



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

ESTUDIO E IDENTIFICACIÓN DEL COMPORTAMIENTO Y EFICIENCIA DE UN
AMORTIGUADOR DE MASA SINTONIZADA, DE RIGIDEZ CÚBICA, PARA SU
UTILIZACIÓN EN ESTRUCTURAS CON INCERTIDUMBRE EN SU PERIODO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL

IGNACIO ANDRÉS LÓPEZ ZÚÑIGA

PROFESOR GUÍA:
RAFAEL RUIZ GARCÍA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
FABIÁN ROJAS BARRALES
FRANCISCO HERNÁNDEZ PRADO

SANTIAGO DE CHILE

2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
POR: IGNACIO ANDRÉS LÓPEZ ZÚÑIGA
FECHA: 2017
PROF. GUÍA: RAFAEL RUIZ GARCÍA

ESTUDIO E IDENTIFICACIÓN DEL COMPORTAMIENTO Y EFICIENCIA DE UN AMORTIGUADOR DE MASA SINTONIZADA, DE RIGIDEZ CÚBICA, PARA SU UTILIZACIÓN EN ESTRUCTURAS CON INCERTIDUMBRE EN SU PERIODO

Estudios recientes han demostrado que los Amortiguadores de Masa Sintonizada (AMS) pueden mejorar el desempeño de estructuras sometidas a excitaciones sísmicas. Sin embargo, la eficiencia del dispositivo depende de una correcta sintonización entre la estructura y el AMS. En sentido práctico, la sintonización se hace difícil ya que las estructuras poseen cierto grado de incertidumbre en sus características fundamentales, principalmente en el periodo y amortiguamiento.

La incorporación de características no lineales en los AMS, en especial sistemas con rigidez cúbica, han demostrado ser una posible vía para aumentar el nivel de respuesta vibratoria y de reducir la dependencia de la sintonización entre la estructura y el dispositivo. De esta manera, se propone un nuevo sistema no lineal que funcione como un AMS que trata de un péndulo que se desplaza en la dirección de movimiento de la estructura, más dos resortes en la dirección perpendicular que provocan una rigidez cúbica en el dispositivo, considerando en esta primera etapa que se trata de una estructura de un grado de libertad.

El objetivo del trabajo consiste en identificar su comportamiento dinámico y eficiencia a la hora de ser utilizado como dispositivo de control de vibraciones, específicamente: (i) se requiere estudiar los antecedentes necesarios para comprender las técnicas utilizadas en el análisis dinámico de sistemas no lineales, (ii) derivar las ecuaciones de movimiento del nuevo AMS y analizar su respuesta en frecuencia, (iii) acoplar el AMS a una estructura determinista y evaluar su desempeño, (iv) considerar posibles desintonizaciones en el sistema acoplado producto de las incertidumbres asociadas a la estructura, (v) aplicar los resultados del trabajo para proponer un dispositivo óptimo.

Casi lo logro... casi logro algo grande...

Cuando se está tan cerca tal vez tu vida significa algo...

Es que... Eso era algo que hice, ¡Que vino de MÍ!, ¡Que era parte de MÍ!

Lo único que he hecho que ha sido bueno

Randy Marsh

Agradecimientos

No me considero un tipo afectuoso, pero no quería entregar este trabajo sin agradecimientos, por lo que agradezco como primero a mis padres, quienes me formaron como soy, me volvieron el ñoño requerido para hacer este tipo de locura. Le agradezco a mi *novia* — 1 Valentina Mangili, por apoyarme en mis momentos más oscuros y por darme la motivación necesaria para terminar esta memoria, y amarme, eso es lo que más destaco. Le agradezco a cada uno de mis animales, los que están y los que lamentablemente ya no, han sido un pilar fundamental en mi vida, me enseñaron a querer y respetar, son mi motivación para tener un buen trabajo y poder tener un gran patio para que jueguen. A mi lela y a mi tata, que cada vez que no veía la luz me apoyaron para encontrar una salida simple.

También agradecer al profesor Rafael Ruiz por dejarme estudiar un tema que a pesar de que en un comienzo no le tenía nada de fe, resultó ser uno de los desafíos más grandes de mi corta existencia, y como me encantan los desafíos, me encantó. A los profesores de la comisión, que sin sus comentarios hubiese entregado cualquier tontera escrita a ciegas, soy un gran fan de utilizar el *sinónimo del sinónimo* así que me ayudaron a frenar mis instintos.

Agradecer a mis amigos (que son pocos) y compañeros (que son hartos), que hicieron de los tiempos de ocio un lugar agradable, siempre recordaré el rincón heterocurioso, donde casi todos los días de la semana nos juntábamos a discutir temas tan relevantes como recordar los mejores momentos de South Park, o los pelambres del departamento. Gracias también a los que les tocó sufrir mis mandatos como auxiliar, sé que soy pesado, pero tengo un corazoncito de abuela, igual reprobé a muy pocos.

Quiero agradecer a la serie animada que me ha acompañado gran parte de mi vida, South Park, que si leyeron la dedicatoria sabrán que es para mi una religión, trato de aprender de memoria cada capítulo gracioso, y si no al menos saber de qué trata. Agradecer a los miles de mangas que he leído, ya que fueron una gran excusa para estar despierto hasta las 4 am haciendo nada más que leer. Agradecer a los vinilos (y a toda la plata que he gastado en ellos) que puta que acompañan en las noches de estudio donde uno necesita concentración. Vida infinita a mi termoventilador que me dejó pasar de largo muchas noches para salvar algún ramo, o la entrega final de un proyecto.

Se acaba una gran etapa de la vida, una etapa que quizás no me di el tiempo de valorar, pero que sí disfruté a concho, siempre he tenido bastantes responsabilidades así que no creo que me enfrente ante esta nueva etapa tan en pelota, sin embargo igual siento algo de miedo y muchas ansias de saber qué me depara el destino, ojalá no sea como en Ante la Ley...

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo General	2
1.2.2. Objetivos Secundarios	2
1.3. Organización de la Memoria	2
2. Antecedentes	5
2.1. Amortiguador de masa sintonizada	5
2.1.1. Definición	5
2.1.2. Uso en régimen armónico	7
2.1.3. Uso ante distintas cargas	8
2.1.4. Variación en la configuración del AMS	9
2.1.5. Diseño del dispositivo	10
2.2. Incertidumbre en las estructuras	11
2.3. No linealidad	12
3. Amortiguador de Masa Sintonizada de rigidez cúbica propuesto	15
3.1. Principio de funcionamiento	15
3.2. Ecuación de Movimiento	17
3.2.1. Diagramas de Cuerpo Libre (DCL)	17
3.2.2. Geometría	18
3.2.3. Equilibrio	18
3.2.4. Fuerza restitutiva	18
3.3. Parametrización	20
3.4. Respuesta ante excitación Armónica y No-Armónica	21
3.4.1. Excitación Armónica	21
3.4.2. Excitación No-Armónica	25
4. AMS no lineal acoplado a estructura de un grado de libertad	27
4.1. Caracterización de la Dinámica	27
4.1.1. Planteamiento del problema	27
4.1.2. Equilibrio en AMS	28
4.1.3. Equilibrio en Estructura	29
4.2. Parametrización	30
5. Análisis del sistema acoplado a estructura conocida	31

5.1.	Optimización del AMS propuesto	31
5.2.	Respuesta ante excitación armónica	36
5.2.1.	Excitación Monofrecuencial Variable	36
5.2.2.	Excitación Monofrecuencial en Estructura con Degradación de su Rigidez	41
5.3.	Influencia de la masa del AMS en la Respuesta Armónica	42
5.3.1.	Excitación Monofrecuencial Variable	42
5.4.	Respuesta ante excitación no armónica	47
6.	Análisis de sensibilidad del sistema ante incertidumbres en la estructura	49
6.1.	Planteamiento del Problema	49
6.2.	Optimización	51
6.3.	Pareto	53
6.4.	Curvas de decisión	57
6.4.1.	Riesgo Neutral	57
6.4.1.1.	Optimización	57
6.4.1.2.	Excitación Monofrecuencial en Estructura con Degradación de su Rigidez	58
6.4.2.	Adverso al Riesgo	61
6.4.2.1.	Optimización	61
6.4.2.2.	Excitación Monofrecuencial en Estructura con Degradación de su Rigidez	62
7.	Aplicación de Resultados	65
7.1.	Parámetros del Problema	65
7.2.	Base de Datos	66
7.3.	Propuesta para determinar AMS según estructura	66
7.4.	Implementación Ilustrativa	67
	Conclusión	67
	Bibliografía	72

Índice de Tablas

5.1. Parámetros conocidos de la estructura.	31
5.2. Parámetros óptimos del AMS según no linealidad	32
6.1. Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 1\%$	57
6.2. Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 5\%$	57
6.3. Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 10\%$	57
6.4. Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 1\%$	61
6.5. Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 5\%$	61
6.6. Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 10\%$	61

Índice de Ilustraciones

1.1.	Diagrama de Flujo del estudio realizado.	4
2.1.	Bosquejo de la estructura con AMS acoplado. Fuente: Di Matteo et al. (2017). .	6
2.2.	Funcionamiento del AMS para excitación armónica. Fuente: Chopra (2001). .	7
2.3.	Espectro de Fourier para distintos registros. Fuente: Domizio et al. (2015). .	9
2.4.	Efecto de la relación de masas en la efectividad del dispositivo. Fuente: Domizio et al. (2015).	10
2.5.	Bosquejo de un modelo cualquiera.	11
2.6.	Diagrama de Fase y de Poincaré. Fuente: Thompson and Stewart (2002). . .	13
2.7.	No linealidad en un oscilador de Duffing rigidizado. Fuente: Thompson and Stewart (2002).	14
3.1.	Bosquejo 3D del AMS propuesto	15
3.2.	Bosquejo 2D del AMS propuesto	16
3.3.	DCL del dispositivo de la Figura 3.2	17
3.4.	Respuesta del dispositivo ante excitación armónica (1)	22
3.5.	Respuesta del dispositivo ante excitación armónica (2)	23
3.6.	Respuesta del dispositivo ante excitación no armónica	26
4.1.	Bosquejo del sistema acoplado	28
4.2.	DCL de la masa del AMS propuesto.	28
4.3.	DCL de la estructura principal.	29
5.1.	Optimización del AMS.	33
5.2.	Desintonización de la frecuencia natural de la estructura ω_s	34
5.3.	Incertidumbre del amortiguamiento de la estructura β_s	35
5.4.	Respuesta del sistema acoplado ante excitación con ancho de banda amplio (1)	37
5.5.	Respuesta del sistema acoplado ante excitación con ancho de banda amplio (2)	38
5.6.	Energía del sistema ante excitación con ancho de banda amplio (1)	39
5.7.	Energía del sistema ante excitación con ancho de banda amplio (2)	40
5.8.	Curva de decisión con la estructura conocida	41
5.9.	Respuesta del sistema con aumento de la relación de masas ante excitación con ancho de banda amplio (1)	43
5.10.	Respuesta del sistema con aumento de la relación de masas ante excitación con ancho de banda amplio (2)	44
5.11.	Energía del sistema con aumento de masa del dispositivo (1)	45
5.12.	Energía del sistema con aumento de masa del dispositivo (2)	46

5.13. Respuesta del sistema acoplado ante excitación no armónica	48
6.1. Respuesta del sistema acoplado con incertidumbre en la estructura.	52
6.2. Construcción de las curvas de Pareto	53
6.3. Curvas de Pareto (1)	55
6.4. Curvas de Pareto (2)	56
6.5. Curvas de decisión para riesgo neutral (1)	59
6.6. Curvas de decisión para riesgo neutral (2)	60
6.7. Curva de decisión para adversidad al riesgo (1)	63
6.8. Curva de decisión para adversidad al riesgo (2)	64

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La alta sismicidad que presenta Chile en ocasiones provoca que las estructuras sufran vibraciones indeseadas que dañan al sistema, lo que puede llevar a pérdidas económicas considerables sin hablar de las posibles pérdidas de vidas humanas. Es por ello que los principios de diseño estructural de Chile apuntan a asegurar la integridad del sistema ante sismos de intensidad severa, evitando el colapso de la estructura y resguardando la seguridad de los ocupantes, mientras que para intensidades menores el daño que se permite es poco. Entonces, existe una gran responsabilidad por parte de los ingenieros civiles por mejorar sus diseños.

Es recomendable agregar dispositivos que reduzcan las vibraciones severas al sistema estructural, siendo uno de los mecanismos más populares los sistemas pasivos, que no requieren de una fuente de energía externa como por ejemplo los disipadores friccionales, viscosos o histéricos, o bien los amortiguadores de masa sintonizada (Christopoulos et al. (2006); Soong and Dargush (1997)). Debido a los daños ocasionados por el sismo del 2010 de la zona centro-sur, en Chile los dispositivos de protección sísmica tomaron gran relevancia, en particular el uso de AMS se popularizó notablemente, contando con 12 edificios con este sistema acoplado en la actualidad. (Garrido and Sarrazín (2016)).

El AMS consiste en una masa secundaria acoplada a la estructura principal, que se modela por lo general como un sistema de un grado de libertad adosado mediante un resorte y un disipador. Este dispositivo actúa contrario al movimiento de la estructura, agregando fuerzas inerciales que ayudan a disminuir las vibraciones. Por lo tanto, puede reducir el efecto de diversas excitaciones laterales, siendo una de las más estudiadas el viento y los sismos. (Xu (1996); Di Matteo et al. (2017)). Sin embargo, el dispositivo necesita de una correcta sintonización con la frecuencia de la estructura, la que corresponde a su principal desventaja, ya que la estructura puede poseer incertidumbres en sus parámetros de diseño, ya sea en su rigidez y/o en su masa, lo que se traduce en una variabilidad de su periodo natural. Como posible solución al efecto de la desintonización se ha propuesto incorporar un dispositivo de rigidez no lineal (Alexander and Schilder (2008); Zhu et al. (2004)). A la fecha

no se han estudiado a fondo, por lo que falta entender el funcionamiento del dispositivo no lineal y proponer una estrategia de diseño. Es por ello que en este trabajo se presenta una configuración que permite obtener un término de rigidez cúbico en las ecuaciones dinámicas del problema, estudiando: (a) la parametrización de las expresiones, (b) su respuesta ante diferentes escenarios y (c) proponer un método de diseño del dispositivo. Cabe destacar que las expresiones dinámicas se desarrollan sólo en un sentido de análisis, ya que este estudio corresponde a la primera etapa del modelo propuesto con la finalidad de concluir si vale la pena profundizar la investigación del dispositivo.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Estudiar e identificar el comportamiento y eficiencia de un Amortiguador de Masa Sintonizada pendular de rigidez cúbica para su utilización en estructuras de un grado de libertad con incertidumbre en su periodo.

1.2.2. Objetivos Secundarios

En este estudio, los objetivos específicos principales que ayudarán a llevar a cabo el objetivo general son:

- Estudiar de la dinámica de sistemas no lineales
- Obtener de las ecuaciones de movimiento del AMS pendular propuesto
- Obtener la ecuación dinámica parametrizada y respuesta en frecuencia del AMS pendular propuesto
- Obtener de la ecuación de movimiento de AMS pendular acoplado a la estructura, y el estudio de la respuesta de ésta
- Estudiar el comportamiento del AMS sobre estructuras con incertidumbre en su periodo
- Proponer posibles metodologías de diseño del dispositivo

1.3. Organización de la Memoria

En el primer capítulo se introduce al lector al trabajo realizado, permitiendo así conocer la motivación, objetivos y la organización general de la memoria. Luego, en el siguiente capítulo se definen los conceptos necesarios para comprender el trabajo, describiendo: (a) los amortiguadores de masa sintonizados y sus distintos usos, (b) la variabilidad en las propiedades de las estructuras y su efecto en el diseño, (c) la no linealidad en la dinámica y cómo realizar su análisis.

En el tercer capítulo comienza el estudio del dispositivo como tal, donde se sigue la metodología presentada en la Figura 1.1. Primero se describe el AMS no lineal propuesto y a partir del equilibrio de fuerzas se obtiene la dinámica que gobierna al dispositivo. Se parametrizan las expresiones para así analizar la respuesta en frecuencia ante una excitación armónica, donde se nota el efecto de la sintonización entre excitación y AMS variando el grado de no linealidad, la amplitud de excitación y la razón de amortiguamiento. Se propone otra parametrización de las expresiones, notando así un nuevo factor que controla el comportamiento no lineal. Finalmente, se incluye un breve estudio de la respuesta y el valor cuadrático medio del dispositivo ante excitaciones no armónicas.

En el cuarto y quinto capítulo se desarrolla la dinámica del AMS propuesto en el capítulo anterior acoplado a una estructura simple de un grado de libertad, donde se obtiene el sistema de ecuaciones que gobierna la respuesta del sistema, parametrizándolo para proseguir con su optimización. Luego, conociendo los parámetros que definen a la estructura, es decir, su periodo, masa y amortiguación, se estudia la respuesta del sistema acoplado: (a) optimizando los parámetros del AMS que generan la mayor reducción de la respuesta, (b) analizando qué ocurre cuando se excita justo en resonancia, (c) cuando se excita en una vecindad a ésta, y (d) observar el efecto que tiene en la respuesta el considerar desintonizaciones de la estructura. Por último, se da un breve acercamiento al estudio de este sistema ante excitaciones no armónicas.

En el sexto capítulo se optimiza la respuesta del sistema acoplado pero ahora considerando incertidumbres en la frecuencia de la estructura, para lo cual se encuentran: (a) los parámetros óptimos del AMS, (b) se arman curvas de Pareto para optimizar la media y el coeficiente de variación de la reducción de la respuesta, (c) adoptando dos posiciones frente al riesgo se escoge el AMS óptimo, notando para ello la respuesta ante una excitación monofrecuencial en resonancia con la frecuencia media de la estructura. Luego, en el séptimo capítulo según todo lo estudiado es que se presenta de manera breve como utilizar los resultados obtenidos, donde se crea una base de datos que presenta combinaciones de las variables físicas que controlan el diseño del AMS. Finalmente, se presenta una ejemplificación de cómo se utiliza esta metodología de diseño y la base de datos.

En el capítulo final se analizan los resultados de cada sección por separado, y luego se relacionan entre ellos para establecer un cierre del trabajo. Por último, se hace una breve reseña a las posibles mejoras o estudios posteriores que se podrían realizar.

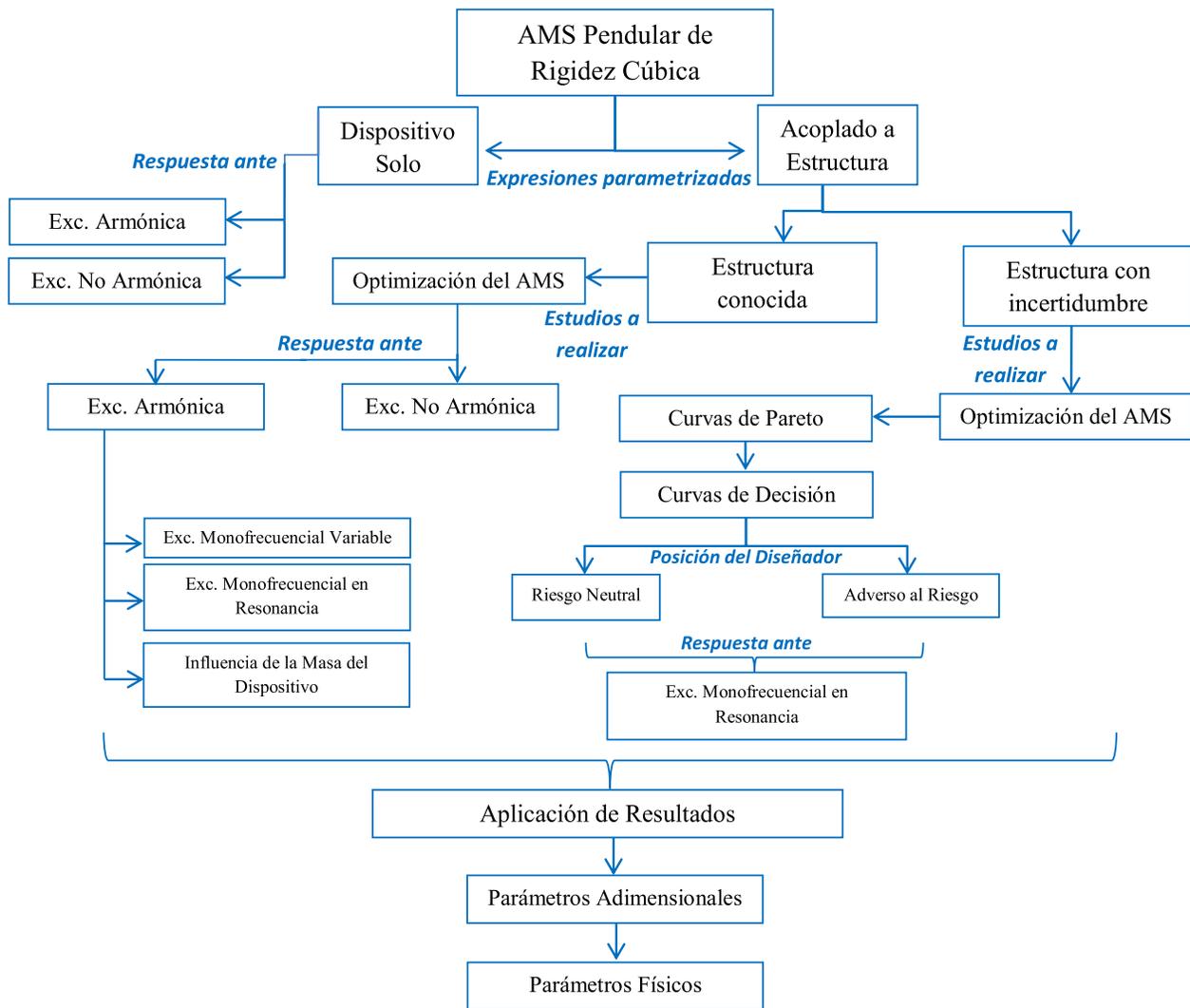


Figura 1.1: Diagrama de Flujo del estudio realizado.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Amortiguador de masa sintonizada

2.1.1. Definición

Las estructuras en la ingeniería civil se encuentran sometidas a distintos tipos de vibraciones que eventualmente pueden provocar daños en el sistema, por lo que los ingenieros civiles se han visto en la necesidad de investigar métodos para reducir las, permitiendo así prevenir daños de la estructura y de sus elementos no estructurales, al igual que disminuir la percepción de la vibración en las personas. Las vibraciones más comunes a las que son sometidas las estructuras son del tipo sísmicas o provenientes del viento.

Los dispositivos utilizados en la reducción de vibraciones pueden ser *pasivos* que no necesitan una fuente de energía externa ya que utilizan la misma energía de la estructura a la que están acopladas para disipar energía, principalmente en forma de calor (Housner et al. (1997)), o bien *activos*, donde se necesitan sensores de movimiento, un sistema central de control y procesamiento de datos, y actuadores dinámicos que modifican las características del dispositivo según la excitación para aplicar fuerzas de control sobre la estructura en tiempo real y disipar energía, o bien *semi-activos*, que difieren de los sistemas activos en que no aplican la fuerza de control sobre la estructura, sino que modifican las propiedades mecánicas de los dispositivos disipadores de energía. En particular, los Amortiguadores de Masa Sintonizada, o AMS, son comúnmente diseñados como dispositivos pasivos.

Este dispositivo consiste en una masa conectada a una estructura principal mediante un resorte, donde ocurre transferencia de energía entre ellos debido al desplazamiento relativo, que aplica fuerzas inerciales contrarias al movimiento de la estructura, Figura 2.1. Esta transferencia es máxima cuando la frecuencia de oscilación del AMS es cercana a alguna frecuencia del sistema principal. (Domizio et al. (2015)). Para estructuras altas el modo de vibración predominante es el primero, y es por eso que el AMS por lo general se sintoniza a este. La adición de disipadores viscosos en paralelo a los resortes fue estudiado por Den Hartog (1956) y corroboró que permite aumentar el ancho de banda en que el dispositivo es efectivo.

La reducción de la respuesta corresponde a la razón entre la respuesta de la estructura con el dispositivo, sobre la respuesta de la estructura sola.

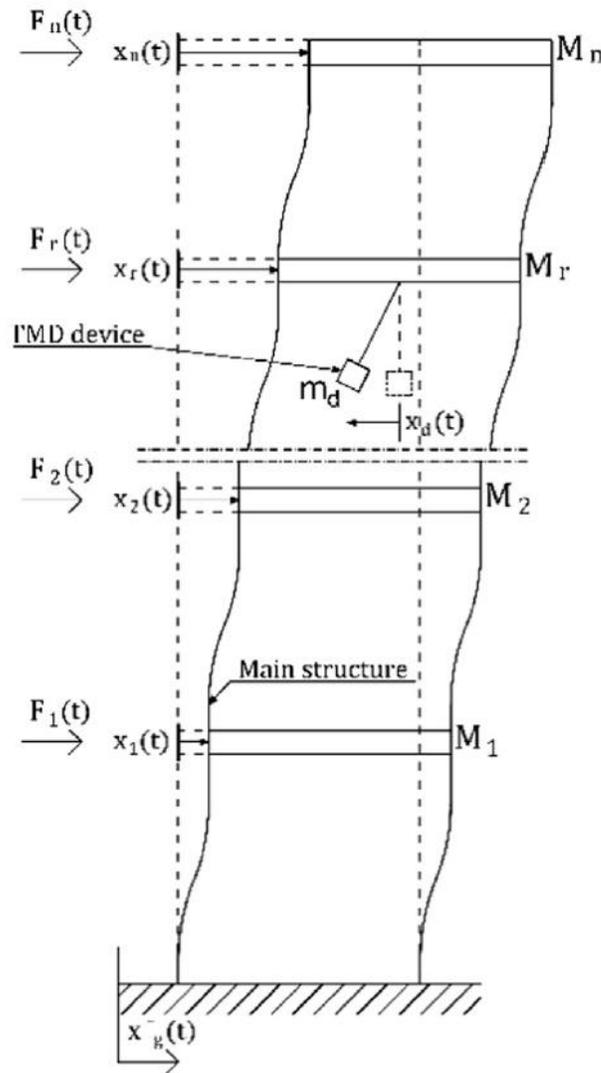


Figura 2.1: Bosquejo de la estructura con AMS acoplado, ante excitación basal. Fuente: Di Matteo et al. (2017).

Es común trabajar con las expresiones dinámicas del problema parametrizadas ya que así las variables que aparecen son genéricas. El AMS agrega un grado de libertad extra en el análisis dinámico de la estructura, es por ello que al analizar la respuesta del sistema acoplado aparecen los dos peaks observados en la Figura 2.2. Lo que indica que ahora el sistema posee dos periodos fundamentales, uno por cada grado de libertad, donde se nota que el periodo fundamental del sistema acoplado es más grande que el de la estructura sola.(Miranda (2005);Domizio et al. (2015);Chopra (2001)).

Un ejemplo del uso de AMS en estructuras es el edificio Taipei 101 de China que cuenta con un disipador de masa sintonizada del tipo pendular para controlar vibraciones provenientes del viento, con una relación de masa entre el dispositivo y la estructura principal de 0,26 %, el que además puede modificar la longitud de sus cables para sintonizar al periodo de vibración

de la estructura. En Chile, el interés en la protección sísmica ha ido en aumento en los últimos años luego del terremoto del 2010 de la zona Centro-Sur del país, donde los daños ocurridos preocuparon a gran parte de la población. En particular, actualmente existen 12 edificios que poseen AMS acoplados, y se espera que una vez los dispositivos se encuentren normados su popularidad aumente. (Garrido and Sarrazín (2016)).

2.1.2. Uso en régimen armónico

Se definen los factores de la ecuación dinámica parametrizada general acoplada entre dispositivo y estructura, Ecuación (2.1). Además, la excitación del sistema se considera como armónica y monofrecuencial, tal como se ve en la Figura 2.2, por lo que para ser definida necesita de una amplitud p_0 y una frecuencia ω .

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2^* = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1} \quad (2.1)$$

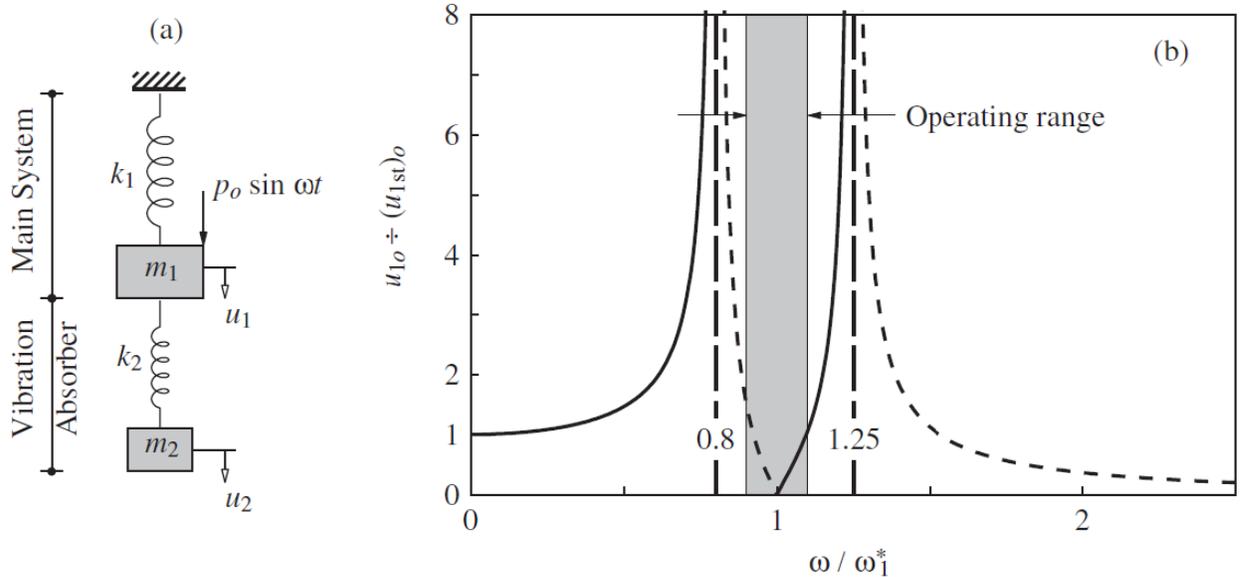


Figura 2.2: (a) Dispositivo para controlar vibraciones; (b) Amplitud de la respuesta contra la frecuencia de excitación (curva punteada indica u_{1o} negativo o con fase opuesta a la excitación); $\mu = 0,2$ y $\omega_1^* = \omega_2^*$. Fuente: Chopra (2001).

