



Transporte y localización en sistemas ópticos discretos

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Camilo Gonzalo Cantillano Carreño

Septiembre, 2017

Director de Tesis: **Dr. Rodrigo A. Vicencio Poblete**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Camilo Gonzalo Cantillano Carreño

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 6 de Septiembre de 2017.

Director de Tesis

Dr. Rodrigo Vicencio Poblete

Comisión de Evaluación de la Tesis

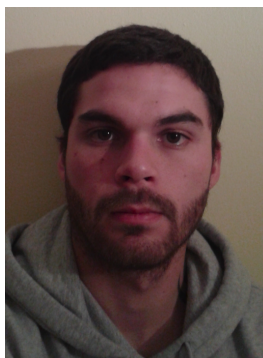
Dr. Marcel Clerc

Dr. Miguel Orszag

Dr. Raúl Cordero

Dedicado a mi madre Ana María y a mi padre Víctor Manuel,
que con su ejemplo me enseñaron a nunca rendirme.

*“En mi falso andar por la inmensidad, un nuevo norte parece orientar,
un sutil color logra incentivar, a este corazón a elegir luchar...”*



BIOGRAFÍA

Un Sábado de Agosto de 1989 en Santiago de Chile, en un país cuya democracia estaba recién siendo recuperada (y momento en el cual mi equipo jugaba en segunda división), llegué al mundo. Me crié junto a mi hermano y hermana bajo el constante cuidado y cariño de mi madre y mi padre, quienes me brindaron todo su apoyo y comprensión durante mi infancia y la etapa escolar. Al momento de elegir una carrera universitaria me incliné por Licenciatura en Física, gracias a mi creciente fascinación por poder describir y predecir ciertos fenómenos y la gran motivación de Héctor Vergara, mi Profesor de Física en el Instituto Nacional. En el transcurso de la carrera me uní al Grupo de Óptica motivado por la posibilidad de hacer investigación tanto teórica como experimental, donde bajo la supervisión del Profesor Rodrigo Vicencio desarrollaría posteriormente el trabajo correspondiente al Magíster en Física. En Septiembre de 2017 en Santiago de Chile, en un país que ha dado un paso importante en materia de derechos de la mujer (y con mi equipo como el último campeón), hago entrega de una tesis que representa gran parte de una etapa de maduración, trabajo, aprendizaje y muchos buenos momentos que recordaré por el resto de mis días.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer, en primer lugar, a mi madre y a mi padre, ya que sin su apoyo y amor incondicional nada de esto habría sido posible. Gracias a mis hermanos y hermana, por ser parte de la alegría de todos mis días y por el interés que demuestran con respecto a mis proyectos. Mi eterna gratitud a mi novia Paula por todo su amor, por confiar siempre en mí, por su comprensión en todo momento, y por apoyarme en todas las decisiones que he tomado durante este tiempo.

Muchísimas gracias al Profesor Rodrigo Vicencio, que ha sido parte fundamental de mi formación como investigador, y cuya influencia traspasa enormemente el ámbito puramente académico. Finalmente, deseo agradecer a los integrantes del Grupo de Óptica por hacer tan amenos todos los días de trabajo, en particular a Bastián por todo el tiempo que dedicó a discutir espontáneamente ideas conmigo.

Mi permanencia en el programa de Magíster de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile fue posible gracias al financiamiento entregado por el Nucleo Milenio de Óptica Avanzada RC-130001 y la Beca de Pedagogía de Laboratorio otorgada por el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.

Índice

1. Introducción	1
2. Modelo para cristales fotónicos: Ecuación tipo Schrödinger	6
3. Montajes experimentales	18
3.1. Montaje de doble paso	18
3.1.1. Modulación de amplitud	20
3.1.2. Modulación de fase	21
3.1.3. Método de imágenes y modulación simultánea	23
3.2. Montaje generalizado	25
3.2.1. Calibración de fase	27
4. Cadena unidimensional	28
4.1. Modelo teórico	28
4.1.1. Soluciones estacionarias	28
4.1.2. Difracción discreta	32
4.2. Experimentos	34
4.2.1. Ondas planas	34
4.2.2. Desorden	38
5. Red de Lieb	42
5.1. Modelo teórico	42
5.2. Experimento	46
6. Cinta tipo Grafeno	49
6.1. Modelo teórico	49

6.1.1. Soluciones estacionarias	49
6.1.2. Combinación de anillos	53
6.1.3. Modos de borde	56
6.2. Experimento	61
7. Cinta tipo Grafeno bimodal	64
7.1. Modelo teórico	64
7.1.1. Soluciones estacionarias mixtas	66
7.1.2. Soluciones estacionarias desacopladas	73
7.2. Experimento	75
8. Cinta tipo Grafeno No Lineal	78
8.1. Soluciones no lineales localizadas	78
8.2. Movilidad de soluciones no lineales	82
8.3. Movilidad de anillos no lineales	92
9. Cálculo de modos localizados	96
10. Conclusiones	103
Publicaciones	111

RESUMEN

En esta tesis se investigan de manera teórica, numérica y experimental, diversos sistemas ópticos discretos utilizando el modelo Tight-Binding. En particular, se analizan las principales propiedades de la red fotónica de Lieb y la cinta tipo Grafeno, que poseen banda plana, y cuyos estados localizados se observan mediante un montaje basado en moduladores espaciales de luz. Por otro lado, se genera experimentalmente la condición inicial óptima para excitar dipolos, cuyas propiedades se estudian comparándolas con las del modo fundamental. Posteriormente, al mezclar redes con banda plana y dipolos surge una nueva fenomenología, donde se muestra la observación de anillos dipolares. Se analiza también la cinta de Grafeno considerándola como un sistema no lineal, calculando sus soluciones y buscando movilidad. Finalmente, se discute de manera teórica el origen de los estados de banda plana y se presenta un método para hallarlos.

ABSTRACT

In this thesis, several optical discrete systems are investigated theoretically, numerically and experimentally by means of the Tight-Binding model. In particular, the main features of Lieb photonic lattices and Graphene ribbons are analyzed, and the localized states belonging to their flat bands are observed in a SLMs-based setup. On the other hand, the optimum initial condition to excite dipoles is generated experimentally, and the properties of these states are studied and compared to the ones of the fundamental modes. Next, by mixing flat band lattices and dipoles, new phenomena arise, and the observation of a dipolar ring-like mode is demonstrated. The Graphene-like ribbon is studied as a nonlinear system as well, where its solutions are computed in the pursuit of mobility. Finally, the origin of flat-band states is theoretically discussed and a procedure to find them is presented.

Capítulo 1

Introducción

Desde el sonido hasta los movimientos sísmicos, la propagación de ondas en distintos medios es un fenómeno recurrente en la naturaleza. Debido a la variedad de contextos en los cuales se presenta dicho suceso, surge la necesidad de un estudio exhaustivo de sus propiedades y el desarrollo de un entendimiento acabado de la dinámica que gobierna, por ejemplo, las ondas electromagnéticas [1, 2]. No obstante, cuando el material a través del cual viajan las perturbaciones ya no se considera continuo u homogéneo y pasa a ser discreto, el comportamiento del sistema es completamente distinto. Esto sucede, por ejemplo, en la conducción de electrones en un sólido, donde la partícula negativa se propaga en un medio formado por el arreglo ordenado de átomos.

La comprensión del fenómeno recién descrito ha sido una de las principales motivaciones del estudio de ondas en contextos con un alto grado de discretitud, y compone gran parte de la Física del Estado Sólido [3–5]. Aquí se considera que el electrón está fuertemente ligado al átomo (modelo denominado *Tight-Binding*) y que su función de onda se extiende, en general, sólo hasta los núcleos más próximos, pudiendo solamente “saltar” hasta aquellos sitios (esto se denota *aproximación a primeros vecinos*). En particular, cuando el medio presenta además una configuración espacial repetitiva (una cadena de átomos ordenados, por ejemplo), se origina una *estructura de bandas y gaps*. Esto significa que habrá energías permitidas (bandas) y prohibidas (gaps) para los modos del sistema, en contraste a las ondas en materiales homogéneos donde no existe restricción alguna.

Además, debido a que el sistema es una estructura reiterada (y en principio infinita), las soluciones que pueden propagarse a través de él tendrán también esta característi-

ca y serán extendidas, dependiendo su frecuencia espacial \vec{k} (que pasa a ser discreta) de la periodicidad del medio. Esto fue establecido en el denominado *Teorema de Bloch* [6], el cual se ha utilizado ampliamente para hallar los modos de un sistema que se considera discreto y periódico.

Desde la perspectiva de la Óptica, los fenómenos anteriormente mencionados se analizan describiendo cómo un haz de luz coherente (un láser) viaja en un material donde el índice de refracción \bar{n} varía transversalmente con la posición. Cada zona donde “ \bar{n} ” es mayor se denomina *guía de onda* (el haz tiende a transportarse por allí), y la evolución del campo electromagnético depende de la coordenada asociada al eje de propagación (que por convención es \hat{z}).

Aquí la diferencia de fenomenología entre un medio homogéneo y uno discreto se manifiesta, por ejemplo, al incidir luz localizada. Para el caso continuo, el ancho del láser aumentará con la distancia y la máxima intensidad permanecerá al centro del rayo (difracción de un haz gaussiano). En contraste, al inyectar el campo en una de las guías del material (el cual se denota *crystal fotónico*), la luz se acopla con los sitios cercanos donde \bar{n} es mayor (interacción a primeros vecinos), formando posteriormente un patrón de intensidad donde la zona de incidencia presenta muy baja amplitud. Este fenómeno se denomina *difracción discreta*, y es una manifestación inequívoca de la discretitud del sistema en estudio [7].

Por lo tanto, la función de onda de un electrón en un potencial periódico (conjunto de átomos) evoluciona en el tiempo de la misma forma en que la luz se propaga en un arreglo de guías de onda en la dirección \hat{z} . Debido a esta analogía es que, en parte, se comenzaron a estudiar sistemas ópticos discretos, cuya posibilidad de extrapolar los fenómenos que allí ocurren al contexto de un electrón en un cristal es una de sus principales características. Más aún, las ecuaciones que gobiernan ambos contextos son la ecuación de Schrödinger y la *DLSE* (Ecuación Discreta Lineal de Schrödinger), que tienen la misma forma y por ende la analogía entre los parámetros de los distintos contextos es directa [1, 8].

Dado el creciente interés por el estudio de sistemas ópticos discretos, se desarrollaron y perfeccionaron dos técnicas muy distintas para generar cambios en el índice de refracción (\bar{n}) de un material, cada una optimizada para materiales dieléctricos y no

magnéticos distintos. La primera se denomina *inducción fotorefractiva* y se realiza mediante la inyección de un patrón de luz no difractante a través del material, lo que genera un cambio en “ \bar{n} ” con la misma periodicidad del campo incidente [9]. Esta diferencia en el índice de refracción (“escritura” de guías de onda) se produce por el *efecto electro-óptico* (también llamado *efecto Pockels*), en donde los electrones libres del medio se desplazan como consecuencia de la radiación incidente, y por ende la densidad de partículas varía. A su vez, la escritura se puede revertir (“borrar”) al iluminar el cristal con luz blanca, permitiendo reescribir en él y haciendo de ésta una técnica muy versátil. Adicionalmente, este tipo de medio presenta una respuesta *no lineal saturable* en función de la intensidad (que a potencias intermedias pasa a llamarse *no linealidad cúbica* o *tipo Kerr*), lo que permite investigar una gran variedad de fenómenos [10].

El segundo método para generar arreglos de guías de onda es la *escritura con láser de femtosegundos*, que puede realizarse en materiales como Silicio fundido o Borosilicato [11, 12]. Dicho procedimiento se basa en la radiación localizada de pulsos ultracortos, generando un cambio irreversible en el material y guías permanentes que presentan una nula respuesta no lineal. En general, los resultados experimentales en estas guías son muy similares a los predichos de forma teórica y numérica, siendo estos sistemas bien descritos por la DLSE y permitiendo considerarlos, además, como sistemas conservativos. Debido a lo anterior, esta clase de arreglos formarán la componente experimental a investigar durante la presente tesis.

Las técnicas mencionadas para generar sistemas periódicos discretos han sido la base para la observación de sucesos lineales como difracción discreta [11], *oscilaciones de Bloch* [13] y *solitones discretos* [14], los cuales presentan una naturaleza no lineal. No obstante, dentro de los procesos donde la luz puede ser controlada [15, 16], la localización ha sido uno de los principales objetivos a alcanzar, lo que se ha logrado parcialmente mediante *desorden* [17], creación de *defectos lineales* (donde un elemento de la cadena, por ejemplo un átomo, es diferente al resto) [18, 19] y no linealidad (solitones discretos generados debido al auto-enfocamiento del haz) [20, 21].

En este ámbito han surgido recientemente ciertas geometrías, como la red tipo *Lieb* [22, 23] y *Kagome* [24], que poseen una *banda plana* en su espectro lineal, lo que da paso a la existencia de un modo o estado localizado (denominado también

anillo) no difractante en el sistema. Dicho anillo posee amplitud en un número reducido de sitios del arreglo y ausencia total de luz en el resto del sistema, por lo que es posible también llamarlo *compactón lineal*.

El hecho de que el modo de banda plana no difracte a medida que se propaga posiciona a las redes con banda plana como una solución definitiva al problema de localizar luz, lo que se logra para cualquier valor de la potencia, de forma coherente, y que sólo depende de la condición inicial dada una geometría astuta. Más aún, ya que el estado es lineal y solución de la DLSE, es posible realizar combinaciones de anillos en distintas posiciones del arreglo, generando otro modo del sistema que viajará sin sufrir alteración alguna. Tal característica puede usarse, por ejemplo, para generar un código de luz basado en redes con banda plana [25–27].

Virando ahora la atención hacia una guía de onda como un sistema por sí sola es posible encontrar, dentro de los últimos años, evidencia experimental de la observación de sus estados excitados [28,29]. Esto enriquece enormemente la fenomenología si se tiene en cuenta, por ejemplo, la interacción entre el *modo fundamental* y el primer estado excitado o *dipolo* de la guía, lo que equivale a considerar electrones *híbridos* cuyo estado está compuesto de orbitales *p* y *s*.

Al extender la idea anterior y mezclarla con lo mencionado previamente se hace natural considerar ahora sistemas que presenten banda plana en un contexto donde los sitios sean multimodales, surgiendo eventualmente estados mixtos no difractantes. Esta posibilidad será explorada dentro del presente trabajo y constituye la combinación de sus dos temas principales, bandas planas y dipolos.

Comenzando con la derivación de la DLSE, esta tesis investiga cristales fotónicos desde el más simple (cadena unidimensional) hasta una *cinta de Grafeno* con dipolos, pasando por el arreglo tipo Lieb. En cada caso los sistemas se estudian mediante el modelo teórico y simulaciones numéricas, buscando las condiciones óptimas para posteriormente observar la fenomenología deseada. Durante los experimentos se hace uso de un *método de transporte de imágenes*, que permite (entre otras cosas) crear condiciones iniciales arbitrarias a ser inyectadas en el arreglo, excitando tanto dipolos en las guías de onda como estados localizados en redes con banda plana.

Se explorará también de manera numérica la cinta tipo Grafeno considerándola como

un sistema isotrópico y no lineal cúbico, donde se rastrearán soluciones localizadas y su estabilidad lineal, potencia, energía, etc. Surgen aquí los anillos del sistema como soluciones exactas de la DNLSE (*compactones*), y se indaga en la posible movilidad de modos no lineales, poniendo especial atención en los estados de banda plana. Finalmente, se discute teóricamente un procedimiento para hallar los modos localizados de un arreglo, originado desde una perspectiva inversa a la propuesta en [30].

Capítulo 2

Modelo para cristales fotónicos: Ecuación tipo Schrödinger

Con el objetivo de comprender la dinámica que experimenta la luz en sistemas que poseen cierta discretitud y periodicidad, es necesario acudir a la teoría de ondas electromagnéticas propagantes en materiales no conductores. De esta manera, se contará con las herramientas óptimas para modelar el comportamiento del campo cuando está confinado en ciertas zonas del medio, cuya evolución es determinada tanto por la intensidad de la radiación como por la interacción con otras fuentes. Se presenta en este capítulo la deducción de la DNLSE, que gobierna la fenomenología existente en arreglos de guías de onda con no linealidad tipo Kerr, y cuya derivación se basa en la aproximación Tight-Binding.

En un medio dieléctrico, la propagación de un campo electromagnético (siendo la luz el caso de interés) es descrita mediante las *ecuaciones de Maxwell* [1,2]

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

donde \vec{E} y \vec{H} corresponden a los campos eléctrico y magnético, con \vec{J} y ρ las densidades de corriente y carga. A su vez, los vectores de flujo de densidad \vec{D} y \vec{B} dan

cuenta de la respuesta del medio frente a la radiación, y se definen por las relaciones

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{M}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Aquí ϵ_0 y μ_0 son la permitividad eléctrica y magnética del vacío, y \vec{P} y \vec{M} representan las polarizaciones inducidas en el material.

Dado que los sistemas de guías de onda que serán considerados (Silicio fundido y Borosilicato [11,12]) corresponden a medios no magnéticos, se cumple que $\vec{M} = \vec{0}$, y por ende

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (2.4)$$

Por otro lado, en ausencia de cargas libres en el medio se tiene $\vec{J} = \vec{0}$ y $\rho = 0$, por lo que la segunda y tercera ecuación de Maxwell toman la forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \quad (2.6)$$

Se busca ahora obtener una ecuación que describa la propagación de la radiación electromagnética en un medio dado, y que contenga toda la información entregada por las ecuaciones de Maxwell. Para ello se aplica $-\vec{\nabla} \times$ por el lado izquierdo a la relación (2.1), de lo que resulta

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Intercambiando ahora el orden en que el rotor y la derivada temporal actúan en el lado derecho, y usando las ecuaciones (2.4) y (2.5), se obtiene

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Al sustituir \vec{D} mediante (2.3) se llega a

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

donde se analiza a partir de ahora su lado izquierdo, dado por la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}. \quad (2.8)$$

Reemplazando (2.3) en (2.6) resulta

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0, \quad (2.9)$$

donde la polarización se escribe como

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}^L + \vec{P}^{NL}, \quad (2.10)$$

y sus componentes son

$$\vec{P}^L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}, \quad (2.11)$$

$$\vec{P}^{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{j>1} \chi^{(j)} \vec{E}^j. \quad (2.12)$$

Aquí \vec{P}^L y \vec{P}^{NL} se denominan *polarización lineal* y *polarización no lineal* respectivamente, con $\chi^{(j)}(\vec{r}, t)$ el *tensor de susceptibilidad eléctrica* de orden j , que representa las propiedades intrínsecas del medio y cómo éste reacciona ante la presencia de luz. De esta forma, $\epsilon_0 \chi^{(j)}$ relaciona la polarización de orden j con el campo eléctrico a la potencia j , y por lo tanto $\chi^{(1)}$ se denomina *susceptibilidad lineal*.

Es importante mencionar que la susceptibilidad incluye implícitamente causalidad, lo que significa que $\chi^{(j)}(\vec{r}, t)$ representa la respuesta en el instante t del material debido a todas las interacciones ocurridas en el intervalo de tiempo $0 \leq \tau < t$.

La divergencia de (2.10) toma entonces la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \epsilon_0 \sum_{j \geq 1} \vec{\nabla} \cdot (\chi^{(j)} \vec{E}^j), \quad (2.13)$$

cuyo término en la sumatoria viene dado por

$$\vec{\nabla} \cdot (\chi^{(j)} \vec{E}^j) = (\vec{\nabla} \cdot \chi^{(j)}) \vec{E}^j + \chi^{(j)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^j).$$

Considerando que todas las susceptibilidades cumplen

$$\vec{\nabla} \cdot \chi^{(j)} \approx 0 \quad (2.14)$$

(argumento que será corroborado más adelante), se tiene $\vec{\nabla} \cdot (\chi^{(j)} \vec{E}^j) = \chi^{(j)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^j)$, y (2.13) queda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \epsilon_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) \sum_{j \geq 1} \chi^{(j)} f_j(\vec{E}),$$

con $f_j(\vec{E})$ una función polinómica del campo. Sustituyendo ahora $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ en (2.9) se obtiene

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \left[1 + \sum_{j \geq 1} \chi^{(j)} f_j(\vec{E}) \right] = 0,$$

lo que implica $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \approx 0$. Al insertar este resultado en (2.8) se llega a

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E},$$

tomando (2.7) entonces la forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Esta relación se conoce como *ecuación de ondas* para el campo eléctrico (definiendo $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$), y es posible también (realizando un procedimiento análogo) obtener su versión magnética usando como punto de partida la expresión (2.5). Sin embargo, dado que la respuesta de los sistemas a investigar ante un campo magnético es nula ($\vec{M} = \vec{0}$), la ecuación (2.15) entrega toda la dinámica que la luz experimenta en el dieléctrico, y es lo que se busca estudiar a partir de ahora.

Para ello se comienza reescribiendo (2.11) como

$$\vec{P}^L(\vec{r}, t) = \vec{P}_0 + \vec{P}_L = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E} + \epsilon_0 \Delta \chi^{(1)} \vec{E}, \quad (2.16)$$

donde la diferencia $\Delta \chi^{(1)} = \chi^{(1)} - \chi_0$ da cuenta del aumento de la susceptibilidad en ciertas zonas del material, lo que genera una polarización \vec{P}_L .

A continuación, comenzando en el contexto más sencillo, se procede a desarrollar la ecuación de ondas, proponiendo distintas soluciones para el campo eléctrico en cada situación.

Caso homogéneo lineal

Cuando el medio es homogéneo ($\chi^{(1)} = \chi_0$ es constante espacialmente) y lineal se tiene que $\vec{P} = \vec{P}_0$. En este caso, (2.15) puede expresarse de la forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad (2.17)$$

con

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_0}}$$

la velocidad de la luz en el material, que posee un *índice de refracción nominal* definido por $\bar{n}_0 = \sqrt{1 + \chi_0}$. Para resolver (2.17), llamada *ecuación de ondas sin fuente* (ya que el campo afecta homogéneamente el medio), se propone como solución una combinación lineal de modos normales m del sistema,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_m \left[a_m \vec{f}_m(x, y) e^{i(k_m z - \omega_m t)} + c.c. \right]. \quad (2.18)$$

Este *ansatz* considera la propagación de ondas monocromáticas (de frecuencia espacial k_m y temporal ω_m) en la dirección \hat{z} , cuyo perfil transversal (polarizado en cierta dirección) es representado mediante $\vec{f}_m(x, y)$, y que poseen una amplitud a_m .

Reemplazando entonces (2.18) en (2.17) se obtiene la relación

$$\frac{1}{2} \sum_m \left[\left(\nabla_{\perp}^2 - k_m^2 + \frac{\omega_m^2}{v^2} \right) a_m \vec{f}_m(x, y) e^{i(k_m z - \omega_m t)} + c.c. \right] = \vec{0},$$

la cual (dado que se están combinando modos linealmente independientes, y asumiendo amplitudes no nulas) conduce a

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - k_m^2 + \frac{\omega_m^2}{v^2} \right) \vec{f}_m(x, y) = \vec{0}. \quad (2.19)$$

La ecuación anterior es válida para cualquier modo (perfil) transversal $\vec{f}_m(x, y)$, y será de gran utilidad más adelante.

Caso discreto

Con el fin de demostrar la validez de (2.14), se considera ahora $\vec{P} = \vec{P}^L$ y se sustituye (2.11) en (2.15), dando como resultado una velocidad en el medio asociada al índice de refracción

$$\bar{n} = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}.$$

Se debe en este punto recordar que el sistema en estudio presenta un aumento de \bar{n} en ciertos lugares específicos del plano XY (el medio es discreto), lo que da paso a la localización o guiado de luz en dichas zonas, denominadas *guías de onda*. Dado que el cambio en el valor de la susceptibilidad es

$$\Delta\chi^{(1)} = \bar{n}^2 - \bar{n}_0^2,$$

en las guías de onda esta diferencia es máxima, anulándose en el resto del material (*bulk*). Así, el incremento repetitivo de $\chi^{(1)}$ genera un *arreglo de guías de onda* (llamado también *crystal fotónico*), como el mostrado en la Figura 2.1(a).

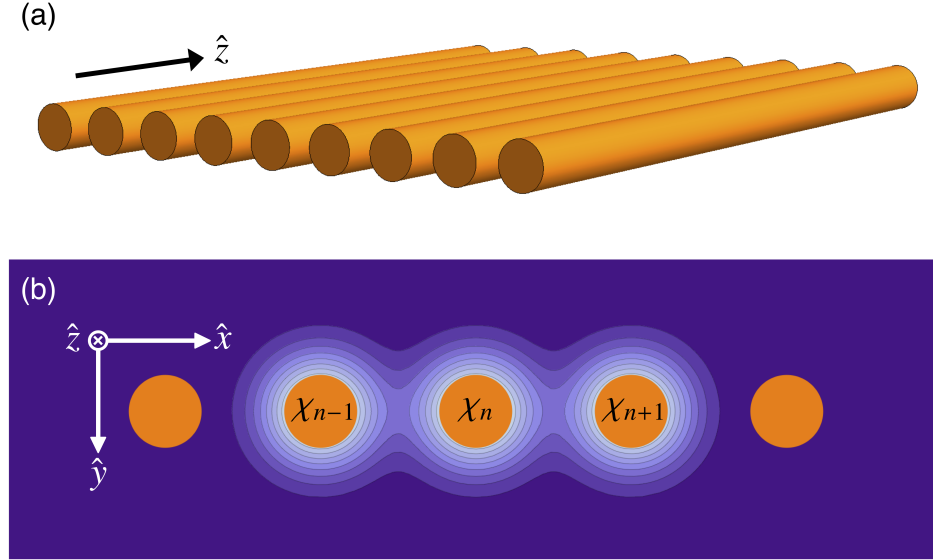


Figura 2.1: (a) Arreglo unidimensional, donde cada cilindro anaranjado representa una guía de onda. (b) Vista transversal del sistema. Cada sitio es descrito mediante la susceptibilidad, y el color púrpura simboliza el material base (*bulk*). Se muestra además la superposición de los modos fundamentales de guías consecutivas.

Teniendo en cuenta que es posible escribir $\bar{n} = \bar{n}_0 + \Delta\bar{n}$, con $\Delta\bar{n}$ la variación de índice de refracción entre el *bulk* y la guía, la expresión anterior toma la forma

$$\Delta\chi^{(1)} = 2\bar{n}_0\Delta\bar{n} + (\Delta\bar{n})^2.$$

Ahora bien, debido a que en los cristales fotónicos a estudiar se tiene que $\Delta\bar{n} \approx 10^{-4}$ [11, 12], el término $(\Delta\bar{n})^2$ se desprecia, llegándose a

$$\Delta\chi^{(1)} = 2\bar{n}_0\Delta\bar{n} \approx 10^{-3}.$$

Espacialmente, la última fórmula significa que $\vec{\nabla} \cdot \chi^{(1)} \approx 0$, lo que sumado a la relación $\chi^{(1)} \gg \chi^{(j)}$ (que se satisface para $j > 1$ [31]) conduce a (2.14).

Volviendo al estudio de la ecuación de ondas, se considera ahora un arreglo en un medio no lineal cuyas guías se denotarán mediante el subíndice n (ver Figura 2.1). Dado que la luz se localiza en las zonas de mayor índice de refracción, se busca ahora resolver (2.15) en el n -ésimo sitio (cada guía de onda pasa a ser un sistema individual), planteando una solución general que tiene como base el ansatz (2.18) y dada por

$$\vec{E}_n(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_m \left[a_{n,m}(z) \vec{f}_{n,m}(x, y) e^{i(k_m z - \omega_m t)} + c.c. \right]. \quad (2.20)$$

Como puede notarse, la única distinción entre esta proposición y (2.18) es la amplitud. Ésta dependerá ahora de la distancia de propagación, ya que (a diferencia de un medio homogéneo) en este caso los distintos sitios son sistemas interactuantes (sus modos se acoplan si están lo suficientemente cerca) como muestra la Figura 2.1(b), pudiendo la luz “saltar” de una guía a otra.

Escribiendo \vec{P} según (2.10) y (2.16), y sustituyendo (2.20) en el lado izquierdo de (2.15) se tiene, para la guía n ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\vec{P}_{L,n} + \vec{P}_n^{NL} \right) &= \frac{1}{2} \sum_m \left[e^{i(k_m z - \omega_m t)} \left\{ a_{n,m}(z) \left(\nabla_{\perp}^2 - k_m^2 + \frac{\omega_m^2}{v^2} \right) \vec{f}_{n,m}(x, y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{d^2 a_{n,m}(z)}{dz^2} + 2ik_m \frac{da_{n,m}(z)}{dz} \right) \vec{f}_{n,m}(x, y) \right\} + c.c. \right], \end{aligned}$$

donde el término asociado a \vec{P}_0 se ha incluido a la diestra de la igualdad, de la misma manera en que se hizo para obtener (2.17).

Reemplazando (2.19) en el primer término de la derecha y haciendo uso de la llamada *aproximación paraxial*:

$$\left| \frac{d^2 a_{n,m}(z)}{dz^2} \right| \ll 2k_m \left| \frac{da_{n,m}(z)}{dz} \right|,$$

la cual asume una variación lenta de la amplitud en la coordenada de propagación, resulta

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\vec{P}_{L,n} + \vec{P}_n^{NL} \right) = \sum_m \left[ik_m \frac{da_{n,m}(z)}{dz} \vec{f}_{n,m}(x, y) e^{i(k_m z - \omega_m t)} + c.c. \right].$$

Considerando ahora los sitios como monomodales (se borra el subíndice m) se obtiene

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\vec{P}_{L,n} + \vec{P}_n^{NL} \right) = \left[ik \frac{da_n(z)}{dz} \vec{f}_n(x, y) e^{i(kz - \omega t)} + c.c. \right], \quad (2.21)$$

donde la polarización lineal viene dada por

$$\vec{P}_{L,n}(\vec{r}, t) = \sum_{n'} \epsilon_0 \Delta \chi_{n'}^{(1)} \vec{E}_{n'}, \quad (2.22)$$

y se denomina *no local* (ya que contribuye no sólo el campo ubicado en la guía n -ésima, sino también el existente en los sitios vecinos). Dado que en el presente modelo se tiene un sistema como el mostrado en la Figura 2.1, donde la luz está fuertemente localizada en cada guía (aproximación llamada *Tight-Binding*, utilizada ampliamente en Física del Estado Sólido [3]), se asumirá que el campo en el sitio n se ve afectado sólo por la presencia de luz en las guías más próximas (aproximación llamada *interacción a primeros vecinos*). Por ende, la sumatoria en (2.22) recorre desde $n - 1$ hasta $n + 1$.

