UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

NÚMEROS DE TURÁN EN COLOREOS PROMEDIO PARA GRAFOS COMPLETOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SIMÓN CRISTÓBAL PIGA DÍAZ

PROFESORA GUÍA:
MAYA STEIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
HIỆP HÀN
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ

SANTIAGO DE CHILE
2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: SIMÓN CRISTÓBAL PIGA DÍAZ
FECHA: 14/06/2017
PROF. GUÍA: SRA. MAYA STEIN

NÚMEROS DE TURÁN EN COLOREOS PROMEDIO PARA GRAFOS COMPLETOS

Un coloreo de aristas de un grafo se llama γ-promedio si es que el número promedio de colores incidentes a cada vértice es a lo más γ. Dados n, m enteros positivos y γ un real positivo, el número de Turán promedio coloreado $T(n, K_m, \gamma\textit{-promedio})$ corresponde a la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de n vértices de manera que exista un coloreo γ-promedio que no contenga ninguna copia monocromática de K_m. Esta noción fue introducida por Caro, quien observa que la expansión (*blow-up*) de un grafo completo γ-promedio coloreado sin copias monocromáticas de K_m también es γ-promedio coloreado y tampoco posee copias monocromáticas de K_m. Con ello, Caro se pregunta de si el máximo de aristas buscado se alcanza en la expansión de un grafo completo γ-promedio coloreado que maximice el número de vértices bajo la condición de no contener una copia monocromática de K_m (un coloreo extremal para el número de Ramsey γ-promedio).

Yuster probó que la respuesta es afirmativa para el caso $m = 3$ y $\gamma = 2$, y además conjeturó que la respuesta es siempre afirmativa para todos los $\gamma = \ell \in \mathbb{N}$. En la presente memoria se demuestra esta conjetura de Yuster cuando $m \geq \ell(\ell+1)+1$. Por otro lado, se demuestra también que la respuesta a la pregunta de Caro es negativa para un conjunto no numerable de valores de $\gamma \notin \mathbb{N}$.

In every chaos there is an order: A very good writer wrote a rather nice book. But there was no title to it yet. He asked his friend for suggestions. The friend asked him if there was either a drum or a guitar mentioned in the book, to which the author replied in the negative. The book then had the title: A story without drums and guitars

Endre Szemerédi

Agradecimientos

Muchas gracias en primer lugar a mi familia por todo el apoyo en este (no tan corto) paso por la Universidad, tanto en mis actividades académicas, políticas y las demás. Muy especialmente a mis padres Isabel y José, y a mi hermano Camilo, con quienes conviví a diario durante estos años. Con especial cariño menciono a mi siempre presente y sabia abuela, Mireya, que nos dejó hace un tiempo. Así mismo menciono, también a mi sobrina Adela Florencia Piga Manríquez (que llegó hace un tiempo).

Agradezco también a mis incondicionales amigos, amigas compañeras y compañeros de la Universidad que le han dado brillo al paso por la U. Especialmente al Lais, a la Coni, al Gabriel, al Foncho y al Cristi. Agradezco muy particularmente a Felper, compañero en las matemáticas y otras discusiones. Muchas gracias a la Maca que me acompañó constantemente en las desventuras universitarias, y me permitió cerrar esta memoria. Y cómo no mencionar a mis queridísimos senadores y senadoras Universitarios, estudiantiles, académicos y funcionarios, con quienes conocimos en conjunto las locuras de la Universidad de Chile

Agradezco también a mis compañeros del DIM, cada uno con nuestras locuras propias. Especialmente agradezco a los discretos, y a quienes sufrimos con las EDPs en general. No puedo dejar de mencionar a mi compañero Pablo, a Natacha, a Cuqui, a Eterin y a Karen.

Finalmente agradezco muy encarecidamente a la profesora Maya Stein, que me guió y aconsejó durante el proceso de esta memoria. Agradezco también a los profesores Hiệp Hàn y Martín Matamala por sus correcciones y por su participación en la comisión.

Tabla de Contenido

Capítulo 1

Introducción

En el presente capítulo se presentan los principales resultados obtenidos en el trabajo, enmarcados en su contexto general. Para ello se utilizan algunas nociones básicas de teoría de grafos, teoría de Ramsey y números de Turán. Las definiciones y notaciones más fundamentales de teoría de grafos se encuentran en el capítulo siguiente.

En primer lugar es necesario introducir algunas nociones de coloreo sobre las aristas de un grafo. Clásicamente, en un coloreo de las aristas de un grafo la cantidad de colores utilizados está acotada (si se utilizan a lo más ℓ colores distintos se dice que es ℓ-*coloreo*). No obstante, en los coloreos mayormente estudiados en la presente memoria, el número total de colores utilizados no es acotado. Para $\ell \in \mathbb{N}$ un coloreo de aristas se dice ℓ-*local* si para cada vértice la cantidad de colores en sus aristas incidentes es a lo más ℓ. Por otro lado, dado γ un real positivo, si el número *promedio* de colores incidentes a cada vértice es a lo más γ se dice que el coloreo es γ-*promedio*. De esta manera, evidentemente (en el caso entero) todo coloreo ℓ-local es también ℓ-promedio. Otro definición utilizada corresponde al caso en que cada vértice es incidente exactamente a ℓ colores diferentes, en dicho caso se dirá que el coloreo es ℓ-*exacto*.

1.1. Números de Ramsey Locales y Promedio

El *número de Ramsey* de un grafo G para ℓ colores, $R(G, \ell)$, corresponde al máximo n para el cual existe un ℓ-coloreo de K_{n-1} que no contiene ninguna copia monocromática de G. Dichos coloreos se llamarán *extremales* para el número de Ramsey $R(G, \ell)$. El teorema generalizado de Ramsey afirma que este número existe para todo grafo G y para cualquier cantidad de colores $\ell \in \mathbb{N}$. Sabiendo ello, los números de Ramsey $R(G, \ell\text{-}local)$ y $R(G, \gamma\text{-}promedio)$ para coloreos locales y promedio se definen de manera análoga remplazando ℓ-coloreo por coloreo ℓ-local y coloreo γ-promedio respectivamente (también se definen de manera análoga sus coloreos extremales). Se considerará por definición para el caso de 0 colores los valores $R(G, 0) = R(G, 0\text{-}local) = R(G, 0\text{-}promedio) = 2$. La existencia de los números de Ramsey locales y promedios para todo ℓ y γ se pueden encontrar en [7] y en [4]. Evidentemente, se tiene que $R(G, \ell) \leq R(G, \ell\text{-}local) \leq R(G, \ell\text{-}promedio)$. Bajo estas definiciones es que Caro y Tuza [5] formulan la siguiente pregunta.

Pregunta 1.1 (Caro, Tuza, 1993 [5])
¿Es cierto que $R(G, \ell\text{-}promedio) = R(G, \ell\text{-}local)$ para todo grafo G y entero positivo ℓ?

En el mismo artículo prueban que existe una relación al menos lineal entre ambos números: $R(G, \ell\text{-}promedio) \leq c(\ell) \cdot R(G, \ell\text{-}local)$ donde $c(\ell) \leq 2(\ell - 1)$. Relacionado con esto, Truszczynski y Tuza [12] probaron que existe una constante $k(\ell)$ tal que para todo grafo conexo G se tiene que $R(G, \ell\text{-}local) \leq k(\ell) \cdot R(G, \ell)$[1]. Combinando ambos resultados se tiene una relación lineal entre los números de Ramsey promedios y los clásicos para grafos conexos (y para ℓ fijo).

Hasta ahora existen varias familias de grafos y cantidades de colores para los cuales la respuesta a la Pregunta 1.1 es afirmativa [1, 2, 3, 5, 10]. En el caso de grafos completos Schelp [10] prueba que $R(K_m, \ell\text{-}promedio) = R(K_m, \ell\text{-}local)$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Para facilitar la notación, en adelante se denotará $R_{m,\ell}$ a este valor.

El primer resultado de este trabajo es una versión estable para el Teorema de Schelp. Específicamente, se prueba que si un coloreo ℓ-promedio del grafo completo K_n no contiene ninguna copia monocromática de K_m, entonces el número de vértices n debe ser distante del número de Ramsey promedio $R_{m,\ell}$, o el coloreo es ℓ-exacto. Más precisamente, se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.2 *Sean $m, \ell \in \mathbb{N}$ tales que $m \geq 3$, $\ell \geq 2$ y sea un coloreo ℓ-promedio de un grafo completo K_n con $n \geq R_{m,\ell} - m + 3$. Entonces, se tiene que K_n contiene una copia monocromática de K_m o el coloreo es ℓ-exacto.*

El teorema anterior es un resultado de estabilidad en el siguiente sentido. El número máximo de vértices que puede tener un grafo completo ℓ-promedio coloreado siempre se alcanza en coloreos ℓ-exactos y es $R_{m,\ell} - 1$. Mientras que, si se exige que el coloreo sea ℓ-promedio, pero no ℓ-exacto, dicho máximo disminuye al menos a $R_{m,\ell} - m + 3$. Hasta ahora no se sabe cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo ℓ-promedio coloreado que no sea ℓ-exacto coloreado. Es decir, no se sabe si la diferencia podría ser aún mayor.