En la Figura 2.2 se propone que el AMS se encuentra sintonizado con la estructura principal y es por ello que en la resonancia, es decir $\omega/\omega_1^* = 1$, se cumple que la respuesta disminuye significativamente, pero se puede notar que la disminución de la respuesta es sólo efectiva en un rango acotado, denotado por *operating range*, y que corresponde a una desintonización aproximada del $\pm 20\%$ de la frecuencia de la estructura principal. Por lo tanto, puede ocurrir que el AMS afecte negativamente la respuesta, agregando la energía disipada nuevamente al sistema, incrementando así la vibración de la estructura principal fuera de este rango. (Domizio et al. (2015)).

2.1.3. Uso ante distintas cargas

Las estructuras flexibles se encuentran por lo general más afectas a las cargas de viento. Se puede modelar como una excitación armónica que dependiendo de su velocidad podría considerarse como un proceso aleatorio estacionario, en la que su espectro es de la forma (Xu (1996)):

$$S_{F_1}(n) = \frac{(k_1)^2 S_{y_1}(n)}{|H(n)|^2} \quad (2.2)$$

En la expresión (2.2), $|H(n)|$ es la función de transferencia del sistema, k_1 la rigidez del sistema principal, y $S_{y_1}(n)$ el espectro de desplazamiento del piso superior. En el estudio realizado por Xu (1996) se corrobora que la respuesta se reduce un 40 % aproximadamente con un dispositivo pasivo óptimo ante una excitación de viento, considerando una sintonización casi perfecta entre estructura y AMS, para lo que se necesita también que la excitación entre en resonancia con la estructura. Sin embargo, también se demostró que los dispositivos activos generan una mayor reducción de la respuesta y que además como poseen mecanismos de control de sus propiedades aseguran tener un nivel de reducción mínimo.

Otra excitación importante a la que están sometidas las estructuras son las cargas sísmicas, la que por naturaleza se comportan como no armónicas y excitan un rango de frecuencias que depende del evento. Es por ello que la modelación de estas cargas se hace considerando que la excitación es de la forma $P(t) = -m_s \ddot{u}_g$, donde se necesitan dos parámetros, la masa del sistema excitado m_s , y la aceleración basal \ddot{u}_g que viene del registro sísmico considerado.

Para este caso la reducción de la respuesta lograda depende tanto del ancho de banda de frecuencias que excita el sismo como de la frecuencia modal de la estructura, donde se concluye que considerar un AMS como sistema de disipación es sólo efectivo cuando la frecuencia dominante del sismo es cercana al modo fundamental de la estructura, tal como muestra la Figura 2.3, en la que se estudia la efectividad de utilizar dos AMS en la estructura principal, cada uno sintonizado a un modo de vibrar distinto.

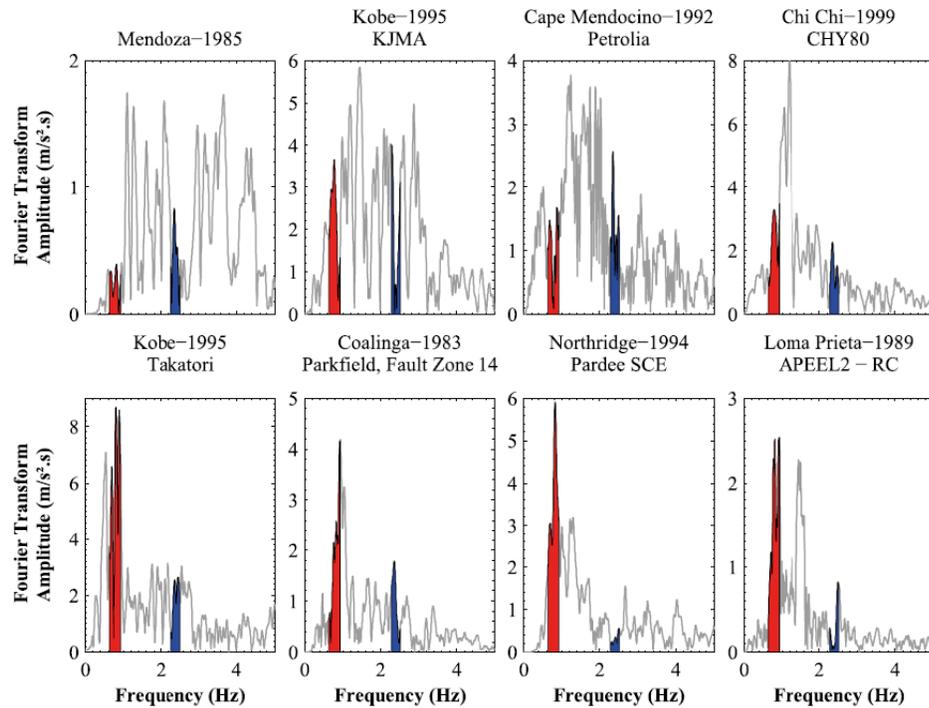


Figura 2.3: Espectro de Fourier para distintos registros, donde se estudia utilizar dos AMS en conjunto, en rojo aparece el ancho de banda del primer AMS y en azul el ancho de banda del segundo dispositivo. Fuente: Domizio et al. (2015).

2.1.4. Variación en la configuración del AMS

Aumentar la relación de masas del dispositivo aumenta la reducción de la respuesta tal como muestra la Figura 2.4, además de observar que el ancho de banda B en que el dispositivo es útil, también aumenta. Sin embargo, la masa del dispositivo no se puede aumentar deliberadamente ya que se está limitado por la capacidad de la estructura principal de soportar al AMS. Sin embargo, el sistema acoplado sigue siendo igual de sensible a la sintonización. (Rojas and Boroschek (2015)).

Si se acoplan dos AMS a la estructura principal, cada uno sintonizado a distintos modos de vibrar, se logra la misma reducción en el primer lóbulo de la respuesta en frecuencia pero además el segundo AMS genera reducción en el segundo lóbulo de la respuesta en frecuencia, por lo que los AMS no se interfieren en su efectividad si es que están sintonizados correctamente. Sin embargo, se concluye que a pesar de lograr reducción en ambos modos de vibrar, ésta no es tan grande en comparación a utilizar un solo AMS. (Domizio et al. (2015)).

La efectividad en la reducción de la respuesta se puede mejorar con dispositivos activos y semi activos de disipación, ya que estos sistemas no son sensibles a pequeñas variaciones de las características estructurales, sin embargo necesitan energía externa y un monitoreo en tiempo real de las perturbaciones del sistema para su funcionamiento, lo que presenta una gran desventaja al momento de considerarlos. (Xu (1996)).

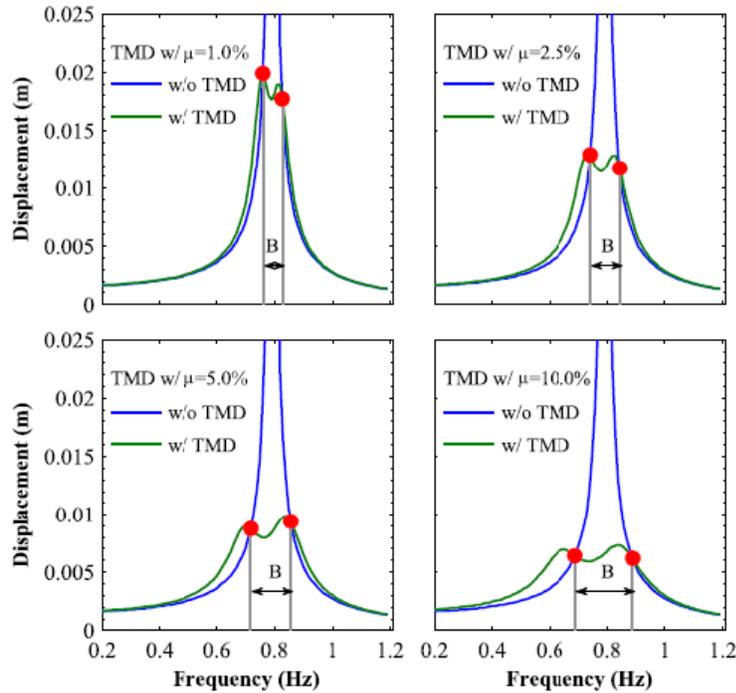


Figura 2.4: Efecto de la relación de masas en la efectividad del dispositivo. Fuente: Domizio et al. (2015).

2.1.5. Diseño del dispositivo

La mayoría de los métodos de diseño de AMS proponen parametrizar la ecuación dinámica que gobierna al sistema, lo que permite pasar del espacio físico al espacio paramétrico, en el que el espacio físico contiene las variables que permiten diseñar y construir el dispositivo, mientras que el espacio paramétrico contiene variables por lo general adimensionales que son función de los parámetros físicos, que permiten analizar el problema de manera genérica y que conllevan a que existan distintas configuraciones físicas de los parámetros que logren la misma respuesta.

Se deben encontrar los parámetros que maximicen el desempeño del dispositivo optimizando una función objetivo propuesta por el diseñador a cargo, la que podría ser, por ejemplo, reducir los desplazamientos, la aceleración, los daños, y/o la energía del sistema.

Para la optimización de la función objetivo definida se pueden utilizar *Genetics Algorithms (GAs)*, los que buscan la respuesta óptima del problema en una cierta vecindad de valores de los parámetros de entrada, donde la selección de estos puntos es diversa y depende del autor, pero que por lo general son escogidos de manera aleatoria bajo ciertas condiciones de borde. (Pourzeynali et al. (2013)).

Cuando la función objetivo contiene más de una variable para optimizar, podría darse el caso que mejorar una de las variables provoque que otra empeore. Es por esto que en dicho caso se debe hacer una optimización multiobjetivo, en donde los valores óptimos hallados se llaman *puntos de Pareto*, los que presentan la mejor combinación de las variables de entrada.

Sin embargo la gran pregunta ahora es sobre qué punto dentro de este conjunto de soluciones paretos se trabaja, lo que depende principalmente de la actitud frente al riesgo que adopte el diseñador, proceso explicado con más profundidad en el Capítulo 6. Pero, por lo general los diseñadores no están interesados en encontrar los puntos de Pareto ya que esta respuesta incurre en un gran gasto computacional y no es robusta, por lo que es sensible ante cambios en los parámetros de entrada.

Una vez escogido el óptimo a trabajar se presenta la siguiente complejidad en el diseño, y es que existen muchas combinaciones de los parámetros físicos que encuentran la misma relación paramétrica optimizada, por lo que para volver al espacio físico se puede utilizar el Metamodelo de Kriging, el que consiste de manera simplificada en aproximar la salida del modelo mediante puntos de soporte creados por *Latin Hypercube*, los que corresponden justamente a las combinaciones de parámetros físicos que obtienen la respuesta óptima en el espacio paramétrico. El Latyn Hypercube, a grandes rasgos, permite crear muestras que están aleatoriamente distribuidas en el hiperespacio, de dimensión igual a la cantidad de variables estudiadas, pero que se encuentran a la misma distancia unas de otras. (Ruiz et al. (2016)).

2.2. Incertidumbre en las estructuras

La incertidumbre se define como la falta de información en la predicción debido tanto a las limitaciones inherentes de la predictibilidad, o bien debido a la falta de herramientas predictivas, es por ello que se define el valor real de la cantidad a predecir como Y , y el modelo predictivo como $f(\theta, u)$. Luego, la incertidumbre corresponde a la distribución de los errores predictivos e , descrito como:

$$e = Y - f(\theta, u) \quad (2.3)$$

Por lo tanto, debido a que Y es conocido o determinista, existen al menos tres fuentes de incertidumbre: (a) el modelo f , (b) los parámetros del modelo θ y (c) las entradas del modelo u . Se evalúa la incertidumbre asociada a todos los sistemas nombrados para así identificar la mayor fuente de variabilidad en la salida, donde el modelo de la Figura 2.5 se puede interpretar como una caja negra que transforma los valores u en z .

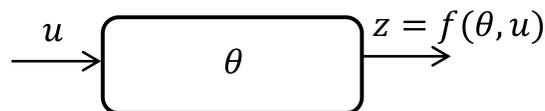


Figura 2.5: Bosquejo de un modelo cualquiera.

Por lo general, se considera que el modelo f es determinista, por lo que la incertidumbre se asocia a los parámetros del modelo θ cuyos valores característicos se pueden ubicar en la literatura y pueden ser calibrados asumiendo una distribución de probabilidad conocida, y a los parámetros de entrada u los que se definirán según el estudio a realizar y lo que se desea obtener. (Wallach and Thorburn (2017)).

Para propagar la incertidumbre se suele utilizar la simulación de Monte Carlo, pero que a pesar de su sencillez en la formulación matemática incurre en gastos computacionales considerables, ya que se generan muestras aleatorias de las variables que se asumen que poseen una densidad de probabilidad definida, luego se simula el sistema con cada elemento de la variable aleatoria para así encontrar la probabilidad de la respuesta, probando para ello N muestras aleatorias, donde mientras más grande sea N más ajustada será la respuesta final. (Pourzeynali et al. (2013); MacAulay and Giusca (2016)).

Se debe asegurar la independencia de las variables a analizar, debido a que sino la probabilidad condicionada empieza a jugar un rol fundamental. Esto se puede ensayar vía Monte Carlo estudiando la correlación cruzada de dos variables y notando la dispersión que generan en conjunto comparado a la que provocan por separado, así se podrá asegurar de estudiar la propagación de error de la variable que más afecta al sistema. (MacAulay and Giusca (2016)).

La incertidumbre es considerada por las normas de diseño estructural a lo largo del mundo a través de las combinaciones de cargas y los factores de resistencia, donde implícitamente aparece un factor de seguridad asociado. Por lo general en las estructuras que se comportan linealmente las incertidumbres se encuentran asociadas a la frecuencia natural ω_s y a la razón de amortiguamiento β_s , los que se asumen en casi todos los casos que distribuyen como *normal* o *lognormal*. (Kwon et al. (2015)).

2.3. No linealidad

En las zonas sísmicas por lo general se permite incursionar en los rangos inelásticos y no lineales de las estructuras, mejorando significativamente el desempeño estructural al aceptar el daño de estas. Los sistemas dinámicos no lineales han sido bastante estudiados, siendo el fundador Henri Poincaré (1854 - 1912) que motivado por la mecánica de los cuerpos celestes concentró sus estudios en sistemas disipativos. (Thompson and Stewart (2002)). Realizando para ello *Diagramas de Fase*, que corresponden a relacionar el desplazamiento y velocidad de una partícula, y ver como evoluciona esta relación en el tiempo, Figura 2.6. La dinámica de sistemas no lineales ante una excitación armónica se escribe, por lo general, como:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + F(x) = p_0 \cos(\Omega t) \quad (2.4)$$

En la Ecuación (2.4) el amortiguamiento cumple con $\delta \geq 0$, donde dicho sistema puede llevar al *caos*. La fuerza restitutiva del sistema F es la más interesante de analizar, ya que depende de esta si el sistema es estable, o bien si lleva a soluciones caóticas. (Kanamaru (2008)). Esta fuerza restitutiva en la ingeniería civil por lo general se modela como una histéresis de comportamiento no lineal, la que representa la carga que soporta un sistema debido a una deformación impuesta. En este trabajo esta fuerza restitutiva se considera con un comportamiento descrito por el oscilador de Duffing, donde se cumple que:

$$F = \beta x + \alpha x^3 \quad (2.5)$$

En el que si $\alpha > 0$ el sistema se rigidiza, mientras que para el caso contrario se flexibiliza. Distintas configuraciones del oscilador de Duffing han sido estudiadas en el tiempo (Guckenheimer and Holmes (2013);Thompson and Stewart (2002);Parker and Chua (2012);Ueda (1979)), donde se ha concluido que la respuesta ante una excitación armónica del sistema es bastante sensible a la amplitud de la excitación considerada, la frecuencia de la forzante y a las condiciones iniciales, ya que son estas las que determinan si se tiene un régimen periódico o uno caótico.

Al considerar no linealidad y/o una forzante se hace necesario modificar el diagrama de fase al de Poincaré, que analiza el mismo plano de desplazamiento y velocidad, pero considera la respuesta por cada ciclo de oscilación, por lo tanto si el sistema fuese lineal y forzado, el diagrama de Poincaré muestra sólo un punto, mientras que en un sistema no lineal y forzado resulta en curvas mucho más interesantes, como las observadas en la Figura 2.6, donde el parámetro k es el que acompaña a la velocidad y el B es la amplitud de la excitación armónica de la Ecuación (2.4).

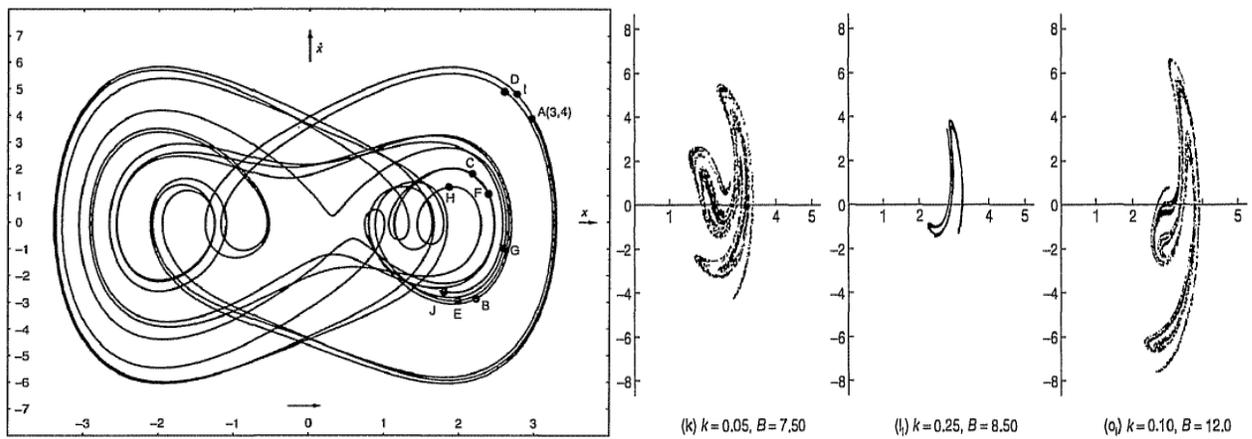


Figura 2.6: Diagrama de Fase (izq) y Diagrama de Poincaré (der). Fuente: Thompson and Stewart (2002).

Para diferenciar entre un sistema caótico, periódico o de equilibrio es que se analiza el atractor, que corresponde al lugar geométrico donde converge el diagrama de fase en su respuesta permanente, donde un sistema estable posee como atractor un punto del espacio, mientras que los sistemas periódicos poseen como atractor un ciclo del diagrama de fase, mientras que por último los sistemas caóticos poseen como atractor una combinación de ambas formas del diagrama de fase. (Thompson and Stewart (2002)).

Agregar no linealidad en los AMS permite aumentar el rango de frecuencias donde estos son útiles, además de que no se provocan amplificaciones de la respuesta fuera de este. Por otro lado, el AMS no lineal necesita una menor cantidad de masa para operar al mismo nivel que el lineal. Además, es mucho más efectivo para reducir las vibraciones transientes de alta amplitud. Sin embargo, comparando el dispositivo óptimo lineal con el no lineal, el nivel de respuesta ofrecido por el AMS lineal es casi siempre mejor que el dispositivo no lineal. El nivel de respuesta está casi siempre asociado al desplazamiento máximo logrado, que corresponde por lo general al caso más desfavorable a estudiar. (Alexander and Schilder (2008);Farshi and Assadi (2011)).

Considerar no linealidad en la disipación y/o en la rigidez del dispositivo provoca que la respuesta del sistema se reduzca considerablemente si se ajustan apropiadamente los parámetros del AMS. Por otro lado, la reducción de la respuesta va a depender de la razón entre la frecuencias de excitación y la de la estructura, donde para razones menores a 1 se cumple que incrementar la no linealidad ya sea de la estructura o del dispositivo, provoca un aumento de la reducción de las vibraciones, mientras que si la razón es superior a 1 sólo se logran reducir las vibraciones para un rango acotado de configuraciones. (Zhu et al. (2004)).

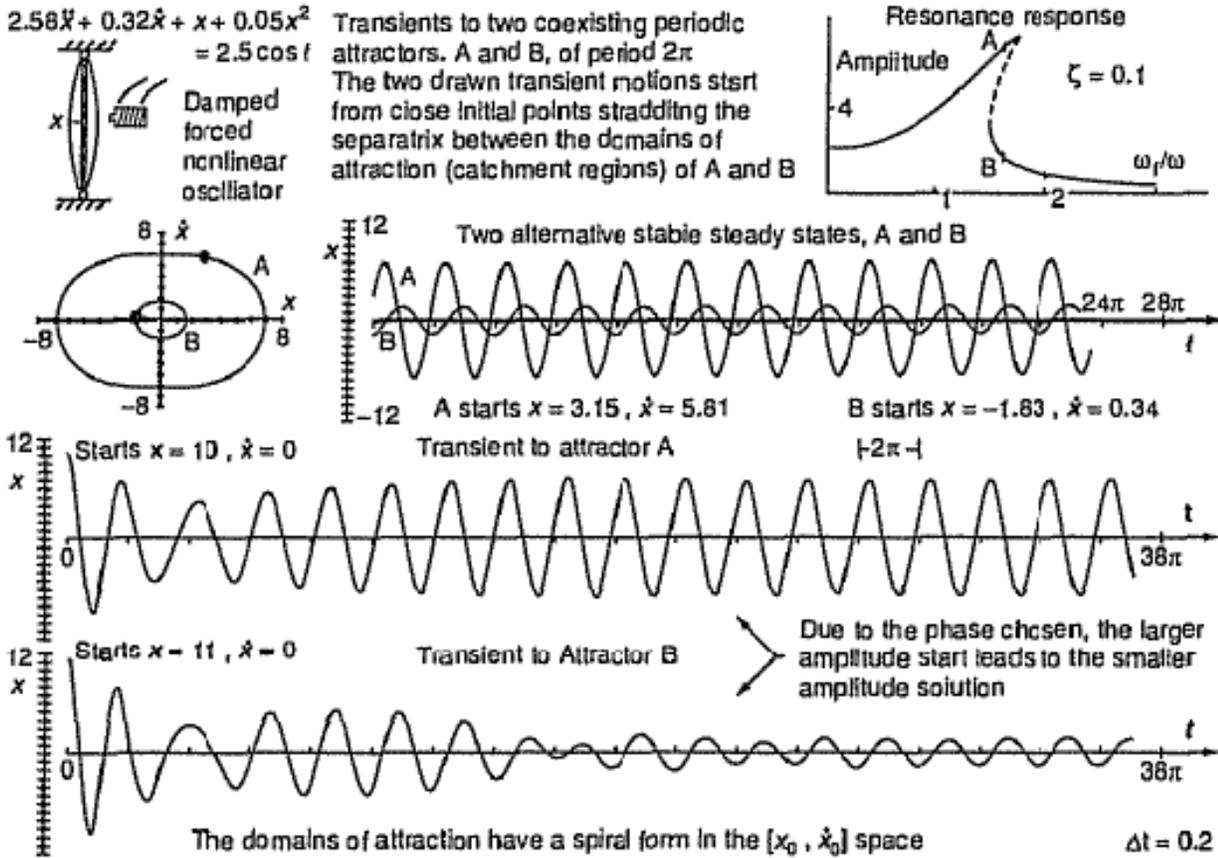


Figura 2.7: No linealidad en un oscilador de Duffing rigidizado. Fuente: Thompson and Stewart (2002).

Capítulo 3

Amortiguador de Masa Sintonizada de rigidez cúbica propuesto

3.1. Principio de funcionamiento

El amortiguador de masa sintonizada propuesto es del tipo pendular, con una masa m sostenida por un cable de largo L , el que sólo se estudia en una dirección, tal como muestra la Figura 3.1, donde en la dirección de movimiento se encuentran dos disipadores viscosos con constante de disipación $C/2$ cada uno y están asociados al efecto lineal, mientras que perpendicular al sentido de movimiento se encuentran dos resortes de rigidez k y largo natural L_0 que provocan la rigidez cúbica.

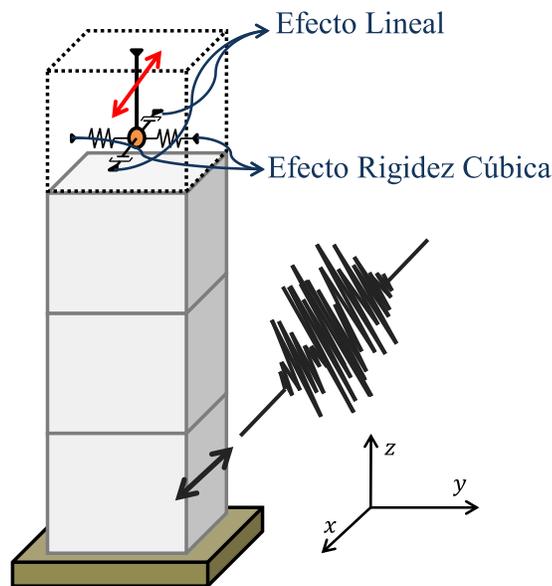


Figura 3.1: Bosquejo del AMS propuesto en 3D sobre estructura simple, con una excitación cualquiera actuando sólo en la dirección x .

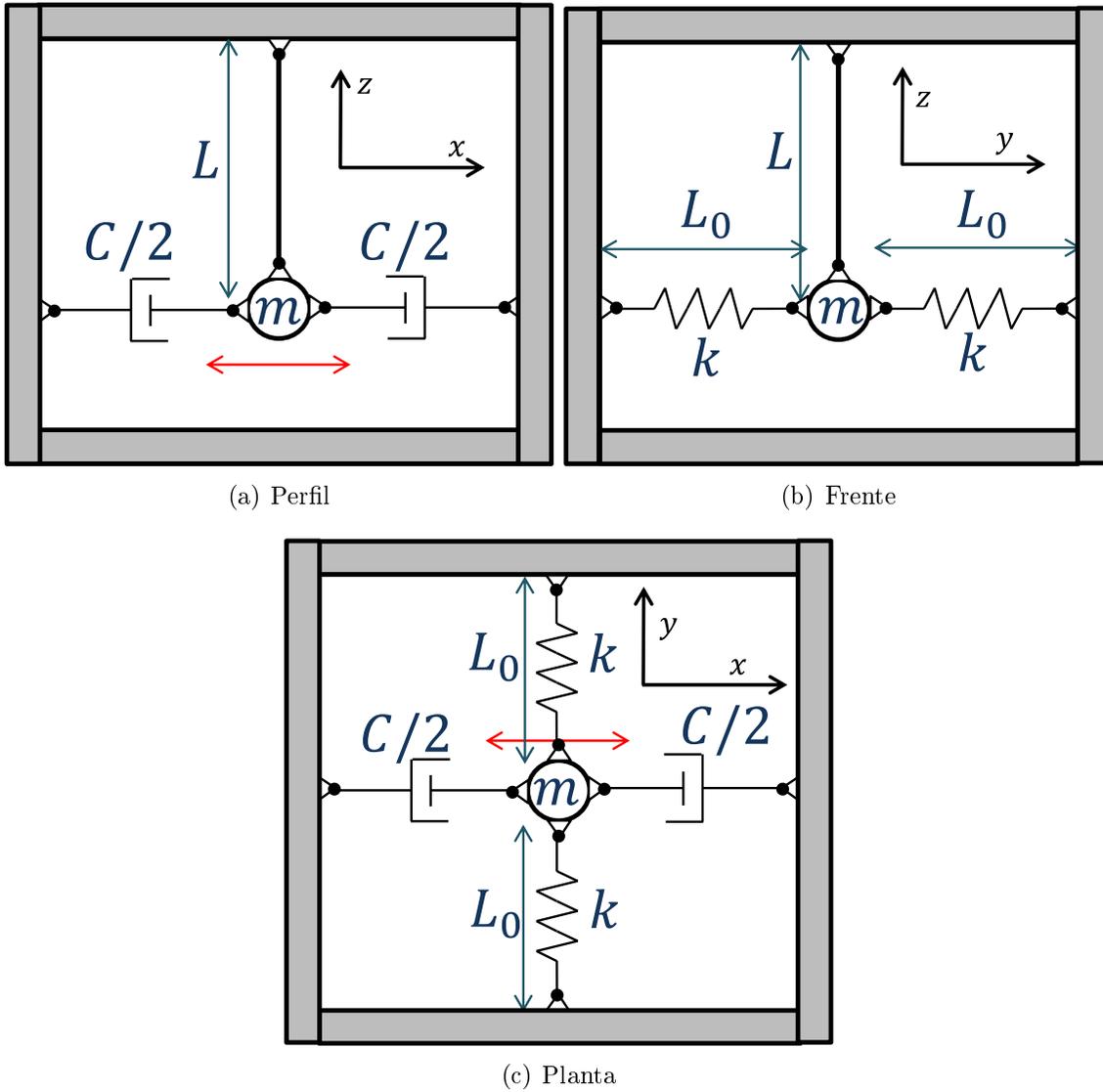


Figura 3.2: Bosquejo del principio de funcionamiento del AMS propuesto en la Figura 3.1 para cada una de las vistas, en rojo se destaca el movimiento del péndulo asumido en el estudio del sistema.

Es importante recalcar de la Figura 3.2 que los resortes y los disipadores se encuentran rotulados en sus dos extremos, lo que provoca que la no linealidad del sistema provenga sólo de la geometría de la configuración. Además, las paredes del sistema se consideran rígidas por lo que no existe una flexibilidad extra asociada a la deformación de estas. Por otro lado, la masa que agregan los dispositivos de soporte no se considera en los análisis.

Además, los desplazamientos del dispositivo, denotados en la Figura 3.2 en color rojo se asumen pequeños para así simplificar las expresiones dinámicas, por lo que los resortes no sobrepasan el rango elástico, respetando así la Ley de Hook que relaciona la fuerza de un resorte con la constante de rigidez k y la deformación, permitiendo además eliminar el movimiento vertical del péndulo en el análisis dinámico.

