ayudarme.

A la Vale, por su compañía, consejos y, a veces poca, paciencia.

A mis amigos del colegio, que a pesar de tomar distintos caminos es un gusto juntarnos de vez en cuando a hacer y hablar lo mismo de siempre. Pronto construiremos el barco.

A mis profesoras de colegio Pamela e Isabel, por su motivación y enseñanza. Sé que este agradecimiento no compensa la ingratitud de estos años.

A mis amigos de la universidad, por sus palabras de aliento, los días de estudio y los de no-estudio. Creo que sólo sería un cliché si dijera que todo esto hubiese sido imposible sin ustedes, pero sin duda hubiese sido más fome, sobretodo cuando la contienda era desigual.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes generales . . . . .	1
1.2. Objetivo general . . . . .	2
1.3. Objetivos específicos . . . . .	2
1.4. Alcances . . . . .	2
<b>2. Metodología</b>	<b>3</b>
<b>3. Antecedentes específicos</b>	<b>4</b>
3.1. Teoría de ondas lineales . . . . .	4
3.2. Ondas armónicas . . . . .	5
3.3. Validez teoría lineal . . . . .	6
3.4. Generación de Olas . . . . .	7
3.4.1. Desplazamiento de Stroke . . . . .	7
3.4.2. Perfil de la onda generada . . . . .	7
3.4.3. Fuerza sobre una paleta oscilando . . . . .	8
3.5. Absorción de ondas en un canal . . . . .	8
3.5.1. Absorción pasiva . . . . .	9
3.5.2. Absorción activa . . . . .	9
3.5.3. Dinámica de un atenuador tipo pistón . . . . .	11
3.5.4. Potencia absorbida . . . . .	13
3.6. Diseño del sistema de absorción . . . . .	13
3.6.1. Dinámico . . . . .	14
3.6.2. Cinemática . . . . .	15
3.7. Respuesta dinámica de un sistema de segundo orden . . . . .	16
<b>4. Resultados</b>	<b>19</b>
4.1. Formulación del modelo . . . . .	19
4.1.1. Representación del esquema . . . . .	19
4.1.2. Geometría y condiciones de borde . . . . .	19
4.1.3. Modelo multifásico . . . . .	20
4.1.4. Ecuaciones gobernantes en el fluido . . . . .	20
4.1.5. Método Numérico . . . . .	21
4.2. Condiciones de operación . . . . .	22
4.3. Mallado . . . . .	22
4.4. Comparación con la teoría lineal . . . . .	26

4.5. Absorción activa . . . . .	28
4.5.1. Dinámica . . . . .	28
4.5.2. Cinemática . . . . .	31
4.6. Implementación del sistema de absorción cinemático . . . . .	39
4.6.1. Absorción de un onda armónica . . . . .	41
4.6.2. Absorción de un onda impulsiva . . . . .	45
<b>5. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>
<b>Anexos</b>	<b>I</b>
Anexo A. Ecuación de Bernoulli . . . . .	I
Anexo B. Linealización de la condición de borde . . . . .	II
Anexo C. Modelo VOF . . . . .	IV
Anexo D. Figuras no utilizadas . . . . .	V

# Índice de Tablas

4.1. Mallas utilizadas para el estudio de independencia de malla. . . . .	24
4.2. Tabla de errores RMS entre las mallas. . . . .	25
4.3. Tabla de error RMS respecto a la teoría lineal. . . . .	27
4.4. Parámetros de las funciones escalón utilizadas. . . . .	32
4.5. Parámetros de la respuesta dinámica para los distintos casos. . . . .	35
4.6. Potencia máxima utilizada en cada paleta. . . . .	42
4.7. Error absoluto de los tres casos simulados respecto a la teoría lineal. . . . .	43

# Índice de Ilustraciones

3.1. Rango de validez para distintas teorías de ondas.[4] . . . . .	6
3.2. Esquema del desplazamiento de agua provocado por el movimiento del pistón. El volumen de agua desplazado.[5] . . . . .	7
3.3. Ejemplo de atenuador pasivo.[10] . . . . .	9
3.4. Principio de la absorción pasiva.[11] . . . . .	9
3.5. Esquema del principio de absorción activa.[10] . . . . .	10
3.6. Tipos de mecanismos de absorción.[10] . . . . .	11
3.7. Diagrama de cuerpo libre de un sistema de absorción tipo pistón.[3] . . . . .	12
3.8. Sistema de absorción dinámico.[15] . . . . .	14
3.9. Sistema de absorción cinemático.[17] . . . . .	16
3.10. Función de transferencia.[19] . . . . .	16
3.11. Respuesta al escalón para un sistema de segundo orden.[18] . . . . .	17
4.1. Esquema del sistema a simular. . . . .	19
4.2. Geometría del canal utilizado. . . . .	20
4.3. Diagrama del algoritmo basado en la presión.[21] . . . . .	21
4.4. Esquema del mallado en el modelo numérico. . . . .	23
4.5. Representación de los puntos de medición para el test de malla. . . . .	25
4.6. Amplitud de ola en $x = 4[m]$ para las distintas mallas testeadas. . . . .	25
4.6. Amplitud de ola en $x = 4[m]$ para las distintas mallas testeadas.[Continuación]	26
4.7. Resultado numérico y teórico para $x = 2[m]$ y su error. . . . .	26
4.8. Resultado numérico y teórico para $x = 6[m]$ y su error. . . . .	27
4.9. Amplitud de la onda en los puntos $x_2$ y $x_4$ del canal. . . . .	27
4.10. Amortiguamiento hidrodinámico $R$ en función de la velocidad angular, para una profundidad $h = 1.5[m]$ . . . . .	28
4.11. Masa añadida $m$ en función de la velocidad angular, para una profundidad $h = 1.5[m]$ . . . . .	29
4.12. Convergencia del valor de masa añadida según la cantidad de valores propios $m_n$ considerados para las condiciones de operación. . . . .	29
4.13. Dependencia de la efectividad de absorción respecto al parámetro de control $C$ . . . . .	30
4.14. Absorción en el rango de frecuencias $0.5 - 1.75[\text{Hz}]$ para distintos valores de $C$ . . . . .	30
4.15. Función de transferencia entre la velocidad del pistón y el nivel de agua en la paleta. . . . .	31
4.16. Esquema de la magnitud medida para evaluar la respuesta al escalón. . . . .	31
4.17. Parámetros de la función escalón. . . . .	32
4.18. Nivel de agua de la paleta ante el escalón del caso base. . . . .	32
4.19. Nivel de agua de la paleta ante el escalón del caso 7. . . . .	33

4.20. Nivel de agua en la paleta para los casos 1,2, 4 y 6. . . . .	33
4.21. Evolución del nivel de agua y campo de velocidades cerca de la paleta para caso 6. . . . .	34
4.22. Referencia de los parámetros de respuesta dinámica. . . . .	35
4.23. Amplitud máxima alcanzada en respuesta a distintas amplitudes del escalón. . . . .	36
4.24. Amplitud en estado estacionario alcanzada en respuesta a distintas amplitudes del escalón. . . . .	36
4.25. Tiempos característicos en función de la velocidad del escalón. . . . .	36
4.26. Frecuencia natural y amortiguada en función de la velocidad del escalón. . . . .	37
4.27. Razón de amortiguamiento en función de la velocidad del escalón. . . . .	37
4.28. Esquema realizado en SIMULINK. . . . .	38
4.29. Señal de entrada y salida en Simulink. . . . .	38
4.30. Comparación entre respuesta obtenida en Fluent y Simulink para caso 6. . . . .	39
4.31. Diagrama de bloque del sistema de absorción cinemático implementado. . . . .	39
4.32. Canal diseñado para realizar las pruebas de absorción. . . . .	40
4.33. Movimiento axial de los dos mecanismos de absorción. . . . .	41
4.34. Amplitud de onda en la paleta de absorción para el mecanismo 1 de atenuación ante una onda armónica. . . . .	42
4.35. Potencia utilizada en generación y absorción de las olas. . . . .	43
4.36. Amplitud de onda en $x = 4[m]$ y el error respecto a la teoría lineal. . . . .	44
4.37. Amplitud de onda en $x = 6[m]$ y el error respecto a la teoría lineal. . . . .	45
4.38. Amplitud de onda en $x = 4[m]$ y $x = 6[m]$ para una onda impulsiva en un canal sin absorción. . . . .	46
4.39. Movimiento axial de la paleta de absorción y generación para onda impulsiva con respecto a su posición inicial. . . . .	47
4.40. Nivel de agua en la paleta de absorción. . . . .	47
4.41. Nivel de agua en distintos puntos del canal para las situaciones con y sin absorción de una onda impulsiva. . . . .	48
4.41. Nivel de agua en distintos puntos del canal para las situaciones con y sin absorción de una onda impulsiva (Continuación). . . . .	49
C.1. Esquema del modelo multifásico VOF: malla de un fluido con dos fases. . . . .	IV
D.1. Convergencia de la malla . . . . .	V
D.2. Amplitud de onda teórica en distintos puntos del canal. . . . .	VI
D.3. Amplitud de onda para simulación con implementación de absorción activa en $x_7 = 7[m]$ . . . . .	VI
D.4. Velocidad de la paleta de absorción para el caso de la onda impulsiva. . . . .	VI

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes generales

El eventual agotamiento de las fuentes de energía no renovables y los niveles de contaminación existentes actualmente han provocado que se fije un gran interés científico e ingenieril en energías renovables no convencionales. Dentro de este tipo se encuentra la energía undimotriz, la que pretende transformar la energía que transportan las olas en energía utilizable. Chile, debido a sus condiciones geográficas, presenta un gran potencial para el uso de ella.

Este tipo de fuente de energía se encuentra actualmente en estado de desarrollo, encontrándose algunos prototipos de conversión en el mundo de manera experimental. Es por esta razón que el estudio de las ciencias básicas asociadas a la energía undimotriz resulta fundamental para la futura construcción de elementos funcionales.

A nivel de laboratorio, el principal recurso de estudio de la energía undimotriz son los canales generadores de ondas. Estos pueden presentar distintas formas y geometrías, según el nivel de estudio que se desee establecer. En ellos se intenta crear condiciones similares a las que se tendrán en el océano, pero bajo un entorno controlado y medible, de manera de facilitar el desarrollo de experimentos y pruebas de distintos prototipos de conversión.

Las simulaciones numéricas representan una importante herramienta para la construcción y desarrollo de los canales generadores de olas, ya que son capaces de predecir posibles problemas que presenten, definir los alcances que posean y mejorar los diseños creados, todo esto gracias a facilidad con la que se pueden cambiar las condiciones de trabajo. Además son utilizados como un elemento de contraste con resultados obtenidos experimental y teóricamente.

## 1.2. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo de título es estudiar numéricamente la generación, propagación, y atenuación de ondas de superficie en un canal de olas.

## 1.3. Objetivos específicos

Los objetivos específicos son:

- Generar ondas de superficie en el canal utilizando software CFD.
- Estudiar la propagación de ondas de superficie en el canal numérico de olas.
- Implementar en el canal numérico un mecanismo de atenuación de ondas basado en un mecanismo de absorción activo.

## 1.4. Alcances

La simulación numérica es realizada en dos dimensiones para un estado transiente y laminar, en donde se utiliza condiciones fijas de operación y geometría que permiten una comparación con la teoría lineal de ondas. El mecanismo de absorción es diseñado de manera numérica para la geometría establecida y para dos casos: atenuación de onda armónica e impulsiva.

# Capítulo 2

## Metodología

Los pasos para desarrollar el trabajo se detallan a continuación:

- a. Revisión bibliográfica de la teoría y experiencia relacionada a los canales generadores de olas, junto a los mecanismos de absorción existentes.
- b. Planteamiento y modelo del problema a resolver, donde se contempla:
  - b.1 Establecer geometría del canal a utilizar, además de sus condiciones de operación.
  - b.2 Selección de mecanismo y parámetros para la generación de las olas.
  - b.3 Definición del sistema de control para la absorción de las ondas incidentes en la pared derecha del canal de olas.
- c. Simulación CFD del problema planteado:
  - c.1 Test de independencia y validación de malla, donde se debe determinar el tamaño de los elementos a utilizar en las simulaciones realizadas en software FLUENT v6.3.
  - c.2 Realizar simulación para estudiar la generación y propagación de la ola a lo largo del canal, sin considerar la implementación del mecanismo de atenuación. Estos resultados se deben comparar con la teoría lineal de ondas.
  - c.3 Realizar pruebas mediante simulaciones para desarrollar una función que caracterice el movimiento de la paleta de absorción.
  - c.4 Implementar el sistema de generación y absorción en una única simulación.
- d. Resultados numéricos a partir de la simulación con respecto a:
  - d.1 Generación de olas: describiendo el movimiento de la paleta y la potencia utilizada.
  - d.2 Propagación de olas: comparando su comportamiento respecto a lo descrito por la teoría lineal.
  - d.3 Absorción de olas: describiendo el movimiento de la paleta y la potencia utilizada.

# Capítulo 3

## Antecedentes específicos

### 3.1. Teoría de ondas lineales

En general, para un fluido las variables que gobiernan su comportamiento son la conservación de momentum y de masa, las que se representan en las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes, ecuaciones 3.1 y 3.2, respectivamente.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.1)$$

Donde,

$\vec{v}$ : Velocidad del fluido.

$\nabla$ : Operador diferencial nabra.

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla p_{tot} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{f} \quad (3.2)$$

Donde,

$\vec{f}$ : Campo de fuerza sobre el fluido.

$p_{tot}$ : Presión total del fluido.

$\nu$ : Viscosidad cinemática.

$\rho$ : Densidad del fluido.

Para el desarrollo de la teoría se supone lo siguiente:

- Fluido incompresible.
- Fluido no viscoso.
- Sólo actúan fuerzas gravitacionales.
- Fluido irrotacional.

Con estas simplificaciones se llega a la ecuación de Bernoulli (ver anexo A):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p_{tot}}{\rho} + gy = C \quad (3.3)$$

Donde,

$\phi$ : Potencial de velocidad.

$C$ : Constante de integración.

$g$ : Aceleración de gravedad.

$y$ : Distancia medida desde la superficie del fluido.

Para obtener la forma de onda de superficie se debe evaluar la Ecuación 3.3 en la interfase agua-aire, la que se encuentra en  $y = \eta(t, x)$  para el caso bidimensional, donde se fija  $y = 0$  al nivel de la superficie del agua. De esta manera la ecuación de onda se linealiza [1] (ver anexo B) y queda de la forma:

$$\frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial t} = -g\eta(x, t) \quad (3.4)$$

Donde,

$\eta$ : Amplitud de la oscilación de la superficie del fluido respecto al nivel de agua.

## 3.2. Ondas armónicas

Resulta conveniente en el estudio de ondas armónicas trabajar en el espacio de frecuencias en vez del espacio del tiempo. Al trabajar de esta forma se utiliza el principio de superposición y de ondas lineales, de esta manera se puede escribir el potencial como [2]:

$$\phi = \phi(x, y, t) = \Re \left\{ \hat{\phi}(x, y, t) e^{i\omega t} \right\} \quad (3.5)$$

Donde,

$\hat{\phi}$ : Amplitud compleja del potencial de velocidad.

Para este se propone una solución por separación de variables de la forma [2, 3]:

$$\hat{\phi}(x, y, t) = H(x)Z(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_n e^{-m_n x} + b_n e^{m_n x})}_{H_n(x)} h \underbrace{\left( \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin(2m_n h)}{2m_n h} \right) \right)^{-1/2} \cos(m_n(z + h))}_{Z_n(y)} \quad (3.6)$$

Donde,

$a_n$ : Constante de integración de la solución de la función  $H_n$ .

$b_n$ : Constante de integración de la solución de la función  $H_n$ .

$m_n$ : Raíz del valor propio de la auto función  $Z_n$ .

Para el caso de los valores propios se tiene que sólo uno corresponde a un número positivo, esto es, si se tiene que los valores propios corresponden a  $\lambda_n$ , sólo existe un  $\lambda_n = k^2 > 0$ . De esta manera se define el valor de  $m_n$  para dos casos, el primero corresponde para las raíz positiva mencionada anteriormente, que se encuentra en base a la relación de dispersión mostrada en la ecuación 3.7[2], la que relaciona la frecuencia de oscilación de las ondas con la longitud de onda que presentan.

$$\frac{\omega^2}{gk} = \tanh(kh) \quad (3.7)$$

Donde,

$\omega$ : Frecuencia de las ondas de superficie.

$h$ : Profundidad del agua.

$k$ : Número de onda.

Para los valores negativos de los valores propios, es decir, los  $\lambda_n = -m_n^2$ , se encuentran los términos  $m_n$  reemplazando  $k$  por  $im_n$  en la ecuación 3.7[2], y con esto se obtiene:

$$\omega^2 = -m_n g \tan(m_n h) \quad (3.8)$$

Esta ecuación presenta infinitas soluciones reales positivas para  $m_n$ . De esta forma los valores propios de la autofunción son:

$$\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\} = \{k^2, -m_1^2, \dots, -m_n^2, \dots\}$$

Una aproximación para el cálculo de la longitud de onda a partir del período se plantea en [4] para aguas profundas ( $h/\lambda > 0.5$ ), en donde se tiene que:

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (3.9)$$

### 3.3. Validez teoría lineal

Al utilizar la teoría lineal se debe tener en cuenta si para las condiciones del problema propuesto resulta válido su uso. Para esto se debe tener cuenta los siguientes parámetros:

- $H$ : Altura de la onda.
- $h$ : Profundidad del agua.
- $T$ : Período de la onda.

En base a ellos se puede estimar la validez de las ecuaciones en base a la figura 3.1 presentada en [4], en donde en el eje  $x$  se encuentra la profundidad del agua dividido por el cuadrado del periodo de la onda. En el eje  $y$  se representa la altura de la onda dividido por el cuadrado del periodo.

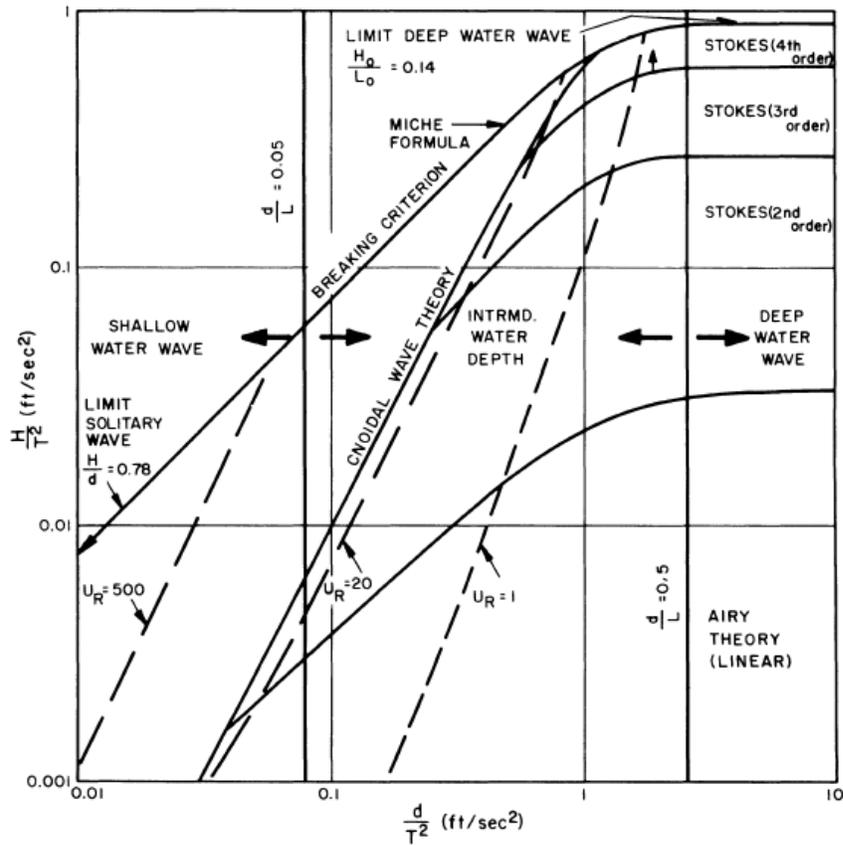


Figura 3.1: Rango de validez para distintas teorías de ondas.[4]

## 3.4. Generación de Olas

### 3.4.1. Desplazamiento de Stroke

Una variable útil de conocer para la generación de olas es el recorrido  $X_0$  que debe tener el generador para obtener en el canal una onda de altura  $H$ . Para realizar una estimación de esta relación se supone que el volumen de agua desplazada es la misma que se dispone en la cresta de la ola. Para el caso de un generador de olas vertical que se mueve de manera axial, o de tipo pistón, se puede ver el esquema de esto en la figura 3.2 presentada en [5].

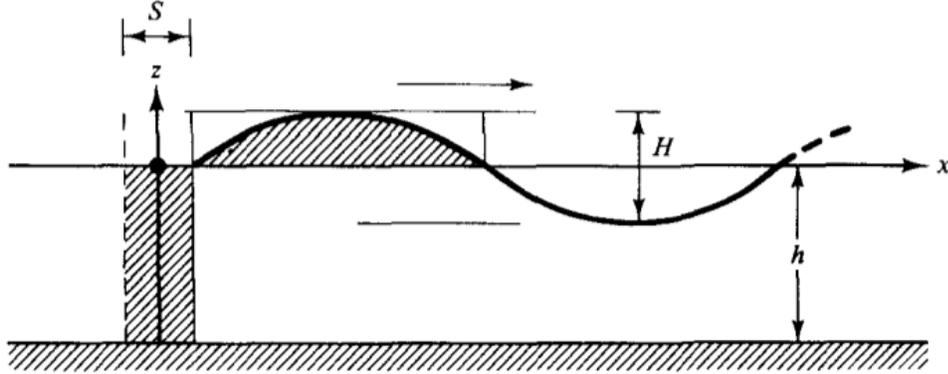


Figura 3.2: Esquema del desplazamiento de agua provocado por el movimiento del pistón. El volumen de agua desplazado.[5]

Se puede ver que el volumen desplazado debe cumplir que al lado izquierdo del pistón, debe ser igual la elevación de media longitud de onda al lado derecho, lo que se representa en la ecuación 3.10, donde la variable  $S$  mostrada en la figura 3.2 en este trabajo se representa por  $X_0$ .

$$X_0 h = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{H}{2} \sin(kx) dx = \frac{H}{k} \quad (3.10)$$

Donde,

$H$ : Altura ondas de superficie.

$X_0$ : Desplazamiento del pistón.

La variable  $X_0$  también es conocida como el desplazamiento de Stroke. Una mejor aproximación para la relación entre ésta y la altura de onda para el campo lejos del generador de olas ( $x \gg 2h$ ) en el caso de un generador tipo pistón se muestra en la siguiente ecuación que es conocida como la función de transferencia de Biesel[6, 7]:

$$\frac{H}{X_0} = 4 \frac{(\cosh(kh))^2 - 1}{2kh + \sinh(2kh)} \quad (3.11)$$

### 3.4.2. Perfil de la onda generada

Si se posee una pared vertical con un movimiento axial de la forma:

$$\dot{x}(t) = U_o \sin(\omega t + \sigma) = X_0 \omega \sin(\omega t + \sigma) \quad (3.12)$$

El perfil de la ola generada a una distancia  $x$  de su generación y un tiempo  $t$  estará dado por la ecuación 3.13[8], en donde se supone que no existe movimientos para  $t < 0$ .

$$\eta(x, t) = \frac{2 U_o}{\pi \omega} \int_0^\infty \frac{\tanh(kh)}{k} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \sigma^2} \cos(kx) dk \quad (3.13)$$

En donde,

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (3.14)$$

### 3.4.3. Fuerza sobre una paleta oscilando

Si se considera una paleta vertical que se mueve axialmente, es decir, un generador de olas tipo pistón, la fuerza hidrodinámica que se ejerce sobre él se obtiene integrando la presión sobre su superficie, es decir:

$$F_x = - \iint_S p n_x dS \quad (3.15)$$

Donde,

$F_x$ : Fuerza ejercida sobre el pistón en el eje axial.