Se reemplaza entonces (2.22) y (2.20) en (2.21), donde al escribir sólo un modo y reordenar resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_n^{NL}}{\partial t^2} = & \left[\omega^2 e^{i(kz - \omega t)} \left(i \frac{k}{\omega^2} \frac{da_n(z)}{dz} \vec{f}_n(x, y) + \frac{\Delta \chi_{n-1}^{(1)}}{2c^2} a_{n-1}(z) \vec{f}_{n-1}(x, y) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Delta \chi_n^{(1)}}{2c^2} a_n(z) \vec{f}_n(x, y) + \frac{\Delta \chi_{n+1}^{(1)}}{2c^2} a_{n+1}(z) \vec{f}_{n+1}(x, y) \right) + c.c. \right]. \quad (2.23) \end{aligned}$$

La polarización no lineal en el sitio n , que viene dada por

$$\vec{P}_n^{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \left(\chi_n^{(2)} |\vec{E}_n|^2 + \chi_n^{(3)} |\vec{E}_n|^2 \vec{E}_n + \chi_n^{(4)} |\vec{E}_n|^4 + \chi_n^{(5)} |\vec{E}_n|^4 \vec{E}_n + \dots \right),$$

es una propiedad *local* del material (depende sólo del campo en el mismo sitio, dado lo débil del fenómeno), donde sus componentes de orden par ($\chi_n^{(2)}$, $\chi_n^{(4)}$, etc.) se anulan al considerar un medio *centrosimétrico* [31]. Este tipo de sistemas posee como principal característica un potencial eléctrico descrito por una función par, de manera que $U(-\vec{r}) = U(\vec{r})$. Si además se utiliza la propiedad $\chi_n^{(3)} \gg \chi_n^{(5)} \gg \chi_n^{(7)} \dots$, entonces el material en consideración presenta la llamada *no linealidad cúbica* o *tipo Kerr* [31],

$$\vec{P}_n^{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_n^{(3)} |\vec{E}_n|^2 \vec{E}_n. \quad (2.24)$$

Insertando \vec{E}_n de (2.20) para guías monomodales, la expresión anterior queda

$$\begin{aligned} \vec{P}_n^{NL} = & \frac{\epsilon_0}{8} \left[3 \chi_{n,\omega}^{(3)} |a_n(z)|^2 a_n(z) |\vec{f}_n(x, y)|^2 \vec{f}_n(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \right. \\ & \left. + \chi_{n,3\omega}^{(3)} \left(a_n(z) \vec{f}_n(x, y) \right)^3 e^{i(3kz - 3\omega t)} + c.c. \right], \end{aligned}$$

donde se han obtenido ondas de frecuencia ω y 3ω que interactúan con el sistema mediante las susceptibilidades $\chi_{n,\omega}^{(3)}$ y $\chi_{n,3\omega}^{(3)}$, respectivamente. La aparición de un modo con oscilación temporal distinta a la original es un fenómeno intrínsecamente no lineal, y en este caso corresponde a lo que se conoce como *generación de tercera armónica*. El término asociado a esta nueva frecuencia, al no estar en resonancia con la solución original, es despreciado en la dinámica, por lo que al reescribir $\chi_{n,\omega}^{(3)} \rightarrow \chi_n^{(3)}$ se llega a

$$\vec{P}_n^{NL} = \left[\frac{3\epsilon_0\chi_n^{(3)}}{8} |a_n(z)|^2 a_n(z) |\vec{f}_n(x, y)|^2 \vec{f}_n(x, y) e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \right]. \quad (2.25)$$

Asumiendo una respuesta instantánea, es posible notar que

$$\frac{\partial^2 \vec{P}_n^{NL}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{P}_n^{NL},$$

luego al reemplazar (2.25) en (2.23) se tiene

$$\begin{aligned} \vec{0} = & \left[\omega^2 e^{i(kz-\omega t)} \left(i \frac{k}{\omega^2} \frac{da_n(z)}{dz} \vec{f}_n(x, y) + \frac{\Delta\chi_{n-1}^{(1)}}{2c^2} a_{n-1}(z) \vec{f}_{n-1}(x, y) \right. \right. \\ & + \frac{\Delta\chi_n^{(1)}}{2c^2} a_n(z) \vec{f}_n(x, y) + \frac{\Delta\chi_{n+1}^{(1)}}{2c^2} a_{n+1}(z) \vec{f}_{n+1}(x, y) \\ & \left. \left. + \frac{3\chi_n^{(3)}}{8c^2} |a_n(z)|^2 a_n(z) |\vec{f}_n(x, y)|^2 \vec{f}_n(x, y) \right) + c.c. \right]. \quad (2.26) \end{aligned}$$

Con el fin de eliminar la dependencia transversal, se multiplica por $\vec{f}_n^*(x, y)$ y se realiza la integración $\int \int dx dy$. Además, dado que se está trabajando con modos linealmente independientes, la ecuación se cumple aunque no se considere el complejo conjugado. Por lo tanto

$$\begin{aligned} -i \frac{da_n(z)}{dz} &= \frac{\omega^2}{2kc^2} \left(\Delta\chi_{n-1}^{(1)} \bar{V}_{n-1} a_{n-1}(z) + \Delta\chi_n^{(1)} a_n(z) + \Delta\chi_{n+1}^{(1)} \bar{V}_{n+1} a_{n+1}(z) \right) \\ &+ \frac{3\omega^2\chi_n^{(3)}}{8kc^2} \bar{\phi} |a_n(z)|^2 a_n(z), \quad (2.27) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{f}_n(x, y)|^2 dx dy,$$

$$\bar{V}_{n-1} = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}_{n-1}(x, y) \vec{f}_n^*(x, y) dx dy, \quad (2.28)$$

$$\bar{V}_{n+1} = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}_{n+1}(x, y) \vec{f}_n^*(x, y) dx dy, \quad (2.29)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{f}_n(x, y)|^4 dx dy.$$

Escribiendo ahora

$$\epsilon_n = \frac{\omega^2 \Delta \chi_n^{(1)}}{2kc^2}, \quad (2.30)$$

$$V_{n-1} = \frac{\omega^2 \Delta \chi_{n-1}^{(1)}}{2kc^2} \bar{V}_{n-1} = \epsilon_{n-1} \bar{V}_{n-1}, \quad (2.31)$$

$$V_{n+1} = \frac{\omega^2 \Delta \chi_{n+1}^{(1)}}{2kc^2} \bar{V}_{n+1} = \epsilon_{n+1} \bar{V}_{n+1}, \quad (2.32)$$

$$\gamma = \frac{3\omega^2 \chi_n^{(3)}}{8kc^2} \bar{\phi},$$

(2.27) toma la forma

$$-i \frac{da_n(z)}{dz} = \epsilon_n a_n(z) + V_{n-1} a_{n-1}(z) + V_{n+1} a_{n+1}(z) + \gamma |a_n(z)|^2 a_n(z).$$

Esta relación es la denominada *Ecuación Discreta de Schrödinger No Lineal (DNLSE)* en inglés) en una dimensión, y las unidades de medida de sus componentes son

$$[z] = \text{m}, [a_n] = \frac{\text{V}}{\text{m}}, [\epsilon_n, V_{n-1}, V_{n+1}] = \frac{1}{\text{m}}, [\gamma] = \frac{\text{m}}{\text{V}^2}.$$

Aquí ϵ_n corresponde a la *constante de propagación* o *energía de sitio*, V_{n-1} y V_{n+1} son los *acoplamientos lineales* (que se generan debido a la superposición de las evanescentes de los campos de guías vecinas), y γ es el coeficiente no lineal, en este caso cúbico.

Haciendo el cambio de variable $a_n(z) = \sqrt{\frac{\eta}{p}} A_n(z)$, con $[\eta] = \frac{\text{V}}{\text{A}}$ y $[p] = \text{m}^2$, la última ecuación queda

$$-i \frac{dA_n(z)}{dz} = \epsilon_n A_n(z) + V_{n-1} A_{n-1}(z) + V_{n+1} A_{n+1}(z) + \gamma' |A_n(z)|^2 A_n(z), \quad (2.33)$$

donde

$$\gamma' = \frac{\eta}{p}\gamma, [z] = m, [A_n] = \sqrt{W}, [\epsilon_n, V_{n-1}, V_{n+1}] = \frac{1}{m}, [\gamma'] = \frac{1}{Wm}.$$

Considerando ahora parámetros experimentales, como la amplitud del *peak* A_p (en unidades de \sqrt{W}) y la longitud del cristal L_0 (en metros), se realiza la sustitución $A_n = A_p\psi_n$ y se multiplica (2.33) por L_0 , dando como resultado

$$-i\frac{d\psi_n(z)}{d\bar{z}} = \bar{\epsilon}_n\psi_n(z) + \bar{V}_{n-1}\psi_{n-1}(z) + \bar{V}_{n+1}\psi_{n+1}(z) + \bar{\gamma}|\psi_n(z)|^2\psi_n(z).$$

Aquí

$$\bar{z} = \frac{z}{L_0}, \bar{\epsilon}_n = \epsilon_n L_0, \bar{V}_{n-1} = V_{n-1} L_0, \bar{V}_{n+1} = V_{n+1} L_0, \bar{\gamma} = \gamma' L_0,$$

y las unidades correspondientes son

$$[\bar{z}] = [\psi_n] = [\bar{\epsilon}_n] = [\bar{V}_{n-1}] = [\bar{V}_{n+1}] = [\bar{\gamma}] = 1.$$

Finalmente, al renombrar las variables de la ecuación anterior ($\bar{x} \rightarrow x$) se obtiene la DNLSE en su forma completamente adimensional,

$$-i\frac{d\psi_n(z)}{dz} = \epsilon_n\psi_n(z) + V_{n-1}\psi_{n-1}(z) + V_{n+1}\psi_{n+1}(z) + \gamma|\psi_n(z)|^2\psi_n(z). \quad (2.34)$$

Con el fin de extender (2.34) a un arreglo bidimensional general, se procede en este punto a estudiar el sistema rectangular ilustrado en la Figura 2.2.

Aquí la dinámica puede ser deducida de manera directa a partir de lo obtenido en cristales fotónicos unidimensionales, teniendo ahora que considerarse dos aspectos distintos. Primero, la posición de las guías de onda vendrá dada por una coordenada de la forma (n, m) , y en segundo lugar, cada sitio tendrá más vecinos cercanos. Así, para la presente configuración (y usando la aproximación a primeros vecinos), la DNLSE adimensional en la guía (n, m) será

$$\begin{aligned} -i\frac{d\psi_{(n,m)}(z)}{dz} = & \epsilon_{(n,m)}\psi_{(n,m)} + V_{(n-1,m)}\psi_{(n-1,m)} + V_{(n+1,m)}\psi_{(n+1,m)} \\ & + V_{(n,m-1)}\psi_{(n,m-1)} + V_{(n,m+1)}\psi_{(n,m+1)}(z) + \gamma|\psi_{(n,m)}|^2\psi_{(n,m)}. \end{aligned}$$

Si se piensa ahora en una geometría arbitraria, entonces las coordenadas discretas pasan a ser vectores, $(n, m) \rightarrow \vec{n}$. Además, la interacción del campo del \vec{n} -ésimo sitio con el del resto de las guías será representada de forma general como $\sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n}, \vec{m}}\psi_{\vec{m}}$,

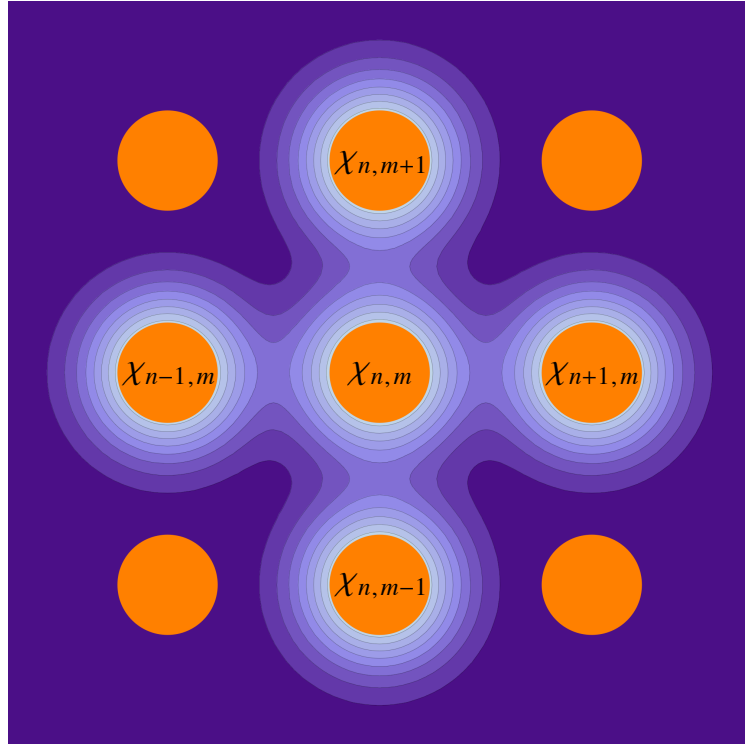


Figura 2.2: Vista transversal de un arreglo rectangular, donde cada sitio es representado mediante su susceptibilidad, y donde se muestra la superposición del campo ubicado en la guía (n, m) con el de sus vecinos más cercanos.

donde $V_{\vec{n}, \vec{m}}$ es el acoplamiento, y donde la sumatoria definirá hasta qué sitios se considera la interacción.

Por lo tanto, la DNLSE para la guía \vec{n} -ésima de un cristal fotónico bidimensional vendrá dada por

$$-i \frac{d\psi_{\vec{n}}(z)}{dz} = \epsilon_{\vec{n}} \psi_{\vec{n}}(z) + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n}, \vec{m}} \psi_{\vec{m}}(z) + \gamma |\psi_{\vec{n}}(z)|^2 \psi_{\vec{n}}(z), \quad (2.35)$$

expresión que será utilizada de manera exhaustiva a partir de ahora, particularmente en su versión lineal $\gamma = 0$ (ecuación abreviada como *DLSE*).

Capítulo 3

Montajes experimentales

Una de los principales desafíos experimentales en el contexto de redes fotónicas es la generación de condiciones iniciales arbitrarias, que son esenciales para la observación del fenómeno deseado. En esta dirección, la creación de patrones de luz con una estructura de amplitud y fase añadidas a voluntad constituye un gran objetivo, para lo cual se utilizan como herramienta fundamental moduladores espaciales de luz. Durante el presente capítulo se describen los montajes que serán usados posteriormente, donde se explican todas las etapas por las que pasa el haz de luz, desde su origen hasta la inyección en el material. En particular, se detallará un método de transporte de imágenes, que permite entre otras cosas una óptima incidencia en el cristal a analizar.

3.1. Montaje de doble paso

Como primer trabajo experimental, y con el objetivo de estudiar la red tipo *Lieb*, se construyó un montaje basado en un modulador espacial de luz (*Spatial Light Modulator*, *SLM* o simplemente *modulador*), que en este caso corresponde al *LC2012 Holoeye* de transmisión. Además, utilizando un sistema de lentes, se generó un *método de transporte de imágenes*, que permite tanto el funcionamiento óptimo del modulador como la correcta incidencia de la condición inicial sobre el arreglo de guías de onda. El montaje utilizado se muestra en la Figura 3.1.

Posterior a su emisión, el haz es ensanchado usando un microscopio objetivo y colimado mediante la lente $L1$, para luego añadirle un perfil de amplitud y fase (esta última modulación se logra mediante el método de transporte de imágenes).

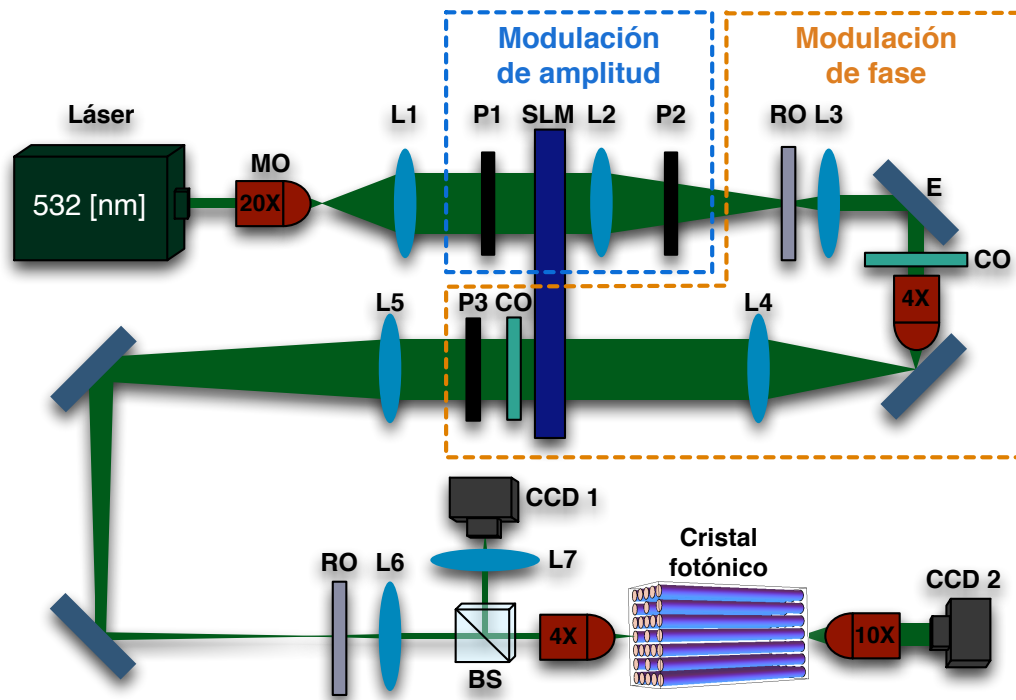


Figura 3.1: Montaje experimental de doble paso. 20x, 4x, 10x: Microscopio objetivo con magnificación 20, 4 y 10. P: Polarizador. E: Espejo. RO: Rotador de onda. CO: Cuarto de onda. SLM: Modulador. L: Lente. BS: Separador de haces. CCD: Cámara de video.

Con el fin de cambiar las propiedades del haz incidente, el SLM utiliza una imagen en niveles de gris, la cual representa la acción de la pantalla del modulador ante la luz que lo atraviesa. Cada pixel de la imagen entregada al modulador debe tener un nivel de gris entre 0 (negro) y 255 (blanco). De esta forma, por ejemplo, para modular en amplitud, el color negro en la imagen significará bloquear la luz en esa zona, y el color blanco permitirá el paso del haz.

Una vez obtenido el perfil deseado, se procede a usar un segundo método de imágenes (juego de lentes $L5$ y $L6$ junto con un microscopio objetivo) y un rotador de polarización lineal para generar el haz disminuido en tamaño y horizontalmente polarizado en la cara incidente del cristal fotónico. Si se agregan además un separador de haces y una lente, es posible observar el perfil generado en la cara del cristal (condición inicial), lo que hace sencillo verificar su nitidez y su correcta incidencia sobre la red. Lo anterior se logra debido a que cierta cantidad de la luz que incide sobre el cristal

también se refleja, pasando de vuelta por el objetivo 4x, chocando con el separador de haces, y desviándose hacia la lente $L7$, que proyecta la imagen sobre la cámara CCD 1. Finalmente, el patrón de salida del cristal es magnificado por un 10x y observado mediante la cámara CCD 2.

3.1.1. Modulación de amplitud

Para modular un haz de luz en amplitud utilizando el SLM LC2012 es necesario agregar dos polarizadores lineales, uno antes y otro después del modulador, tal como se muestra en la Figura 3.1. De esta forma, para una configuración óptima de los ejes de ambos polarizadores, la modulación de amplitud lograda por el modulador es máxima entre los niveles de gris 0 y 255.

La configuración para los polarizadores se halla de la siguiente forma: sea $P1_i$ el ángulo i del eje del polarizador 1 con respecto a la vertical, sea $P2_j$ el ángulo j del eje del polarizador 2 con respecto a la vertical, y denótense P_b y P_n los valores de la potencia del haz luego de pasar por el sistema de modulación generado por una imagen de nivel de gris 255 y de nivel de gris 0, respectivamente. Se fija el valor $i = 0^\circ$ y se varía $j = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$, tomando nota de la modulación de amplitud $A(0, j) = P_b/P_n$ para cada configuración $(P1_0, P2_j)$. Posteriormente, se realiza el mismo procedimiento para otras configuraciones de $P1$, donde $i = \{45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$. Una vez encontrada la configuración $(P1_i, P2_j)$ que maximiza A (para el conjunto de valores de i y j mencionados), se procede a variar j en $\pm \Delta_j$ (con $0^\circ < \Delta_j < 45^\circ$), de manera de encontrar un ángulo más específico que mejore $A(i, j)$ (si es que existe). A modo de ejemplo, se supondrá que existe un ángulo $j + \Delta_j$ tal que $A(i, j + \Delta_j) > A(i, j)$. A continuación, el procedimiento que corresponde es variar i en $\pm \Delta_i$ (con $0^\circ < \Delta_i < 45^\circ$), de tal forma que se pueda encontrar un ángulo distinto a i que mejore $A(i, j + \Delta_j)$. Si se asume que tal ángulo existe, y se denota por $i - \Delta_i$, entonces la configuración óptima para modulación de amplitud será finalmente $(P1_{i-\Delta_i}, P2_{j+\Delta_j})$. Un ejemplo de la modulación de amplitud generada por una imagen con niveles de gris $g = 0$ y $g = 255$ se muestra en la Figura 3.2.

Con la configuración óptima de los polarizadores para modulación de amplitud, se procede a tomar nota del valor de la potencia P_g del haz una vez que atraviesa la zona de modulación generada por una imagen con nivel de gris g . Luego de normalizar los valores de la potencia ($P_g \rightarrow P_g/P_{255}$), se grafica P_g en función de g y se realiza un

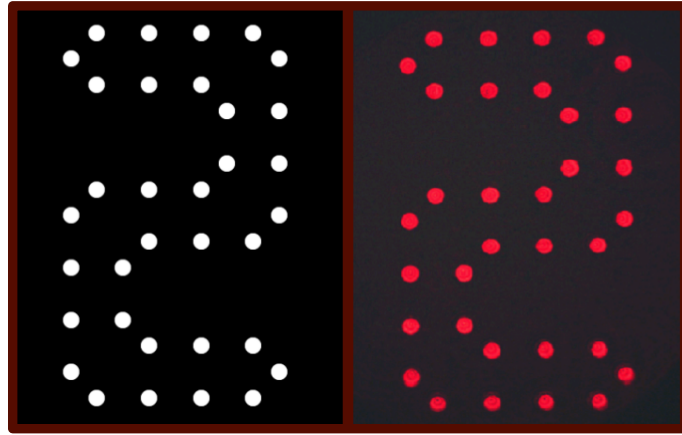


Figura 3.2: Modulación de amplitud de un haz de longitud de onda de 641 [nm]. Izquierda: Imagen en niveles de gris dada al SLM. Derecha: Imagen (generada por el modulador) del haz modulado en amplitud.

ajuste polinómico a los datos. De esta manera se halla la *función ajuste* o *función calibración* del SLM para modulación de amplitud, $f_a(g)$.

3.1.2. Modulación de fase

Para modular la fase de un haz de luz utilizando el SLM LC2012 es necesario agregar dos polarizadores lineales, uno antes y otro después del modulador, y dos cuartos de onda entre los polarizadores y el SLM, como se muestra en la zona de modulación de fase en la Figura 3.1 (aquí RO actúa como un polarizador, ya que rota la polarización lineal entregada por P2). De esta forma, para una configuración óptima de los cuatro elementos, la modulación de fase lograda por el modulador es máxima (π en el presente caso) entre los niveles de gris 0 y 255.

La configuración para los polarizadores en la zona de modulación de fase debe hallarse sin los cuartos de onda en el montaje (éstos se agregarán posteriormente), y se procede de la siguiente forma: sea P_l el ángulo l del eje de polarización del haz con respecto a la vertical luego de pasar por el rotador de onda, y sea P_{3m} el ángulo m del eje del polarizador 3 con respecto a la vertical. Sean además P_b y P_n los valores de la potencia del haz luego de pasar por el sistema de modulación de fase atravesando una imagen de nivel de gris 255 y de nivel de gris 0, respectivamente. Se fija el valor $l = 0^\circ$ y se varía $m = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$, tomando nota de la modulación de amplitud

$A(0, m) = P_b/P_n$ para cada configuración $(P_0, P3_m)$. Posteriormente, se realiza el mismo procedimiento para otras configuraciones de P , donde $l = \{45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$. Una vez encontrada la configuración $(P_l, P3_m)$ que minimiza A (para el conjunto de valores de l y m mencionados), se procede a variar m en $\pm \Delta_m$ (con $0^\circ < \Delta_m < 45^\circ$), de manera de encontrar un ángulo más específico que mejore $A(l, m)$ (si es que existe). A modo de ejemplo, se supondrá que existe un ángulo $m + \Delta_m$ tal que $A(l, m + \Delta_m) < A(l, m)$. A continuación, el procedimiento que corresponde es variar l en $\pm \Delta_l$ (con $0^\circ < \Delta_l < 45^\circ$), de tal forma que se pueda encontrar un ángulo distinto a l que mejore $A(l, m + \Delta_m)$. Si se asume que tal ángulo existe, y se denota por $l - \Delta_l$, entonces la configuración óptima para modulación de fase será finalmente $(P_{l-\Delta_l}, P3_{m+\Delta_m})$.

Es importante en este punto mencionar que optimizar la modulación de amplitud equivale a minimizar el cambio de fase del haz incidente, y por ende el proceso recién descrito equivale a maximizar la diferencia de fase entre los niveles de gris 0 y 255. Ahora bien, la modulación de fase alcanzada con este proceso no es suficiente para los propósitos experimentales del presente trabajo (la fase varía en un valor menor a π). Por ende, será necesario en este paso incluir los cuartos de onda y encontrar su configuración óptima. Para ello se envían dos haces iguales sobre la zona de modulación de fase, y posteriormente se hacen interferir, observando su patrón de franjas. En este proceso se le da una imagen al modulador con dos niveles de gris, $g_1 = 0$ en la zona sobre la que incide uno de los haces, y g variable en el área que atraviesa el otro haz. Por lo tanto, cuando $g = g_1$ ambos haces salen en fase, y cuando g varía se genera un desfase entre ambos rayos, que puede observarse mediante el corrimiento de las franjas. Tomando el patrón de interferencia formado con $g = g_1$ como el de referencia, se encuentran los valores óptimos de los cuartos de onda de forma análoga a la usada para encontrar P_l y $P3_m$. Es decir, se fija un valor del primer cuarto de onda y se varía el segundo, repitiendo este proceso para varios valores del primero, y registrando el corrimiento de franjas D (distancia entre una franja con $g = 255$ y la misma franja con $g = g_1$) para cada par de valores de los cuartos de onda. Cuando se maximiza D para cierta configuración de los cuartos de onda, se ha alcanzado la modulación óptima.

Con la configuración óptima hallada, se procede a variar g tomando nota del valor del desplazamiento de las franjas Δ con respecto a su posición para $g = g_1$. Luego se

gráfica $\Delta(g)$, se hace la transformación de corrimiento de franjas a diferencia de fase $\Delta(g) \rightarrow \Phi(g)$, y se realiza un ajuste polinómico a los datos, hallando de esta manera la función ajuste o función calibración del SLM para modulación de fase, $f_f(g)$. Un ejemplo de la modulación de fase obtenida con el proceso recién descrito se muestra en la Figura 3.3.

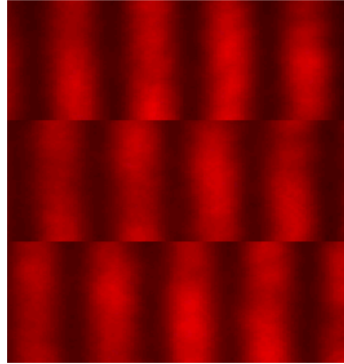


Figura 3.3: Corrimiento de franjas que demuestra la modulación de fase de un haz de longitud de onda $\Lambda = 641$ [nm]. Fila superior: $g = 0$. Fila central: $g = 150$. Fila inferior: $g = 255$.

3.1.3. Método de imágenes y modulación simultánea

Para lograr una modulación simultánea usando el SLM LC2012 es necesario dividir su pantalla en dos mitades, de manera que una mitad se utilice para modular amplitud, y la otra para modular la fase. En la práctica, esto significa que debe entregársele al modulador una imagen con dos mitades bien definidas, cada una con los niveles de gris asociados a la modulación correspondiente. Es por esta razón que la luz atraviesa dos veces el SLM, modulándose primero el haz en amplitud, y luego adquiriendo una estructura de fase en el segundo paso, tal como se muestra en la Figura 3.1.

Es en este punto donde entra en juego la importancia del método de imágenes, que consiste en transportar la imagen generada por el modulador en la primera mitad de la pantalla (el haz modulado en amplitud) hasta la segunda mitad de ésta. Para ello se utilizan las lentes L_2 , L_3 , L_4 (cuyas distancias focales son f_{L2} , f_{L3} y f_{L4} respectivamente), y el microscopio objetivo con magnificación 4x.

Una vez generado el haz modulado en amplitud en la pantalla del SLM, la imagen es recogida por $L2$ (cuya distancia al modulador es f_{L2}) y generada nuevamente a una distancia f_{L2} . Esta imagen, a su vez, es capturada por $L3$ (que se encuentra a una distancia $f_{L2} + f_{L3}$ de $L2$) y transportada hasta el plano ubicado a f_{L3} de $L3$. El perfil en este punto tendrá una magnificación $f_{L2}/f_{L3} = 1/4$ con respecto al generado por el SLM, y estará invertido. Posteriormente, la imagen es magnificada en un factor 4 por el microscopio objetivo y llevada a una distancia f_{L4} de $L4$, que se encarga de hacer incidir el haz modulado sobre la pantalla del SLM (ubicado a f_{L4} de la lente). Por lo tanto, mediante el proceso recién descrito, la imagen modulada en amplitud es transportada hasta el plano de la segunda mitad del modulador, donde incide con un tamaño igual al inicial. Este proceso es el que permite la óptima modulación de fase del sistema, la cual queda en evidencia con la información que muestra la Figura 3.4.

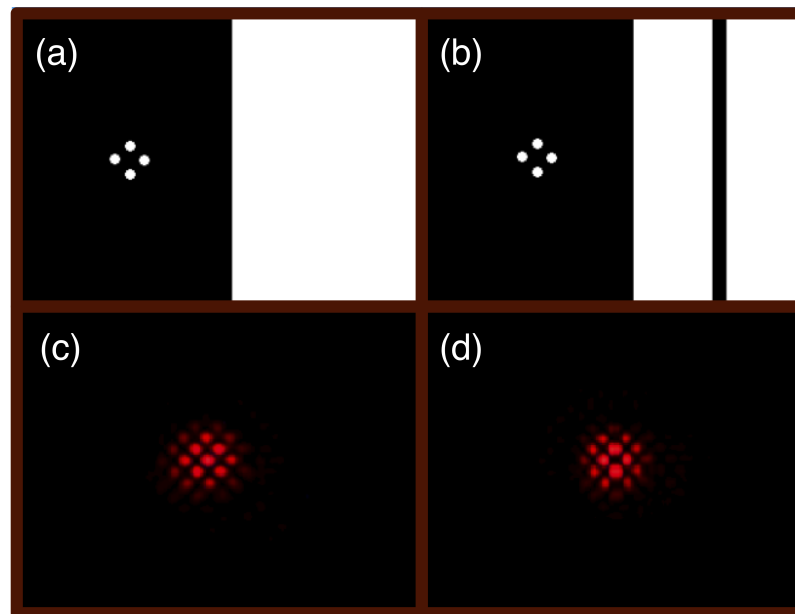


Figura 3.4: Modulación de amplitud y fase. Imágenes entregadas al SLM con cuatro puntos (a) en fase y (b) agregando una fase π a los discos centrales. Patrones de interferencia luego de la acción del modulador para los haces (c) en fase y (d) desfasados.