3.2. Ecuación de Movimiento

3.2.1. Diagramas de Cuerpo Libre (DCL)

Se resuelve el equilibrio de fuerzas de la Figura 3.2 donde se encuentra la fuerza restitutiva F_e del sistema asociada al oscilador de Duffing propuesto en Kanamaru (2008). Para ello se presentan los *DCL* del sistema, tal como muestra la Figura 3.3.

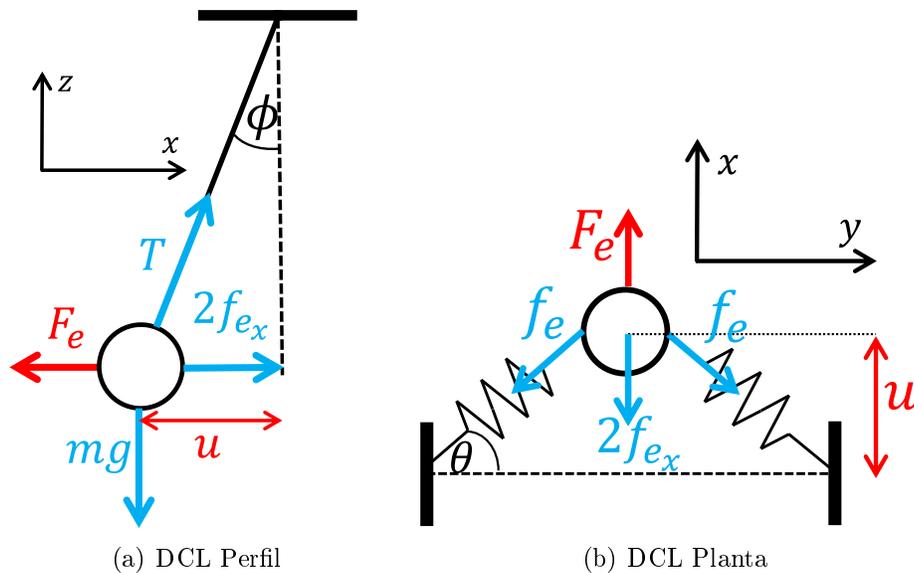


Figura 3.3: DCL del dispositivo de la Figura 3.2

3.2.2. Geometría

Se resuelve la geometría del problema propuesto, donde se utiliza el supuesto de que el desplazamiento u es pequeño. Por lo que se cumple de la Figura 3.3 que:

$$\sin \phi = \frac{u}{L} \cong \phi \quad \tan \theta = \frac{u}{L_0} \quad (3.1)$$

3.2.3. Equilibrio

Se plantean las ecuaciones de equilibrio en ambas direcciones de análisis para la Figura 3.3 (a), donde primero se resuelve el equilibrio de fuerzas verticales y resulta:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T \cos \phi = m \cdot g \Rightarrow T = mg \quad (3.2)$$

Se utiliza que para ángulos pequeños $\cos \phi \cong 1$. Luego, se resuelve el equilibrio de las fuerzas horizontales.

$$\sum F_x = F_e \Rightarrow T \sin \phi + 2 \cdot f_{e_x} = F_e$$

Considerando lo que se obtiene de la Ecuación (3.1), resulta:

$$mg \cdot \frac{u}{L} + 2 \cdot f_{e_x} = F_e \quad (3.3)$$

3.2.4. Fuerza restitutiva

Para obtener la fuerza elástica de los resortes se resuelve el equilibrio presente en la Figura 3.3 (b), donde primero con la Ley de Hook es posible definir:

$$f_e = k \cdot \Delta$$

La deformación del resorte Δ por trigonometría corresponde a la resta entre la hipotenusa del triángulo definido y el largo natural.

$$\Delta = \sqrt{L_0^2 + u^2} - L_0$$

Por lo que la fuerza elástica se puede escribir como:

$$f_e = k \cdot \left(\sqrt{L_0^2 + u^2} - L_0 \right) \quad (3.4)$$

Luego, descomponiendo dicha fuerza en x , tal como muestra la Figura 3.3, se tiene:

$$f_{e_x} = f_e \cdot \cos \theta = f_e \cdot \frac{u}{\sqrt{L_0^2 + u^2}} = ku \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + u^2}} \right) \quad (3.5)$$

Reemplazando la Ecuación (3.5) en (3.3) resulta:

$$F_e(u) = mg \cdot \frac{u}{L} + 2ku \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + u^2}} \right) \quad (3.6)$$

Se realiza una expansión de Taylor en torno a la posición de equilibrio del péndulo $u = 0$ de orden 3, del estilo:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (3.7)$$

Se obtiene:

$$F_e(0) = 0 \quad (3.8)$$

$$F_e' = \frac{mg}{L} + 2k - \frac{2kL_0^3}{(u^2 + L_0^2)^{3/2}} \Rightarrow F_e'(0) = \frac{mg}{L} \quad (3.9)$$

$$F_e'' = \frac{6kL_0^3 \cdot u}{(u^2 + L_0^2)^{5/2}} \Rightarrow F_e''(0) = 0 \quad (3.10)$$

$$F_e''' = \frac{-6kL_0^3(4u^2 - L_0^2)}{(u^2 + L_0^2)^{7/2}} \Rightarrow F_e'''(0) = \frac{6kL_0^5}{L_0^7} = \frac{6k}{L_0^2} \quad (3.11)$$

Reemplazando los términos (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) dentro de la expresión de Taylor (3.7) la fuerza restitutiva con respecto al equilibrio es:

$$F_e(u) = \frac{mg}{L} \cdot u + \frac{6k}{L_0^2} \cdot \frac{u^3}{6} = \frac{mg}{L} \cdot u + \frac{k}{L_0^2} \cdot u^3 \quad (3.12)$$

Si se analiza la expresión (3.12) de la fuerza restitutiva, esta es bastante similar a la del oscilador de Duffing presentado en la expresión (2.5), donde se tiene un término cúbico que depende del desplazamiento, y por lo tanto todo lo analizado en Thompson and Stewart (2002) acerca del comportamiento caótico se puede esperar del dispositivo propuesto.

3.3. Parametrización

Se resuelve la dinámica que gobierna el problema de la Figura 3.2, para ello se utiliza la expresión obtenida para la fuerza restitutiva de la Ecuación (3.12), y se construye la ecuación dinámica del oscilador de Duffing, tal como se presenta en Kanamaru (2008):

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + F_e(u) = P(t) \quad (3.13)$$

Reemplazando la expresión (3.12) resulta en:

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + \frac{mg}{L}u + \frac{k}{L_0^2}u^3 = P(t) \quad (3.14)$$

Los términos con un punto sobre él indican la derivada de grado igual al número de puntos sobre el término, mientras que la excitación externa $P(t)$ puede ser de cualquier tipo con unidades de fuerza.

Sin embargo, la ecuación anterior queda gobernada por 5 parámetros físicos, la masa m , la disipación C , el largo del péndulo L , la rigidez k y el largo natural de los resortes L_0 . Para dejar expresada la Ecuación (3.14) de forma genérica se parametriza por la masa m del dispositivo. (Ruiz et al. (2016)).

$$\ddot{u} + 2\beta\omega\dot{u} + \omega^2u + \gamma u^3 = A(t) \quad (3.15)$$

Se tiene que:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \beta = \frac{C}{2m\omega} \quad \gamma = \frac{k}{mL_0^2} \quad (3.16)$$

ω representa la frecuencia natural del péndulo lineal, β es el amortiguamiento lineal, se define γ como el factor no lineal del dispositivo, además la excitación ahora debe tener unidades de aceleración. Cabe destacar que el factor no lineal γ posee unidades de $[1/(LT)^2]$.

3.4. Respuesta ante excitación Armónica y No-Armónica

3.4.1. Excitación Armónica

Se estudia la respuesta de la Ecuación (3.15) ante una excitación del tipo armónica, definida como:

$$A(t) = U \cos(\Omega t)$$

La que depende de una amplitud U con unidades de aceleración, es decir $[L/T^2]$, y de una frecuencia Ω con unidades de velocidad angular, es decir $[1/T]$. Si se reemplaza esta expresión en la Ecuación (3.15), resulta en:

$$\ddot{u} + 2\beta\omega\dot{u} + \omega^2 u + \gamma u^3 = A(t) = U \cos(\Omega t) \quad (3.17)$$

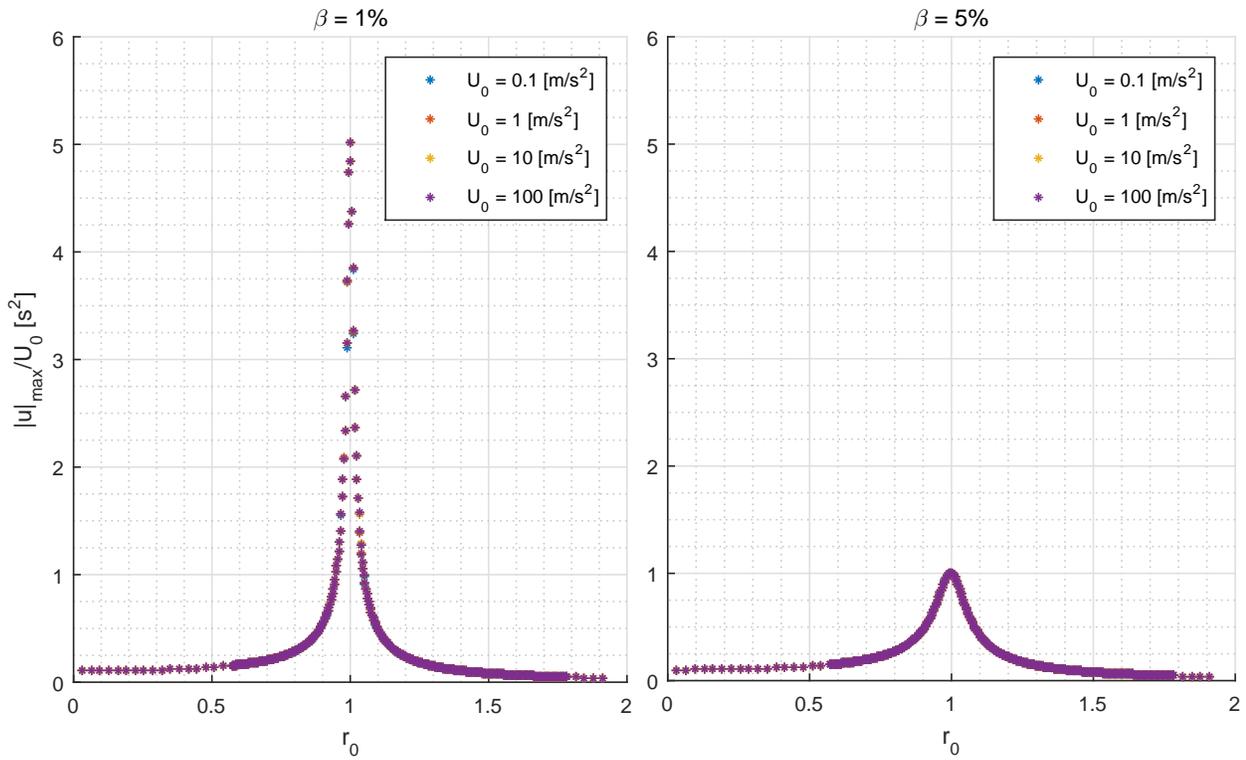
Además se definen nuevas parametrizaciones que permiten construir curvas comparables, tales como:

$$r_0 = \frac{\Omega}{\omega} \quad U_0 = \max |A(t)| = U \quad (3.18)$$

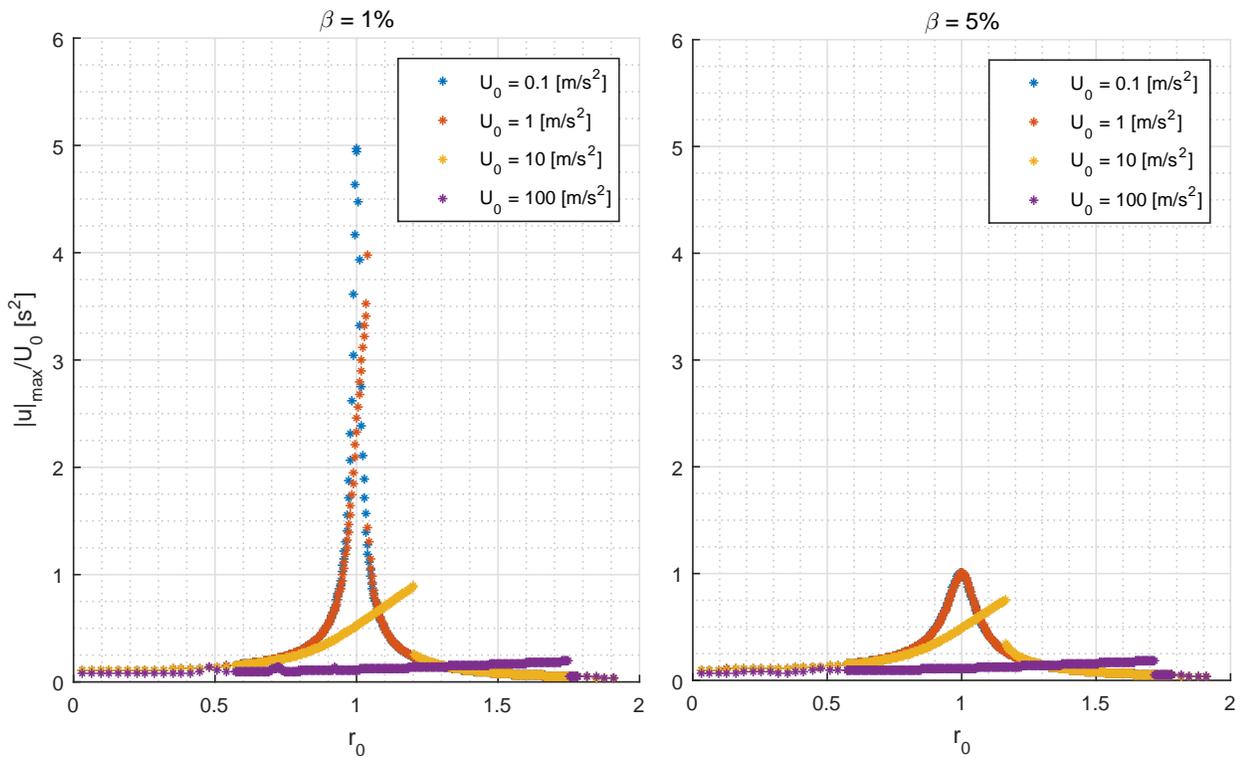
Se resuelve la Ecuación 3.17a través del método numérico Runge-Kutta, implementado a través de *Matlab* como una función llamada *ODE45*, que integra la ecuación diferencial con una expansión de Taylor de 4to o 5to orden y con un paso de tiempo variable. Se considera que el dispositivo posee un periodo natural fijo de $T = 2$ s y que se tienen condiciones iniciales nulas, entonces se corrobora la respuesta del sistema ante distintas excitaciones monofrecuenciales donde lo que se varía es la frecuencia Ω y su amplitud U , para cada frecuencia se obtiene la respuesta máxima del dispositivo $|u|_{max}$ normalizado por la máxima aceleración U_0 , esa normalización tiene unidades de $[T^2]$. Lo anterior se repite para distintos grados de no linealidad γ y amortiguamiento β .

En la Figura 3.4 se puede observar que para el caso lineal con $\gamma = 0$ el sistema posee una amplificación de la respuesta en las cercanías de $r_0 = 1$ que corresponde al caso cuando la frecuencia natural del dispositivo ω y la frecuencia de excitación Ω son parecidas, es decir se tiene resonancia. Mientras que al aumentar el amortiguamiento de $\beta = 1\%$ a $\beta = 5\%$ se logra reducir la amplitud de la respuesta.

Cuando se agrega no linealidad, es decir $\gamma > 0$, se empiezan a notar singularidades bastante interesantes. Primero se interpreta la discontinuidad en los gráficos como efecto directo de la no linealidad, como se propone en Alexander and Schilder (2008). Además, se puede notar que al aumentar la amplitud de excitación U el sistema tiende al comportamiento no lineal, es decir, deja de ser armónica su respuesta, mientras que aumentar el amortiguamiento β permite reducir la no linealidad del problema.

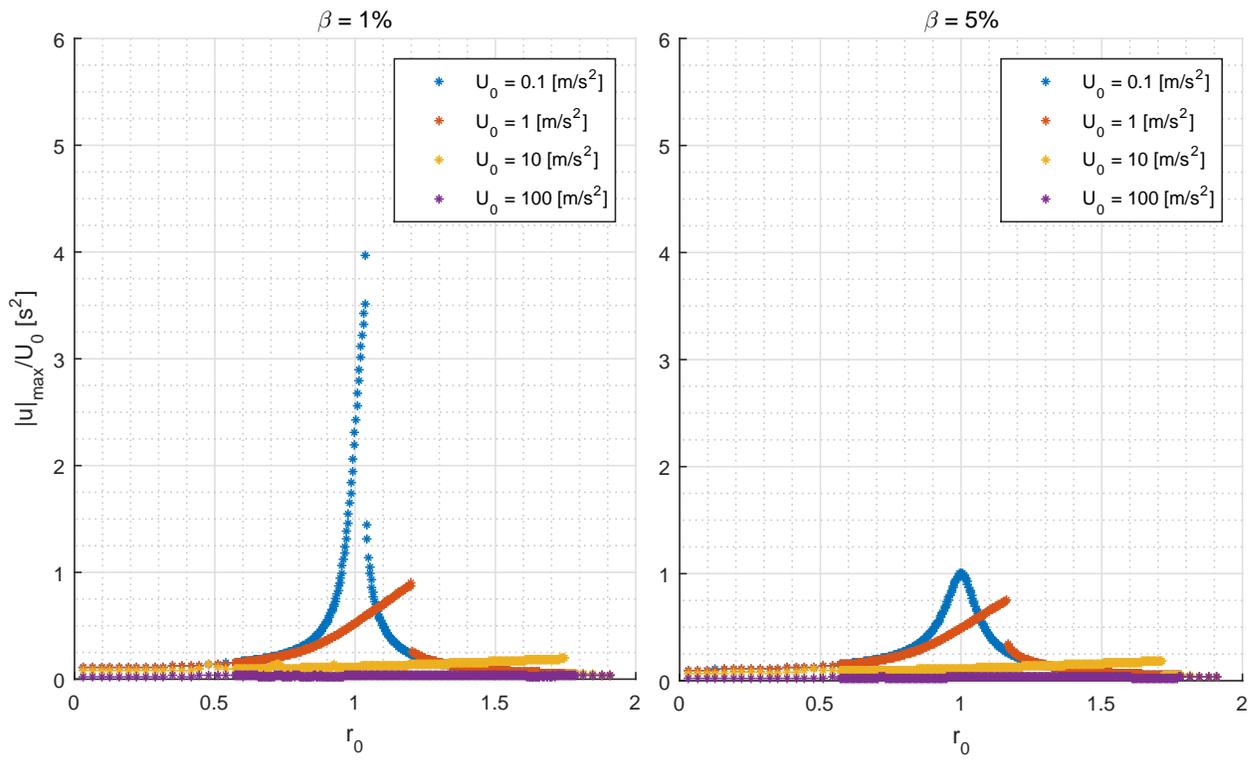


(a) $\gamma = 0$



(b) $\gamma = 0,1$

Figura 3.4: Respuesta del dispositivo ante excitación armónica para distintas no linealidades y amplitudes de excitación, donde el factor no lineal γ tiene unidades de $[1/(s^2 \cdot m^2)]$ (1).



(a) $\gamma = 10$

Figura 3.5: Respuesta del dispositivo ante excitación armónica para distintas no linealidades y amplitudes de excitación, donde el factor no lineal γ tiene unidades de $[1/(s^2 \cdot m^2)]$ (2).

El sistema lineal tiende a la amplificación en resonancia, por lo que si se quiere asegurar que el sistema no responda se necesitan altas no linealidades, es decir U alto, β bajo y γ alto, por lo que agregar no linealidad permite eliminar bajo ciertas condiciones la amplificación de la respuesta.

Además, se corrobora esta respuesta para todos los casos con 10 condiciones iniciales distintas, las que cumplieran con la particularidad de estar en una vecindad acotada mediante *Latin Hypercube*, método explicado brevemente en el Capítulo 2, donde se pudo observar el comportamiento caótico del sistema, en el que la respuesta podía caer en alguna de las ramas de la respuesta subarmónica mostrada en la Figura 3.4 y 3.5, concordante con lo estipulado para el oscilador de Duffing rigidizado estudiado en Thompson and Stewart (2002).

Un detalle importante es que se puede establecer una relación entre las imágenes de la Figura 3.4 (b) y 3.5 (a), notando que por ejemplo la respuesta generada por la curva roja de 3.4 (b) es muy similar a la azul de 3.5 (a), y que la amarilla de 3.4 (b) es parecida a la roja de 3.5 (a), lo que ocurre para ambos amortiguamientos. Por lo que existe una dependencia que no se había denotado en las ecuaciones, entonces se propone normalizar la expresión (3.17) nuevamente, pero ahora por el máximo de la excitación U_0 , definido en la Ecuación (3.18).

$$\frac{\ddot{u}}{U_0} + 2\beta\omega\frac{\dot{u}}{U_0} + \omega^2\frac{u}{U_0} + \gamma\frac{u^3}{U_0} = \cos(\Omega t) \quad (3.19)$$

Se definen los nuevos parámetros:

$$\bar{u} = \frac{u}{U_0} \quad \dot{\bar{u}} = \frac{\dot{u}}{U_0} \quad \ddot{\bar{u}} = \frac{\ddot{u}}{U_0}$$

Donde el desplazamiento normalizado tiene unidades de $[T^2]$, la velocidad normalizada tiene unidades de $[T]$, y la aceleración normalizada es adimensional. Por lo que la expresión (3.19) se puede convertir en:

$$\ddot{\bar{u}} + 2\beta\omega\dot{\bar{u}} + \omega^2\bar{u} + \gamma\frac{u^3}{U_0} \times \frac{U_0^2}{U_0^2} = \cos(\Omega t) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\bar{u}} + 2\beta\omega\dot{\bar{u}} + \omega^2\bar{u} + \gamma U_0^2 \frac{u^3}{U_0^3} = \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\bar{u}} + 2\beta\omega\dot{\bar{u}} + \omega^2\bar{u} + \gamma U_0^2 \bar{u}^3 = \cos(\Omega t) \quad (3.20)$$

En la expresión (3.20) se obtiene que el parámetro no lineal que controla el diseño es en verdad γU_0^2 , por lo tanto, se puede lograr el mismo efecto modificando o U_0 , o bien γ , sólo que U_0 afecta cuadráticamente la expresión. En los problemas reales es muy difícil conocer la amplitud de la excitación y es por tanto que es fundamental en la optimización del dispositivo establecer correctamente el término γ . Cabe destacar que el nuevo parámetro no lineal γU_0^2 posee unidades de $[1/T^6]$.

3.4.2. Excitación No-Armónica

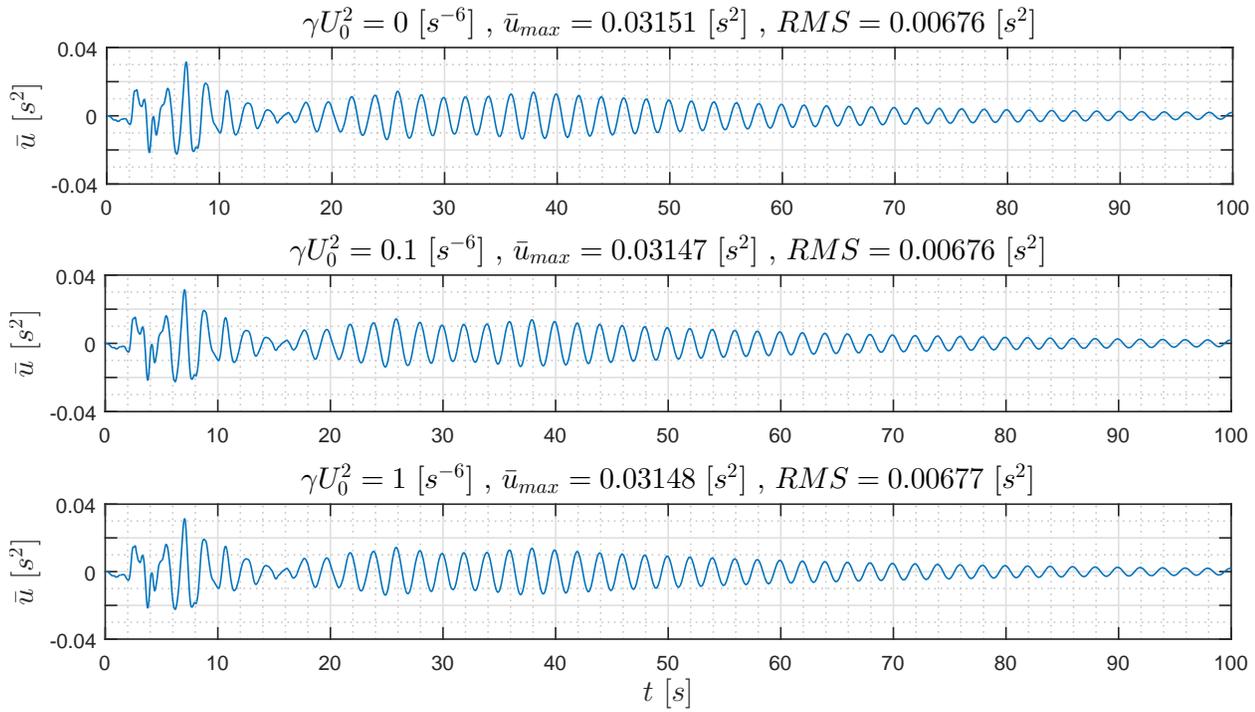
Se analiza la respuesta del dispositivo propuesto en la Figura 3.2 ante una excitación del tipo no armónica, es decir un sismo. El registro utilizado corresponde a *Loma Prieta 1989*, el que posee la característica de ser impulsivo, con una duración de 8 - 15 s, magnitud de momento $M_w = 6,9$ y un valor de *Peak Ground Acceleration* $PGA = 0,65 g$. Además, se utilizan las mismas características del AMS de la Sección 3.4.1.

En la Figura 3.6 se presenta la respuesta tiempo-historia del dispositivo descrito por la Ecuación (3.20) y que se resuelve mediante *Matlab* con el método numérico de Runge-Kutta al igual que en la sección anterior, donde se necesita parametrizar el sismo ingresado por su valor máximo U_0 para que así el factor no lineal que gobierna la dinámica sea γU_0^2 . Además se encuentra el valor máximo de su respuesta $|\bar{u}|_{max}$ y el *RMS* asociado, el que corresponde a la *media cuadrática* que se define como:

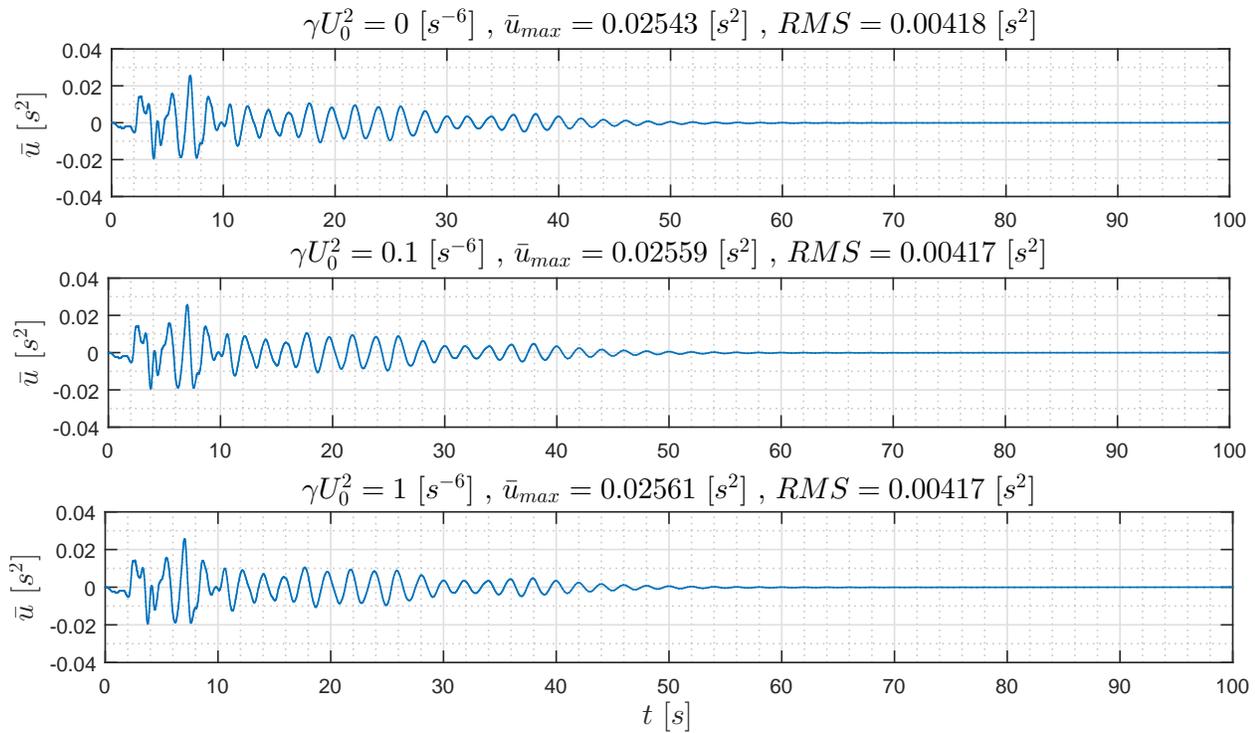
$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$$

Que corresponde a la autocorrelación de un vector consigo mismo superponiéndolo en el mismo periodo de tiempo, el que da cuenta además de la dispersión de los datos si el valor medio de ellos es cercano a cero.

En la Figura 3.6 se puede notar que a medida que se aumenta la no linealidad γU_0^2 , la respuesta máxima disminuye pero no significativamente, mientras que el *RMS* se mantiene relativamente constante, por lo que tanto la máxima respuesta como la dispersión de ella no se ven afectadas por aumentar la no linealidad. Por otro lado, aumentar el amortiguamiento β genera que la respuesta máxima sea considerablemente menor y que además decaiga muy rápido en el tiempo. La duración del registro es de 15 s aproximadamente, por lo que para amortiguamientos bajos el sistema sigue respondiendo por casi 2 min después de acabado el sismo, mientras que aumentar el amortiguamiento genera que la respuesta dure 45 s más que el fin de la excitación.