$p$ : Presión sobre la superficie del pistón.

$n_x$ : Vector unitario normal a la superficie.

Al trabajar en el espacio de frecuencia, es decir  $\hat{p} = -i\omega\rho\hat{\phi}$ [2], se tiene:

$$\hat{F}_x = i\omega\rho \iint_S \hat{\phi} n_x dS \quad (3.16)$$

Para un generador de tipo pistón oscilando, se desarrolla la ecuación 3.16 hasta llegar a que la fuerza en el sentido axial producida por la radiación de una onda está dada por [2, 3]:

$$F_R(\omega) = -Z_r(\omega)U(\omega) \quad (3.17)$$

Donde  $Z_r$  se denomina la impedancia de radiación, y representa la oposición al movimiento cuando se le aplica una fuerza dada al pistón. Este término se puede descomponer en su parte real e imaginaria, que representan los coeficientes hidrodinámicos del cuerpo:

$$Z_r(\omega) = R(\omega) + i\omega m(\omega) \quad (3.18)$$

Donde,

$R(\omega)$ : Se define como la resistencia y es conocido como el amortiguador hidrodinámico.

$m(\omega)$ : Se define como la masa añadida.

Para el caso del generador tipo pistón los coeficientes hidrodinámicos de la ecuación 3.18 se pueden determinar a partir de las siguientes relaciones[3, 9]:

$$R(\omega) = 4 \frac{\omega\rho ((\cosh(kh))^2 - 1)}{k^2(2kh + \sinh(2kh))} \quad (3.19)$$

$$m(\omega) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho (1 - (\cos(m_n h))^2)}{m_n^2(2m_n h + \sinh(2m_n h))} \quad (3.20)$$

## 3.5. Absorción de ondas en un canal

El problema de los canales experimentales es la reflexión que provoca la onda al chocar con el final de este, lo que contamina la onda de superficie que se desea estudiar. Es por esto que se debe implementar mecanismos capaces de evitar este efecto.

### 3.5.1. Absorción pasiva

La idea de la absorción pasiva es amortiguar las ondas llegan al final de canal de prueba. Este mecanismo, denominado playa, es una pendiente que se coloca al frente del generador de ola al final del canal. Un ejemplo de este tipo de mecanismo se puede ver en la fotografía de la figura 3.3 presentada en [10], donde se ve el atenuador tipo playa que poseen en el canal de olas de Ecole Centrale.



Figura 3.3: Ejemplo de atenuador pasivo.[10]

El principio de la absorción pasiva se explica por el cambio en la longitud y amplitud de onda cuando se produce una variación en la profundidad del agua. A medida que la profundidad de agua disminuye, disminuye la longitud de onda y aumenta su amplitud, hasta que se alcanza un valor crítico que corresponde a cuando se rompe la ola en la orilla. Este fenómeno se esquematiza en la figura 3.4, adaptada desde [11].



Figura 3.4: Principio de la absorción pasiva.[11]

### 3.5.2. Absorción activa

En un canal finito es fundamental absorber la onda incidente que se crea por el generador de olas, como también las ondas radiadas y dispersadas por algún cuerpo que se encuentre dentro del canal. Para esto se debe sincronizar la fase entre la la onda y el movimiento del sistema de absorción, lo que se puede realizar midiendo la ola que llega y utilizar un sistema de control con retroalimentación. Esto se puede ver en la figura 3.5, adaptada desde [10], donde se muestra cómo una pared móvil, al

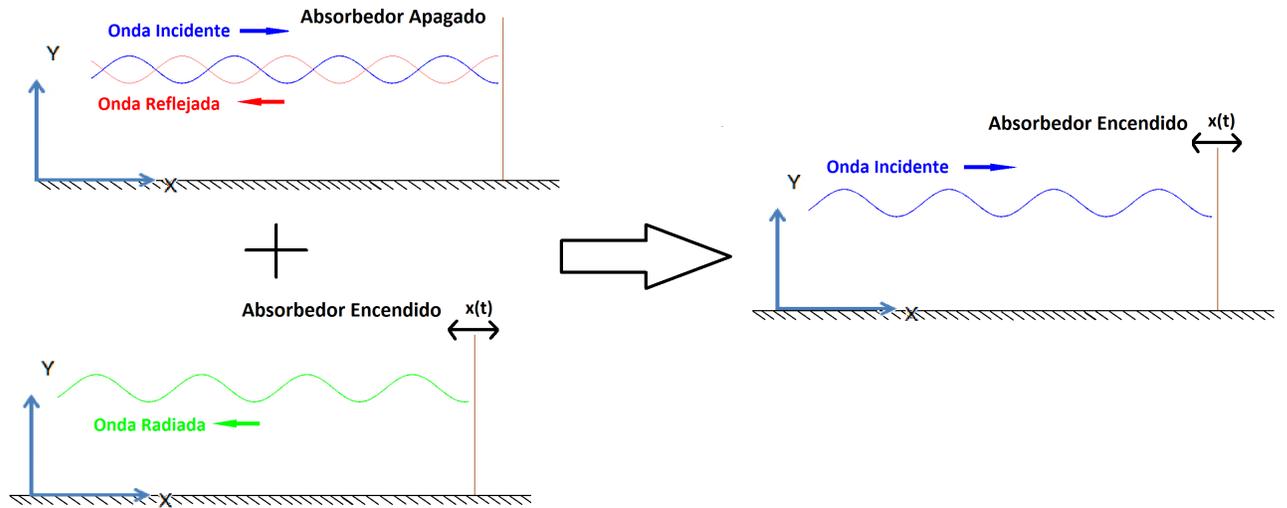


Figura 3.5: Esquema del principio de absorción activa.[10]

radiar una onda, cancela la onda reflejada.

Como se puede ver en la figura 3.5 la absorción de ondas implica la creación de otras, es por esto que, en general, los mecanismos de generación de olas presentan un carácter dual, en donde se considera tanto la creación como la absorción de las ondas.

Para lograr la máxima absorción de las ondas el actuador debe estar en fase con la fuerza de excitación y existe una interferencia destructiva debido a la onda radiada. Existen dos métodos de absorción activos los que se detallan a continuación:

- **Absorción cinemática:** Corresponde a medir el nivel de la superficie en algún punto y usar este valor como entrada para el sistema de control. El sensor de medida puede estar dispuesto en el dispositivo de absorción o en un punto lejano de él, la primera opción posee un menor tiempo para realizar los cálculos y el segundo puede contener errores en la fase entre la onda incidente y el movimiento de absorción. En este caso la función de transferencia del atenuador representa una relación entre su amplitud de desplazamiento y el de la onda incidente [12]. En general, este mecanismo es usado para ondas de primer orden[10].
- **Absorción dinámica:** En este caso se utiliza un valor de entrada en el controlador que caracterice al mecanismo de absorción, ya sea fuerza, velocidad o desplazamiento. Este método es el más usado actualmente ya que es el que más precisión ofrece[10]. La función de transferencia en este caso representa, generalmente, una relación entre la fuerza sobre el atenuador y la amplitud de la onda.

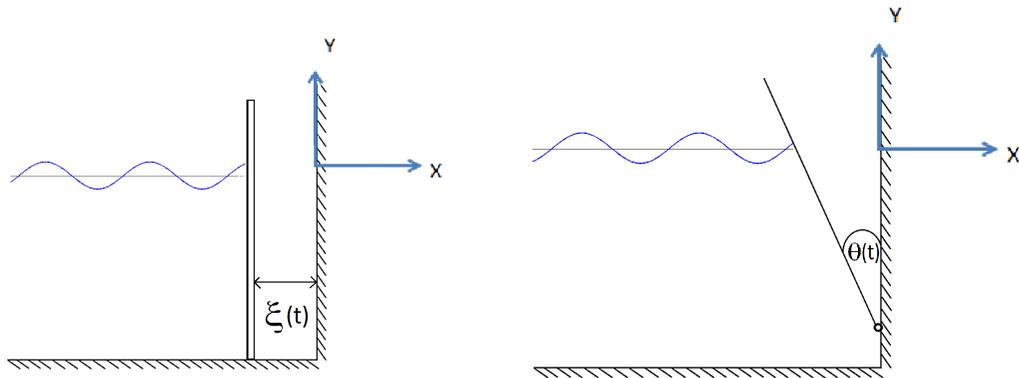
Los tipos de atenuadores más comunes se detallan a continuación, ellos se diferencian en su forma y movimiento, ya que cumplen la misma función de absorber la onda incidente mediante la creación de una onda radiada.

**Tipo pistón:** Este tipo de sistema de atenuación está limitado a movimientos axiales y es usado generalmente para aguas poco profundas. En la figura 3.6.a se puede ver un esquema

de este mecanismo.

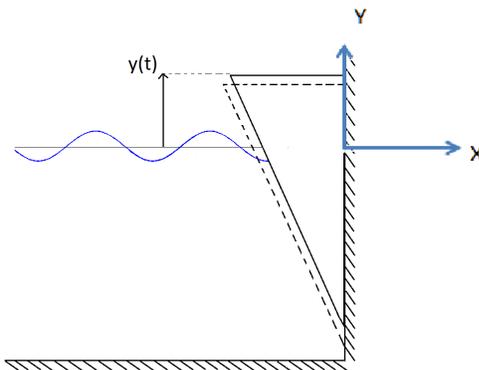
**Tipo bisagra:** En este caso se tiene una placa vertical que puede girar respecto a su base inferior, como un péndulo invertido. Este dispositivo es usado en aguas más profundas, donde no son relevantes perturbaciones en la base del estanque. Un esquema de este mecanismo de absorción se puede ver en la figura 3.6.b.

**Tipo cuerpo hundido:** Corresponde a un cuerpo que se mueve perpendicular respecto a la superficie del agua y, debido a su geometría, provoca la absorción de la onda incidente. Un esquema de este mecanismo de absorción se puede ver en la figura 3.6.c.



(a) Paleta de absorción tipo pistón.

(b) Paleta de absorción tipo bisagra.



(c) Atenuador tipo cuerpo hundido.

Figura 3.6: Tipos de mecanismos de absorción.[10]

### 3.5.3. Dinámica de un atenuador tipo pistón

Como se mencionó anteriormente, existe un mecanismo de absorción basado en propiedades dinámicas del atenuador con el que se obtiene la base para el sistema de control en la absorción. En primer lugar se deben plantear las fuerzas que actúan sobre la paleta, las que se esquematizan en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.7 adaptada de [3], donde se muestra un atenuador puro, es

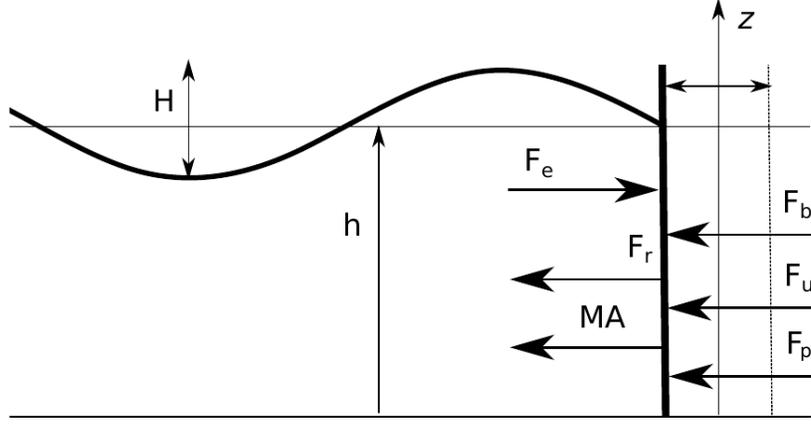


Figura 3.7: Diagrama de cuerpo libre de un sistema de absorción tipo pistón.[3]

decir, sólo se considera absorción sin generación.

A partir del diagrama de cuerpo libre se plantea la ecuación de movimiento en el dominio de frecuencia, la que se detalla a continuación.

$$F_e(\omega) = MA(\omega) + F_r(\omega) + F_b(\omega) + F_p(\omega) + F_u(\omega) \quad (3.21)$$

Donde,

$F_e(\omega)$ : Fuerza de excitación provocada por la onda incidente.

$M$ : Masa del atenuador.

$A$ : Aceleración del atenuador.

$F_r(\omega)$ : Fuerza de radiación, debido a la onda creada para la absorción.

$F_b(\omega)$ : Fuerza hidrostática.

$F_p(\omega)$ : Pérdidas por roce y viscosas.

$F_u(\omega)$ : Fuerza ejercida por el sistema de control.

Si se desprecian las pérdidas y se deja expresado en función de la velocidad se tendrá que la suma de fuerzas queda expresada por[3, 13]:

$$F_e(\omega) = i\omega U(\omega) [M + m(\omega) + m_u(\omega)] + U(\omega) [R(\omega) + R_u(\omega)] + \frac{U(\omega)}{i\omega} [c + c_u(\omega)] \quad (3.22)$$

Donde,

$U(\omega)$ : Velocidad del sistema de absorción.

$c$ : Rigidez hidrostática.

$m$ : Masa añadida.

$R$ : Amortiguador hidrodinámico.

$m_u(\omega)$ : Coeficiente de masa del sistema de control, proporcional a la aceleración.

$R_u(\omega)$ : Coeficiente de amortiguación del sistema de control, proporcional a la velocidad.

$c_u(\omega)$ : Coeficiente de restitución del sistema de control, proporcional al desplazamiento.

Para el atenuador tipo pistón se puede considerar que no posee masa y que su coeficiente hidrostático es cero[10]. A partir de esto se define la impedancia intrínseca[3] como,

$$Z_i(\omega) = R(\omega) + i\omega m(\omega) = R_i(\omega) + iX_i(\omega) \quad (3.23)$$

Se puede reordenar la ecuación 3.22 para encontrar la velocidad del pistón.

$$U(\omega) = \frac{F_e(\omega) - F_u(\omega)}{Z_i(\omega)} \iff U(\omega) = \frac{F_e(\omega)}{Z_i(\omega) + Z_u(\omega)} \quad (3.24)$$

En donde  $Z_u$  se denomina la impedancia del sistema de control y está dada en su forma general por:

$$Z_u(\omega) = R_u(\omega) + i \left( \omega m_u(\omega) - \frac{c_u(\omega)}{\omega} \right) \quad (3.25)$$

### 3.5.4. Potencia absorbida

Para que la potencia absorbida sea máxima, se debe cumplir que la onda radiada cumplan con las siguientes dos condiciones[10]:

- 1.- Sea de igual amplitud que la onda difractada.
- 2.- Esté desfasada en  $180^\circ$  con la onda difractada.

Estas dos condiciones se cumplen cuando la impedancia del sistema de control ( $Z_u(\omega)$ ) es el conjugado de la impedancia intrínseca ( $Z_i(\omega)$ ), es decir, la impedancia óptima que cumple con una absorción máxima estará dada por[3, 13, 9]:

$$Z_{u,OPT}(\omega) = Z_i^*(\omega) \quad (3.26)$$

La razón entre entre la potencia absorbida ( $P_u$ ) y la máxima posible a absorber ( $P_{u,max}$ ) está dada por la ecuación 3.27[3, 14, 15].

$$\gamma_p(\omega) = \frac{P_u}{P_{u,max}}(\omega) = 4 \frac{R_u(\omega)R_i(\omega)}{(R_i(\omega) + R_u(\omega))^2 + (X_i(\omega) + X_u(\omega))^2} \quad (3.27)$$

Donde,

$\gamma_p$ : Razón de potencia absorbida.

La ecuación anterior representa la razón esperada de absorción de potencia. Para poder determinar la absorción real de potencia que se obtendrá se puede realizar mediante el coeficiente de absorción de amplitud ocupado en [15], donde se define la siguiente ecuación:

$$\gamma_a = 1 - \frac{A_r}{A_i} \quad (3.28)$$

Donde,

- $\gamma_a$ : Razón de amplitud absorbida.
- $A_r$ : Amplitud de la onda reflejada.
- $A_i$ : Amplitud de la onda incidente.

La ecuación anterior se relaciona con la razón de absorción de potencia de la ecuación 3.27 mediante:

$$\gamma_a = 1 - \sqrt{1 - \gamma_p} \quad (3.29)$$

Para determinar la amplitud reflejada e incidente utilizados en la ecuación 3.28 se puede utilizar el método propuesto en [16].

## 3.6. Diseño del sistema de absorción

Existen dos métodos para la absorción activa, los que se definen a partir de la variable física medida. A continuación se presenta diseño para la implementación de un sistema de absorción dinámica y otro de absorción cinemática.

### 3.6.1. Dinámico

Un sistema en donde se mide simultáneamente la velocidad del pistón y la fuerza sobre él se puede ver en la figura 3.8. En este diseño la velocidad es filtrada y transformada en una fuerza mediante la función de transferencia  $H_f$ , que en la nomenclatura utilizada en este trabajo es representada por  $Z_u$ . En la figura se incluye en el lado izquierdo una fuerza que representa la generación de olas, por lo que si se considera un sistema puro de absorción esta fuerza es igual a cero.

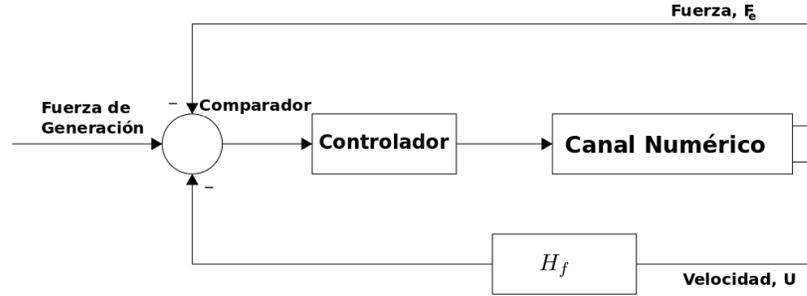


Figura 3.8: Sistema de absorción dinámico.[15]

Una vez que la velocidad es filtrada se transforma en una fuerza mediante la función de transferencia, o impedancia,  $Z_u$ . A continuación se muestra el método expuesto en [3] para definir  $Z_u$ , sin embargo existen varios métodos para determinar esta función de transferencia entre la velocidad medida y la fuerza que ella representa<sup>1</sup>.

Si se considera la condición de absorción máxima de la ecuación 3.26 para una frecuencia de onda específica ( $\omega_p$ ), se tiene que la impedancia para máxima absorción es:

$$Z_{u,OPT}(\omega_p) = R(\omega_p) - i \left( \omega_p(M + m(\omega_p)) - \frac{c}{\omega_p} \right) \quad (3.30)$$

Esto quiere decir, que el atenuador estará definido para una frecuencia, tal que para ella la potencia de absorción será máxima. En caso de que se intentara absorber una ola de frecuencia  $\omega$  distinta a  $\omega_p$  la potencia absorbida será una fracción de la máxima posible.

Para el caso de un sistema de absorción tipo pistón, la masa  $M$  y el coeficiente de rigidez hidrostática  $c$  se pueden considerar iguales a cero[10]. Es por esto que si se desea obtener los coeficientes de absorción máxima del sistema de control para ondas de frecuencia  $\omega_p$ , se tienen las siguiente ecuaciones:

$$R_u = R(\omega_p) \quad (3.31)$$

$$\omega_p m_u - \frac{c_u}{\omega_p} = -\omega_p m(\omega_p) \quad (3.32)$$

Se puede ver que para la constante proporcional a la velocidad  $R_u$ , su solución para máxima absorción se obtiene directamente. Para el caso de  $m_u$  y  $c_u$  existen infinitos pares de soluciones que satisfacen la ecuación 3.32. De esta forma, si se escoge un valor para  $c_u = C$ , los valores de cada uno

<sup>1</sup>Un método alternativo se puede encontrar en [15].

de los parámetros está dado por:

$$R_u = R(\omega_p) \quad (3.33)$$

$$c_u = C \quad (3.34)$$

$$m_u = \frac{C}{\omega_p^2} - m(\omega_p) \quad (3.35)$$

Así dependiendo del valor de  $C$ , se podrá tener un sistema de control masa-amortiguador-resorte, amortiguador-resorte o masa-amortiguador. Con los parámetros del sistema de control se puede reescribir la ecuación 3.27 de la siguiente manera:

$$\gamma_p(\omega) = \frac{4R(\omega_p)R(\omega)}{[R(\omega_p) + R(\omega)]^2 + \left[ \omega [m(\omega) - m(\omega_p)] + C \left[ \frac{\omega}{\omega_p^2} - \frac{1}{\omega} \right] \right]^2} \quad (3.36)$$

Es claro que para una frecuencia  $\omega_p$  en la ecuación 3.36 se tendrá un valor máximo para cualquier  $C$  que cumpla con las condiciones de máxima absorción. Sin embargo, si la frecuencia de operación es distinta a  $\omega_p$  (que corresponde a la frecuencia a la que se optimiza el sistema de control) se tendrá una variación en el valor de  $\gamma_p$ . Para poder evaluar la eficiencia de absorción para un rango de frecuencia se debe evaluar la ecuación 3.37 mostrada a continuación:

$$\xi = \frac{\int_{\omega_i}^{\omega_f} \gamma_p(\omega) d\omega}{\omega_f - \omega_i} \quad (3.37)$$

Donde,

- $\xi$ : Efectividad de absorción de ondas monocromáticas en un rango de frecuencias.
- $\omega_i$ : Valor inferior del rango de frecuencias de absorción.
- $\omega_f$ : Valor superior del rango de frecuencias de absorción.

### 3.6.2. Cinemática

En este caso la variable de medición es la elevación de la superficie de agua en la pared que realiza la absorción. Un ejemplo de este método se puede ver en la figura 3.9, adaptada de [17], en donde un sensor mide el nivel de agua y lo compara con el nivel de generación que se desea. En este sistema se realizan dos comparaciones, la primera es con el nivel de la superficie requerido y el segundo con la posición del pistón para la generación de dicha ola. Si se considera un sistema de absorción puro, la segunda referencia no se utiliza.