Considerando la Pregunta 1.1, se puede poner en cuestión una afirmación aun más fuerte. Es posible preguntarse si existe una versión más general del Teorema 1.2 para todo grafo y no solo para grafos completos. Más específicamente ¿Será cierto que para todo grafo G, los coloreos ℓ-promedio sobre grafos completos que no poseen copias monocromáticas de G y que maximizan la cantidad de vértices son siempre ℓ-locales (o incluso ℓ-exactos)? Sin embargo, en una de las conclusiones del presente trabajo (ver Sección 5.1) se presentan contraejemplos que prueban que dicho resultado de estabilidad no es cierto para todo grafo

[1]Se sabe que para grafos no conexos la razón $\frac{R(G,\ell\text{-}local)}{R(G,\ell)}$ puede ser arbitrariamente grande [7, Proposición 10].

G, incluso considerando $\ell = 2$.

1.2. Números de Turán coloreados, locales y promedio

El problema principal de esta memoria está centrado en los números Turán Coloreados. En este caso, dado n, un número fijo de vértices, el objetivo es encontrar la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo ℓ-coloreado sin que posea copias monocromáticas de K_m. Este máximo corresponde al número de Turán ℓ-coloreado $T(n, K_m, \ell)$. El caso $\ell = 1$ se reduce al problema original de Turán [13], para el cual se sabe que la mayor cantidad de aristas posibles para un grafo de n vértices sin copias de K_m como subgrafo se alcanza en el grafo $(m-1)$-partito completo, cuyas clases tienen tamaños lo más parecido posible (es decir con diferencia de a lo más un vértice). A este último grafo se le llamará *Grafo de Turán* de n vértices y $m-1$ clases, y se denotará por $T_{m-1}(n)$. Se denominará $t_{m-1}(n)$ al número de aristas de $T_{m-1}(n)$.

Para el caso de $\ell \neq 1$ es posible probar que $T(n, K_m, \ell) = T(n, K_{R(K_m,\ell)}, 1)$. Para ello en primer lugar se considera el grafo de Turán n vértices y $(R(K_m, \ell) - 1)$ clases. Para f un coloreo extremal para el número de Ramsey $R(K_m, \ell)$, se colorean las aristas de $T_{R(K_m,\ell)-1}(n)$ como una expansión (*blow-up*) de dicho coloreo. Es decir todas las aristas entre las clases i y j utilizando con el color $f(ij)$. Como el grafo resultante no posee copias monocromáticas de K_m, se tiene que $T(n, K_m, \ell) \geq t_{R(m,\ell)-1}(n) = T(n, K_{R(m,\ell)}, 1)$ (donde la última igualdad se tiene por el resultado original de Turán).

En segundo lugar, todo grafo G con n vértices y más de $T(n, K_{R(m,\ell)}, 1)$ aristas tendrá como subgrafo una copia de $K_{R(m,\ell)}$. Con ello, cualquier ℓ-coloreo en G inducirá un ℓ-coloreo en el subgrafo $K_{R(m,\ell)}$, el cual por definición del número de Ramsey poseerá una copia monocromática de K_m. Con lo anterior se deduce la otra desigualdad: $T(n, K_m, \ell) \leq T(n, K_{R(m,\ell)}, 1)$. Con ello se concluye la igualdad deseada, demostrada inicialmente por Sós [11]:

$$T(n, K_m, \ell) = T(n, K_{R(K_m,\ell)}, 1). \tag{1.1}$$

Es posible extender las noción de número de Turán coloreado para coloreos locales y promedio definiendo los números $T(n, K_m, \ell\textit{-local})$ y $T(n, K_m, \gamma\textit{-promedio})$ reemplazando ℓ-coloreo con coloreo ℓ-local y coloreo γ-promedio respectivamente. Caro [4] prueba para el caso ℓ-local una reducción análoga a la encontrada por Sós.

Teorema 1.3 (Caro, 1992 [4]) *Sean m, n, ℓ enteros positivos. Entonces*

$$T(n, K_m, \ell\textit{-local}) = T(n, K_{R_{m,\ell}}, 1).$$

En vista de la igualdad (1.1) y del Teorema 1.3 es natural el planteamiento de la siguiente pregunta (propuesta originalmente por Caro [4]).

Pregunta 1.4 (Caro, 1992 [4]) *Para $m \in \mathbb{N}$ y para γ un real positivo, ¿Es cierto que*

$$T(n, K_m, \gamma\text{-}promedio) = T(n, K_{R(K_m, \gamma\text{-}promedio)}, 1)?$$

Para este caso no es posible extender los mismos argumentos utilizado por Sós (y por Caro) para probar (1.1) (y el Teorema 1.3). Yuster [14] prueba la igualdad para el caso $m = 3$ y $\gamma = 2$, y conjetura que la respuesta a la Pregunta 1.4 es afirmativa para todo m y para todo $\gamma = \ell \in \mathbb{N}$. El principal resultado de esta memoria es responder afirmativamente la Pregunta 1.4 para $\gamma = \ell \in \mathbb{N}$ y m tales que $m \geq \ell(\ell + 1) + 1$.

Teorema 1.5 *Sean n, m, ℓ enteros positivos tales que $m \geq \ell(\ell + 1) + 1$ entonces*

$$T(n, K_m, \ell\text{-}promedio) = T(n, K_{R_{m,\ell}}, 1).$$

Caro [4] demuestra que $T(n, K_m, \ell\text{-}promedio) \geq T(n, K_{R_{m,\ell}}, 1)$, por lo que solo falta probar la otra desigualdad. Para deducirla se utiliza el siguiente teorema también demostrado en este trabajo.

Teorema 1.6 *Sean n, m, ℓ enteros positivos tales que $m \geq 3$ y $2 \leq \ell \leq m$, y sea G un grafo ℓ-promedio coloreado con $n \geq R_{m,\ell}$ vértices y más de*

$$T(n, K_{R_{m,\ell}}, 1) - \left(\frac{m-1}{\ell} - \ell - 1\right)$$

aristas. Luego G contiene una copia monocromática de K_m o el coloreo es ℓ-exacto.

El teorema anterior es un resultado de estabilidad en el siguiente sentido. El número máximo de aristas que puede tener un grafo completo ℓ-promedio coloreado siempre se alcanza en coloreos ℓ-exactos y es $T(n, K_{R_{m,\ell}}, 1)$. Sin embargo, si se exige que el coloreo sea ℓ-promedio, pero no ℓ-exacto, dicho máximo disminuye al menos a $T(n, K_{R_{m,\ell}}, 1) - \left(\frac{m-1}{\ell} - \ell - 1\right)$. Hasta ahora no se sabe cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo ℓ-promedio coloreado que no sea ℓ-exacto coloreado. Es decir, no se sabe si la diferencia podría ser aún mayor.

Es claro que a partir de los Teoremas 1.3 y 1.6 se concluye directamente el Teorema 1.5, por lo que solamanete se probará el Teorema 1.6.

1.2.1. Respuestas Negativas a la Pregunta 1.4

Además del Teorema 1.5, que responde afirmativamente la Pregunta 1.4 para ciertos casos, en la presente memoria se muestran valores de $\gamma \notin \mathbb{N}$ para los cuales la respuesta es negativa. Para ello, se define el conjunto

$$\Gamma_m := \{\gamma \in \mathbb{R} \mid \text{Existe } \delta > 0 \text{ tal que } R(K_m, (\gamma - \delta)\text{-}promedio) = R(K_m, \gamma\text{-}promedio)\}.$$

Es decir, Γ_m serán los valores de γ donde es posible mantener el número de Ramsey promedio a pesar de permitir, en promedio, menos colores incidentes a cada vértice. En la presente memoria se prueba que para $\gamma \in \Gamma_m$ existen grafos con más de $T(n, K_{R(K_m,\gamma\text{-}promedio)}, 1)$ aristas y tales que no poseen ninguna copia monocromática de K_m.

Teorema 1.7 *Sea m un entero positivo. Para todo $\gamma \in \Gamma_m$ existe una constante $c = c(m, \gamma) > 0$ tal que*

$$T(n, K_m, \gamma\text{-}promedio) \geq T(n, K_{R(K_m,\gamma\text{-}promedio)}, 1) + cn^2.$$

Es decir, el Teorema 1.7 afirma que para todo $\gamma \in \Gamma_m$, la respuesta a la Pregunta 1.4 es negativa. Sin embargo, hasta ahora no se sabe si la recíproca de esta afirmación es cierta también. Dicho de otra manera, ¿Es Γ_m es el conjunto de reales positivos más grande posible para el cual se responde negativamente la Pregunta 1.4?

Pregunta 1.8 *Sea γ un real positivo y $m \in \mathbb{N}$. ¿Será cierto que $\gamma \notin \Gamma_m$ si y solo si*

$$T(n, K_m, \gamma\text{-}promedio) = T(n, K_{R(K_m,\gamma\text{-}promedio)}, 1)?$$

1.3. Organización de la Memoria

En el Capítulo 2 se presentan las definiciones básicas y algunos resultados previos necesarios para las demostraciones de los teoremas principales. Allí se incluyen las definiciones más fundamentales de teoría de grafos, además de ciertas definiciones más específicas para coloreos de aristas. En los capítulos 3 y 4 se presentan las demostraciones de los Teoremas 1.2 y 1.6 respectivamente. Finalmente en el Capítulo 5, a modo de conclusiones, se presentan algunos resultados finales y posibles extensiones de los problemas tratados. En este último capítulo se incluye la demostración del Teorema 1.7.