(a) $\beta = 1\%$



(b) $\beta = 5\%$

Figura 3.6: Respuesta del dispositivo ante excitación no armónica para distintas no linealidades y amortiguación

Capítulo 4

AMS no lineal acoplado a estructura de un grado de libertad

4.1. Caracterización de la Dinámica

4.1.1. Planteamiento del problema

Se estudia la dinámica del sistema acoplado, es decir el AMS propuesto en la Sección 3 sobre una estructura de un grado de libertad, tal como muestra la Figura 4.1, recordando que sólo se estudia la dirección de movimiento x . La estructura queda totalmente definida por la masa m_s , la rigidez k_s y la disipación viscosa C_s . Además posee una aceleración basal, que se asume del tipo sísmica por temas de representación algebraica, pero podría ser de cualquier tipo. Como reacción a esta aceleración la estructura acelera su masa con \ddot{u}_1 , mientras que el AMS lo hace con \ddot{u}_2 .

Las expresiones dinámicas del problema se acoplan en las aceleraciones debido al tiempo computacional que tarda en encontrar una solución, es por ello que se presenta el equilibrio tanto en la masa m del AMS, como en la masa m_s de la estructura.

Por último, se adopta la nomenclatura para las aceleraciones en que el subíndice 1 indica que proviene de la estructura, mientras que el 2 indica que viene del AMS. Mientras que para los parámetros físicos se considera que aquellos que tienen el subíndice s dependen de la estructura, mientras que los que no poseen subíndice provienen del AMS.

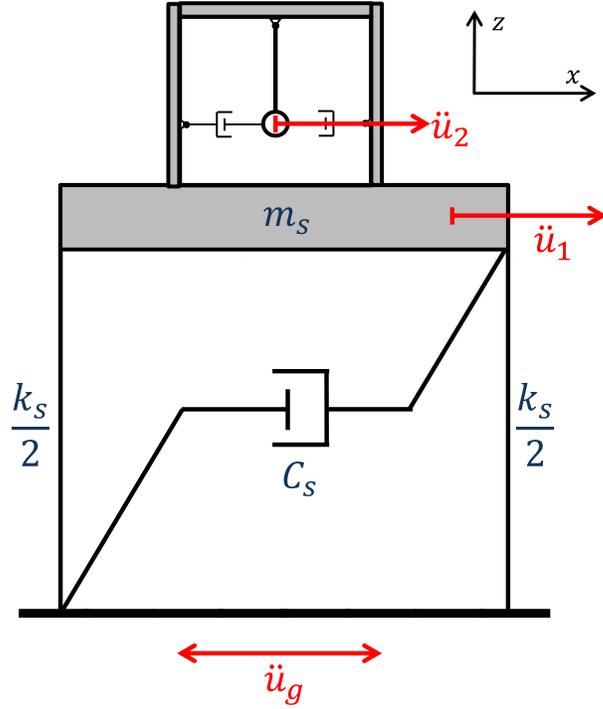


Figura 4.1: Bosquejo del sistema de un grado de libertad con el AMS propuesto adosado.

4.1.2. Equilibrio en AMS

Se presenta a continuación el DCL de la masa del AMS debido a la excitación basal \ddot{u}_g , donde se considera la fuerza restitutiva de la Ecuación (3.12) y la fuerza provocada por los disipadores viscosos del dispositivo. Además, debido a la acción externa de aceleraciones, se considera que la aceleración total que está sufriendo la masa del dispositivo es la suma de las 3 aceleraciones remarcadas en rojo en la Figura 4.2, es decir:

$$\ddot{u}_2^T = \ddot{u}_1^T + \ddot{u}_2 = \ddot{u}_g + \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 \quad (4.1)$$

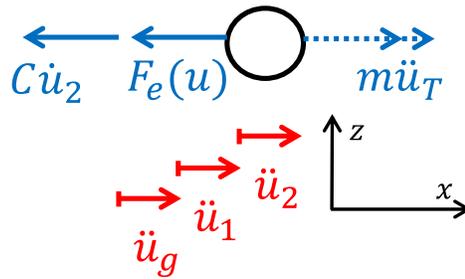


Figura 4.2: DCL de la masa del AMS propuesto.

Se plantea el equilibrio de fuerzas del DCL propuesto en la Figura 4.2, donde:

$$\sum F_x = m\ddot{u}_2^T \Rightarrow -C\dot{u}_2 - F_e(u) = m\ddot{u}_2^T$$

Se reemplaza la fuerza restitutiva $F_e(u)$ y la aceleración total \ddot{u}_T , Ecuación (3.12) y (4.1) respectivamente.

$$\Leftrightarrow -C\dot{u}_2 - \frac{mg}{L}u_2 - \frac{k}{L_0^2}u_2^3 = m(\ddot{u}_g + \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) \quad (4.2)$$

Finalmente, despejando la aceleración basal se tiene:

$$\Rightarrow m\ddot{u}_1 + m\ddot{u}_2 + C\dot{u}_2 + \frac{mg}{L}u_2 + \frac{k}{L_0^2}u_2^3 = -m\ddot{u}_g \quad (4.3)$$

4.1.3. Equilibrio en Estructura

Se presenta a continuación el DCL en la masa de la estructura debido a la excitación basal \ddot{u}_g , donde las fuerzas provenientes del sistema estructural corresponden a la fuerza restitutiva asociada a la rigidez k_s y la fuerza del disipador viscoso C_s . Por otro lado, debido a la reacción de las fuerzas inerciales asociadas al AMS se tiene la fuerza restitutiva $F_e(u)$ y la proveniente de los disipadores viscosos. Además, debido a la acción externa de aceleraciones, se considera que la aceleración total que está sufriendo la masa es una suma de las 2 aceleraciones remarcadas en rojo en la Figura 4.3, es decir:

$$\ddot{u}_1^T = \ddot{u}_g + \ddot{u}_1$$

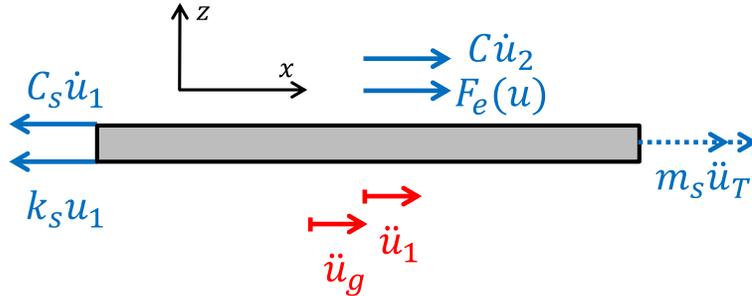


Figura 4.3: DCL de la estructura principal.

Entonces, se resuelve el equilibrio de la Figura 4.3.

$$\sum F_x = m\ddot{u}_1^T \Rightarrow -k_s u_1 - C_s \dot{u}_1 + C\dot{u}_2 + \frac{mg}{L}u_2 + \frac{k}{L_0^2}u_2^3 = m_s(\ddot{u}_g + \ddot{u}_1)$$

Sin embargo, se puede reemplazar la expresión (4.2), para obtener:

$$\Rightarrow -k_s u_1 - C_s \dot{u}_1 - m(\ddot{u}_g + \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) = m_s(\ddot{u}_g + \ddot{u}_1)$$

Finalmente, despejando la aceleración basal \ddot{u}_g se obtiene:

$$\Rightarrow (m_s + m)\ddot{u}_1 + m\ddot{u}_2 + C_s \dot{u}_1 + k_s u_1 = -(m_s + m)\ddot{u}_g \quad (4.4)$$

4.2. Parametrización

Con las expresiones (4.3) y (4.4) se puede establecer un sistema de ecuaciones, el cual está acoplado en el término de aceleración, es decir en ambas ecuaciones aparece la aceleración del AMS \ddot{u}_2 y la de la estructura principal \ddot{u}_1 .

$$\Rightarrow m\ddot{u}_1 + m\ddot{u}_2 + C\dot{u}_2 + \frac{mg}{L}u_2 + \frac{k}{L_0^2}u_2^3 = -m\ddot{u}_g \quad (4.5)$$

$$(m_s + m)\ddot{u}_1 + m\ddot{u}_2 + C_s \dot{u}_1 + k_s u_1 = -(m_s + m)\ddot{u}_g \quad (4.6)$$

Normalizando la Ecuación (4.5) por la masa del dispositivo m se obtiene:

$$\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 + 2\beta\omega\dot{u}_2 + \omega^2 u_2 + \gamma u_2^3 = -\ddot{u}_g \quad (4.7)$$

Mientras que la Ecuación (4.6) se normaliza por la masa de la estructura m_s y se obtiene:

$$(1 + r)\ddot{u}_1 + r\ddot{u}_2 + 2\beta_s\omega_s\dot{u}_1 + \omega_s^2 u_1 = -(1 + r)\ddot{u}_g \quad (4.8)$$

En la Ecuación (4.7) se definen los mismos parámetros de la Ecuación (3.16), mientras que para la Ecuación (4.8) se definen los parámetros:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \quad \beta_s = \frac{C_s}{2m_s\omega_s} \quad r = \frac{m}{m_s} \quad (4.9)$$

Se tiene que ω_s representa la frecuencia natural de la estructura, mientras que β_s caracteriza al amortiguamiento lineal de la estructura, y por último la razón r corresponde a la relación de masas entre el AMS y la estructura.

Capítulo 5

Análisis del sistema acoplado a estructura conocida

5.1. Optimización del AMS propuesto

Se analiza el sistema acoplado entre la estructura de un grado de libertad y el AMS propuesto, por lo que se resuelven computacionalmente las Ecuaciones (4.7) y (4.8) mediante integración numérica de Runge-Kutta en *Matlab* a través de la función *ODE45*, sin embargo se debe resolver las ecuaciones dinámicas acopladas, y es ahí donde se presenta la complejidad ya que la respuesta de aceleración de una afecta a la otra, además se consideran condiciones iniciales nulas. Se considera para ello que la estructura es conocida y sus datos se resumen en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Parámetros conocidos de la estructura.

T_s [s]	β_s [%]	r [%]
2	3	1

T_s representa el periodo fundamental, β_s la razón de amortiguamiento crítico y r la razón de masas. Además se excita la estructura monofrecuencialmente en resonancia, ya que por lo general es ese caso el más desfavorable en cuanto a respuesta, es decir, la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural de la estructura.

El proceso de optimización escogido corresponde a *blind search*, donde se localiza el valor que optimiza la función dentro de una malla de combinaciones de los parámetros de entrada donde los puntos se distribuyen de manera uniforme dentro de límites establecidos, explicado en el Capítulo 2 en la sección 2.1.5 como *GA*.

Los parámetros de entrada de este problema corresponden a la frecuencia natural del péndulo ω y su razón de amortiguamiento β , donde la frecuencia del péndulo se asume que toma valores entre $[0,5\omega_s - 1,1\omega_s]$, mientras que el amortiguamiento se asume entre $[0\% - 10\%]$.

Se encuentra el AMS que genera el remanente de la vibración r_Y mínimo para cada no linealidad considerada, el que se define como la razón entre la respuesta de la estructura con el AMS acoplado $u_{1GDL+AMS}$, y la respuesta sin el dispositivo u_{1GDL} , tal como se propone en Garrido and Sarrazín (2016):

$$r_Y = \frac{u_{1GDL+AMS}}{u_{1GDL}} \quad (5.1)$$

Recordar que en el Capítulo 3 quedó establecido que el diseño no lineal está controlado por el factor γU_0^2 , cuyo valor se analiza para $[0, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2] [s^{-6}]$, ya que para no linealidades más grandes la desintonización necesaria en las frecuencias, para hallar un AMS óptimo era tan grande que no tenía sentido ser estudiado. Obteniéndose así las siguientes superficies de respuesta:

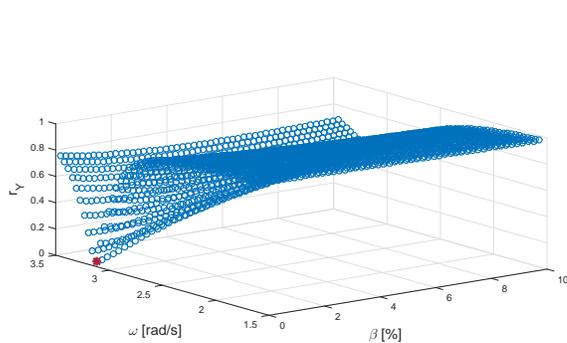
En la Figura 5.1 se puede notar que el punto mínimo de la curvatura de la superficie se comienza a desplazar a medida que se varía la no linealidad, en donde se resalta el punto mínimo de esta en color rojo. A medida que se aumenta la no linealidad, se requiere un amortiguamiento más grande, pero una frecuencia natural más pequeña, por lo que necesariamente tiene que existir una cierta desintonización entre el AMS y la estructura cuando el dispositivo es no lineal.

Los resultados numéricos aparecen retratados en la Tabla 5.2, donde se puede notar que el remanente mínimo de la respuesta aumenta al considerar no linealidad. Además, es importante notar que el amortiguamiento no comienza a tomar relevancia hasta que la frecuencia del péndulo es un 80% de la frecuencia natural de la estructura, que corresponde justo al rango operacional de un AMS lineal, lo que está acordante a lo propuesto en Chopra (2001).

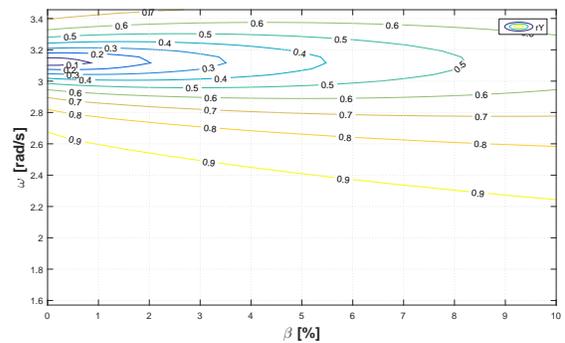
Tabla 5.2: Parámetros óptimos del AMS según no linealidad

$\gamma U_0^2 [s^{-6}]$	$\beta^* [%]$	$\omega^* [rad/s]$	r_Y
0	0	3,116	0,04
0,01	0	3,003	0,019
0,025	0,6	2,853	0,077
0,05	1,2	2,589	0,115
0,1	3,2	2,287	0,238
0,15	5,6	2,136	0,329
0,2	7,6	2,023	0,391

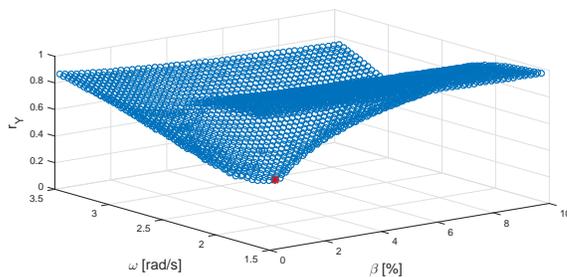
Por otro lado, cuando aumenta la no linealidad se nota un quiebre en las superficies lo que queda retratado en las curvas de nivel presentadas, donde la acumulación de estas indica dicho salto. Esto provoca que a pesar de que se escoja el AMS óptimo correcto, si la estructura posee incertidumbre en su periodo fundamental o en el amortiguamiento, se podría caer sobre este escalón empeorando la respuesta del sistema, lo que se muestra en la Figura 5.2 y 5.3.



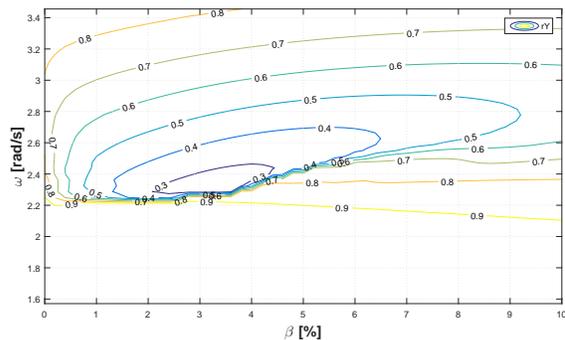
(a) Superficie $\gamma U_0^2 = 0$



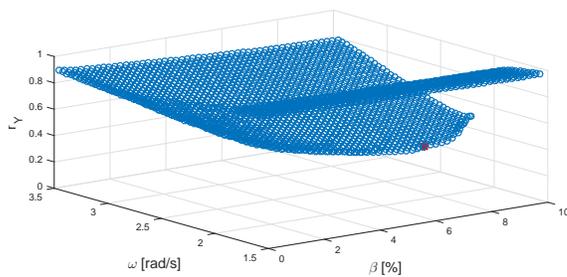
(b) Curvas de Nivel $\gamma U_0^2 = 0$



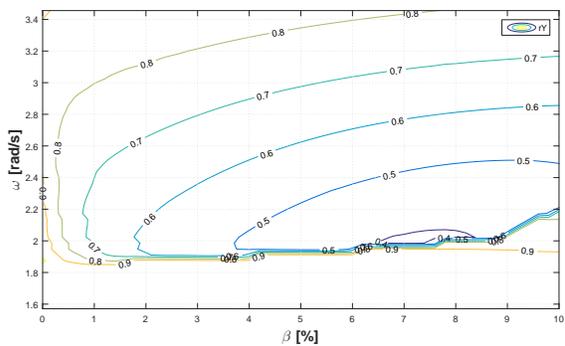
(c) Superficie $\gamma U_0^2 = 0,1$



(d) Curvas de Nivel $\gamma U_0^2 = 0,1$



(e) Superficie $\gamma U_0^2 = 0,2$



(f) Curvas de Nivel $\gamma U_0^2 = 0,2$

Figura 5.1: Optimización del AMS para distintos grados de no linealidad, donde se resalta en rojo el punto óptimo, además el factor no lineal γU_0^2 posee unidades de $[s^{-6}]$.

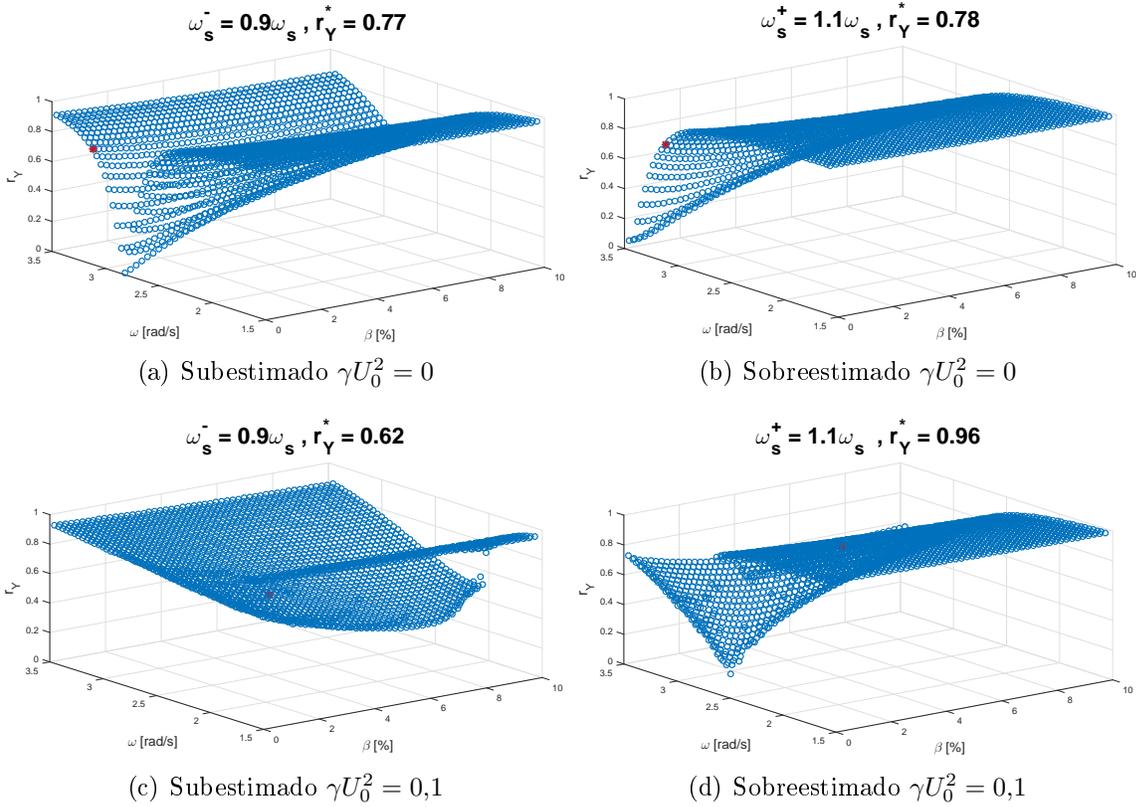


Figura 5.2: Desintonización de la frecuencia natural de la estructura ω_s , donde se destaca en rojo el óptimo obtenido en la Tabla 5.2, además el factor no lineal γU_0^2 posee unidades de $[s^{-6}]$.

En la Figura 5.2 se puede notar que para el caso lineal $\gamma U_0^2 = 0 [s^{-6}]$ varía el remanente r_Y con respecto al óptimo encontrado en la Tabla 5.2, ya que pasa de un valor $r_Y = 0,04$, a un valor de $r_Y = 0,77$, lo que ocurre tanto para desintonizaciones positivas como negativas. Mientras que cuando existe no linealidad, para una desintonización negativa de $0,9\omega_s$, la variación del remanente r_Y es baja con respecto al caso lineal, ya que pasa de un valor $r_Y = 0,24$ a un valor $r_Y = 0,62$, de hecho este valor de reducción es mejor que el ofrecido por el AMS lineal para la misma desintonización. Sin embargo, cuando se tiene una sobreestimación de la frecuencia natural de la estructura, se tiene que la respuesta empeora drásticamente alcanzando un remanente de $r_Y = 0,96$. Por lo que se debe tener especial cuidado, ya que si se tiene un dispositivo no lineal, una mala sintonización con la estructura podría provocar o bien una mejora en la respuesta, o bien una nula reducción de la respuesta.

Sin embargo, para variaciones en el amortiguamiento del sistema β_s de la Figura 5.3 comparando con los resultados de la Tabla 5.2, se nota que la variación de la reducción de la respuesta es casi nula para el caso lineal, mientras que al agregar no linealidad puede llegar a caer sobre el quiebre de la superficie, pero aún así no es tan relevante como la variación de la frecuencia. Por lo que, para los estudios que siguen sólo se considera el efecto de la frecuencia de la estructura, dejando fijo el amortiguamiento.

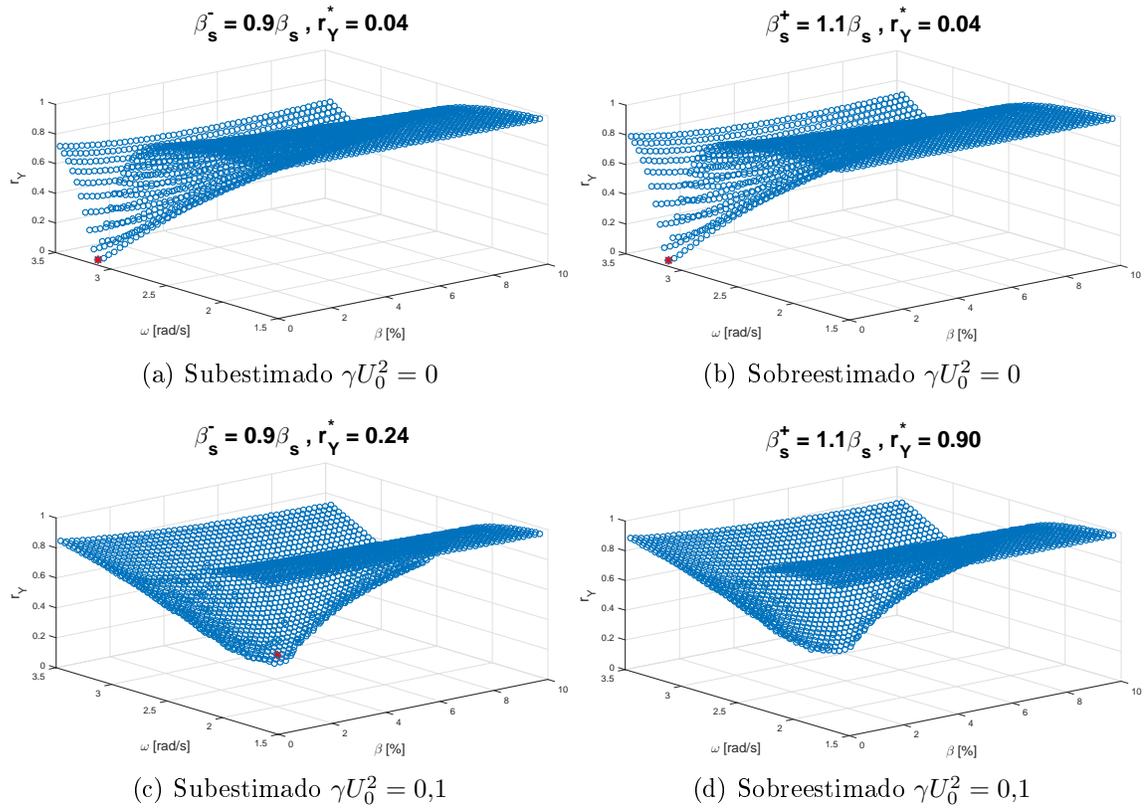


Figura 5.3: Incertidumbre del amortiguamiento de la estructura β_s , donde se destaca en rojo el óptimo obtenido en la Tabla 5.2, además el factor no lineal γU_0^2 posee unidades de $[s^{-6}]$.

5.2. Respuesta ante excitación armónica

5.2.1. Excitación Monofrecuencial Variable

El análisis que se presenta a continuación corresponde a cuando el sistema acoplado es excitado mediante una fuerza monofrecuencial determinada, utilizando el AMS óptimo hallado en la sección anterior, detallado en la Tabla 5.2. Se nota el efecto de no excitar al sistema en resonancia, para ello se varía la frecuencia de la excitación Ω , tal como se hizo en el estudio realizado en el Capítulo 3.

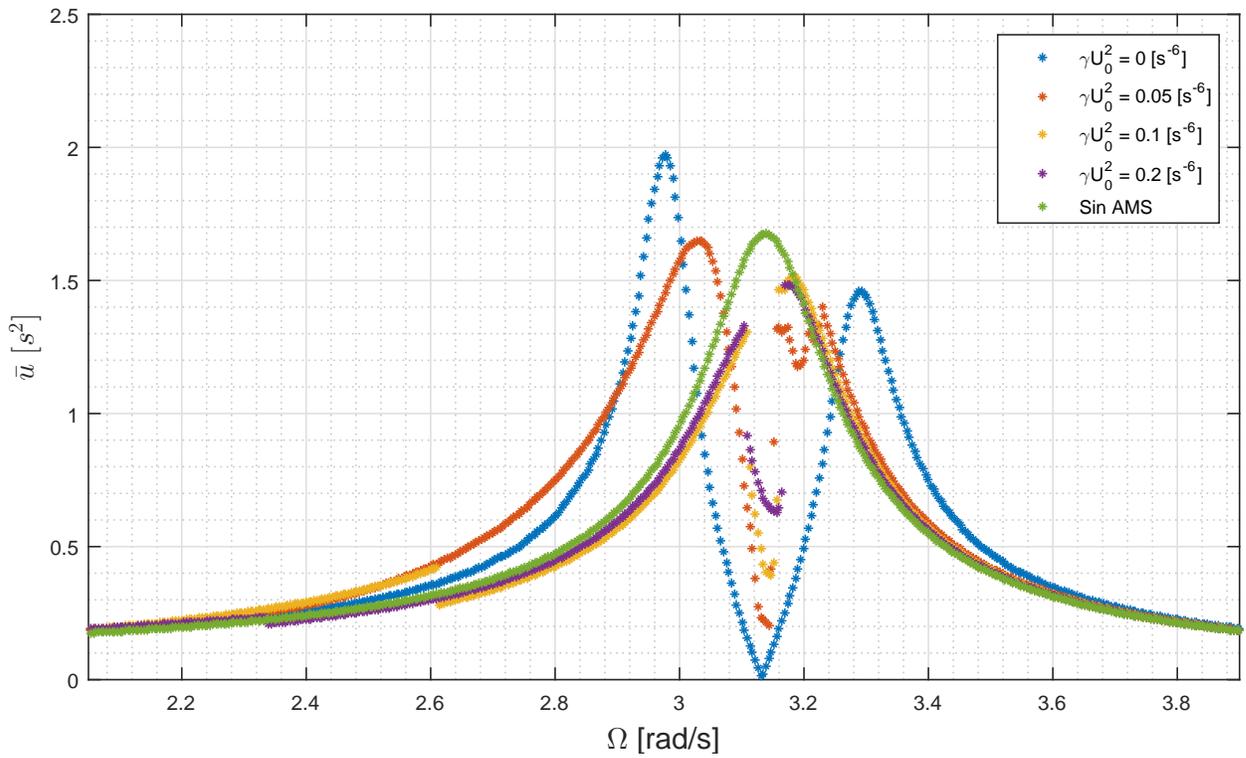
En la Figura 5.4 y 5.5 se muestra la respuesta del sistema acoplado, siendo la curva verde la respuesta de la estructura sola, la azul considerando un AMS lineal y los demás colores con algún grado de no linealidad. La Figura 5.4 (a) muestra la respuesta en frecuencia del sistema cuando el AMS es óptimo y está sintonizado a la estructura, mientras que la Figura 5.4 (b) y 5.5 (a) muestran el caso cuando el AMS es óptimo pero se encuentra desintonizado de la estructura principal.

En general se puede notar que la diferencia que existen entre el sistema sin AMS con los no lineales $\gamma U_0^2 > 0$, se mantiene relativamente constante con las desintonizaciones de la frecuencia natural de la estructura. Mientras que la reducción que genera el caso lineal, representado por la curva azul, depende de la sintonización lograda a priori, ya que para la Figura 5.4 (a) se nota una gran diferencia entre las curvas verde y azul justo en el peak del caso sin AMS, pero en la Figura 5.5 (a) esta ventaja se pierde totalmente. Por lo tanto, en concordancia a los resultados analizados por Alexander and Schilder (2008) el caso del AMS lineal depende en demasía de la sintonización, mientras que el no lineal se independiza de cierta manera de esa razón. Sin embargo, el caso óptimo para el dispositivo lineal $\gamma U_0^2 = 0$ [s^{-6}] mostrado en la Figura 5.4 (a) no corresponde al caso cuando se optimizan los peaks que se generan, estudiado en profundidad en Rozas and Boroschek (2009).