En este caso la función de transferencia que relaciona el nivel de la superficie con la posición de la paleta de absorción, representada por  $H_f$ , se puede aproximar para agua profunda por la ecuación 3.38, presentada en [17].

$$H_f = -\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{1}{i\omega} \quad (3.38)$$

Para un modelo numérico con condición de borde de velocidad se puede utilizar la ecuación 3.39[17] para la absorción de olas en  $x = 0$  tomando como referencia la figura 3.9, transfiriendo la ecuación 3.38 al dominio del tiempo:

$$u_{CGabs} = -\sqrt{\frac{g}{h}} \eta_{W,abs}(0, t) \quad (3.39)$$

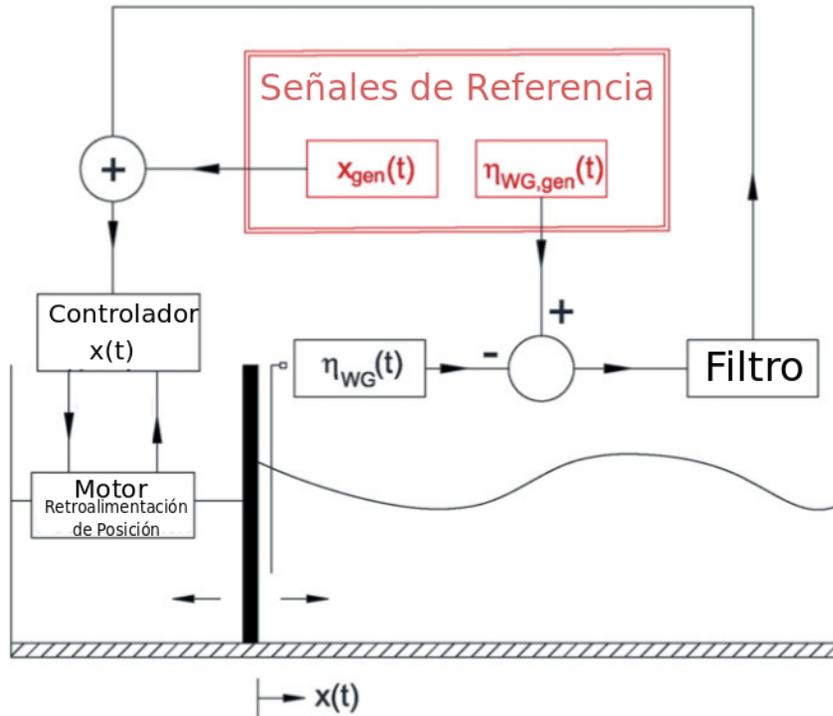


Figura 3.9: Sistema de absorción cinemático.[17]

### 3.7. Respuesta dinámica de un sistema de segundo orden

En esta sección se plantean los pasos expuestos en [18] para la deducción de los parámetros de la respuesta dinámica de un sistema de segundo orden. La respuesta temporal de un sistema consta de dos partes: una transiente y otra estacionaria. Una de las técnicas más utilizadas para realizar esta caracterización es estudiar la respuesta del sistema a un escalón unitario, es decir una función dada por:

$$x(t) = \Theta(t) \Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s} \tag{3.40}$$

En la figura 3.10 se puede ver que al sistema  $G$  se le da una señal de entrada  $X(s)$ , que en este caso corresponde al escalón unitario, y se obtiene la salida  $Y(s)$ , señal que debe ser registrada en el tiempo para obtener su respuesta transiente y estacionaria.

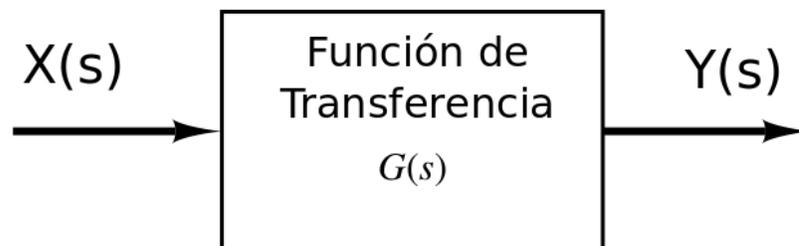


Figura 3.10: Función de transferencia.[19]

Una función de transferencia típica para un sistema de segundo orden está dada por la ecuación 3.41.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.41)$$

Donde,

$\omega_n$ : Frecuencia natural no amortiguada del sistema.

$\zeta$ : Razón de amortiguamiento.

Se define la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  a partir de los parámetros antes mencionado cómo:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.42)$$

La respuesta del sistema  $Y(s)$  a un escalón  $X(s) = \frac{1}{s}$  estará dada por:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \quad (3.43)$$

De la que se obtiene la respuesta temporal aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (t \geq 0) \quad (3.44)$$

Una gráfica representativa de la ecuación 3.44 se puede ver en la figura 3.11, adaptada de [18], en ella se muestran tres parámetros que caracterizan la respuesta temporal.

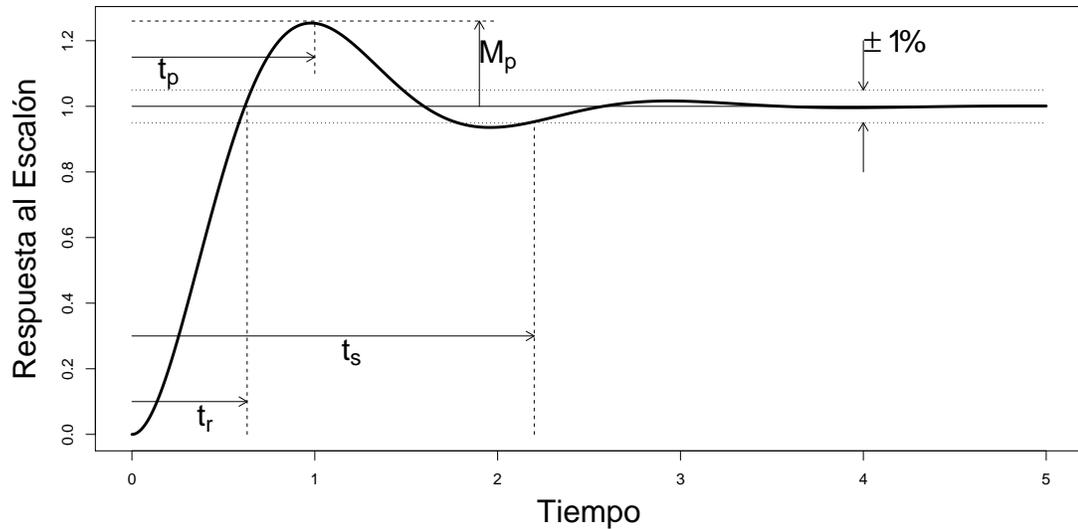


Figura 3.11: Respuesta al escalón para un sistema de segundo orden.[18]

- **Rise time,  $t_r$**

Corresponde al tiempo en que se demora en alcanzar el valor en estado estacionario <sup>2</sup>. Se obtiene al imponer  $y(t_r) = 1$  en la ecuación 3.44, en donde se llega a:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) \quad (3.45)$$

<sup>2</sup>Otra definición es el tiempo en que se alcanza el 90% del valor en estado estacionario.

donde  $\sigma = \zeta\omega_n$ .

- **Overshoot,  $M_p$**

Es el valor máximo alcanzado en la salida del sistema en el tiempo  $t_p$ . Este parámetro se obtiene al derivar la ecuación 3.44, la que luego de desarrollar se llega a:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (0 \leq \zeta < 1) \quad (3.46)$$

- **Settling time,  $t_s$**

Es el tiempo que se demora el sistema en alcanzar un estado cercano al estacionario. En general se usa una banda de error del 1 % del valor estacionario, con lo cual  $t_s$  queda definido por:

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0.01 \iff t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} \quad (3.47)$$

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Formulación del modelo

Para poder obtener resultados se debe plantear el modelo que se desea simular. De esta forma se establecen las variables características de él, su sistema de coordenadas y el modelo físico y numérico. Los pasos seguidos para realizar esta planteamiento se muestra en la secciones siguientes en sus distintos pasos.

#### 4.1.1. Representación del esquema

El sistema a implementar en la simulación numérica se muestra en la figura 4.1. En ella se impone una velocidad en la paleta izquierda del estanque, representado por  $u_{CG}$  y se utiliza una paleta por el lado derecho para realizar la absorción. El movimiento de esta última se define por  $u_{CG,abs}$ .

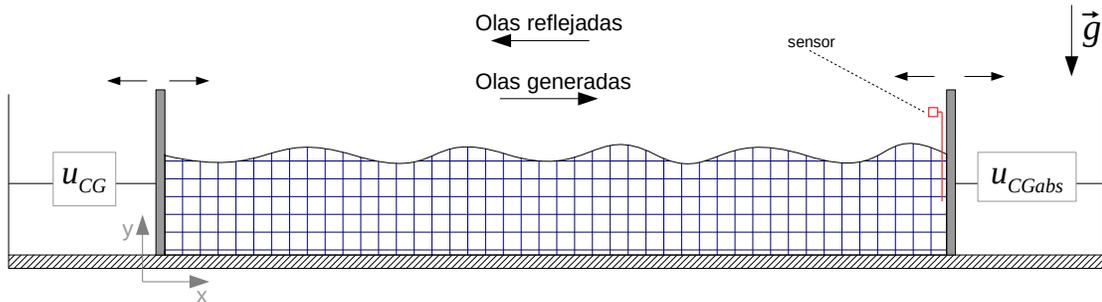


Figura 4.1: Esquema del sistema a simular.

En la figura 4.1 se mide el nivel de agua en la paleta derecha. Este valor se debe utilizar como la señal de retroalimentación que debe ser comparada con una señal de referencia.

#### 4.1.2. Geometría y condiciones de borde

El volumen de agua del estanque se muestra en la figura 4.2. En la figura se dibuja en rojo las condiciones de borde tipo pared y en verde la salida de presión y se detallan las dimensiones utilizadas.

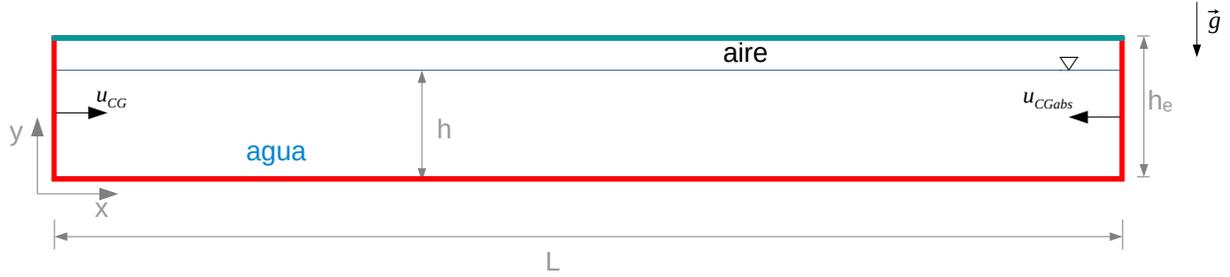


Figura 4.2: Geometría del canal utilizado.

Las condiciones de borde utilizadas en el modelo se detallan a continuación, teniendo como referencia la imagen de la figura 4.2.

- **Borde izquierdo:** Condición de borde tipo pared, que posee un movimiento axial gobernado por una función definida por el usuario (udf por sus siglas en inglés), que representa el movimiento del pistón que genera la ola. Para esto se debe utilizar una malla dinámica, la que se regenera mediante la técnica de remallado.
- **Borde inferior:** Ya que representa el suelo del estanque, posee una condición de borde tipo pared.
- **Borde derecho:** Representa el absorbedor de ondas del estanque, es por esto que se impone una condición de borde tipo pared y se le asigna movimiento controlado mediante una udf.
- **Borde superior:** Ya que es un canal abierto se establece como condición de borde el valor de la presión atmosférica ( $p_{atm} = 101325[Pa]$ ).

### 4.1.3. Modelo multifásico

Para la resolución numérica se utiliza el modelo multifásico *Volume Of Fluid* (VOF), dado que el canal presenta aire en su parte superior y agua en la inferior. Este modelo, utilizado también en [3] y [7], calcula las propiedades del fluido en base a una ponderación de los volúmenes de cada fase existentes en las celdas de la malla, permitiendo, además, calcular el nivel de la interfase entre ambos fluidos.

El método VOF consiste en considerar las dos fases de fluido como uno solo, para esto se pondera las propiedades de cada fluido según el volumen de la fase que exista en la celda. En el anexo C se encuentra una explicación más detallada del método.

### 4.1.4. Ecuaciones gobernantes en el fluido

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido responden a la conservación de las siguientes cantidades físicas y sus respectivos principios:

- Conservación de la masa: Ecuación de continuidad.
- Conservación de momentum: Segunda ley de Newton.

La ecuación de continuidad establece que el flujo de masa que ingresa a cierto volumen debe ser igual al que sale. Para el caso del modelo VOF esta ecuación se ajusta de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_w) + \nabla \cdot (\alpha_w \vec{v}_w) = 0 \quad (4.1)$$

Donde,

$\alpha_w$ : Porcentaje de volumen de agua.

$\vec{v}_w$ : Velocidad del agua.

El comportamiento del fluido está gobernado por la ecuación de momentum y depende de las fracciones de volumen de los fluidos para el cálculo de las propiedades de cada celda.

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + \rho g \quad (4.3)$$

Donde,

$\rho$ : Densidad del fluido bifásico en la celda.

$\mu$ : Viscosidad del fluido bifásico en la celda.

### 4.1.5. Método Numérico

Para resolver las ecuaciones del sistema se utiliza el código CFD FLUENT V6.3. El modelo corresponde a uno transiente, laminar y sin transferencia de calor.

Para esto se utiliza un solver basado en la presión con formulación implícita, donde el campo de velocidad y presión se resuelven de manera separada. El algoritmo empleado corresponde a SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations[20]). El diagrama que esquematiza el algoritmo se puede ver en la figura 4.3, adaptado de [21]. En él se muestra cómo se realiza cada iteración para resolver los campos de velocidad y presión y las propiedades del fluido.

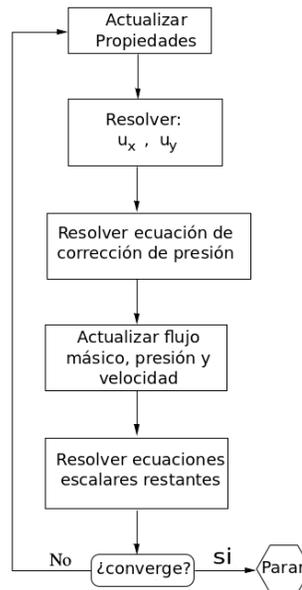


Figura 4.3: Diagrama del algoritmo basado en la presión.[21]

Más detalles de las ecuaciones de las correcciones y de las discretizaciones de los campos se puede encontrar en [20] y [21].

## 4.2. Condiciones de operación

Para trabajar bajo condiciones gobernadas por la teoría lineal de ondas, se deben elegir parámetros de profundidad de agua, periodo y amplitud de onda, tal que cumplan con las restricciones mostradas en la figura 3.1. Para esto se eligen los siguientes valores, utilizados en [3]:

- Profundidad de agua:  $h = 1.5[m]$ .
- Periodo de la ola:  $T = 1.25[s]$ .
- Altura de la ola:  $H = 0.01[m]$ .

Al ver el gráfico 3.1 se puede ver que para este caso las ondas se encuentran bajo la teoría lineal. La frecuencia angular de la onda se obtiene a partir del periodo:

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T} = 1.6\pi[rad/s]$$

Con la profundidad y el periodo escogido se determina el valor del número de onda  $k$  con la ecuación de dispersión 3.7, luego la longitud de onda se despeja a partir de  $k$  obteniendo un valor de :

$$\lambda \approx 2.43[m]$$

Con el valor de la amplitud, el periodo, la profundidad del agua y la ecuación 3.11 se determina el recorrido de la pared izquierda  $X_0$  que representará el generador de olas:

$$X_0 \approx 0.005[m]$$

De esta manera las olas son generadas por el movimiento axial de la pared izquierda, el queda descrito por la ecuación 4.4.

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{X_0}{2} \cos\left(\omega_p t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \dot{x}(t) &= -\frac{X_0 \cdot \omega_p}{2} \sin\left(\omega_p t - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.4}$$

## 4.3. Mallado

Para realizar las simulaciones en Fluent se construye la geometría en el software Gambit y su respectiva malla. Se realizan distintos mallados del canal para estudiar la independencia de malla en los resultados. Las mallas creadas son estructuradas y se definen a partir de la cantidad de elementos por longitud y amplitud de onda como se puede ver en la figura 4.4, en donde se tienen las siguientes relaciones:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{n_x}\tag{4.5}$$

$$\Delta y = \frac{H}{n_y}\tag{4.6}$$

Donde,

$\Delta x$ : Tamaño de los elementos en el eje  $x$ .

$\Delta y$ : Tamaño de los elementos en el eje  $y$ .

$n_x$ : Número de elementos por longitud de onda.

$n_y$ : Número de elementos por altura de onda.

En la figura 4.4 se representa la malla en todo el canal y se destaca en rojo la zona de la interfase entre el agua y el aire, donde la malla es más fina y se utiliza la discretización dada por  $n_x$  y  $n_y$ . En la zona superior e inferior, que corresponde a aire y agua respectivamente, la malla se hace más gruesa a medida que se aleja de la interfase.

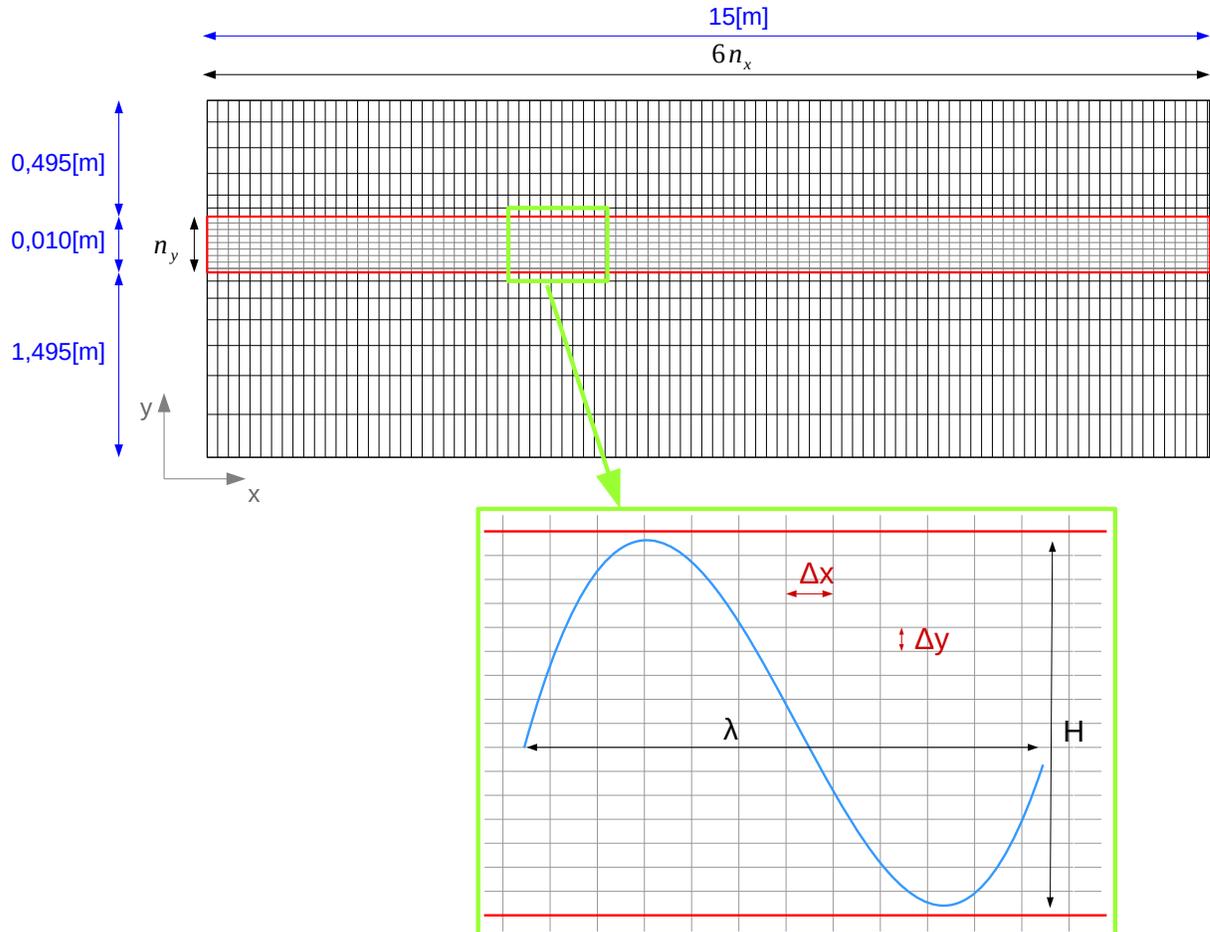


Figura 4.4: Esquema del mallado en el modelo numérico.

Las mallas evaluadas se detallan en la tabla 4.1 en donde se indica la cantidad de elementos  $n_x$ ,  $n_y$ , el número total de nodos y el tiempo real que tomaron las simulaciones para un tiempo físico de 8[s]. En la tabla 4.1 la malla 1 corresponde la más gruesa y la 4 la más fina. Las simulaciones se realizaron en una máquina con las siguientes características:

- Procesador:** Intel(R) Core(TM) i3-3217U CPU 1.80GHz
- RAM:** 4 GB.

Tabla 4.1: Mallas utilizadas para el estudio de independencia de malla.

	$n_y$	$n_x$	Nº nodos	Tiempo [hr]
<b>Malla 1</b>	10	80	84,474	1.83
<b>Malla 2</b>	20	100	135,960	3.45
<b>Malla 3</b>	40	150	314,840	7.72
<b>Malla 4</b>	60	200	494,000	12.87

El paso de tiempo es constante para las 4 mallas estudiadas y corresponde a  $\Delta t = 0.002[s]$ , lo que es equivalente a  $\Delta t = T/625$ , donde  $T$  corresponde al periodo de la ola.

Para comparar las distintas mallas se debe utilizar alguna medida característica del modelo y en este caso se escoge la amplitud de la onda en distintos puntos del canal. Con esto se define la diferencia entre las mallas para un tiempo  $t$  como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{21}(t) &= \varphi_2(t) - \varphi_1(t) \\ \varepsilon_{32}(t) &= \varphi_3(t) - \varphi_2(t) \\ \varepsilon_{43}(t) &= \varphi_4(t) - \varphi_3(t)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Donde  $\varphi_i$  corresponde al valor medido en la malla  $i$ . Para considerar el efecto sobre todo el tiempo de simulación se realiza un promedio cuadrático (RMS por sus siglas en inglés) del error entre la malla  $m$  y  $n$  según la ecuación:

$$\bar{\varepsilon}_{nm} = \sqrt{\frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} \varepsilon_{nm}(t)^2 dt}\tag{4.8}$$

Se selecciona la amplitud de la ola como variable medición, el que es utilizado para realizar la comparación entre las mallas, que es realizado de la siguiente manera:

- i. Se seleccionan distintos puntos de medición  $x_j$  en el canal, en este caso  $x_2 = 2[m]$ ,  $x_3 = 3[m]$ ,  $x_4 = 4[m]$ ,  $x_6 = 6[m]$  y  $x_9 = 9[m]$ , los que se muestran en la figura 4.5.
- ii. Se registra en cada paso temporal  $t_i$  la fracción de volumen de aire<sup>1</sup> a lo largo de toda la línea marcada en los puntos de medición.
- iii. Para cada uno de los pasos de tiempo  $t_i$  de los punto de medición  $x_j$  se busca la mayor diferencia entre dos nodos consecutivos en su fracción de volumen, y se registra en que valor de su coordenada  $y_j(t_i)$  se produce dicha máxima diferencia.
- iv. Con esto se obtiene un vector  $y_j = (y_j(t_1), y_j(t_2), \dots, y_j(t_i), \dots, y_j(t_n))$  para cada punto de medición  $x_j$ , representando el nivel de agua en cada instante  $t_i$ . Este valor es normalizado para obtener la amplitud de ola  $\eta_j$ , lo que se realiza restando la profundidad de agua  $h$ :

$$\eta_j = y_j - h\tag{4.9}$$

- v. Finalmente se compara el vector  $\eta_j$  obtenido para las distintas mallas.