Capítulo 2

Preliminares. Definiciones básicas y resultados previos

El presente capítulo tiene por objetivo en primer lugar mostrar las definiciones y notaciones más básicas para el entendimiento general de los problemas tratados. Por otro lado, en la Sección 2.2 se presentan algunos resultados previos necesarios para probar los resultados principales.

2.1. Definiciones básicas

A continuación se presentarán las nociones y definiciones básicas necesarias para la presente memoria, primero en el contexto de la teoría de grafos, y segundo, de forma más específica, en coloreos de aristas. Para ello normalmente se han seguido las notaciones y definiciones del libro de Diestel [6].

2.1.1. Grafos

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito cualquiera y E es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de tamaño dos en V. En general se considera que un grafo es representado gráficamente entendiendo a V como un conjunto de puntos y a E como lineas que unen los puntos de V. Los elementos de V son llamados *vértices* y los de E *aristas*. Dado un grafo G se denotará $V(G)$ al conjunto de sus vértices y $E(G)$ al de sus aristas, se utilizarán letras minúsculas para referirse a las cardinalidades de estos conjuntos; $v(G) := |V(G)|$ y $e(G) := |E(G)|$.

En general se denotará uv a la arista $e = \{u, v\}$ y se dirá que u y v son los *extremos* de e. Además cuando $uv \in E(G)$ se dirá que *u es vecino de v*, que los vértices u y v son *adyacentes* y que la arista uv es *incidente* a u. El conjunto de vecinos de un vértice

v fijo se denominará la *vecindad* de v, y se denotará $N_G(v)$ o simplemente $N(v)$ si G esta dado por el contexto. Se le llamará *grado de* v a $|N(v)|$ y se denotará como $d_G(v)$, o simplemente $d(v)$. Los grados máximo, mínimo y promedio de G se denotarán $\Delta(G)$, $\delta(G)$ y $d(G)$ respectivamente.

Dado un grafo G y un conjunto de vértices $V \subseteq V(G)$, se define el *conjunto de aristas inducidas por* V al conjunto $E[V] := \{xy \in E(G) \mid x, y \in V\}$. Se le dirá *grafo inducido por* V al grafo $G[V] := (V, E[V])$.

Se requiere además definir algunas familias de grafos en particular. El grafo de n vértices que contiene todas las aristas posibles se le llamará *grafo completo de* n *vértices*, denotado como K_n. Por otro lado al grafo con $(n+1)$ vértices $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, y con aristas $E = \{v_i v_{i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ se le llamará *camino de largo* n y se denotará como P_n. Al grafo obtenido a partir de P_{n-1} agregando la arista $v_{n-1}v_0$ se le llamará *ciclo de largo* n, denotado por C_n. Además, dado un grafo $G = (V, E)$ y un natural n, se denotará nG al grafo que consiste en n copias disjuntas del grafo G (es decir, n copias del conjunto de vértices V y cada una de ellas con sus respectivo conjunto de aristas E). En particular al grafo nK_2 se le llamará *emparejamiento.*

Un grafo G se dirá r-partito si existe una partición de $V(G)$ en r conjuntos $\{V_i\}_{i=1}^r$ tales que ninguna arista de G tiene ambos extremos en el mismo conjunto de la partición. Si G tiene la mayor cantidad de aristas posibles, sujeto a la condición de que sea r-partito para una partición dada, se dirá que G es r*-partito completo.*

2.1.2. Coloreos de Aristas

Un *coloreo de aristas de un grafo* G será una asignación $f : E(G) \to \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}$ es un conjunto cualquiera cuyos elementos serán llamados *colores*. Para un vértice v y un coloreo fijo f se le llamará *grado coloreado* $c_f(v)$ al número de colores diferentes asignados a las aristas incidentes a v. Se denotará al conjunto de vértices incidentes a i colores como $V_i^f(G) := \{v \in V(G) \mid c_f(v) = i\}$.

Para un conjunto no vacío de vértices $V \subseteq V(G)$ se define la *contribución promedio de* V *al coloreo* f como

$$\rho_f(V) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} c_f(v).$$

En general, en todas las notaciones anteriores se omitirá el coloreo f si es que no genera confusiones.

Observación 2.1 *Para* $A, B \subseteq V(G)$*, disjuntos se tiene que*

$$\rho(A \cup B) = \frac{|A| \cdot \rho(A) + |B| \cdot \rho(B)}{|A \cup B|}.$$

Se observa que si $\rho_f(V(G)) \leq \gamma$, entonces f es un coloreo γ*-promedio*. Por otro lado, si

$c_f(v) \leq \ell$ para todo v, f es un coloreo ℓ*-local*, y si $c_f(v) = \ell$ para todo v, f es un coloreo ℓ*-exacto*.

Finalmente, dado un natural $t \in \mathbb{N}$, el grafo t*-expandido* (*blow-up*) $G_f(t)$ de un grafo G coloreado por f se define remplazando cada vértice x de G por t copias de x y cada arista xy por las aristas del grafo bipartito completo, coloreando todas ellas con el color $f(xy)$. Obsérvese que el grafo resultante $G_f(t)$ es $|V(G)|$-partito. Si f es claro por el contexto, se dirá simplemente $G(t)$.

2.2. Resultados Previos Necesarios

En la presente sección se presentarán una serie de resultados necesarios para las demostraciones de los teoremas principales. En primer lugar, se presenta sin demostración, el siguiente teorema probado por Hajnal y Szemerédi [8].

Teorema 2.2 (Hajnal - Szemerédi, 1970 [8])
Si G es un grafo con n vértices, tal que $\delta(G) > \frac{k-1}{k} \cdot n$, entonces existe una partición de sus vértices en $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ subgrafos completos de tamaño al menos k.

Los siguientes dos lemas corresponden a propiedades muy simples de los números de Ramsey locales $R_{m,\ell}$.

Lema 2.3 *Sean $\ell \leq m \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$R_{m,\ell} \geq m + \ell - 1.$$

Demostración Sean $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}\}$ y $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\ell-1}\}$ conjuntos de vértices del grafo completo $K_{m+\ell-2}$. Se colorea cada arista $u_i v_j$ con el color j, y cada arista adentro de U o V con el color ℓ. Es claro que este es un coloreo ℓ-local sin una copia monocromática de K_m. Con ello se deduce el resultado.

□

Evidentemente esta cota no es ajustada. En la misma construcción anterior, es posible tomar una $(m-2)$-expansión de los vértices en V coloreando las aristas internas de cada clase v_j con el color j. El grafo resultante sigue sin contener copias monocromáticas de K_m. Con ello

$$R_{m,\ell} \geq \ell(m-2) + 2,$$

sin embargo, para los efectos de este trabajo basta considerar la cota presentada en el Lema 2.3. Por otro lado, es directo ver que la cota es la misma para caso en que $\ell = 1$ o $m = 3$.

Lema 2.4 *Para $\ell \geq j \geq 1$ y $m \geq 3$, se tiene que*

$$R_{m,\ell} \geq (R_{m,j} - 1)(R_{m,\ell-j} - 1) + 1.$$

Demostración Sea H un grafo completo j-local coloreado con $R_{m,j}-1$ vértices tal que no contiene ninguna copia monocromática de K_m. Considérese el grafo expandido $H(R_{m,\ell-j}-1)$ y para cada clase considere un $(\ell-j)$-local coloreo de sus aristas internas, utilizando nuevos colores, de manera que no contenga una copia monocromática de K_m. Este es un ℓ-local coloreo de del grafo completo $K_{(R_{m,j}-1)(R_{m,\ell-j}-1)}$ que no contiene ninguna copia monocromática de K_m. $\square$

El siguiente lema se refiere a la variación de $t_k(n)$ con respecto al cambio en el número de vértices n.

Lema 2.5 *Sea $n, k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$t_k(n) \geq t_k(n-r) + r \cdot \left\lfloor \frac{n(k-1)}{k} \right\rfloor.$$

Demostración Es fácil ver que $t_k(n)$ es la cantidad de aristas del grafo de Turán $T_k(n-r)$, más r vértices adicionales cuyos grados son siempre al menos $\left(n - \lceil \frac{n}{k} \rceil\right) = \left\lfloor \frac{n(k-1)}{k} \right\rfloor$. Con ello se deduce lo pedido. $\square$

Lema 2.6 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$. Si G es un grafo en n vértices, completo salvo por a lo más $(n-k)$ aristas. Entonces todo vértice de G está contenido en algún K_k.*

Demostración Sea v un vértice de G. Para cada par de vértices x, y tales que $xy \notin E(G)$, se elimina cualquiera de los dos que no sea el vértice v.

Con lo anterior se eliminan a lo más $(n-k)$ vértices y el grafo resultante contiene una copia de K_k que contiene a v.

$\square$

Vale la pena observar que el resultado anterior es ajustado en el siguiente sentido. Considere G el grafo obtenido a partir de K_n borrando $(n-k+1)$ aristas, todas incidentes a un vértice fijo v. Tal vértice tiene grado $n-1-(n-k+1) = k-2$, y por ello no puede estar contenido en ningún K_k.

