# EQUILIBRIO GENERAL, INSUMO–PRODUCTO Y FORMACION DE PRECIOS*

Jorge Rodríguez Grossi
Departamento de Economía
Universidad de Chile

*Este trabajo forma parte de un proyecto que cuenta con el apoyo del Servicio de Desarrollo Científico y Creación Artística de la Universidad de Chile. El autor desea agradecer las valiosas sugerencias y comentarios hechos por Günther Held, así como los realizados por Sergio Chaigneau y Clemente Torres.

# EQUILIBRIO GENERAL, INSUMO–PRODUCTO Y FORMACION DE PRECIOS

Jorge Rodríguez Grossi

## 1. INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es ligar formalmente los modelos de equilibrio general clásico y neoclásico con el modelo de insumo-producto. El punto de vista que aquí se sustenta es que el modelo de insumo-producto puede interpretarse en gran medida como un modelo de corte ricardiano; en cambio, representa al modelo de Walras en forma muy rudimentaria. Una aproximación mayor a este último se logra solo recurriendo a algún tipo de programación matemática de maximización, que es ajena a los conceptos básicos del modelo de insumo-producto. Por otra parte, el trabajo incursiona en la formación de precios bajo un modelo de insumo-producto. Además, presenta diversas fórmulas de precios, algunas de las cuales han servido para efectuar proyecciones de precios en economías socialistas.

## 2. EL EQUILIBRIO GENERAL DE WALRAS

En el esquema neoclásico el modelo de equilibrio general de Walras presenta una formulación respecto a cómo a través de los precios se logra la determinación de las cantidades que equilibran la oferta y demanda tanto de bienes como de recursos. El modelo supone que el intercambio de bienes y servicios mediante la oferta y la demanda conduce a precios que equilibran los diferentes mercados. Bajo la formulación neoclásica, y en un esquema de competencia perfecta, la motivación maximizadora de consumidores y productores nos llevan al logro del equilibrio.

Es nuestra intención evitar hacer una detallada descripción matemática del modelo de Walras, ya suficientemente difundido en diversos textos.[1]

[1] Véase, por ejemplo, R.G.D. Allen, *Mathematical Economics*, Macmillan and Co. Ltda. Londres, 1965.

Se trata de un modelo con H consumidores que poseeen ciertos recursos de los cuales obtienen ingresos con los que adquieren bienes de consumo. A la vez, existen F productores[2] de diversos bienes (M tipos de bienes) que contratan recursos[3] (N tipos de recursos disponibles requeridos técnicamente por las funciones de producción de cada bien). Los consumidores maximizan su bienestar de acuerdo a sus restricciones presupuestarias y sus funciones de utilidad, para lo cual es esencial el conocimiento de los precios de los bienes y de los recursos (estos últimos determinan el valor de los ingresos individuales). Sobre dichas bases quedan establecidas las demandas por bienes de consumo, esto es, en función de los mapas de utilidades individuales que consideraremos como datos, de los recursos que cada individuo posee (también considerados como datos), y de los precios de bienes y recursos que constituyen las variables del sistema que se determinarán dentro de un esquema de equilibrio general.

Siendo $p_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$ el precio de los bienes, y $b_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$ el precio de los recursos, y definiendo como U el conjunto de mapas de indiferencia de los consumidores, y como R el estado de distribución de los diferentes recursos entre los consumidores, podemos concebir la demanda agregada de la comunidad por el bien *m*, $Q_m^D$, como la suma de las demandas individuales por dicho bien expresadas como sigue:[4]

$$Q_m^D = \sum_{h=1}^{H} q_{mh} = Q_m^D (p_1, p_2, \ldots, p_m, b_1, b_2, \ldots, b_n, U, R), \text{ para todo } m = 1, 2, \ldots M \qquad (1)$$

Por el lado de la oferta, podemos definir la oferta agregada del bien *m*, $Q_m^S$, como la suma de las ofertas individuales de los productores que se dedican a elaborar este bien. Dicha oferta parte de un "estado de la técnica" que suponemos dado, T (las funciones de producción), y se construye a partir de la maximización de utilidades de los productores que toman en consideración lo que van a recibir como producto de sus ventas (determinado por las cantidades que vendan y los precios de venta) y lo que les va a costar producir los bienes (cantidades de recursos a usar y los precios de dichos recursos).

[2]Productores y consumidores son más bien funciones económicas que individuos necesariamente diferentes.

[3]También compran insumos entre los bienes M, pero en aras de simplificar el modelo, haremos abstracción de este problema.

[4]En la fórmula se incluyen todos los precios porque lo que interesa es el valor relativo de cada uno de ellos. Mientras no se tenga un numerario, sus valores absolutos son intrascendentes.

Ello se puede expresar como sigue:

$$Q_m^S = \sum_{f=1}^{F} q_{mf} = Q_m^S (p_1, p_2, \ldots, p_m, b_1, b_2, \ldots, b_n, T), \text{ para todo}$$

$$m = 1, 2, \ldots, M \tag{2}$$

Ahora bien, la producción de bienes *m* conlleva la "demanda derivada" por recursos *n*. Dicha demanda derivada agregada ($R_n^D$) no es más que la suma de las demandas que cada productor de bienes realiza del recurso *n* en función de su propia maximización de utilidades. La demanda derivada agregada se puede representar como sigue:

$$R_n^D = \sum_{f=1}^{F} \sum_{m=1}^{M} r_{nfm} = R_n^D (p_1, p_2, \ldots, p_m, b_1, b_2, \ldots, b_n, T),$$

$$\text{para todo } n = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Por otra parte, los dueños de recursos *n* los ofrecerán de manera de obtener ingresos para maximizar sus utilidades como consumidores. Ello significa que estarán dispuestos a ofrecer tanto del recurso *n* que posean como lo que les indique la remuneración que por él obtengan, lo cual estará estrechamente ligado al poder de compra de dicha remuneración (los demás precios) y sus preferencias como consumidores. Representemos la oferta agregada del recurso *n*, $R_n^S$, como la suma de las ofertas individuales de este recurso, a saber:

$$R_n^S = \sum_{h=1}^{H} r_{nh} = R_n^S (p_1, p_2, \ldots, p_m, b_1, b_2 \ldots, b_n, U), \text{ para todo}$$

$$n = 1, 2, \ldots, N \tag{4}$$

Por último, a continuación estableceremos las ecuaciones de equilibrio en los diferentes mercados.