En la tabla 4.2 se muestra el error RMS entre las mallas para cada punto de medición, en ella se puede ver que la diferencia entre las mallas 4 y 3, correspondientes a las más finas, es del orden de la décima de milimetro, lo que corresponde a un 1 % de la altura de ola.

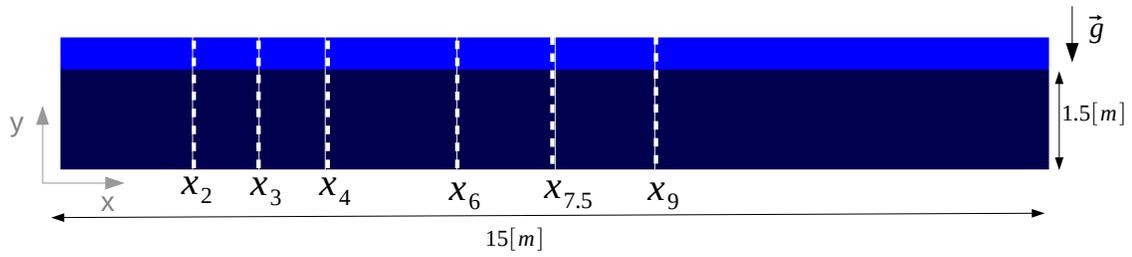
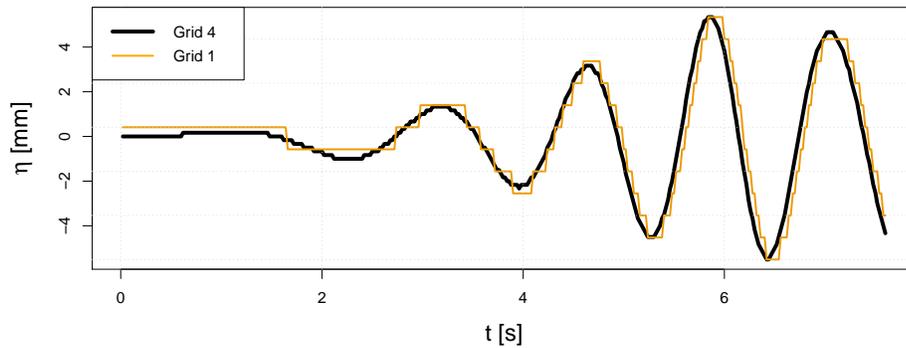


Figura 4.5: Representación de los puntos de medición para el test de malla.

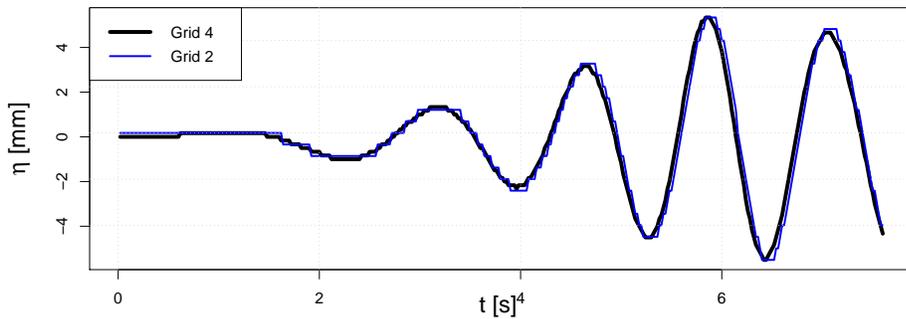
Tabla 4.2: Tabla de errores RMS entre las mallas.

	$x = 2[m]$	$x = 3[m]$	$x = 4[m]$	$x = 6[m]$	$x = 7.5[m]$	$x = 9[m]$
$\bar{\epsilon}_{21}$ [mm]	0.43	0.45	0.39	0.36	0.32	0.33
$\bar{\epsilon}_{32}$ [mm]	0.26	0.28	0.31	0.22	0.18	0.14
$\bar{\epsilon}_{43}$ [mm]	0.11	0.12	0.13	0.11	0.10	0.08

En la figura 4.6 se muestra la comparación gráfica para  $x = 4[m]$  de la amplitud de ola entre las mallas 1,2 y 3 con respecto a la malla 4, correspondiente a la más fina. En base a los resultados obtenidos para las distintas mallas se decide trabajar con la malla 3.



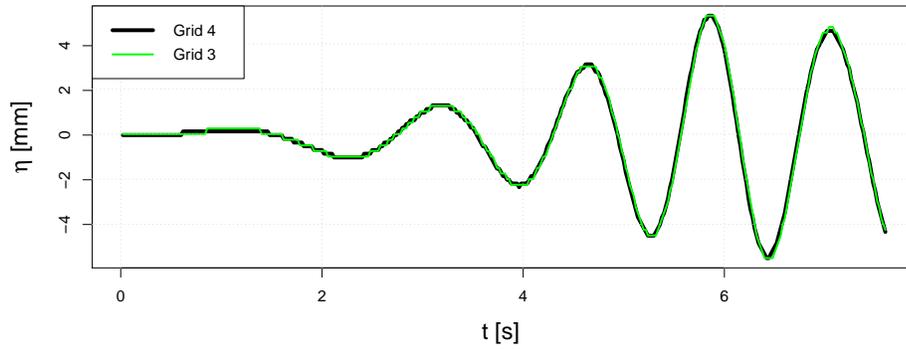
(a) Comparación mallas 1 y 4.



(b) Comparación mallas 2 y 4.

Figura 4.6: Amplitud de ola en  $x = 4[m]$  para las distintas mallas testeadas.

<sup>1</sup>También puede ser registrada la densidad del fluido o la fracción de volumen de agua.



(c) Comparación mallas 3 y 4.

Figura 4.6: Amplitud de ola en  $x = 4[m]$  para las distintas mallas testeadas.[Continuación]

## 4.4. Comparación con la teoría lineal

En base a la simulación realizada se mide la elevación de agua en distintos puntos del canal para poder compararlo con la teoría en base a la ecuación 4.10. En las figuras 4.7 y 4.8 se muestra la comparación gráfica de los resultados obtenidos con Fluent y la teoría en los puntos  $x = 2[m]$  y  $x = 6[m]$ . En las figuras se incluye el gráfico del error en cada tiempo muestreado.

$$\eta(x, t) = \frac{2}{\pi} X_0 \int_0^{\infty} \frac{\tanh(kh)}{k} \frac{\omega^2}{\omega^2 - gk \tanh(kh)} \cos(kx) dk \quad (4.10)$$

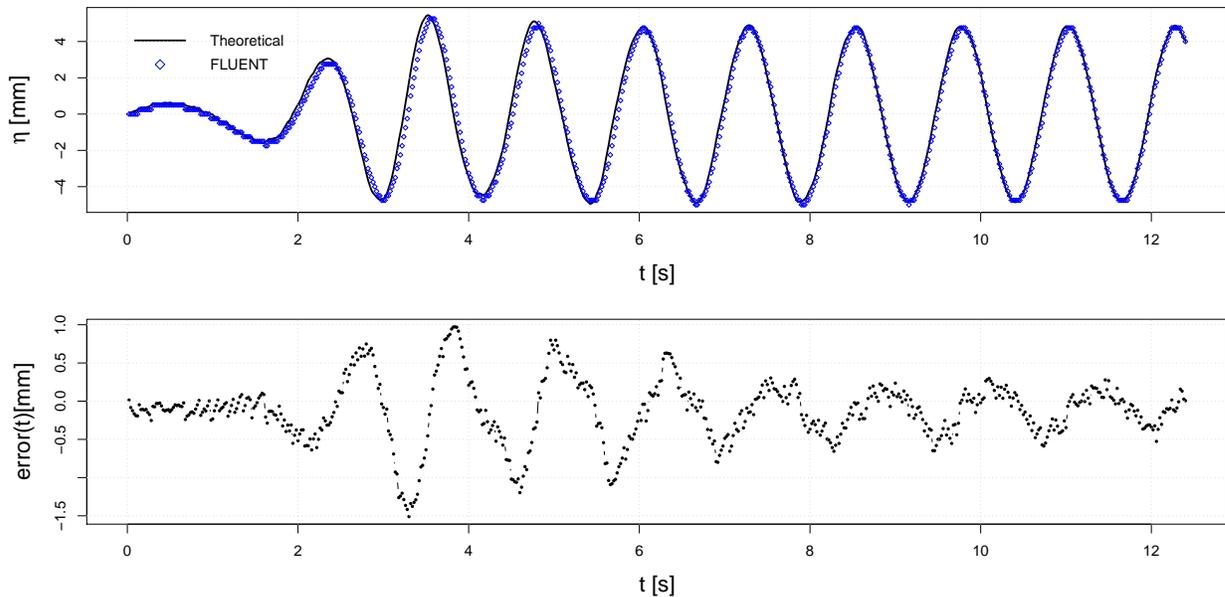


Figura 4.7: Resultado numérico y teórico para  $x = 2[m]$  y su error.

Se puede notar de las figuras 4.7 y 4.8 que las mayores diferencias al comparar con los valores teóricos se encuentran en el estado transiente de la ola, y cuando la ola se desarrolla el error comienza a disminuir. En la tabla 4.3 se muestra el error RMS respecto a la teoría en distintos puntos del canal. El orden del error es de  $0.5[mm]$  para un estado de ola ya desarrollado, que al ser comparado con la altura de la ola obtenida corresponde a un 5%.

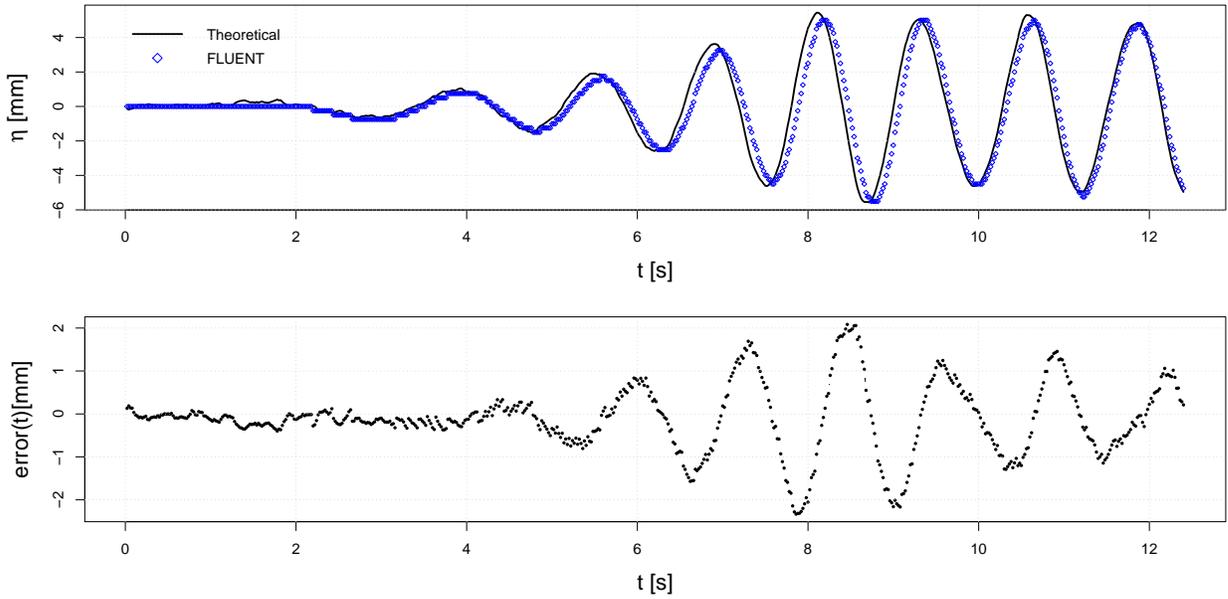


Figura 4.8: Resultado numérico y teórico para  $x = 6[m]$  y su error.

Tabla 4.3: Tabla de error RMS respecto a la teoría lineal.

Posición	$x = 2[m]$	$x = 3[m]$	$x = 4[m]$	$x = 6[m]$	$x = 9[m]$
error [mm]	0.43	0.56	0.66	0.79	0.76

En la figura 4.9 se grafica la amplitud de onda en los puntos  $x_2 = 2[m]$  y  $x_4 = 4[m]$ . En ella se muestra el tiempo transcurrido entre dos picos consecutivos de la onda en el punto  $x_2$ , que representa el periodo de la onda y tiene un valor de  $T = 1.26[s]$ . Además, se marca el tiempo que toma un mismo pico en pasar del punto  $x_2$  al punto  $x_4$  y que equivale a  $\Delta t = 1.02[s]$ .

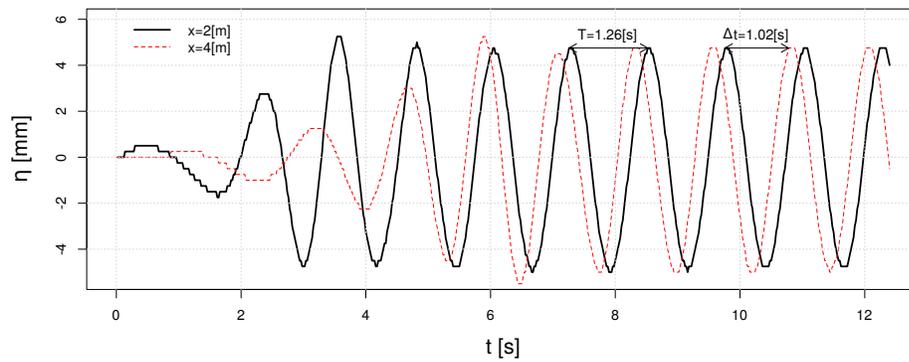


Figura 4.9: Amplitud de la onda en los puntos  $x_2$  y  $x_4$  del canal.

Dada la diferencia de tiempo  $\Delta t$  que demora un mismo pico en pasar por los dos puntos de medición  $x_2$  y  $x_4$  se obtiene la velocidad de la onda  $c_g$ :

$$c_w = \frac{x_4 - x_2}{\Delta t} = \frac{2[m]}{1.02[s]} = 1.96[m/s] \quad (4.11)$$

El valor esperado para la velocidad de la onda, está dado por los valores nominales para la longitud de onda  $\lambda = 2.43[m]$  y el periodo  $T = 1.25[s]$ , de donde se obtiene un valor de  $1.944[m/s]$ , por lo que se obtiene un error del orden de 1% en el valor de la velocidad.

## 4.5. Absorción activa

La absorción que se simula en este trabajo corresponde a una del tipo activa, para la cual existen dos posibles métodos: dinámica y cinemática, las que se diferencian en la magnitud física medida para actuar en la absorción. Si bien el mecanismo final utilizado es uno del tipo cinemático, se incluye el desarrollo teórico de la impedancia de control para un sistema de absorción activo.

### 4.5.1. Dinámica

En esta sección se presentan los cálculos para determinar los parámetros de la impedancia de control para un sistema de absorción dinámico. Solo se realizan los cálculos teóricos de los parámetros en base a las ecuaciones planteadas en los antecedentes específicos.

#### Coefficientes hidrodinámicos

Para determinar los términos de parámetros del sistema de control y de la impedancia intrínseca del sistema, se deben determinar, en primer lugar, los coeficientes hidrodinámicos dados por las ecuaciones 3.19 y 3.20.

Para el caso del amortiguador hidrodinámico  $R$  en el gráfico de la figura 4.10 se puede ver cómo varía su valor para distintas frecuencias dada una profundidad  $h = 1.5[m]$ . Para la frecuencia de operación  $\omega_p$  se tiene que el valor de este coeficiente está dado por:

$$R(\omega_p) = 1498.4[kg/s]$$

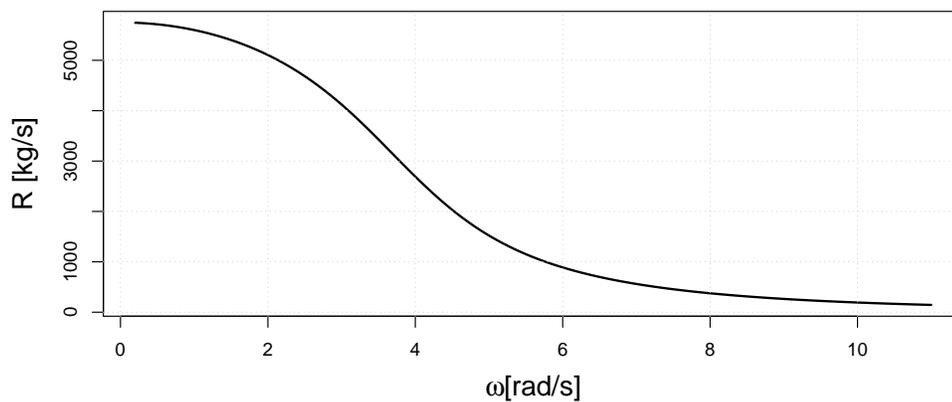


Figura 4.10: Amortiguamiento hidrodinámico  $R$  en función de la velocidad angular, para una profundidad  $h = 1.5[m]$ .

Para el caso de la masa añadida  $m$  también se grafica su dependencia de la frecuencia para una profundidad  $h = 1.5[m]$ , lo que se puede ver en la figura 4.11. Para la frecuencia de operación  $\omega_p$  su

valor de este coeficiente está dado por:

$$m(\omega_p) = 511.65[kg]$$

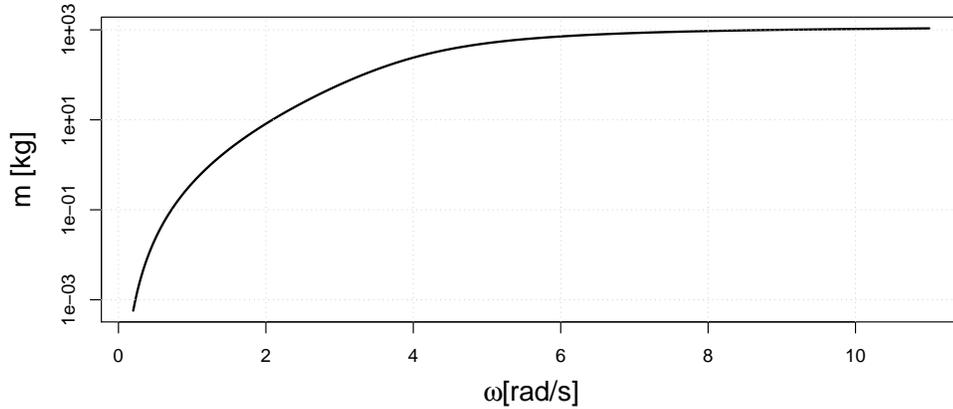


Figura 4.11: Masa añadida  $m$  en función de la velocidad angular, para una profundidad  $h = 1.5[m]$ .

Se debe notar que la ecuación 3.20 considera una suma hasta infinito, donde se recorren los infinitos valores de los valores propios  $m_n$  dados por la ecuación 3.8. Para realizar de manera numérica esta suma se determina la convergencia de la suma, lo que se puede ver en la figura 4.12. En ella se aprecia como converge el valor de  $m(\omega_p)$  a medida que se consideran más valores de  $m_n$  en la suma.

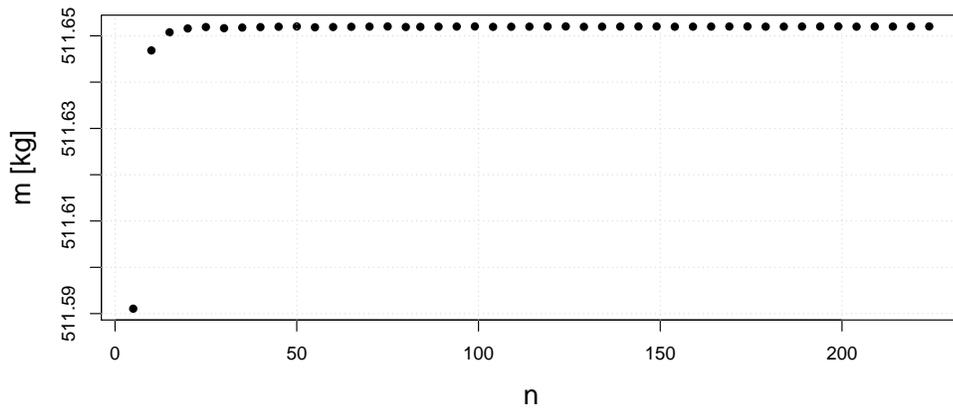


Figura 4.12: Convergencia del valor de masa añadida según la cantidad de valores propios  $m_n$  considerados para las condiciones de operación.

### Parámetros de la impedancia de control

Como se mencionó antes, la ecuación 3.32 presenta infinitas posibilidades para los parámetros de control de masa y restitución. Por otro lado el parámetro proporcional a la velocidad queda dado por la ecuación 3.31:

$$R_u = R(\omega_p) = 1498.4[kg/s]$$

Para determinar el valor de  $c_u$  y  $m_u$  del sistema de control se utiliza la ecuación 3.37, donde el valor de  $\gamma_p(\omega)$  se evalúa a partir de la ecuación 3.36. Esto se realiza para distintos valor de  $C$ , donde la variación de  $\xi$  respecto a  $C$  se puede ver en la figura 4.13, en ella el intervalo de frecuencias utilizado fue de  $0.5 - 1.75[Hz]$  correspondiente al rango típico de funcionamiento de los canales de olas[3].

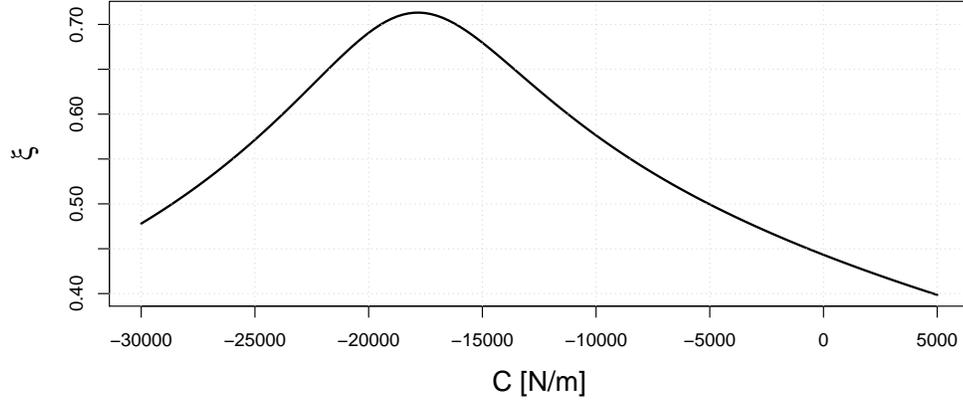


Figura 4.13: Dependencia de la efectividad de absorción respecto al parámetro de control  $C$ .

Con esto queda que el valor óptimo de  $c_u$  y  $m_u$  resulta:

$$c_u = C_{opt} = -17834[N/m]$$

$$m_u = -4059.6[kg]$$

La diferencia de absorción en el rango de frecuencias escogido se puede ver en la figura 4.14, en donde para la frecuencia  $\omega_p$  todos los casos alcanzan la máxima absorción, lo que se esperaba dada la ecuación 3.36. La mejor absorción para el valor de  $C_{opt}$  queda representada por el área bajo la curva, la que es mayor que en los otros casos mostrados en el intervalo de frecuencias escogido.