Capítulo 3

Demostración del Teorema 1.2

El principal objetivo del presente capítulo es probar el Teorema 1.2, es decir la estabilidad de los coloreos locales en el problema de Ramsey para grafos completos.

Una de las herramientas principales es una construcción similar a la utilizada por Schelp [10] para probar la igualdad entre los números de Ramsey locales y promedio para grafos completos.

3.1. Bosquejo de la Demostración

Para comenzar la demostración se considera un ℓ-promedio coloreo f de un grafo completo K_n, tal que no posee copias monocromáticas de K_m. Como el coloreo es ℓ-promedio, si el grafo posee un vértice incidente a más de ℓ colores, también existe otro vértice incidente a menos de ℓ colores. Razonando por contradicción, se asumirá que el coloreo f no es ℓ-exacto, y por ello posee al menos un vértice incidente a menos de ℓ colores. La idea central de la demostración será construir a partir de un coloreo de K_n un nuevo grafo completo $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$ que resulta ser ℓ-local coloreado y que no contiene copias monocromáticas de K_m. Este nuevo grafo tendrá al menos $m-2$ vértices más que el K_n original, y como no posee copias monocromáticas de K_m debe tener menos vértices que el número de Ramsey local $R_{m,\ell}$. Es decir

$$n + m - 3 \leq \mathcal{S}(K_n, f, \ell, m) < R_{m,\ell}$$

con lo que se tiene que $n < R_{m,\ell} - m + 3$.

Antes de entregar una explicación formal para la construcción de $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$, se presentarán las ideas generales.

En primer lugar se eliminan todos los vértices que son incidentes a más de ℓ colores en el K_n original. El grafo resultante es evidentemente ℓ-local coloreado.

Considérese primero el conjunto $V_{\ell-1}$, de los vértices incidentes a exactamente $\ell - 1$ colores. La principal idea es que es posible agregar una nueva copia de $V_{\ell-1}$ manteniendo los colores para las aristas internas y las que lo conectan con el resto del grafo sin generar con ello ninguna copia de K_m. Ahora, se requiere construir un grafo completo por lo que es necesario colorear las aristas entre el $V_{\ell-1}$ original y la copia. Sin embargo, estas pueden ser coloreadas con un color completamente nuevo, y es fácil ver que no se agrega ninguna copia de K_m, pues el grafo inducido por este nuevo color resulta bipartito. Con ello los vértices en el $V_{\ell-1}$ original y la copia pasan a ser incidentes un color extra, es decir ℓ colores en total. Con ello, el coloreo sigue siendo ℓ-local. Si $m > 3$, es posible agregar una nueva copia, pues el grafo resultante por el color nuevo será 3-partito (y $m \geq 4$). En general es posible agregar $m - 1$ nuevas copias de $V_{\ell-1}$ sin añadir ninguna copia monocromática de K_m y manteniendo la condición del ℓ-local coloreo.

Análogamente, es posible aplicar la misma idea al conjunto de vértices $V_{\ell-2}$. Sin embargo, en este caso es posible agregar hasta dos nuevos colores manteniendo la condición de que el coloreo sea ℓ-local. Así, sea $k = R(K_m, 2\text{-}local) - 1$ y se consideran $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ copias de $V_{\ell-2}$. Se colorean entonces las aristas entre las clases U_i como en la expansión de un coloreo extremal para $R(K_m, 2\text{-}local)$. Es posible repetir esta idea para $V_{\ell-i}$, y en general será posible agregar $R(K_m, i\text{-}local) - 1$ copias de de cada conjunto $V_{\ell-i}$.

A pesar de que en base a la idea anterior es posible agregar una gran cantidad de vértices, es necesario recordar que inicialmente se retiraron todos los vértices incidentes a más de ℓ colores. Será necesario probar que en términos netos, el grafo resultante posee al menos $(m - 2)$ vértices más que el grafo original (ver Lema 3.1).

Si bien el objetivo es utilizar esta construcción para grafos ℓ-promedio coloreados y sin copias monocromáticas de K_m, se presentará en primera instancia para cualquier coloreo de un grafo completo. Más adelante se verá que si el grafo original es ℓ-promedio coloreado sin copias monocromáticas de K_m, entonces $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$ cumplirá lo pedido. Para algunos de los resultados presentados más adelante será necesario tomar esta construcción utilizando grafos completos coloreados arbitrariamente (no necesariamente ℓ-promedio coloreados).

3.1.1. Construcción y Propiedades del Grafo $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$

El objetivo de esta sección es entregar una versión más detallada del grafo $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$, destacando algunas de sus propiedades.

Sean n, m, ℓ enteros positivos tales que $3 \leq m < n$ y considérese f un coloreo de las aristas de un grafo completo K_n. Recordando que el conjunto V_i corresponde al conjunto de vértices incidentes a exactamente i colores, se define

$$N := \sum_{i=1}^{\ell} (R_{m,\ell-i} - 1)|V_i(K_n)|.$$

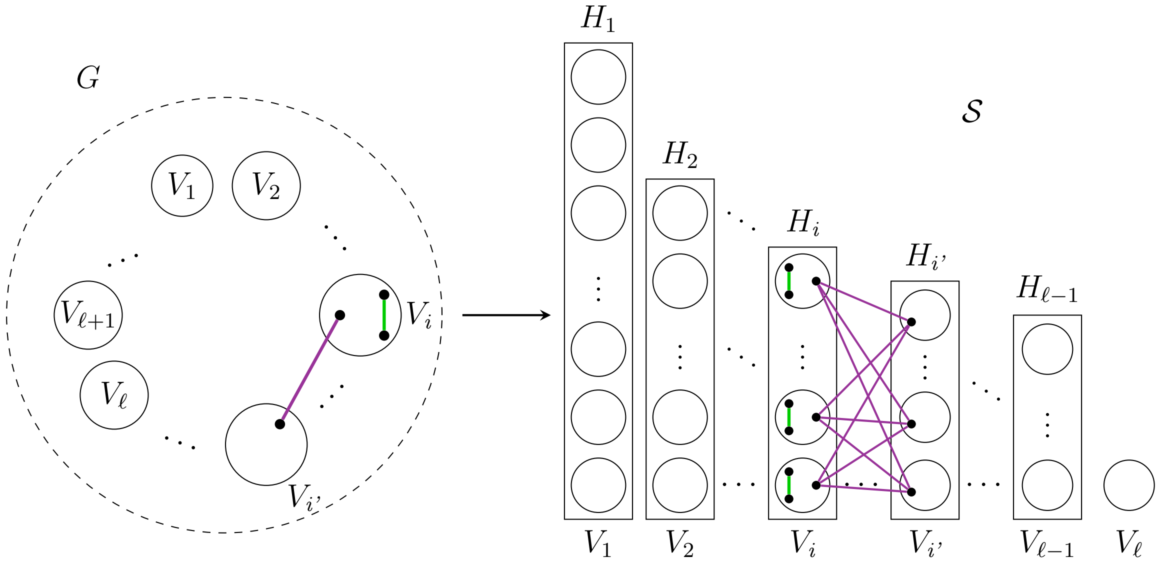

Figura 3.1: El grafo de la derecha representa la construcción $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$ que contiene muchas copias de $V_i(K_n)$ para $i \leq \ell$. Los grafos H_k corresponden a expansiones de grafos completos en $R_{m,\ell-i} - 1$ vértices, $(\ell - i)$-local coloreados. Sus aristas tienen colores que no aparecen en K_n original.

El objetivo será construir un coloreo de las aristas de K_N. Para ello, considérese el conjunto $V(K_N)$ como unión de $(R_{m,\ell-i} - 1)$ copias de $V_i(K_n)$ por cada $i \leq \ell$. Para cada vértice $x \in V_i(K_n)$ se denota $x^{(j)}$ a las diferentes copias de x, para $j \leq R_{m,\ell-i} - 1$, y se llamará $V_i^{(j)} := \{x^{(j)} \mid x \in V_i(K_n)\}$ a la j-ésima copia de $V_i(K_n)$. Estas copias preservan la coloración original f para sus aristas internas.

Para cada $i \leq \ell$ se considera H_i un grafo completo coloreado con un coloreo extremal para $R_{m,\ell-i}$ (H_i posee entonces $R_{m,\ell-i}$ vértices). Considérese estos colores como diferentes a aquellos utilizados originalmente en f.

Así, se colorean las aristas de K_N de la siguiente manera:

(a) Para $1 \leq i < i' \leq \ell$ y para cada $x^{(j)} \in V_i^{(j)}$ y $y^{(j')} \in V_{i'}^{(j')}$, se colorea la arista $x^{(j)}y^{(j')}$ con el color $f(xy)$, para todo par j, j'.

(b) Para un $i \leq \ell$ fijo, se colorean las aristas entre las diferentes copias $V_i^{(j)}$ para $j \leq R_{m,\ell-i} - 1$ como en el grafo expandido $H_i(|V_i(K_n)|)$.

El grafo coloreado $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$ será el resultante de la construcción anterior. Para una ilustración más clara observe la Figura 3.1.

Las características claves del grafo $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$ son dadas en el siguiente lema.