En el mercado de los bienes tenemos

$$Q_m^D = Q_m^S, \text{ para todo } m = 1, 2, \ldots, M \tag{5}$$

y en el mercado de los factores tenemos

$$R_n^S = R_n^D, \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots, N \tag{6}$$

Dado que las demandas y ofertas, tanto de bienes eomo de factores, dependen de los precios, el equilibrio general importa una solución simultánea de todos los precios para el logro de dicho equilibrio. Sin embargo, se sabe que estos últimos se expresan en términos relativos y no absolutos ya que una de las ecuaciones es dependiente,[5] problema que se soluciona escogiendo uno de los bienes o factores como numerario. De esta forma, los demás precios se expresan en términos del numerario.

### 3. EQUILIBRIO GENERAL E INSUMO–PRODUCTO

W. Leontief,[6] así como otros autores, señala que el modelo de insumo-producto (I–P en lo sucesivo) puede entenderse como una versión simplificada del análisis neoclásico de equilibrio general. Nótese que nada hemos dicho respecto al "estado de la técnica" que denominamos T y que consideramos constante en las ecuaciones (2), (3) y de hecho en las (5) y (6). Dicho T bien podría consistir en funciones de producción de coeficientes fijos[7] que equivaldrían a la tecnología explícita en el modelo de I–P. Bajo dichas condiciones el modelo walrasiano no sufriría alteraciones esenciales de ninguna especie.

El modelo de I–P merece, sin embargo, una descripción por separado si es que nos interesa asociarlo (veremos si es posible) con el de Walras. Si suponemos que, la demanda final es exógenamente fijada, y que T consiste en funciones de producción de coeficientes fijos (rendimientos constantes a la escala) para el I–P el problema se reduciría a encontrar las cantidades de producto total (vector q) necesarias para satisfacer tanto la demanda final (vector f), como la demanda intermedia (vector m) que se deriva del proceso productivo mismo.

Podríamos establecer, por lo tanto, que

$$q = f + m \tag{7}$$

El vector *m* surge de los requerimientos directos de insumo que hace *q*. Si definimos una matriz A, cuadrada y semipositiva ($A \geqslant 0$), donde cada elemento $a_{ij}$ representa los requerimientos de insumo del bien *i* que técnicamente demanda la producción de una unidad del bien *j* entonces tenemos que

[5] Existen M + N ecuaciones y M + N variables, pero una de las ecuaciones es dependiente. Para una demostración simple vease K. Cohen y R. Cyert. "Theory of the Firm: Resource Allocation in a Market Economy", Prentice–Hall, Nueva Jersey, 1965.

[6] Véase W. Leontief, "Input–Output Analysis", en *Input–Output Economics*, del mismo autor, Oxford University Press, Nueva York, 2ª ed., 1973.

[7] Véase como posible aproximación entre ambos modelos, el de equilibrio general con coeficientes fijos de producción en R.G.D. Allen, *Mathematical Economics*, op. cit. p. 317.

$$m = Aq \tag{7 a}$$

Reemplazando en (7) tenemos

$$q = f + Aq \tag{7 b}$$

Arreglando términos, y siendo $f$ dado y $q$ la incógnita, el sistema se resuelve de la siguiente manera:

$$(I - A)^{-1} f = q \tag{8}$$

Debe quedar claro al lector, que desde el comienzo estamos separando el problema de la producción con el problema de los precios, al que nos abocaremos más adelante. Esta *dicotomía* no parece respetar, en principio, la esencia del modelo walrasiano en que precios y cantidades se determinan simultáneamente.

Volviendo a la ecuación (8), la solución de ésta implica que la inversa de $(I-A)$ existe. Esta última, $(I-A)^{-1}$ se conoce como "la inversa de Leontief" o "matriz de requerimientos directos e indirectos". ¿Qué condiciones deben darse, sin embargo, para que la inversa de Leontief exista?[8]

Desde una perspectiva económica las condiciones de existencia de la mencionada matriz pueden reducirse a una sola: que la tecnología expresada en la matriz A sea "productiva". En un mundo imaginario donde existe un solo bien que se usa como insumo para producirse a sí mismo, diríamos que tecnología productiva es aquella que permite producir dicho bien usando menos de sí como insumo que lo que se obtiene de producto. Esto es, que se genera un excedente neto de producto.[9]

Extendiendo el concepto a una situación con $n$ bienes donde todos los bienes son insumos y productos a la vez (matriz tecnológica irreducible)[10] diremos que la tecnología es productiva si:

$$Aq \leqslant q, \tag{8 a}$$

[8] Matemáticamente las condiciones necesarias para la existencia de $(I-A)^{-1}$ pueden encontrarse en los teoremas de Perron y Frobenius para matrices "irreducibles" y "reducibles e irreducibles", respectivamente. Véase K. Lancaster, *Mathematical Economics*, Macmillan Co., Nueva York, 3ª ed., 1969.

[9] Es indudable que sin recursos primarios (trabajo, por ejemplo, que no se incluye en A) es difícil concebir la idea de producir bienes. Lo que se trata de expresar aquí puede clarificarse por medio de un ejemplo llevado al absurdo: si para producir una tonelada de acero necesito como insumo más de una tonelada de acero, dicha tecnología no es productiva. No se trata de que se conciba la posibilidad de producir acero sólo con acero, sino de que tecnologías no productivas o improductivas se descartan en un sistema económico que desea sobrevivir y/o crecer.