Aquí la imagen entregada al modulador se muestra en (a), diferenciándose claramen-

te dos mitades. El haz es modulado primero en amplitud (se generan 4 puntos, zona izquierda de la imagen), y luego se produce una estructura de fase plana para todo el haz (no alterando la fase, zona derecha). Esto se hace evidente si se reemplaza $L5$ por una lente de foco menor y se observa la interferencia del haz con doble modulación con la cámara CCD, la que claramente corresponde a cuatro haces (4 puntos) en fase, como se muestra en (c). Por otro lado, al modular utilizando la imagen dada en (b), se generan nuevamente 4 discos o haces, a los cuales se les agrega la estructura de fase de la zona derecha. Esta estructura, al coincidir la franja negra con los discos superior e inferior de la imagen de amplitud, lo que produce es un desfase en π (máximo desfase alcanzado por el SLM) entre los sitios que posteriormente interfieren. Esto debiera traducirse en un corrimiento de los máximos en el patrón de interferencia, como queda de manifiesto en (d).

A modo de generalización, con el montaje mostrado en la Figura 3.1 es posible modular en amplitud y en fase (hasta un máximo de π) cualquier haz de luz, pudiendo crearse condiciones iniciales no triviales (arbitrarias) para el sistema en estudio (Lieb o cualquier otra red fotónica). Además, es importante mencionar que los polarizadores, cuartos de onda y rotadores dependen del color de la luz, y por ende las optimizaciones y calibraciones de amplitud y/o fase deben realizarse cada vez que se trabaje con una longitud de onda distinta.

3.2. Montaje generalizado

Posterior al estudio de la red de Lieb, se construyó un montaje experimental similar al descrito en la sección anterior. Este nuevo montaje explota las ventajas de la modulación de amplitud del SLM LC2012 Holoeye, la versatilidad del método de transporte de imágenes, y el excelente desempeño del *Pluto Holoeye* de reflexión como modulador de fase. Como resultado, la generación de un haz con amplitud y fase arbitraria (hasta 3π en este caso) es posible utilizando el montaje mostrado en la Figura 3.5.

Luego de ser emitido, el haz de luz es magnificado por un microscopio objetivo y colimado por la lente $L1$, momento en que entra a la primera zona de modulación. En esta sección, el SLM LC2012 le imprime un perfil de amplitud al haz (de forma idéntica al montaje de doble paso, con la diferencia de que en este caso se utiliza toda

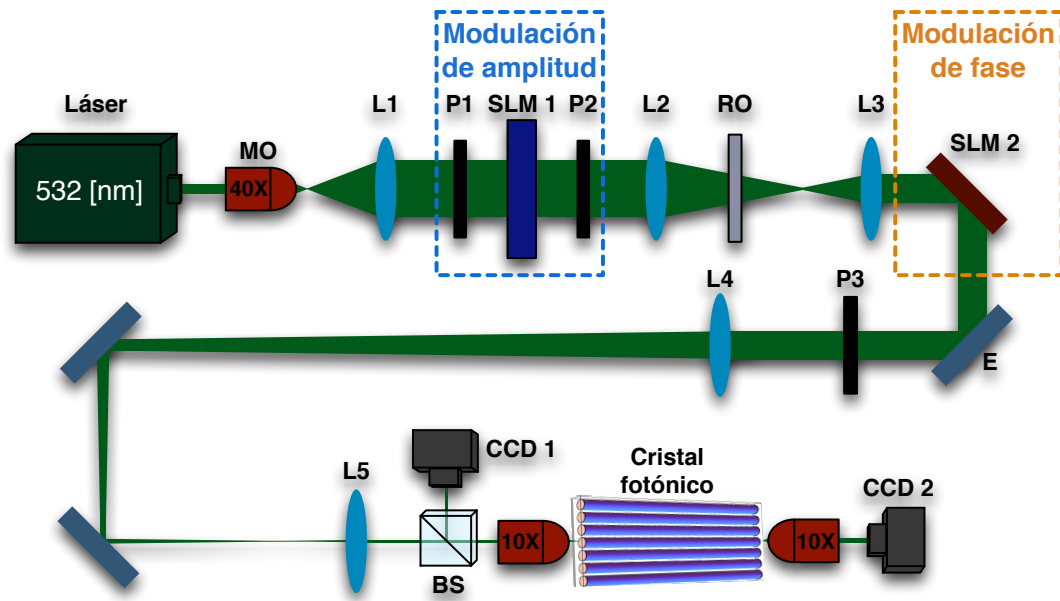


Figura 3.5: Montaje experimental generalizado. 40x, 10x: Microscopio objetivo con magnificación 40 y 10. P: Polarizador. E: Espejo. RO: Rotador de onda. SLM 1: LC2012. SLM 2: Pluto. L: Lente. BS: Separador de haces. CCD: Cámara de video.

la pantalla), que se transporta luego a la zona de modulación de fase mediante el método de imágenes (usando las lentes $L2$ y $L3$). Aquí la imagen (perfil de amplitud) se forma en la pantalla del SLM Pluto, adquiriendo la estructura de fase dictada por los niveles de gris entregados al modulador (igual que en el caso del SLM de amplitud) y reflejándose.

Utilizando un segundo método de transporte de imágenes (formado por $L4$, $L5$ y el 10x) y P3, se transporta, se reduce y se polariza horizontalmente la imagen generada por el SLM Pluto, haciéndola incidir sobre el cristal. Al igual que en el montaje de doble paso, se agrega un separador de haces, de tal forma que usando la cámara CCD 1 sea posible observar la condición inicial incidiendo sobre la red.

Finalmente, el patrón de salida del cristal es magnificado por un microscopio objetivo y registrado usando la cámara CCD 2.

3.2.1. Calibración de fase

Para modular la fase de un haz que incide sobre el SLM Pluto no es necesario utilizar polarizadores ni cuartos de onda, ya que este modulador está fabricado para añadir fase de forma óptima con la imagen en niveles de gris que se le entrega. Por ende, para una longitud de onda dada, sólo es necesario hallar la función calibración de fase del SLM.

Para encontrar la curva que relaciona el nivel de gris con la fase entregada por el modulador, es necesario usar una imagen con dos mitades, una con nivel de gris $g_1 = 0$ (fase de referencia) y otra con g variable. Esta imagen se le entrega al Pluto y se hacen incidir dos haces sobre su pantalla, cada uno reflejándose en un nivel de gris distinto. Al hacer interferir los haces reflejados se observa un patrón de franjas, las cuales se desplazan a medida que se varía g (fase de uno de los haces). Se procede entonces a variar g entre $g = g_1$ y $g = 255$, tomando nota del valor Δ del desplazamiento de las franjas con respecto a su posición para $g = g_1$. Luego se grafica $\Delta(g)$, se hace la transformación de corrimiento a diferencia de fase $\Delta(g) \rightarrow \Phi(g)$, y se realiza un ajuste polinómico a los datos, hallando de esta manera la función ajuste o función calibración del SLM para modulación de fase, $f_f(g)$.

Es importante mencionar que el montaje generalizado presenta un mayor rango espacial para modular amplitud (ya que ahora se utiliza toda la pantalla del LC2012), lo que permite la generación de condiciones iniciales de mucho mayor tamaño que las del montaje de la sección anterior. Esto es esencial si se desea generar, por ejemplo, una onda plana (como se estudiará con posterioridad), lo que presenta (junto con el mayor rango de modulación de fase) una mejora sustancial al crear condiciones iniciales arbitrarias con respecto al montaje de doble paso.

Capítulo 4

Cadena unidimensional

Una cadena unidimensional ordenada compuesta por guías de onda lineales corresponde al sistema periódico más simple en óptica discreta, y dado que este tipo de arreglo presenta como principal característica la sencillez en la descripción de los fenómenos que allí ocurren, las redes en una dimensión son las principales candidatas a la hora de comenzar el estudio de cristales fotónicos. Adicionalmente, muchos de los conceptos y procesos existentes en estos sistemas se pueden extender de manera directa a contextos más complejos, por lo que un análisis acabado en este punto será de gran utilidad posteriormente. Dentro de este capítulo se detalla la teoría que gobierna la evolución de la luz en un arreglo unidimensional, la cual se corrobora mediante observaciones experimentales y simulaciones numéricas en cadenas ordenadas y con desorden no diagonal. En particular, durante el estudio se considera la existencia tanto del estado fundamental como del primer modo excitado en cada guía de onda, describiendo sus propiedades lineales y contrastándolas.

4.1. Modelo teórico

4.1.1. Soluciones estacionarias

Se considera como primer sistema de estudio el arreglo unidimensional lineal y completamente ordenado ilustrado en la Figura 4.1, que corresponde a un caso particular del cristal fotónico mostrado en la Figura 2.1, y donde todas las guías son idénticas. Tomando en cuenta que toda la dinámica en la red se puede describir utilizando sólo la dirección horizontal, la ecuación a utilizar es (2.34), con $\gamma = 0$.

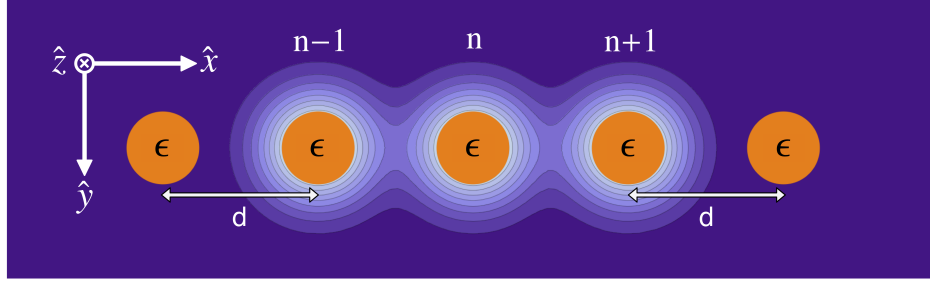


Figura 4.1: Arreglo periódico unidimensional lineal, caso particular de la Figura 2.1. En este sistema todas las guías son idénticas (energía de sitio ϵ) y la constante de red es $d = 16 \text{ [\mu m]}$. A modo de ilustración, se grafican los modos fundamentales de los tres sitios centrales.

Además, para guías de onda idénticas, de acuerdo a la Figura 2.1(b) se tiene $\Delta\chi_{n-1}^{(1)} = \Delta\chi_n^{(1)} = \Delta\chi_{n+1}^{(1)} = \Delta\chi^{(1)}$, lo que implica según (2.30) que la constante de propagación es la misma en cualquier lugar del arreglo, $\epsilon_n = \epsilon$. A su vez, al suponer guías monomodales, el modo transversal cumple $\vec{f}_{n-1}\vec{f}_n^* = \vec{f}_{n+1}\vec{f}_n^*$ (ya que existe sólo un perfil), lo que usando (2.28), (2.29), (2.31) y (2.32) conduce a que todos los acoplamientos tengan el mismo valor, $V_{n-1} = V_{n+1} = V$. Esto tiene como consecuencia que (2.34) quede de la forma

$$-i\frac{d\psi_n}{dz} = \epsilon\psi_n + V(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}). \quad (4.1)$$

Las soluciones estacionarias (modos del sistema) de (4.1) se encuentran utilizando un ansatz tipo *onda plana* $\psi_n(z) = u_n e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_n + \lambda z)} = u_0 e^{iknd} e^{i\lambda z}$, donde $\psi_n(z)$ satisface el *Teorema de Bloch* [6], $\vec{k} = k\hat{x}$ es el vector de onda, $\vec{r}_n = nd\hat{x}$ da cuenta de la posición del n -ésimo sitio de la red, $u_n = u_0$ es la amplitud del campo, y λ es la constante de propagación en el eje z . Al reemplazar la solución propuesta en la ecuación (4.1) se obtiene

$$\lambda u_0 e^{iknd} e^{i\lambda z} = \epsilon u_0 e^{iknd} e^{i\lambda z} + V(e^{ikd} + e^{-ikd})u_0 e^{iknd} e^{i\lambda z}.$$

Dividiendo por $u_0 e^{iknd} e^{i\lambda z}$ y usando que $e^{ikd} + e^{-ikd} = 2\cos(kd)$ resulta

$$\lambda = \epsilon + 2V \cos(kd),$$

que corresponde a la *relación de dispersión* o *estructura de bandas* del sistema, la cual da cuenta de las ondas propagantes permitidas en el arreglo. De manera consecuente,

los autovectores (modos estacionarios) quedarán entonces definidos como

$$\psi_n(z) = u_0 e^{iknd} e^{i(\epsilon + 2V \cos(kd))z}.$$

Las últimas dos expresiones son completamente análogas a las de un electrón en una cadena unidimensional ordenada de átomos, donde el sistema es descrito mediante la ecuación de Schrödinger, el campo es representado por la función de onda, y donde en lugar de z se trabaja con el tiempo t [3–5].

Por otro lado, es importante recordar que las ecuaciones (2.34) y (4.1) se obtuvieron considerando las guías como monomodales, es decir, que sólo el *modo fundamental* (también denominado *modo s* o *primer modo*) de cada guía puede propagarse a lo largo de ella. En esta dirección, denotando $V \rightarrow V^f$ como el acoplamiento entre los modos fundamentales de guías vecinas y reescribiendo $\epsilon \rightarrow \epsilon^f$, la última ecuación queda

$$\lambda^f = \epsilon^f + 2V^f \cos(kd). \quad (4.2)$$

Calculando adicionalmente la *velocidad de grupo* (velocidad transversal con que viajan las ondas planas de frecuencia espacial k) según la definición $v_g = \frac{\partial \lambda(k)}{\partial k}$ [5] se tiene

$$v_g^f = -2dV^f \sin(kd). \quad (4.3)$$

Ahora bien, como una extensión de lo recién descrito se consideran guías de onda bimodales, donde el *segundo modo* (llamado también *modo excitado*, *modo p* o *dipolo*) también puede ser excitado en cada guía del arreglo de la Figura 4.1. Este cuadro está supeditado a que el área transversal y/o el índice de refracción de las guías tengan cierto valor mínimo [32] (equivalente a la condición de las dimensiones y profundidad de un pozo potencial para la existencia de estados excitados en Mecánica Cuántica), lo que se puede regular tanto en la escritura de los arreglos [11,12] como en la elección de la longitud de onda a usar en el experimento.

Suponiendo entonces que se satisface lo anterior, se tendrán dos ecuaciones tipo Schrödinger para cada guía, una para la amplitud del modo fundamental $\psi_n^f(z)$ y otra para la del dipolo, $\psi_n^d(z)$. Teniendo en cuenta también que cada estado tendrá una energía de sitio distinta (ϵ^f y ϵ^d), la generalización de (4.1) vendrá dada por

$$-i \frac{d\psi_n^f}{dz} = \epsilon^f \psi_n^f + V^f (\psi_{n-1}^f + \psi_{n+1}^f) + V^{f,d} (\psi_{n-1}^d + \psi_{n+1}^d), \quad (4.4)$$

$$-i\frac{d\psi_n^d}{dz} = \epsilon^d\psi_n^d + V^d(\psi_{n-1}^d + \psi_{n+1}^d) + V^{f,d}(\psi_{n-1}^f + \psi_{n+1}^f), \quad (4.5)$$

donde V^d representa el acoplamiento entre guías vecinas con campo dipolar, y donde $V^{f,d}$ corresponde a la interacción entre el modo base y el excitado en sitios consecutivos. Es necesario en este punto analizar el coeficiente $V^{f,d}$, que tiene lugar debido a la superposición de los campos de ambos autoestados, cada uno presente en una guía distinta. Al considerar que, debido al método de fabricación, las guías de onda son transversalmente elípticas [11], los primeros dos modos en cada sitio tendrán una disposición espacial como la mostrada en la Figura 4.2.

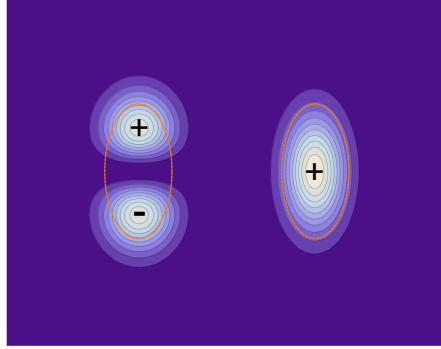


Figura 4.2: Perfiles de intensidad y fase para el modo p (izquierda) y el modo s (derecha). Los bordes de las guías de onda se representan por las curvas anaranjadas segmentadas, y la diferencia de fase entre + y - es π .

Dado que el dipolo tiene dos perfiles iguales en amplitud con un desfase de π entre ellos (mitad superior e inferior), y recordando que los acoplamientos se originan debido a la superposición de los campos en todo el espacio, ecuaciones (2.28) y (2.29), la interacción entre el modo fundamental y el dipolo será nula. Por lo tanto, siempre que las guías de onda tengan la orientación mostrada en la Figura 4.2 se cumplirá que $V^{f,d} = 0$, lo que reduce (4.4) y (4.5) a las expresiones

$$-i\frac{d\psi_n^f}{dz} = \epsilon^f\psi_n^f + V^f(\psi_{n-1}^f + \psi_{n+1}^f), \quad (4.6)$$

$$-i\frac{d\psi_n^d}{dz} = \epsilon^d\psi_n^d + V^d(\psi_{n-1}^d + \psi_{n+1}^d). \quad (4.7)$$

Ahora las ecuaciones están desacopladas, y por ende las amplitudes de los modos son independientes (pertenecen a distintas bandas lineales). Además, ambas ecuaciones

tienen exactamente la misma forma que (4.1), por lo que se resuelven de la misma manera. Lógicamente, (4.6) dará paso a (4.2) y (4.3), y para el caso del dipolo se obtendrán

$$\lambda^d = \epsilon^d + 2V^d \cos(kd), \quad (4.8)$$

$$v_g^d = -2dV^d \sin(kd). \quad (4.9)$$

4.1.2. Difracción discreta

Se estudia, a partir de este punto, la propagación de luz en el medio periódico discreto de la Figura 4.1 para guías de onda bimodales, donde la condición inicial es la inyección de luz en un solo sitio del arreglo, y donde la dinámica para ambos modos es caracterizada por la ecuación (4.1).

Para describir una excitación *tipo delta* se considera la función *J de Bessel* de orden n , que puede definirse como

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta - z \sin(\theta)) d\theta,$$

para n entero. Aquí n representa el número de guía del arreglo, y z la coordenada de propagación longitudinal del campo. Al hacer $z \rightarrow 0$ (es decir, al evaluar la condición inicial) resulta

$$J_n(z \rightarrow 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) d\theta = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi},$$

de donde se extrae que $J_{n=0}(0) = 1$ y $J_{n \neq 0}(0) = 0$ (sólo hay campo en la guía “cero”). Se propone entonces la solución

$$\psi_n(z) = A_0 i^n e^{i\epsilon z} J_n(\alpha z),$$

de modo que $\psi_n(0) = A_0 i^n J_n(0) = A_0 \delta_{n,0}$. Luego, reemplazando $\psi_n(z)$ en (4.1) y usando la propiedad

$$J'_n(z) = \frac{\alpha}{2} [J_{n-1}(\alpha z) - J_{n+1}(\alpha z)]$$

se obtiene $\alpha = 2V$. Por lo tanto, la expresión

$$\psi_n(z) = A_0 i^n e^{i\epsilon z} J_n(2Vz) \quad (4.10)$$

describe la evolución temporal del campo en la cadena unidimensional, donde n representa el sitio del arreglo, A_0 es la amplitud inicial, y donde se ha considerado

que la inyección de luz es en la guía $n = 0$. En particular, la amplitud en las guías con $n < 0$ queda determinada por la identidad $J_{-n}(2Vz) = (-1)^n J_n(2Vz)$. Al graficar $|\psi_n(z)|^2$ según (4.10) para $n = 0, 1$ y 14 se obtiene la Figura 4.3(a), donde puede observarse que $|\psi_0(0)|^2 = 1$. Además, como se espera intuitivamente, mientras mayor es n más distancia debe recorrer la luz para que se excite tal sitio. En el caso de la guía 14, el campo comienza a “llegar” a ella en $z = 6$, alcanzando su valor máximo en $z = 8$.

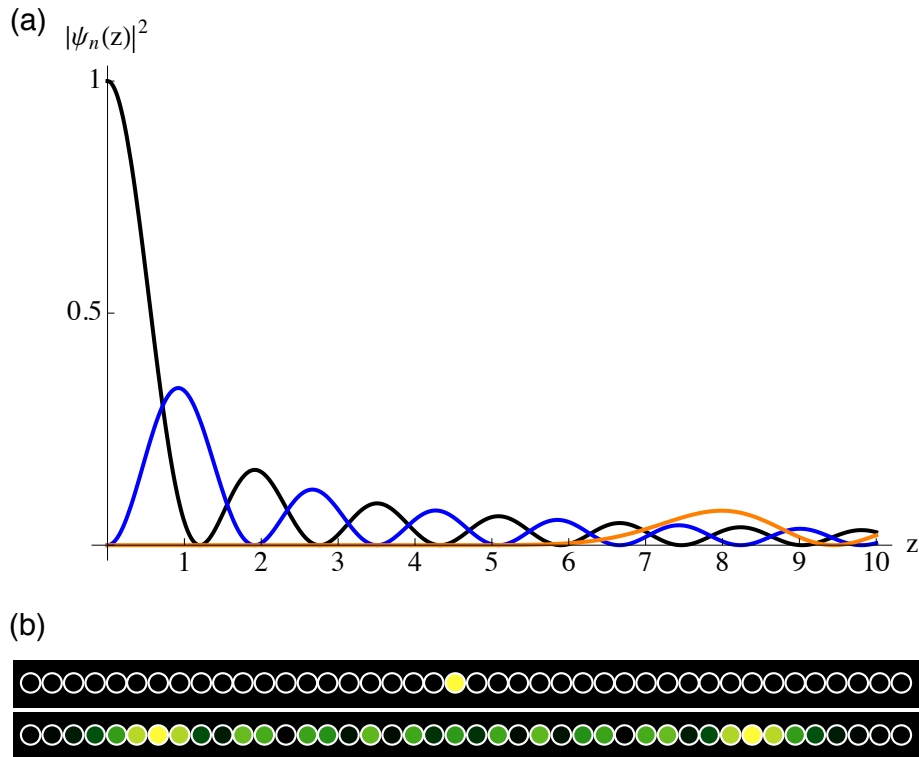


Figura 4.3: Difracción discreta. (a) $|\psi_n(z)|^2$ definido en la ecuación (4.10) para $n = 0$ (negro), $n = 1$ (azul) y $n = 14$ (anaranjado), donde $A_0 = 1$ y $V = 1$. (b) Perfil de intensidad en escala de colores palta (el color amarillo indica el valor máximo y el negro ausencia de luz), obtenido mediante simulación numérica del modelo discreto, para $z = 0$ (fila superior) y $z = 8$ (fila inferior).

De manera complementaria, en la Figura 4.3(b) se ilustran los resultados de una simulación numérica para el mismo sistema, donde se presentan los perfiles de intensidad $I_n(z) = |\psi_n(z)|^2$. Como es evidente, para $z = 8$ las guías $n = \pm 14$ son

las más excitadas (color amarillo), lo que coincide con la descripción de la Figura 4.3(a) y corrobora la perfecta correspondencia entre la solución analítica (4.10) y la simulación numérica.

A modo de generalización es importante mencionar que, al excitar cualquier sistema discreto mediante una condición tipo delta, la evolución de la amplitud vendrá descrita por la ecuación (4.10). Este fenómeno se conoce como *difracción discreta*, y su principal característica es que, en el perfil de intensidad, los “lóbulos” (sitios de color verde claro y amarillo) se encuentran alejados del sitio de excitación inicial. En contraste, la evolución de la misma condición inicial en un sistema homogéneo (un medio sin guías de onda) presenta un perfil de intensidad donde el máximo se encuentra en la zona de excitación [7, 15].

4.2. Experimentos

4.2.1. Ondas planas

Para estudiar experimentalmente la dinámica de los modos s y p en un arreglo unidimensional, es necesario considerar una disposición espacial de las guías como la ilustrada en la Figura 4.2, y por ende se describirá el sistema mediante las ecuaciones (4.2), (4.3), (4.8) y (4.9). A su vez, se cuenta con un arreglo de largo $L = 10$ [cm] que posee $N = 81$ sitios, y se trabajará con una longitud de onda $\Lambda = 532$ [nm].

Primeramente, usando el montaje descrito en la Figura 3.5, se procede a inyectar ambos modos de la guía en un sitio del arreglo, de manera de observar la dinámica para una condición inicial tipo delta. En este paso es clave hallar el perfil experimental óptimo del dipolo, para lo cual se incide en el cristal con una amplitud de la forma $A_d(x, y) = A_0 \exp[-(x-x_0)^2/2\sigma_x](y-y_0) \exp[-(y-y_0)^2/2\sigma_y]$ que genere el modo p, y luego se ajustan los parámetros σ_x y σ_y de forma tal que el patrón de salida (difracción discreta) conste sólo de estados dipolares. Este procedimiento iterativo no se realiza en el caso del modo fundamental, ya que cualquier perfil con fase plana (constante) excitará de buena forma el autoestado s de la guía de onda. Las inyecciones tipo delta fundamental y dipolar con los resultados correspondientes luego de la propagación se ilustran en la Figura 4.4.

Aquí se puede apreciar que los perfiles de intensidad de salida presentan las mismas características de la Figura 4.3(b), lo que evidencia la naturaleza discreta de la red

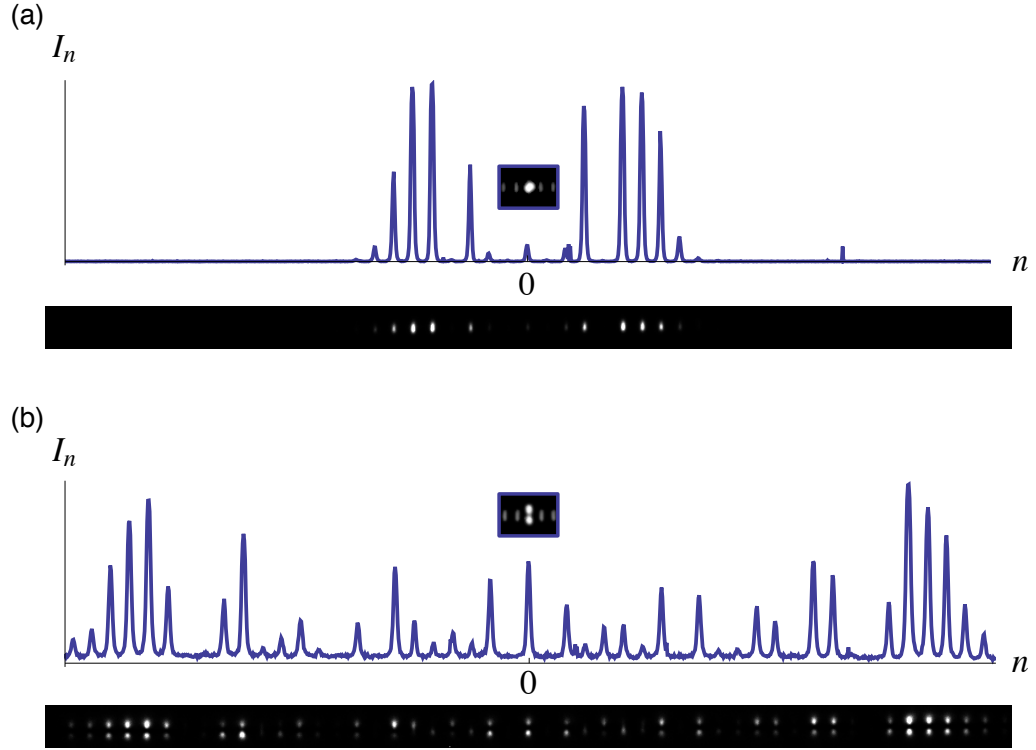


Figura 4.4: Difracción discreta (a) fundamental y (b) dipolar. Perfil de intensidad (arriba) correspondiente al patrón de salida (abajo) generado por la condición inicial (mostrada en el cuadro inserto) inyectada en la guía $n = 0$.

unidimensional para la luz, y por lo tanto corrobora el uso de la DLSE como descripción de la dinámica en el arreglo. Además, es evidente que el perfil de luz generado por el dipolo es más ancho que el del modo fundamental, lo que implica un mayor acoplamiento entre dipolos, $V^d > V^f$. Esto, en principio, se podía predecir notando que el perfil dipolar en la Figura 4.2 es más ancho que el fundamental, y por ende la integral de acoplamiento de los dipolos en guías consecutivas es mayor.

Ahora bien, dado que es posible excitar de buena forma ambos modos de la guía, el siguiente objetivo es obtener empíricamente los acoplamientos V^f y V^d generando ondas planas. Experimentalmente, una onda plana corresponde a un haz con perfil gaussiano ancho y coherente que cumpla la condición de propagarse a través del arreglo de guías sin ensancharse ni destruirse, lo que en principio se puede generar haciendo uso de un modulador de luz.

Con este fin, y usando el montaje de la Figura 3.5, se crean ondas planas discretas,

que corresponden a excitar los modos (fundamental o dipolo) de varias guías simultáneamente con un perfil colectivo gaussiano. De esta forma, se tendrá una onda plana fundamental y una dipolar, tal como se muestra en la Figura 4.5(a). Además, utilizando el modulador de reflexión del montaje, es posible añadir un perfil de fase a la onda plana, de manera que puede introducirse un *kick* (gradiente de fase) en la condición inicial (ver Figura 4.5(b)).

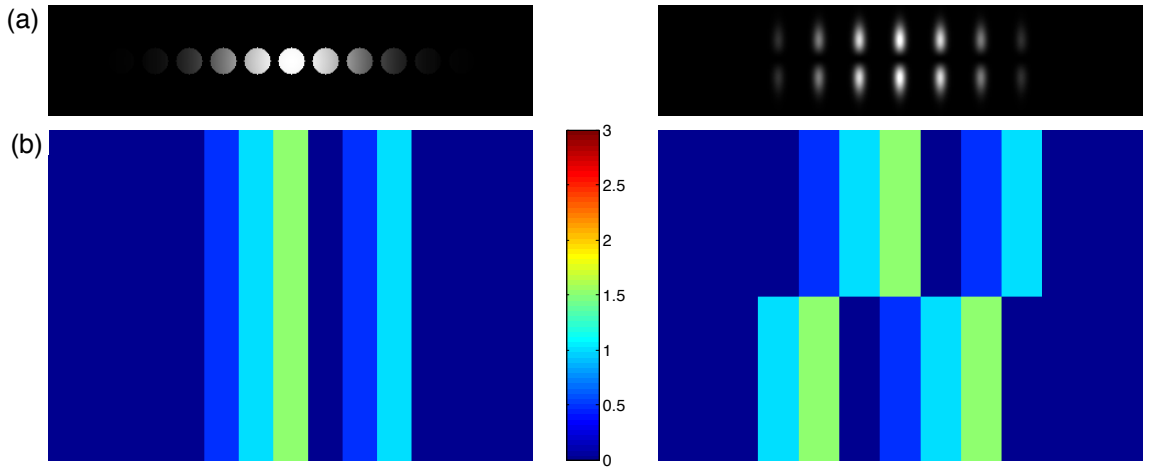


Figura 4.5: Onda plana fundamental y dipolar. (a) Perfiles de intensidad entregados al modulador para la onda formada por modos s (izquierda) y p (derecha). (b) Perfiles de fase entregados al modulador con gradiente $k = \pi/2d$ para la onda fundamental (izquierda) y para la onda dipolar (derecha), donde la escala está en unidades de π .