Lema 3.1 *Sean $n, m, \ell \in \mathbb{N}$, $3 \leq m < n$ y sea f un coloreo de las aristas de K_n tal que* *no contiene una copia monocromática de K_m. Entonces:*

1. *$\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$ no tiene ninguna copia monocromática de K_m.*

2. *$\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$ es ℓ-local coloreado.*

3. *Si f es un $\ell-$promedio coloreo, entonces*

$$|V(\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m))| \geq n + \sum_{i=1}^{\ell-1} (R_{m,\ell-i} - (\ell - i) - 2)|V_i(K_n)|.$$

La idea central en la propiedad (3) es justamente que el nuevo grafo tendrá al menos tantos vértices como el K_n original. Evidentemente esto dependerá del signo de la sumatoria al lado derecho de la expresión, la cual es no negativa para $m \geq 3$. Para probar el Lema 3.1 se utiliza un lema de Schelp [10, Lema 1]:

Lema 3.2 (Schelp [10]) *Sea K_n un grafo completo ℓ-promedio coloreado. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell - i)|V_i(K_n)| \geq \sum_{i>\ell} |V_i(K_n)|.$$

Demostración del Lema 3.1 Se prueba cada propiedad por separado.

1. Supóngase que K es una copia monocromática de K_m en $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$. Si K está en alguno de los colores no utilizados por el coloreo original f, luego, K debe estar en alguno de los grafos expandidos $H_i(|V_i(K_n)|)$. Pero es fácil ver que esto no es posible dado que los H_i no poseen copias de K_m. Supóngase ahora que K está en los colores usados por f. Luego, no puede tener vértices en dos copias diferentes $V_i^{(j)}$ y $V_i^{(j')}$ para $j \neq j'$. Sabiendo esto es fácil deducir que K_n debe contener una copia monocromática de K_m en el coloreo original f.

2. Para un vértice fijo $x^{(j)}$ en alguna de las copias $V_i^{(j)}$, es claro que el número de colores incidente provenientes de (a) en la Construcción 3.1.1 son solamente los i colores originales del coloreo f. Por otro lado, para $i < \ell$, como H_i es un $(\ell - i)$-local coloreo, debido a (b) se añaden a lo más $\ell - i$ nuevos colores a $x^{(j)}$. En total cada vértice es incidente a lo más a ℓ colores diferentes.

3. Primero se observa que $n = \sum_{i>\ell} |V_i(K_n)| + \sum_{i=1}^{\ell} |V_i(K_n)|$. Así, por el Lema 3.2

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell - i)|V_i(K_n)| + \sum_{i=1}^{\ell} |V_i(K_n)| \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} (\ell - i + 1)|V_i(K_n)|. \end{aligned}$$

Luego, por definición de $\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|V(\mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)| &= \sum_{i=1}^{\ell}(R_{m,\ell-i} - 1)|V_{\mathrm{i}}(K_n)| \\
&\geq n + \sum_{i=1}^{\ell}(R_{m,\ell-i} - 1)|V_i(K_n)| - \sum_{i=1}^{\ell}(\ell - i + 1)|V_i(K_n)| \\
&= n + \sum_{i=1}^{\ell-1}(R_{m,\ell-i} - (\ell - i) - 2)|V_i(K_n)|.
\end{aligned}$$

□

3.2. Demostración del Teorema 1.2

En esta sección se presentará la demostración del Teorema 1.2, la cual resulta una consecuencia muy sencilla de los resultados anteriores.

Demostración del Teorema 1.2 Se razonará por contradicción. Se asume que K_n no contiene una copia monocromática de K_m y que el coloreo no es ℓ-exacto.

Como el coloreo no es ℓ-exacto, existe un índice $i < \ell$ tal que $V_i(K) \geq 1$. Luego, por el Lema 2.3 y dado que $m \geq \ell$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\ell-1}(R_{m,\ell-i} - (\ell - i) - 2)|V_i(K)| \geq m - 3.$$

Por el Lema 3.1 el grafo $\mathcal{S} := \mathcal{S}(K, f, \ell, m)$ no tiene ninguna copia monocromática de K_m y

$$|V(\mathcal{S})| \geq n + \sum_{i=1}^{\ell-1}(R_{m,\ell-i} - (\ell - i) - 2)|V_i(K)|.$$

Poniendo ambas consideraciones en conjunto, se tiene que

$$\begin{aligned}
|V(\mathcal{S})| &\geq n + m - 3 \\
&\geq R_{m,\ell}.
\end{aligned}$$

Donde la segunda desigualdad proviene de las suposiciones del Teorema. Sin embargo, esto contradice el hecho de que $\mathcal{S}$ es ℓ-local coloreado y no contiene ninguna copia monocromática de K_m.

□

Capítulo 4

Demostración del Teorema 1.6

El principal objetivo del presente capítulo es probar el Teorema 1.6, es decir la estabilidad de los coloreos locales en el problema de Turán.

4.1. Bosquejo de la Demostración

En la presente sección se entregarán las lineas generales de la demostración. La demostración completa y sus detalles se encuentran en la Sección 4.2

Para partir la demostración se fija $\Delta := \frac{m-1}{\ell} - \ell - 1$. Se toma G un grafo ℓ-promedio coloreado con $n \geq R_{m,\ell}$ vértices y tal que $e(G) \geq t_{R_{m,\ell}-1}(n) - \Delta$. Se asumirá que el coloreo en G no es ℓ-exacto, es decir, que existe al menos un vértice incidente a menos de ℓ colores. Luego, utilizando inducción en el número de vértices se probará que G debe contener una copia monocromática de K_m.

La demostración se separa en diferentes casos. En primer lugar se asume que existe un vértice v incidente al menos a ℓ colores distintos y con grado $d(v) \leq n - \frac{1}{R_{m,\ell}-1}n$ (el grado del grafo de Turán de n vértices y $R_{m,\ell} - 1$ clases). Luego, $G - v$ sigue siendo ℓ-promedio coloreado, y $e(G - v) \geq t_{R_{m,\ell}-1}(n - 1) - \Delta$, por lo que es posible aplicar la hipótesis de inducción a $G - v$. Con ello $G - v$ contiene una copia monocromática de K_m (y la demostración termina) o $G - v$ resulta ℓ-exacto coloreado. En este último caso, dado que G es ℓ-promedio coloreado, es posible ver que v y el resto de los vértices de G deben ser incidentes a exactamente ℓ colores.

De forma similar al caso visto en el párrafo anterior, se asume que existe un vértice u incidente a menos de ℓ colores que tiene grado bajo. En este caso $G-u$ no es necesariamente ℓ-promedio coloreado, por lo que se requiere retirar otros vértices $w_1, w_2, \ldots, w_k$ incidentes a muchos colores (sin restricciones en su grado) con el objetivo de asegurar que el grafo resultante sea ℓ-promedio coloreado. Si se asume que $d(u)$ es suficientemente bajo, entonces $G' = G - \{u, w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ tendrá más de $t_{R_{m,\ell}-1}(n - (k + 1))$ aristas (observe que esto es suficiente para aplicar la hipótesis de inducción). Más precisamente, será suficiente asumir $d(u) \leq n - \frac{d}{R_{m,\ell}-1}n$ para cierto valor de d. Por hipótesis de inducción, G' contiene una copia monocromática de K_m (en cuyo caso termina la demostración) o G' es ℓ-exacto coloreado (en particular ℓ-local). En este último caso se concluye que G' contiene una copia monocromática de K_m debido al Teorema 1.3.

Luego de considerar los casos anteriores, se asume que

(A) $\delta(G) > n - \frac{d}{R_{m,\ell}-1}n$; y

(B) para todo $v \in V(G)$ si $c(v) \geq \ell$, entonces $d(v) > n - \frac{1}{R_{m,\ell}-1}n$.

Para el caso en que se tienen los supuestos anteriores se toma un conjunto de vértices S tal que induce un grafo completo y cuyos vértices son incidentes a menos de ℓ colores. Se asume S maximal con respecto a aquellas propiedades. Es claro que $S \neq \emptyset$ dado que se asumió que G contiene al menos un vértice incidente a menos de ℓ colores. Por (A), S debe tener una gran vecindad común (lineal en el tamaño de G), llámese U a aquella vecindad común. Es importante mencionar que, como S es maximal, los vértices de U son incidentes a más de ℓ colores. Luego, por (B), el grado mínimo inducido en U (es decir, el grado mínimo del grafo inducido por U) es alto. Sabiendo ello, es posible utilizar el Teorema 2.2 para particionar los vértices de U en grafos completos, cuyo tamaño es muy cercano al número de Ramsey $R_{m,\ell}$. Supóngase que cada uno de estos grafos completos tienen un grado coloreado promedio alto, luego U también tendrá un grado coloreado promedio alto. Como U es de gran tamaño, esto contradice el hecho de que G era ℓ-promedio coloreado. Luego, se asume que al menos uno de los grafos completos de la partición tendrá grado coloreado promedio bajo. Llámese a este grafo completo K.

Así, el conjunto de vértices $V(K) \cup S$ induce un grafo completo con bajo grado coloreado promedio (los vértices en S son incidentes a menos de ℓ colores) y de tamaño cercano al número de Ramsey $R_{m,\ell}$. Si este grafo no contiene ninguna copia monocromática de K_m, entonces el grafo definido en la sección anterior, $\mathcal{S}(K, f, \ell, m)$, será ℓ-local coloreado con más vértices que el número de Ramsey local $R_{m,\ell}$ y sin copias monocromáticas de K_m. Esto último es evidentemente una contradicción, por lo que se concluye que existe una copia monocromática de K_m en $V(K) \cup S$ y por ello en G.