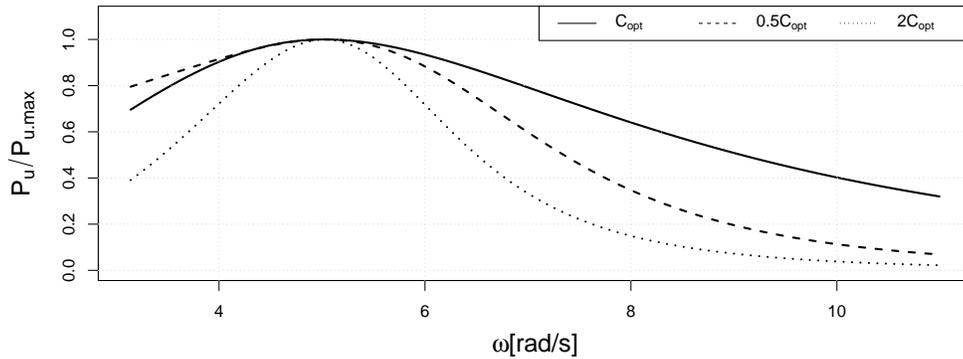


Figura 4.14: Absorción en el rango de frecuencias  $0.5 - 1.75[Hz]$  para distintos valores de  $C$ .

## 4.5.2. Cinemática

La absorción cinemática corresponde a una respuesta del sistema ante la medición del nivel de agua en algún punto del estanque. Para esto se debe evaluar la respuesta del sistema ante la velocidad del pistón  $u_{CG}$ , midiendo el nivel de agua en la pared  $\eta_w$ , como se muestra en el diagrama de bloque de la figura 4.15, en donde se define la función de transferencia como  $G(s) = \frac{\eta_w}{u_0}$ . En la figura 4.16 se muestra la magnitud medida en el canal ante una velocidad impuesta en la paleta.



Figura 4.15: Función de transferencia entre la velocidad del pistón y el nivel de agua en la paleta.

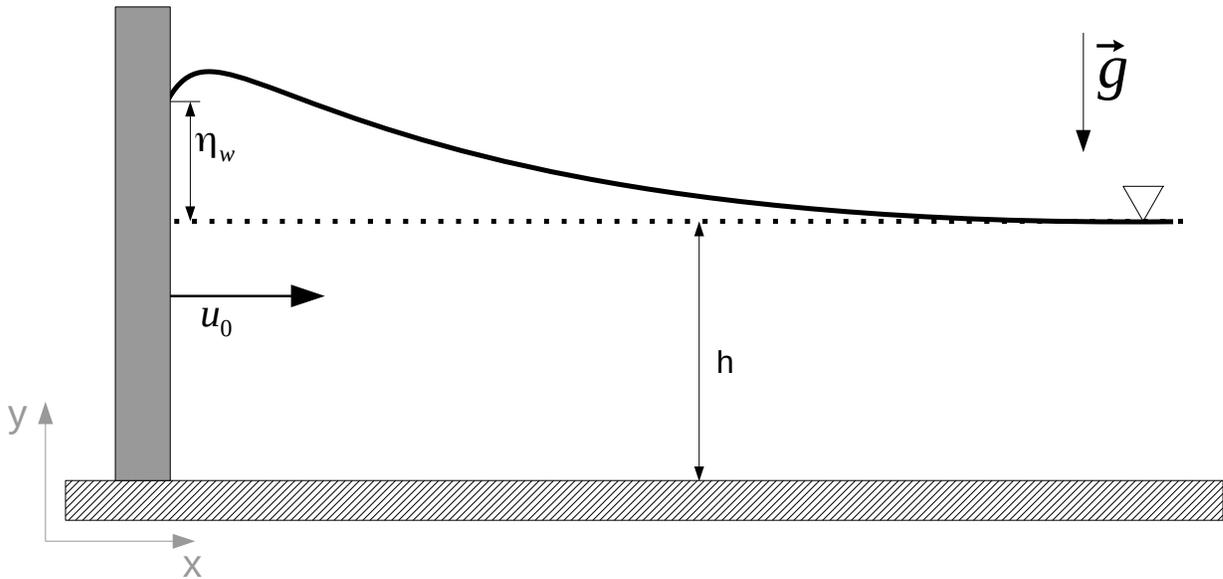
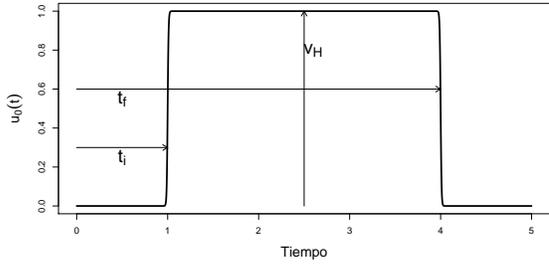


Figura 4.16: Esquema de la magnitud medida para evaluar la respuesta al escalón.

### Respuesta al escalón

Para evaluar la respuesta dinámica del sistema se estudia su respuesta ante una entrada tipo escalón. La función de entrada  $u_{CG}(t)$  impuesta sobre el pistón de generación posee los parámetros mostrados en la figura 4.17, en ella se puede ver que se realiza la consideración de que  $V_H$  representa el valor máximo del escalón.

Para crear esta función en Fluent se aproximó mediante la resta de dos tangentes hiperbólicas, como se muestra en la ecuación 4.12.



$$u_0(t) = \frac{v_H}{2} \left[ \tanh\left(\frac{t-t_i}{\tau}\right) - \tanh\left(\frac{t-t_f}{\tau}\right) \right] \quad (4.12)$$

Donde,

- $v_H$ : Amplitud del escalón.
- $\tau$ : Tiempo de subida del escalón.
- $t_i$ : Tiempo de inicio del escalón.
- $t_f$ : Tiempo final del escalón.

Figura 4.17: Parámetros de la función escalón.

En la tabla 4.4 se puede ver los parámetros de los distintos escalones evaluados, además se define  $V_A = 25[mm/s]$  como la velocidad máxima del escalón del caso base, el que en la tabla corresponde al caso 2.

Tabla 4.4: Parámetros de las funciones escalón utilizadas.

Caso	$t_i$ [s]	$t_f$ [s]	$\tau$ [s]	$V_H$ [mm/s]	$V_H/V_A$
1	0.1	3	0.01	12.5	0.5
2	0.1	3	0.01	25.0	1.0
3	0.1	3	0.01	37.5	1.5
4	0.1	3	0.01	50.0	2.0
5	0.1	3	0.01	62.5	2.5
6	0.1	3	0.01	75.0	3.0
7	0.1	3	0.01	-25.0	-1.0
8	0.1	3	0.01	-75.0	-3.0

En primer lugar se obtiene la respuesta del caso base, es decir, se utiliza la ecuación 4.12 como movimiento de la paleta y se registra el nivel de agua en su pared. Este gráfico se puede ver en la figura 4.18, en donde además se grafica la velocidad que posee el pistón. Se puede ver que la forma del nivel de agua se asemeja a la respuesta de un sistema de segundo orden.

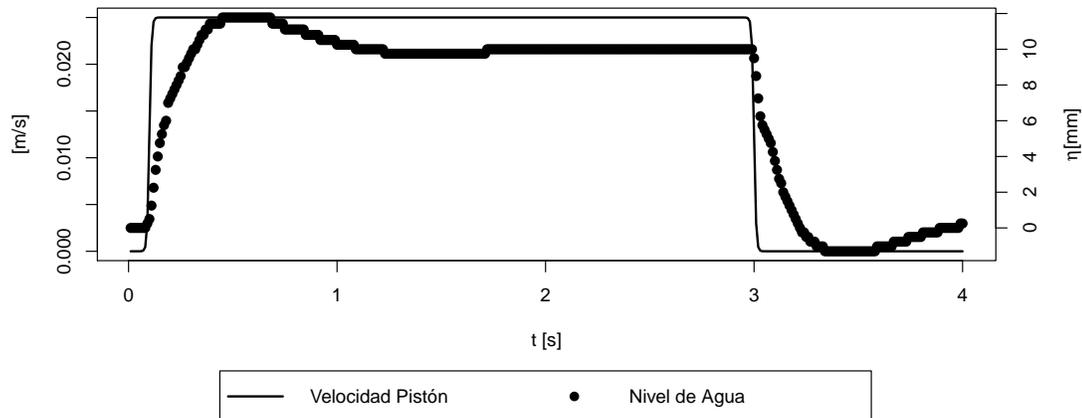


Figura 4.18: Nivel de agua de la paleta ante el escalón del caso base.

La segunda simulación que se realiza corresponde a la del caso 7, en donde se utiliza la misma

función que el caso base pero con signo contrario. Del gráfico 4.19 se puede ver que la respuesta al escalón negativo posee una forma similar a las del caso base pero con signo inverso.

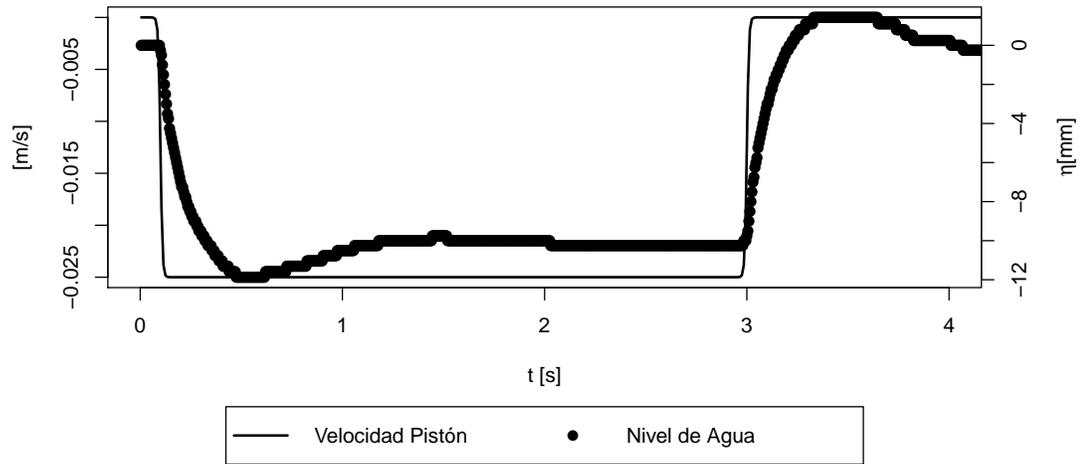


Figura 4.19: Nivel de agua de la paleta ante el escalón del caso 7.

En la figura 4.20 se muestra la respuesta de los casos 1,2,4 y 6. En él se puede ver cómo la forma de las respuestas se mantienen uniformes mientras cambia la magnitud del nivel de agua conforme lo hace la velocidad del pistón. Además, en la figura 4.21 se muestra la evolución del campo de velocidades y del nivel de agua en la cercanía de la paleta para el caso 6.

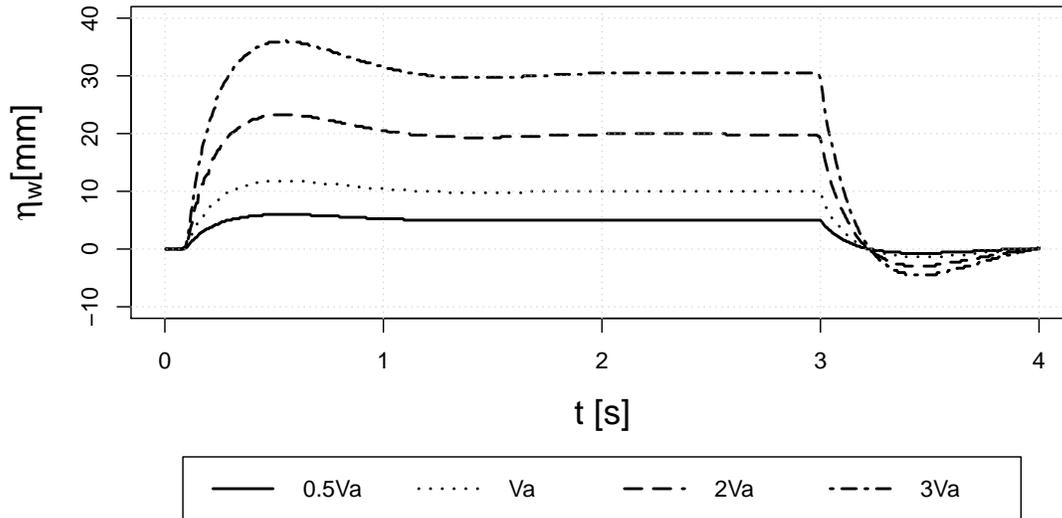


Figura 4.20: Nivel de agua en la paleta para los casos 1,2, 4 y 6.

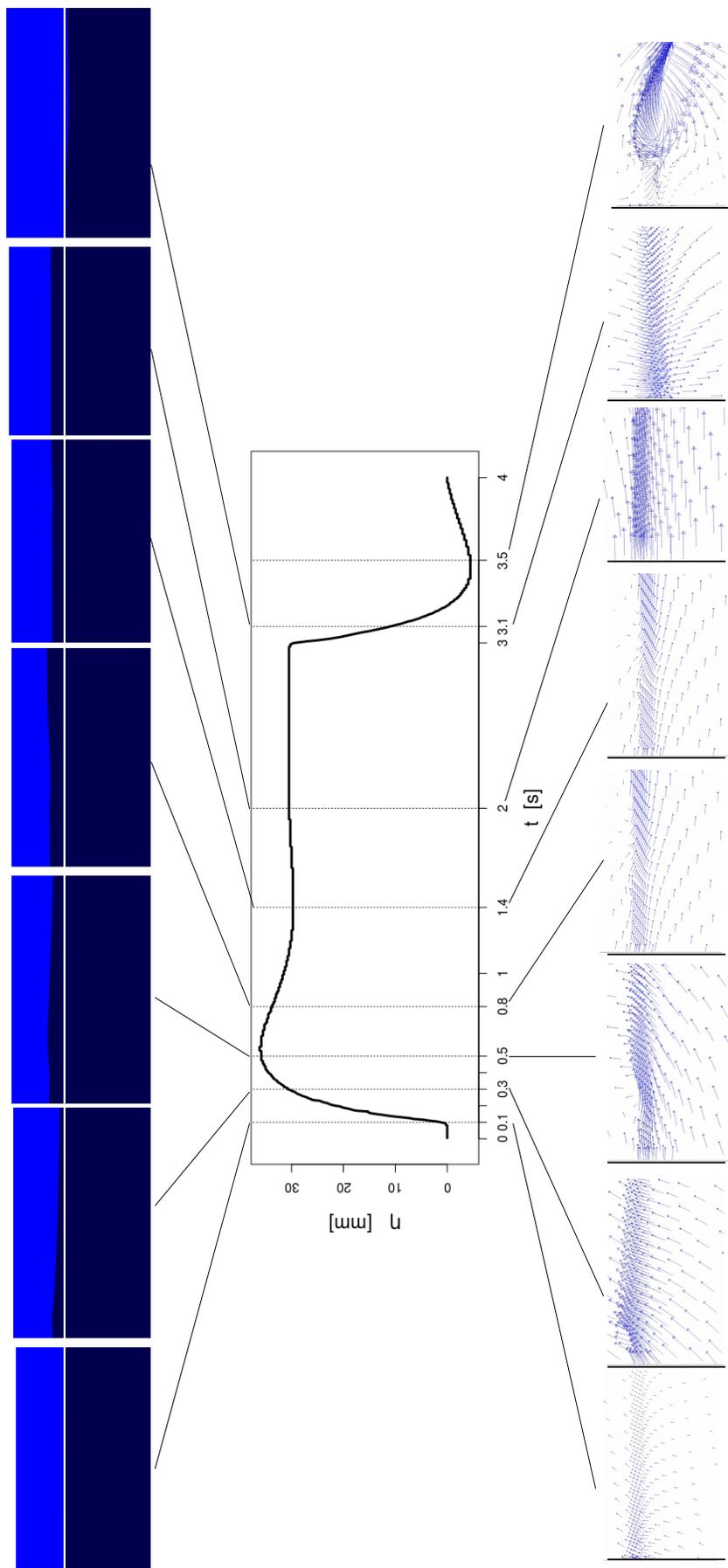


Figura 4.21: Evolución del nivel de agua y campo de velocidades cerca de la paleta para caso 6.

## Parámetros de la respuesta dinámica

Debido a la similitud con respecto a una respuesta de un sistema de segundo orden, se decide calcular los parámetros de frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ , la amortiguada  $\omega_d$  y la razón de amortiguamiento  $\zeta$ . Esto se realiza con las ecuaciones 3.46, 3.47 y 3.45, para lo cual se plantea como referencia los parámetros mostrados en la figura 4.22 para  $M_p$ ,  $t_r$  y  $t_s$ .

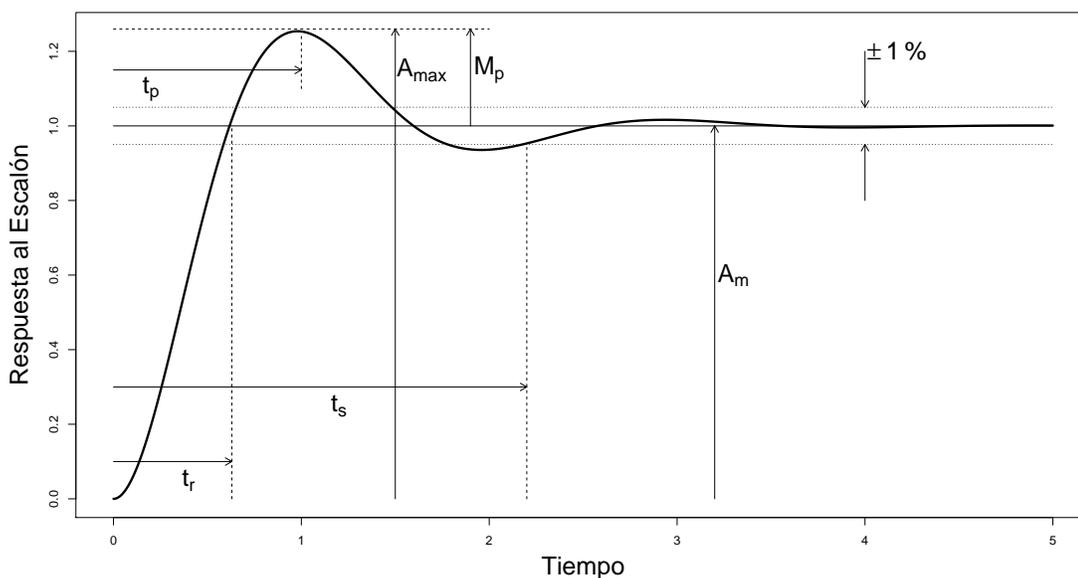


Figura 4.22: Referencia de los parámetros de respuesta dinámica.

Para cada caso la respuesta es normalizada según su valor de establecimiento  $A_m$ , de esta forma se obtiene para cada uno el valor normalizado del overshoot  $M_{p,norm}$ . En la tabla 4.5 se pueden ver los parámetros obtenidos para los casos simulados.

Tabla 4.5: Parámetros de la respuesta dinámica para los distintos casos.

Caso	$A_m$ [mm]	$A_{max}$ [mm]	$M_p$ [mm]	$M_{p,norm}$	$t_p$ [s]	$t_r$ [s]	$t_s$ [s]	$\zeta$	$\omega_n$ [rad/s]	$\omega_d$ [rad/s]
1	5.00	6.00	1.00	0.20	0.46	0.18	1.00	0.46	12.76	11.36
2	10.00	11.75	1.75	0.17	0.45	0.19	1.58	0.49	12.50	10.93
3	15.00	17.75	2.75	0.18	0.45	0.21	1.72	0.48	11.45	10.08
4	20.00	23.25	3.25	0.16	0.44	0.20	2.47	0.48	12.14	10.64
5	24.75	29.25	4.50	0.18	0.44	0.20	1.79	0.48	11.76	10.34
6	30.50	36.18	5.68	0.19	0.45	0.20	1.67	0.47	11.69	10.31
7	-9.75	-11.50	-1.75	0.18	0.46	0.21	1.60	0.48	11.52	10.10
8	-30.00	-34.50	-4.75	0.15	0.46	0.22	1.61	0.52	11.22	9.61

A partir de los datos mostrados en la tabla 4.5 se grafican, en función de la velocidad máxima alcanzada por el escalón  $V_H$ , los parámetros que caracterizan la respuesta temporal. En la figura 4.23 se grafica el valor máximo alcanzado en amplitud  $A_{max}$  y en la figura 4.24 se muestra la amplitud en estado estacionario  $A_m$ . Los tiempos característicos de la respuesta dinámica se pueden ver gráficamente en la figura 4.25

Uno de los parámetros que presenta fluctuaciones fue el tiempo de establecimiento  $t_s$ . Estas variaciones pueden ser ocasionadas por la resolución de la malla, la que es de  $0,25$ [mm] en el eje vertical,

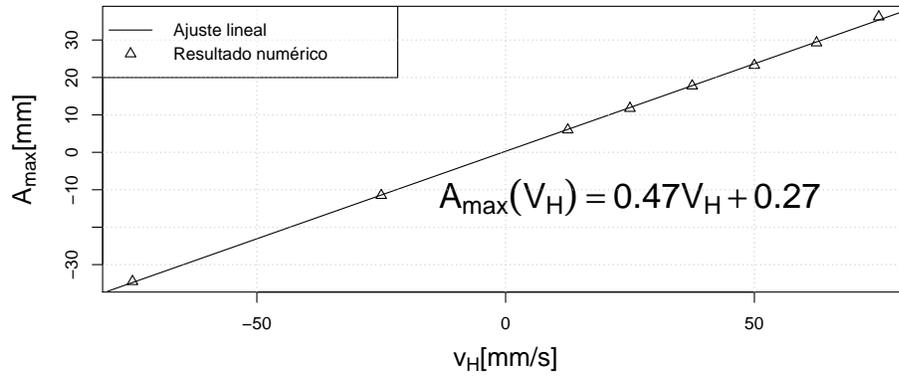


Figura 4.23: Amplitud máxima alcanzada en respuesta a distintas amplitudes del escalón.

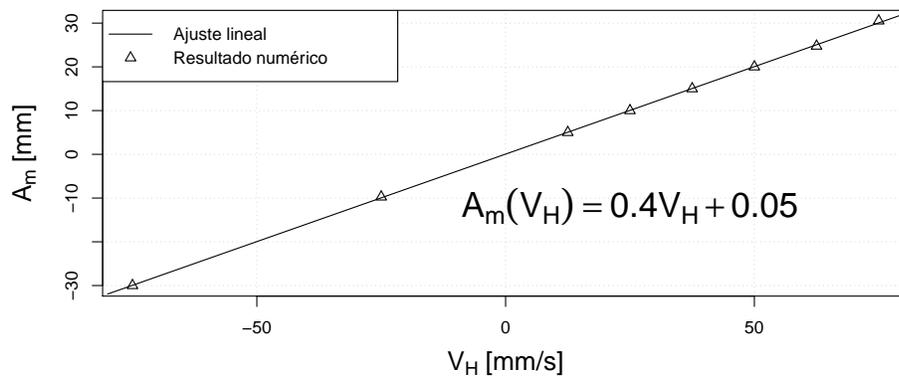


Figura 4.24: Amplitud en estado estacionario alcanzada en respuesta a distintas amplitudes del escalón.