Las ondas planas generadas sin gradiente de fase se muestran en la Figura 4.6 (ver símbolos cuadrados), donde es posible observar una excelente correspondencia con las condiciones iniciales de la Figura 4.5(a) tanto en el perfil gaussiano como en el número de guías excitadas. Se procede entonces, para la onda plana fundamental y la dipolar, a variar la fase $\phi = kd$ entre dos guías consecutivas, comenzando en 0 y terminando en 2π , en pasos de $\pi/60$. La condición inicial se propaga en el arreglo, y para cada perfil de salida se calcula la posición horizontal del *centro de masas*, dada por

$$X_{cm}^j(z) = \frac{\sum_n x_n |\psi_n^j(z)|^2}{\sum_n |\psi_n^j(z)|^2}, \quad (4.11)$$

donde $x_n = nd$ es la coordenada del n -ésimo sitio del arreglo y $j = \{f, d\}$. Usando la última relación, se procede a evaluar la velocidad transversal de cada onda plana mediante la expresión $V_{cm}^j = X_{cm}^j/L$. De esta forma, para cada valor de la fase ϕ se obtiene $V_{cm}^j(\phi)$, resultados que se presentan en la Figura 4.6 (parte superior).

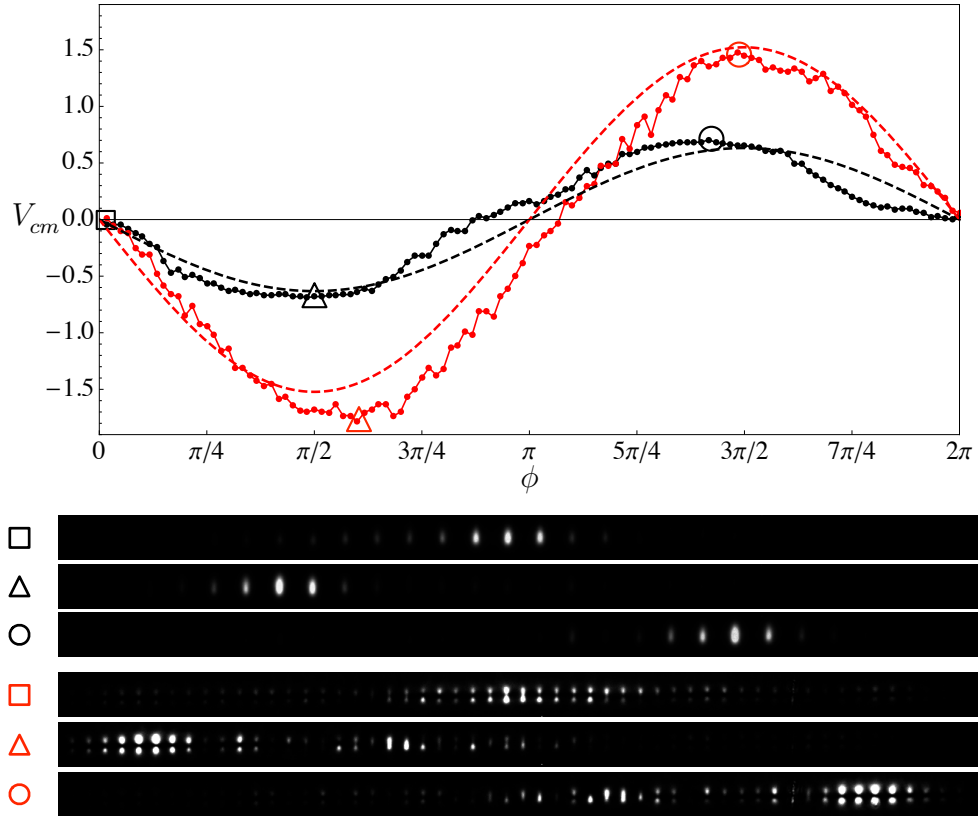


Figura 4.6: Velocidad del centro de masas en función del cambio de fase entre guías consecutivas. Los puntos negros (rojos) representan la onda plana compuesta de modos fundamentales (dipolos), y las líneas segmentadas corresponden a ajustes sinusoidales. En la parte inferior se muestran perfiles de salida para distintos valores de ϕ .

Debido a la forma sinusoidal que presenta la velocidad de grupo para los dos tipos de onda plana, se procede a hacer un ajuste de la forma $V_{cm}^j(\phi)/d = -2V^j \sin(\phi)$ y a usar las ecuaciones (4.3) y (4.9), de donde se obtienen los acoplamientos $V_{exp}^f = 0.316$ [cm^{-1}] y $V_{exp}^d = 0.761$ [cm^{-1}]. Estos valores coinciden de manera casi perfecta con

$V_{num}^f = 0.314 \text{ [cm}^{-1}\text{]}$ y $V_{num}^d = 0.760 \text{ [cm}^{-1}\text{]}$, que fueron obtenidos de forma puramente numérica [28].

Los resultados recién expuestos dan cuenta, primero, del potencial del montaje experimental generalizado (Figura 3.5) a la hora de generar condiciones iniciales arbitrarias (fue posible generar ondas planas discretas compuestas de cada modo de la guía, y además se les añadió un gradiente de fase), ya que las curvas obtenidas claramente representan funciones sinusoidales con un comportamiento suave de los datos. En segundo lugar, se valida nuevamente el modelo discreto (DLSE) como una buena descripción de la dinámica en arreglos de guías de onda, ya que de aquí se obtuvo la función sinusoidal correspondiente a la velocidad de grupo.

4.2.2. Desorden

A modo de completitud en el estudio de arreglos unidimensionales, se consideran ahora una serie de arreglos desordenados, donde la distancia entre guías consecutivas es variable y todas las guías son idénticas (a esto se le denomina *desorden no diagonal*, y se muestra en la Figura 4.7).

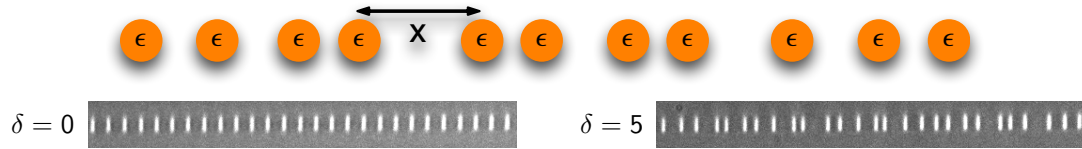


Figura 4.7: Arreglos unidimensionales desordenados. La distancia entre guías consecutivas es x , y δ representa el grado de desorden del sistema. Se muestran los casos de una red experimental ordenada ($\delta = 0$) y otra con $\delta = 5$.

En este contexto, cada arreglo unidimensional tiene cierto grado de desorden, que es representado por el parámetro δ y que corresponde a la variación de la distancia entre guías consecutivas. Una vez escrita la n -ésima guía de onda, la distancia con la guía $n + 1$ vendrá dada por $x = d + r\delta$, donde $d = 16 \text{ [\mu m]}$ es una distancia fija, r es un número aleatorio entre -1 y 1 , y donde $\delta = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Por ende se tendrán 8 arreglos, donde el primero es completamente ordenado ($\delta = 0$, $x = 16 \text{ [\mu m]}$), y el último posee un alto grado de desorden ($\delta = 7$). Para cada arreglo se inyecta un modo fundamental y luego un dipolo en una guía de la zona central

(condición inicial tipo delta), de manera que la luz pueda difractar sin llegar a los bordes de la red en ambos casos. Una vez registrado el patrón de salida, se calcula el *grado de participación* en $z = L = 10$ [cm], definido como

$$R^j(z) = \frac{(\sum_n |\psi_n^j(z)|^2)^2}{\sum_n |\psi_n^j(z)|^4}, \quad (4.12)$$

y que corresponde al número efectivo de guías excitadas en el arreglo (aquí $j = \{f, d\}$). Este procedimiento se repite alrededor de 40 veces (número de guías en la zona central), y se calcula una razón de participación promedio con su respectiva desviación estándar $\bar{R}^j(\delta) \pm \sigma_\delta^j$ para cada red.

Complementariamente, se simula numéricamente la propagación de una condición inicial tipo delta en arreglos desordenados, siendo necesario en primera instancia encontrar el acoplamiento en función de la distancia entre guías consecutivas. Para ello se comienza modelando con las funciones $V^f(x) = Ae^{-\alpha_f x}$ y $V^d(x) = Ae^{-\alpha_d x}$, de manera que el decaimiento α es lo único que diferenciará V^f de V^d . A su vez, se cuenta con los valores experimentales de los acoplamientos para $x = 16$ [μm], $V^f(16) = 0.316$ [cm^{-1}] y $V^d(16) = 0.761$ [cm^{-1}], y se dispone de un arreglo ordenado extra en el cristal de estudio, donde la distancia entre guías es $x = 23$ [μm]. Aquí se hace incidir el modo fundamental de la guía en un sitio de la zona central, registrando el perfil de salida.

Por otro lado, se realiza una simulación numérica de la propagación de una condición inicial tipo delta en una distancia $L = 10$, y se varía el valor del acoplamiento $V_{num}^f(23)$, de manera tal que visualmente el patrón se ajuste lo mejor posible al observado de manera experimental. El valor encontrado es $V_{num}^f(23) = 0.035$, y el mismo procedimiento numérico se realiza para el arreglo usado en el experimento de ondas planas, obteniendo $V_{num}^f(16) = 0.39$.

Evidentemente, el acoplamiento para el modo fundamental usando la simulación difiere del valor obtenido experimentalmente para $d = 16$ [μm]. Sin embargo, si se supone que para el caso de una distancia $d = 23$ [μm] la razón entre $V_{num}^f(23)$ y el valor correcto es la misma que para $d = 16$ [μm], entonces

$$\frac{V^f(16)}{V_{num}^f(16)} = \frac{V^f(23)}{V_{num}^f(23)},$$

y por lo tanto el acoplamiento para $d = 23$ [μm] será $V^f(23) = 0.028$ [cm^{-1}].

Como se tienen los valores para $V^f(16)$, $V^d(16)$ y $V^f(23)$, es posible encontrar los

parámetros de las funciones $V^f(x)$ y $V^d(x)$, que vendrán dados por $\alpha_f = 0.344$, $\alpha_d = 0.29$, y $A = 78.13$.

Con las expresiones anteriores encontradas, se procede a hacer una simulación numérica, donde se consideran distintas redes con desorden en los acoplamientos. Aquí, para cada guía n de los arreglos (cada uno definido por su grado de desorden δ) se genera un número aleatorio r entre -1 y 1, y utilizando $d = 16$ [μm] se calculan $V^f(d+r\delta)$ y $V^d(d+r\delta)$, que definen el acoplamiento con el sitio $n+1$. Posteriormente, en cada red se incide con una condición inicial tipo delta (fundamental y dipolar) y se propaga numéricamente el haz una distancia $L = 10$, calculando el grado de participación del patrón de salida $R_{num}^j(\delta)$.

El proceso de generación de acoplamientos aleatorios, la posterior propagación de la condición inicial en un sitio y el cálculo de $R_{num}^j(\delta)$ se repite 100 veces, obteniéndose un promedio estadístico con su desviación estándar correspondiente $\bar{R}_{num}^j(\delta) \pm \sigma_\delta^j$. Este grado de participación promedio se compara al obtenido experimentalmente, y ambos resultados se muestran en la Figura 4.8.

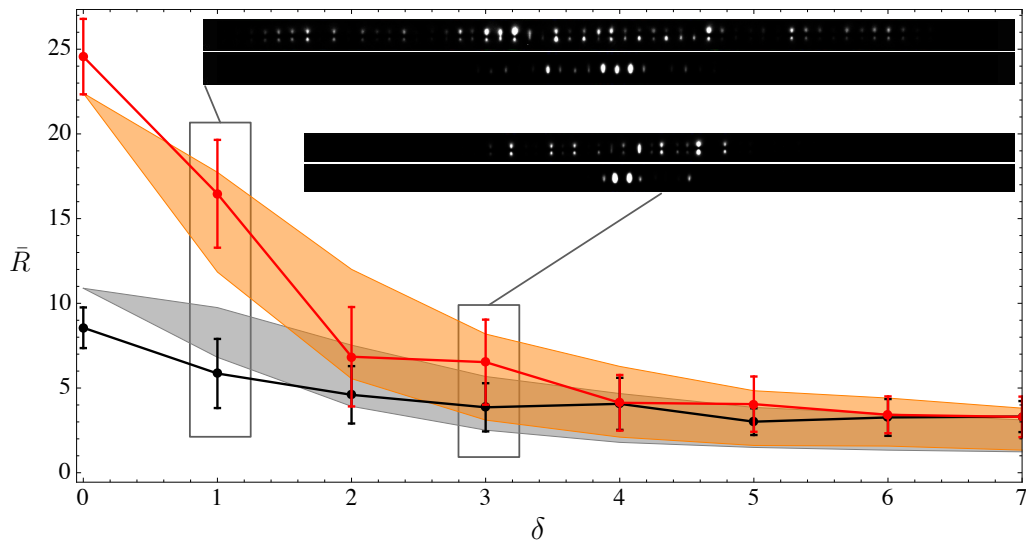


Figura 4.8: Grado de participación en función del desorden, donde las zonas sombreadas ilustran los resultados numéricos. Los puntos negros (rojos) corresponden a los perfiles experimentales compuestos por modos fundamentales (dipolos), y cada barra representa la desviación estándar respectiva. Se muestran insertos patrones de salida para un grado de desorden débil e intermedio.

Lo primero que puede observarse es la excelente correspondencia entre los puntos experimentales (rojos y negros) y la simulación numérica (áreas sombreadas), que describen un decaimiento del grado de participación al aumentar el grado de desorden. Además, se muestran dos ejemplos de los patrones de salida tanto del modo fundamental como del dipolo en la guía, donde se evidencia el contraste en el grado de participación. Debido al mayor acoplamiento entre modos dipolares (como se comprobó con el experimento de ondas planas), el área de esparcimiento de la luz es mucho mayor que para el modo fundamental, lo que incluso se manifiesta con un grado de desorden intermedio ($\delta = 3$). No obstante lo anterior, para un grado de desorden suficientemente alto ($\delta \geq 5$) ambas condiciones iniciales presentan una inhibición del transporte debido a múltiples interferencias destructivas, lo que se conoce como *localización de Anderson* [33, 34].

Capítulo 5

Red de Lieb

Extendiendo el estudio de cristales fotónicos a arreglos bidimensionales, se presentan aquí las propiedades de la red tipo Lieb, obtenidas mediante el modelo Tight-Binding. Entre ellas, una de las más importantes a nivel fenomenológico es la existencia de una banda plana en su espacio recíproco, la cual contiene modos espacialmente localizados (compactones lineales) del sistema. Dentro del presente capítulo se derivará la relación de dispersión (caracterizando las superficies que la componen) y se mostrará evidencia experimental de la excitación del anillo localizado de la red, generalizando su observación a una combinación lineal de autoestados de banda plana y posicionando a la DLSE como una fiel descripción de la dinámica. Además, se destaca la importancia de una óptima condición inicial al momento de la propagación, que en este caso se basa en el método de transporte de imágenes, y que corresponde a una nueva manifestación del potencial experimental para generar perfiles arbitrarios a ser inyectados en el material.

5.1. Modelo teórico

La red de Lieb, que posee una geometría similar a la rectangular, es descrita por la Figura 5.1(a). Aquí se muestra la disposición espacial de las guías de onda, los acoplamientos a vecinos cercanos (que se asumen distintos por generalidad), y la celda unitaria. Con el fin de describir la propagación de luz en esta red fotónica, se acude al modelo Tight-Binding bidimensional (2.35), con $\gamma = 0$. Considerando interacción a primeros vecinos (y para guías idénticas, $\epsilon_{\vec{n}} = \epsilon$), se propone una solución general del tipo $\psi_{\vec{n}}(z) = U_{\vec{n}} e^{i\lambda z} = u_{\vec{n}} e^{i\epsilon z} e^{i\lambda z}$, donde \vec{n} es la posición de la guía en el arreglo,

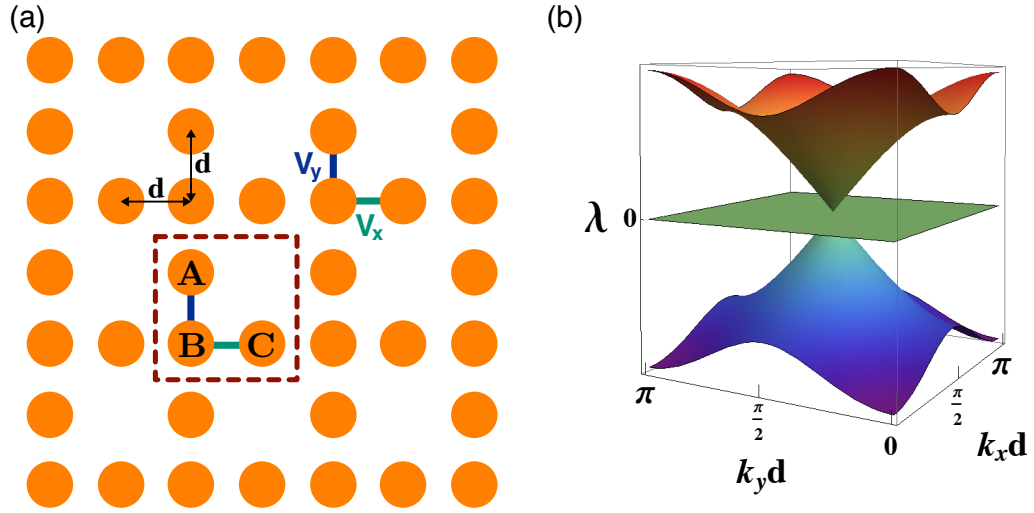


Figura 5.1: (a) Red de Lieb. La distancia entre guías cercanas es d y los acoplamientos vertical y horizontal son V_y y V_x , respectivamente. La zona segmentada corresponde a la celda unitaria, que posee los sitios **A**, **B** y **C**. (b) Estructura de bandas de la red de Lieb para $V_x = V_y$, donde se muestra la zona con $k_x d$ y $k_y d$ entre 0 y π .

y donde $u_{\vec{n}} = \{A, B, C\}e^{i\vec{k}\cdot\vec{n}}$ (dependiendo del sitio de la celda unitaria). En este punto es importante notar que, debido a que la celda unitaria posee tres elementos, será necesario escribir tres ecuaciones tipo Schrödinger, dando eventualmente como resultado tres bandas lineales.

Reemplazando entonces el ansatz para cada guía de la celda unitaria, y tomando como referencia el sitio **B**, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \quad \lambda A e^{ik_y d} &= V_y (B + B e^{ik_y 2d}), \\ \mathbf{B} : \quad \lambda B &= V_y (A e^{ik_y d} + A e^{-ik_y d}) + V_x (C e^{ik_x d} + C e^{-ik_x d}), \\ \mathbf{C} : \quad \lambda C e^{ik_x d} &= V_x (B + B e^{ik_x 2d}). \end{aligned}$$

Al dividir la primera relación por $e^{ik_y d}$ y la tercera igualdad por $e^{ik_x d}$ resulta

$$\begin{aligned} \lambda A &= V_y (B e^{-ik_y d} + B e^{ik_y d}), \\ \lambda B &= V_y (A e^{ik_y d} + A e^{-ik_y d}) + V_x (C e^{ik_x d} + C e^{-ik_x d}), \\ \lambda C &= V_x (B e^{-ik_x d} + B e^{ik_x d}). \end{aligned}$$

Haciendo ahora uso de la identidad $e^{-ix} + e^{ix} = 2 \cos(x)$ y reescribiendo matricialmente se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 2V_y \cos(k_y d) & 0 \\ 2V_y \cos(k_y d) & 0 & 2V_x \cos(k_x d) \\ 0 & 2V_x \cos(k_x d) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix},$$

que corresponde a un problema de autovalores. La ecuación secular que se desprende al calcular el determinante viene dada por

$$\lambda[\lambda^2 - 4(V_x^2 \cos^2(k_x d) + V_y^2 \cos^2(k_y d))] = 0,$$

y tiene como soluciones

$$\lambda(k_x, k_y) = 0, \pm 2\sqrt{V_x^2 \cos^2(k_x d) + V_y^2 \cos^2(k_y d)}. \quad (5.1)$$

Estas relaciones corresponden a la estructura de bandas del sistema, que se muestra en la Figura 5.1(b). Como puede apreciarse, existen dos superficies simétricas que dependen del vector de onda (k_x, k_y) y de los acoplamientos, llamadas *bandas dispersivas*. Una característica particular de éstas es que, a medida que se acercan a la frecuencia nula $\lambda = 0$, adquieren forma cónica. Estas zonas se denotan como *conos de Dirac* y presentan una velocidad de grupo lineal (recordar que la velocidad de grupo se define como $v_{g,j} = \partial\lambda/\partial k_j$, donde $j = \{x, y\}$), al igual que las ondas electromagnéticas. Debido a lo anterior, se dice que los modos del sistema pertenecientes a los conos viajan transversalmente “a velocidad luz”, fenómeno que ha sido observado recientemente [35].

Por otro lado, la ecuación (5.1) muestra la existencia de una banda completamente plana en $\lambda = 0$, que no depende del vector de onda ni de los acoplamientos. Aquí, a pesar de que los autovectores del sistema son, por definición, extendidos (ocupan toda la red), es posible realizar una combinación lineal de ellos para formar modos localizados (se produce un “cambio de base”). Estas soluciones compactas, también llamadas *anillos*, son perfiles de luz que, al ser inyectados en la red, se propagan a través de ella sin deformarse ni destruirse (como la banda a la que pertenecen es plana, su velocidad de grupo es nula).

Dado que las tres bandas del sistema coinciden en el llamado *punto de Dirac* ($k_x d = \pi/2, k_y d = \pi/2, \lambda = 0$), los dos fenómenos recién descritos conviven en esta zona, pudiendo un modo del sistema (en principio) no difractar o viajar transversalmente

a velocidad máxima al variar de manera ínfima su ubicación en el espacio recíproco. Como se mencionó, los estados pertenecientes a la superficie sin dispersión son localizados, y de hecho constan de sólo cuatro guías del arreglo excitadas, con una fase π relativa entre sitios **A** y **C**, como muestra la Figura 5.2(b). Además, debido al método de fabricación de las guías de onda (técnica de escritura con láser de femtosegundos [11]), éstas tienen una forma transversal elíptica, como se aprecia en la Figura 5.2(a). Por ende, el efecto que se produce es un mayor acoplamiento en la dirección vertical ($V_y > V_x$), y por lo tanto el anillo es también anisotrópico, siendo las amplitudes en los sitios **A** y **C**, en principio, distintas. En particular se debe cumplir $C/A = -V_y/V_x$, donde el signo menos representa un desfase π , como ilustra el cuadro inserto en la Figura 5.2(b). De esta forma, la luz no podrá acoplarse al sitio **B** (la amplitud en el sitio conector debe anularse [30]), y el modo de banda plana se propagará sin alteración alguna de su perfil.

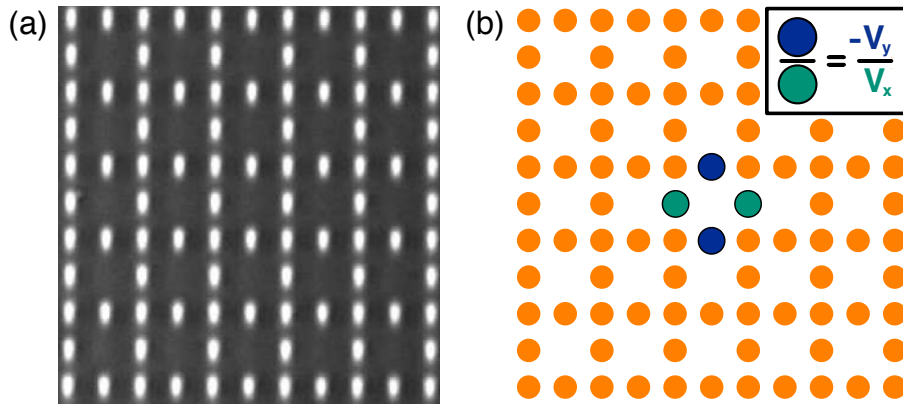


Figura 5.2: (a) Vista transversal de la red de Lieb experimental, que ha sido iluminada con luz blanca y donde la distancia entre guías es $d = 20$ [μm]. (b) Modo localizado de banda plana. Éste consta de cuatro sitios, donde las amplitudes vienen dadas por $C/A = -V_y/V_x$, como se muestra en el cuadro inserto.

5.2. Experimento

Se pretende, de aquí en adelante, estudiar la red de Lieb mediante el método de transporte de imágenes utilizado en el montaje de doble paso (ver Figura 3.1). Para ello se comienza generando una condición inicial tipo delta, la cual se hace incidir en cada uno de los sitios de la celda unitaria. La Figura 5.3(a) muestra la condición inicial inyectada en el sitio **B** (cuadro inserto) y el patrón de salida del arreglo (el cristal tiene un largo de 10 [cm]). Como puede notarse, la difracción de la luz en la dirección vertical es mayor que en la horizontal, manifestación inequívoca de que $V_y > V_x$ [36]. Además, el patrón obtenido es altamente simétrico, lo cual da cuenta de la calidad de las guías de onda utilizadas (considerándose idénticas en el experimento).

Posteriormente, se genera la condición inicial tipo anillo entregándole al modulador la imagen mostrada en la Figura 3.4(b) e incidiendo en la red como muestra el cuadro inferior inserto la Figura 5.3(b). Adicionalmente, con el fin de corroborar la estructura de fase de la condición inicial, se hace interferir el anillo con una onda plana de igual polarización, en este caso horizontal. El patrón generado se muestra en el cuadro superior izquierdo inserto en la Figura 5.3(b), donde se puede notar que los haces superior e inferior poseen un máximo en el centro. En contraste, los sitios laterales presentan un mínimo central, lo que corresponde a un desfase π .

La parte principal de la Figura 5.3(b) muestra el perfil de salida, donde se observa la perfecta excitación del anillo, que no muestra señal alguna de distorsión o difracción. Como es evidente, el anillo tiene un perfil anisotrópico, siendo la amplitud en los sitios **C** mayor que en los sitios **A**, lo que corrobora que $V_y > V_x$. Es importante en este punto señalar que, a pesar de que la condición inicial es isotrópica, ésta es muy similar al modo de banda plana, luego el efecto que se produce es la fuerte excitación del anillo anisotrópico más cierta radiación mínima que escapa de la red (la condición inicial “relaja” al modo localizado).

Complementariamente, el cuadro superior derecho inserto en la Figura 5.3(b) ilustra el interferograma del perfil de salida con una onda plana, evidenciando la misma estructura de fase que el anillo incidente y su conservación durante la propagación. La correcta excitación del modo localizado de banda plana da cuenta del potencial del montaje experimental utilizado para este fin, en particular del óptimo desempeño

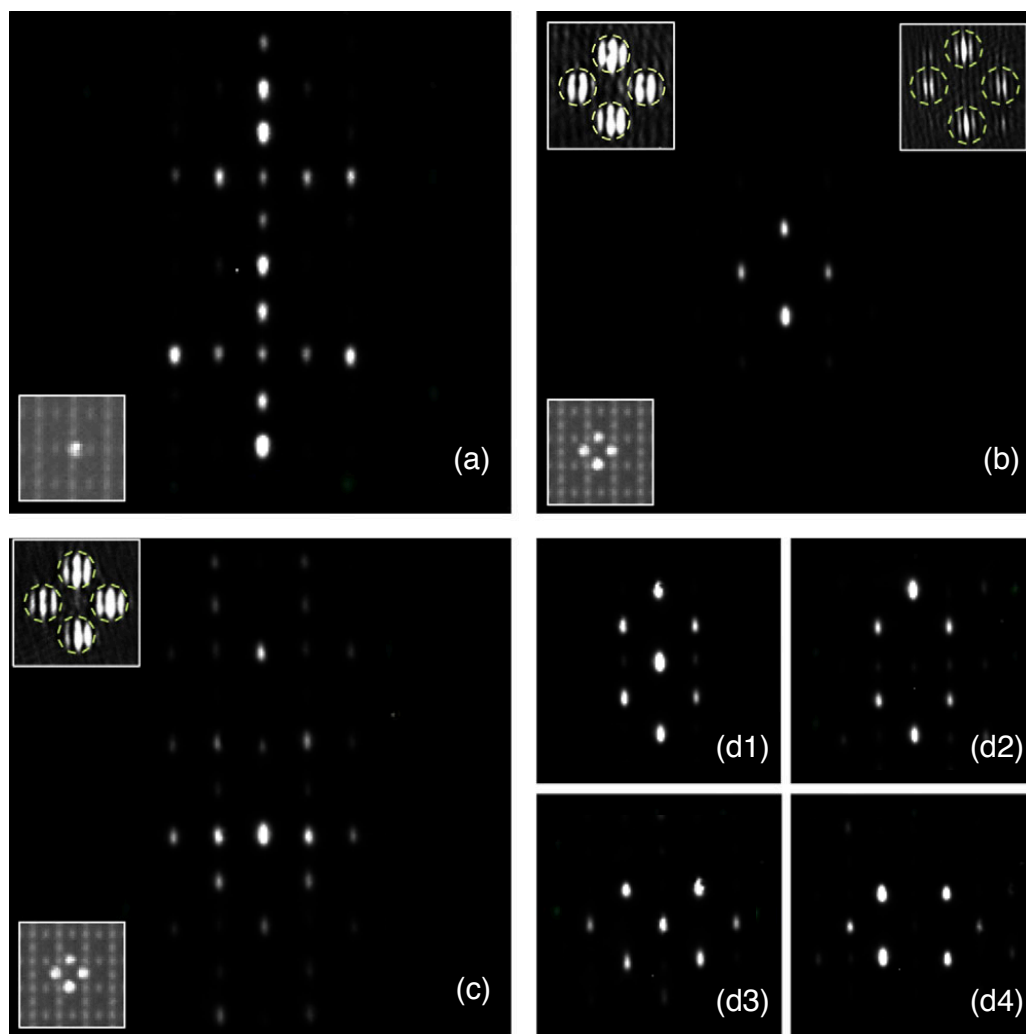


Figura 5.3: (a) Patrón de salida para una incidencia tipo delta en un sitio **B**, donde el cuadro inserto muestra la condición inicial. (b) Propagación del modo de banda plana localizado. Los cuadros insertos de la izquierda muestran el perfil de intensidad inicial (inferior) y el interferograma (superior) para determinar la fase incidente, y el cuadro superior derecho ilustra la fase de salida del anillo. (c) Perfil de salida para una condición inicial tipo anillo (cuadro inferior inserto) sin estructura de fase (cuadro superior inserto). Propagación de dos anillos (d1) sumados y (d2) restados verticalmente, y dos anillos (d3) sumados y (d4) restados horizontalmente.

del método de transporte de imágenes. Además, la observación del anillo corrobora el modelo Tight-Binding a primeros vecinos como una fiel descripción de la dinámica en la red.