[10] No es necesario que la matriz sea irreducible para que A sea productiva. La hacemos irreducible en esta oportunidad simplemente para lograr definiciones –como la (8, a)– más estrictas.

esto es, si la cantidad de $q$ que se usa como insumo (Aq) para producir $q$ es, considerada en su conjunto, menor que $q$. Por lo tanto, al menos uno de los bienes producidos superará la cantidad de el mismo usada como insumo en el total de producción del sistema, mientras lo demás, a lo menos, igualarán las cantidades de ellos usadas como insumos. En este caso se supone que existe disponibilidad de trabajo y que su mantenimiento se logra mediante la demanda final que se determina exógenamente. Sin embargo, si se desea incorporar el trabajo y su mantención (demanda) al sistema mismo, se puede hacer mediante la introducción de coeficientes (trabajo/producto) y (consumo/trabajo) al sistema tecnológico T comprendido en la matriz A. De esta manera desaparece la demanda final, y el trabajo pasa a considerarse como un bien intermedio más. Todo se determinaría dentro del sistema como en un modelo de equilibrio general. Definamos dicha situación como sigue:

Sean $L_{(s,j)}$ los coeficientes (trabajo/producto),

en que $s = 1, 2, \ldots S$, y $j = 1, 2, 3, \ldots N$

Sean $C_{(i,s)}$ los coeficientes (consumo/trabajo), en que $i = 1, 2, \ldots, N$, y $s = 1, 2, \ldots, S$.

Ampliemos las dimensiones de la matriz A (n,n) agregándole como filas las correspondientes a los coeficientes $L_{(s,j)}$, y como columnas las de los coeficientes $C_{(i,s)}$.[11] La matriz resultante será $A^+$ de dimensiones (n + s, n + s).

$$A^+ = \begin{bmatrix} A & C_{(i,s)} \\ L_{(s,j)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ L & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\overset{*}{i}\overset{*}{j}} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

donde $\overset{*}{i}$ y $\overset{*}{j}$ corresponden a los subíndices de los elementos de la nueva matriz $A^+$ que indican el número de la fila y la columna de que se trata como es convencional en notación matricial. C y L son submatrices de dimensiones (N, S) y (S, N), repectivamente. La matriz $A^+$ considera consumo nulo de trabajo por parte de los trabajadores, supuesto que puede levantarse sin consecuencias para el modelo.

[11] La matriz inicial A contiene como elementos coeficientes insumo-producto producibles por el sistema. El trabajo lo consideramos como recurso primario no producible al modo de los bienes. Sin embargo, es posible considerar que para trabajar se requiere el consumo de ciertos bienes (coeficientes $C_{i,n+s}$). Ello es lo que se hace al ampliar la matriz A. Como filas se incorporan coeficientes trabajo-producto (suponemos S tipos de trabajos) que se consideran como coeficientes de insumo-producto corrientes, en este caso, de cierto tipo de trabajo. Como columnas, se incorporan los coeficientes de bienes por unidad de trabajo de cada tipo que se requerirían para "producir" trabajo. Dichos coeficientes pueden o no ser de subsistencia. De esta forma el sistema se "cierra" con respecto al trabajo.

Definamos

$$q^{+} = \begin{bmatrix} q \\ L^{+} \end{bmatrix} \tag{10}$$

donde

$$L^{+} = L\, q \tag{11}$$

el vector de trabajo necesario para producir q.

Si $A^{+}\, q^{+} = q^{+}$ el sistema logrará sobrevivir, pero no podrá crecer puesto que no dará lugar a un excedente invertible.[12] En dicho caso el sistema será no-productivo:

$$A^{+} \;\; q^{+} = \begin{bmatrix} Aq \; + \; CL^{+} \\ Lq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ L^{+} \end{bmatrix} \tag{12}$$

De la ecuación (12) y reemplazando $L^{+}$ por (11) tenemos que

$$Aq + CLq = q \tag{13}$$

Arreglando los términos tenemos que

$$(I - A - CL)\, q = 0 \tag{14}$$

donde $q \neq 0$ y no negativo.

Si $q \neq 0$, concluimos que

$$\left| I - A - CL \right| = 0 \tag{15}$$

la matriz $(I - A - CL)$ no tiene inversa, porque $(A + CL)$ no es productiva, porque no genera excedente.

Con el factor trabajo incorporado en el sistema $A^{+}$, el concepto de productividad se enriquece. En efecto, puede interpretarse ahora como la posibilidad de que mediante el uso de cierta fuerza de trabajo, se obtenga una

[12] Según R.G.D. Allen, op. cit., p. 359, "... todos los problemas conectados con inversión de capital y otros aspectos dinámicos son ignorados" (al hacerse la analogía del modelo de insumo-producto con el de Walras).

cantidad de bienes más que suficiente para recompensar dicho gasto de energía.[13]

Volvamos, sin embargo, al equilibrio de Walras y al insumo-producto como versión simplificada del primero. Hemos señalado que, sobre la base de los supuestos del insumo-producto, el problema de la determinación del equilibrio por el lado de los bienes se reduce en este modelo a la determinación de las cantidades totales a producir ya que la demanda final es dada. En cuanto a los precios, ellos aparecen determinados sobre la base del costo de los insumos más una proporción de valor agregado por producto exógenamente dada. De aquí podemos formular una ecuación de precios como sigue.

$$p' = p' A + v' \tag{16}$$

donde p' es el vector de precios, y v' el vector de coeficientes (valor agregado/producto).

El primer término de la derecha (p' A) representa el valor de los insumos por unidad de producto. El segundo término representa el componente de valor agregado por unidad de producto. Si volvemos a la ecuación (16) y reordenamos términos, tendremos que

$$p' = v' (I - A)^{-1}, \tag{17}$$

el precio es igual a los requerimientos directos e indirectos de valor agregado necesarios para producir una unidad del bien.