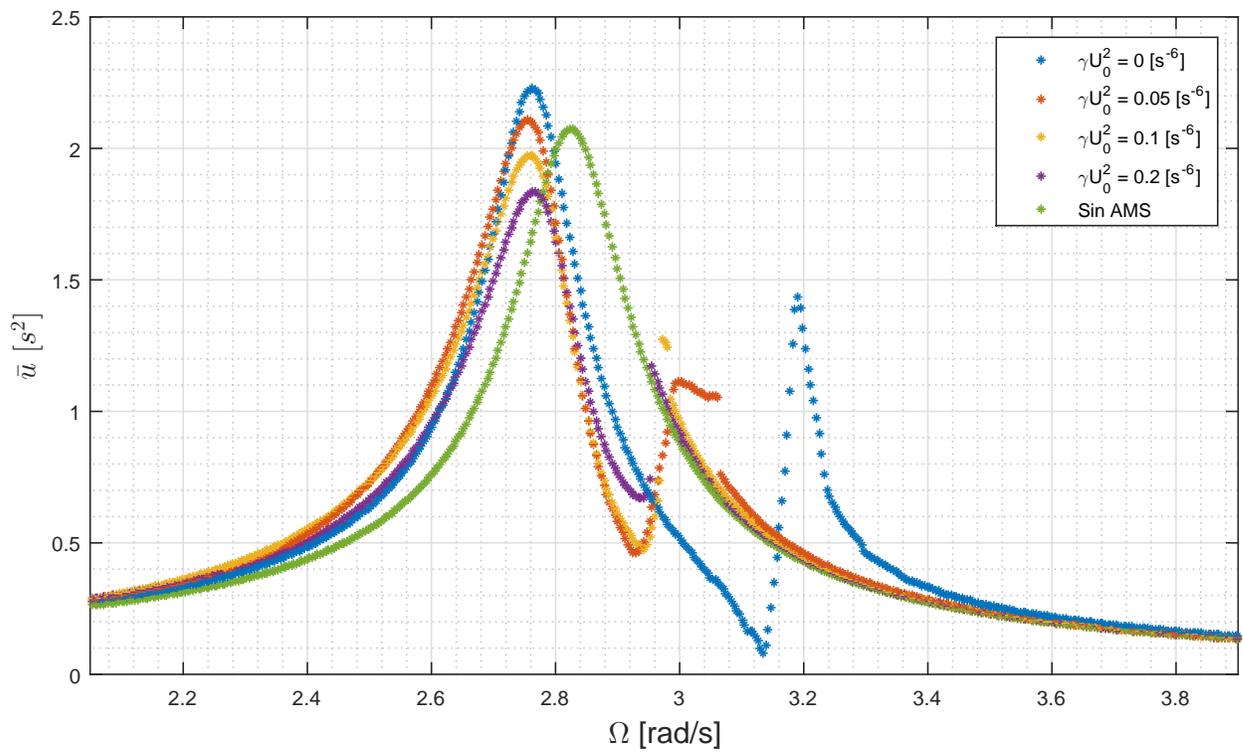
En la Figura 5.6 y 5.7 se encuentra el área bajo la curva de la Figura 5.4 y 5.5 para el caso sintonizado y los dos no sintonizados, considerando para ello todas las no linealidades. El área bajo la curva da cuenta en cierta medida de la energía del sistema en la que un área menor está asociada a una disipación mayor.

Para el caso sintonizado se nota que la energía asociada a la estructura sola y con AMS lineal es similar, mientras que altas no linealidades reducen este valor. Cuando se está en una desintonización negativa de la estructura el aumentar la no linealidad muestra una disminución considerable de la energía, lo que es contrario a cuando se desintoniza positivamente. Algo curioso de recalcar es que el área bajo la curva del caso sin AMS y con AMS lineal se mantiene relativamente constante para todas las desintonizaciones estudiadas.

Sin embargo, a pesar de que la energía se modifique esto no da cuenta del cambio en la reducción de la respuesta, lo que se analizó en la Figura 5.4 y 5.5, por lo tanto depende del objetivo del diseñador cómo abordar el problema, justo como se propone en Pourzeynali et al. (2013).

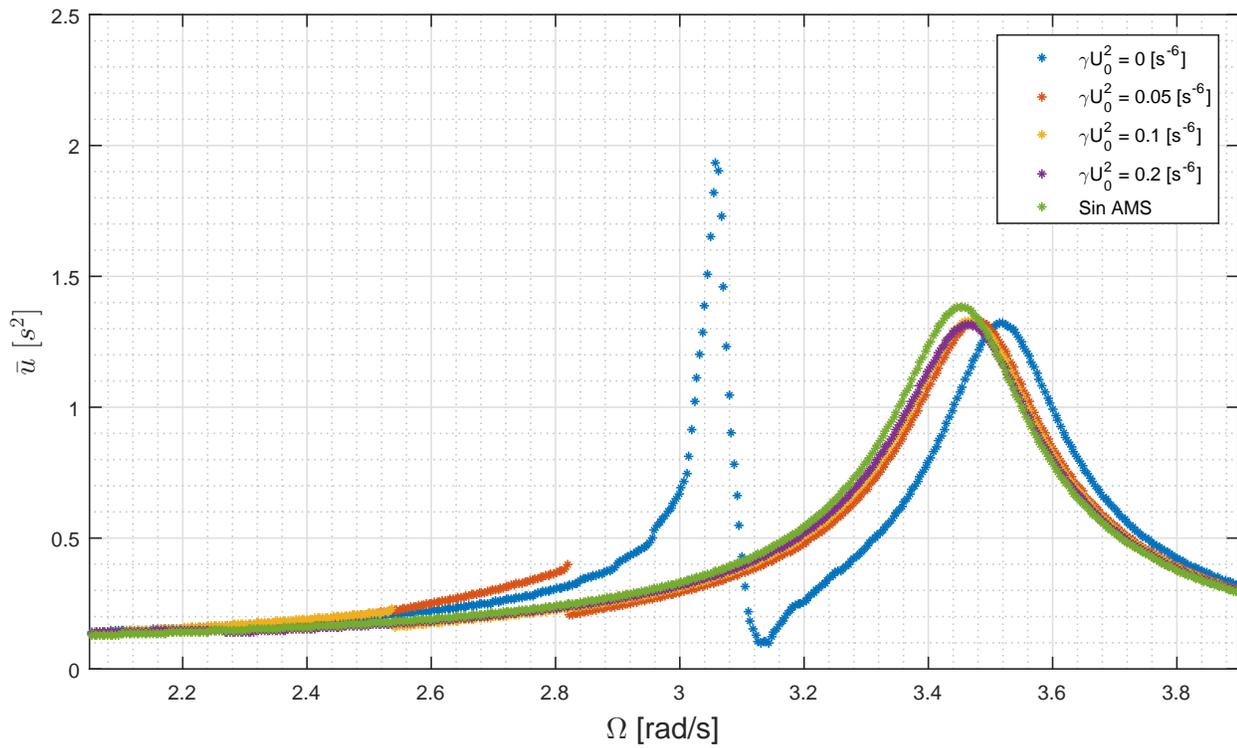


(a) Sintonizado $\omega = \omega_s$



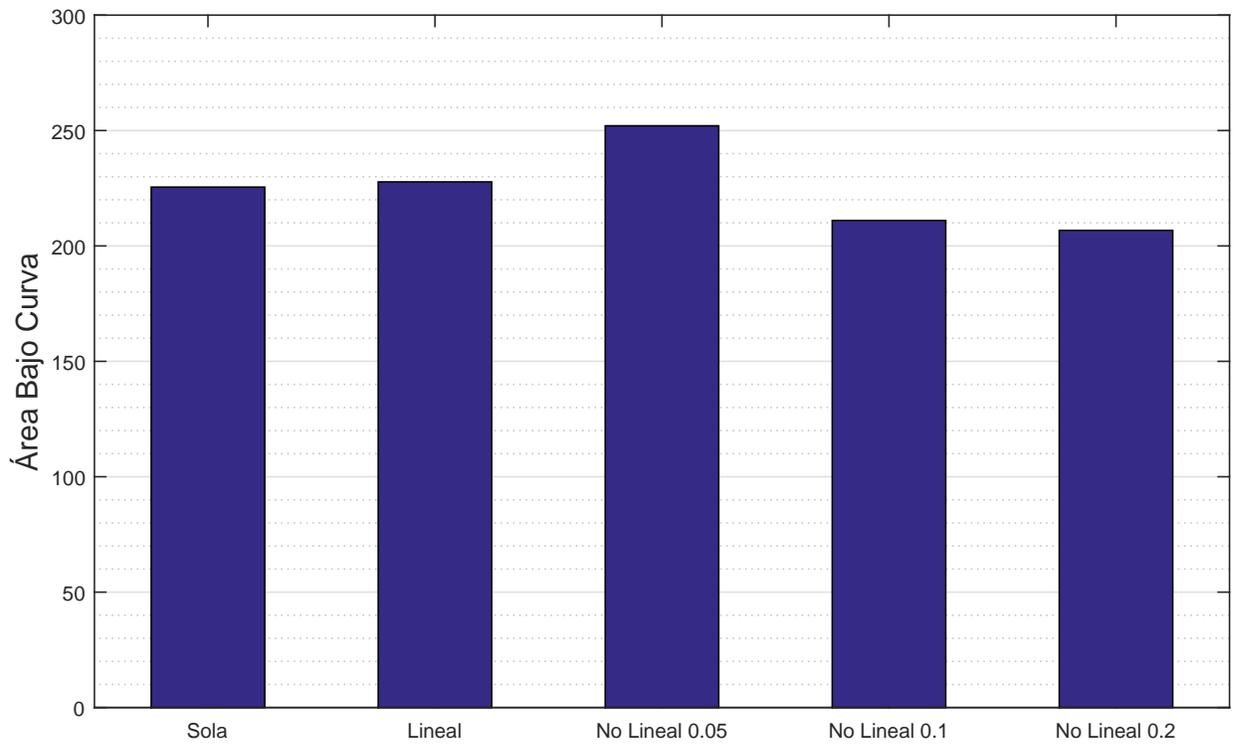
(b) Subestimado $\omega_s^* = 0,9\omega_s$

Figura 5.4: Respuesta en frecuencia del sistema acoplado, notando el efecto del cambio en la estructura (1).

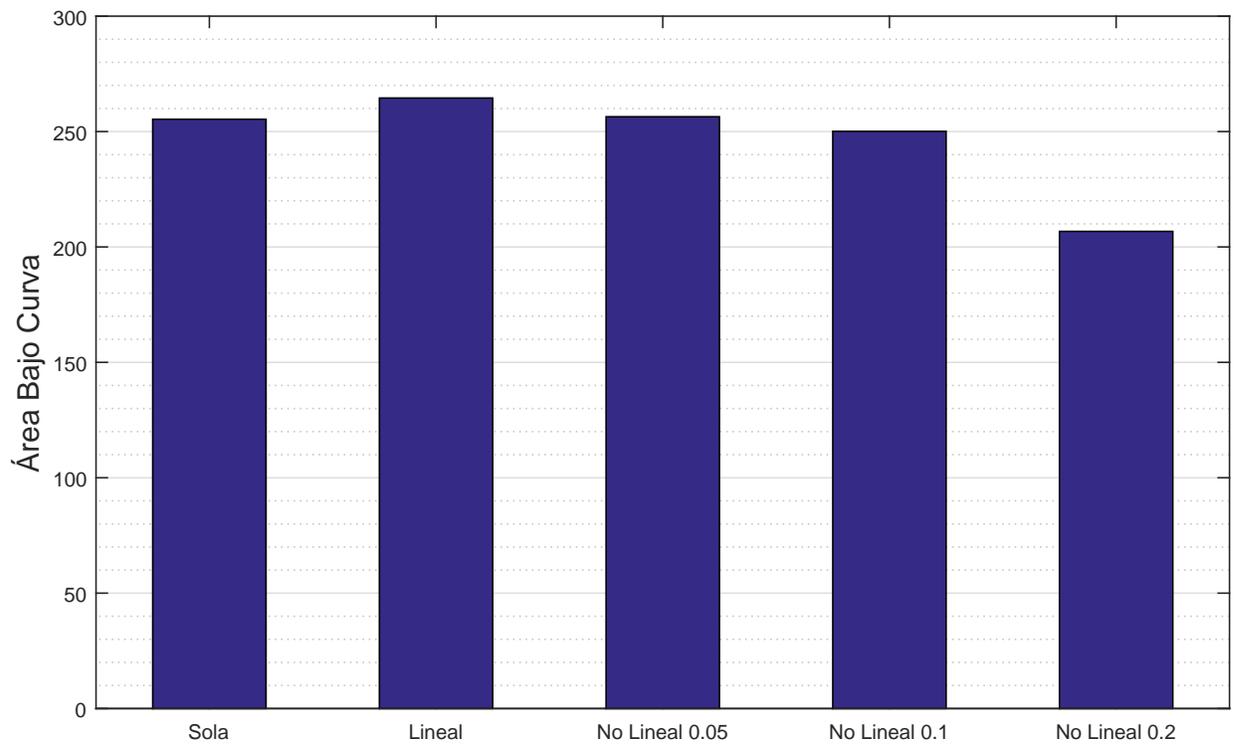


(a) Sobrestimado $\omega_s^* = 1,1\omega_s$

Figura 5.5: Respuesta en frecuencia del sistema acoplado, notando el efecto del cambio en la estructura (2).

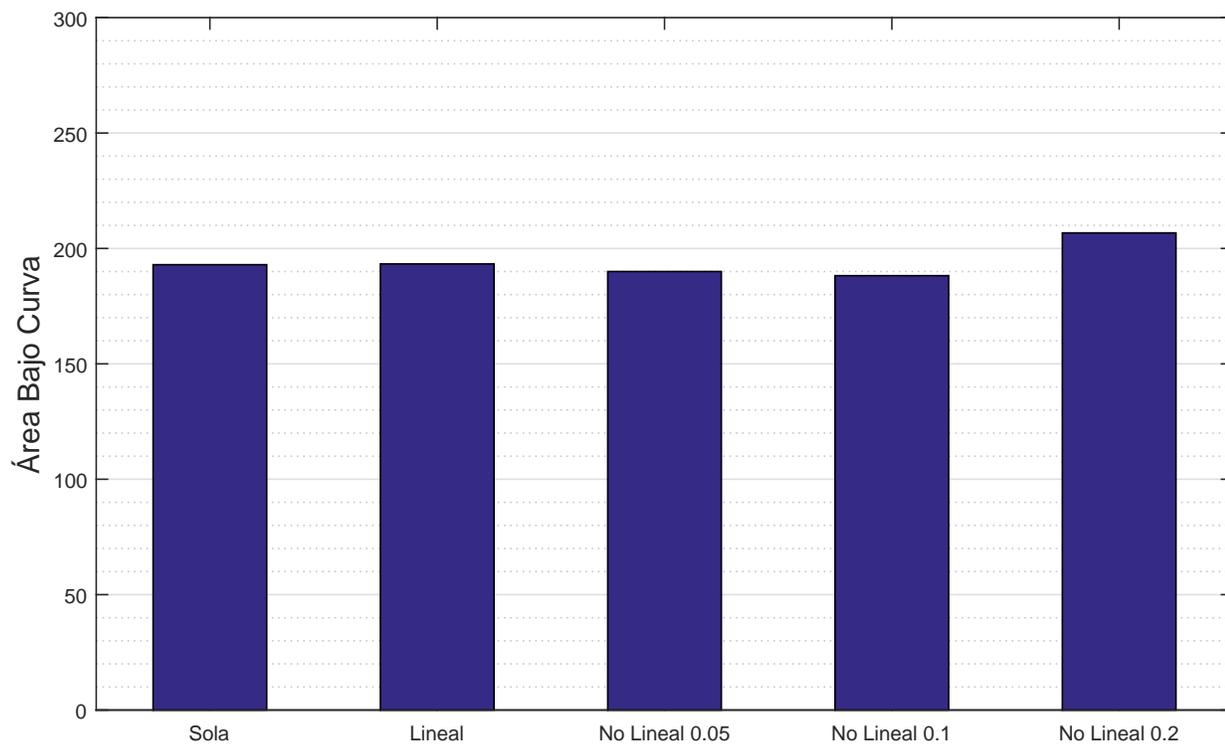


(a) Sintonizado



(b) Subestimado

Figura 5.6: Energía asociada a Figura 5.4 y 5.5 para distintos grados de no linealidad, donde el factor no lineal γU_0^2 posee unidades de $[s^{-6}]$ (1)



(a) Sobrestimado

Figura 5.7: Energía asociada a Figura 5.4 y 5.5 para distintos grados de no linealidad, donde el factor no lineal γU_0^2 posee unidades de $[s^{-6}]$ (2)

5.2.2. Excitación Monofrecuencial en Estructura con Degradación de su Rigidez

Se considera que la estructura va a tener una degradación de su frecuencia natural, lo que se puede deber por ejemplo al paso del tiempo, o cuando se aplica una carga cíclica y la estructura presenta un comportamiento histerético. La excitación se considera en resonancia con la frecuencia de la estructura sin degradación, y el AMS óptimo corresponde al determinado en la Tabla 5.2, lo que se analiza para distintos grados de no linealidad. Lo que se implementa en *Matlab* a través de la integración numérica de Runge-Kutta siguiendo la metodología anterior. El rango de variación de la frecuencia de la estructura se considera de un $\pm 10\%$.

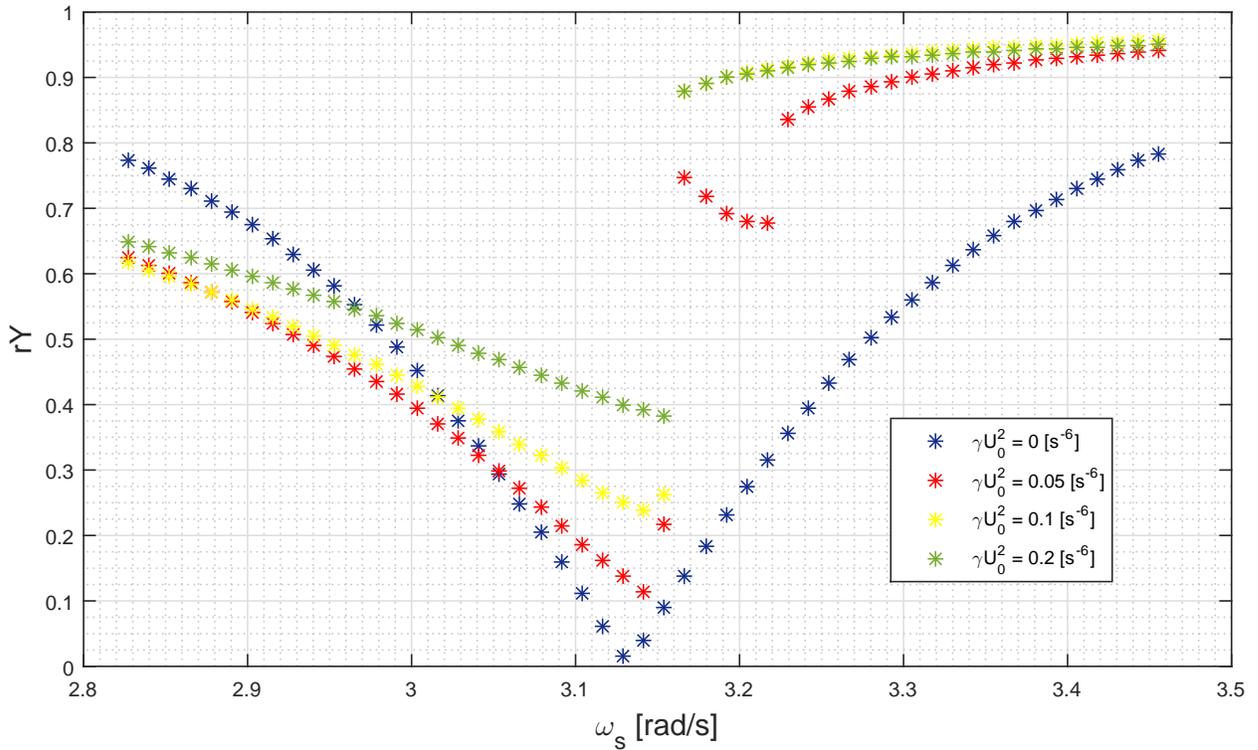


Figura 5.8: Curva de decisión para estructura excitada en resonancia, para distintas no linealidades.

La Figura 5.8 muestra cómo cambia el remanente de la vibración r_γ a medida que se cambia la frecuencia natural de la estructura, donde se nota que el caso lineal varía simétricamente para aumentos o disminución de la rigidez, mientras que al agregar no linealidad aparece un salto en la respuesta, lo que había quedado retratado en la Figura 5.4 y 5.5, y que da cuenta de la sensibilidad que tiene el sistema ante la sintonización.

La curva azul está por bajo las otras para valores mayores a $0,95\pi$ [rad/s], lo que dice que para esos casos considerar un AMS lineal ofrece una mejor reducción de la respuesta. Sin embargo, cuando la frecuencia natural disminuye bajo dicho valor las respuestas no lineales mejoran la reducción, pero se debe tener especial cuidado ya que se muestra que una no linealidad baja con $\gamma U_0^2 = 0,05$ [s⁻⁶], pasa bajo la curva lineal en una frecuencia mayor

que las otras, sin embargo, si se sigue disminuyendo la frecuencia de la estructura, una no linealidad más alta es la que genera la mayor reducción. Por lo que subestimar la frecuencia del sistema puede generar que la presencia de no linealidad ofrezca una reducción de la respuesta mayor al caso lineal.

5.3. Influencia de la masa del AMS en la Respuesta Armónica

La efectividad de la reducción de la respuesta lograda por un AMS lineal depende en gran medida de la masa del dispositivo, aumentando considerablemente la reducción para relaciones de masa grandes (Domizio et al. (2015)). En esta sección se analiza dicho efecto considerando un $r = 10\%$. Utilizando los AMS determinados en la Tabla 5.2, pero recordando que éstos eran óptimos para el caso de $r = 1\%$. Se consideran dichos AMS debido a que aumentar la masa del dispositivo requiere de grandes no linealidades para observar los mismos efectos que las secciones anteriores lo que escapa de los alcances del trabajo realizado.

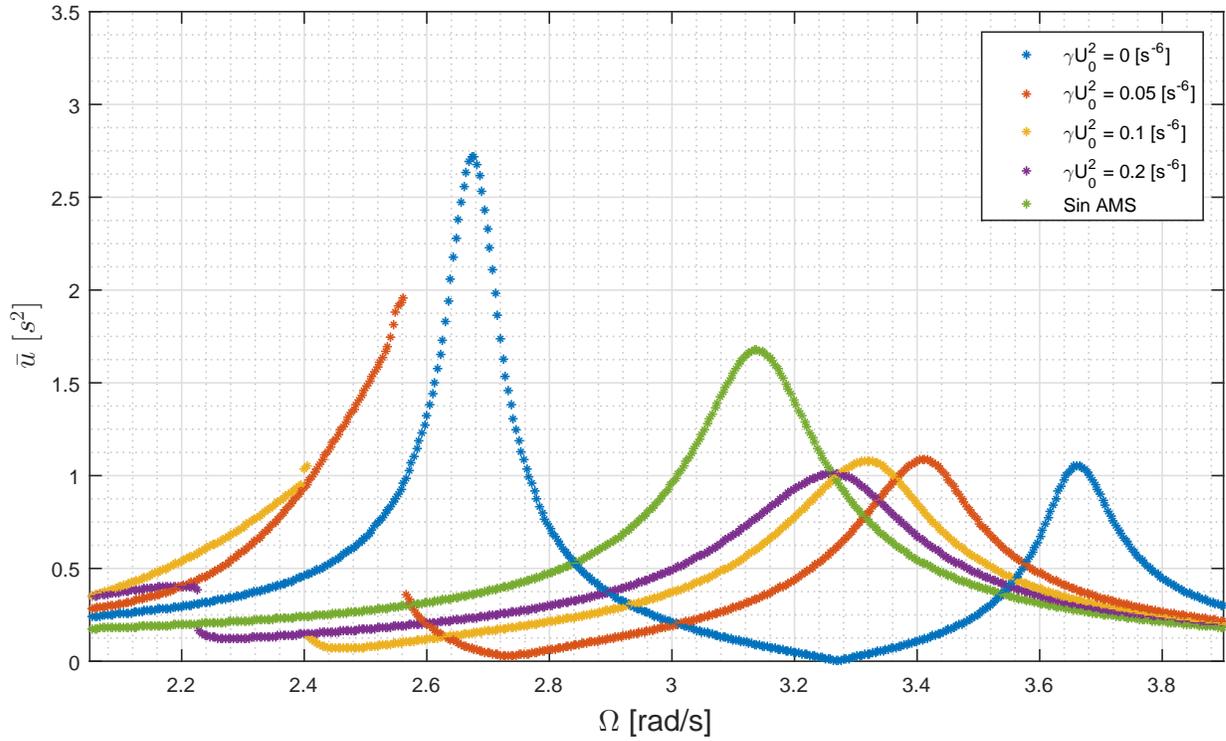
5.3.1. Excitación Monofrecuencial Variable

Se realiza un proceso similar al Capítulo 5.2.1 cambiando la relación de masas a la estipulada. En la Figura 5.9 y 5.10 en comparación con la Figura 5.4 y 5.5 se puede notar que aumentar la relación de masas genera que los lóbulos de la curva lineal en color azul se separen en el eje de las frecuencias, donde también se muestra que un aumento en la masa del dispositivo genera una cierta independencia de la sintonización, ya que para este caso el ancho de banda en el que la curva azul pasa por debajo de la curva verde es más grande que el encontrado en la Figura 5.6.

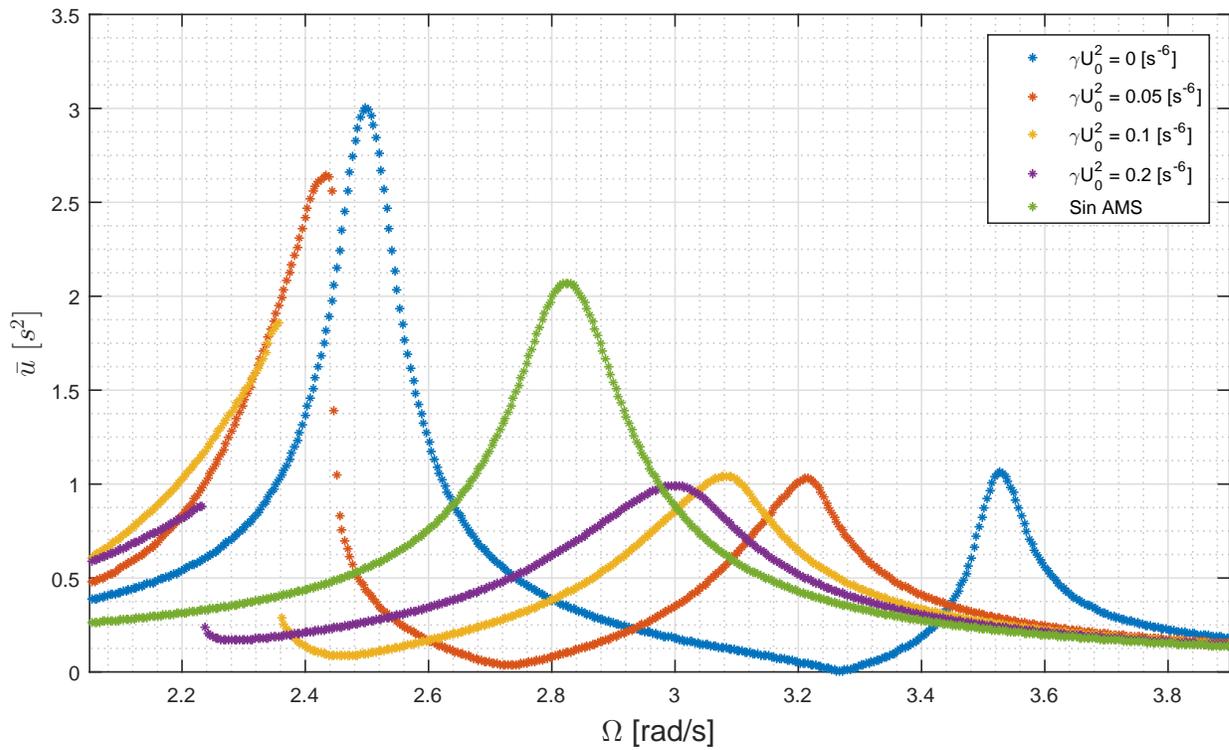
Con respecto a las curvas no lineales, se puede apreciar que pierden la discontinuidad tan acentuada presentada en el capítulo anterior, además que para las desintonizaciones la curva verde con las no lineales se mueven en conjunto, lo que tiene estrecha relación con lo propuesto en Alexander and Schilder (2008).

De la energía asociada a los sistemas, Figura 5.11 y 5.12, se puede concluir algo similar a la Figura 5.6 y 5.7, sólo que ahora el caso lineal tiene menos energía que el caso de la estructura sola, mientras que la disipación lograda con la no linealidad sólo aumenta para no linealidades pequeñas, aumentando para $\gamma U_0^2 > 0,1$.

Cabe destacar que no se estudia el efecto de excitar al sistema en un ancho de banda angosto como en la sección anterior, ya que sólo se quería probar lo estudiado por Domizio et al. (2015), que para lograr el mismo efecto de reducción de la respuesta con una masa más grande del dispositivo es necesario aplicar no linealidades grandes.