A modo de evidenciar la importancia de la estructura de fase en la condición inicial, se inyectan ahora las mismas intensidades que para el estado localizado, pero donde todos los sitios tienen igual fase. Estos perfiles se muestran en los cuadros inferior (intensidad) y superior (fase) izquierdo insertos en la Figura 5.3(c), y en su parte principal se observa la completa destrucción del perfil, evidenciando el contraste entre la difracción y conservación del modo dependiendo de la fase incidente.

Debido a la linealidad de las ecuaciones que describen la dinámica en el arreglo (DLSE), al combinar linealmente soluciones del sistema resulta otro modo de la red. Por ende es posible, por ejemplo, sumar o restar anillos para formar otras soluciones compactas que debieran propagarse a través del arreglo sin sufrir alteraciones. Esto se realizó para dos anillos sumados (inyectados en fase) y restados (desfasados en π) vertical y horizontalmente, y los resultados se muestran en las Figuras 5.3(d1), (d2), (d3) y (d4). Aquí es posible notar la anisotropía de los anillos y el aumento o ausencia de amplitud en los sitios compartidos, observándose una excelente propagación en todos los casos.

Los resultados recién expuestos corresponden a la primera observación de estados localizados en la red fotónica de Lieb [22], lo que puede dar paso a una codificación óptica al asociar la presencia o ausencia de luz en cierta zona a un 1 o un 0, respectivamente [25, 27].

Capítulo 6

Cinta tipo Grafeno

Dentro de los arreglos de guías de onda cuasi unidimensionales, la cinta tipo Grafeno destaca dado que posee dos bandas planas en la aproximación discreta, y por lo tanto dos tipos diferentes de modos localizados. La principal característica de las curvas sin dispersión del espacio recíproco del sistema es que se preservan al considerar tanto anisotropía como interacción a segundos vecinos, posicionándose como “robustas”. Motivado por estas inusuales propiedades, este capítulo se avoca al análisis teórico, numérico y experimental de la cinta de Grafeno. En particular, se calculan las soluciones estacionarias del sistema considerándolo infinito y finito con tres tipos de terminación, y se obtienen analíticamente (a primeros vecinos) los modos de borde. De manera complementaria, se indaga en la dinámica que presenta una combinación lineal de anillos y se procede posteriormente a excitar los dos modos localizados, cuya observación depende críticamente de la condición inicial.

La investigación de este cristal fotónico será también el foco de los siguientes dos capítulos, por lo que una acabada comprensión de los fenómenos aquí presentes será de gran utilidad más adelante.

6.1. Modelo teórico

6.1.1. Soluciones estacionarias

Usando el modelo discreto se estudia la cinta tipo Grafeno, dada por la Figura 6.1, y donde la celda unitaria corresponde a un hexágono regular. En este arreglo V_1 y V_3 son responsables de la interacción horizontal y vertical entre guías de onda,

mientras que V_2 y V_4 dan cuenta de los acoplamientos diagonales. Así, por ejemplo, considerando sólo interacciones a primeros vecinos, se tiene que $V_3 = V_4 = 0$.

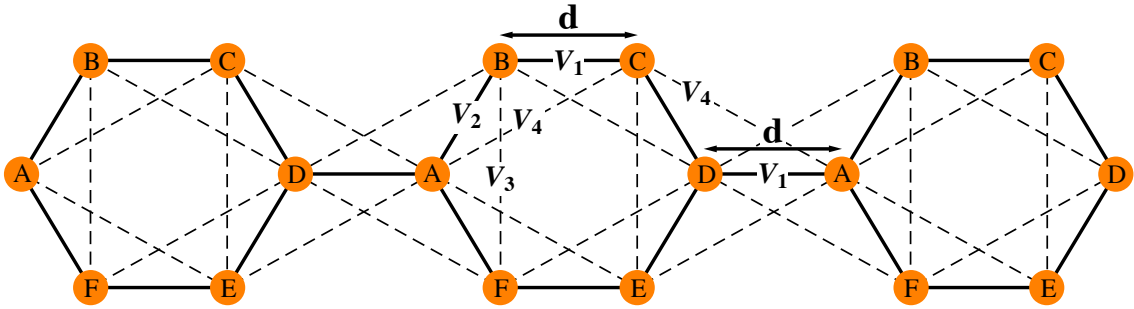


Figura 6.1: Cinta de Grafeno. Los círculos anaranjados indican las posiciones de las guías de onda, y las líneas continuas (segmentadas) representan los acoplamientos a primeros (segundos) vecinos. Los distintos sitios de la celda unitaria de la cinta se denotan por las letras **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F**.

A su vez, para una cinta finita, es posible distinguir entre cuatro tipos de borde presentes, los cuales se ilustran en la Figura 6.2.

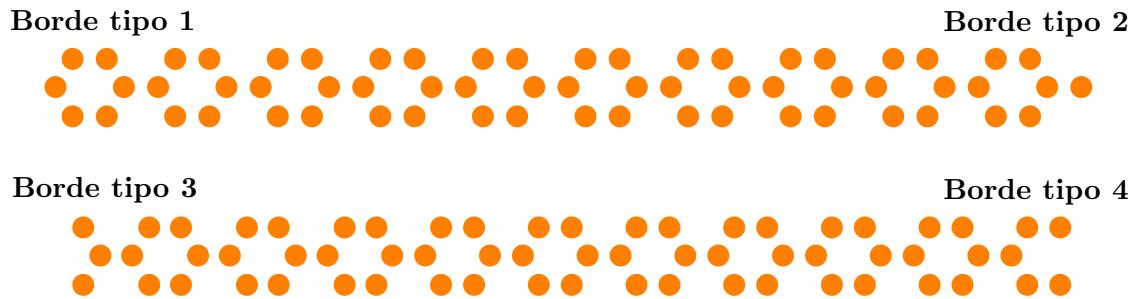


Figura 6.2: Tipos de borde de la cinta de Grafeno

Según la teoría de modos acoplados descrita en el capítulo 2, la evolución de la luz en el \vec{n} -ésimo sitio de la cinta (ubicado en la posición \vec{n}) es bien descrita por la ecuación tipo Schrödinger (2.35) en su versión lineal,

$$-i \frac{d\psi_{\vec{n}}}{dz} = \epsilon_{\vec{n}} \psi_{\vec{n}} + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n}, \vec{m}} \psi_{\vec{m}}. \quad (6.1)$$

Asumiendo las guías de onda como idénticas (se fija $\epsilon_{\vec{n}} = \epsilon = 0$, sin pérdida alguna de generalidad), y con el objetivo de resolver (6.1), se propone una solución del tipo $\psi_{\vec{n}}(z) = u_{\vec{n}}e^{i\lambda z}$, con $u_{\vec{n}} = \{A, B, C, D, E, F\}e^{i\vec{k}\cdot\vec{n}}$ (dependiendo del sitio de la celda unitaria considerado). Al reemplazar en (6.1) para los 6 sitios de la red y reescribiendo matricialmente se obtiene el problema de autovalores

$$M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

donde la matriz de interacciones viene dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & V_2e^{ikd/2} & f_4 & V_1e^{-ikd} & f_4 & V_2e^{ikd/2} \\ V_2e^{-ikd/2} & 0 & V_1e^{ikd} & f_4 & 0 & V_3 \\ f_4 & V_1e^{-ikd} & 0 & V_2e^{ikd/2} & V_3 & 0 \\ V_1e^{ikd} & f_4 & V_2e^{-ikd/2} & 0 & V_2e^{-ikd/2} & f_4 \\ f_4 & 0 & V_3 & V_2e^{ikd/2} & 0 & V_1e^{-ikd} \\ V_2e^{-ikd/2} & V_3 & 0 & f_4 & V_1e^{ikd} & 0 \end{pmatrix},$$

con $f_4 = 2V_4 \cos\left(\frac{3kd}{2}\right)$. Al graficar los autovalores de M para interacción a primeros ($V_3 = V_4 = 0$) y segundos vecinos ($V_3 = 0.3, V_4 = 0.2$) en un sistema anisotrópico ($V_1 = 1, V_2 = 1.5$), se obtienen las Figuras 6.3(a) y 6.3(c). Aquí se muestran las bandas dentro de la primera zona de Brillouin, $-\pi/3 \leq k \leq \pi/3$, para $d = 1$. De manera complementaria, se diagonaliza numéricamente (6.1) considerando una cinta finita con bordes distintos, resultando las Figuras 6.3(b) y 6.3(d).

Como puede apreciarse, todos los cálculos muestran la existencia de dos bandas completamente planas en el sistema, dadas por $\lambda_{\pm} = -V_3 \pm V_1$, y donde cada una contiene un tipo de modo localizado (anillo) que se propaga sin difractar en la cinta. Estos modos de banda plana, como muestra la Figura 6.4, están compuestos sólo por cuatro sitios de la red, y sus amplitudes cumplen las relaciones $A = 0, B = -F, C = -E$ y $D = 0$. A su vez, los estados compactos satisfacen la expresión $B = \pm C$, dependiendo de la frecuencia λ_{\pm} de la banda plana a la cual pertenecen.

Es importante notar que, a diferencia del caso de la red de Lieb, la anisotropía en los acoplamientos no produce efecto alguno sobre los modos de banda plana. Esto se debe a que los sitios donde el campo se anula (**A** y **D**) interactúan con el resto de

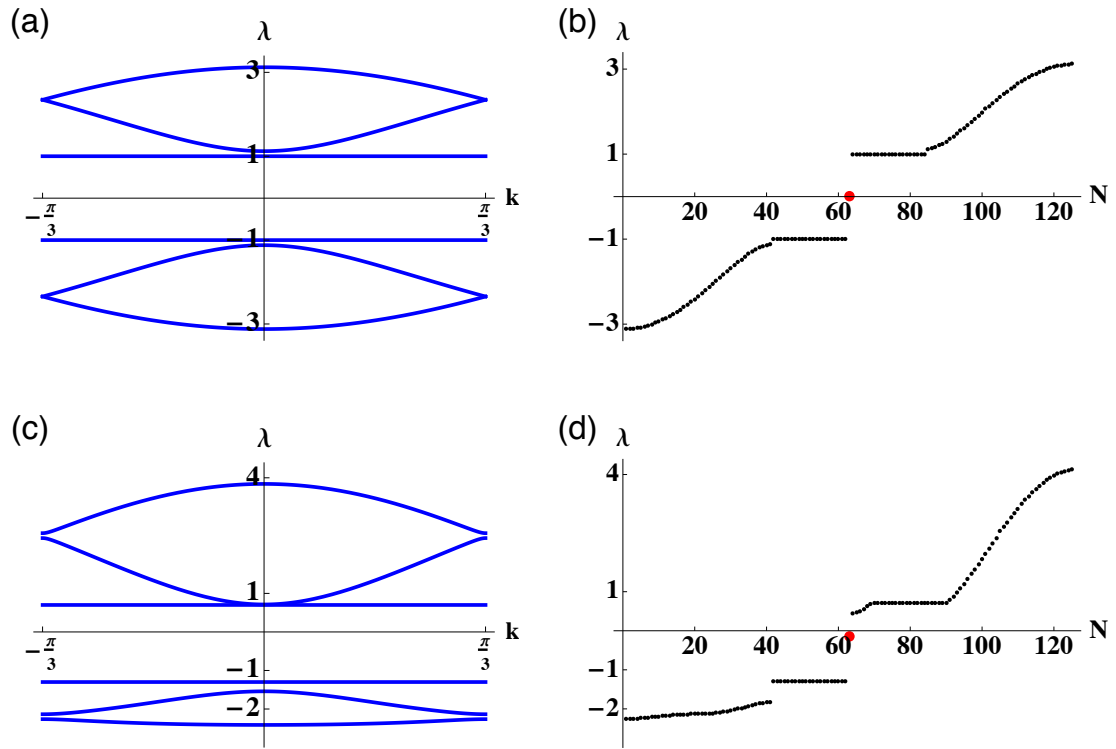


Figura 6.3: Espectros lineales de la cinta tipo Grafeno con $V_1 = 1$ y $V_2 = 1.5$. Bandas a primeros vecinos ($V_3 = V_4 = 0$) obtenidas (a) analíticamente considerando una cinta infinita, y (b) numéricamente para una cinta con terminaciones tipo 1 y 4 (ver Figura 6.2). Bandas para $V_3 = 0.3$ y $V_4 = 0.2$ obtenidas (c) analíticamente considerando una cinta infinita, y (d) numéricamente para una cinta con terminaciones tipo 1 y 4. La existencia de un modo de borde en (b) y (d) se denota por el círculo de color rojo.

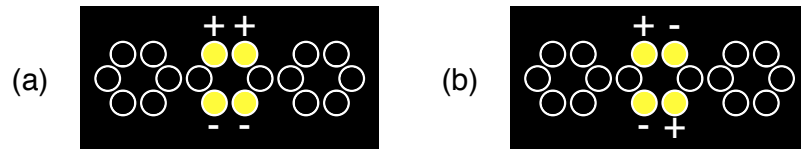


Figura 6.4: Modos de banda plana de la cinta de Grafeno para $B = 1$ con frecuencia (a) $\lambda_+ = -V_3 + V_1$ y (b) $\lambda_- = -V_3 - V_1$. La fase se representa con los signos “+” (fase de referencia) y “-” (fase π respecto a “+”).

las guías de la celda unitaria mediante V_2 , y por lo tanto un cambio entre V_1 y V_2 no altera este fenómeno. Además, la conservación de las dos bandas planas considerando incluso interacción hasta segundos vecinos (ver Figura 6.3) implica la existencia de los anillos también ante estas condiciones, lo que posiciona a este sistema como un gran candidato para ser estudiado experimentalmente.

6.1.2. Combinación de anillos

Se desea, en este punto, estudiar la evolución de un perfil que combina ambos modos de banda plana en una celda de la red, para lo cual se debe considerar que los anillos tienen frecuencias distintas, $\lambda_{\pm} = -V_3 \pm V_1$. Definiendo $\vec{a}_1 = (A_1 = 0, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = 0, E_1 = -1, F_1 = -1)$ y $\vec{a}_2 = (A_2 = 0, B_2 = 1, C_2 = -1, D_2 = 0, E_2 = 1, F_2 = -1)$ como los perfiles de los modos de banda plana de frecuencias λ_+ y λ_- , respectivamente (ver Figura 6.4), $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$ será una combinación lineal de ambos estados localizados, con α y β números reales. El campo en los sitios **B**, **C**, **E** y **F** vendrá entonces dado por

$$\begin{aligned} B(z) &= \alpha e^{i\lambda_+ z} + \beta e^{i\lambda_- z}, \\ C(z) &= \alpha e^{i\lambda_+ z} - \beta e^{i\lambda_- z}, \\ E(z) &= -(\alpha e^{i\lambda_+ z} - \beta e^{i\lambda_- z}), \\ F(z) &= -(\alpha e^{i\lambda_+ z} + \beta e^{i\lambda_- z}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las intensidades en función de z para cada guía serán

$$I_B(z) = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta \cos^2(V_1 z), \quad (6.3)$$

$$I_C(z) = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta \sin^2(V_1 z), \quad (6.4)$$

$$I_E(z) = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta \sin^2(V_1 z), \quad (6.5)$$

$$I_F(z) = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta \cos^2(V_1 z). \quad (6.6)$$

Se calcula además el grado de participación $R(z)$, para lo cual se reescribe (4.12) en términos de la intensidad, resultando

$$R(z) = \frac{(\sum_n I_n(z))^2}{\sum_n I_n^2(z)}.$$

Al reemplazar (6.3) a (6.6) en la expresión anterior se obtiene

$$R(z) = \frac{4(\alpha^2 + \beta^2)^2}{(\alpha - \beta)^4 + 4\alpha\beta(\alpha - \beta)^2 + 8\alpha^2\beta^2[\cos^4(V_1 z) + \sin^4(V_1 z)]}. \quad (6.7)$$

Más aún, es posible calcular analíticamente el centro de masas en función de la distancia de propagación z , definido por (4.11). Sustituyendo (6.3) a (6.6) en (4.11) se llega a

$$X_{cm}(z) = \frac{X_1[(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta \cos^2(V_1 z)] + X_2[(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta \sin^2(V_1 z)]}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \quad (6.8)$$

con X_1 y X_2 las posiciones horizontales de los sitios **B** y **C**, respectivamente. Cuando $\alpha = \beta = 1/2$, la combinación lineal es una suma de anillos, la cual se ilustra en la Figura 6.5(a).

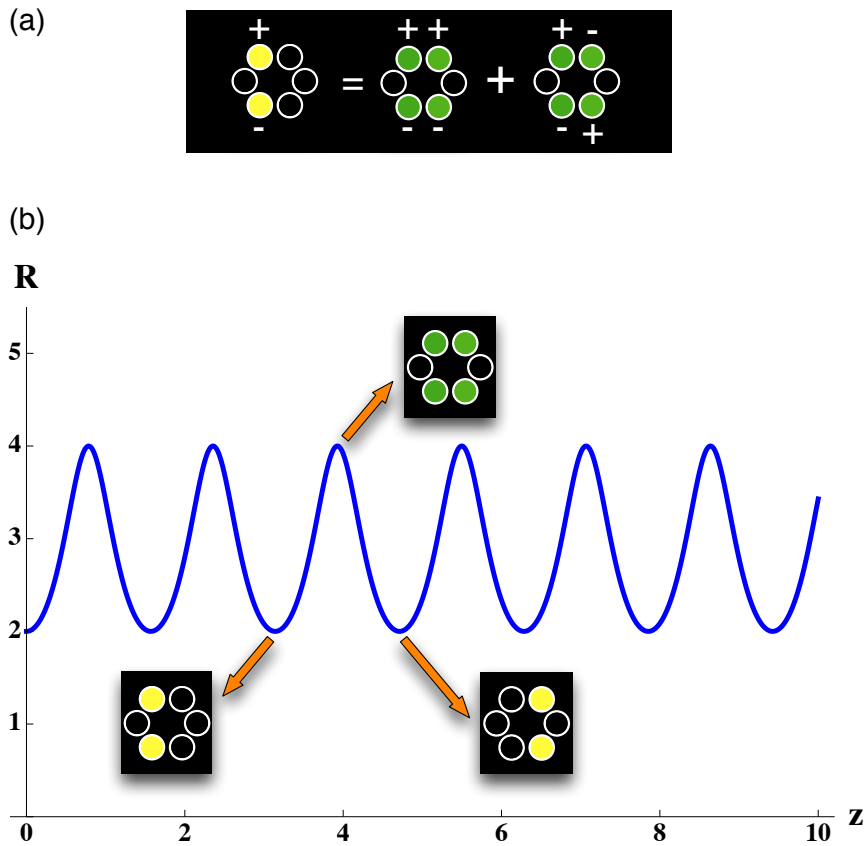


Figura 6.5: (a) Perfil obtenido de la suma de estados de banda plana, con $\alpha = \beta = 1/2$. (b) Grado de participación en función de z para la condición inicial mostrada en (a). Las imágenes insertas de izquierda a derecha muestran los perfiles de intensidad para $X_{cm} = X_1$, $X_{cm} = X_1 + d/2$, y $X_{cm} = X_1 + d$, respectivamente.

En este caso, los perfiles de intensidad toman la forma

$$\begin{aligned} I_i(z) &= 2 \cos^2(V_1 z), \\ I_d(z) &= 2 \sin^2(V_1 z), \end{aligned}$$

donde se ha asociado el subíndice i al lado izquierdo del perfil ($I_B + I_F$), y d al lado derecho ($I_C + I_E$). De aquí se desprende que la luz oscilará entre dos “mitades” de la celda, estando una mitad compuesta por los sitios **B** y **F**, y la otra por **C** y **E**. Además, dado que ningún modo de banda plana tiene amplitud en los sitios **A** ni **D**, la combinación de los estados localizados presentará la misma característica, lo que produce un “atrapamiento” de la luz (oscila de un lado a otro, pero no puede escapar hacia **A** ni **D**). Por ende, dado que en este caso existe una transferencia total de la luz en $z = \pi/2V_1$, para la condición inicial descrita el sistema se comportará como un dímero [37] (**B** y **F** representan una guía, y **C** y **E** la otra). Esto queda de manifiesto al considerar $\alpha = \beta$ en (6.7) y (6.8) (y recordando que $X_2 = X_1 + d$), de donde se obtiene

$$R(z) = \frac{2}{\cos^4(V_1 z) + \sin^4(V_1 z)}, \quad (6.9)$$

$$X_{cm}(z) = X_1 + d \sin^2(V_1 z). \quad (6.10)$$

Usando entonces como condición inicial la ilustrada en la Figura 6.5(a), la razón de participación en función de z vendrá dada por (6.9), que se muestra en la Figura 6.5(b). En particular, cuando $R(z = \frac{n\pi}{2V_1}) = 2$ (con n un número entero no negativo), la luz puede estar en la mitad izquierda o derecha, lo que se discrimina evaluando (6.10). En el caso $R(z = \frac{(2n+1)\pi}{4V_1}) = 4$, al calcular el centro de masas el resultado es que la intensidad es la misma en cada lado de la celda, $X_{cm} = X_1 + d/2$. La información sobre el centro de masas en algunas distancias se ilustra usando los perfiles de intensidad, que se encuentran insertos en la Figura 6.5(b).

Finalmente, es importante recalcar que los resultados obtenidos muestran que la combinación de anillos no forma un estado de banda plana. A pesar de que el estado resultante es no difractante (la luz no escapa hacia las celdas vecinas), su amplitud no es constante durante la propagación (la intensidad en cada guía varía con z), por lo que no corresponde a un modo localizado del sistema, sino que a un estado oscilatorio.

6.1.3. Modos de borde

Los cálculos numéricos de la Figura 6.3 muestran la existencia de un modo de borde en el sistema, indicado con un punto rojo, y que tiene su origen debido a la terminación tipo 4 de la cinta. De igual manera, los bordes tipo 2 y 3 dan origen a otros estados localizados en el extremo de la cinta, cuyos perfiles de amplitud y fase dependen de los acoplamientos (la Figura 6.6 muestra los modos para los bordes tipo 2 y 4, considerando interacción sólo a primeros vecinos).

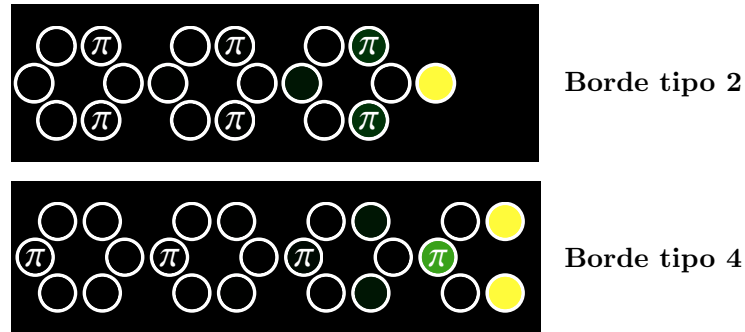


Figura 6.6: Perfiles numéricos de intensidad y fase de los modos de borde de la cinta de Grafeno considerando interacción a primeros vecinos, con $V_2 = 1.5V_1$. La intensidad se indica en una escala de colores palta, mientras que la diferencia de fase π se indica en las guías.

Usando como referencia el procedimiento descrito en [38] se pretende, a partir de este punto, hallar analíticamente los estados de borde de la cinta de Grafeno.

Borde tipo 3

Al inspeccionar numéricamente el modo de borde para una terminación de la cinta tipo 3, se encuentra que éste posee amplitud sólo en los dos últimos sitios de la cinta, **B** y **F**, por lo que se trata de un estado compacto con grado de participación $R = 2$. Escribiendo la ecuación tipo Schrödinger discreta estacionaria (que resulta al sustituir el ansatz usado en (6.1)) para el sitio **A** de este borde se obtiene

$$\lambda A = V_2(B + F)e^{ikd/2},$$

y como $A = 0$, se llega a $B = -F$. Por lo tanto, es posible considerar el estado de borde como la mitad de un modo de banda plana, de donde se deriva inmediatamente que su perfil no depende de los acoplamientos (V_2 puede tener cualquier valor) y, además, que el modo es idéntico incluso considerando interacciones a segundos vecinos.

Más aún, al escribir la DLSE independiente de z para el sitio **B** resulta

$$\lambda B = V_2 A e^{-ikd/2} + V_3 F.$$

Dado que $A = 0$ y $B = -F$, se obtiene que la frecuencia del modo es $\lambda = -V_3$, tal como indican los espectros numéricos de la Figuras 6.3(b) y (d). Con estos cálculos, el estado emergente debido a una terminación tipo 3 queda completamente caracterizado analíticamente.

Borde tipo 2

Por otro lado, para encontrar los perfiles pertenecientes a los bordes tipo 2 y 4 a primeros vecinos, se propone ahora $\psi_{\vec{n}}(z) = u_{\vec{n}} e^{i\lambda z}$ como solución a (6.1). Aquí $u_{\vec{n}} = \{A, B, C, D, E, F\} \epsilon^{(n-1)}$, donde $\epsilon^{(n-1)}$ es un factor de decaimiento en amplitud ($|\epsilon| < 1$) para la n -ésima guía ($n = 1$ corresponde al primer sitio, contando desde el borde). De esta forma, los primeros valores de las amplitudes para ambos modos de borde vienen dados por la Figura 6.7.

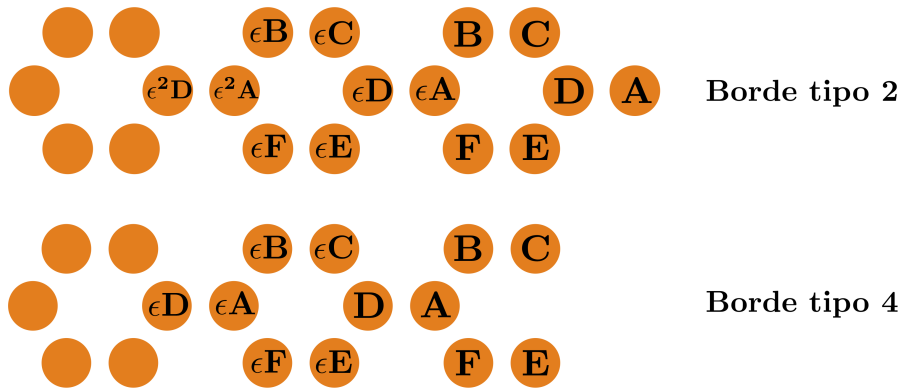


Figura 6.7: Configuración de amplitudes usada para calcular los modos de borde de la cinta de Grafeno.

Considerando entonces soluciones de tipo estacionarias y amplitudes con un decaimiento como el de la Figura 6.7, se obtienen las ecuaciones

$$\lambda A = V_1 D, \quad (6.11)$$

$$\lambda D = V_1 A + V_2(C + E), \quad (6.12)$$

$$\lambda C = V_1 B + V_2 D, \quad (6.13)$$

$$\lambda E = V_1 F + V_2 D, \quad (6.14)$$

$$\lambda B = V_1 C + V_2 \epsilon A, \quad (6.15)$$

$$\lambda F = V_1 E + V_2 \epsilon A, \quad (6.16)$$

$$\lambda \epsilon A = V_1 \epsilon D + V_2(B + F). \quad (6.17)$$

Multiplicando (6.11) por ϵ e igualando a (6.17) se obtiene que

$$B = -F. \quad (6.18)$$

Al considerar la expresión anterior y hacer (6.15)+(6.16) se llega a que

$$A = -\frac{V_1(C + E)}{2\epsilon V_2}. \quad (6.19)$$

Calculando ahora (6.13)+(6.14) y aplicando (6.18) resulta

$$\lambda(C + E) = 2V_2 D. \quad (6.20)$$

Al reemplazar A de (6.19) y D de (6.20) en la ecuación (6.11) queda

$$-\lambda V_1 \frac{(C + E)}{2\epsilon V_2} = \lambda V_1 \frac{(C + E)}{2V_2},$$

de donde se deduce que

$$\lambda(C + E) = 0. \quad (6.21)$$

Se consideran ahora los posibles casos $(C + E) = 0$ y $\lambda = 0$ por separado. Para $(C + E) = 0$, de las ecuaciones (6.20) y (6.19) se desprende que $D = 0$ y $A = 0$. Estas relaciones entre las amplitudes, junto a (6.18), dan origen a los estados de banda plana del sistema, que no son considerados como modos de borde.

Para el caso $\lambda = 0$, al reemplazar λ en (6.11) se obtiene

$$D = 0, \quad (6.22)$$

y usando esto junto con el valor de la frecuencia del modo en (6.13) resulta

$$B = 0. \quad (6.23)$$

Del valor de B se sigue, según (6.18), que

$$F = 0, \quad (6.24)$$

y de (6.15) se desprenderá que $A = -(V_1 C / V_2 \epsilon)$. Insertando esta última expresión en el lado izquierdo de (6.19) se llega a que $C = E = -(V_2 \epsilon A / V_1)$, que al reemplazarse en (6.12) da paso a las expresiones

$$\epsilon = \frac{V_1^2}{2V_2^2}, \quad (6.25)$$

$$E = C = -\frac{V_1}{2V_2} A. \quad (6.26)$$

Las relaciones (6.22) a (6.26), junto a la frecuencia $\lambda = 0$, definen completamente el perfil del modo asociado al borde tipo 2. La forma de éste y su dependencia de los acoplamientos fueron corroboradas numéricamente, existiendo total correspondencia con las ecuaciones recién halladas. Como caso concreto, la Figura 6.6 coincide exactamente con el estado de borde para $V_2 = 1.5V_1$.