Finalmente, de las ecuaciones (8) y (17) tenemos que

$$p' f = v' q, \tag{18}$$

esto es que el valor de la demanda final es igual al del valor agregado ocupado directa e indirectamente en satisfacer dicha demanda final.

Es importante señalar que bajo esta formulación la estructura de precios es absolutamente ajena a la estructura y nivel de la demanda final o del producto total. Ello se ve con claridad en la ecuación (17) donde los precios dependen enteramente de la relación técnica $v' (I - A)^{-1}$. Se trataría de una situación bastante especial en que la oferta es infinitamente elástica y don-

[13]Para una mayor ligazón del concepto de productidad con el de trabajo, vease Clemente Torres "El modelo multisectorial de producción (insumo-producto)", Departamento de Economía, Universidad de Chile, *Documento de Docencia* N° 21, Santiago, mayo de 1979.

de la demanda permite fijar las cantidades de equilibrio; sin embargo, el precio es fijado por la oferta. Como ha señalado Allen,[14] el I–P equivaldría a una versión simplificada del modelo de Walras donde todas las posibilidades de economizar estarían eliminadas.

## 4. CONCEPCION RICARDIANA DEL EQUILIBRIO GENERAL

David Ricardo distinguió entre bienes escasos y bienes reproducibles.[15] Los bienes útiles derivarían su "valor de cambio" de su escasez y de la cantidad de trabajo requerida para producirlos. Algunos bienes muy particulares, como son las obras de arte y otros definitivamente escasos, no podrían ver aumentada su oferta mediante mayor empleo de trabajo. Su valor residiría fundamentalmente en su escasez relativa a la demanda, y no en el trabajo invertido en ellos. Los demás bienes transados en el mercado, sin embargo, podrían ser reproducidos casi sin límites si fuera posible asignar suficientes cantidades de trabajo para obtenerlos. "Por lo tanto, bienes escasos son aquellos de oferta fija, o en gran medida dependientes para su producción de recursos cuya oferta es fija. Los bienes reproducibles, por otro lado, elaborados por medio del trabajo con el uso de otros bienes reproducibles (tales como máquinas), no están limitados en su oferta por la escasez, sino que pueden ser reproducidos sin límite definido. Los valores de los bienes escasos son determinados símplemente por la interacción de la oferta fija con la demanda, pero los valores de los bienes reproducibles, excepto por fluctuaciones de corto plazo, no lo son. . . . son los precios de los bienes reproducibles los que son dependientes de la tasa de ganancias. Los precios de los bienes reproducibles deben financiar tanto los salarios pagados en sus procesos productivos como las utilidades requeridas sobre los activos (*stock*)".[16]

En lo que sigue consideraremos solo el tipo de bienes *reproducibles* que constituyen la mayor parte de los bienes transados en el mercado. Para este tipo de bienes, la concepción ricardiana se aleja definitivamente de la que hemos visualizado en el modelo walrasiano. En efecto, los precios aparecen respondiendo a condiciones de oferta, y no a la interacción de ofertas y demandas. "Ricardo parece sostener que las empresas manufactureras operan en la escala óptima a lo largo de una curva horizontal de oferta a largo plazo donde los costos medios y marginales son siempre iguales (con tecnología dada). Además, la teoría del valor de Ricardo, exige que haya rendimientos constantes a la escala, porque se supone que los precios individuales no se

[14] Véase en Allen, op. cit., p. 361.

[15] Una excelente descripción de esta concepción se encuentra en Joan Robinson y John Eatwell, *An Introduction to Modern Economics*, Mc Graw Hill, Londres, 1973, pp. 21-22.

[16] J. Robinson y J. Eatwell, ibid., p. 22.

ven afectados por el patrón de la demanda".[17] La demanda final solo "determinará la asignación de trabajo entre las industrias, pero la operación de una industria a un mayor o menor nivel de intensidad no afectará los precios".[18]

Conviene recordarle al lector la enorme semejanza que hay entre lo que concluimos en la sección inmediatamente anterior al referirnos al modelo de I – P y el planteamiento ricardiano respecto de precios y cantidades de equilibrio. En ambos casos la demanda determina las cantidades, mientras los precios responden a ofertas infinitamente elásticas determinadas por condiciones tecnológicas, y de salarios y tasas de ganancia que en el caso del I – P tenemos implícito en la ecuación (17), pero que no hemos aclarado suficientemente para el enfoque ricardiano. En este último caso, la distribución del ingreso entre asalariados y productores es decisiva ya que el excedente que quede en manos de estos últimos estará definiendo la tasa media de ganancias cuya influencia en los precios es determinante. La tasa de ganancias tenderá a igualarse por medio de la competencia en la economía y de esta forma los precios considerados por Ricardo tenderán a responder a las condiciones de oferta en el largo plazo, más que a la interacción de la oferta con la demanda, como en el modelo neoclásico.

De esta forma queda clara la correspondencia entre estos precios ricardianos, precios "naturales" en el lenguaje clásico, y los "normales de largo plazo" para Marshall en un esquema neoclásico.

Una segunda observación, con respecto al enfoque ricardiano, es que si aceptamos que la tecnología supuesta por él se asemeja a la del I – P,[19] resultará entonces que a partir de la distribución del ingreso vigente (definida, por ejemplo, por la existencia de un salario real de subsistencia) –dependiente probablemente de variables institucionales– y del estado de la tecnología T vigente, se estará automáticamente determinando la tasa uniforme de ganancias a la que la competencia llevará, la cual es la única compatible con la distribución inicial del ingreso y con T que hemos mencionado.[20]

El modelo ricardiano es formulado inicialmente en términos muy simples usando un cereal como medida del valor. La ampliación de su modelo

[17] Mark Blaug, "El sistema de Ricardo", en ESCOLATINA, *Publicaciones Docentes* N° 32, p. 12, (lo que va entre paréntesis es agregado nuestro).