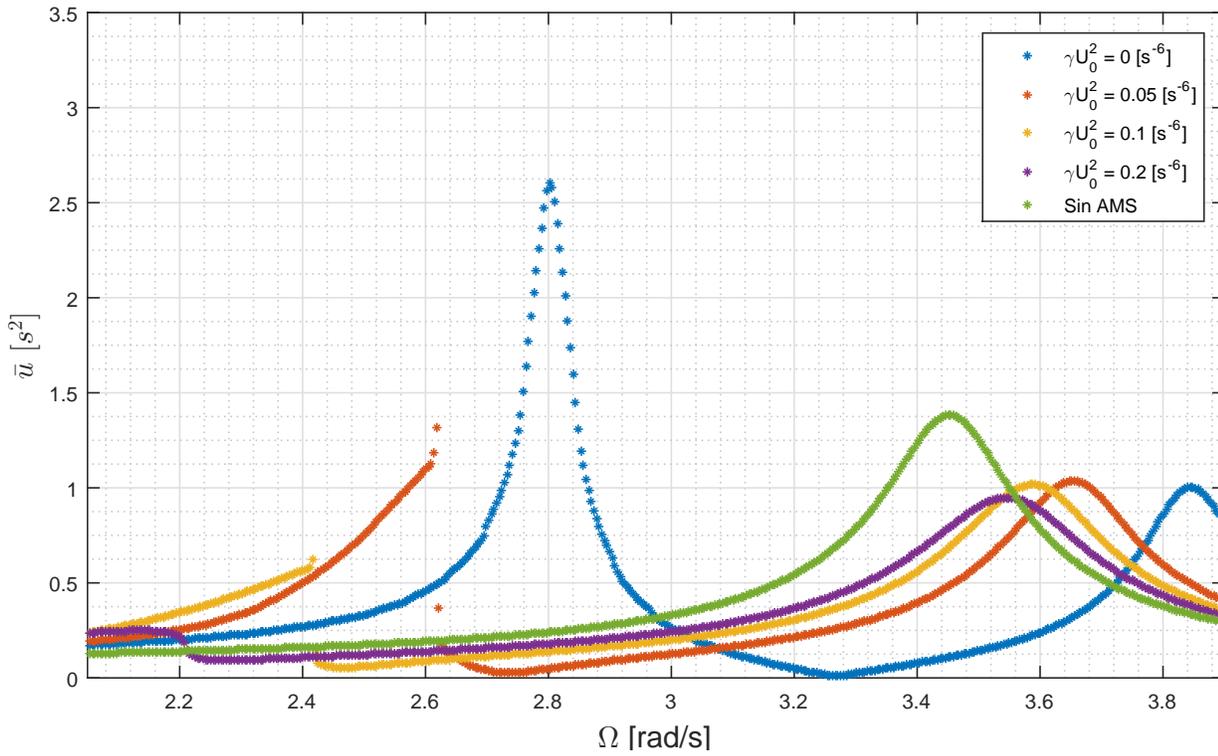


(a) Sintonizado $\omega = \omega_s$



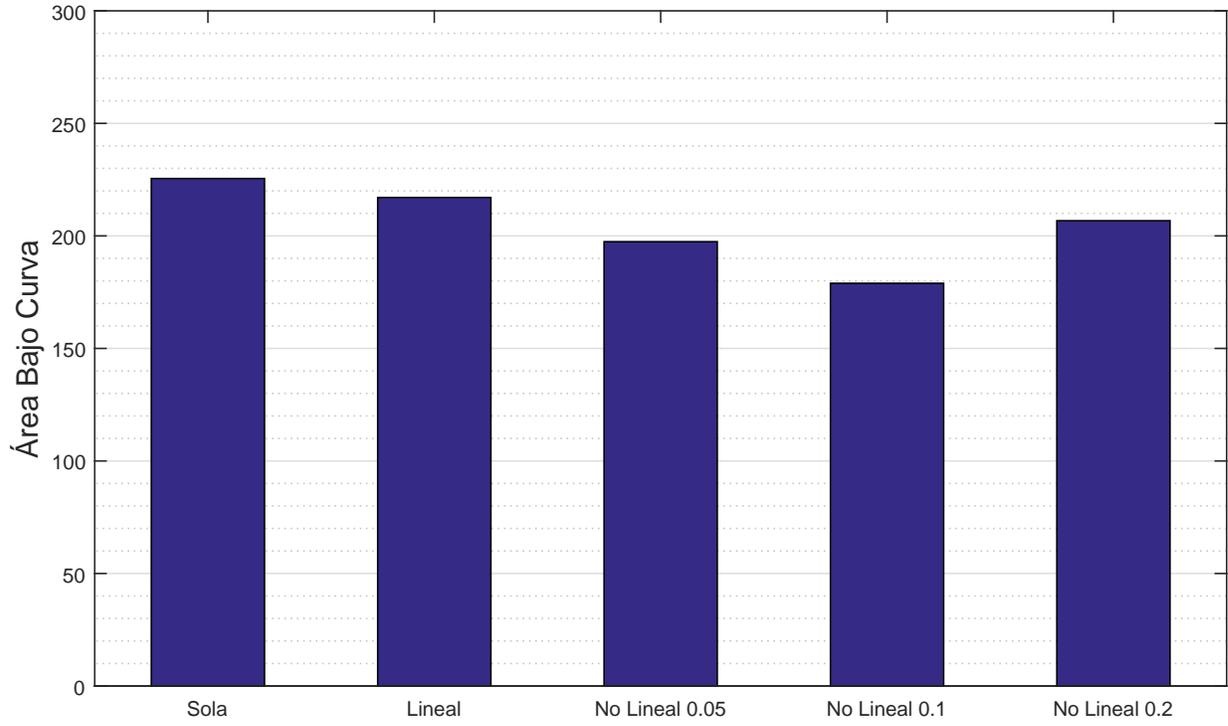
(b) Subestimado $\omega_s^* = 0,9\omega_s$

Figura 5.9: Respuesta en frecuencia del sistema acoplado, notando el efecto del cambio en la estructura, y el aumento de la relación de masas (1).

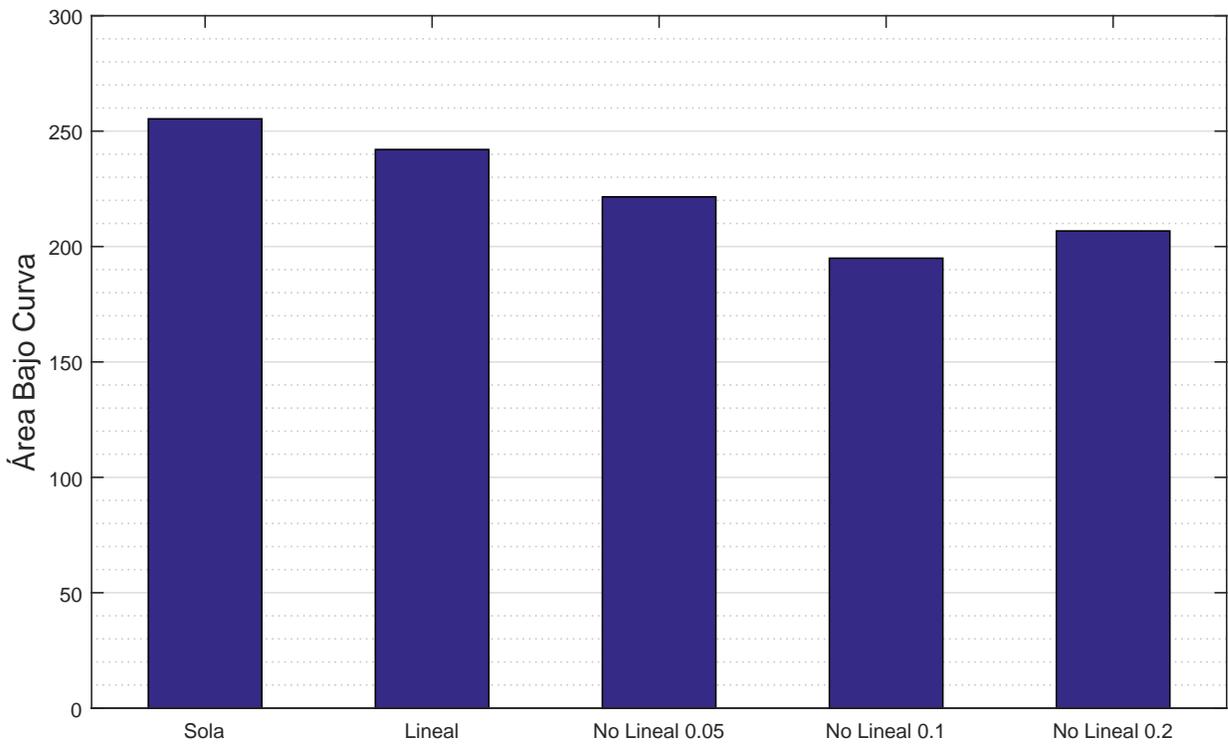


(a) Sobrestimado $\omega_s^* = 1,1\omega_s$

Figura 5.10: Respuesta en frecuencia del sistema acoplado, notando el efecto del cambio en la estructura, y el aumento de la relación de masas (2).

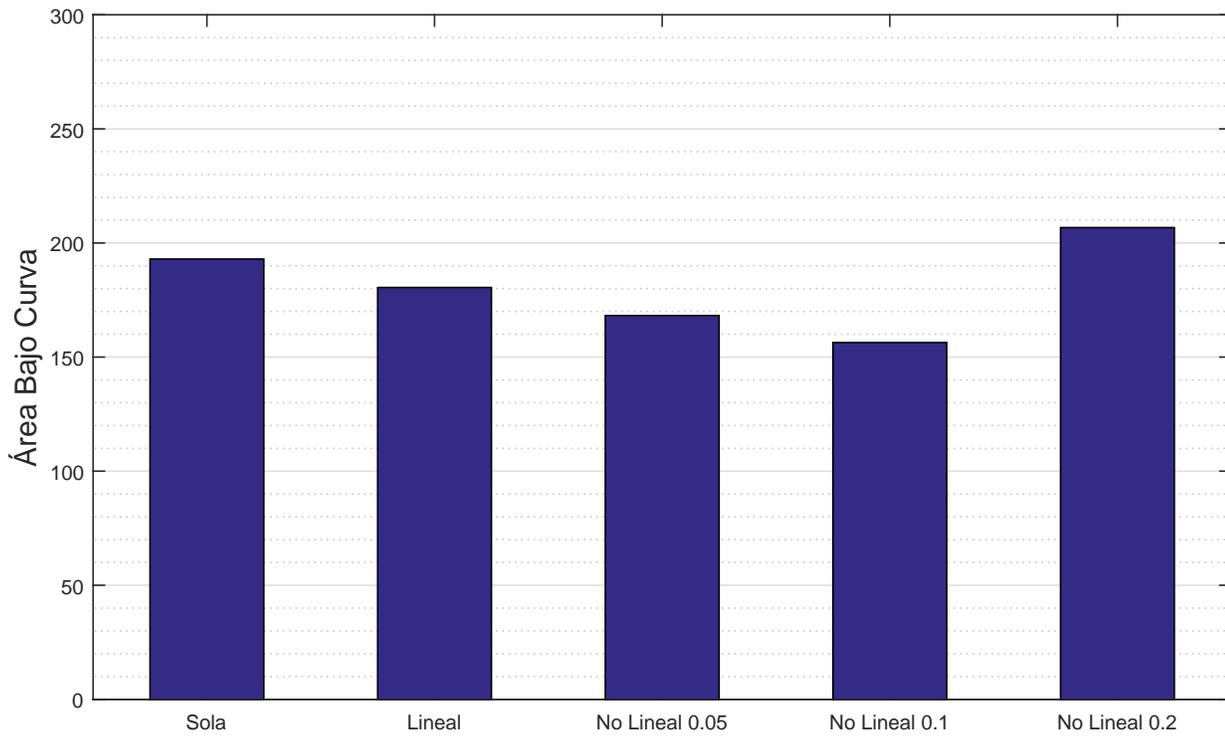


(a) Sintonizado



(b) Subestimado

Figura 5.11: Energía asociada a Figura 5.9 y 5.10 para distintos grados de no linealidad, donde el factor no lineal γU_0^2 posee unidades de $[s^{-6}]$ (1).



(a) Sobrestimado

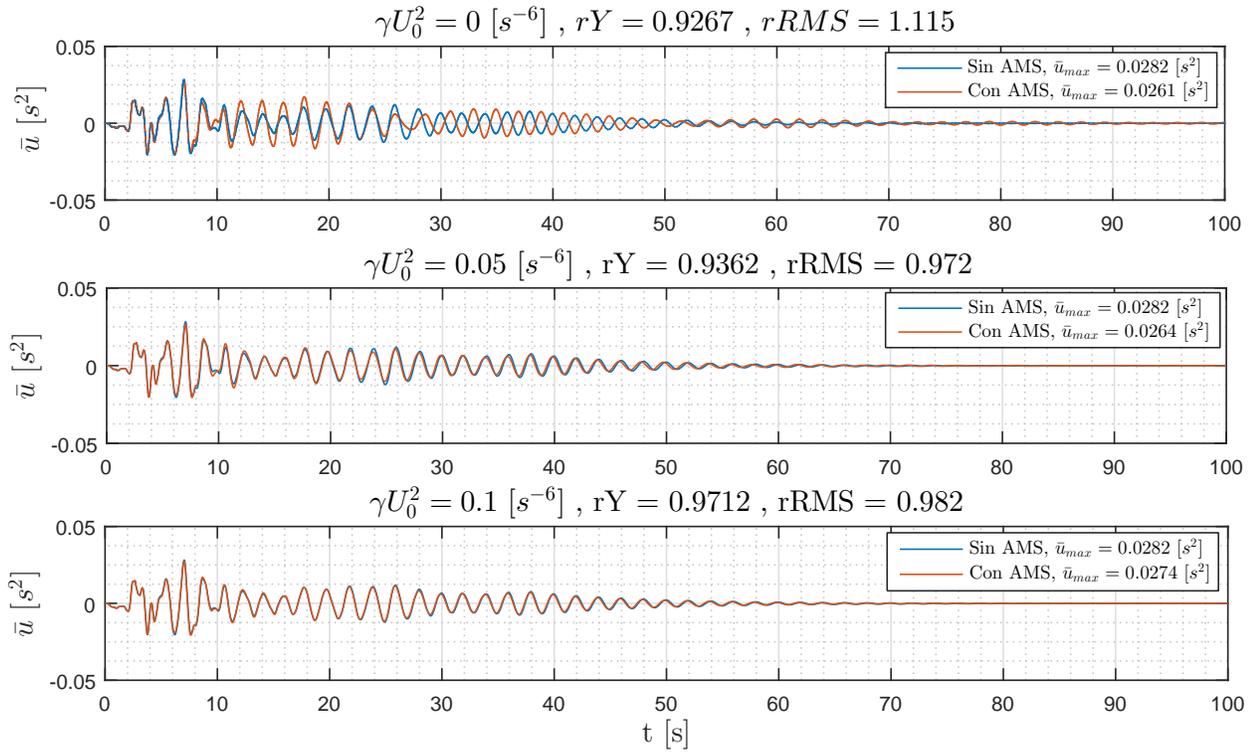
Figura 5.12: Energía asociada a Figura 5.9 y 5.10 para distintos grados de no linealidad, donde el factor no lineal γU_0^2 posee unidades de $[s^{-6}]$ (2).

5.4. Respuesta ante excitación no armónica

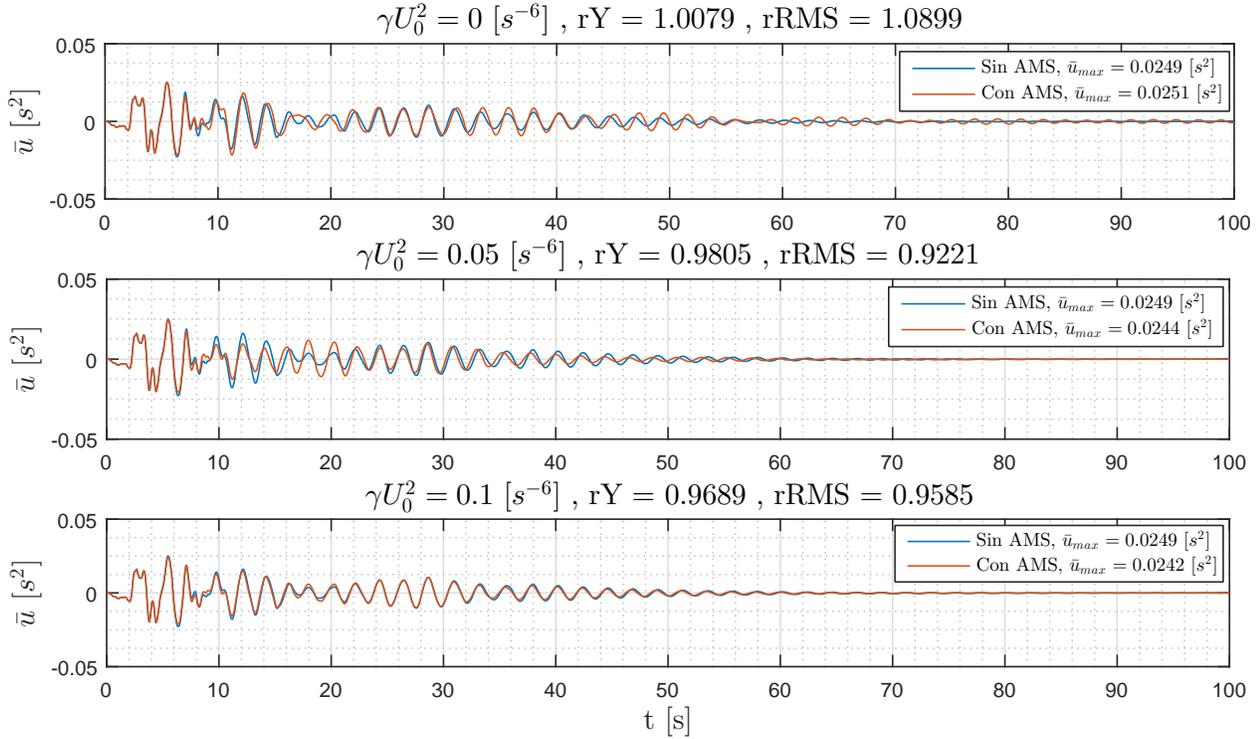
Se estudia la respuesta del dispositivo óptimo de la Tabla 5.2 para una excitación no armónica del tipo sísmica, utilizando el registro sísmico de Loma Prieta, USA 1989, y analizando para ello el efecto de considerar desintonizaciones con la frecuencia natural de la estructura. Se utiliza el mismo proceso computacional del Capítulo 3 donde se presenta la respuesta tiempo-historia del sistema acoplado, utilizando una relación de masas $r = 1\%$, y se sobrepone la respuesta de la estructura sin AMS y con AMS.

En la Figura 5.13 se puede notar que para el caso sintonizado se tiene que el remanente de la reducción de la respuesta aumenta al incrementar la no linealidad, mientras que el RMS disminuye para no linealidades pequeñas pero aumenta para una no linealidad mayor. Además, para el caso lineal se puede notar que la respuesta con disipador y sin él entran en un periodo de antifase, donde se puede observar el efecto del *beating* de la respuesta mencionado en Domizio et al. (2015). El *beating* ocurre cuando la masa inercial que está disipando a la estructura principal vuelve a inyectar energía al sistema a través de un impacto.

Por otro lado, cuando el AMS óptimo está desintonizado de la estructura, el aumentar la no linealidad genera que la reducción de la respuesta aumente, pero el RMS tiene un comportamiento similar al caso sintonizado. Aumentar la no linealidad provoca que la reinserción de energía por parte del AMS a la estructura se reduzca considerablemente en comparación con el caso lineal, incluso cuando aparecen desintonizaciones.



(a) Sintonizado $\omega = \omega_s$



(b) Desintonizado $\omega_s^* = 0,9\omega_s$

Figura 5.13: Respuesta ante excitación no armónica, para distintas no linealidades.

Capítulo 6

Análisis de sensibilidad del sistema ante incertidumbres en la estructura

6.1. Planteamiento del Problema

Se estudia la respuesta del sistema bajo una excitación del tipo armónica, donde los parámetros que definen al AMS se consideran deterministas, mientras que los que definen a la estructura tienen una incertidumbre asociada, que como se estudió en el Capítulo 5 sólo se considerará la frecuencia natural de la estructura como fuente de incertidumbre, ya que variaciones asociadas al amortiguamiento poseen un efecto menor. Se define la relación $r_f = \omega/\omega_s$ como la razón de la frecuencia del AMS entre la frecuencia natural de la estructura, por lo que r_f puede ser definida a través de una función de densidad de probabilidad dada.

Se considera que la estructura siempre se encuentra en resonancia con respecto a la excitación, por lo que $r_0 = 1$. Recordar que este escenario es uno de los más críticos cuando la excitación es monofrecuencial, según lo ya estudiado a lo largo del trabajo. Esta situación ocurre típicamente en estructuras sometidas a cargas de viento, edificios muy altos, alas de avión o cables, tal como se presenta en Xu (1996). La relación de masas utilizada corresponde a la típica usada en aplicaciones civiles $r = 1\%$. Por otro lado, el amortiguamiento modal de la estructura β_s se considera conocido igual a 3% .

Se estudia la respuesta del sistema a través de una función f , definida en la Ecuación (6.1), que estima la vibración remanente ante cargas armónicas, la que depende de los parámetros adimensionales de amortiguamiento modal de la estructura β_s , la relación de frecuencias AMS-estructura r_f , la relación de frecuencias excitación-estructura r_0 , la relación de masas AMS-estructura r , el amortiguamiento modal del dispositivo β y el factor no lineal γU_0^2 . De esta manera, se optimizan los parámetros que definen al AMS, r_f y β para varios escenarios de no linealidad, tal que se genere el menor remanente de la respuesta. Se definen los datos de diseño χ como:

$$\chi = [r_f \quad \beta]$$

Y los datos del modelo Ψ como:

$$\Psi = [\beta_s \quad r_0 \quad r \quad \gamma U_0^2]$$

Entonces la función que estima la reducción de la respuesta es:

$$r_Y \cong f(\chi, \Psi) \Leftrightarrow f(r_f, \beta, \Psi) \quad (6.1)$$

En la Ecuación (6.1) se tiene que r_f es la única razón que es definida como una variable aleatoria, por lo que el valor esperado de la reducción puede escribirse como:

$$E[f] = \int f(r_f | \beta, \Psi) p(r_f) dr_f \quad (6.2)$$

La función de densidad de probabilidad (PDF) de la relación de frecuencias r_f se estima como una distribución Normal:

$$p(r_f) \sim N(\mu_{r_f}, \sigma_{r_f}^2) \quad (6.3)$$

Si se utiliza la Simulación de Monte Carlo para propagar incertidumbres (MacAulay and Giusca (2016)), la Ecuación (6.2) se puede estimar de manera discreta como:

$$E[f] = \frac{1}{K} \sum_i^K f(r_f^i | \beta, \Psi) p(r_f) \quad (6.4)$$

r_f^i viene de la PDF definida en (6.3). Para resolver la Ecuación (6.4) es necesario conocer β , Ψ y adicionalmente $p(r_f)$, por lo que se define una nueva función expresada como:

$$g(\mu_{r_f}, \beta, \Psi) = E[f] = \frac{1}{K} \sum_i^K f(r_f^i | \beta, \Psi) p(r_f) \quad (6.5)$$

La expresión definida en (6.5) corresponde a la función a minimizar, por lo que:

$$(\mu_{r_f}^*, \beta^*) = \text{mín } arg(g(\mu_{r_f}, \beta, \Psi)) \quad (6.6)$$

Entonces, con la expresión (6.6) se encuentra el valor óptimo del amortiguamiento del AMS β^* . Además, debido a que $r_f = \omega/\omega_s$, y la incertidumbre está asociada solamente a la frecuencia ω_s de la estructura, se puede obtener la frecuencia del AMS óptimo ω^* con el μ_{r_f} encontrado.

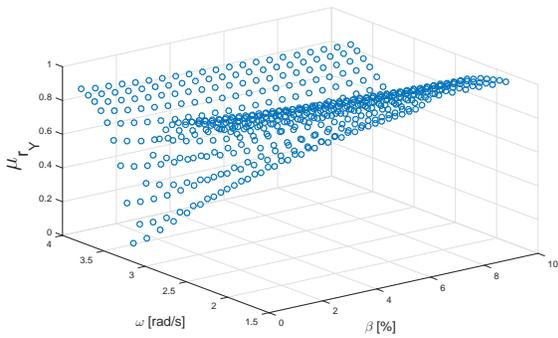
6.2. Optimización

La metodología seguida para optimizar el AMS es similar a la presentada en el Capítulo 5, donde se realiza una búsqueda del mínimo a través de una matriz de combinaciones entre la frecuencia del dispositivo ω y su amortiguamiento β . Para cada punto en ese espacio se considera que la estructura posee incertidumbre, con un valor medio $\mu_{\omega_s} = \pi$ [rad/s] y un coeficiente de variación que toma tres valores $COV_{\omega_s} = [1 \ 5 \ 10]\%$. El COV representa la dispersión de los datos, ya que:

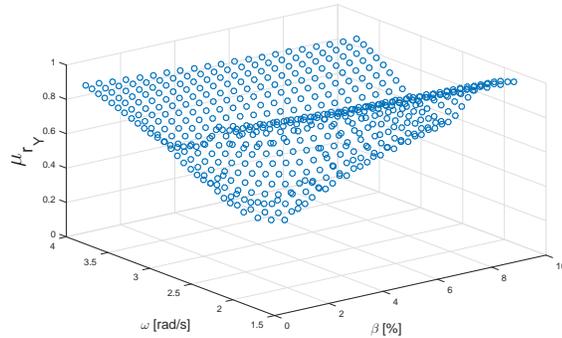
$$COV_{\omega_s} = \frac{\sigma_{\omega_s}}{\mu_{\omega_s}}$$

σ_{ω_s} corresponde a la desviación estándar y μ_{ω_s} el valor medio de la frecuencia natural de la estructura. Además se considera que la distribución de probabilidad de la Ecuación (6.3) posee $K = 1000$ elementos dentro de él. Por cada par (ω, β) del AMS se calculan 1000 valores de r_Y , entonces se concentran estos resultados en tres partes, primero se encuentra el valor medio del remanente (μ_{r_Y}), segundo se obtiene el valor del 10 % excedencia ($10\%r_Y$), y por último la desviación estándar del remanente de la respuesta (σ_{r_Y}) que dividido sobre la media se transforma en el coeficiente de variación de la reducción (COV_{r_Y}).

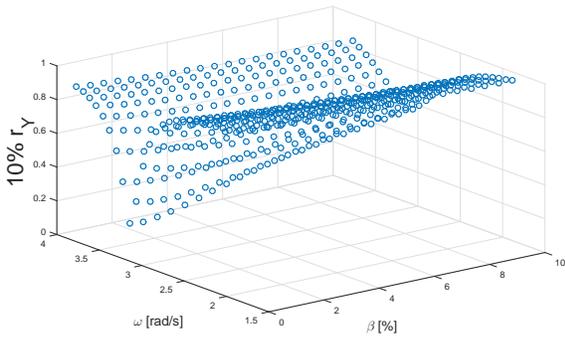
En la Figura 6.1 se utiliza un coeficiente de variación de la frecuencia natural de la estructura de $COV_{\omega_s} = 1\%$, donde se nota que al igual que en Capítulo 5 el valor medio de la reducción μ_{r_Y} posee un salto en su superficie cuando se aumenta la no linealidad, lo que también ocurre cuando se calcula el excedente del 10 % y para el COV_{r_Y} . Sin embargo, se puede notar que la gráfica obtenida para el valor medio y el excedente son similares en su forma, lo que ocurre tanto para el caso lineal como para el no lineal, mientras que la superficie generada por el coeficiente de variación es totalmente distinta, lo que tiene estrecha relación con lo que representa cada parámetro. Como la frecuencia natural de la estructura ω_s se considera con una variación del 1 % es que se produce que el valor medio y excedente de la respuesta sean similares, provocando que el COV_{r_Y} sea casi nulo en todo el espacio. Entonces, para los análisis que vienen a continuación sólo se considera el valor medio μ_{r_Y} y el COV_{r_Y} .



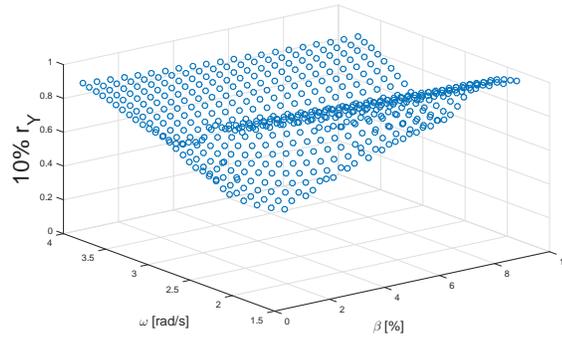
(a) Media r_Y $\gamma U_0^2 = 0$



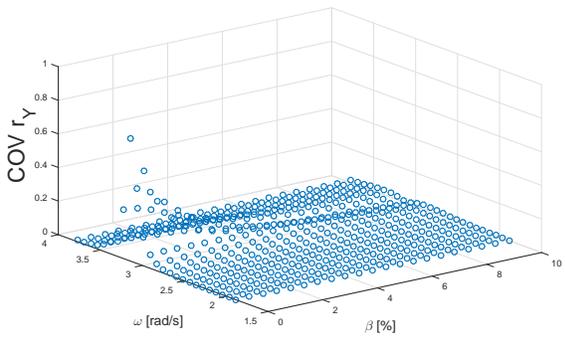
(b) Media r_Y $\gamma U_0^2 = 0,1$



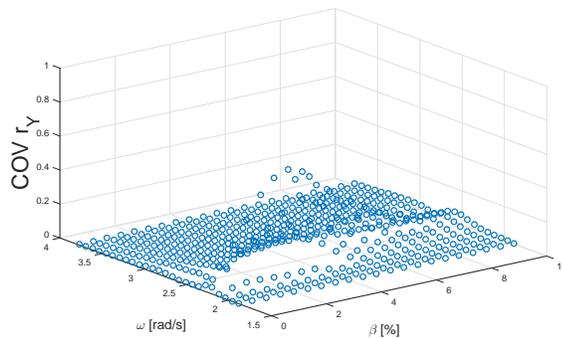
(c) Excedencia r_Y $\gamma U_0^2 = 0$



(d) Excedencia r_Y $\gamma U_0^2 = 0,1$



(e) COV r_Y $\gamma U_0^2 = 0$



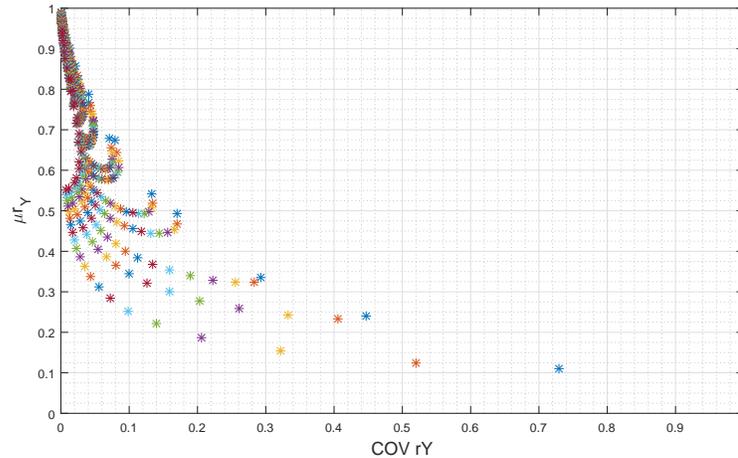
(f) COV r_Y $\gamma U_0^2 = 0,1$

Figura 6.1: Respuesta de la estructura con incertidumbre de $COV\omega_s = 1\%$ ante excitación armónica, donde el factor no lineal γU_0^2 tiene unidades de $[s^{-6}]$.