4.2. Demostración del Teorema 1.6

La demostración del Teorema 1.6 se divide en varios lemas, siguiendo el bosquejo explicado en la sección anterior.

El primer lema dice que si se toma un coloreo γ-promedio de un grafo completo de manera que no contenga una copia monocromática de K_m, entonces γ no puede ser demasiado bajo. Se presentará una cota inferior.

Lema 4.1 *Sea $3 \leq m < n$, $\ell \geq 2, \gamma \in \mathbb{R}$. Sea f un coloreo γ-promedio de K_n de manera que no contiene una copia monocromática de K_m. Entonces*

$$\gamma \geq \ell + 1 - \frac{R_{m,\ell} - \Lambda(m-3) - 1}{n},$$

donde $\Lambda := |\{v \in V(K_n) \mid c_f(v) < \ell\}|$.

Demostración Por el Lema 3.1 es posible construir un nuevo grafo completo ℓ-local coloreado, $\mathcal{S} := \mathcal{S}(K_n, f, \ell, m)$ sin ninguna copia monocromática de K_m y que cumple que

$$R_{m,\ell} - 1 \geq |V(\mathcal{S})| = \sum_{i=1}^{\ell} (R_{m,\ell-i} - 1)|V_i(K_n)|.$$

Luego,

$$|V_\ell(K_n)| \leq R_{m,\ell} - \sum_{i=1}^{\ell-1} (R_{m,\ell-i} - 1)|V_i(K_n)| - 1. \tag{4.1}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(K_n)} c(v) &\geq \sum_{i=1}^{\ell} i|V_i(K_n)| + (\ell+1)(n - \sum_{i=1}^{\ell} |V_i(K_n)|) \\ &\geq (\ell+1)n - \sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell + 1 - i)|V_i(K_n)| - |V_\ell(K_n)|. \end{aligned}$$

Luego, debido a (4.1), se sabe que

$$\begin{aligned} \rho(V(K_n)) &= \frac{1}{n} \sum_{v \in V(K_n)} c(v) \\ &\geq \ell + 1 + \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{\ell-1} (R_{m,\ell-i} - (\ell - i) - 2)|V_i(K_n)| - R_{m,\ell} + 1 \Big) \\ &\geq \ell + 1 - \frac{R_{m,\ell} - 1}{n} + \frac{(m-3)\sum_{i=1}^{\ell-1} |V_i(K_n)|}{n} \\ &\geq \ell + 1 - \frac{R_{m,\ell} - \Lambda(m-3) - 1}{n}, \end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad proviene del Lema 2.3.

□

El siguiente lema prueba el Teorema 1.6 para ciertos tipos de coloreos.

Lema 4.2 *Sean d, ℓ enteros positivos, $m \geq \ell \cdot d+1$ y sea G un grafo ℓ-promedio coloreado con $n > R_{m,\ell}$ vértices. Se asume que*

(A) $\delta(G) > n - \frac{d}{R_{m,\ell}-1}n$; y

(B) para todo $v \in V(G)$ si $c(v) \geq \ell$, entonces $d(v) > n - \frac{n}{R_{m,\ell}-1}$.

Entonces, G contiene una copia monocromática de K_m o el coloreo es ℓ-exacto.

Demostración Se asumirá que G no contiene una copia monocromática de K_m y en base a ello se probará que todos sus vértices son incidentes exactamente a ℓ colores. Primero, se toma un conjunto S maximal con respecto a las siguientes propiedades:

a) S es completo; y

b) para cada vértice v en S se tiene que $c(v) < \ell$.

Se define $U := \bigcap_{v \in S} N(v)$, y $k := |S|$. Dada la maximalidad de S:

$$\text{cada vértice } w \in U \text{ cumple que } c(w) \geq \ell. \tag{4.2}$$

Si $k = 0$, entonces no hay ningún vértice con grado coloreado menor que ℓ y con ello se deduce que el coloreo debe ser ℓ-exacto. Por otro lado, si $k \geq R_{m,\ell-1}$ entonces S tiene una copia monocromática de K_m (dado que el coloreo inducido en S es $(\ell-1)$-local). Por lo que de ahora en adelante se asumirá

$$1 \leq k \leq R_{m,\ell-1} - 1. \tag{4.3}$$

Primero se encontrará una cota para el tamaño de U. Se observa que por (A), para cada vértice $w \in S$ existen menos de $\frac{dn}{R_{m,\ell}-1}$ vértices no-vecinos. Por lo tanto, el número de vértices que poseen al menos un no-vecino en S es menor que

$$\frac{k \cdot d}{R_{m,\ell}-1}n.$$

Así, fijando $c_k := R_{m,\ell} - 1 - kd$, se tiene que

$$\begin{aligned} |U| &> n - \frac{k \cdot d}{R_{m,\ell}-1}n \\ &= \frac{c_k}{R_{m,\ell}-1}n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Se observa que, debido a (4.3) y considerando el Lema 2.4 (para $j_{Lem2.4} = 1$), se tiene que $c_k \geq R_{m,\ell} - 1 - (R_{m,\ell-1} - 1)d \geq R_{m,\ell} - 1 - (R_{m,\ell-1} - 1)(m-1) > 0$, sabiendo que $m > d$, por las suposiciones del Lema.

A continuación se acotará el grado mínimo de $G[U]$. Por (4.2) y por (B), los vértices de U tienen grado mayor que $\frac{R_{m,\ell-2}}{R_{m,\ell-1}}n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\delta(G[U]) &> |U| - \frac{n}{R_{m,\ell} - 1} \\
&> |U| - \frac{|U|}{c_k} \\
&= \frac{c_k - 1}{c_k}|U|,
\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad proviene de (4.4).

Luego, es posible aplicar el Teorema 2.2 para particionar los vértices de U en subgrafos completos de tamaño al menos c_k. Se fija uno de tales subgrafos completos, dígase $K := K_c$ con $c \geq c_k$. Aplicando el Lema 4.1 se sabe que la contribución promedio de los vértices de $K \cup S$ cumple que

$$\rho(K \cup S) \geq \ell + 1 - \frac{R_{m,\ell} - k(m-3) - 1}{c+k}.$$

Se requiere acotar la contribución promedio proveniente solo de los vértices del subgrafo K. Para ello, es posible utilizar la Observación 2.1.

$$\begin{aligned}
\rho(K) &\geq \frac{(\ell+1)(c+k) - R_{m,\ell} + k(m-3) + 1 - k \cdot \rho(S)}{c} \\
&\geq \ell + 1 - \frac{R_{m,\ell} - k(m-1) - 1}{c},
\end{aligned}$$

donde para segunda desigualdad se utilizó que $\rho(S) \leq \ell - 1$. Aplicando el Lema 2.4 y considerando (4.3), es posible deducir que la fracción en la última expresión es siempre mayor que cero. Por ello, se puede acotar la expresión anterior sin que dependa del subgrafo completo de la partición que se haya elegido.

$$\rho(K) \geq \ell + 1 - \frac{R_{m,\ell} - k(m-1) - 1}{c_k}. \tag{4.5}$$

Con ello, la cota anterior es válida para todo el conjunto U. Por lo tanto, recordando que por las condiciones del lema el G no tiene vértices aislados, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} c(v) &\geq \rho(U)\cdot |U| + n - |U| \\ &= n + (\rho(U)-1)|U| \\ &> n + \left(\ell - \frac{R_{m,\ell} - 1 - (m-1)k}{c_k}\right)\frac{c_k}{R_{m,\ell}-1}n \\ &= \ell n + \frac{(m-1-\ell\cdot d)k}{R_{m,\ell}-1}n \\ &\geq \ell n.\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se tiene debido a la suposición de que $m \geq \ell d + 1$. Sin embargo, esto contradice el hecho de que G es ℓ-promedio coloreado.

$\square$

El siguiente lema será fundamental para el paso inductivo en la demostración del Teorema 1.6. Se utilizarán para probar que si hay un vértice que cumple ciertas propiedades para el coloreo, es posible reducirse a un subgrafo de menor tamaño.

Lema 4.3 *Sean n, r, Δ enteros positivos, tales que $n > r$ y $d \geq \Delta + \ell + 1$. Sea G un grafo ℓ-promedio coloreado con n vértices y más de $t_r(n) - \Delta$ aristas. Si existe un vértice v en G tal que*

- *$d(v) \leq n - \frac{d}{r}n$; y*
- *$c(v) < \ell$,*

entonces, existe un subgrafo $G' \subseteq G$, con $n' = n - (\ell - c(v) + 1)$ vértices, más de $t_r(n')$ aristas, y tal que el coloreo inducido en G' también es ℓ-promedio coloreado.

Demostración Se observa primero que existen vértices $w_1, w_2, \ldots, w_{\ell - c(v)}$ tales que $G' := G - \{v, w_1, w_2, \ldots, w_{\ell-c(v)}\}$ sigue siendo ℓ-promedio coloreado (con el coloreo inducido por el coloreo original en G'). Para probar esto, se retira el vértice v y los $(\ell - c(v))$ vértices de grado coloreado más alto. Si alguno de ellos tiene grado coloreado menor que $\ell + 1$, entonces el grafo resultante G' es ℓ-local coloreado (y por ello, ℓ-promedio coloreado). Por otro lado, si todos ellos tienen grado coloreado al menos $\ell + 1$, entonces, para el grafo resultante G' se tiene que

$$\begin{aligned}\rho(V(G')) &\leq \frac{\ell n - c(v) - (\ell+1)(\ell - c(v))}{n - (\ell - c(v)) - 1} \\ &= \ell,\end{aligned}$$

lo cual implica que G' es ℓ-promedio coloreado.