[18] E.J. Nell, "Theories of Growth and Theories of Value", en G.C. Harcourt y N.F. Laing, *Capital and Growth*, Penguin, 1971, p. 199.

[19] Lo que de hecho hará Piero Sraffa en su obra "Production of Commodities by Means of Commodities", Cambridge University Press, 1960.

[20] Ello se verá claramente en la próxima sección al tratar el problema de la "frontera del precio de los factores".

para considerar diversos bienes lo lleva a preocuparse por encontrar una "medida invariable del valor" que permitiría evitar las complicaciones que surgen de la relación entre la tasa media de ganancia y los precios relativos. Esta búsqueda no se logra hasta la aparición del trabajo de P. Sraffa que ya hemos citado, algunos de cuyos aspectos principales discutiremos a continuación. A través de dicho enfoque pensamos que se logra una mayor amalgama entre el modelo ricardiano y el del I – P, así como una mayor comprensión de las relaciones existentes entre distribución del ingreso, tasa media de ganancias y precios.

## 5. RICARDO, SRAFFA Y EL INSUMO–PRODUCTO

Seguiremos tratando el modelo ricardiano sin considerar bienes de capital como elementos separados o distintos de cualquier otra materia prima. Recuérdese que ocasionalmente hemos considerado el trabajo igual que los demás insumos. Ello lo hacemos sólo por simplicidad; más adelante explicitaremos la existencia de bienes de capital separados (al igual que el trabajo) de los insumos corrientes en fórmulas de formación de precios.

En el capítulo II de la obra de P. Sraffa se presenta el modelo ricardiano en la forma que inicialmente hemos señalado: sin bienes de capital separados del resto de los insumos o "medios de producción" como llama Sraffa. El sistema es supuesto productivo, esto es, generando un excedente por sobre la reposición de los medios de producción utilizados y la mantención al nivel de subsistencia de los trabajadores.

Como el excedente y los medios de producción están constituidos por bienes heterogéneos, la determinación de una tasa de ganancias común (excedentes/medios de producción) solo puede concebirse si homogeneizamos el excedente y los medios de producción; esto es, a través de los precios estimamos el valor del excedente y el valor de los medios de producción. En suma, para determinar la tasa de ganancias necesitamos conocer los precios de los bienes, pero, como veremos a continuación, para conocer los precios necesitamos conocer la tasa de ganancias. "El resultado es que la distribución del excedente debe ser determinada a través del mismo mecanismo y al mismo tiempo que el precio de los bienes".[21]

Si el sistema produce un excedente que se distribuye uniformemente en todos los sectores a través de una tasa de ganancias $g$ podemos decir que el precio de un bien cualquiera $\overset{*}{j}$, $(p_{\overset{*}{j}})$, es igual a su costo $\sum_{\overset{*}{i}=1}^{n+s} p_{\overset{*}{i}} a_{\overset{*}{i}\overset{*}{j}}$,[22] más la

[21] P. Sraffa, op. cit., p. 1.

[22] $a_{\overset{*}{i}\overset{*}{j}}$ es un elemento de $A^*$; ver ecuación (9). En este caso se trata al trabajo como a un bien cualquiera.

ganancia, $g \cdot \sum_{i=1}^{n+1} p_i^* a_{ij}^*$, es decir,

$$p' = (1 + g)\, p' A^+. \tag{19}$$

La ecuación (19) es una ecuación característica de $A^+$ donde $(1+g)$ es el inverso de la raíz característica de $A^+$, y $p'$ es el vector característico asociado a dicha raíz característica. Dado que $A^+$ es una matriz productiva (que suponemos irreducible) de acuerdo al teorema de Perron[23] existirá solo un vector característico estrictamente positivo (el único que tendría sentido económico) el cual estará asociado a la raíz característica dominante. Esta última, $(\frac{1}{1+g})$es positiva y menor que la unidad.[24] Debe notarse que mientras mayor es el excedente, mayor resulta $g$ y, por lo tanto, menor se hace $(\frac{1}{1+g})$ el que, sin embargo, continúa siendo positivo. Dicha relación también nos sirve para la interpretación económica del concepto matemático de "productividad" asociado a la matriz $A^+$.

Al trabajar con la matriz $A^+$ se ha concebido el salario a un nivel de subsistencia e integrando la matriz $A^+$ como consumos necesarios para producir trabajo. Sraffa señala que dicha interpretación del salario puede subestimarlo desde el momento que éste puede estar compuesto, además de lo considerado como "subsistencia", por una parte del excedente que hasta ahora suponíamos enteramente en mano de los dueños de los medios de producción-no-trabajo.[25] Se decide, en consecuencia, separar el factor trabajo de la matriz $A^+$ (lo cual se reduce a nuestra primitiva matriz A), señalando, no obstante, que el salario no puede ser menor que el límite de subsistencia sin alterar seriamente el proceso productivo.

Retomemos la ecuación (16) y descompongamos v' como excedente para ser distribuido entre trabajo y medios de producción-no-trabajo de la siguiente forma:

$$p' = p'A + g\,p'A + wL', \tag{20}$$ [26]

[23] Ver K. Lancaster, op. cit.

[24] El significado económico de $0 < (\frac{1}{1+g}) < 1$ es altamente interesante si postmultiplicamos la ecuación (19) por $q^+$, el vector de producción. El lector verificará que obtenemos la siguiente ecuación:

$$(\frac{1}{1+g})\, p'\, q^+ = p'\, A^+ q^+$$

Dicha ecuación dividida por $p'\,q^+$ (valor del producto total) nos dice que

$$(\frac{1}{1+g}) = \frac{p'\,A^+ q^+}{p'\,q^+} = \frac{\text{Valor de todos los insumos ocupados en producir } q^+}{\text{Valor del producto total } q^+}$$

[25] Este excedente bien puede estar en manos estatales o sociales dependiendo del sistema social de que se trate.