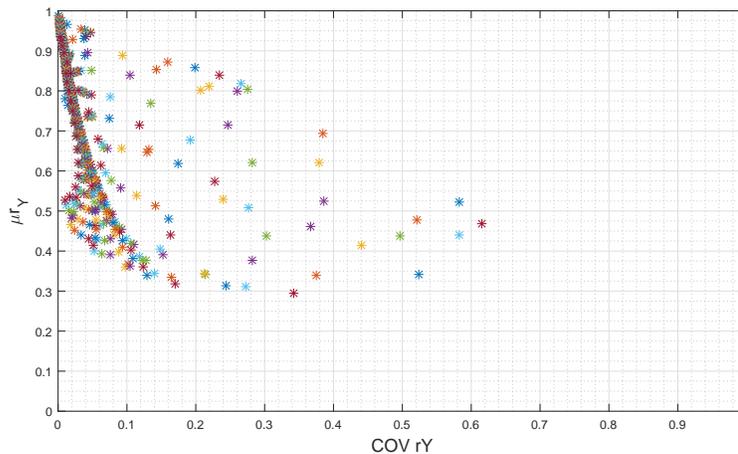
6.3. Pareto

Para encontrar el AMS óptimo de la Figura 6.1 se podría elegir la combinación (ω, β) , donde los valores escogidos para ambos parámetros son los mismos utilizados a lo largo de este trabajo, que genere la menor media de la respuesta μ_{r_Y} , sin embargo quizás este punto podría tener una variación grande o bien una excedencia considerable, o viceversa, es por ello que se decide construir curvas de Pareto para poder adoptar una actitud frente al riesgo, tal como se propone en Pourzeynali et al. (2013).

Se escogen como las variables a optimizar tanto la media de la reducción μ_{r_Y} como el COV_{r_Y} para cada no linealidad, por lo que por cada punto (ω, β) de la Figura 6.1 se van a graficar los pares (μ_{r_Y}, COV_{r_Y}) asociados. Mientras que en la Figura 6.2 se considera un $COV_{\omega_s} = 1\%$, en la cual cada color representa un amortiguamiento del AMS distinto, se nota que para el caso lineal con $\gamma U_0^2 = 0 [s^{-6}]$ los puntos se encuentran relativamente ordenados y siguen una cierta tendencia, lo que se pierde al tener no linealidad.



(a) $\gamma U_0^2 = 0$



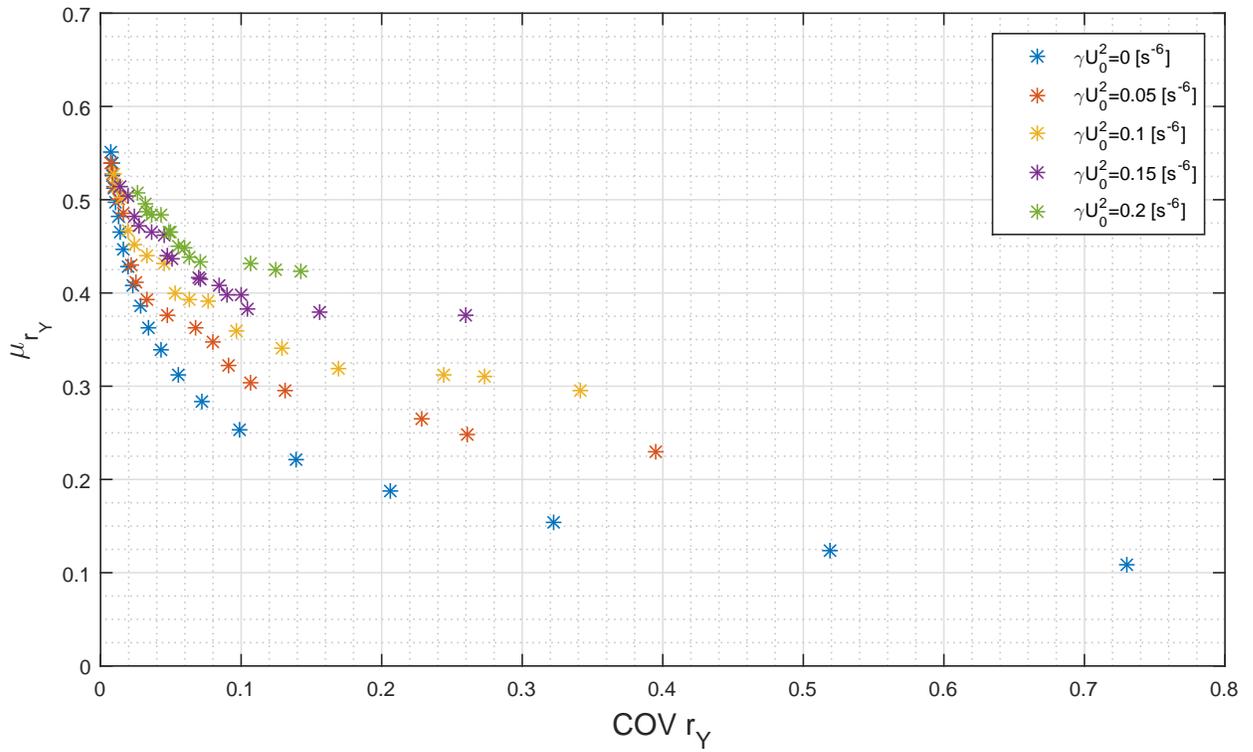
(b) $\gamma U_0^2 = 0,1$

Figura 6.2: Construcción de las curvas de Pareto para $COV_{\omega_s} = 1\%$, donde el factor no lineal γU_0^2 posee unidades de $[s^{-6}]$.

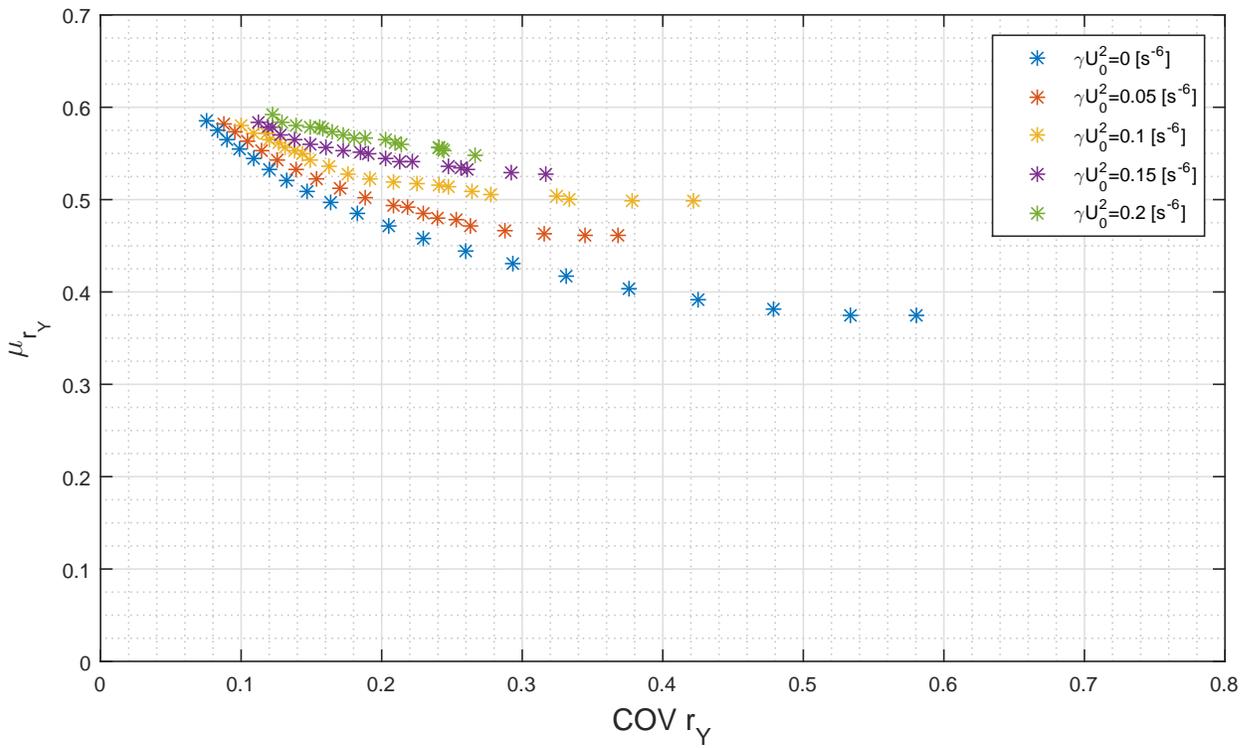
Para poder encontrar los puntos de Pareto en la Figura 6.2 se necesita hallar los puntos que generen estabilidad entre la media y el coeficiente de variación de la reducción de la respuesta, la que se presenta como la mejor combinación posible de $(\mu_{r_Y}, COVr_Y)$ para un par (ω, β) específico, por lo que un aumento o disminución de uno de los parámetros del remanente de la vibración genera un empeoramiento del otro. Se encuentran los puntos de Pareto para cada grado de no linealidad considerando los tres coeficientes de variación establecidos en un comienzo.

En la Figura 6.3 y 6.4 para los tres $COV\omega_s$ se puede notar que a medida que se aumenta la no linealidad, pasando de la curva azul a la verde, la respuesta en términos de media μ_{r_Y} aumenta, sin embargo en términos del coeficiente de variación $COVr_Y$ disminuye. Por lo tanto, al igual que lo analizado en el Capítulo 5 aumentar la no linealidad genera que el sistema tenga una menor dispersión de la respuesta, asociado al parámetro $COVr_Y$. En las tres figuras se puede notar que para lograr una menor media de la reducción es necesario un aumento considerable del coeficiente de variación, lo que se nota aún más cuando el dispositivo es lineal.

Al aumentar la incertidumbre en la estructura mediante el factor $COV\omega_s$ se nota que el ancho de banda donde se concentran los puntos de Pareto se reduce tanto en términos de media μ_{r_Y} como de dispersión de los datos $COVr_Y$, donde se nota que la media del remanente aumenta considerablemente para todas las no linealidades, alcanzando para el caso lineal un remanente del 55% aproximadamente para una gran incertidumbre de la estructura. Sin embargo, se puede decir que la respuesta que ofrece el dispositivo lineal es mejor que la ofrecida por el no lineal en casi todos los casos presentados.

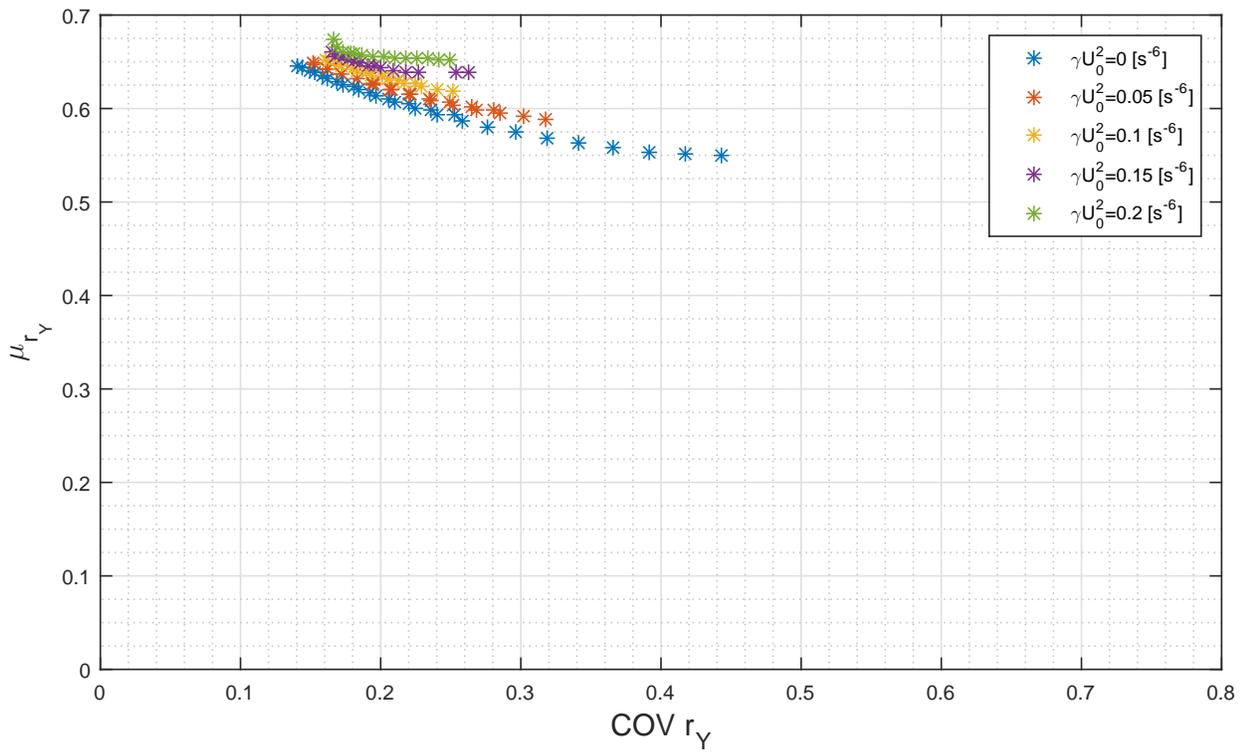


(a) $COV\omega_s = 1\%$



(b) $COV\omega_s = 5\%$

Figura 6.3: Curvas de Pareto de la media y el coeficiente de variación de la reducción para cada no linealidad (1).



(a) $COV \omega_s = 10\%$

Figura 6.4: Curvas de Pareto de la media y el coeficiente de variación de la reducción para cada no linealidad (2).

6.4. Curvas de decisión

6.4.1. Riesgo Neutral

6.4.1.1. Optimización

Se le llama *riesgo neutral* a aquel proceso que sólo busca el óptimo de una de las variables de los puntos de Pareto, en este caso se minimiza la media de la reducción μ_{r_Y} de la Figura 6.3 y 6.4, lo que según lo analizado en la sección anterior tiene asociado coeficientes de variación grandes.

Los resultados se resumen en las siguientes tablas donde se obtienen los parámetros que definen al AMS óptimo, su media de la reducción y coeficiente de variación asociado, lo que se repite para las tres incertidumbres en la frecuencia de la estructura.

Tabla 6.1: Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 1\%$.

$\gamma U_0^2 [s^{-6}]$	$\omega^* [rad/s]$	$\beta^* [\%]$	μ_{r_Y}	$COVr_Y$
0	3,142	0	0,109	0,73
0,05	2,67	1	0,229	0,395
0,1	2,356	3	0,295	0,342

Tabla 6.2: Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 5\%$.

$\gamma U_0^2 [s^{-6}]$	$\omega^* [rad/s]$	$\beta^* [\%]$	μ_{r_Y}	$COVr_Y$
0	3,142	0,5	0,374	0,581
0,05	2,906	2,5	0,46	0,368
0,1	2,513	2	0,498	0,421

Tabla 6.3: Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 10\%$.

$\gamma U_0^2 [s^{-6}]$	$\omega^* [rad/s]$	$\beta^* [\%]$	μ_{r_Y}	$COVr_Y$
0	3,142	1,5	0,55	0,443
0,05	2,985	4	0,589	0,318
0,1	2,906	6	0,619	0,252

De las Tablas 6.1, 6.2 y 6.3 se puede observar que al aumentar la no linealidad para lograr la reducción óptima se necesita una disminución de la frecuencia ω del AMS con respecto a la media de la frecuencia de la estructura μ_{ω_s} , es decir, al igual que en el Capítulo 5 se necesita una desintonización entre la estructura y el dispositivo, sin embargo mientras mayor sea la incertidumbre de la estructura esta desintonización necesaria se hace más pequeña. Cabe destacar que para las tres incertidumbres consideradas, cuando se tiene un dispositivo lineal se necesita que su frecuencia esté sintonizada a la de la estructura, sin embargo comienza a necesitar amortiguación, la que crece a medida que aumenta la incertidumbre.

Por otro lado, el amortiguamiento óptimo crece al aumentar la no linealidad, pero además aumenta de sobremanera al considerar incertidumbres más grandes, necesitando amortiguación hasta para el caso lineal, lo que no ocurría en el Capítulo 5 al considerar la estructura como determinista.

La media de la reducción μ_{r_Y} crece tanto al aumentar la no linealidad como la incertidumbre de la frecuencia natural de la estructura, pero este crecimiento debido a la no linealidad es menor al aumentar la incertidumbre en la estructura, lo que está estrechamente relacionado con lo analizado en la Figura 6.3 y 6.4.

El coeficiente de variación COV_{r_Y} disminuye su valor al aumentar la no linealidad o la incertidumbre de la estructura, nuevamente esta variación al aumentar la no linealidad es menor para incertidumbres más grandes en la estructura.

6.4.1.2. Excitación Monofrecuencial en Estructura con Degradación de su Rigidez

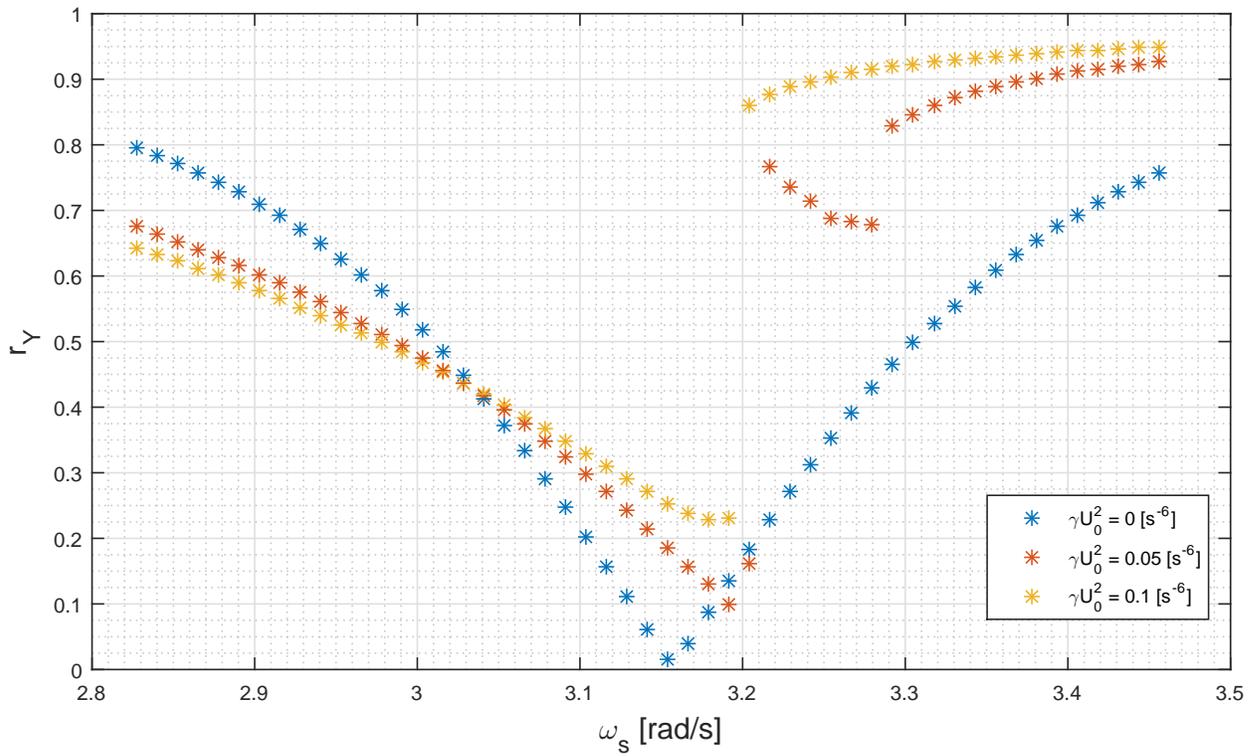
Se establece que la frecuencia de la estructura puede degradarse en el tiempo una vez determinada, por lo que se considera que el valor medio de la frecuencia de la estructura μ_{ω_s} es un parámetro conocido el que puede variar su valor entre un $\pm 10\%$. Se considera que la excitación se encuentra en resonancia con la frecuencia media de la estructura, y que el AMS óptimo es aquel seleccionado en las Tablas 6.1, 6.2 y 6.3. Se sigue el mismo procedimiento del Capítulo 5 para resolver computacionalmente.

En la Figura 6.5 y 6.6 se presentan las curvas de decisión para la optimización considerando riesgo neutral, donde se puede observar un comportamiento similar al mostrado en el Capítulo 5. Se nota que a medida que se aumenta la incertidumbre de la estructura se pierde el quiebre observado en el caso que la estructura era conocida, entonces se podría decir que se pierde el comportamiento caótico.

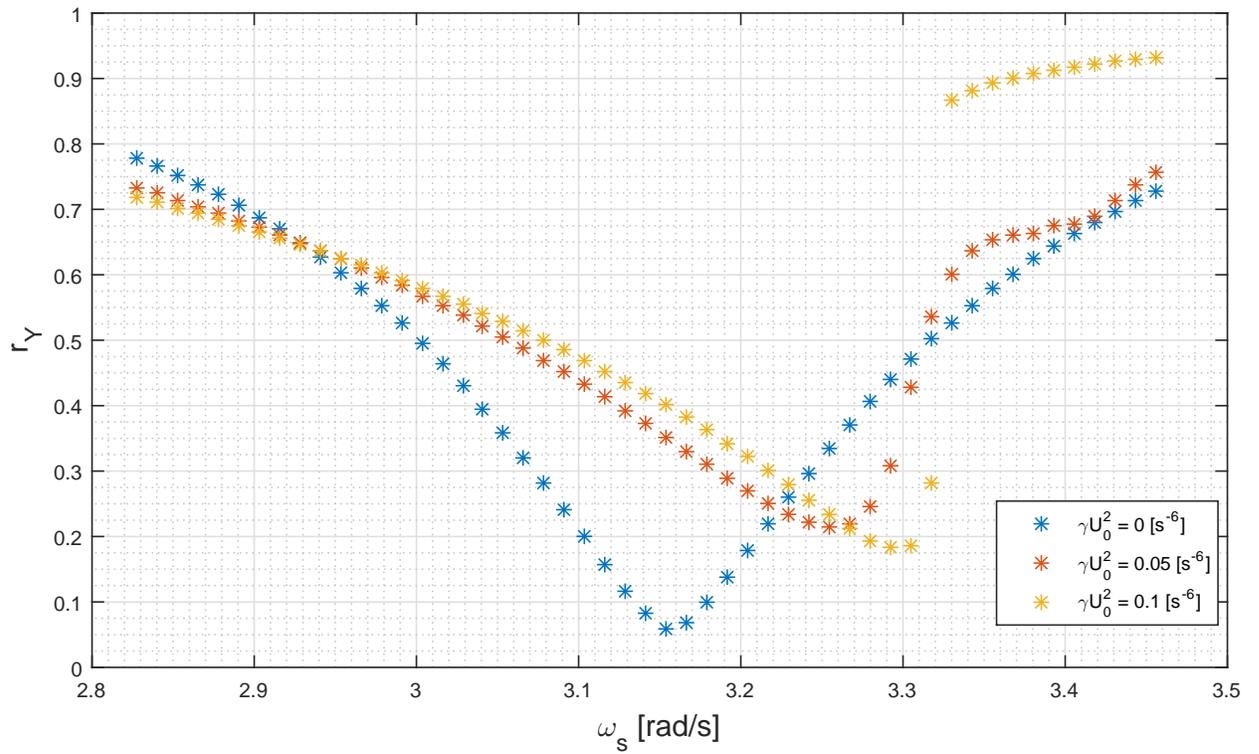
Para un $COV_{\omega_s} = 1\%$ la curva presentada es muy parecida a la del Capítulo 5, donde se puede observar que para una degradación aproximada del 5% de la frecuencia natural, la respuesta no lineal es mejor que la lineal ya que las curvas de color rojo y amarillo pasan por debajo de la curva azul. Sin embargo, se nota que para ambas no linealidades las dos curvas cruzan a la azul en la misma frecuencia, lo que no ocurría al considerar la estructura como determinista en una primera instancia.

Para un $COV_{\omega_s} = 5\%$ se nota que este cruce de las curvas rojas, amarilla y azul, se desplaza a degradaciones mayores de la frecuencia, alcanzando un 90% aproximadamente del valor original, además para una sobreestimación de la frecuencia existe un rango muy acotado en el que la curva amarilla y roja pasan por bajo la curva azul.

Para un $COV_{\omega_s} = 10\%$ se puede observar que para todos los casos de subestimación de la frecuencia de la estructura las respuestas no lineales nunca son mejores que la respuesta lineal, pero que si se sobreestima ω_s se nota una mejoría en la respuesta al considerar no linealidades, lo que ocurre aproximadamente al aumentar un 5% el valor original.



(a) $COV\omega_s = 1\%$



(b) $COV\omega_s = 5\%$

Figura 6.5: Curvas de decisión para excitación en resonancia con el valor medio de la frecuencia de la estructura bajo riesgo neutral (1).

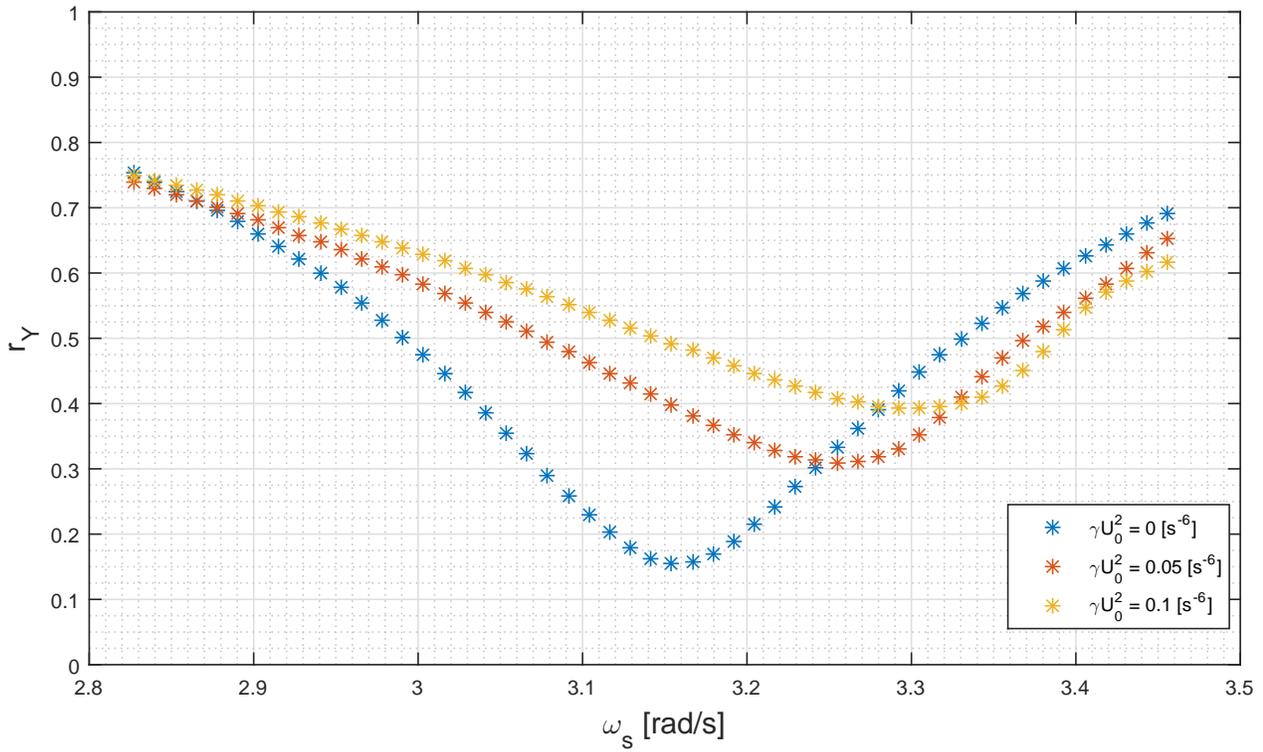


Figura 6.6: Curvas de decisión para excitación en resonancia con el valor medio de la frecuencia de la estructura bajo riesgo neutral (2).

Entonces, agregar no linealidad al dispositivo sólo ofrece una mejoría de la respuesta cuando la incertidumbre de la estructura es baja y además se produjo una degradación de la rigidez en el tiempo de al menos un 5 %.

6.4.2. Adverso al Riesgo

6.4.2.1. Optimización

Se le llama *adverso al riesgo* a aquel proceso que busca la mejor combinación de las variables, por lo que se encuentra el punto que minimiza al mismo tiempo tanto la media μ_{r_Y} como el coeficiente de variación $COVr_Y$ de la reducción, entonces lo que se minimiza es la distancia d que tiene cada punto del Pareto de la Figura 6.3 y 6.4 al cero de la gráfica correspondiente, es decir:

$$\text{mín} \left(d = \sqrt{\mu_{r_Y}^2 + COVr_Y^2} \right)$$

Los resultados se resumen en las siguientes tablas donde se obtienen los parámetros que definen al AMS óptimo, su media de la reducción y coeficiente de variación asociado. Lo que se repite para las tres incertidumbres de la frecuencia de la estructura.

Tabla 6.4: Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 1\%$.