Borde tipo 4

Considerando, al igual que en el caso anterior, soluciones de tipo estacionarias y amplitudes con un decaimiento como el de la Figura 6.7, se obtienen las ecuaciones

$$\lambda A = V_1 D + V_2 (B + F), \quad (6.27)$$

$$\lambda B = V_1 C + V_2 A, \quad (6.28)$$

$$\lambda C = V_1 B, \quad (6.29)$$

$$\lambda E = V_1 F, \quad (6.30)$$

$$\lambda F = V_1 E + V_2 A, \quad (6.31)$$

$$\lambda D = V_1 A + V_2 \epsilon (C + E), \quad (6.32)$$

$$\lambda \epsilon C = V_1 \epsilon B + V_2 D, \quad (6.33)$$

$$\lambda \epsilon E = V_1 \epsilon F + V_2 D. \quad (6.34)$$

Multiplicando (6.29) por ϵ e igualando a (6.33) se obtiene que

$$D = 0, \quad (6.35)$$

que al reemplazarlo en (6.32) conduce a

$$A = -\frac{V_2}{V_1}\epsilon(C + E). \quad (6.36)$$

Por otro lado, al evaluar (6.35) en (6.27) se obtiene

$$\lambda A = V_2(B + F), \quad (6.37)$$

y haciendo (6.29)+(6.30) resulta

$$\lambda(C + E) = V_1(B + F). \quad (6.38)$$

Sustituyendo entonces $(C + E)$ de (6.36) y $(B + F)$ de (6.37) en (6.38) se obtiene (luego de un poco de álgebra)

$$\lambda A \left(\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_1}{\epsilon V_2} \right) = 0,$$

de donde se deduce que $\lambda A = 0$. Al igual que para el borde tipo 2, se consideran dos casos, $A = 0$ y $\lambda = 0$. Para la suposición $A = 0$ se tiene que, de (6.37), $B = -F$. Al usar esta igualdad en (6.38) se llega a

$$\lambda(C + E) = 0,$$

de donde se extraen los casos $\lambda = 0$ y $(C + E) = 0$. Para la situación en que $C = -E$ se tiene una configuración de amplitudes perteneciente a los modos de banda plana de la cinta, que no corresponden a estados de borde. Por lo tanto, debe cumplirse el caso restante, $\lambda = 0$. Al reemplazar λ en (6.29) y (6.30) se obtiene

$$B = 0, \quad (6.39)$$

$$F = 0. \quad (6.40)$$

Usando (6.39) y (6.40) en (6.28) y (6.31) respectivamente, resulta

$$C = E = -\frac{V_2}{V_1}A. \quad (6.41)$$

Finalmente, insertando esta última expresión junto a (6.35) en (6.32) se tiene

$$\epsilon = \frac{V_1^2}{2V_2^2}. \quad (6.42)$$

El modo de borde tipo 4 queda completamente determinado, entonces, por las ecuaciones $\lambda = 0$, (6.35) y (6.39) a (6.42). Al igual que para la terminación tipo 2, la forma de este estado y su dependencia de los acoplamientos fueron corroboradas numéricamente, existiendo total acuerdo con lo recién calculado. En particular, la Figura 6.6 coincide exactamente con el perfil analítico para los acoplamientos allí considerados.

Finalmente es importante mencionar que los modos hallados en esta subsección, originados por el tipo de terminación del arreglo, se denominan *estados de Shockley* o *estados Tamm* indistintamente [39, 40], para los cuales existe como antecedente su observación en una red bidimensional de Grafeno fotónico [41].

6.2. Experimento

Se procede en este punto a estudiar experimentalmente un cristal de Borosilicato de largo $L = 3$ [cm], el cual posee escrita en su interior la cinta tipo Grafeno con una distancia entre guías $d = 12.5$ [μm]. Dicho arreglo fue escrito mediante la técnica de radiación con pulsos ultracortos [12], donde las guías de onda resultantes son monomodales para longitudes de onda cercanas a 630 [nm]. Utilizando el montaje generalizado (ver Figura 3.5) con luz roja (640 [nm]), se pretende excitar ambos estados de banda plana de la cinta, cuyos perfiles se describen en la Figura 6.4.

Como primer paso se inyecta en la cinta una condición tipo delta, la cual se hace incidir en cada uno de los sitios de la celda unitaria (hexágono). Debido a la simetría de la red, sólo es necesario excitar dos guías de onda para describir completamente las propiedades de transporte (difracción discreta) en el sistema. Los sitios excitados en este caso fueron **C** y **D**, cuyos perfiles de salida se muestran en las Figuras 6.8(a) y 6.8(b), respectivamente. Como puede observarse, ambas inyecciones tipo delta experimentan difracción discreta transversalmente en la red, cuya área de expansión en ambos casos es limitada debido al largo del cristal.

En la siguiente etapa, se procede a generar (mediante el método de imágenes descrito en el capítulo 3) el perfil de intensidad de los modos de banda plana de la Figura

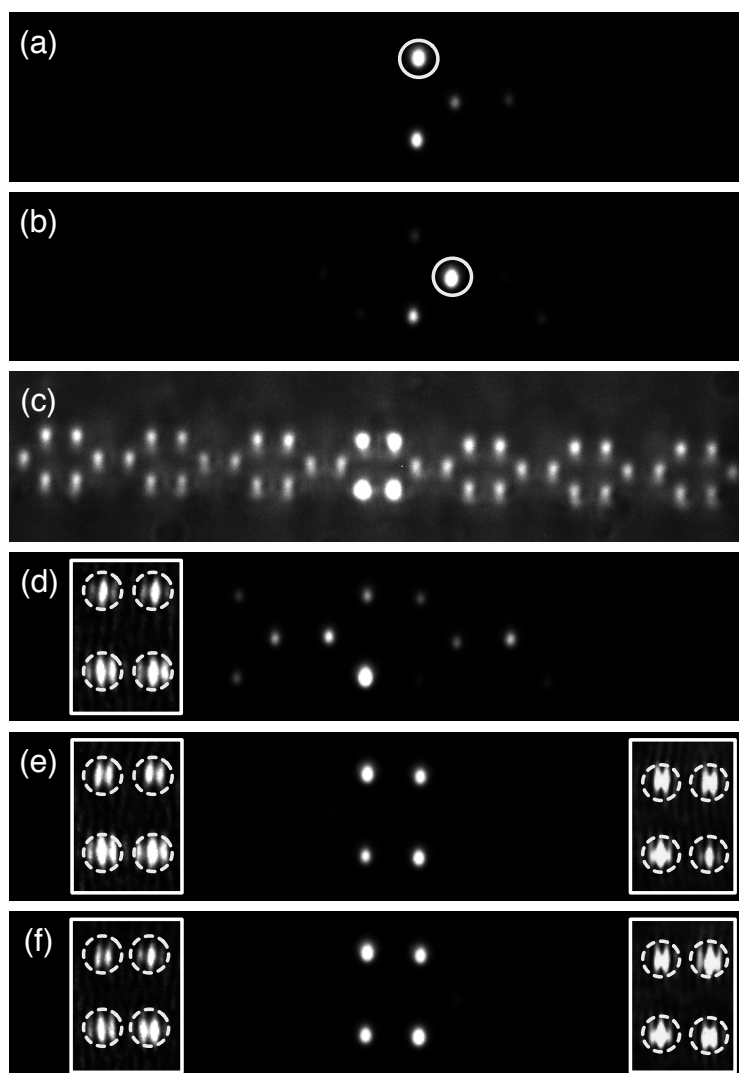


Figura 6.8: Perfiles de salida para incidencia tipo delta en los sitios (a) **C** y (b) **D**, donde el círculo blanco indica la zona de inyección de la luz. (c) Condición inicial con perfil de intensidad tipo anillo, cuya incidencia sobre la red es observable mediante la iluminación de la cinta con luz blanca. Patrón de intensidad generado por una condición inicial tipo (d) anillo sin fase, (e) modo de banda plana de frecuencia λ_+ y (f) estado localizado de frecuencia λ_- . Las imágenes insertas muestran el interferograma de la condición inicial (izquierda) y la fase del perfil de salida (derecha).

6.4, cuya inyección en la cinta se muestra en la Figura 6.8(c). Si a la condición inicial mencionada no se le añade fase alguna, el patrón generado en la cara de salida del cristal se ilustra en la Figura 6.8(d), donde se observa la clara destrucción (difracción) de la estructura incidente. Al igual que en el caso de la red de Lieb, se hace uso de patrones de interferencia entre el perfil de entrada y el de salida con una onda plana, de manera que la estructura de fase pueda ser corroborada. Evidentemente, la condición inicial descrita tiene una fase plana, ya que el interferograma muestra un máximo local en el centro de cada “haz” entrante.

Posteriormente, se inyecta el mismo perfil de intensidad de la Figura 6.8(c), esta vez con la estructura de fase mostrada en la Figura 6.4(a), como puede corroborarse en la imagen de la izquierda inserta en la Figura 6.8(e). El patrón de salida muestra la clara excitación del anillo de frecuencia λ_+ , que conserva tanto el perfil de amplitud como el de fase de la condición inicial (ver imagen inserta a la derecha).

De manera análoga a la recién descrita, se genera e inyecta el modo de banda plana de frecuencia λ_- en el arreglo, cuya conservación y perfil de fase se muestran en la Figura 6.8(f). Al igual que en caso anterior, la excitación del anillo es excelente, no existiendo ningún tipo de “fuga” de luz hacia otros sitios de la red. Más aún, los interferogramas insertos evidencian que la estructura de fase no se ve alterada por la propagación, existiendo total correspondencia con la descripción teórica dada por la Figura 6.4.

Como comentario final, es importante destacar que los resultados recién descritos posicionan a la ecuación (6.1) como una descripción acertada de la dinámica de la luz en este sistema, y además representan la primera observación experimental de modos de banda plana en una cinta tipo Grafeno [42].

Capítulo 7

Cinta tipo Grafeno bimodal

Como continuación del estudio previo de la cinta de Grafeno, se extiende ahora la dinámica a guías de onda bimodales, cuya interacción es modelada por la DLSE a vecinos cercanos. Dada la riqueza fenomenológica que este sistema ofrece al incorporar la posible excitación de dipolos, se busca en el presente capítulo comprender sus propiedades teórica y numéricamente, explorando las que poseen un mayor potencial para ser observadas en el laboratorio. Más específicamente, se calcula la relación de dispersión para dos conjuntos de acoplamientos, que dan paso a cuatro bandas planas en cada caso. Primeramente se obtienen anillos mezclados (con componente fundamental y dipolar), mientras que bajo el segundo contexto surgen modos localizados puros (formados por sitios con el mismo estado). Posteriormente, y dadas las condiciones realistas del arreglo, se opta por describirlo sin presencia de hibridación, corroborando dicha aproximación con los resultados experimentales.

El análisis que aquí se muestra corresponde a la primera evidencia de un cristal fotónico con cuatro bandas planas, de manera que la información expuesta a continuación tiene un carácter completamente novedoso.

7.1. Modelo teórico

Se indaga ahora, mediante teoría acoplada de modos, en la cinta tipo Grafeno. Aquí se estudia la dinámica cuando interactúan sólo los vecinos más cercanos, considerando cada guía de onda como bimodal. La red es representada en la Figura 7.1, cuyos sitios elípticos hacen referencia a la posibilidad de excitar tanto el estado fundamental como un dipolo vertical.

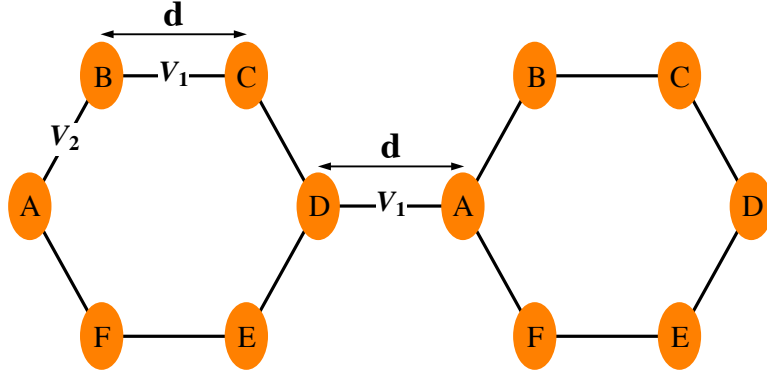


Figura 7.1: Dos celdas unitarias (hexágonos regulares) de la cinta tipo Grafeno. Las elipses anaranjadas simulan las guías de onda, y las líneas de color negro representan los acoplamientos a primeros vecinos V_1 y V_2 . Los distintos sitios de la celda se denotan por las letras **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F**.

Al describir la dinámica de la luz en el arreglo utilizando un conjunto de ecuaciones tipo Schrödinger, la relación (6.1) se extiende a

$$\begin{aligned}
 -i \frac{d\psi_{\vec{n}}^f}{dz} &= \epsilon_{\vec{n}}^f \psi_{\vec{n}}^f + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} (V_{\vec{n},\vec{m}}^f \psi_{\vec{m}}^f + V_{\vec{n},\vec{m}}^{f,d} \psi_{\vec{m}}^d), \\
 -i \frac{d\psi_{\vec{n}}^d}{dz} &= \epsilon_{\vec{n}}^d \psi_{\vec{n}}^d + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} (V_{\vec{n},\vec{m}}^d \psi_{\vec{m}}^d + V_{\vec{n},\vec{m}}^{f,d} \psi_{\vec{m}}^f),
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde $\psi_{\vec{n}}^f$ ($\psi_{\vec{n}}^d$) es la amplitud del campo para el modo fundamental (dipolo) en el \vec{n} -ésimo sitio, z es la coordenada de propagación, y $V_{\vec{n},\vec{m}}^f$, $V_{\vec{n},\vec{m}}^d$, $V_{\vec{n},\vec{m}}^{f,d}$ representan el acoplamiento entre estados fundamentales, la interacción puramente dipolar y la que se produce entre los modos s y p de la \vec{n} -ésima y la \vec{m} -ésima guía de onda, respectivamente. Debido a que el método de fabricación da como resultado guías transversalmente elípticas [12], los dipolos estarán restringidos a existir sólo en la dirección vertical. Algunas definiciones de acoplamientos se ilustran en la Figura 7.2(a), donde dependiendo de la disposición de las guías puede haber interacción nula o negativa.

Considerando guías con igual constante de propagación en la cinta ($\epsilon_{\vec{n}}^f = \epsilon_{\vec{n}}^d = \epsilon$), se propone (para la guía de onda en la posición \vec{n}) el ansatz $\psi_{\vec{n}}^j(z) = u_{\vec{n}}^j e^{i\lambda z} e^{i\epsilon z}$ con $u_{\vec{n}}^j = \{A^j, B^j, C^j, D^j, E^j, F^j\} e^{i\vec{k} \cdot \vec{n}}$, donde la amplitud depende del sitio de la celda unitaria, y $j = \{f, d\}$. Reemplazando en (7.1) y diagonalizando se encuentran los

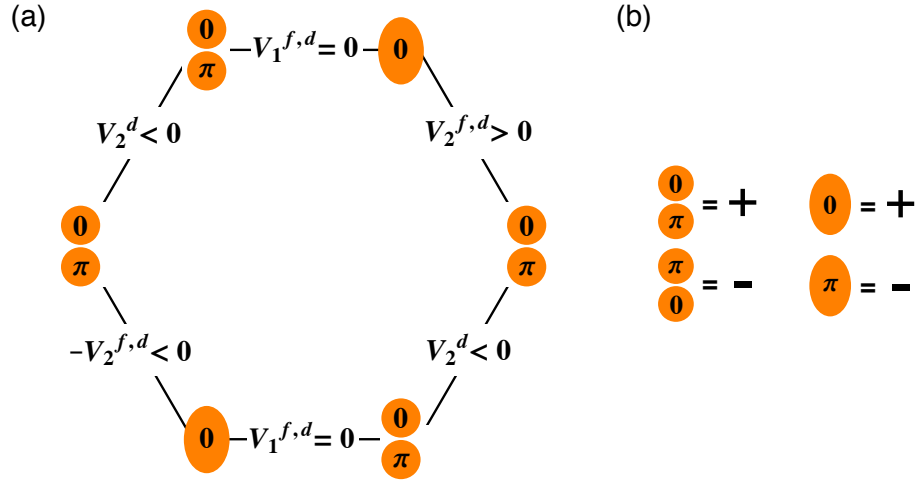


Figura 7.2: (a) Definiciones de acoplamientos entre distintos modos de las guías de onda, dependiendo de su posición en la celda unitaria. (b) Notación para describir las fases de cada modo.

autovalores (espectro lineal) del sistema en función de $\vec{k} = k\hat{x}$, que se grafican dentro de la primera zona de Brillouin, $-\pi/3 \leq k \leq \pi/3$, usando $d = 1$.

7.1.1. Soluciones estacionarias mixtas

Para dibujar las bandas del sistema, se consideran los valores de las razones entre acoplamientos obtenidos de forma numérica [43] $V_2^d/V_2^f = -5$ y $V_2^{f,d}/V_2^f = 3$, de donde se llega (fijando $V_1^f = 1$ y $V_2^f = 1.5$) a $V_2^{f,d} = 4.5$ y $V_2^d = -7.5$. Primeramente, se considera el valor $V_1^d = 1.5V_1^f$ para graficar $\lambda(k)$, lo que da paso a la Figura 7.3(a). Como se deducirá más adelante, para tal valor de V_1^d la cinta sólo presenta curvas dispersivas, lo que queda en evidencia en la Figura 7.3(b). Aquí se grafican las dos bandas con $\lambda \approx 1$ que son aparentemente planas, pero donde puede apreciarse una leve curvatura.

Al bosquejar, por otro lado, el espectro de la red para $V_1^d = V_1^f$, se obtiene la Figura 7.3(c), que presenta cuatro bandas con dispersión nula. Al inspeccionar más de cerca las curvas, la Figura 7.3(d) da cuenta de la superposición de dos rectas en $\lambda = V_1^d$, fenómeno que se repite en $\lambda = -V_1^d$. Estas dos frecuencias, por lo tanto, contienen las cuatro bandas planas de la cinta, que debe poseer en total el mismo número

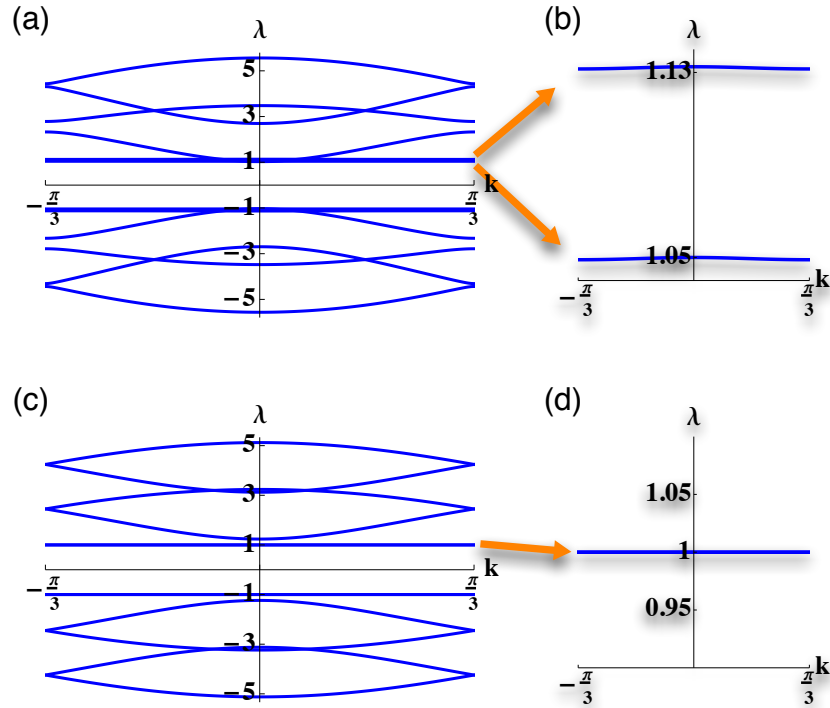


Figura 7.3: (a) Relación de dispersión considerando $V_1^d = 1.5V_1^f$. (b) Acercamiento a las bandas aparentemente planas de (a). (c) Estructura de bandas para $V_1^d = V_1^f$, donde (d) muestra una vista aumentada que corrobora la nula dispersión de las dos curvas superpuestas en $\lambda = V_1^d$.

modos localizados distintos. Los anillos deben ser mixtos, es decir, deben tener componente fundamental y dipolar, y para calcularlos se supondrá que la solución ocupa cuatro sitios de la celda unitaria (al igual que los estados localizados descritos en el capítulo 6). Lo anterior se sustenta en la observación de los modos híbridos (obtenidos numéricamente) pertenecientes a las bandas semi planas, de donde también se extraen cuatro posibles configuraciones de fase presentes en su componente fundamental.

Si se supone entonces que $A^f = A^d = D^f = D^d = 0$, al sustituir el ansatz para $\psi_n^j(z)$ en (7.1) se obtienen dos ecuaciones tipo Schrödinger independientes de z en cada sitio de la red. Las DLSEs estacionarias para el estado fundamental y dipolo en el sitio \mathbf{A} serán

$$0 = V_2^f(B^f + F^f) + V_2^{f,d}(F^d - B^d),$$

$$0 = V_2^{f,d}(B^f - F^f) + V_2^d(B^d + F^d)$$

respectivamente, que al ser reordenadas toman la forma

$$B^f + F^f = \frac{-V_2^{f,d}}{V_2^f}(F^d - B^d), \quad (7.2)$$

$$B^f - F^f = \frac{-V_2^d}{V_2^{f,d}}(F^d + B^d). \quad (7.3)$$

A su vez, las ecuaciones de los modos para el sitio **B** son

$$\lambda B^f = V_1^f C^f e^{ikd},$$

$$\lambda B^d = V_1^d C^d e^{ikd}.$$

Despejando λ de la segunda ecuación, reemplazando y reacomodando factores se obtiene

$$B^f = \frac{C^f V_1^f}{C^d V_1^d} B^d. \quad (7.4)$$

En el sitio **F**, las ecuaciones vienen dadas por

$$\lambda F^f = V_1^f E^f e^{ikd},$$

$$\lambda F^d = V_1^d E^d e^{ikd}.$$

Tomando λ de la segunda ecuación, sustituyendo en la primera y despejando F^f resulta

$$F^f = \frac{E^f V_1^f}{E^d V_1^d} F^d. \quad (7.5)$$

Para el sitio **C**, las expresiones estacionarias son

$$\lambda C^f = V_1^f B^f e^{-ikd},$$

$$\lambda C^d = V_1^d B^d e^{-ikd}.$$

Dividiendo la segunda ecuación por C^d , reemplazando λ y reordenando se llega a

$$B^f = \frac{C^f V_1^d}{C^d V_1^f} B^d. \quad (7.6)$$

Al igualar ahora (7.4) con (7.6) se tiene que

$$V_1^f = V_1^d, \quad (7.7)$$

que corresponde a la condición necesaria para que el sistema presente banda plana, y que se corrobora en la Figura 7.3.

A su vez, las ecuaciones estacionarias en el sitio **E** vienen dadas por

$$\lambda E^f = V_1^f F^f e^{-ikd},$$

$$\lambda E^d = V_1^d F^d e^{-ikd}.$$

Despejando λ de la segunda ecuación, sustituyendo y reacomodando factores se obtiene la expresión

$$F^f = \frac{E^f V_1^d}{E^d V_1^f} F^d, \quad (7.8)$$

que al ser igualada con (7.5) resulta en (7.7).

Por otro lado, las DLSEs independientes de z para el modo fundamental y dipolar en el sitio **D** son

$$0 = V_2^f (C^f + E^f) + V_2^{f,d} (E^d - C^d),$$

$$0 = V_2^{f,d} (C^f - E^f) + V_2^d (C^d + E^d),$$

que al ser reordenadas conducen a

$$C^f + E^f = \frac{-V_2^{f,d}}{V_2^f} (E^d - C^d), \quad (7.9)$$

$$C^f - E^f = \frac{-V_2^d}{V_2^{f,d}} (C^d + E^d). \quad (7.10)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (7.2) a (7.6) y (7.8) a (7.10) describen las relaciones entre las amplitudes de los anillos, que existen bajo la condición (7.7). Al escribir cada estado localizado como una combinación lineal de una componente fundamental y otra dipolar resulta

$$\vec{m}_j = \vec{m}_j^f + \vec{m}_j^d = (A_j^f, B_j^f, C_j^f, D_j^f, E_j^f, F_j^f) + (A_j^d, B_j^d, C_j^d, D_j^d, E_j^d, F_j^d), \quad (7.11)$$

donde $j = \{1, 2, 3, 4\}$, dadas las cuatro bandas planas de la red.

Según lo observado numéricamente para la configuración de fase, la componente fundamental del primer modo será expresada como

$$\vec{m}_1^f = \alpha_1^f (0, 1, -1, 0, -1, 1). \quad (7.12)$$

Considerando que $F_1^f = B_1^f = \alpha_1^f$, de (7.3) resulta $F_1^d = -B_1^d$. Reemplazando F_1^f y F_1^d en (7.2) se llega a

$$B_1^d = \frac{V_2^f}{V_2^{f,d}} \alpha_1^f, \quad (7.13)$$

y por lo tanto

$$F_1^d = \frac{-V_2^f}{V_2^{f,d}} \alpha_1^f. \quad (7.14)$$

Por otro lado, dado que $E_1^f = C_1^f = -\alpha_1^f$, de (7.10) se obtiene $E_1^d = -C_1^d$. Al sustituir E_1^f y E_1^d en (7.9) resulta

$$C_1^d = \frac{-V_2^f}{V_2^{f,d}} \alpha_1^f, \quad (7.15)$$

y por ende

$$E_1^d = \frac{V_2^f}{V_2^{f,d}} \alpha_1^f. \quad (7.16)$$

La información entregada por (7.12) a (7.16) se resume en

$$\vec{m}_1 = \alpha_1^f \left[(0, 1, -1, 0, -1, 1) + \frac{V_2^f}{V_2^{f,d}} (0, 1, -1, 0, 1, -1) \right], \quad (7.17)$$

que representa el modo localizado mixto de frecuencia $\lambda = -V_1^d$.

Para el segundo modo mixto, al basarse en el perfil de fase numérico, es posible escribir la componente fundamental como

$$\vec{m}_2^f = \alpha_2^f (0, 1, -1, 0, 1, -1). \quad (7.18)$$

Aquí se cumple $F_2^f = -B_2^f = -\alpha_2^f$, que reemplazarse en (7.2) conduce a $F_2^d = B_2^d$. Usando los valores encontrados de F_2^f y F_2^d en (7.3) se obtiene

$$B_2^d = \frac{-V_2^{f,d}}{V_2^d} \alpha_2^f, \quad (7.19)$$

lo que implica

$$F_2^d = \frac{-V_2^{f,d}}{V_2^d} \alpha_2^f. \quad (7.20)$$

Además, en (7.18) se cumple $E_2^f = -C_2^f = \alpha_2^f$, que al ser usado en (7.9) resulta en $E_2^d = C_2^d$. Sustituyendo E_2^f y E_2^d en (7.10) se tiene que

$$C_2^d = \frac{V_2^{f,d}}{V_2^d} \alpha_2^f, \quad (7.21)$$

y por lo tanto

$$E_2^d = \frac{V_2^{f,d}}{V_2^d} \alpha_2^f. \quad (7.22)$$

Las expresiones (7.18) a (7.22) se representan de forma sucinta en

$$\vec{m}_2 = \alpha_2^f \left[(0, 1, -1, 0, 1, -1) + \frac{V_2^{f,d}}{V_2^d} (0, -1, 1, 0, 1, -1) \right], \quad (7.23)$$

que corresponde al estado de la segunda banda plana ubicada en $\lambda = -V_1^d$.

La componente fundamental del tercer estado localizado, según los resultados numéricos, viene dada por

$$\vec{m}_3^f = \alpha_3^f (0, 1, 1, 0, 1, 1). \quad (7.24)$$

Considerando que en este caso $F_3^f = B_3^f = \alpha_3^f$, de (7.3) se extrae $F_3^d = -B_3^d$. Haciendo uso de ambas componentes de F_3 en la expresión (7.2) resulta

$$B_3^d = \frac{V_2^f}{V_2^{f,d}} \alpha_3^f, \quad (7.25)$$

de donde se obtiene directamente que

$$F_3^d = \frac{-V_2^f}{V_2^{f,d}} \alpha_3^f. \quad (7.26)$$

Además, para la mitad derecha del anillo se cumple $E_3^f = C_3^f = \alpha_3^f$, que al ser usado en (7.10) conduce a $E_3^d = -C_3^d$. Reemplazando E_3^f y E_3^d en (7.9) da como resultado

$$C_3^d = \frac{V_2^f}{V_2^{f,d}} \alpha_3^f, \quad (7.27)$$

y por lo tanto

$$E_3^d = \frac{-V_2^f}{V_2^{f,d}} \alpha_3^f. \quad (7.28)$$

El perfil del modo, que viene descrito por (7.24) a (7.28) será entonces

$$\vec{m}_3 = \alpha_3^f \left[(0, 1, 1, 0, 1, 1) + \frac{V_2^f}{V_2^{f,d}} (0, 1, 1, 0, -1, -1) \right], \quad (7.29)$$

y tendrá una frecuencia $\lambda = V_1^d$.

Para el cuarto anillo, la estructura de fase observada implica un perfil fundamental de la forma

$$\vec{m}_4^f = \alpha_4^f (0, 1, 1, 0, -1, -1). \quad (7.30)$$

Aquí $F_4^f = -B_4^f = -\alpha_4^f$, lo que se sustituye en (7.2) para dar paso a $F_4^d = B_4^d$. Introduciendo F_4^f y F_4^d en la ecuación (7.3) se tiene

$$B_4^d = \frac{-V_2^{f,d}}{V_2^d} \alpha_4^f, \quad (7.31)$$

lo que tiene como consecuencia que

$$F_4^d = \frac{-V_2^{f,d}}{V_2^d} \alpha_4^f. \quad (7.32)$$

Adicionalmente, como $E_4^f = -C_4^f = -\alpha_4^f$, la relación (7.9) conduce a $E_4^d = C_4^d$. Sustituyendo E_4^f y E_4^d en (7.10) se llega a

$$C_4^d = \frac{-V_2^{f,d}}{V_2^d} \alpha_4^f, \quad (7.33)$$

y por ende

$$E_4^d = \frac{-V_2^{f,d}}{V_2^d} \alpha_4^f. \quad (7.34)$$

Las expresiones (7.30) a (7.34) pueden escribirse como

$$\vec{m}_4 = \alpha_4^f \left[(0, 1, 1, 0, -1, -1) + \frac{V_2^{f,d}}{V_2^d} (0, -1, -1, 0, -1, -1) \right], \quad (7.35)$$

que corresponde al estado mixto de la segunda banda en $\lambda = V_1^d$.

Por lo tanto, las ecuaciones (7.17), (7.23), (7.29) y (7.35) dan cuenta de los cuatro modos localizados híbridos del sistema, que se grafican en la Figura 7.4 considerando $\alpha_1^f = \alpha_2^f = \alpha_3^f = \alpha_4^f = 1$, $V_2^f/V_2^{f,d} = 1/3$, y $V_2^{f,d}/V_2^d = -3/5$ (valores obtenidos de los acoplamientos usados para ilustrar el espectro de la cinta).

Como puede apreciarse, en cada anillo la componente fundamental es más intensa que la dipolar, lo que se explica debido a que los acoplamientos entre modos p de las guías son, en general, mucho mayores en módulo. Este balance tiene como objetivo generar una interferencia destructiva en los sitios conectores [30] (guías por donde la luz podría difractar hacia las celdas aledañas del arreglo), en este caso **A** y **D**, de manera que el perfil mixto permanezca completamente localizado y se propague coherentemente con frecuencia $\lambda = \pm V_1^f$.