[26] Se está suponiendo un solo tipo de trabajo homogéneo, expresado en el vector L'.

donde $w$ es la tasa de salarios que perfectamente podría contener parte del excedente, y $g$ es la tasa media de ganancias resultantes de acuerdo a la cual se distribuye el resto del excedente. p' A se interpreta aquí como parte del "capital circulante", en el sentido que constituyen medios de producción que se incorporan plenamente al producto (y que se reponen), sin permanecer separados del producto como es el caso de los bienes de capital fijo.

En la expresión (20) se registran $n$ ecuaciones con $n + 2$ incógnitas lo que lleva a introducir dos reglas de normalización, a saber,[27]

$$L' q = 1, \tag{21}$$

en que $q$ es exógenamente fijado y donde lo que se obtiene es simplemente establecer la escala de medición del trabajo.

$$p' (I - A) q = 1, \tag{22}$$

en que el valor de la demanda final es igual a 1 (la demanda final hace las veces de numerario). De aquí que $w$ sea, a la vez que el salario, la participación del trabajo en la demanda final o excedente.

Volviendo a la ecuación (20) podemos reordenarla como sigue:

$$p' (1 - A) = g\, p' A + wL' \tag{23}$$

Postmultiplicando (23) por $q$ obtenemos

$$p' (1 - A) q = g\, (p' A q) + w\, (L'q) \tag{23 a}$$

Sustituyendo (21) y (22) en (23 a) obtenemos

$$1 = g\, (p' A q) + w, \tag{23 b}$$

denominada "frontera de precios de los factores".[28]

La relación (23 b) nos dice que cuando la tasa de ganancias es nula, $w = 1$, o sea que al trabajo se asigna todo el excedente. Lo inverso ocurrirá si w es nulo. En efecto, en dicho caso (en la práctica es imposible porque significaría la extinción del factor trabajo) $g = (\frac{1}{p' Aq})$, donde $p' A q$ = valor

[27] Ver E. Bacha, D. Carneiro y L. Taylor, "Sraffa y la economía clásica: relaciones de equilibrio fundamentales", *Trimestre Económico*, enero-marzo de 1977, vol. XLIV, N° 73.

[28] Recordemos que ($p' Aq$) es el valor del total de los insumos usados para producir q.

de los medios de producción usados para producir q; esto es, en dicha situación la tasa de ganancias es la máxima e igual al excedente total sobre el valor de los medios de producción. Cabe hacer notar, volviendo a la ecuación (20), que en el caso que $g = 0$ y $w = 1$, obtenemos:

$$p' = p' A + L'. \tag{24}$$

Dicha ecuación de precios, que como vemos es un caso muy particular, coincidiría con los "valores" marxistas, es decir, con las cantidades de trabajo involucradas en forma directa e indirecta en la producción de cada bien.[29] En efecto, una reordenación de (24) nos lleva a lo siguiente:

$$p' = L' (I - A)^{-1} \tag{25}$$

En el caso más general de que *w* y *g* sean ambos diferentes de cero, los precios expresados en la ecuación (20) pueden representarse como sigue:

$$p' = w L' (I - (1 + g) A)^{-1}. \tag{26}$$

Si L' y A son dados, p' variará de acuerdo a lo que suceda con *w* y *g* que, como ya vimos, están relacionados por medio de (23 b).

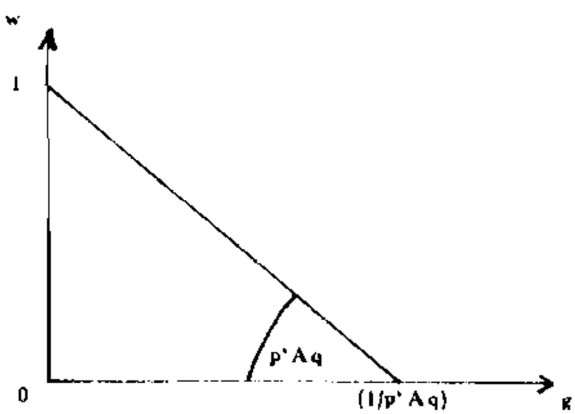
Volvamos a preocuparnos ahora de aquella afirmación que señalaba que la demanda final influirá sólo en la asignación de trabajo entre las industrias, pero no afectará los precios de largo plazo.

La ecuación (23 b) puede reformularse como sigue:

$$w = 1 - (p' A q) g, \tag{27}$$

en que la recta tiene ordenada igual a uno y pendiente igual a (p' A q).

GRAFICO 1




[29] Ver E. Bacha, D. Carneiro y L. Taylor, op. cit., p. 60.

Como es fácil de observar, en la ecuación (27) aparece $q$ que, de acuerdo a la ecuación (8), es determinada por $f$, la demanda final. Luego en la ecuación (27) aparentemente podríamos reemplazar $q$ por $(I - A)^{-1} f$, lo que en principio parece oponerse a la afirmación ricardiana de que $f$ no influye en los precios. En efecto, siguiendo lógicamente con este razonamiento, $f$ influiría en los precios, y el cambio de $f$ afectaría a $q$ y con ello a $g$, y luego a $p$. ¿Cómo eliminar entonces estas variaciones en la valuación, de modo que la distribución del ingreso y los precios relativos se relacionan sólo a través de las condiciones técnicas? La respuesta la da P. Sraffa intentando medir la producción con prescindencia del cambio en los precios a través de un numerario que no cambie nunca de valor, al que denomina "mercancía patrón" y que consiste en un "bien compuesto" $q^*$ de tal modo que cada bien interviene en $q^*$ en igual proporción que en los medios de producción de $q^*$, es decir

$$\gamma A q^* = q^*, \tag{28}$$

donde $\gamma$ es un escalar que corresponde al inverso de la raíz característica dominante de A, $(\lambda_A)$, donde $\gamma > 1$ y $0 < \lambda_A < 1$ y en que $q^*$ es el vector característico asociado a $\lambda_A$ tal que $q^* > 0$, para A irreducible.[30]

En este caso, $q^*$ es independiente por completo de $f$ y depende solo de A, esto es, de la tecnología vigente. Luego utilizando $q^*$ para normalizar en las ecuaciones (21) y (22) logramos resolver el sistema de acuerdo al planteamiento ricardiano en el que la demanda final no influye en la determinación de los precios, mientras en ésta juega un rol decisivo la distribución del ingreso.