$\gamma U_0^2 [s^{-6}]$	$\omega^* [rad/s]$	$\beta^* [\%]$	μ_{r_Y}	$COVr_Y$
0	3,142	2	0,221	0,139
0,05	2,827	3,5	0,304	0,107
0,1	2,435	3	0,319	0,169

Tabla 6.5: Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 5\%$.

$\gamma U_0^2 [s^{-6}]$	$\omega^* [rad/s]$	$\beta^* [\%]$	μ_{r_Y}	$COVr_Y$
0	3,142	4,5	0,458	0,23
0,05	2,985	5,5	0,493	0,208
0,1	2,827	6,5	0,522	0,192

Tabla 6.6: Parámetros del AMS óptimo para $COV\omega_s = 10\%$.

$\gamma U_0^2 [s^{-6}]$	$\omega^* [rad/s]$	$\beta^* [\%]$	μ_{r_Y}	$COVr_Y$
0	3,142	6	0,594	0,241
0,05	2,985	7	0,615	0,221
0,1	2,906	7,5	0,627	0,217

El análisis que se puede hacer de las Tablas 6.4, 6.5 y 6.6 es idéntico al realizado de las Tablas 6.1, 6.2 y 6.3, donde se debe destacar que ahora la necesidad de tener amortiguamiento

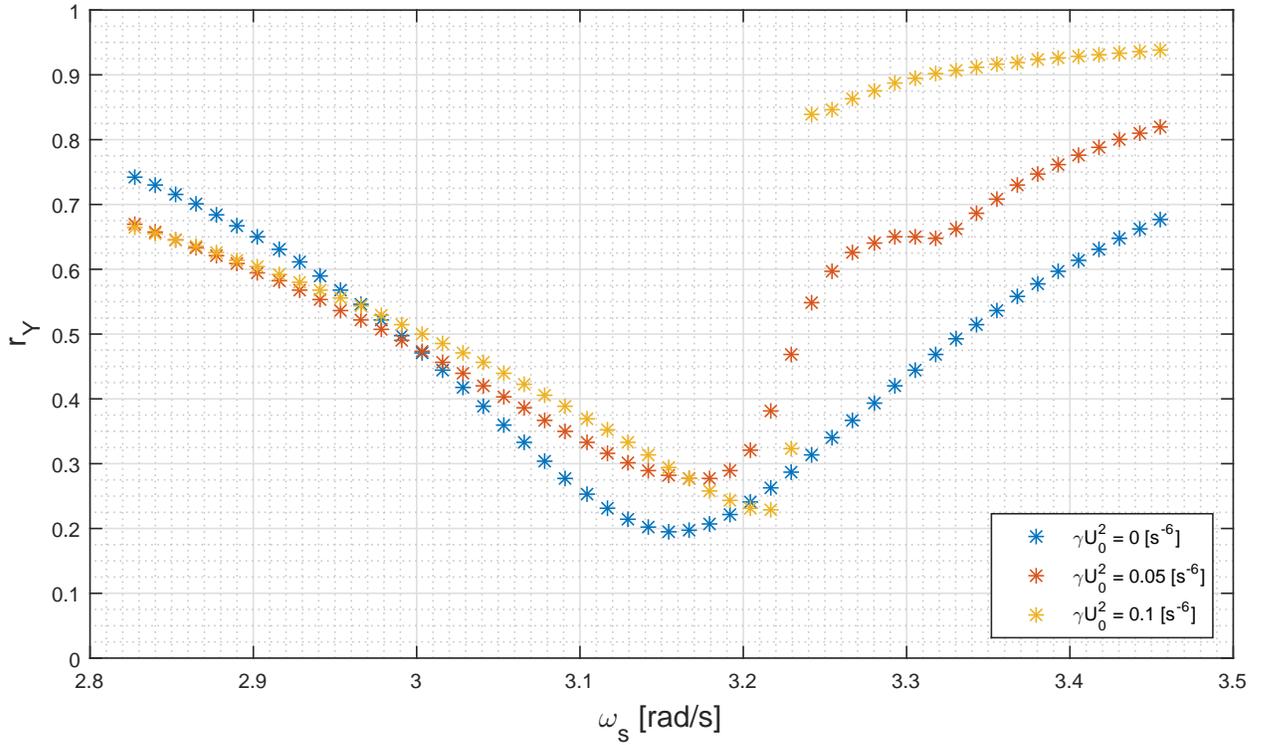
en el caso lineal es crítica, ya que hasta para el caso donde el $COV\omega_s$ es pequeño se necesita una amortiguación del 2%, lo que no ocurría cuando se consideraba una posición ante el *riesgo neutral*.

Además, la media de la reducción no aumenta tanto con respecto a la no linealidad como al considerar *riesgo neutral*. Por otro lado, la variación de la reducción se mantiene relativamente constante al cambiar la no linealidad, lo que pasa para las tres incertidumbres de la estructura. Por lo tanto, optimizar ambas variables a la vez genera que la respuesta que ofrece el AMS óptimo no dependa en gran manera del grado de no linealidad, empeorando considerablemente su valor al tener una incertidumbre en la estructura mayor.

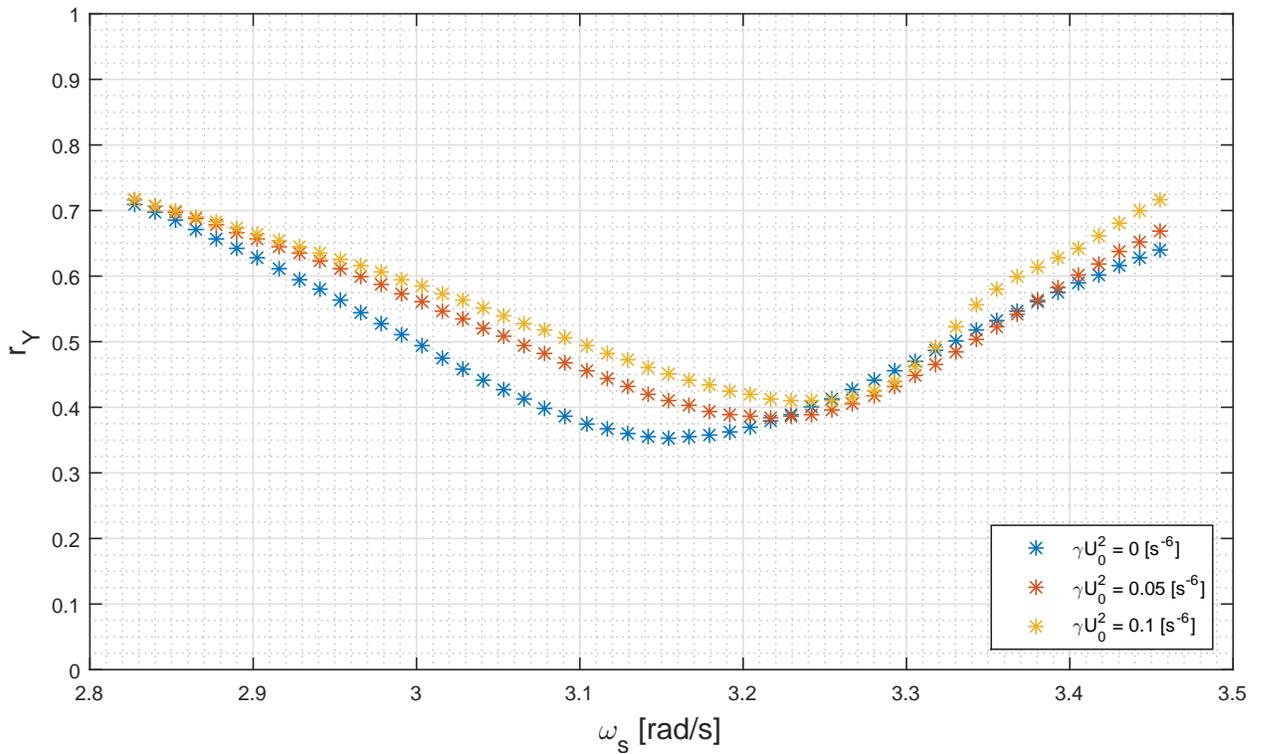
6.4.2.2. Excitación Monofrecuencial en Estructura con Degradación de su Rigidez

Se realiza el mismo análisis que para *riesgo neutral*, en el que se establece que la frecuencia de la estructura puede variar una vez determinada en un rango de $\pm 10\%$, mientras que el AMS óptimo es aquel seleccionado en las Tablas 6.4, 6.5 y 6.6.

El análisis de la Figura 6.7 y 6.8 es similar al realizado de la Figura 6.5 y 6.6, donde se toma como una mejoría en la reducción de la respuesta que la curva amarilla y/o roja pasen por debajo de la azul, lo que sólo se observa cuando $COV\omega_s = 1\%$, donde para una degradación del 5% de la frecuencia de la estructura la respuesta mejora al aumentar la no linealidad, mientras que aumentar la incertidumbre de la estructura no permite en ningún caso una mejoría al considerar una no linealidad más grande, pero sí se tiene que las tres curvas se comporten de manera similar, lo que tiene relación a lo analizado de las Tablas 6.4, 6.5 y 6.6.



(a) $COV\omega_s = 1\%$



(b) $COV\omega_s = 5\%$

Figura 6.7: Curvas de decisión para excitación en resonancia con el valor medio de la frecuencia de la estructura bajo adversidad al riesgo (1).

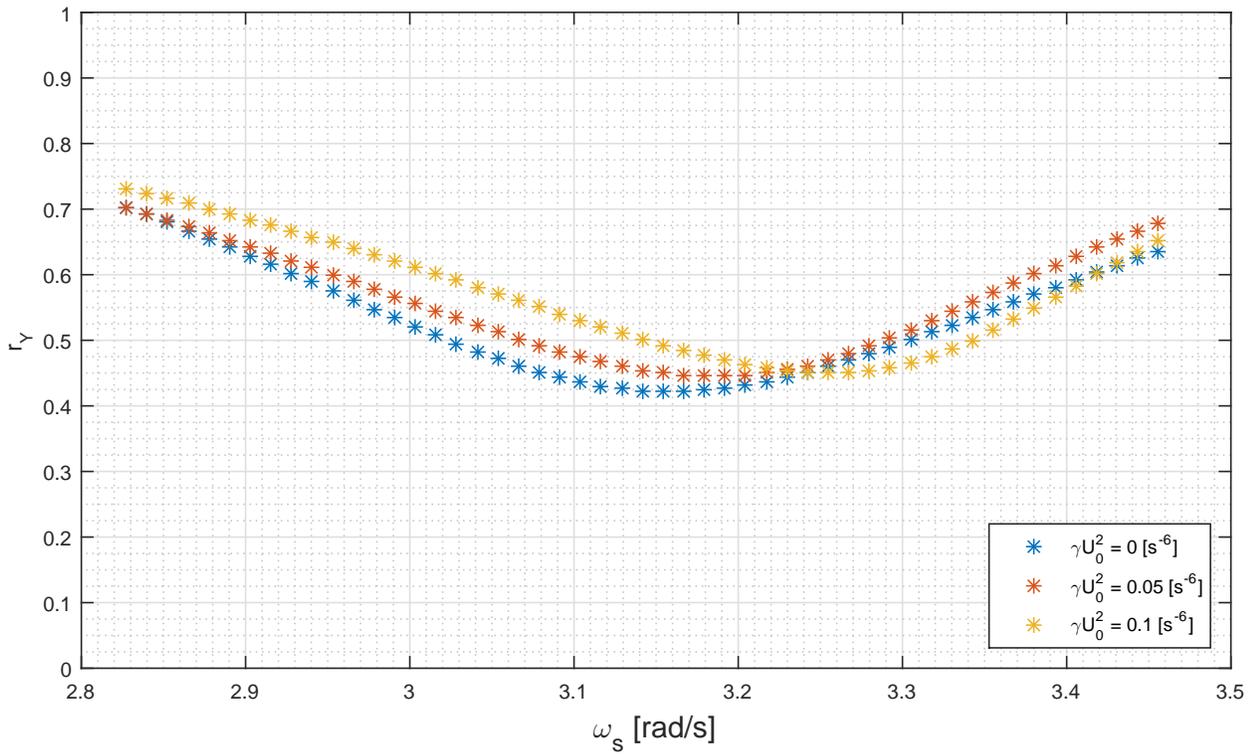


Figura 6.8: Curvas de decisión para excitación en resonancia con el valor medio de la frecuencia de la estructura bajo adversidad al riesgo (2).

Capítulo 7

Aplicación de Resultados

7.1. Parámetros del Problema

En el Capítulo 4 se desarrolló la dinámica del AMS propuesto acoplado a una estructura de un grado de libertad, donde se expresó que las variables físicas que controlan el diseño del AMS son su largo L , su masa m , la rigidez k y el largo natural L_0 de sus resortes, y la disipación del amortiguador viscoso C , mientras que el espacio paramétrico queda definido por la frecuencia natural ω , la razón de amortiguamiento β y el coeficiente no lineal γ .

Sin embargo, como a través del trabajo ya se encontraron los óptimos de la Ecuación (3.20) para distintos escenarios, ahora se quiere encontrar qué combinación de parámetros físicos son los que resultan en los óptimos obtenidos. Para ello se utiliza un proceso de diseño similar al presentado por Ruiz et al. (2016), donde se establece que a través del metamodelo de Kriging es posible encontrar los puntos de soporte X del metamodelo de entrada x que contiene a las variables físicas, los que relacionados dan el metamodelo de salida paramétrico z .

$$x = [m \quad L \quad k \quad L_0]$$

$$z = [\omega \quad \beta \quad \gamma]$$

Las relaciones entre los parámetros físicos x y z se encuentran en la Ecuación (3.16). Luego, se crea un *Latin Hypercube* de las muestras físicas entre límites establecidos a priori, para luego combinarlos y obtener los puntos de soporte. Como el problema ya se optimizó tanto en el Capítulo 5 como 6 establecer los puntos de soporte es redundante por lo que sólo se crea la base de datos según los parámetros que necesiten ser distribuidos aleatoriamente.

Cabe destacar que para considerar el factor no lineal como γ o bien como γU_0^2 sólo se debe tener cuidado con la excitación ingresada al problema, ya que si esta se encuentra normalizada por su máxima magnitud U_0 , el factor no lineal corresponde a γU_0^2 , en caso contrario es γ . En esta sección el factor no lineal se considera como γ para simplificar el análisis.

7.2. Base de Datos

La base de datos se crea según las relaciones paramétricas establecidas a lo largo del trabajo, donde las relaciones de la Ecuación (3.16) permiten identificar el largo del péndulo L como:

$$L = \frac{g}{\omega^2} \quad (7.1)$$

La frecuencia del AMS ω corresponde a la óptima encontrada bajo la condición escogida por el diseñador. Por otro lado la disipación del amortiguador C viene dada por:

$$C = 2\beta m\omega \quad (7.2)$$

La frecuencia ω y el amortiguamiento β corresponde a los óptimos obtenidos, mientras que la masa del dispositivo m es un valor desconocido que depende de la estructura de soporte, y por lo tanto es la primera variable en ingresar al *Latin Hypercube*, donde se considera que el rango de valores que puede tomar la estructura es $[3 - 40] \times 10^6$ [kg]. El rango de valores escogido proviene del estudio realizado por Ruiz et al. (2016).

Por último de la Ecuación (3.16) se puede obtener el factor no lineal γ , donde se relaciona con la rigidez k y longitud natural L_0 de los resortes, y la masa m del dispositivo. Por lo tanto, las otras dos variables que aparecen en el *Latin Hypercube* son la rigidez y largo natural de los resortes, donde la rigidez k se encuentra entre $[10 - 200]$ [kN/m], y el largo natural L_0 entre $[0,5 - 2,0]$ [m]. Los rangos escogidos son consecuencia directa del rango de la masa de la estructura, y de que sólo sirven valores de γ que estén entre $[0 - 0,5]$ $[(s \cdot m)^{-2}]$.

Cabe destacar que la función *Latin Hypercube* crea un hiperespacio de dimensión $n \times 3$ donde todos los puntos están a la misma distancia dentro de este hiperespacio, muy similar a lo que se conoce como distribución uniforme. El valor n adoptado para la cantidad de combinaciones físicas posibles del factor no lineal se fija en 10^7 , ya que n más grandes incurren en un gran gasto computacional y no aportan nueva información.

7.3. Propuesta para determinar AMS según estructura

A lo largo del trabajo se optimizó el AMS propuesto ante diversas condiciones, las que incluían al tipo de excitación, grado de no linealidad, si la estructura era conocida a priori o si bien poseía incertidumbre. Como se dijo en el análisis del Capítulo 6 la optimización depende netamente del diseñador y de la función objetivo que éste considere pertinente.

Con lo encontrado en los capítulos anteriores se puede dar un acercamiento a lo que podría ser propuesto como una metodología de diseño:

1. Una etapa previa al diseño del dispositivo es conocer la estructura a la cual se quiere acoplar, dejando en claro qué incertidumbre se considera para los parámetros y cuáles son los valores medios del periodo T_s , la amortiguación β_s , y además dejar explícita la masa de la estructura m_s .
2. Establecer mediante los límites físicos de la estructura la relación de masas r con respecto al AMS permitida, lo que permite obtener la masa m que debe tener el dispositivo.
3. Observando las curvas de decisión presentadas en el Capítulo 5 y/o 6, el diseñador puede establecer el nivel de reducción de la respuesta deseado, donde se debe recordar que esta reducción es una razón entre la respuesta con dispositivo y sin él.
4. Una vez establecido el nivel de respuesta deseado se debe escoger la alternativa de no linealidad γ adecuada para dicha reducción de respuesta, considerando el riesgo adoptado en un comienzo.
5. Tomando en cuenta la reducción deseada, el riesgo adoptado y la no linealidad escogida se ingresa de lleno a las curvas de decisión para establecer los parámetros óptimos del AMS, su frecuencia ω y amortiguamiento β .
6. Finalmente, se puede pasar al espacio físico, con las relaciones de la sección anterior, de la respuesta considerando los parámetros del AMS e ingresando a la base de datos, encontrando así todas las combinaciones físicas posibles que permiten generar dicha no linealidad.

7.4. Implementación Ilustrativa

Se ejemplifica a continuación como utilizar los resultados del trabajo presentado. Se establecen los parámetros de la estructura de un grado de libertad ante una excitación armónica, donde su periodo es de $T_s = 2$ [s], posee una amortiguación de $\beta = 3$ [%], y una masa de $m_s = 7,5 \times 10^6$ [kg]. La relación de masas se fija en $r = 1$ [%] por lo que la masa del dispositivo es de $m = 75000$ [kg]. No se consideran incertidumbres en la estructura.

El diseñador busca un dispositivo que sea eficaz en la reducción luego de que la estructura se ha degradado, y que no requiera de una nueva sintonización, donde en la Figura 5.8 se encuentra que el grado de no linealidad que lo satisface es $\gamma = 0,1 [(s \cdot m)^{-2}]$. De la Tabla 5.2 se obtienen los parámetros óptimos del AMS, $\omega = 2,287$ [rad/s] y $\beta = 3,2$ [%]. Con la Ecuación (7.1) se puede obtener el largo L del AMS, que resulta en $L = 1,88$ [m]. Además, con la Ecuación (7.2) es posible obtener la disipación total del dispositivo C , que se obtiene $C = 10978$ [N/m/s], sin embargo la disipación que tiene cada disipador es la mitad a la obtenida, es decir, $C/2 = 5489$ [N/m/s].

Para obtener los parámetros anteriores no era necesario ingresar a la base de datos, ya que esta sirve sólo para obtener los parámetros físicos de los resortes del dispositivo, por lo tanto con el nivel de no linealidad y la masa del dispositivo es posible obtener los parámetros físicos que definen a los resortes, donde se pueden encontrar todas las combinaciones de rigidez k y largo natural L_0 de los resortes que resulten $\gamma = 0,1 [(s \cdot m)^{-2}]$, considerando que la masa es $m = 75000$ [kg].

Conclusión

En este trabajo se ha desarrollado y estudiado la respuesta de un AMS no lineal de rigidez cúbica, donde su principal cualidad es que corresponde al tipo pendular y que además la propia geometría del dispositivo agrega la no linealidad. A lo largo de lo presentado se estudió la respuesta del dispositivo ante diferentes condiciones, en las cuales para una excitación del tipo armónica se optimizó el AMS, mientras que para excitaciones no armónicas sólo se estudió la respuesta que generaba el AMS optimizado para la excitación armónica. Se identificaron así los rangos operativos del dispositivo, y las fuentes de incertidumbre que modifican la respuesta óptima.

Debido a las expresiones que definen la dinámica parametrizada del AMS de la Ecuación 3.20, se concluye que efectivamente el dispositivo se trata de un oscilador de Duffing, donde se puede intuir que el mismo comportamiento extensamente estudiado en Thompson and Stewart (2002) se debiese esperar, es decir que bajo ciertas condiciones el dispositivo se comportaría de manera caótica. Gráficamente la respuesta del dispositivo se pudo caracterizar como caótica debido a que aparecieron saltos en la respuesta ante una excitación monofrecuencial de frecuencia variable. Se pudo observar que tanto el factor no lineal γ como la amplitud de excitación U generan una modificación de la no linealidad en la respuesta, donde se demostró que la amplitud afecta cuadráticamente con respecto a γ , además generan que la amplificación de la respuesta se desplace hacia la derecha de la resonancia, es decir la frecuencia de excitación Ω es más grande que la natural del dispositivo ω . Por otro lado, aumentar la amortiguación β permite controlar la amplificación nuevamente, provocando un sistema lineal con una respuesta menor. Por lo que si se quiere un sistema que responda con baja amplitud se necesitan no linealidades grandes, debido a que un sistema lineal tiende a la amplificación, es decir se puede eliminar la resonancia gracias a la no linealidad, lo que funciona sólo para amortiguaciones bajas ya que esta genera una modificación de la respuesta mucho más importante que el factor γU_0^2 .

Cabe destacar que la respuesta no lineal del dispositivo depende fuertemente de las condiciones iniciales ya que indican en que rama de la respuesta cuasi-periódica se cae, lo que tiene estrecha relación con la definición de oscilador de Duffing, y que se estudió someramente en el trabajo presentado.

Para la estructura, excitar en resonancia presenta uno de los escenarios más desfavorables con respecto a la respuesta, por lo que es justo en ese rango en el que agregar un dispositivo de reducción de vibraciones sintonizado podría generar beneficios en la respuesta. (Domizio et al. (2015)). La amortiguación provoca que el grado de libertad extra se pierda, mismo

efecto que aumentar el factor no lineal γU_0^2 , por lo que si se desea generar una reducción de la respuesta del sistema acoplado es absolutamente necesario que el dispositivo responda libremente a la excitación, lo que tiene sentido si se piensa en que el principio de reducción de la respuesta depende fuertemente de la fuerza inercial que ejerce el dispositivo sobre la estructura, por lo que según lo estudiado son necesarios dispositivos con amortiguación y no linealidad bajos.

La respuesta del sistema acoplado presenta un salto en la superficie cuando se tienen no linealidades, el que se ubica justamente en las cercanías de la máxima reducción que podría generar el dispositivo, por lo que si se estima de mala manera los parámetros de la estructura el dispositivo no lineal no ofrecería una mejora de la respuesta. Cabe destacar que a medida que se aumenta la no linealidad el dispositivo para llegar al óptimo requiere de una mayor amortiguación.

Entonces, esta reducción se ve fuertemente influenciada por la frecuencia natural de la estructura ya que si se sobrestima, el sistema acoplado pierde eficiencia para todos los niveles de no linealidad, mientras que si se subestima, el dispositivo no lineal podría ofrecer una reducción de la respuesta mayor que el lineal. No así con la amortiguación de la estructura que el efecto de su incertidumbre comparada a la de la frecuencia provoca consecuencias menores. Por otro lado, aumentar la relación de masas entre la estructura y el dispositivo provoca un aumento en la reducción de la respuesta en resonancia, además de que el ancho de banda donde esto es efectivo también crece, sin embargo si se llega a salir del rango de sintonización el AMS es capaz de inyectar nuevamente al sistema mucha energía debido a la gran inercia que posee, provocando respuestas mucho más grandes que cuando la relación de masas era menor, tal como se presenta en Domizio et al. (2015).

Para grandes incertidumbres en la estructura tanto la respuesta lineal como no lineal ofrecen niveles similares de reducción de la respuesta media, pero el caso no lineal lo hace con una dispersión menor. Es por tanto que la optimización está fuertemente relacionada a lo que busque el diseñador del proyecto, ya que él es el encargado de proponer la función objetivo del desempeño estructural. En el trabajo presentado se ofrece un análisis del dispositivo cuando la función objetivo está relacionada al remanente de la vibración, ya sea su valor medio o bien el coeficiente de variación.

Como las estructuras en el tiempo presentan una degradación en sus características de diseño original, como por ejemplo la frecuencia natural, el AMS pierde eficiencia en ese periodo ya que comienza a desintonizarse de la frecuencia original para la cual fue diseñado. Según lo estudiado, agregar no linealidad en el dispositivo permite que la influencia de la sintonización sea menor que para el caso lineal, presentando reducciones de la respuesta mayor cuando la degradación de la frecuencia original de la estructura sobrepasa el 5%.

La propuesta para determinar el AMS óptimo que se presenta en el Capítulo 7 es bastante sencilla y sigue el orden lógico bajo el cual se estudió el dispositivo, donde solamente se debe tener especial cuidado con la excitación que se está considerando para diseñar el AMS, ya que es necesario conocer si se encuentra normalizada o no.

Debido al tiempo computacional que requiere el sistema para encontrar un óptimo es que se hace necesario buscar otra manera de localizarlos, ya que los algoritmos convencionales

utilizados en la optimización no sirven para resolver el problema ya que la respuesta de este no tiene segunda derivada continua, la que corresponde en la mayoría de los casos a una condición necesaria de funcionamiento, por lo que se deja abierta esta investigación para quien desee proponer un método de optimización computacionalmente eficiente. Llevar lo estudiado a un modelo real físico se escapa del objetivo del trabajo, pero se deja abierta también esta investigación para quien desee incursionar en este estudio, como también para el que desee complejizar el problema considerando mayor cantidad de fuentes de incertidumbre en el proceso de optimización.

El resultado más importante del trabajo presentado es la parametrización por la máxima excitación U_0 de las expresiones dinámicas, donde se obtuvo que el parámetro no lineal que controla el diseño es γU_0^2 . Además, se corroboró que dicha parametrización no depende de lo que se quiera estudiar, ya que funciona para todos los casos analizados en este trabajo.

Finalmente, según lo presentado a lo largo del trabajo es que se concluye que sería efectivo utilizar la configuración propuesta ante una excitación del tipo armónica y monofrecuencial, conociendo la estructura a priori, y teniendo en cuenta que la frecuencia se degradará en el tiempo.

Bibliografía

- Alexander, N. A. and Schilder, F. (2008). Exploring the performance of a nonlinear tuned mass damper. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1):445–462.
- Chopra, A. K. (2001). *Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering*. Prentice-Hall.
- Christopoulos, C., Filiatrault, A., and Bertero, V. V. (2006). *Principles of passive supplemental damping and seismic isolation*. Iuss press.
- Den Hartog, J. (1956). *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- Di Matteo, A., Pirrotta, A., and Tumminelli, S. (2017). Combining tmd and tlcd: analytical and experimental studies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 167:101–113.
- Domizio, M., Ambrosini, D., and Curadelli, O. (2015). Performance of tuned mass damper against structural collapse due to near fault earthquakes. *Journal of Sound and Vibration*, 336:32–45.
- Farshi, B. and Assadi, A. (2011). Development of a chaotic nonlinear tuned mass damper for optimal vibration response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(11):4514–4523.
- Garrido, B. I. and Sarrazín, M. (2016). Amortiguadores de masa sintonizada en edificios sometidos a registros sísmicos en Chile.
- Guckenheimer, J. and Holmes, P. J. (2013). *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer Science & Business Media.
- Housner, G., Bergman, L. A., Caughey, T. K., Chassiakos, A. G., Claus, R. O., Masri, S. F., Skelton, R. E., Soong, T., Spencer, B., and Yao, J. T. (1997). Structural control: past, present, and future. *Journal of engineering mechanics*, 123(9):897–971.
- Kanamaru, T. (2008). Duffing oscillator. *Scholarpedia*, 3(3):6327. revision #91210.
- Kwon, D. K., Kareem, A., Stansel, R., and Ellingwood, B. R. (2015). Wind load factors for dynamically sensitive structures with uncertainties. *Engineering Structures*, 103:53–62.

- MacAulay, G. D. and Giusca, C. L. (2016). Assessment of uncertainty in structured surfaces using metrological characteristics. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 65(1):533–536.
- Miranda, J. C. (2005). On tuned mass dampers for reducing the seismic response of structures. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 34(7):847–865.
- Parker, T. S. and Chua, L. (2012). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer Science & Business Media.
- Pourzeynali, S., Salimi, S., and Kalesar, H. E. (2013). Robust multi-objective optimization design of tmd control device to reduce tall building responses against earthquake excitations using genetic algorithms. *Scientia Iranica*, 20(2):207–221.
- Rojas, M. A. and Boroschek, R. (2015). Verificación de la respuesta sísmica de un disipador de columna líquida bidireccional.
- Rozas, L. and Boroschek, R. (2009). Reducción de la respuesta estructural por medio del uso de disipadores de masa sintonizada y disipadores de columna líquida sintonizada. *Master's thesis, Universidad de Chile*.
- Ruiz, R., Taflanidis, A., and Lopez-Garcia, D. (2016). Characterization and design of tuned liquid dampers with floating roof considering arbitrary tank cross-sections. *Journal of Sound and Vibration*, 368:36–54.
- Soong, T. T. and Dargush, G. F. (1997). *Passive energy dissipation systems in structural engineering*. Wiley.
- Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. (2002). *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons.
- Ueda, Y. (1979). Randomly transitional phenomena in the system governed by duffing's equation. *Journal of Statistical Physics*, 20(2):181–196.
- Wallach, D. and Thorburn, P. J. (2017). Estimating uncertainty in crop model predictions: Current situation and future prospects.
- Xu, Y. (1996). Parametric study of active mass dampers for wind-excited tall buildings. *Engineering Structures*, 18(1):64 – 76.
- Zhu, S., Zheng, Y., and Fu, Y. (2004). Analysis of non-linear dynamics of a two-degree-of-freedom vibration system with non-linear damping and non-linear spring. *Journal of Sound and Vibration*, 271(1):15–24.