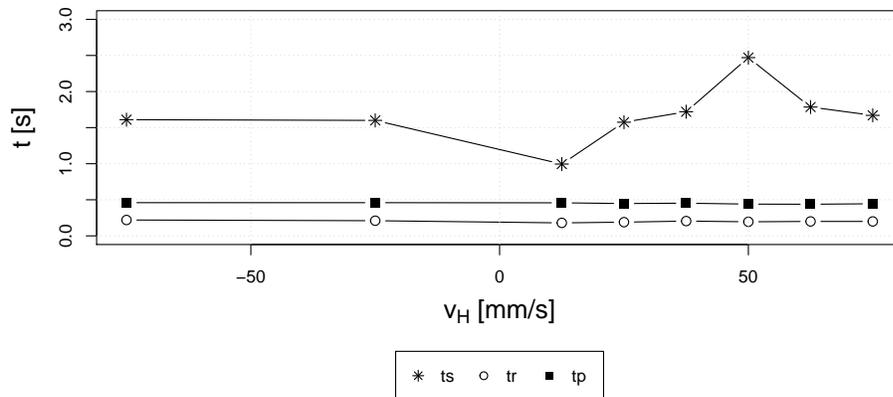


Figura 4.25: Tiempos característicos en función de la velocidad del escalón.

y como el tiempo de establecimiento está definido para diferencias de 1% respecto al estacionario, en el mejor de los casos, es decir para el caso 6, esta diferencia será del orden de  $0.3[mm]$ , por lo tanto la resolución de la malla no alcanza a captar esta diferencia.

Finalmente se grafican las frecuencias amortiguada y no amortiguada y la razón de amortigua-

miento del sistema, las que se pueden en las figuras 4.26 y 4.27. Se puede ver que en general estos valores permanecen constantes a pesar de los cambios de velocidad en los distintos casos, obteniendo los valores de frecuencia y amortiguamiento con sus respectivos a errores:

$$\omega_n = 11.8 \pm 0.5[\text{rad/s}] \quad (4.13)$$

$$\omega_d = 10.4 \pm 0.5[\text{rad/s}] \quad (4.14)$$

$$\zeta = 0.480 \pm 0.016 \quad (4.15)$$

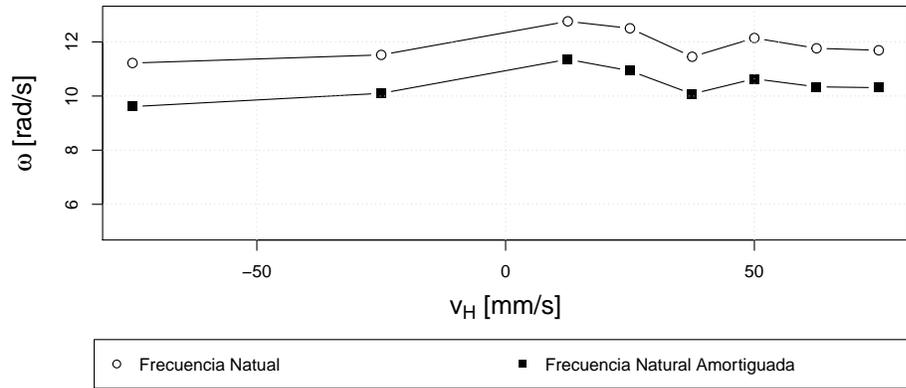


Figura 4.26: Frecuencia natural y amortiguada en función de la velocidad del escalón.

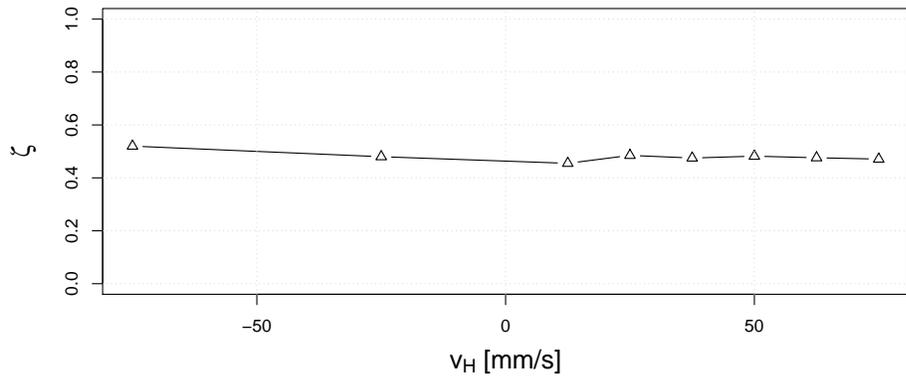


Figura 4.27: Razón de amortiguamiento en función de la velocidad del escalón.

## Modelación del sistema de segundo orden en Simulink

A partir de los parámetros encontrados para la respuesta dinámica se realiza un modelo de segundo orden en Simulink para comparar con los resultados obtenidos mediante Fluent. El esquema utilizado se muestra en la figura 4.28, en el se puede ver que se entrega la resta de dos escalones para simular la velocidad mostrada en la figura 4.17, esta señal pasa por una ganancia  $K$  para finalmente entrar a la función de transferencia del sistema.

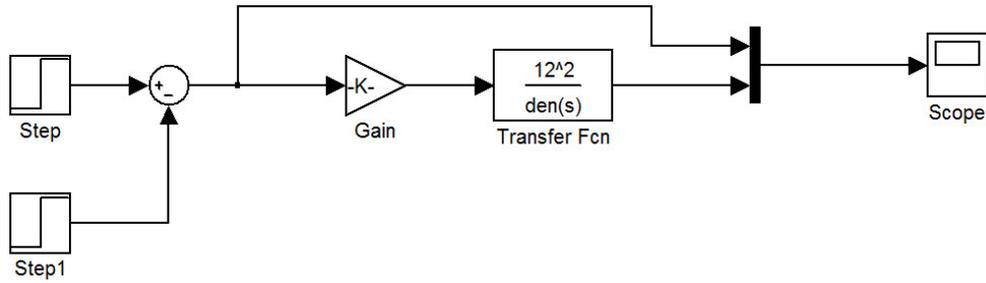


Figura 4.28: Esquema realizado en SIMULINK.

La función de transferencia se construye a partir de la ecuación 3.41, y los parámetros utilizados son los calculados anteriormente. De esta forma la función de transferencia queda como:

$$G(s) = \frac{12^2}{s^2 + 2 \cdot 0.47 \cdot 12 \cdot s + 12^2} \quad (4.16)$$

La ganancia  $K$  del diagrama se considera como la razón entre el valor máximo del escalón de velocidad y el valor en estado estacionario de la respuesta dinámica, es decir:

$$K = \frac{A_m}{V_H} = \frac{5[mm]}{12.5[mm/s]} = 0.4[s] \quad (4.17)$$

Se debe notar que para todos los casos la relación  $A_m/V_H$  permanece constante, como se puede apreciar en la figura 4.24, y en la ecuación anterior solo se muestra los valores del caso 1. En la figura 4.29 se muestra la señal de entrada y de salida del modelo mostrado en la figura 4.28, el cual intenta representar el caso 2, con un señal de entrada con valor máximo de  $25[mm/s]$ .

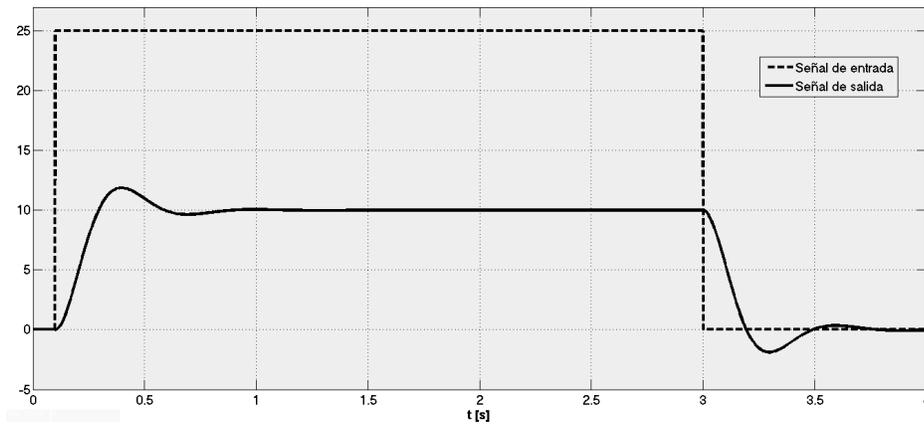


Figura 4.29: Señal de entrada y salida en Simulink.

En la figura 4.30 se muestra la comparación con el resultado de la respuesta dinámica en Fluent y la señal de salida obtenida en Simulink. En ella se compara el caso número 6, donde la velocidad alcanza un máximo de  $75[mm/s]$ .

En la figura 4.30 se puede ver que existe una similitud en forma entre el resultado obtenido en Fluent y el de Simulink, en donde se alcanzan amplitudes similares. Si bien la curva obtenida por Simulink presenta una mayor oscilación antes de alcanzar el estado estacionario, la similitud

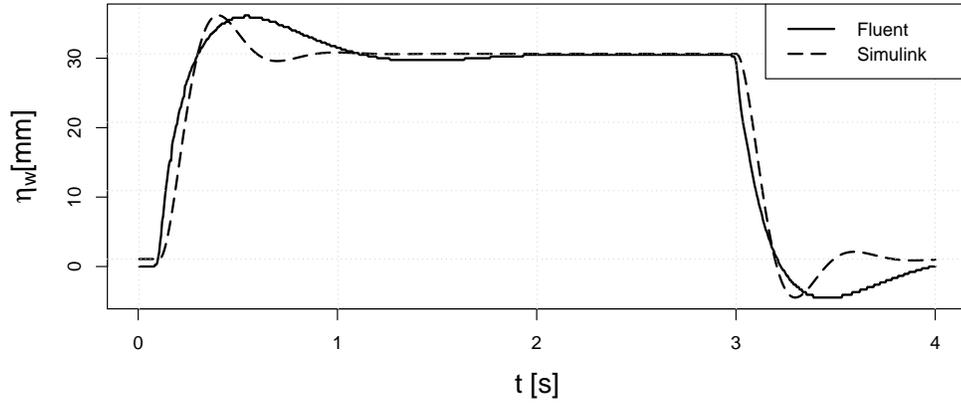


Figura 4.30: Comparación entre respuesta obtenida en Fluent y Simulink para caso 6.

entre ambos métodos es notoria, lo que indica que la función de transferencia implementada puede representar el modelo físico estudiado. Más aún, la similitud mostradas entre ambas respuestas indica que el problema planteado corresponde a uno de segundo orden.

## 4.6. Implementación del sistema de absorción cinemático

Como se mencionó en los capítulos precedentes, la absorción activa implica la generación de olas con el fin de cancelar la onda incidente. En este trabajo la absorción se define a partir del estudio de la respuesta al escalón, en donde la relación entre la amplitud de onda generada y la velocidad de la paleta es utilizada para el sistema de control. El diagrama de bloque utilizado para realizar esta absorción se puede ver en la figura 4.31, indicando que se actúa proporcionalmente a la diferencia con el nivel de agua de referencia.

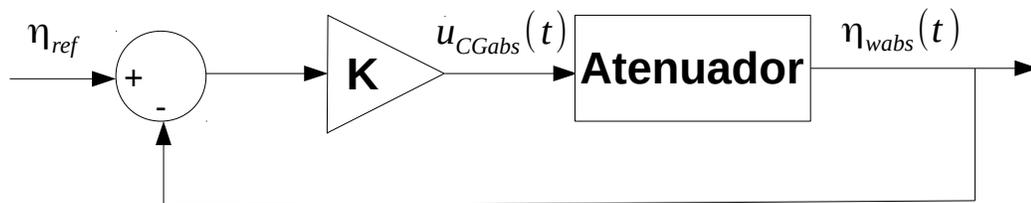


Figura 4.31: Diagrama de bloque del sistema de absorción cinemático implementado.

En la figura 4.1 se señala el punto de medición de la amplitud de onda, la que se realiza en la superficie de la paleta de absorción. En base a esta medición se debe actuar con una velocidad  $u_{CGabs}$  con el objetivo de evitar la reflexión de la onda incidente. Para definir esta velocidad se utiliza el estudio de la respuesta al escalón realizado previamente, en él se establece una relación lineal entre la amplitud en estado estacionario y amplitud máxima con la velocidad del pistón, las que quedaron esquematizadas en las figuras 4.23 y 4.24. Es por esto que se implementaron dos mecanismos de absorción, considerando estas dos relaciones: respuesta ante el overshoot y ante el estado estacionario.

Los dos mecanismos de atenuación se explican a continuación:

a. **Mecanismo 1**

Actúa ante diferencias de amplitud en el borde de su paleta considerando el overshoot de la respuesta al escalón, por lo tanto la velocidad que se le asigna a la paleta de absorción  $u_{CG,abs}$  ante una amplitud de onda  $\eta_{w,abs}$ , está dada por:

$$u_{CG,abs}(t) = 2.13 \cdot \eta_{w,abs}(t) \quad (4.18)$$

b. **Mecanismo 2**

Responde ante diferencias de amplitud en el borde de su paleta considerando el estado estacionario de la respuesta al escalón, por lo tanto la velocidad que se le asigna a la paleta de absorción  $u_{CG,abs}$  ante una amplitud de onda  $\eta_{w,abs}$ , está dada por:

$$u_{CG,abs}(t) = 2.5 \cdot \eta_{w,abs}(t) \quad (4.19)$$

Es importante notar que estas constantes de proporcionalidad fueron obtenidos a partir del estudio de la respuesta al escalón del sistema. Sin embargo es importante notar que un resultado numérico similar se obtiene al utilizar la ecuación 3.39, en donde se define la constante de proporcionalidad entre la velocidad y amplitud de onda para absorción como  $\sqrt{g/h}$ [17], que para este caso de estudio alcanza un valor de:

$$\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{9.8[m/s^2]}{1.5[m]}} = 2.55[1/s] \quad (4.20)$$

La importancia de este resultado es que se llega a un mismo resultado numérico a través de dos metodologías distintas, la presentada en este trabajo corresponde al estudio de la respuesta dinámica del sistema. Por otro lado la constante dada por la ecuación anterior proviene del estudio analítico de la absorción activa de ondas.

Para ahorrar tiempo de simulación, se disminuye el largo del canal a  $8[m]$ , en contraste con los  $15[m]$  antes utilizados, con esto se disminuye la cantidad de nodos de la malla y tiempo físico de simulación, ya que la ola tarda menos tiempo en recorrer el canal. El esquema de esto se puede ver en la figura 4.32, en donde se indican los puntos de medición a lo largo del canal.

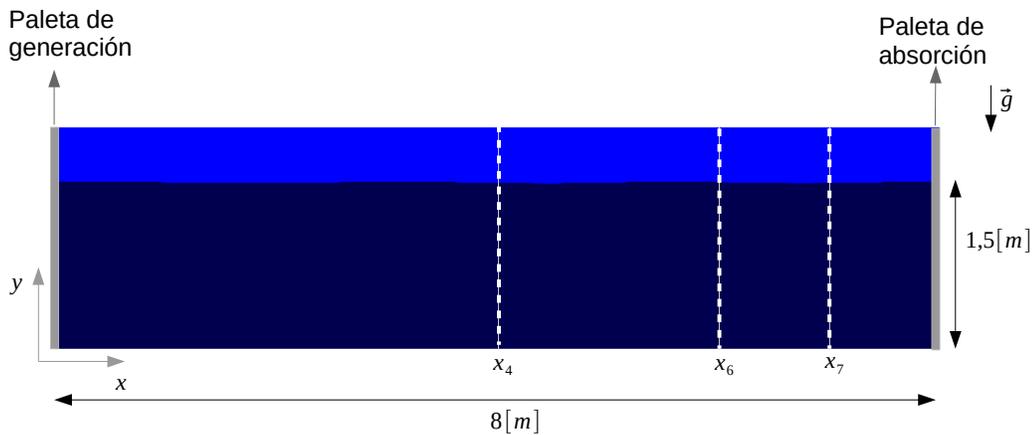


Figura 4.32: Canal diseñado para realizar las pruebas de absorción.

### 4.6.1. Absorción de un onda armónica

En primer lugar se evalúa la absorción de una onda armónica actuando bajo la teoría lineal, donde en este caso se implementan los dos mecanismos de absorción antes explicados. El movimiento de la paleta de generación (correspondiente al lado izquierdo del canal) está dada por:

$$u_{CG}(t) = -\frac{X_0 \cdot \omega_p}{2} \sin\left(\omega_p \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.21)$$

Donde  $X_0 = 0.005[m]$  y  $\omega_p = 1.6\pi[rad/s]$ . Por otro lado la paleta de absorción describe su movimiento según las ecuaciones 4.18 y 4.19 para el mecanismo 1 y mecanismo 2, respectivamente.

Junto a las simulaciones de los dos mecanismos de atenuación, se realiza la simulación de un canal con el la paleta de absorción apagada, es decir, sin ninguna respuesta ante diferencias de amplitud. Esto se realiza con el fin contrastar los resultados obtenidos con y sin absorción y evaluar si existe alguna diferencia entre ambos casos.

En primer lugar se grafica el movimiento de las paletas de absorción de ambos mecanismos, las que se muestran en la figura 4.33. Los dos gráficos de movimiento están hechos respecto a su posición inicial que corresponde a  $x_i = 8[m]$ . Además en la figura 4.34 se muestra la amplitud de onda en la paleta de absorción, que es la magnitud a la cual responde el sistema de atenuación.

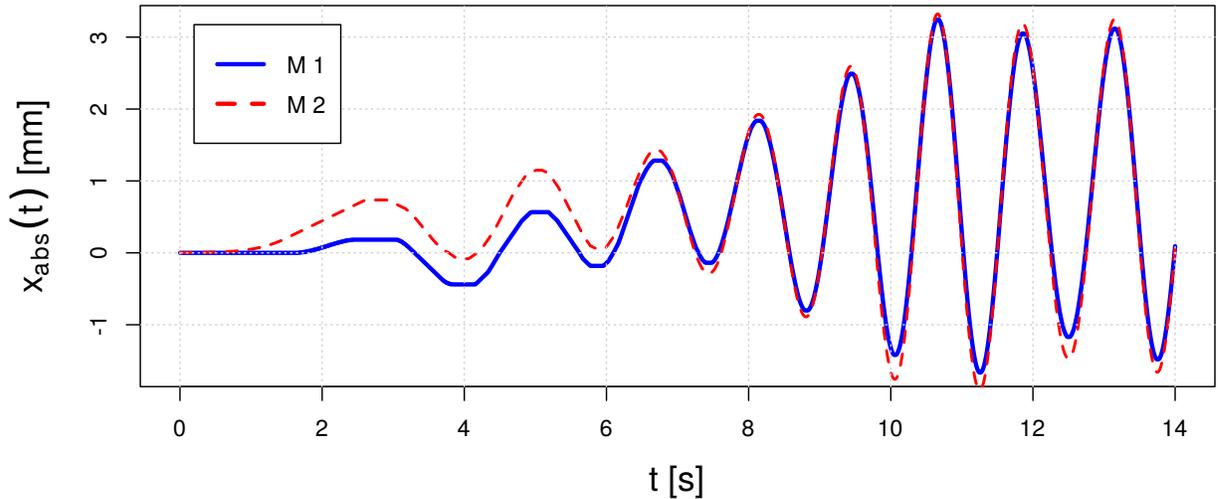


Figura 4.33: Movimiento axial de los dos mecanismos de absorción.

Luego se calcula la potencia sobre ambas paletas: la de absorción y generación. Para realizar este cálculo se procede como se explica a continuación:

- i. Se registra en cada paso temporal el valor de la presión en la superficie de interés, que en este caso corresponde a cada una de las paletas.
- ii. Para cada paso de tiempo se integra la presión  $p(t, y)$  sobre la superficie para obtener la fuerza  $F_w(t)$  sobre ella en cada instante:

$$F_w(t) = \int_0^{h_e} p(t, y) dy \quad (4.22)$$

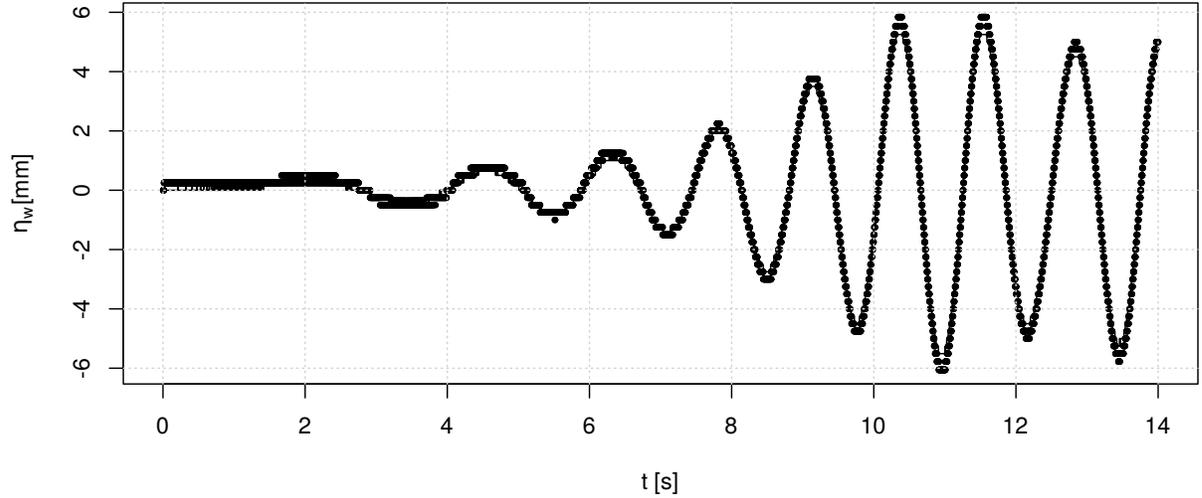


Figura 4.34: Amplitud de onda en la paleta de absorción para el mecanismo 1 de atenuación ante una onda armónica.