Reformulando la ecuación (23 b) de acuerdo a (22) donde $q = q^*$, y a (28) tenemos:[31]

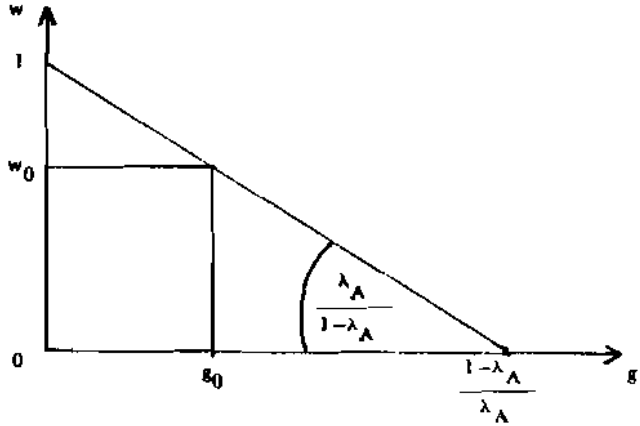
$$1 = \frac{1}{\gamma - 1} g + w = \frac{\lambda_A}{1 - \lambda_A} g + w \tag{29}$$

[30] La ecuación (22) nos dice que $p' q - p' Aq = 1$.
La ecuación (28) premultiplicada por $p'$ nos dice que $\gamma p' Aq = p'q$. Reemplazando $(p' q)$ de esta última ecuación en la (22) tenemos $\gamma p' Aq - p' Aq = 1$. Factorizando por $(p' Aq)$ y reordenando términos logramos que

$$p' Aq = \frac{1}{\gamma - 1}$$

[31] Para construir la mercancía patrón, Sraffa utiliza solo bienes "básicos" (los que son insumos de todos los bienes) por lo que la matriz A es irreducible.

GRAFICO 2




El gráfico 2 muestra, sobre esta base la relación única existente en este modelo entre *w* y *g*, de manera tal que una vez determinada la distribución del ingreso, por ejemplo en $w_0$ se determina simultáneamente la tasa de ganancias $g_0$ y con ella los precios p' en la ecuación (26).[32]

El lector podrá percatarse en la ecuación (29) y en el gráfico 2 que, en definitiva, lo único relevante para la determinación de los precios es el conocimiento de la matriz tecnológica A y la especificación de una relación lineal entre *w* y *g* que implica usar el q* (la mercancía patrón) para estandarizar el modelo. Sin embargo, no es necesario conocer q* ya que la ecuación (29) es derivable exclusivamente a partir de A con total prescindencia de q*.

En suma, la tesis central ricardiana queda correctamente representada en el tratamiento de P. Sraffa. Usando q* para expresar algunas relaciones en términos de un valor constante, dada la tecnología I – P y suponiendo cierta distribución del ingreso, existe una tasa media de ganancias *g* única compatible con el equilibrio del sistema. *Con estos elementos es posible, por lo tanto, determinar los precios relativos de largo plazo* (ecuación (26)) *sobre los cuales la demanda final no influirá.* No se afirma, sin embargo, que la demanda carezca de un rol en el sistema: podríamos decir que su importancia reside en presionar[33] para que el sistema logre el equilibrio, esto es, que se consiga la igualación de las tasas de ganancias entre las industrias al nivel de *g* (único compatible con el equilibrio), pero ese nivel *g* está predeterminado por la distribución del ingreso y la tecnología.

[32]Como se ve, el sistema se mueve con un grado de libertad.

[33]Presionar a través de la asignación de recursos entre las diferentes industrias mientras competitivamente se busca la igualación de los *g* industriales.

## 6. INSUMO–PRODUCTO Y FORMACION DE PRECIOS

Hasta ahora habíamos limitado nuestro análisis del I – P y la formación de precios, a la consideración de insumos que se incorporaban al producto (capital circulante) y al trabajo como recurso primario.

Es posible ampliar el modelo agregando, por ejemplo, bienes de capital fijo del siguiente modo:

Sea $B = [b_{ij}]$, (30)

donde $b_{ij}$ es la cantidad del bien de capital del tipo *i* necesario para producir una unidad del bien *j*.[34] De allí que

$$Bq = k \tag{31}$$

donde k es el vector de necesidades de bienes de capital de los distintos tipos requeridos para producir q.

Estamos en condiciones de expresar una nueva ecuación de precios incorporando ahora los costos en capital fijo.

Supongamos una fórmula general como la que sigue, ampliando la ecuación (20),

$$p' = p'A + g\,p'A + (1 + \epsilon)\,w\,L' + \rho\,p'B \tag{32}$$

Dicha ecuación contiene un nuevo término "$\rho$ p' B" en que "p'B" es la matriz de requerimientos de capital expresada en términos monetarios y $\rho$ es una tasa de ganancias sobre el capital fijo. Además, el costo salarial se le antepone $(1 + \epsilon)$ donde $\epsilon$ es un parámetro que indica la proporción en que se asigna el excedente con respecto a los salarios.

Si el sistema económico genera excedentes, cosa que hemos supuesto cierta, éstos deben asignarse de alguna manera tal que aparezcan reflejados en los precios. La ecuación (32), en la que w perfectamente puede absorber parte de los excedentes (esto es, w no tiene por qué ser sólo un salario de subsistencia) nos indica la existencia de tres canales posibles para asignarlos: insumos, trabajo y bienes de capital.