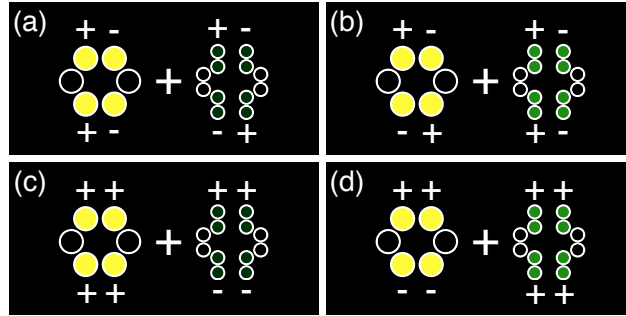


Figura 7.4: Modos de banda plana correspondientes a (a) \vec{m}_1 , (b) \vec{m}_2 , (c) \vec{m}_3 y (d) \vec{m}_4 . La escala de colores palta representa la intensidad del campo, mientras que la fase se muestra usando la notación descrita en la Figura 7.2(b).

7.1.2. Soluciones estacionarias desacopladas

Habiendo encontrado y caracterizado los anillos mixtos correspondientes a las cuatro bandas planas de la cinta tipo Grafeno, es importante en este punto mencionar que éstos en realidad no son, en principio, observables experimentalmente.

Primero, porque el área transversal ocupada por un dipolo es mucho mayor que la de un modo fundamental, luego $V_1^f < V_1^d$ para una misma distancia. Esto implica que la única forma de que la condición $V_1^f = V_1^d$ se cumpliera sería reorientando las guías de onda, es decir, rotándolas con respecto a su centro, como se describe en [43]. Ahora bien, dado que la disposición espacial estándar de los sitios en los arreglos experimentales disponibles es la mostrada en la Figura 7.2(a), la igualdad no se cumple. En segundo lugar, las constantes de propagación de los modos s y p no deben suponerse iguales (ya que corresponden a perfiles transversales distintos), por lo que $\epsilon_n^f \neq \epsilon_n^d$ (en particular, $\epsilon_n^f \gg \epsilon_n^d$ [28]). Dicha diferencia entre energías de sitio (llamada *detuning*) genera un acoplamiento efectivo $V_2^{f,d}$ mucho menor (en módulo) que todos los otros, por lo que es posible despreciarlo en el modelo.

Estas dos consideraciones representan las condiciones realistas del sistema, que serán desarrolladas teóricamente y posteriormente puestas a prueba en el experimento.

Considerando, entonces, $V_2^{f,d} = 0$ y graficando la estructura de bandas del sistema se llega a la Figura 7.5(a), que se obtiene de manera idéntica a la Figura 7.3, sólo cambiando el valor de $V_2^{f,d}$ y usando $V_1^d = 1.5V_1^f$, $\epsilon_n^d = \epsilon^d$ y $\epsilon_n^f = \epsilon^f$.

Aquí la relación de dispersión presenta cuatro bandas planas, ubicadas en $\lambda = \epsilon^f \pm V_1^f$

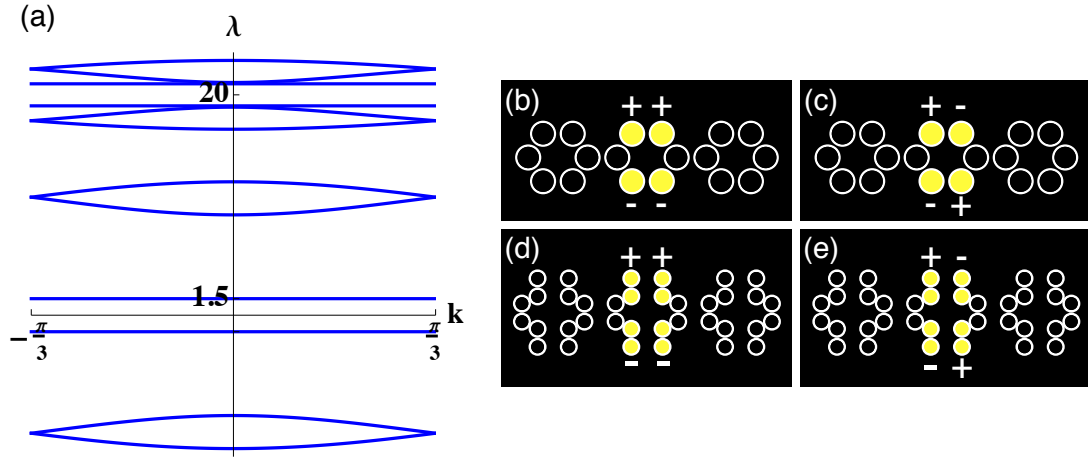


Figura 7.5: (a) Estructura de bandas del sistema desacoplado ($V_2^{f,d} = 0$), considerando $V_1^d = 1.5V_1^f$, $\epsilon^d = 0$ y $\epsilon^f = 20$. Modos de banda plana de frecuencia (b) $\lambda = \epsilon^f + V_1^f$, (c) $\lambda = \epsilon^f - V_1^f$, (d) $\lambda = \epsilon^d + V_1^d$, y (e) $\lambda = \epsilon^d - V_1^d$.

y $\lambda = \epsilon^d \pm V_1^d$, lo que implica la existencia del mismo número de modos localizados. Debido a que la única interacción entre los modos s y p está dada por $V_2^{f,d}$, al despreciar este factor los estados de la guía se desacoplan; es decir, el modo fundamental sólo interactúa con otros estados base, y lo mismo ocurre para los dipolos. Esto tiene como consecuencia dos dinámicas completamente independientes en el arreglo y, por lo tanto, los anillos correspondientes a las bandas planas son puramente fundamentales o dipolares, como muestra la parte derecha de la Figura 7.5. Lógicamente, el sistema puede considerarse desacoplado desde un principio, separando (7.1) en dos DLSEs independientes y encontrando las soluciones estacionarias respectivas. Esto ya se realizó cuando se consideraron guías monomodales en el capítulo 6, donde se encontró (para $\epsilon^f = 0$ y a primeros vecinos) que los anillos tienen un perfil descrito por la Figura 6.4 y frecuencias $\lambda = \epsilon^f \pm V_1^f$. Dado que para el caso de los modos p el sistema es el mismo (lo único que cambia son los signos y valores de los acoplamientos), es sencillo deducir que los anillos dipolares tendrán frecuencias $\lambda = \epsilon^d \pm V_1^d$ y la misma estructura que su contraparte fundamental, como se ilustra en las Figuras 7.5(b), (c), (d) y (e).

En esta dirección, dado que ninguno de los cálculos hechos en el capítulo anterior depende de los signos de los acoplamientos, toda la fenomenología encontrada se

repetirá en el caso puramente dipolar. Esto quiere decir que la dinámica para la combinación de anillos dipolares (descrita mediante el centro de masas y el grado de participación) es gobernada por las mismas expresiones, y lo mismo ocurre con los modos de borde calculados analíticamente. Por lo tanto, todo lo hallado en el capítulo 6 es válido para los modos s y p, siempre que éstos estén desacoplados ($V_2^{f,d} = 0$).

7.2. Experimento

Con los perfiles para los anillos dipolares ya encontrados, el objetivo experimental es observar estos estados de banda plana, para lo cual será clave excitar de manera óptima el modo p de cada sitio. Esto es posible debido a que el arreglo con el que se cuenta es monomodal para una longitud de onda de 780 [nm], y bimodal para 640 [nm]. Como se mencionó en el capítulo 4, con el fin de excitar el dipolo en una guía de onda se debe realizar un proceso iterativo, inyectando distintos perfiles de intensidad (con una mitad desfasada en π respecto a la otra) hasta que la difracción discreta sea puramente dipolar.

Una vez hallado el perfil óptimo para la excitación de modos p, se procede a inyectar (usando luz roja de 640 [nm] y el montaje de la Figura 3.5) una condición inicial tipo delta en los sitios **C** y **D** (al igual que en el caso del modo s), cuyos patrones de salida se muestran en las Figuras 7.6(a) y (b), respectivamente.

Los perfiles de salida muestran distintas características según el sitio de incidencia, observándose una tendencia a localización por parte de la delta en el sitio **C**, y existiendo transporte (difracción discreta) para la inyección en **D**. Este contraste fenomenológico (que es más evidente en el caso dipolar que para el estado fundamental, dado que los acoplamientos son mayores entre modos p) se produce debido a que, al propagar una condición inicial cualquiera, los modos excitados del sistema son todos aquellos que presentan una amplitud no nula en el lugar de inyección. Dependiendo de los autoestados excitados por el perfil incidente y de la banda a la que pertenecen, éstos se transportarán transversalmente en el arreglo con su velocidad de grupo respectiva, $v_g = \partial\lambda/\partial k$, definiendo el área cubierta por la difracción discreta [38].

De los casos mostrados, la inyección en **C** excita de buena forma las bandas planas (ya que los anillos dipolares tienen amplitud en ese sitio de la celda), por lo que la mayor parte de la luz prácticamente no difracta durante la propagación.

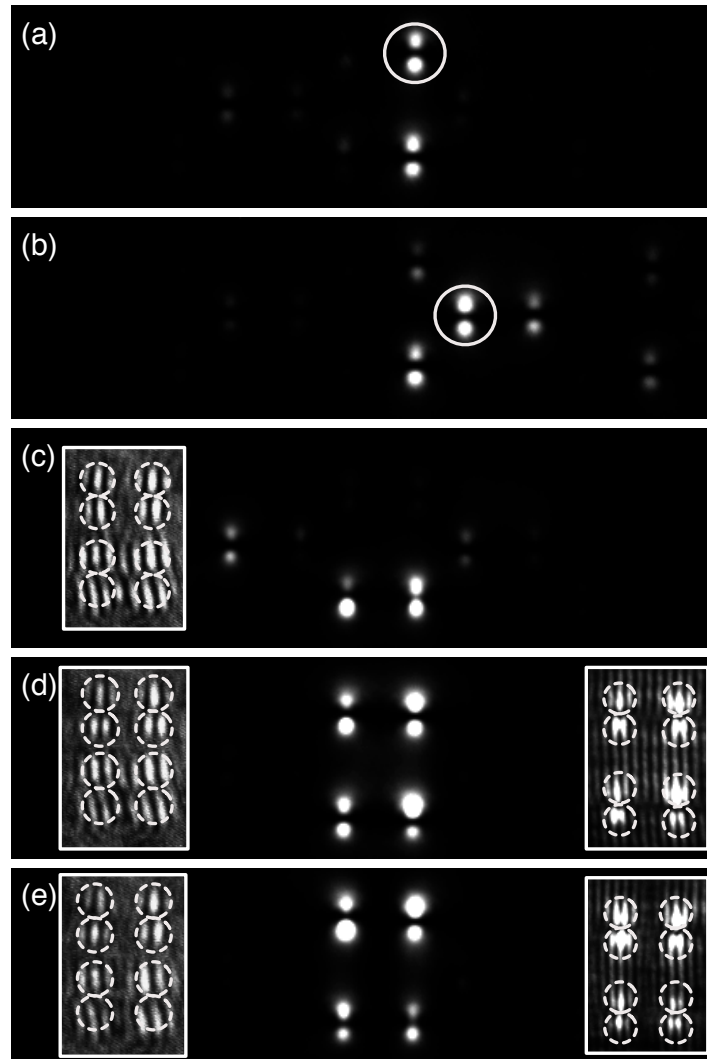


Figura 7.6: Resultados experimentales utilizando un arreglo con $d = 17$ [μm] y de largo $L = 3$ [cm]. Difracción discreta para una inyección tipo delta dipolar en el sitio (a) **C** y (b) **D**, donde el círculo blanco indica la zona de incidencia. Perfil final para una condición inicial tipo (c) anillo sin fase, (d) modo de banda plana de frecuencia $\lambda = V_1^d$ y (e) estado localizado con $\lambda = -V_1^d$. La fase del haz entrante (de salida) se muestra inserta a la izquierda (derecha).

De manera contrastante, la incidencia en el sitio **D** no “resuena” con los modos localizados del sistema (los anillos tienen amplitud nula en esa guía), por lo que los estados excitados por la condición inicial pertenecen a bandas puramente dispersivas.

Esto tiene como consecuencia que el haz pase a ser un paquete de luz incoherente, destruyéndose a medida que se propaga a lo largo del cristal según las distintas velocidades de grupo que poseen los modos que lo componen.

Posteriormente, un perfil de intensidad tipo anillo con fase plana es generado e inyectado en el arreglo, cuya estructura al final de la propagación se ilustra en la Figura 7.6(c). Aquí el patrón de salida puede interpretarse como una “semi-resonancia”, ya que la condición inicial comparte amplitudes con los modos de banda plana, pero no satisface la estructura de fase de los anillos (ver interferograma inserto a la izquierda). Como resultado, se observa una parte localizada y otra difractante de menor intensidad, que escapa de la zona central a una velocidad menor que para una delta inyectada en el sitio **D**.

Finalmente, los estados de banda plana dipolar son usados como condición inicial en la cinta, cuyos patrones de salida vienen dados por las Figuras 7.6(d) y (e). Según los interferogramas generados por los haces incidentes (imágenes insertas a la izquierda), cada dipolo presenta un desfase de π entre la mitad superior e inferior (un máximo local pasa a ser un mínimo y viceversa) y la fase relativa entre modos p es la necesaria para cada anillo, según la información entregada por la Figura 7.5(d) y (e). En las imágenes centrales se evidencia de manera inequívoca la excelente excitación de ambos modos localizados, no existiendo difracción discreta alguna durante su propagación, y conservando su estructura de fase a la salida del cristal como lo predice el modelo discreto (ver imágenes insertas a la derecha).

La observación de los anillos dipolares corrobora, una vez más, el uso del modelo Tight-Binding como una descripción fidedigna del comportamiento de la luz en arreglos de guías de onda. Más aún, el experimento confirma la validez de la aproximación $V_2^{f,d} = 0$, ya que efectivamente el sistema se desacopla en dos fenómenos independientes. Una prueba feaciente de ese hecho es que, si existiera interacción entre los modos s y p (si $V_2^{f,d}$ no fuera cero), al inyectar el anillo compuesto de dipolos en algún momento se hubiesen excitado modos fundamentales, los que difractarían a través del arreglo destruyendo la condición inicial. Los resultados recién expuestos corresponden a la primera observación de estados de banda plana dipolares en una red fotónica [42], y posicionan al montaje generalizado (Figura 3.5) como una poderosa y versátil herramienta a la hora de generar condiciones iniciales arbitrarias.

Capítulo 8

Cinta tipo Grafeno No Lineal

En un estudio puramente numérico, se procede en este capítulo a investigar las soluciones de la cinta de Grafeno y su dinámica en un régimen no lineal tipo Kerr (o cúbico) enfocante. En particular, se buscan los parámetros óptimos para observar movilidad de los modos, calculando para ello cantidades como el Hamiltoniano y la estabilidad lineal. Inicialmente se presentan, de manera analítica, los estados de banda plana como soluciones exactas del sistema (compactones). Luego, mediante el método de Newton y considerando sólo interacción a primeros vecinos, se obtienen doce tipos de soluciones no lineales localizadas, incluyendo los anillos de la red. Se discuten aquí argumentos de estabilización de uno de los modos de banda plana a alta potencia y se hallan dos regiones potencialmente adecuadas para presenciar movilidad, obteniéndose el resultado esperado en un caso, y observándose un desplazamiento local en el segundo contexto. Finalmente, se muestra y se analiza la fenomenología para los modos de banda plana no lineales con un kick inicial, derivando en la no movilidad de este tipo de soluciones.

8.1. Soluciones no lineales localizadas

Se busca resolver, para la cinta de Grafeno mostrada en la Figura 8.1, la Ecuación No Lineal Discreta de Schrödinger dada por (2.35), donde la no linealidad es de tipo cúbica o Kerr [10] en un régimen enfocante ($\gamma > 0$), y donde se considerará sólo la excitación del modo fundamental de cada guía de onda.

Suponiendo soluciones estacionarias del tipo $\psi_{\vec{n}} = u_{\vec{n}} e^{i\lambda z} e^{ie z}$ (para guías de onda

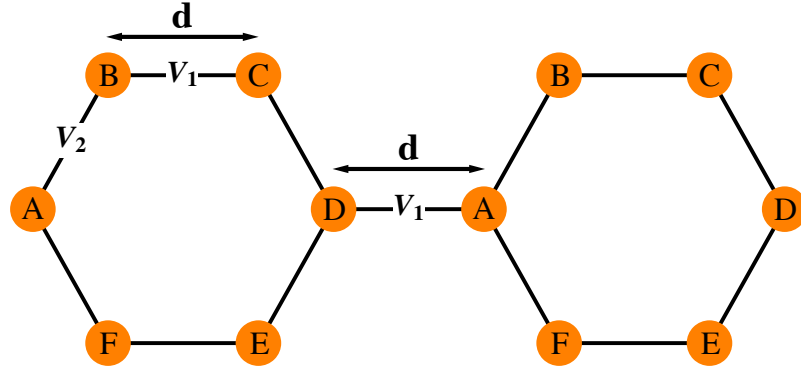


Figura 8.1: Cinta de Grafeno. Los círculos anaranjados indican las posiciones de las guías de onda, y las líneas de color negro representan los acoplamientos a primeros vecinos. Los distintos sitios de la celda unitaria de la cinta se denotan por las letras **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F**.

idénticas) con $u_{\vec{n}}$ real, la DNLSE queda

$$\lambda u_{\vec{n}} - \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n}, \vec{m}} u_{\vec{m}} - \gamma u_{\vec{n}}^3 = 0. \quad (8.1)$$

Ahora bien, dado que existe un antecedente que señala a los anillos del sistema como soluciones exactas de la relación anterior [24], se proceden a usar como ansatz los modos de banda plana mostrados en la Figura 6.4, de donde se obtiene (utilizando $u_{\vec{n}} = B$)

$$\lambda B - V_2 A - V_1 C - \gamma B^3 = 0.$$

Recordando que para los estados localizados se cumple $A = 0$ y $B = \pm C$ se llega a

$$\lambda_{\pm} = \pm V_1 + \gamma B^2,$$

que al reescribirse en función de la *potencia total* del modo, definida por

$$P = \sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}|^2, \quad (8.2)$$

$$P = 4B^2,$$

toma la forma

$$\lambda_{\pm} = \pm V_1 + \gamma \frac{P}{4}. \quad (8.3)$$

En primer lugar, es importante notar que el caso $\gamma = 0$ conduce a la frecuencia de los anillos lineales a primeros vecinos. Esto mismo ocurre cuando $P \rightarrow 0$, lo que significa que los estados no lineales compactos surgen linealmente desde las bandas planas. Además, dado que (8.3) es una expresión exacta, se desprende que estos modos pueden ser excitados sin un umbral mínimo de potencia [44]. De manera complementaria, debido a que los anillos presentan amplitud nula en todos los sitios de la red excepto cuatro, se concluye que dichos estados corresponden a *compactones* (soluciones no lineales exactas y localizadas, sin decaimiento exponencial) [45].

Por otro lado, teniendo en cuenta que sólo la potencia total y la energía del sistema son cantidades conservadas en este modelo, éste no es integrable, y por ende no existen más modos analíticos de la DNLS [46]. Es por esto que se debe recurrir a soluciones numéricas las cuales, dada su naturaleza, no hacen posible que el lado derecho de (8.1) sea idénticamente cero. En su lugar, al momento de calcular un estado no lineal se exige que el lado izquierdo sea menor que una cierta tolerancia muy pequeña, es decir, se necesita que se cumpla

$$\lambda u_{\vec{n}} - \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{m}, \vec{n}} u_{\vec{m}} - \gamma u_{\vec{n}}^3 < t, \quad (8.4)$$

con $t \approx 0$. Utilizando el *método de Newton* y con una suposición inicial del modo (denominada *semilla*) para una frecuencia λ dada, es posible encontrar una solución no lineal de la cinta (un perfil de las amplitudes $u_{\vec{n}}$ tal que se cumple (8.4) para cierto $t \rightarrow 0$).

Para elegir la semilla correspondiente a cada tipo de estado se debe considerar que cuando el valor de $|\lambda|$ es alto (muy alejado de las bandas lineales, denominado *límite anticontinuo*) los perfiles son altamente localizados, ya que el término predominante en (8.1) es $\gamma u_{\vec{n}}^3$ (la luz de una guía no interactúa con los otros sitios). Usando como ejemplo una solución retorcida (*twisted*) de dos sitios (**A** y **B**) en la zona central de la cinta, esto se traducirá en que $u_A = -u_B > 0$ para dos guías del arreglo y $u_{\vec{n}} = 0$ en el resto de la red. Al reemplazar estos valores en (8.1) se obtiene

$$\lambda u_A = V_2 u_B + \gamma u_A^3,$$

$$\lambda u_B = V_2 u_A + \gamma u_B^3,$$

y como $u_A = -u_B \neq 0$, al dividir por u_A y u_B , respectivamente, ambas ecuaciones quedan

$$\lambda = -V_2 + \gamma u_A^2 = -V_2 + \gamma u_B^2.$$

Sin pérdida de generalidad, es posible escribir u_A^2 y u_B^2 como P/N , donde P es la potencia total y N el número de sitios que conforman el perfil supuesto ($N = 2$ en este caso). Por lo tanto

$$\lambda = -V_2 + \gamma \frac{P}{2} \quad (8.5)$$

y

$$\vec{S} = (0, \dots, 0, u_A = \sqrt{P/2}, u_B = -\sqrt{P/2}, 0, \dots, 0) \quad (8.6)$$

serán la frecuencia y la semilla, respectivamente, para $P \gg 1$.

Se comienza entonces con una semilla \vec{S} asociada a una frecuencia λ muy alta (mucho mayor que la de la banda lineal superior), y se encuentra una solución \vec{S}_1 . Luego, al disminuir en una pequeña cantidad el valor de la frecuencia (siendo ahora $\lambda - d\lambda$, con $d\lambda \ll 1$), es posible encontrar una solución \vec{S}_2 usando \vec{S}_1 como semilla. Los modos encontrados iterando este procedimiento forman una familia de soluciones, existiendo tipos de perfiles localizados en un sitio, en dos guías de onda con amplitudes desfasadas en π , en dos sitios en fase, etc.

Con el método recién descrito se obtuvieron soluciones de uno, dos y tres sitios (en fase y retorcidos), y los estados de banda plana de la cinta, los cuales se ilustran en la Figura 8.2 para una frecuencia $\lambda = 5$. En todos los cálculos se consideró una red isotrópica y acoplamiento a primeros vecinos ($V_1 = V_2 = 1$ en la Figura 8.1), se fijó una tolerancia $t = 2 \times 10^{-13}$, y se usó $d\lambda = 0.01$ y $\gamma = 1$.

Como podía esperarse, todos los modos hallados presentan un alto grado de simetría, tanto en la intensidad como en la estructura de fase. Además, tal como se supuso para encontrar las soluciones, a medida que la potencia aumenta se observa que el perfil se confina, quedando completamente localizado en los sitios de mayor intensidad (color amarillo) para un régimen altamente no lineal. Lógicamente, la excepción a este fenómeno son los estados originados en las bandas planas, que en principio debiesen poseer exactamente la misma extensión espacial para cualquier valor de P [30].

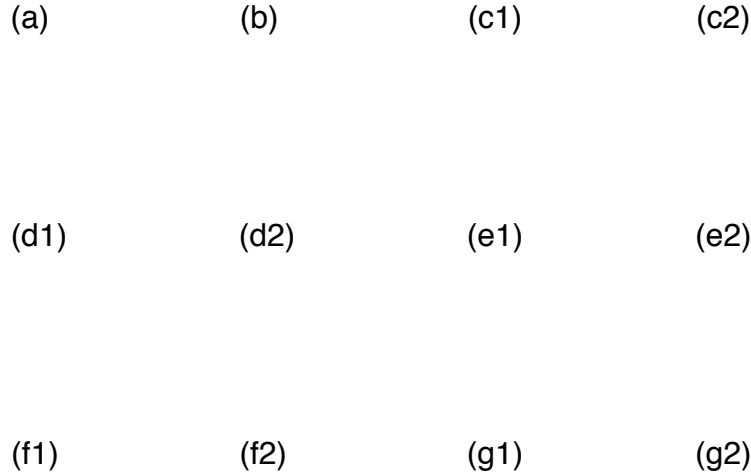


Figura 8.2: Modos no lineales de la cinta de Grafeno para $\lambda = 5$. Perfiles localizados centrados en los sitios (a) **A**, (b) **B**, (c1) entre **D** y **A** en fase y (c2) entre **D** y **A** retorcido. Soluciones confinadas principalmente entre **A** y **B** con estructura de fase (d1) plana y (d2) dividida en mitades. (e1) y (e2) corresponden a la intensidad de la luz presente mayoritariamente entre las guías **B** y **C** con igual fase y desfasadas, respectivamente. Modo de tres sitios (f1) en fase y (f2) retorcido asociado a las guías **B**, **A** y **F**. Anillos del sistema que surgen desde las bandas lineales de frecuencia (g1) $\lambda = V_1$ y (g2) $\lambda = -V_1$. En las soluciones retorcidas la diferencia de fase π se indica en las guías.

8.2. Movilidad de soluciones no lineales

Habiendo hallado los modos numéricos del sistema, las propiedades a analizar para cada uno son el Hamiltoniano (o energía), el grado de participación, la potencia total y la estabilidad lineal, teniendo como principal objetivo determinar la existencia o ausencia de *movilidad* de los estados de la red. Este fenómeno consiste en inyectar como condición inicial una solución con un determinado gradiente de fase \vec{k} y rastrear su posible traslación transversal en la cinta, de manera que luego de cierta distancia de propagación ésta se sitúe en la celda unitaria vecina (se “mueva”

controladamente). Durante dicho proceso el perfil debiera deformarse suavemente y dar paso a otro modo no lineal, transición que se manifiesta en valores similares del Hamiltoniano y una diferencia o cambio de estabilidad de los perfiles en consideración [47, 48].

Introduciendo entonces la razón de participación, que fue estudiada previamente en el capítulo 4 y dada por (4.12), en el presente contexto toma la forma

$$R(z) = \frac{(\sum_n |u_{\vec{n}}(z)|^2)^2}{\sum_n |u_{\vec{n}}(z)|^4}. \quad (8.7)$$

Por su parte, la definición del *Hamiltoniano* en sistemas discretos no lineales es

$$H = - \sum_{\vec{n}} \left(\sum_{\vec{m}} V_{\vec{n}, \vec{m}} u_{\vec{m}}^* u_{\vec{n}} + \frac{\gamma}{4} |u_{\vec{n}}|^4 + \epsilon_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}|^2 \right).$$

Aquí se usará $\epsilon_{\vec{n}} = \epsilon = 0$ por comodidad, ya que todas las guías son idénticas y la energía de sitio sólo produce un corrimiento colectivo en H , pudiendo obviarse en la ecuación. Recordando también que las amplitudes $u_{\vec{n}}$ son reales, resulta

$$H = - \sum_{\vec{n}} \left(\sum_{\vec{m}} V_{\vec{n}, \vec{m}} u_{\vec{m}} u_{\vec{n}} + \frac{\gamma}{4} u_{\vec{n}}^4 \right). \quad (8.8)$$

Adicionalmente, la *estabilidad lineal* G indica qué tan robusto es el modo no lineal ante pequeñas perturbaciones en sus amplitudes; es decir, al cambiar $u_{\vec{n}} \rightarrow u_{\vec{n}} + \delta_{\vec{n}}$ con $|\delta_{\vec{n}}| \ll |u_{\vec{n}}|$, se busca estudiar si la solución se “restituirá” durante la propagación (*modo estable*) o si será destruida (*modo inestable*). A grandes rasgos, este valor se obtiene insertando la perturbación en la DNLSE y despreciando los términos de orden mayor a $\delta_{\vec{n}}$, para luego calcular el espectro del sistema (que pasa a ser complejo). El máximo valor absoluto de la parte imaginaria de las frecuencias corresponderá a G , el cual genera un factor $e^{\pm Gz}$ en las amplitudes. De esta manera, cuando $G \approx 0$ el modo será estable, y para $G > 0$ la solución se inestabilizará a una distancia que cumpla $Gz \approx 1$ (ya que $e^{\pm Gz}$ será del orden de las amplitudes). Dicho de otra forma, G da cuenta del autoestado del sistema perturbado que primero destruye la condición inicial en la dinámica, y cuya obtención se detalla en [49, 50].

Las cuatro propiedades mencionadas se extraen entonces para las soluciones no lineales pertenecientes a cada familia, por lo que se contará con doce curvas $P(\lambda)$,

$H(P)$, $R(P)$ y $G(P)$, que se presentan en las Figuras 8.3, 8.5 y 8.6. Es importante mencionar que la potencia en función de la frecuencia se grafica también considerando la estabilidad de cada modo, de manera que la inspección en la búsqueda de movilidad sea más sencilla.

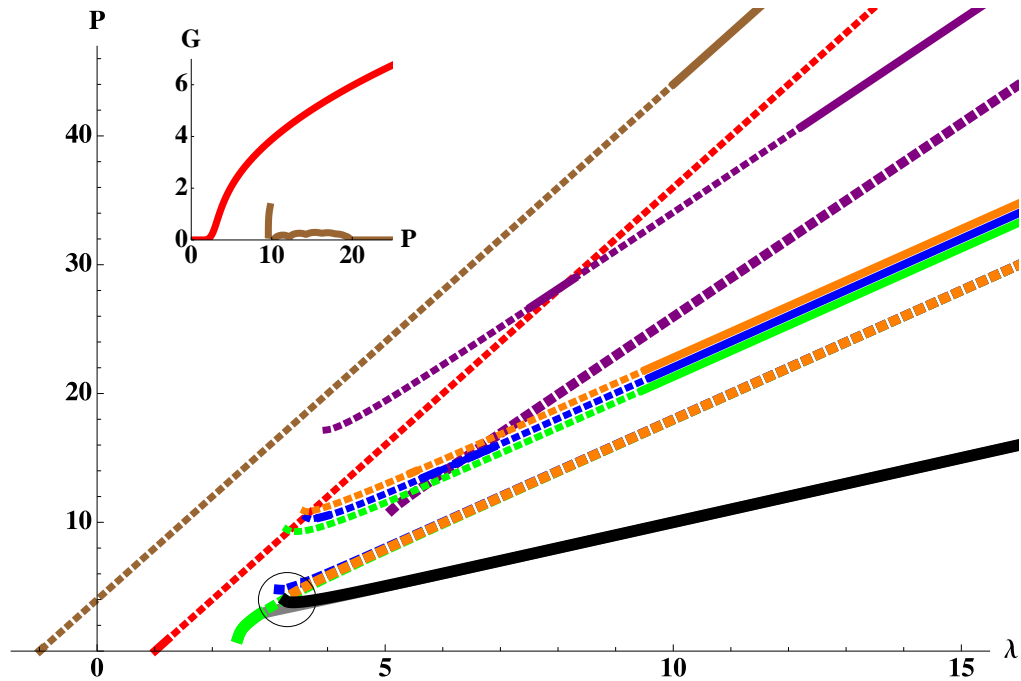


Figura 8.3: Potencia en función de la frecuencia para los doce tipos de modos no lineales calculados. Los perfiles con amplitudes en fase (retorcidos) se representan por curvas gruesas (delgadas) y la estabilidad (inestabilidad) por la línea continua (segmentada). Las soluciones localizadas en **A** y **B** vienen dadas por las curvas gris y negra, respectivamente. Para los modos asociados a la excitación de **D** y **A**, **A** y **B**, y **B** y **C** las líneas son de color verde, anaranjado y azul, respectivamente. El perfil de tres sitios es de color púrpura, y la representación de los anillos se hace con las curvas de color rojo (modo de la banda plana superior) y café (banda plana inferior). Los modos retorcidos verde, anaranjado y azul están en realidad superpuestos, pero los dos primeros se han graficado desplazados por comodidad visual. El cuadro inserto muestra la estabilidad de una solución de dos sitios en fase (curva roja) y desfasados en π (línea café) en función de la potencia para una cadena unidimensional.