- iii. Finalmente se calcula la potencia  $P(t)$  en cada instante al multiplicar la velocidad de la paleta  $u(t)$  con la fuerza  $F_w(t)$ :

$$P(t) = u(t) \cdot F_w(t) \tag{4.23}$$

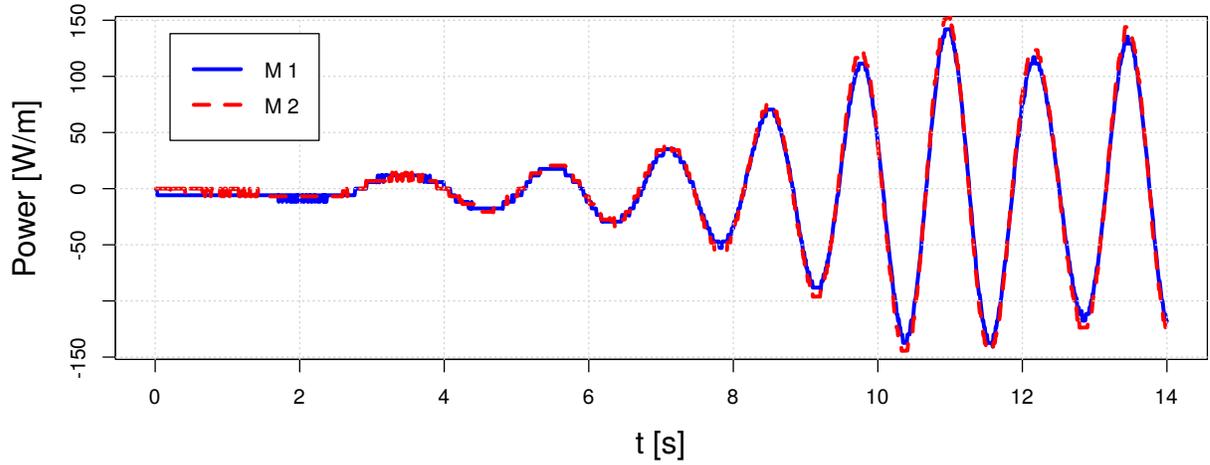
El resultado del cálculo de potencia para cada una de las paletas se grafica en la figura 4.35, donde la potencia utilizada por los dos mecanismos se puede ver en (a) y la utilizada por la paleta de generación en (b). Los valores máximos de potencia para cada caso se muestran en la tabla 4.6, en ella se puede ver que la potencia utilizada para absorción en ambos mecanismos es mayor a la utilizada para la generación de la ola. Además se obtiene que el mecanismo 1 utiliza una menor potencia para absorber que el mecanismo 2, esto se justifica porque la velocidad ante una misma amplitud de onda es menor para el mecanismo 1, debido a su menor constante de proporcionalidad.

Tabla 4.6: Potencia máxima utilizada en cada paleta.

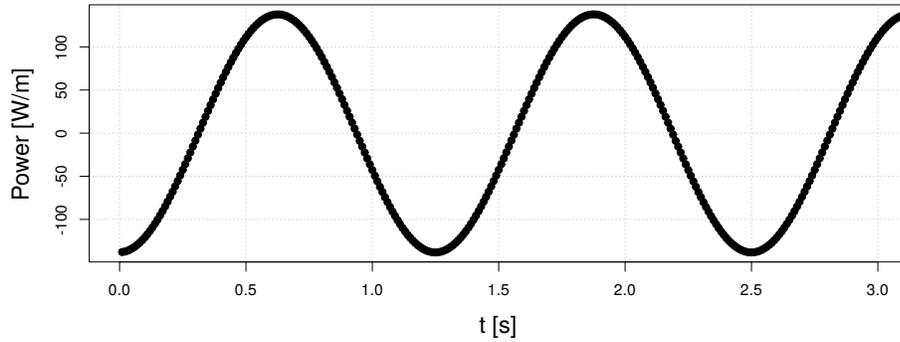
Paleta	Generación	Atenuación: Mecanismo 1	Atenuación: Mecanismo 2
Potencia [W/m]	138,3	140,7	156,9

Se grafica en dos puntos del canal la amplitud de la onda durante el tiempo de simulación, correspondientes a  $x = 4[m]$  y  $x = 6[m]$ . Estas amplitudes se comparan con el caso sin absorción y con el valor teórico que se tendría en esos puntos para un canal lo suficientemente largo. Estas comparaciones se muestran en los gráficos 4.36 y 4.37, donde se muestra las diferencias de amplitudes para los casos simulados y la teoría lineal para los puntos  $x_4$  y  $x_6$ . Se calcula el error RMS para todo el tiempo de simulación de los tres casos respecto a la teoría lineal. Esto se realiza utilizando la ecuación 4.10 y sus resultados se muestran en la tabla 4.7. En esta tabla se puede ver la mejora respecto al caso sin absorción para ambos mecanismos de atenuación, obteniendo errores menores en los dos casos. Además, al comparar los errores respecto a la teoría lineal en los puntos del canal, el mecanismo 1 presenta una pequeña mejora al comparar con el mecanismo 2.

Los efectos de la onda que se ha reflejado dos veces, es decir, la onda que fue reflejada en la paleta de absorción (derecha) y luego en la paleta de generación (izquierda), se verán a partir del instante



(a) Potencia en paletas de absorción.



(b) Potencia en paleta de generación.

Figura 4.35: Potencia utilizada en generación y absorción de las olas.

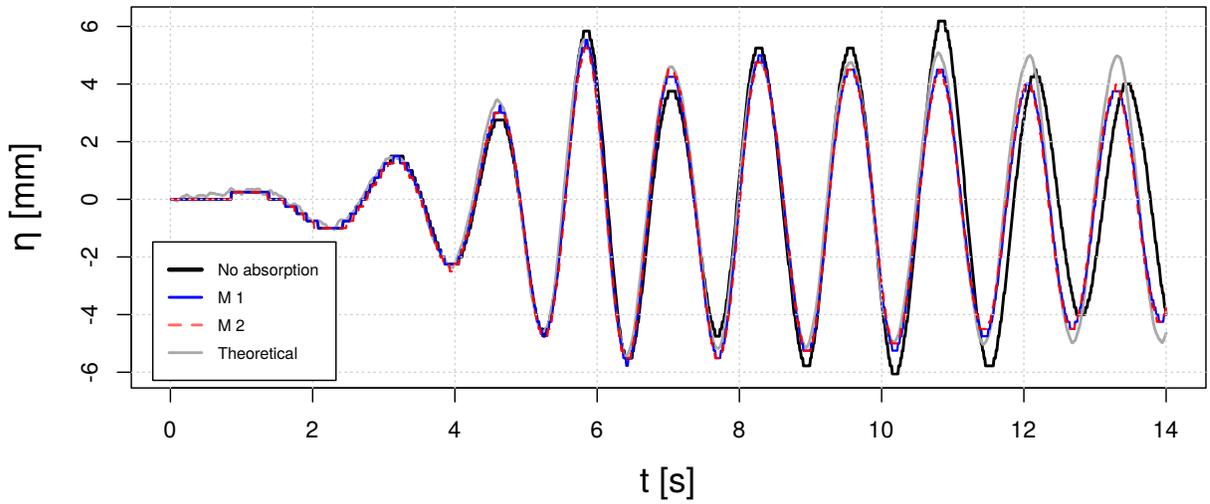
Tabla 4.7: Error absoluto de los tres casos simulados respecto a la teoría lineal.

	$\varepsilon(x_4)[mm]$	$\varepsilon(x_6)[mm]$	$\varepsilon(x_7)[mm]$
Sin Absorción	1.09	1.70	1.85
Mecanismo 1	0.41	0.48	0.80
Mecanismo 2	0.41	0.49	0.90

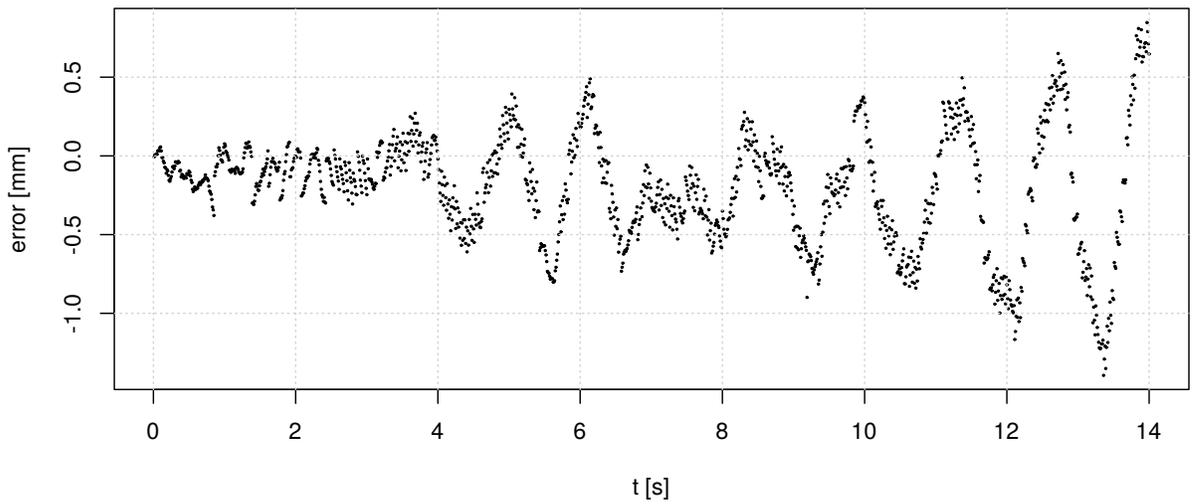
en que la onda haya recorrido toda esa distancia, y esta onda se llamará la onda re-reflejada. Por ejemplo, los efectos de la onda re-reflejada en la mitad del canal se deben apreciar a partir del instante en que la onda haya recorrido  $d = 20[m]$ , por lo tanto el tiempo  $t_e$  en donde la onda re-reflejada llega a  $x = 4[m]$  estará dado por:

$$t_e = \frac{d}{c_w} = \frac{20[m]}{1.96[m/s]} = 10.2[s] \quad (4.24)$$

Se puede ver en la figura 4.36, como a partir del instante  $t_e = 10.2[s]$  el error entre la teoría lineal y la amplitud obtenida para el caso del canal con absorción aumenta, lo que es explicado por el efecto de la onda re-reflejada.



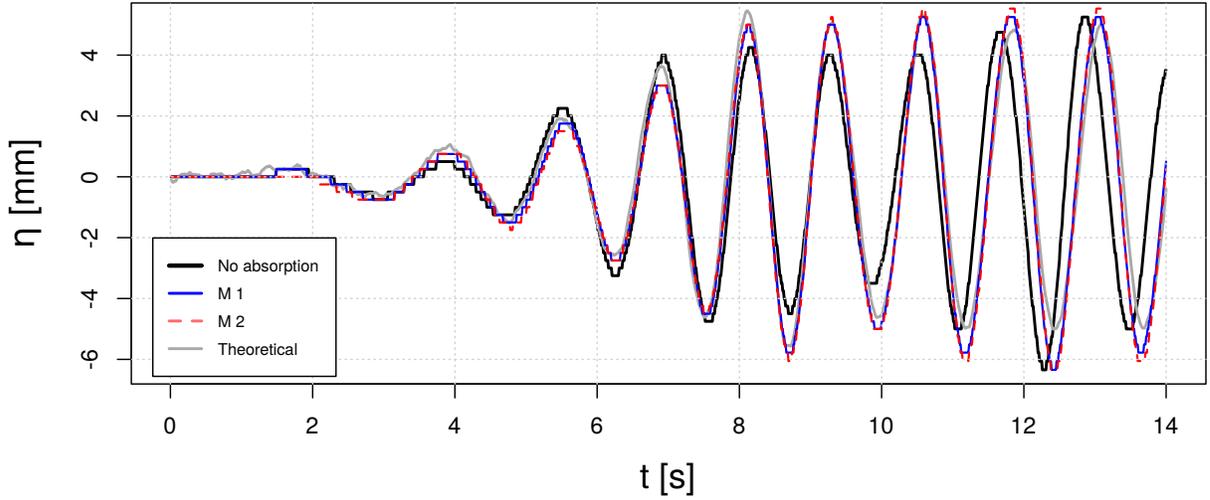
(a) Amplitud de onda.



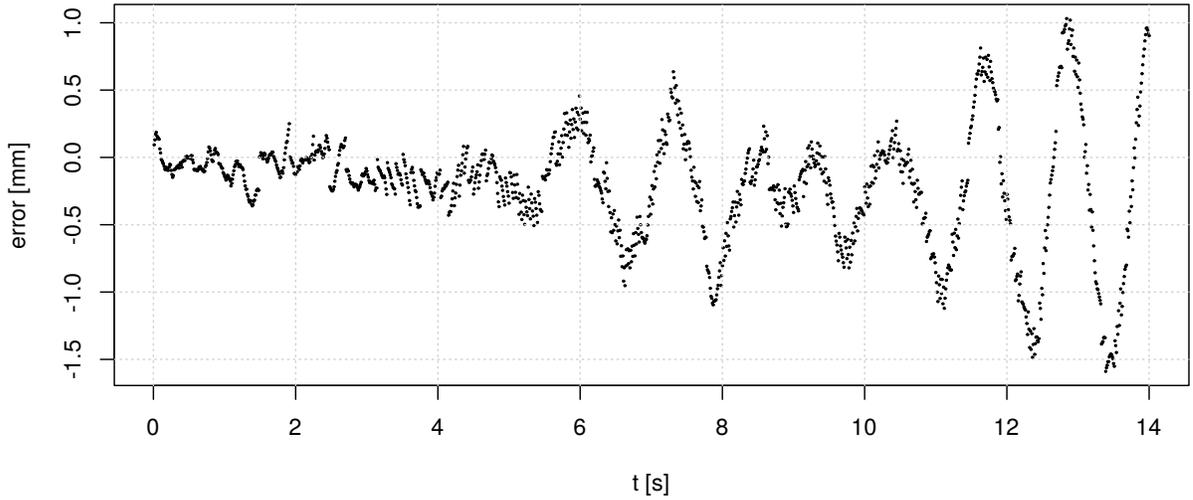
(b) Diferencia de amplitud de onda entre el caso de absorción utilizando el mecanismo 1 y la teoría lineal.

Figura 4.36: Amplitud de onda en  $x = 4[m]$  y el error respecto a la teoría lineal.

Este mismo análisis se puede realizar para el punto de medición  $x = 6[m]$ , en donde el efecto de la ola re-reflejada se debe apreciar cuando la ola haya recorrido  $d = 22[m]$ , por lo que el instante en que aparecen estos efectos está dado por  $t_e = 11.33[s]$ , lo que se puede apreciar en la figura 4.37.



(a) Amplitud de onda.



(b) Diferencia de amplitud de onda entre el caso de absorción utilizando el mecanismo 1 y la teoría lineal.

Figura 4.37: Amplitud de onda en  $x = 6[m]$  y el error respecto a la teoría lineal.

#### 4.6.2. Absorción de un onda impulsiva

Para poder obtener una solución gráfica más clara de la absorción, se simula en el mismo canal de la figura 4.32 la atenuación de una onda impulsiva. Para esto se genera por el lado izquierdo del canal una onda moviendo la paleta con la función:

$$u_{CG}(t) = \frac{v_H}{2} \left[ \tanh\left(\frac{t-t_i}{\tau}\right) - \tanh\left(\frac{t-t_f}{\tau}\right) \right] \quad (4.25)$$

En donde  $v_H = 0.025[m/s]$ ,  $\tau = 0.01[s]$ ,  $t_i = 0.1[s]$  y  $t_f = 3[s]$ . En base la velocidad de la paleta de generación de la ecuación anterior se puede determinar el desplazamiento axial  $x_{gen}$  que realiza a través de la siguiente ecuación:

$$x_{gen} = \int_{t=0}^{t_f} u_{CG} = 72.5[mm] \quad (4.26)$$

Se simulan dos nuevas situaciones: en primer lugar un canal sin absorción, es decir, la paleta del lado derecho no posee movimiento y en segundo lugar un canal con absorción, en donde el movimiento de la paleta derecha está dado por el mecanismo 1 de absorción. Estas dos situaciones son comparadas para ver la diferencia en la reflexión producida al lado derecho del canal cuando existe y cuando no existe absorción.

Para el caso sin absorción el nivel de agua en el canal experimenta un aumento debido a la reducción de largo del canal desde un largo inicial  $L_i = 8[m]$  a un largo  $L_f = L_i - x_{gen}$ , de esta manera el nivel de agua debe subir una cantidad  $\delta_f$  respecto al nivel inicial  $h$  dado por:

$$\delta_f = \frac{L_i \cdot h}{L_f} - h = \frac{8[m] \times 1.5[m]}{8[m] - 0.0725[m]} - 1.5[m] = 0.0137[m] = 13.7[mm] \quad (4.27)$$

Por lo tanto el caso simulado sin absorción debe oscilar respecto a este nuevo nivel de agua, lo que se puede ver en la figura 4.38, en donde se grafica el nivel de agua en los puntos de medición  $x_4 = 4[m]$  y  $x_6 = 6[m]$  para el caso sin absorción. Sin embargo se mantiene como referencia  $h = 1.5[m]$  para poder comparar con el caso con absorción. En la figura 4.38 se puede ver que en los primeros instantes de la simulación sólo existe un desplazamiento entre la forma de onda en ambos puntos de medición, y es en ese punto en donde se mide la diferencia de tiempo para poder calcular la velocidad de avance de la onda impulsiva a partir de la separación entre los  $x_6$  y  $x_4$ :

$$c_w = \frac{x_6 - x_4}{dt} = \frac{2[m]}{0.5[s]} = 4[m/s] \quad (4.28)$$

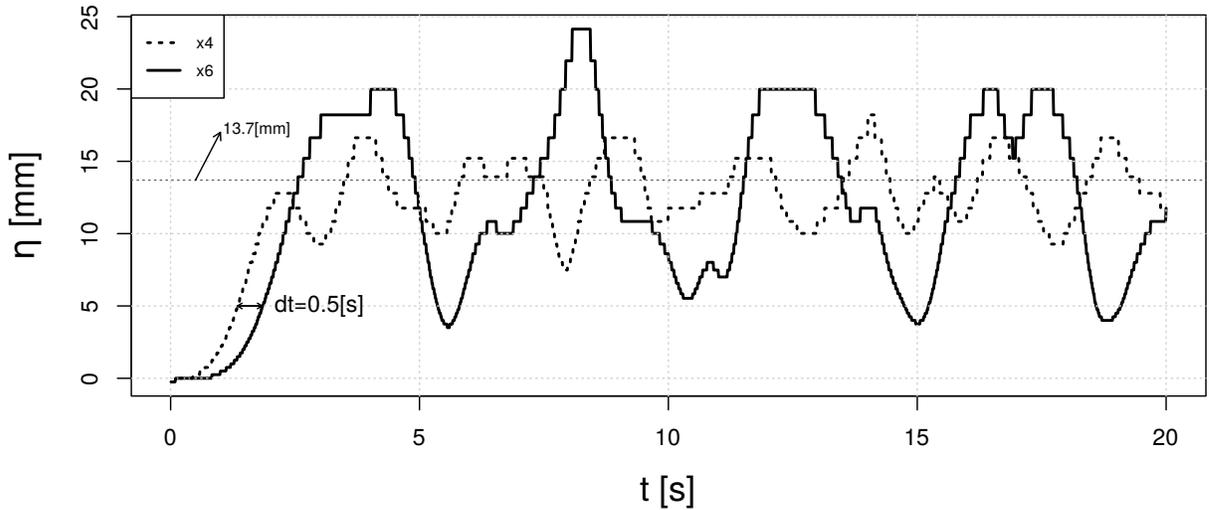


Figura 4.38: Amplitud de onda en  $x = 4[m]$  y  $x = 6[m]$  para una onda impulsiva en un canal sin absorción.

Esta velocidad de onda es del orden de la velocidad teórica  $c_{w,t}$  para ondas en agua poco profunda[4], la que está dada por la ecuación 4.29. El error de la velocidad de onda obtenida respecto a la teórica es de un 4%.

$$c_{w,t} = \sqrt{g \cdot h_e} = \sqrt{9.8[m/s^2] \cdot 1.5[m]} = 3.83[m/s] \quad (4.29)$$

El primer resultado de la simulación de la absorción de la onda impulsiva se muestra en la figura 4.39, en ella se puede ver el movimiento axial descrito por la paleta de absorción respecto a su posición inicial. Es importante notar que el desplazamiento total de esta paleta es de  $x_{abs} = 73[mm]$ , que es casi el mismo valor que el desplazamiento que presenta la paleta de generación  $x_{gen} = 72.5[mm]$ , presentando un error menor al 1%.

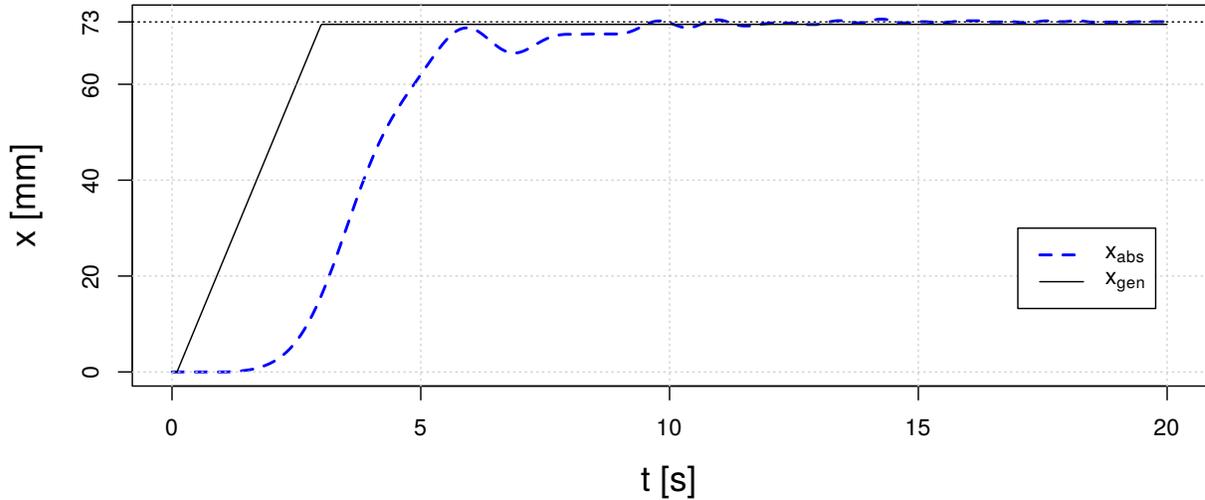


Figura 4.39: Movimiento axial de la paleta de absorción y generación para onda impulsiva con respecto a su posición inicial.

En la figura 4.40 se grafica el nivel de agua en la paleta de absorción para el caso con absorción, en ella se puede ver como pasado un tiempo, el nivel del agua desciende hasta oscilar con respecto al nivel de agua inicial  $h = 1.5[m]$ , correspondiente al nivel de referencia.