Sabiendo que $d(v)$ es un número entero, es fácil ver que

$$\begin{aligned} d(v) &\leq n - \left\lceil d \cdot \frac{n}{r} \right\rceil \\ &< n - d \cdot \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil + d. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Luego, considerando (4.6), el Lema 2.5 y el hecho de que $\lceil \frac{n}{r} \rceil \geq 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} e(G') &> t_r(n) - \Delta - d(v) - (\ell - c(v))(n-1) \\ &\geq t_r(n) - (\ell - c(v) + 1)\left(n - \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil\right) + (d - \ell + c(v) - 1)\left(\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 1\right) - \Delta \\ &\geq t_r(n') + d - \ell + c(v) - 1 - \Delta \\ &\geq t_r(n') \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a las condiciones del lema.

□

El último lema que se probará antes de la demostración corresponde al caso base de la inducción. El próximo lema afirma justamente que el Teorema 1.6 se cumple para grafos con un número pequeño de vértices.

Lema 4.4 *Sean n, m, ℓ, Δ enteros positivos, tales que $m \geq 3$ y $2 \leq \ell \leq m < n$. Se asume además que $R_{m,\ell} \leq n \leq R_{m,\ell} + \ell$ y que $\Delta < \frac{m-2}{\ell} - \ell + 1$. Sea G un grafo ℓ-promedio coloreado con n vértices y más de $t_{R_{m,\ell}-1}(n) - \Delta$ aristas.*

Entonces G contiene una copia monocromática de K_m o el coloreo es ℓ-exacto.

Demostración Se asume que G no contiene ninguna copia monocromática de K_m y contiene un vértice v incidente a menos de ℓ colores.

Se define i de manera que $n = R_{m,\ell} + i$. Obsérvese que como $i \leq \ell < R_{m,\ell} - 1$ se tiene que $t_{R_{m,\ell}-1}(n) = \binom{n}{2} - (i+1)$. Lo anterior, debido a que en este caso el grafo de Turán tiene $(i+1)$ clases con dos vértices y el resto con sólo un vértice. Así $e(G) \geq \binom{n}{2} - (n - (R_{m,\ell} - \Delta))$, por lo que es posible aplicar el Lema 2.6 para concluir que v debe estar contenido en un grafo completo K con $R_{m,\ell} - \Delta$ vértices.

Como K no contiene ninguna copia monocromática de K_m, por el Lema 4.1, se tiene que

$$\rho(K) \geq \ell + 1 - \frac{R_{m,\ell} - \Lambda(m-3) - 1}{R_{m,\ell} - \Delta},$$

donde $\Lambda = |\{v \in V(K) \mid c(v) < \ell\}| \geq 1$.

Por lo tanto, considerando los $(i+\Delta)$ vértices en $G \setminus K$, debido a la Observación 2.1 se tiene que

$$\begin{aligned}\rho(G) &\geq \frac{(\ell+1)(R_{m,\ell}-\Delta)-R_{m,\ell}+\Lambda(m-3)+1+i+\Delta}{R_{m,\ell}+i}\\ &= \ell+\frac{\Lambda(m-3)-i(\ell-1)-\ell\Delta+1}{R_{m,\ell}+i}\\ &\geq \ell+\frac{m-2-\ell(\ell-1)-\ell\Delta}{R_{m,\ell}+i}\\ &> \ell,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se deduce del hecho de que $m-2-\ell(\ell-1)-\ell\Delta>0$, debido a las condiciones del lema.

□

Finalmente, a continuación se presenta la demostración del Teorema 1.6

Demostración del Teorema 1.6 Se fijan los valores $\Delta := \frac{m-1}{\ell}-\ell-1$ y $d := \ell+1+\Delta$

Se procederá por inducción en n. Los casos base serán $R_{m,\ell} \leq n \leq R_{m,\ell}+\ell$ y consisten exactamente en los casos probados en el Lema 4.4, notando que $\Delta < \frac{m-2}{\ell}-\ell+1$.

Para el paso inductivo, sea G un grafo ℓ-promedio coloreado con $n > R_{m,\ell}+\ell$ vértices y más de $t_{R_{m,\ell}-1}(n)-\Delta$ aristas. Se asume como hipótesis de inducción que el teorema es cierto para todo $n' \in \{n-1, n-2, \ldots, n-(\ell+1)\}$. Se separará la demostración en casos.

Primero se considera el caso en que existe v tal que $c(v) \geq \ell$ y $d(v) \leq n - \frac{n}{R_{m,\ell-1}}$. Por el Lema 2.5, se tiene que $e(G-v) > t_{R_{m,\ell}-1}(n) - d(v) - \Delta \geq t_{R_{m,\ell}-1}(n-1) - \Delta$. Como $G-v$ sigue siendo ℓ-promedio coloreado por hipótesis de inducción se tiene que $G-v$ contiene una copia monocromática de K_m (en cuyo caso termina la demostración) o el coloreo inducido en $G-v$ es ℓ-exacto. En el último caso, dado que al agregar v a $G-v$ los grados coloreados solo pueden aumentar, y como G es ℓ-promedio coloreado, se observa que v y el resto de los vértices son incidentes en G a aristas de exactamente ℓ colores diferentes.

En segundo lugar, se considera el caso en que existe un vértice u tal que $c(u) < \ell$ y $d(u) \leq n - \frac{d}{R_{m,\ell}-1}n$. Por el Lema 4.3 existe un subgrafo $G' \subseteq G$, ℓ-promedio coloreado con $n' = n-(\ell-c(u)+1)$ vértices y más de $t_{R_{m,\ell}-1}(n')$ aristas. Con ello es posible aplicar la hipótesis inductiva para concluir que el coloreo inducido en G' es ℓ-exacto o G' contiene una copia monocromática K_m (en cuyo caso termina la demostración). En el el primer caso, G' es, en particular, ℓ-local coloreado por lo que debido al Teorema 1.3 debe contener una copia monocromática de K_m.

Descartando los casos anteriores, se puede asumir que

1. si $c(v) < \ell$, entonces $d(v) > n - \frac{d}{R_{m,\ell-1}}n$; y

2. si $c(v) \geq \ell$, entonces $d(v) > n - \frac{n}{R_{m,\ell-1}}$.

Estas son justamente las suposiciones del Lema 4.2. Es fácil observar que por las definiciones de Δ y d se tiene que $m \geq d\ell + 1$. Con ello se concluye que G contiene una copia monocromática de K_m o el coloreo es ℓ-exacto. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

Existen una serie de posibles problemas asociados a los resultados estudiados. Se verán a continuación dos posibles extensiones, que parecen relativamente naturales a partir del trabajo realizado.

5.1. Estabilidad de los números de Ramsey para grafos no completos

Considerando el Teorema 1.2 es posible sospechar que existe una versión análoga para otras clases de grafos. En el presente trabajo se demostró que esto no puede ser cierto, incluso considerando coloreos 2-locales y 2-promedio.

En [7] se calculan los números de Ramsey 2-locales para ciclos. En particular, los autores prueban que $R(C_{2m}, 2\text{-}local) = R(C_{2m}, 2) = 3m - 1$. A continuación se presenta una construcción de un grafo completo con $3m - 2$ vértices, que es 2-promedio coloreado y no 2-local coloreado, sin contener ninguna copia monocromática de C_{2m}. Esto prueba que si $R(C_{2m}, 2\text{-}local) = R(C_{2m}, 2\text{-}promedio)$, este resultado no sería estable en el sentido de que los coloreos ℓ-locales no serían los únicos coloreos extremales posibles, como ocurre para los grafos completos.

Sea $m \geq 2$ y $1 \leq k \leq m$. Se considera la unión de los conjuntos de vértices A, B y C con $|A| = m - 1$, $|B| = 2m - k$ y $|C| = k - 1$. Se establece el siguiente coloreo de las aristas:

- Toda arista incidente con cualquier vértice de A es coloreado con el color a,
- las aristas internas de B con el color b,
- las aristas internas de C con el color c, y
- las aristas entre B y C con el color b.

Claramente $\rho(A) = 1$, $\rho(B) = 2$ y $\rho(C) = 3$. Luego, como $|C| = k - 1 \leq m - 1 = |A|$ este es un coloreo 2-promedio. Es directo probar que este grafo no contiene ninguna copia monocromática de C_{2m} y que tiene $3m - 2$ vértices. Esta es la construcción buscada.