Si despejamos p' en dicha fórmula obtenemos:

[34] Más de algún bien de capital *i* será inexistente por lo que B tendrá varias filas y columnas con solo ceros. Se dimensiona de esa manera por conveniencia matemática.

$$p' = (1 + \epsilon)\, w\, L' \,(I - (1 + g)\, A - \rho\, B\,)^{-1}. \tag{33}$$

Debe quedar claro al lector que la definición de g, $\rho$ y del parámetro $\epsilon$ no puede escapar a las limitaciones impuestas por el estado de la técnica vigente, del mismo modo que hemos visualizado en secciones anteriores al tratar la frontera de precios de los factores. En palabras simples, no es posible asignar más excedentes que el que se produce.

La fórmula (33) incluye varios casos particulares de interés.

El primero de ellos, equivalente a la ecuación (20) y (26) cuando $\rho = 0$ y $\epsilon = 0$, ya lo hemos analizado y no volveremos sobre él.

El segundo de ellos, cuando $g = 0$ queda como sigue:

$$p' = p'\, A + (1 + \epsilon)\, w\, L' + \rho\, p'B \tag{34}$$

Si se pasa al lado izquierdo de la ecuación $p'\,A$ y se despeja $p'$ tenemos:

$$p' = (1 + \epsilon)\, w\, L' \,(I - A)^{-1} + \rho\, p'\, B\, (I - A)^{-1}, \tag{35}$$

en que

$$L' \,(I - A)^{-1} \tag{36}$$

son los requerimientos directos e indirectos de trabajo por unidad de producto y

$$B\, (I - A)^{-1} \tag{37}$$

son los requerimientos directos e indirectos de capital fijo por unidad de producto.

Los precios, bajo esta formulación, se determinarían asignando los excedentes en proporción a los costos directos e indirectos en ambos factores primarios. Expresando la ecuación (37) de otro modo tenemos:

$$p' = (1 + \epsilon)\, w\, L' \,(I - A - \rho\, B)^{-1} \tag{38}$$

De mayor simplicidad resultan otras formulaciones como el usar la ecuación (38) para el caso $\epsilon = 0$; entonces tenemos lo que Marx llama "precios de producción" (Marx supuso w = salario de subsistencia).

Otro caso, cuando $\rho = 0$, entonces obtenemos el precio-valor en la terminología marxista.

$$p' = (1 + \epsilon)\, w\, L' (I - A)^{-1}, \tag{39}$$

en que el excedente se asigna de acuerdo a los costos directos e indirectos de trabajo.

Existen varias otras posibilidades de combinación en la asignación de excedentes para la formación de precios y no es nuestra pretensión el cubrirlas todas.[35]

Las fórmulas de formación de precios descritas no solo revisten carácter teórico, sino también práctico.

Hay constancia de que algunas de estas fórmulas fueron usadas en ocasiones para proyectar precios en la Unión Soviética, Checoslovaquia, Alemania Oriental,[36], etc. No es nuestro objetivo entrar en dicho terreno, pero no podemos dejar de mencionar que lo que aquí se ha discutido con un afán esencialmente teórico, ha sido aplicado con fines prácticos.

[35] Para mayor detalle en este tema recomendamos, O. Kyn, B. Sekerka y L. Hejl, "A Model for the Planning of Prices", publicado en C.H. Feinstein, "Socialism, Capitalism and Economic Growth, Essays Presented to Maurice Dobb", Cambridge University Press, 1967.

[36] Ver Günther Held, "*Una neorreforma de precios en una economía con planificación central: el caso de la República Democrática Alemana 1967–1971*", en revista *Estudios de Economía*, Nº 12, segundo semestre de 1978, Departamento de Economía, Universidad de Chile, Santiago, octubre de 1978.

# BIBLIOGRAFIA


Allen Roy, G.D. *Mathematical Economics*, Macmillan and Co. Ltd., Londres, 1965.

Bacha, Edmar, D. Carneiro y L. Taylor "Sraffa y la economía clásica: relaciones de equilibrio fundamentales" en *Trimestre Económico*, vol. XLIV N° 73, enero-marzo, 1977.

Blaug, Mark "El sistema de Ricardo" en *Publicaciones Docentes* N° 32, ESCOLATINA, Instituto de Economía y Planificación, Universidad de Chile, agosto de 1969.

Brody, Andras "Three Types of Prices Systems", en *Economics of Planning*, vol. 5, N° 3, Noruega, 1965.

Cohen, K. y R. Cyert "Theory of the Firm: Resource Allocation in a Market Economy", Prentice–Hall, Nueva Jersey, 1965.

Held, Günther "Una neorreforma de precios en una economía con planificación central: el caso de la República Democrática Alemana en 1967–1971", en revista *Estudios de Economía* N° 12, Departamento de Economía, Universidad de Chile, Santiago, octubre, 1978.

Kyn, O. B. Sekerka y L. Hejl "A Model for the Planning of Prices", en C.H. Feinstein, *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Essays Presented to Maurice Dobb, Cambridge University Press, 1967.

Lancaster, Kelvin "Mathematical Economics", Macmillan Company, Nueva York, 3ª ed., 1969.

Leontief, Wasily "Input–Output Economics", Oxford University Press, Nueva York, 2ª ed., 1973.

Nell, E.J. "Theories of Growth and Theories of Value", en G.C. Harcourt y N.F. Laing *Capital and Growth*, Penguin, 1971.

Robinson, Joan y J. Eatwell *An Introduction to Modern Economics*, Mc Graw Hill, Londres, 1973.

Sekerka, B., O. Kyn y L. Hejl — "Price Systems Computable from Input–Output Coeficients", en A.P. Carter y A. Brody, *Aplications of Input–Output Techniques,* North Holland, Amsterdam, 1970.

Sraffa, Piero — *Production of Commodities by Means of Commodities,* Cambridge University Press, 1960.

Torres, Clemente — "El modelo multisectorial de producción", en *Documento de Docencia* N°21, Departamento de Economía, Universidad de Chile, Santiago, marzo de 1979.