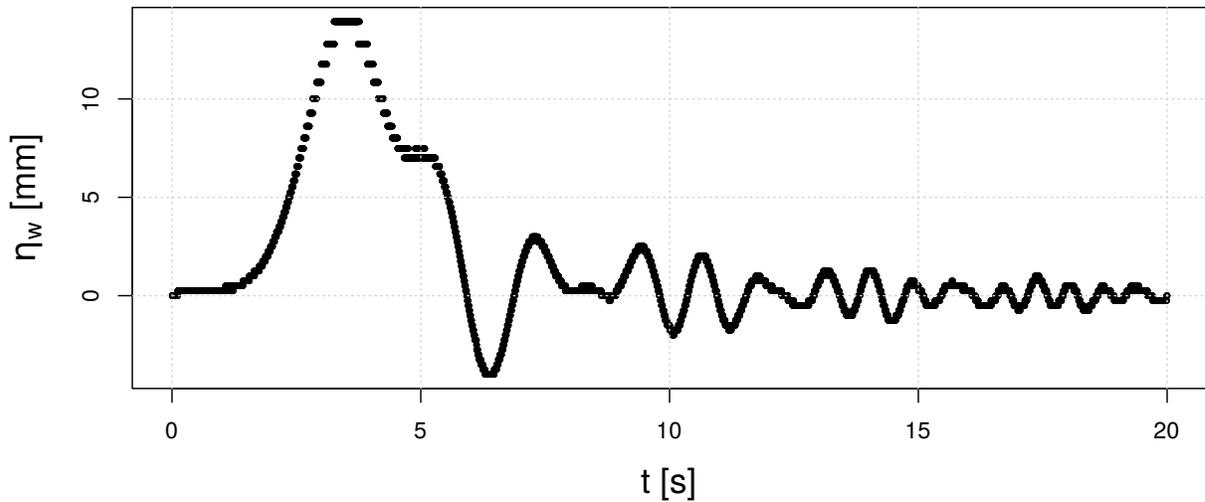
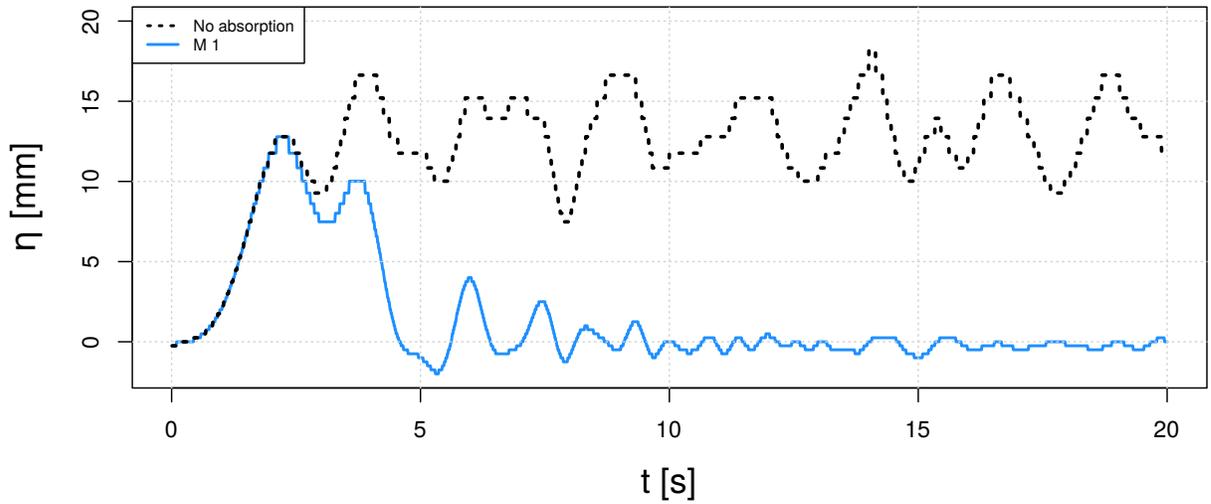


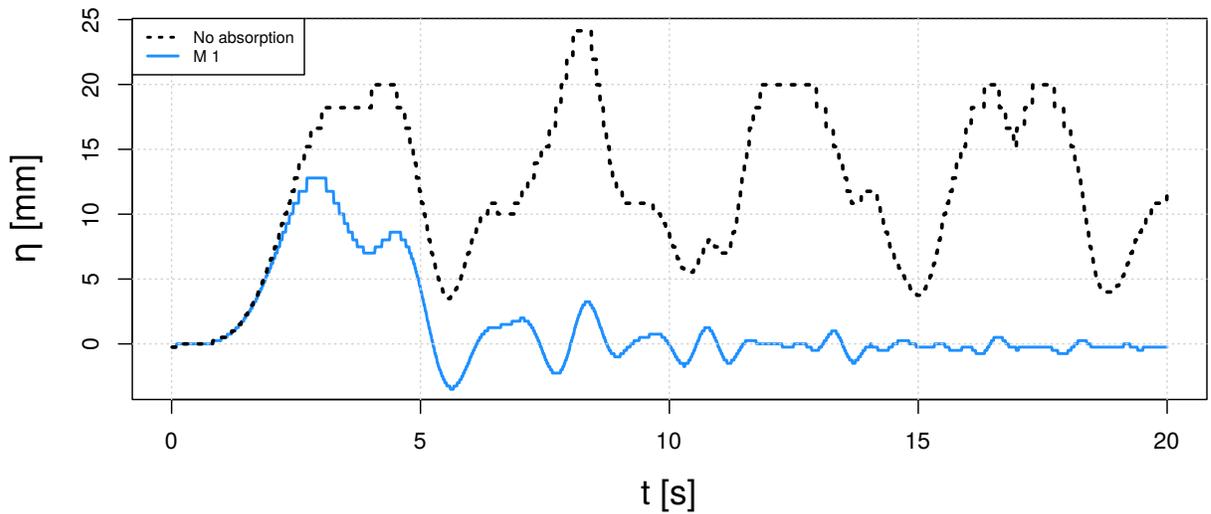
Figura 4.40: Nivel de agua en la paleta de absorción.

Finalmente se compara los casos sin absorción y con absorción para la onda impulsiva. Esta comparación se puede ver en los gráficos 4.41.a, 4.41.b y 4.41.c para los puntos de medición en

$x = 4[m]$ ,  $x = 6[m]$  y  $x = 7[m]$ , respectivamente. En ellas se puede notar como para el caso con atenuación disminuyen las oscilaciones del nivel de agua en los distintos puntos de medición. Además el nivel de agua vuelve a su valor inicial, en contraste con el caso sin absorción, en donde las altas oscilaciones se prolongan durante todo el tiempo de simulación y lo hacen a un nivel superior respecto al nivel inicial de agua.

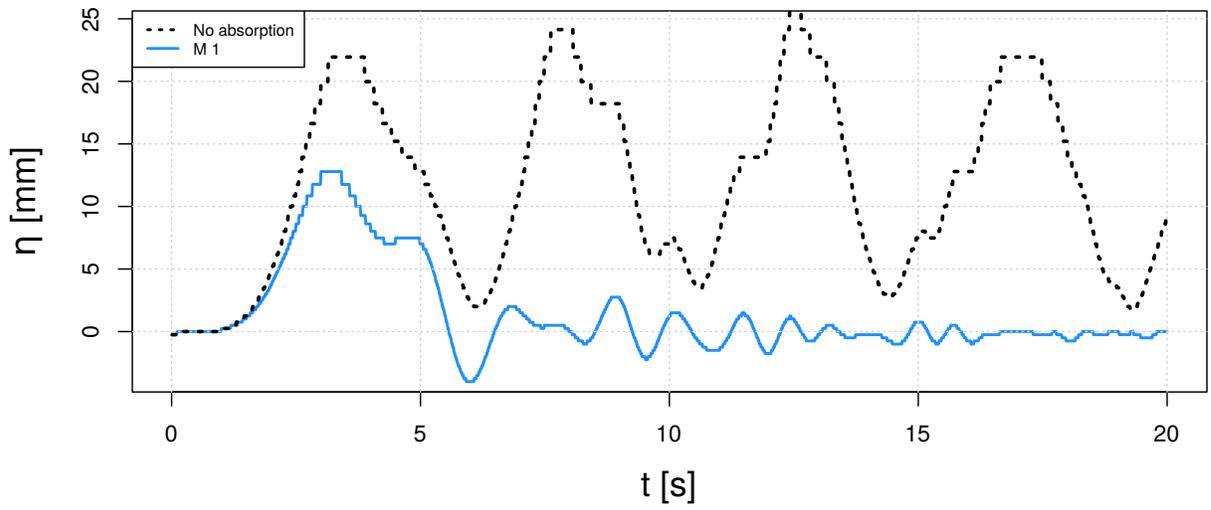


(a)  $x=4$  m.



(b)  $x=6$  m.

Figura 4.41: Nivel de agua en distintos puntos del canal para las situaciones con y sin absorción de una onda impulsiva.



(c)  $x=7$  m.

Figura 4.41: Nivel de agua en distintos puntos del canal para las situaciones con y sin absorción de una onda impulsiva (Continuación).

# Capítulo 5

## Conclusiones

En base a los resultados obtenidos y los objetivos planteados en este trabajo, se establecen las principales conclusiones:

- Al comparar con la teoría lineal de ondas se encuentra que el modelo numérico implementado en Fluent es capaz de representar con bastante exactitud las condiciones de la ola creada.
- En base al estudio de la respuesta al escalón de la paleta tipo pistón se determina que éste responde como un sistema de segundo orden, de donde se pueden obtener sus parámetros característicos de frecuencia y razón de amortiguamiento y de esta manera se puede crear su función de transferencia característica.
- Existe una relación lineal entre la amplitud de la onda en la paleta tipo pistón y su velocidad axial.
- La constante proporcional del mecanismo 2 de atenuación se obtiene a través del estudio de la respuesta dinámica y es igual al resultado teórico dado por  $\sqrt{g/h}$ .
- Los dos mecanismos de atenuación implementados en Fluent resultan efectivos para evitar la reflexión de ondas en el fondo del canal y ambos presentan un desempeño similar de absorción al ser comparados con la teoría lineal para ondas armónicas.
- La potencia utilizada para la absorción es mayor en la paleta de absorción que en la de generación para los dos mecanismos simulados. Sin embargo, el mecanismo 1 utiliza menos potencia en su aplicación.
- El diseño del atenuador es capaz de disminuir la reflexión de ondas armónicas en agua profunda e impulsivas en agua poco profunda, lo que justifica la idea de la atenuación de olas mediante la cancelación de ellas por amplitud.
- Para el caso de la absorción de ondas armónicas, el error respecto a la teoría lineal aumenta cuando aparece el efecto de las ondas re-reflejadas en el punto de interés.

# Bibliografía

- [1] Krogstad H. & Arntsen O. (2000). Linear wave theory. Norwegian University of Science and Technology.
- [2] Falnes, J. (2002). Ocean waves and oscillating systems: linear interactions including wave-energy extraction. Cambridge university press.
- [3] Maguire, A. E. (2011). Hydrodynamics, control and numerical modelling of absorbing wavemakers.
- [4] Bernard Le Méhauté. (1976). An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves. California: Springer Science+Business Media,LLC.
- [5] Dean, R.C. & Dalrymple, R.A. Water wave mechanics for engineers and scientists. 2nd. Singapore ; Teaneck, NJ: World Scientific, 1991. ISBN 9810204205.
- [6] Frigaard, P., & Andersen, T. L. (2010). Technical Background Material for the Wave Generation Software AwaSys 5. Aalborg: Department of Civil Engineering, Aalborg University. (DCE Technical Reports; No. 64).
- [7] Liu, T. L., & Lin, C. C. (2012). Wave-maker Stroke Design and Wave-decay Methods in Numerical Wave Tank Study.
- [8] Secher O. Waves generated by a piston-type wavemaker. Research Division, U.S. Army Coastal Engineering Research Center (pp. 589-607). Washington, D.C.
- [9] Chatry, G., Clément, A. H., & Gouraud, T. (1998, January 1). Self-Adaptive Control of a Piston Wave Absorber. International Society of Offshore and Polar Engineers.
- [10] Brendan Guillouzouic.(2014). Collation of Wave Simulation Methods. MARINET.
- [11] (2013). Breaking Waves.[Figura]. Recuperado de [http://wetravelandblog.com/wp-content/uploads/2013/11/333004\\_MS-ES-14-10-Breaking-Waves.jpg](http://wetravelandblog.com/wp-content/uploads/2013/11/333004_MS-ES-14-10-Breaking-Waves.jpg)
- [12] Spinneken J. & Swan C. (2012, julio 21). The operation of a 3D wave basin in force control. Ocean Engineering, 55, pp. 88-100.
- [13] Naito, S. (2006, June 1). Wave Generation And Absorption In Wave Basins: Theory And Application. International Society of Offshore and Polar Engineers.
- [14] Spinneken J. & Swan C. (2009, enero 28). Second-order wave maker theory using force-feedback control. Part I: A new theory for regular wave generation. Ocean Engineering, 36, pp.539-549.
- [15] Spinneken J., Christou M. & Swan C. (2014, abril 15). Force-controlled absorption in a fully-nonlinear numerical wave tank. Journal of Computational Physics, 272, pp.127-148.

- [16] Lin C. & Huang C. (2004, julio 20). Decomposition of incident and reflected higher harmonic waves using four wave gauges. *Coastal Engineering*, 51, pp.395-406.
- [17] Lykke T., Clavero M., Frigaard P., Losada M. & Puyol J. (2016, abril 2). A new active absorption system and its performance to linear and non-linear waves. *Coastal Engineering*, 114, pp. 47-60.
- [18] Hernández R. (2014). *Fundamentos de Control de Sistemas*. Santiago: Universidad de Chile.
- [19] Ogata K.. (2010). *Modern Control Engineering*. New Jersey: Prentice Hall.
- [20] Patankar S..(1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor & Francis. ISBN 978-0-89116-522-4.
- [21] *Fluent 6.3 User's Guide*. (2006). Fluent Inc.

# Anexo A

## Ecuación de Bernoulli

A partir de las suposiciones realizadas, la ecuación de Navier-Stokes queda como,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p_{tot} + \vec{g} \quad (\text{A.1})$$

Se utiliza la siguiente identidad vectorial, en donde se realiza la suposición de fluido irrotacional ( $\nabla \times \vec{v} = 0$ )

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \equiv \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \implies \frac{1}{2} \nabla v^2 = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (\text{A.2})$$

Además, a partir de la irrotacionalidad se establece que la velocidad se define a partir de un potencial, es decir:

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad (\text{A.3})$$

Reemplazando A.2 y A.3 en A.1 se llega a:

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p_{tot}}{2} + gy \right) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Integrando la ecuación anterior, y fijando  $y = 0$  en la superficie quieta del agua, se tendrá:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p_{tot}}{2} + gy = C \quad (\text{A.5})$$

Donde  $C$  es una constante de integración.

# Anexo B

## Linealización de la condición de borde

A continuación se presenta el método de análisis dimensional y escalamiento para linealizar la ecuación en la superficie. Para esto se deben considerar las siguientes escalas de magnitud:

- $L$ : Escala de la longitud de la onda
- $T$ : Escala del periodo de la onda
- $A$ : Escala de la amplitud de la onda

Por ejemplo, la amplitud de la onda  $\eta$  es del orden de  $A$ , es decir,  $\eta \sim O(A)$ . Para el caso de la ecuación de Bernoulli en la superficie se tiene que:

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right]_{y=\eta} + g\eta = 0 \quad (\text{B.1})$$

- El primero término es del orden

$$O\left(\frac{LA}{T^2}\right)$$

- El segundo término es del orden de

$$O\left(\frac{A^2}{T^2}\right) = O\left(\frac{LA}{T^2}\right) \cdot O\left(\frac{A}{L}\right)$$

- El tercer término es del orden de

$$O\left(\frac{LA}{T^2}\right)$$

Donde se consideró que  $\frac{gT^2}{L} \sim 1$

De esto se puede notar que el segundo término se puede despreciar respecto al primero y al segundo, de esta manera la ecuación B.1 queda:

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{y=\eta} + g\eta = 0 \quad (\text{B.2})$$

Esta ecuación, si bien simplifica la B.1, aún resulta difícil de manejar, debido a que se debe conocer el potencial en la interfase de aire agua. Para evitar se realiza la siguiente expansión:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x, \eta, t) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(x, 0, t) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t}(x, 0, t) \right) \cdot \eta + O(\eta^2) \quad (\text{B.3})$$

Se puede ver que el segundo término de la serie es del orden:

$$O\left(\frac{LA}{LT^2}A\right) = O\left(\frac{LA}{T^2}\right)O\left(\frac{A}{L}\right)$$

Por lo que, siguiendo el mismo razonamiento anterior, se puede despreciar. De esta forma el primer término de la ecuación B.2 queda como:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x, \eta, t) \approx \frac{\partial\phi}{\partial t}(x, 0, t) \quad (\text{B.4})$$

Y reemplazando en B.2,

$$\left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} \right]_{y=0} + g\eta = 0 \quad (\text{B.5})$$

# Anexo C

## Modelo VOF

En la figura C.1 se puede ver como cada celda posee un porcentaje del fluido celeste y el complemento de ese porcentaje corresponde al porcentaje de volumen del otro fluido. El número en cada celda representa el porcentaje de volumen de la fase celeste que ocupa dicha celda, el porcentaje de volumen de fluido blanco se obtiene como el complemento del celeste.



Figura C.1: Esquema del modelo multifásico VOF: malla de un fluido con dos fases.

De esta manera, si se posee una fase  $q$  en el modelo se define su porcentaje de volumen en cada celda a partir de la variable  $\alpha_q$ , que puede tomar los siguientes valores:

- $\alpha_q = 0$ : La celda no contiene fluido  $q$
- $\alpha_q = 1$ : La celda está llena de fluido  $q$
- $0 < \alpha_q < 1$ : La celda contiene una interfase de fluido  $q$  con otro fluido.

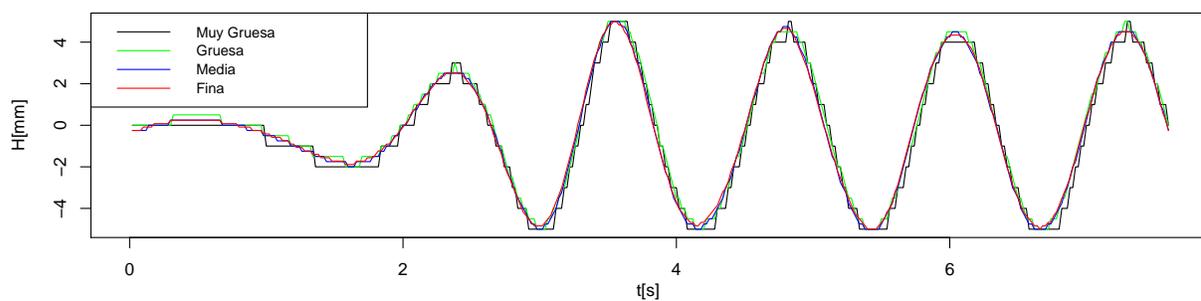
Con esto se tiene que para un flujo bifásico, como es este caso, las propiedades se obtienen a partir de las ponderaciones de los porcentajes de volumen. Por ejemplo, si se tiene un flujo de dos fases compuesto por aire (fase 1) y agua (fase 2), la densidad de la celda se obtiene a partir de:

$$\rho = \alpha_2 \rho_2 + (1 - \alpha_2) \rho_1 \quad (\text{C.1})$$

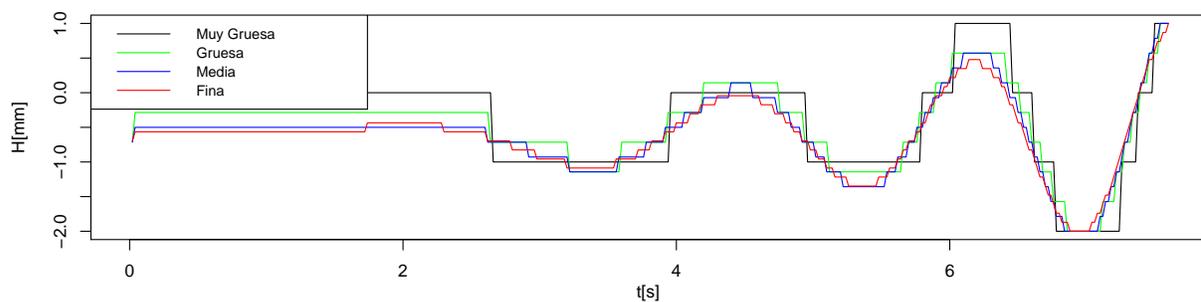
De esta misma manera se puede aplicar para el resto de las propiedades en la celda.

# Anexo D

## Figuras no utilizadas



(a)  $x=2$  m.



(b)  $x=7.5$  m.

Figura D.1: Convergencia de la malla

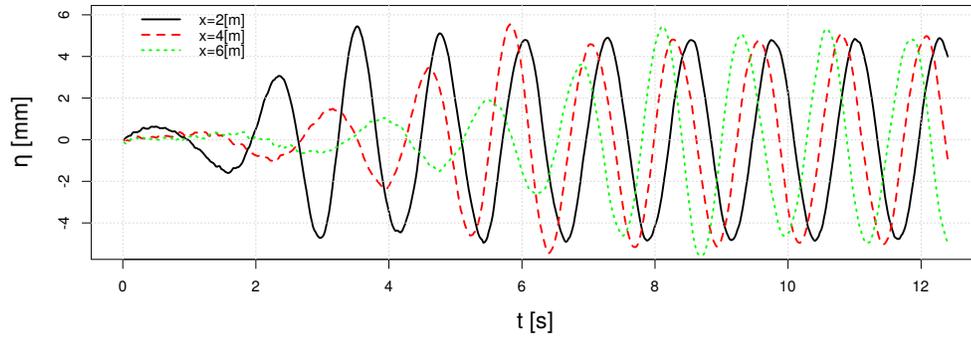


Figura D.2: Amplitud de onda teórica en distintos puntos del canal.

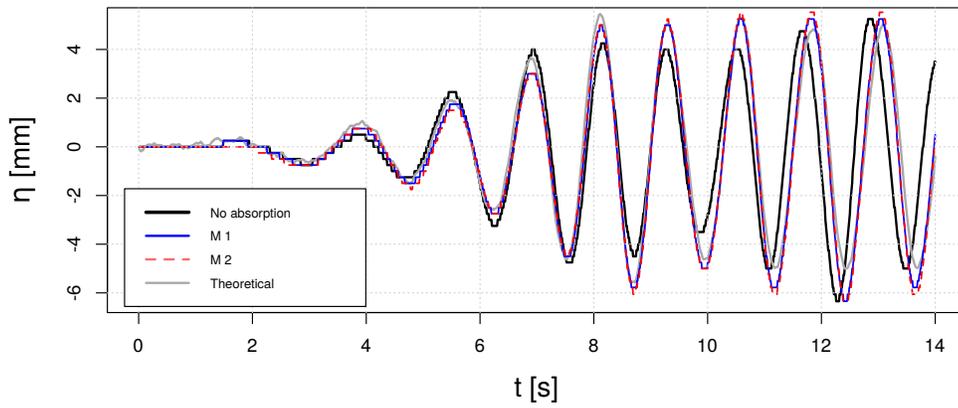


Figura D.3: Amplitud de onda para simulación con implementación de absorción activa en  $x_7 = 7[m]$ .

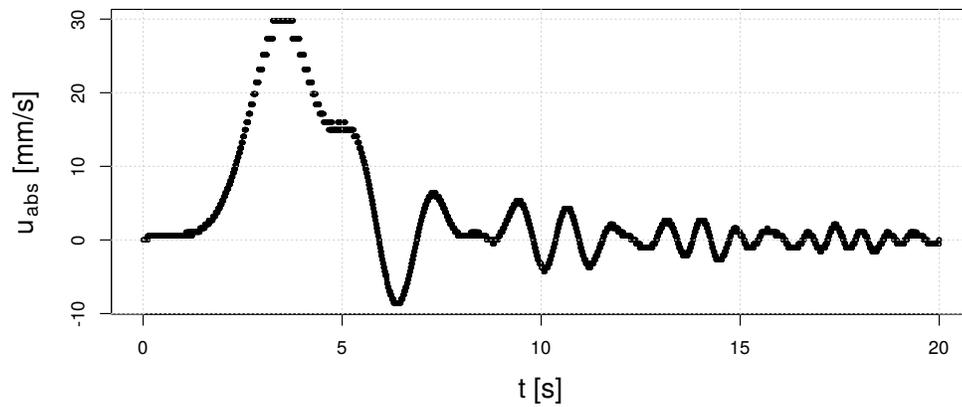


Figura D.4: Velocidad de la paleta de absorción para el caso de la onda impulsiva.