Por otro lado, obsérvese que si se toma $k = 1$ ($C = \emptyset$), se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(V) &= \frac{2|B| + |A|}{3m - 2} \\ &= 2 - \frac{m - 1}{3m - 2} \\ &\leq \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Es decir que si $R(C_{2m}, 2\text{-}local) = R(C_{2m}, 2\text{-}promedio)$, no solo existirían coloreos extremales no ℓ-locales, sino que también con grado coloreado promedio más bajo que 2. En particular, se tiene que

$$R(C_{2m}, {}^{7}\!/\!{}_{4}\ \text{-}promedio) \geq 3m - 1 = R(C_{2m}, 2\text{-}local).$$

El resultado anterior parece proponer que la Pregunta 1.1 de Caro y Tuza [5] sobre si se tiene la igualdad $R(G, \ell\text{-}local) = R(G, \ell\text{-}promedio)$ sería negativa para $G = C_{2m}$ y $\ell = 2$. Hasta ahora no se han encontrado respuestas negativas a dicha pregunta, sin embargo, no es posible deducir dicho resultado directamente de la construcción anterior.

Utilizando construcciones muy similares es posible obtener resultados análogos para los grafos P_m y mK_2 en vez de C_{2m}.

5.2. Números de Turán coloreados para γ-promedio coloreos con $\gamma \in \mathbb{R}$

Como ya se ha mencionado anteriormente, la pregunta de Caro [4] (Pregunta 1.4) sobre los números de Turán promedio coloreados es si es cierto que

$$T(n, K_m, \gamma\text{-}promedio) = T(n, K_{R(K_m, \gamma\text{-}promedio)}, 1), \tag{5.1}$$

para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. El principal objetivo de esta sección es probar el Teorema 1.7, el cual afirma que para todo $\gamma \in \Gamma_m$ se cumple que

$$T(n, K_m, \gamma\text{-}mean) \geq T(n, K_{R(K_m, \gamma\text{-}mean)}, 1) + cn^2,$$

para cierta constante $c = c(m, \gamma)$. Lo anterior, recordando que Γ_m se define como

$$\Gamma_m := \{\gamma \in \mathbb{R} \mid \text{Existe } \delta > 0 \text{ tal que } R(K_m, (\gamma - \delta)\text{-}promedio) = R(K_m, \gamma\text{-}promedio)\}.$$

Antes de pasar a la demostración propiamente tal, se presenta una nueva definición útil para la actual sección. Para un $m \in \mathbb{N}$ fijo, se define la *función Ramsey promedio* como $R_m(\gamma) := R(K_m, \gamma\text{-}prom\text{edio})$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Claramente dicha función es creciente. Además, se dice que γ es un *m-salto* (o simplemente un *salto*) si $R_m(\gamma - \varepsilon) < R_m(\gamma)$ para todo $\varepsilon > 0$. En otras palabras, γ es un m-salto si y solo si $\gamma \notin \Gamma_m$. Como R_m es creciente, y $R_m(\gamma) \in \mathbb{N}$ mientras que $\gamma \in \mathbb{R}$, es fácil ver que existe a lo más una cantidad numerable de saltos.

Demostración del Teorema 1.7 Para probar el teorema se construye un grafo γ-promedio coloreado H con n vértices y más de $T(n, K_{R(K_m,\gamma\text{-}mean)}, 1) + cn^2$ aristas para cierta constante c, de manera que no contenga ninguna copia monocromática de K_m.

Como $\gamma \in \Gamma_m$, existe un $\delta > 0$ tal que $R_m(\gamma - \delta) = R_m(\gamma)$. Así, existe un grafo completo G, $(\gamma - \delta)$-promedio coloreado con $R_m(\gamma) - 1$ vértices y que no contiene ninguna copia monocromática de K_m. Considere sus vértices $v_1, v_2, \dots, v_{R_m(\gamma)-1}$ ordenados de manera que $c(v_1) \le c(v_2) \le \cdots \le c(v_{R_m(\gamma)-1})$. Sea T el grafo de Turán $T_{R_m(\gamma)-1}(n)$ con sus clases ordenadas de manera que $|V_1| \ge |V_2| \ge \cdots \ge |V_{R_m(\gamma)-1}|$. Se colorean las aristas de T como la expansión del grafo G, es decir, las aristas entre las clases V_i y V_j con el color utilizado en G entre los vértices v_i y v_j. Como un caso simple de la desigualdad de reordenamiento de Chebyshev [9, Sección 2.17], se deduce que el grafo T resulta $(\gamma-\delta)$-promedio coloreado debido a que G era $(\gamma - \delta)$-promedio coloreado.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{v\in T} c(v) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{R_m(\gamma)-1} c(v_i)|V_i| \\
&\le \frac{1}{R_m(\gamma)-1}\sum_{i=1}^{R_m(\gamma)-1} c(v_i) \\
&\le (\gamma - \delta).
\end{aligned}$$

Es fácil ver además que este coloreo no contiene ninguna copia monocromática de K_m. Obsérvese además que $e(T) = t_{R_m(\gamma)-1}(n) = T(n, K_{R_m(\gamma)}, 1)$.

Sea $\varepsilon \le \text{mín}\left\{\delta, \frac{1}{R_m(\gamma)-1}\right\}$ y tómese un conjunto S de $\lfloor \varepsilon n \rfloor$ vértices todos dentro de una misma clase de T (S no contiene aristas internas). A partir de T, se define H añadiendo $t_{m-1}(|S|)$ nuevas aristas en S utilizando para ellas un nuevo color, y de manera que no aparezcan copias monocromáticas de K_m. Dado que

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in H} c(v) &\le (\gamma - \delta)n + \lfloor \varepsilon n \rfloor \\
&\le \gamma n,
\end{aligned}$$

el coloreo resultante en H es un γ-promedio coloreo.

Además, finalmente, el número de aristas en H es

$$\begin{aligned}
e(H) &\geq T(n, K_{R_m(\gamma)}, 1) + t_{m-1}(\lfloor \varepsilon n \rfloor) \\
&= T(n, K_{R_m(\gamma)}, 1) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{1}{m-1}\right) n^2 + o(n^2) \\
&\geq T(n, K_{R_m(\gamma)}, 1) + cn^2.
\end{aligned}$$

□

Considerando lo anterior, vale la pena agregar lo siguiente. Fijando un $\varepsilon > 0$, considere cualquier $(\ell - \varepsilon)$-promedio coloreo del grafo completo $K_{R_m(\ell)-m+3}$. Dicho coloreo es también ℓ-promedio y evidentemente no puede ser ℓ-exacto. Luego, para $m, \ell \in \mathbb{N}$ tales que $m \geq 3$ y $m \geq \ell$, debido al Teorema 1.2, este coloreo debe contener una copia monocromática de K_m. Por ello para $m > 3$ se tiene que $R_m(\ell - \varepsilon) < R_m(\ell)$ para todo $\varepsilon > 0$. Es decir, se tiene que todo $\gamma = \ell \in \mathbb{N}$ es un m-salto para todo $m \geq \ell$ y $m > 3$.

En este contexto, vale la pena recordar la Pregunta 1.8 respecto de si Γ_m es el conjunto más grande posible de valores de $\gamma \in \mathbb{R}$ que no cumplen la igualdad (5.1). Lo anterior, es equivalente a plantear que (5.1) solo se cumple para los m-saltos. Hasta ahora para $\gamma \geq 2$ (y $m > 3$) los únicos saltos que se conocen son los valores enteros de γ, y se sabe que en esos casos (cuando $m \geq \gamma(\gamma + 1) + 1$) debido al Teorema 1.5, la igualdad (5.1) sí se satisface.

La Pregunta 1.8 es además una manera de reformular la pregunta original de Caro (Pregunta 1.4), descartando los casos en que sabemos que es negativa debido al Teorema 1.7.

Bibliografía

[1] Halina Bielak. Local and mean Ramsey numbers for some graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 10:23–26, 2001.

[2] Halina Bielak. Relations between 2-local and 2-mean Ramsey numbers for graphs. *Discrete Mathematics*, 307(7):827–831, 2007.

[3] Béla Bollobás, Alexandr V. Kostochka, and Richard H. Schelp. Local and mean Ramsey numbers for trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 79(1):100–103, 2000.

[4] Yair Caro. On several variations of the Turan and Ramsey numbers. *Journal of Graph Theory*, 16(3):257–266, 1992.

[5] Yair Caro and Zsolt Tuza. On k-local and k-mean colorings of graphs and hypergraphs. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 44(4):385–398, 1993.

[6] Reinhard Diestel. Graph theory. 2005. *Graduate Texts in Mathematics*, 173, 2016.

[7] András Gyárfás, Jeno Lehel, Richard H Schelp, and Zs Tuza. Ramsey numbers for local colorings. *Graphs and Combinatorics*, 3(1):267–277, 1987.

[8] András Hajnal and Endre Szemerédi. Proof of a conjecture of Erdős. *Combinatorial Theory and its Applications*, 2:601–623, 1970.

[9] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood, and George Pólya. *Inequalities.* Cambridge university press, 1952.

[10] Richard H Schelp. Local and mean k-Ramsey numbers for complete graphs. *Journal of Graph Theory*, 24(3):201–203, 1997.

[11] Vera T Sós. On extremal problems in graph theory. In *Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and their Application*, pages 407–410. Gordon and Breach NY, 1969.

[12] Miroslaw Truszczynski and Zsolt Tuza. Linear upper bounds for local Ramsey numbers. *Graphs and Combinatorics*, 3(1):67–73, 1987.

[13] Pál Turán. On an extremal problem in graph theory. *Mat. Fiz. Lapok*, 48(436-452):137, 1941.

[14] Raphael Yuster. Mean Ramsey–Turán numbers. *Journal of Graph Theory*, 53(2):126–134, 2006.