Lo primero que puede notarse en la Figura 8.3 es que los anillos del sistema forman rectas paralelas que nacen en $\pm V_1$, lo cual confirma que éstos no poseen un umbral mínimo de potencia de excitación, y corrobora que la relación entre su potencia y frecuencia es lineal. En particular, es posible también observar que el modo representado por la Figura 8.2(g2) se estabiliza a una potencia $P_{inf} \approx 43$, mientras que el otro perfil localizado se mantiene inestable para $P \gtrsim 1$.

La estabilidad de los anillos se explica al considerar que, dada la nula interacción a segundos vecinos, las amplitudes en los sitios **B** y **C** sólo se acoplan con las guías **A** y **D**. Por simetría lo mismo ocurre con **E** y **F**, generando así una “separación” del estado en una mitad superior y otra inferior. Lo anterior tiene como consecuencia la posibilidad de pensar la cinta como dos cadenas unidimensionales independientes, una formada por la sucesión de sitios **ABCDABCD**... y otra por **AFEDAFED**... Siguiendo este argumento se calcula la estabilidad para un modo de dos sitios (en fase y retorcido) en el centro de una cadena unidimensional, bosquejada en el cuadro inserto en la Figura 8.3. En un régimen altamente no lineal la solución se encuentra muy confinada, por lo que cuando $P > 10$ ésta se debe comportar como una mitad del anillo. De hecho, el perfil con fase plana es inestable bajo este contexto, mientras que para el modo con amplitudes desfasadas se tiene $G \approx 0$ a partir de $P_t \approx 20$. Por ende se cumple $P_{inf} \approx 2P_t$, siendo consistente con lo planteado y dilucidando el origen de la estabilización de un anillo a alta potencia. Más aún, al observar las curvas asociadas a los modos de las Figuras 8.2(e1) y (e2) (que también corresponden a la mitad de cada estado de banda plana), el razonamiento expuesto se confirma.

Con el fin de hallar las condiciones óptimas para la posible observación de movilidad de las soluciones no lineales del sistema, se inspecciona ahora detenidamente la Figura 8.3, poniendo especial atención a cambios o diferencias de estabilidad en modos que poseen potencias y frecuencias similares.

Primeramente, es necesario descartar algunas opciones que a simple vista parecen satisfacer lo deseado, siendo el cruce de las curvas roja y púrpura un ejemplo. Aquí se tiene una coincidencia de soluciones en $P \approx 28$ que no se considera debido a que las líneas representan modos con diferente energía y distinto número de sitios excitados (ver Figuras 8.5 y 8.6) a dicha potencia, y para observar movilidad tanto el grado de participación como el Hamiltoniano deben ser similares.

Otro caso que no debe tomarse en cuenta es la intersección de la recta púrpura gruesa con las curvas anaranjada, azul y verde. Esto debido a que la primera corresponde a un perfil en fase y las otras tres son modos retorcidos, por lo que no existe una manera “suave” de alterar las amplitudes para pasar de un estado al otro. Análogamente, el encuentro de la solución roja con los modos azul, verde y anaranjado en $P \approx 10$ se desecha debido a la ausencia de una transformación que, a partir de perfiles de tipo retorcido, conduzca al estado de banda plana.

Como análisis final, la superposición de las líneas anaranjada, azul y verde delgadas se descarta, ya que a pesar de los cambios de estabilidad que se producen, por ejemplo, en $P \approx 14$ (curva anaranjada y azul) y $P \approx 18$ (línea verde), los modos asociados son de tipo retorcido centrados entre dos guías de onda. Esto implica que no existe una solución de un sitio que conecte dos perfiles con las características señaladas.

Considerando los argumentos expuestos, sólo una zona del gráfico (demarcada por un círculo) cumple las condiciones necesarias para observar movilidad, y se muestra en detalle en la Figura 8.4.

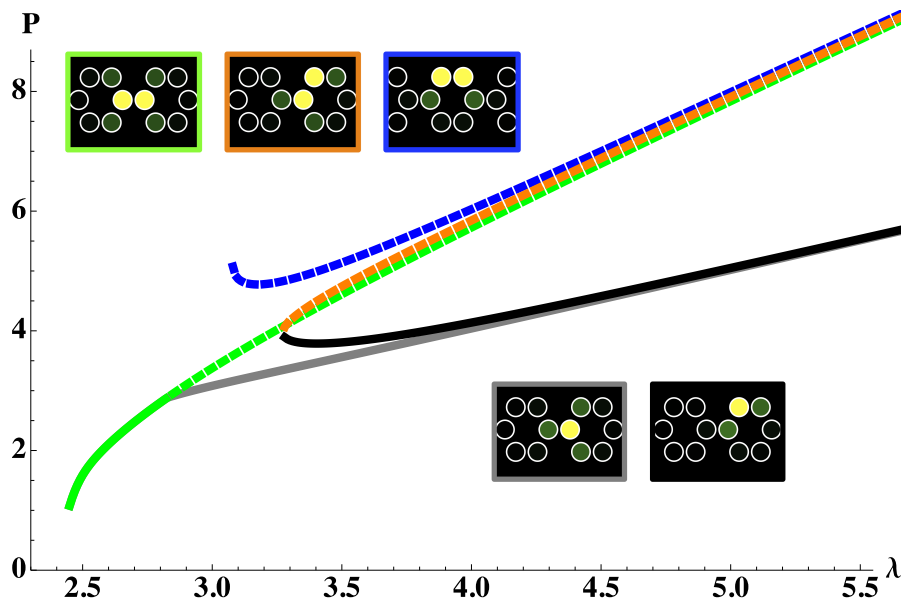


Figura 8.4: Acercamiento a la Figura 8.3, donde se consideran sólo las soluciones de interés. Los modos asociados a cada curva se encuentran insertos con un marco correspondiente a su color.

Como puede observarse en la gráfica, existen dos zonas donde soluciones estables e inestables conviven con prácticamente igual potencia y frecuencia, dadas por la unión de las curvas verde y gris, y por el encuentro de las líneas aranjada y negra. Es menester entonces inspeccionar las otras propiedades de los modos (mostradas en las Figuras 8.5 y 8.6) en las áreas mencionadas, que en principio deben presentar valores aproximadamente iguales para que exista movilidad.

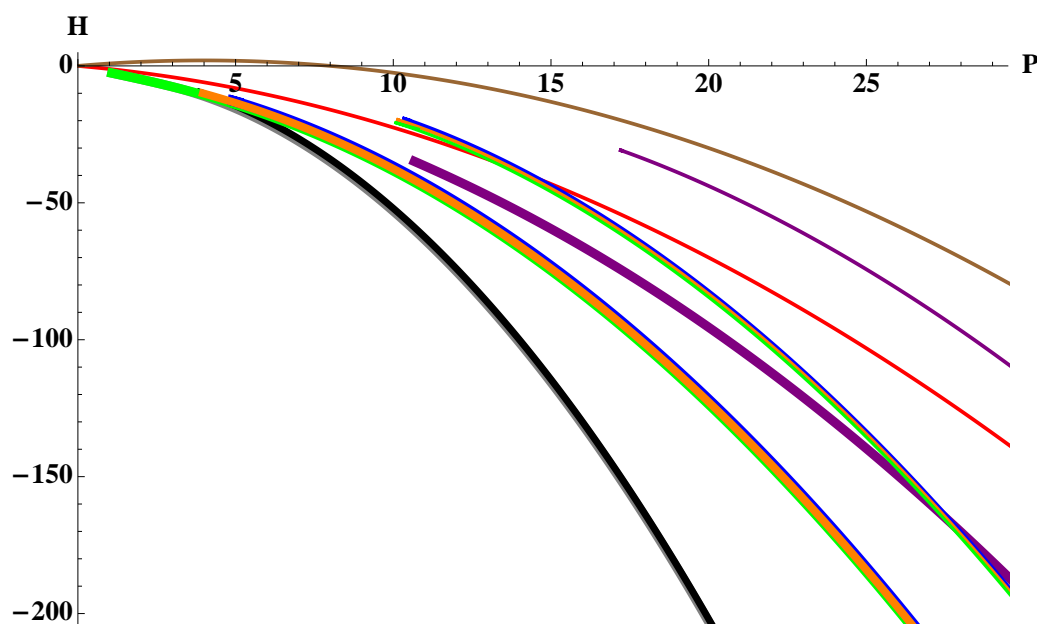


Figura 8.5: Hamiltoniano en función de la potencia para los doce tipos de modos no lineales calculados, donde los perfiles con amplitudes en fase (escalonados) se representan por curvas gruesas (delgadas). Las soluciones de un sitio localizadas en **A** y **B** corresponden a las curvas gris y negra, respectivamente. Para los modos de dos sitios, las líneas asociadas a la excitación de **D** y **A**, **A** y **B**, y **B** y **C** son de color verde, anaranjado y azul, respectivamente. En el caso del modo de tres sitios las curvas son de color púrpura, mientras que la representación de los anillos se hace con rojo (modo de la banda plana superior) y café (modo de la banda plana inferior).

Es así como se aprecian Hamiltonianos y razones de participación muy similares en ambos puntos; $H(P = 2.89) \approx -7.3$ y $R(P = 2.89) \approx 4.9$ para los perfiles asociados

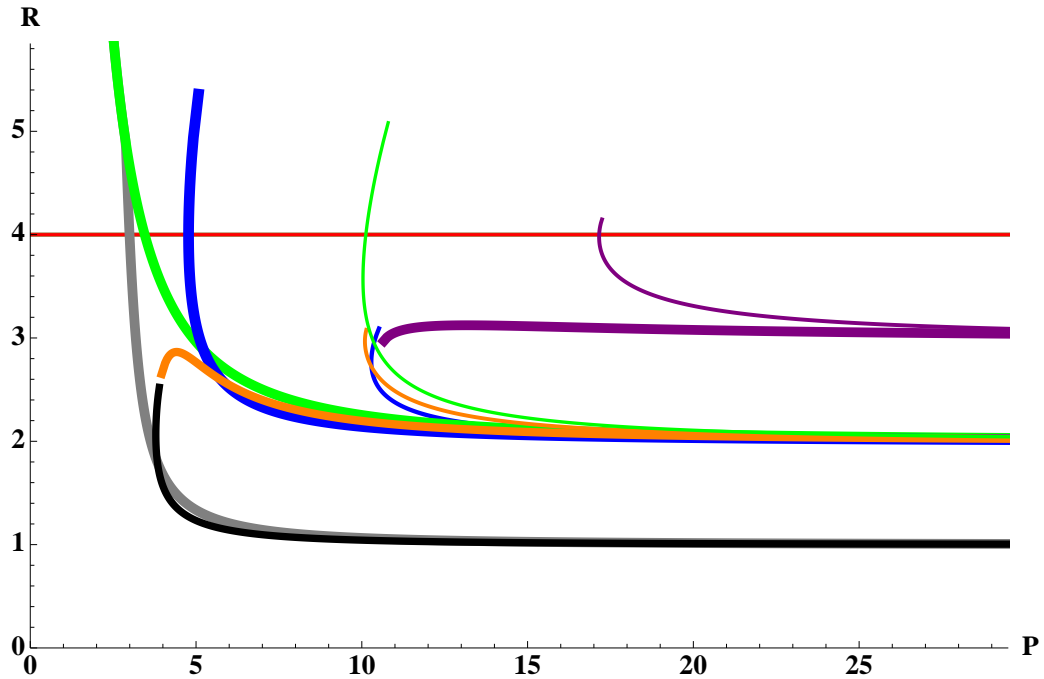


Figura 8.6: Grado de participación en función de la potencia para los doce tipos de modos no lineales calculados, donde los perfiles con amplitudes en fase (escalonados) se representan por curvas gruesas (delgadas). Las soluciones de un sitio localizadas en **A** y **B** corresponden a las curvas gris y negra, respectivamente. Para los modos de dos sitios, las líneas asociadas a la excitación de **D** y **A**, **A** y **B**, y **B** y **C** son de color verde, anaranjado y azul, respectivamente. En el caso del modo de tres sitios las curvas son de color púrpura, mientras que la representación de los anillos se hace con rojo (modo de la banda plana superior) y café (modo de la banda plana inferior).

a las líneas verde y gris, y $H(P = 3.97) \approx -10$ y $R(P = 3.97) \approx 2.6$ en las soluciones anaranjada y negra. Esta semejanza en las características de los estados no lineales implica que las regiones en consideración pueden ser asociadas a bifurcaciones, de tipo horquilla supercrítica (*supercritical pitchfork bifurcation point*) en el primer caso (debido a la degeneración), y a un nodo de ensilladura (*saddle-node bifurcation point*) en la segunda región. Dado que las zonas analizadas se presentan como potencialmente favorables para la observación de movilidad, se está en condiciones de hacer un barrido dinámico en búsqueda del fenómeno deseado.

Se procede entonces a realizar, a potencia fija $P_v = 2.89$, una simulación numérica de la evolución del sistema (formado por veintidós celdas unitarias) hasta $Z_{max} = 100$, usando como condición inicial el modo de dos sitios correspondiente a la curva verde (inserto en la Figura 8.4) con cierto gradiente de fase \vec{k} . Este proceso se ejecuta para un conjunto de valores del kick inicial definidos por $\vec{k} = (j \cdot \Delta k, m \cdot \Delta k)$, con j y m enteros no negativos tal que $0 \leq k_x \leq \pi$ y $0 \leq k_y \leq \pi$, y donde $\Delta k = 0.01$. Durante la propagación del perfil se monitorea (en pasos de $\delta z = 1$) la posición horizontal de su máxima intensidad, exigiendo que ésta no disminuya con respecto al paso anterior (ya que debiese producirse un desplazamiento hacia la derecha). De esta forma, si para el valor de \vec{k} usado no se produce el movimiento esperado, dicho gradiente de fase se descarta como parámetro para la observación de movilidad.

Una vez obtenido el conjunto de kicks que cumplen la condición impuesta (los cuales se denotarán \vec{k}'), se genera una serie de mini-grillas cuadradas (formadas por 81 puntos) en el espacio de frecuencias, donde cada \vec{k}' es el centro (con $\delta k = 0.002$ la distancia horizontal y vertical entre puntos consecutivos). Posteriormente, todos los elementos de las mini-grillas son puestos a prueba como gradientes de fase iniciales mediante el procedimiento descrito en el párrafo anterior. Con este método, se obtiene finalmente un conjunto más preciso de kicks óptimos para observar movilidad (que se denominarán \vec{k}'').

De manera análoga e independiente, se simula (a potencia $P_a = 3.97$ y con cierto \vec{k}) la propagación del perfil asociado a la curva anaranjada de la Figura 8.4, usando los mismos parámetros y protocolos que en el primer caso.

Es importante mencionar que la elección de los modos iniciales se realizó considerando que éstos son inestables, y por lo tanto ante una mínima perturbación debiesen decaer a estados estables (centrados en una guía de onda, líneas negra y gris), haciendo más plausible la observación de movilidad.

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 8.7, que ilustra los \vec{k}'' asociados tanto a la solución centrada en los sitios **D** y **A** como al perfil ubicado principalmente en las guías **A** y **B**.

Como es evidente, el área potencialmente favorable para la observación de movilidad es mucho menor en el caso de la solución localizada en **D** y **A**. Esto puede deberse

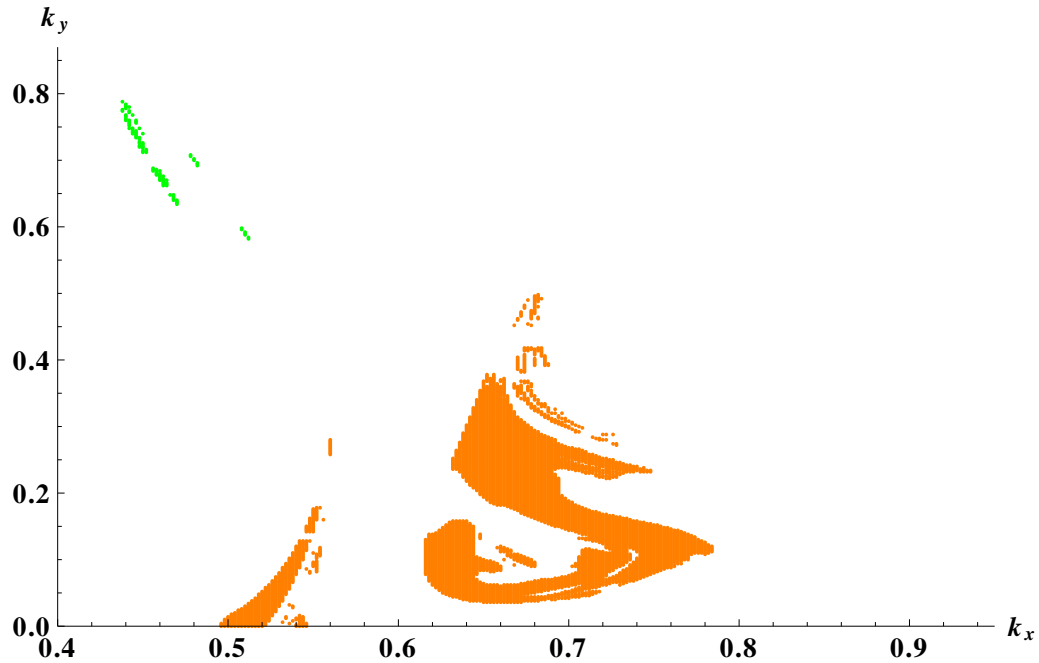


Figura 8.7: Vectores precursores de desplazamiento. Los kicks de color verde (anaranjado) corresponden al gradiente de fase inicial óptimo para el modo que representa la curva verde (anaranjada) en la Figura 8.4.

a que el criterio utilizado para obtener la Figura 8.7 no es completamente general, y por ende es posible que exista un rango de parámetros más óptimo (y más amplio) para presenciar el fenómeno buscado. No obstante lo anterior, se han hallado regiones que presentan indicios de movilidad, por lo que corresponde en este punto explorar en detalle la dinámica generada por los kicks iniciales encontrados.

Es así como, al simular la propagación de los modos en estudio con algunos gradientes de fase extraídos de la gráfica (a potencias P_v y P_a), se obtienen (para todos los valores de \vec{k}'' utilizados) dinámicas muy similares en cada caso. Sin embargo, las características de las propagaciones son muy diferentes si se comparan entre los dos perfiles considerados, como muestra la Figura 8.8.

Aquí se aprecia, por un lado, una gran movilidad del modo inicial, y por otra parte se tiene un cambio de posición acotado de la solución (Figuras 8.8(a) y (b), respectivamente). En el primer caso, la condición inicial se desplaza un total de nueve celdas en $z \approx 100$, dejando atrás cierta radiación durante el movimiento, y llegando

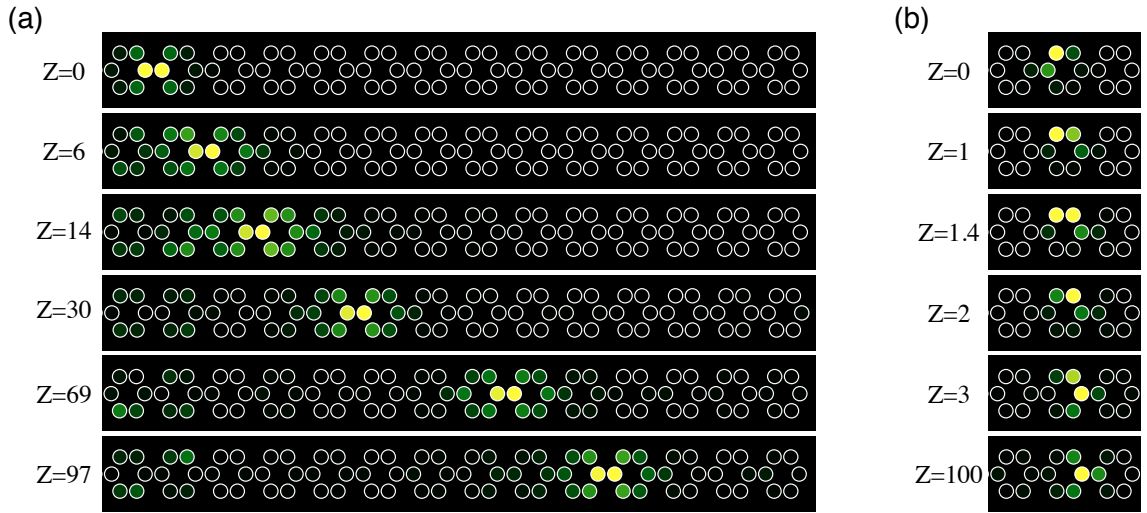


Figura 8.8: Evolución del modo ilustrado en $z = 0$ para un gradiente de fase (a) $\vec{k} = (0.45, 0.72)$ y (b) $\vec{k} = (0.68, 0.2)$.

al borde de la cinta en $z \approx 140$. Para el segundo contexto, el kick produce que el estado localizado se transporte una distancia menor a una celda unitaria, terminando su movimiento en el modo centrado en la guía **D**. Esto se explica debido a que la solución no lineal ubicada mayoritariamente en **D** es equivalente a la localizada en **A**, y por lo tanto es estable a potencia $P \approx P_a$. Además es interesante notar que, a pesar de observarse en $z = 1.4$ un estado que podría corresponder al centrado en los sitios **B** y **C**, en realidad éste no existe a potencia P_a (ver curva azul en la Figura 8.4 y modo asociado), por lo que dicho perfil de intensidad corresponde a una solución localizada principalmente en **B** transportándose hacia **C**.

Dado que se han logrado encontrar una serie de parámetros que permiten observar movilidad, surge ahora un lógico interés por explorar, por ejemplo, otros valores de potencia. En esta dirección, y a modo de extensión de lo realizado, se repitió el estudio aquí expuesto para $P_v = 3.1$ y $P_a = 4.28$, encontrándose la misma fenomenología. Esto entrega soporte tanto al análisis teórico planteado para hallar soluciones potencialmente móviles como al criterio utilizado para obtener los vectores \vec{k}'' .

8.3. Movilidad de anillos no lineales

A pesar de que los estados originados desde las bandas planas no se analizaron mayormente en búsqueda de movilidad, éstos son una posibilidad intrínsecamente interesante al momento de pensar en su control dentro del régimen no lineal. Dicha aseveración se basa en que son soluciones exactas y, por lo tanto, debieran comportarse de acuerdo a la teoría. Considerando esto último se presenta, a partir de ahora y de manera analítica, una deducción que tiene como consecuencia la no movilidad de los anillos.

Para ello se comienza escribiendo la Ecuación de Schrödinger Discreta No Lineal a primeros vecinos para cada sitio de la celda unitaria, dada por

$$\begin{aligned}
-i\frac{d\psi_A}{dz} &= V_1\psi_De^{-ikd} + V_2(\psi_B + \psi_F)e^{ikd/2} + \gamma|\psi_A|^2\psi_A, \\
-i\frac{d\psi_B}{dz} &= V_1\psi_Ce^{ikd} + V_2\psi_Ae^{-ikd/2} + \gamma|\psi_B|^2\psi_B, \\
-i\frac{d\psi_C}{dz} &= V_1\psi_Be^{-ikd} + V_2\psi_De^{ikd/2} + \gamma|\psi_C|^2\psi_C, \\
-i\frac{d\psi_D}{dz} &= V_1\psi_Ae^{ikd} + V_2(\psi_C + \psi_E)e^{-ikd/2} + \gamma|\psi_D|^2\psi_D, \\
-i\frac{d\psi_E}{dz} &= V_1\psi_Fe^{-ikd} + V_2\psi_De^{ikd/2} + \gamma|\psi_E|^2\psi_E, \\
-i\frac{d\psi_F}{dz} &= V_1\psi_Ee^{ikd} + V_2\psi_Ae^{-ikd/2} + \gamma|\psi_F|^2\psi_F.
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Aquí ψ_j representa el campo en el sitio \mathbf{j} , y además se ha incluido explícitamente el gradiente de fase dado por $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, con $\vec{k} = k\hat{x}$.

Inicialmente, la configuración de amplitudes es la correspondiente al modo de banda plana,

$$\psi_A(0) = \psi_D(0) = 0, \quad \psi_F(0) = -\psi_B(0), \quad \psi_E(0) = -\psi_C(0), \tag{8.10}$$

por lo que al reemplazar este perfil en el conjunto (8.9) se obtiene

$$-i\frac{d\psi_A}{dz}\Big|_{z=0} = 0, \tag{8.11}$$

$$-i\frac{d\psi_B}{dz}\Big|_{z=0} = V_1\psi_C(0)e^{ikd} + \gamma|\psi_B(0)|^2\psi_B(0), \tag{8.12}$$

$$-i\frac{d\psi_C}{dz}\Big|_{z=0} = V_1\psi_B(0)e^{-ikd} + \gamma|\psi_C(0)|^2\psi_C(0), \tag{8.13}$$

$$-i \frac{d\psi_D}{dz} \Big|_{z=0} = 0, \quad (8.14)$$

$$-i \frac{d\psi_E}{dz} \Big|_{z=0} = - [V_1 \psi_B(0) e^{-ikd} + \gamma |\psi_C(0)|^2 \psi_C(0)], \quad (8.15)$$

$$-i \frac{\partial \psi_F}{\partial z} \Big|_{z=0} = - [V_1 \psi_C(0) e^{ikd} + \gamma |\psi_B(0)|^2 \psi_B(0)], \quad (8.16)$$

que representan los cambios iniciales en las amplitudes.

Por otro lado, la definición de la derivada del campo evaluada en $z = z_0$ viene dada por

$$\frac{d\psi_j}{dz} \Big|_{z=z_0} = \frac{\psi_j(z_0 + \delta z) - \psi_j(z_0)}{\delta z},$$

con $j = \{A, B, C, D, E, F\}$ y δz cercano a cero. Reordenando resulta

$$\psi_j(z_0 + \delta z) = \psi_j(z_0) + \frac{d\psi_j}{dz} \Big|_{z=z_0} \delta z, \quad (8.17)$$

expresión que permite encontrar el siguiente valor de la amplitud conociendo su derivada. Al usar en esta ecuación $z_0 = 0$ y sustituir (8.10) a (8.16) se llega a

$$\begin{aligned} \psi_A(\delta z) &= 0, \\ \psi_B(\delta z) &= i [V_1 \psi_C(0) e^{ikd} + \gamma |\psi_B(0)|^2 \psi_B(0)] \delta z + \psi_B(0), \\ \psi_C(\delta z) &= i [V_1 \psi_B(0) e^{-ikd} + \gamma |\psi_C(0)|^2 \psi_C(0)] \delta z + \psi_C(0), \\ \psi_D(\delta z) &= 0, \\ \psi_E(\delta z) &= -i [V_1 \psi_B(0) e^{-ikd} + \gamma |\psi_C(0)|^2 \psi_C(0)] \delta z - \psi_C(0), \\ \psi_F(\delta z) &= -i [V_1 \psi_C(0) e^{ikd} + \gamma |\psi_B(0)|^2 \psi_B(0)] \delta z - \psi_B(0), \end{aligned}$$

donde es importante notar que las amplitudes poseen la misma estructura que (8.10), lo que implica la conservación del modo de banda plana no lineal para el primer paso $z = \delta z$. Se supone ahora que lo mismo se cumple en el n -ésimo paso, por lo que evaluar (8.17) en $z_0 = n\delta z$ para los seis sitios de la celda unitaria conduce a

$$\begin{aligned} \psi_A(n\delta z + \delta z) &= 0, \\ \psi_B(n\delta z + \delta z) &= i [V_1 \psi_C(n\delta z) e^{ikd} + \gamma |\psi_B(n\delta z)|^2 \psi_B(n\delta z)] \delta z + \psi_B(n\delta z), \\ \psi_C(n\delta z + \delta z) &= i [V_1 \psi_B(n\delta z) e^{-ikd} + \gamma |\psi_C(n\delta z)|^2 \psi_C(n\delta z)] \delta z + \psi_C(n\delta z), \\ \psi_D(n\delta z + \delta z) &= 0, \\ \psi_E(n\delta z + \delta z) &= -i [V_1 \psi_B(n\delta z) e^{-ikd} + \gamma |\psi_C(n\delta z)|^2 \psi_C(n\delta z)] \delta z - \psi_C(n\delta z), \\ \psi_F(n\delta z + \delta z) &= -i [V_1 \psi_C(n\delta z) e^{ikd} + \gamma |\psi_B(n\delta z)|^2 \psi_B(n\delta z)] \delta z - \psi_B(n\delta z). \end{aligned}$$

Aquí nuevamente se tiene una configuración tipo (8.10), lo que indica que el modo localizado se conserva en el paso $n + 1$. Esto termina por demostrar, mediante el método de *inducción*, que el perfil de anillo se mantiene para todo $z = n\delta z$ con n natural. Más aún, dado que δz es cercano a cero, $n\delta z$ puede considerarse como continuo, luego se concluye que el estado de banda plana persiste para todo z ,

$$\psi_A(z) = \psi_D(z) = 0, \quad \psi_F(z) = -\psi_B(z), \quad \psi_E(z) = -\psi_C(z). \quad (8.18)$$

La principal consecuencia de lo recién hallado es que, dado que la amplitud en el sitio **A** y **D** es nula para todo z , no existirá movilidad de los anillos para ningún valor de k ni de P , lo que significa que los estados de banda plana se ven inmersos en un potencial efectivo “infinito” [51, 52]. Adicionalmente, al agregar un gradiente de fase al estado localizado éste se vuelve incoherente, luego la luz se mantiene confinada en cuatro sitios de la red pero no corresponde a un modo de banda plana.

Por otro lado es necesario destacar que, debido a que el razonamiento expuesto para demostrar la no movilidad de los anillos se basa en que se cumple exactamente la configuración de amplitudes (8.18) en todos los pasos, es imperioso que estos modos no lineales sean estables, y por lo tanto se debe considerar la curva asociada a cada solución en la Figura 8.3.

Una manifestación de la estabilidad correspondiente a cada modo se muestra en la Figura 8.9(a), que da cuenta de una simulación numérica donde ambos anillos son inestables a potencia $P = 16$ ante perturbaciones iniciales $\delta_{\vec{n}}$ en las amplitudes y un kick $k = 0.5$. Complementariamente, la Figura 8.9(b) ilustra el caso $P = 48$ para las mismas condiciones iniciales. Suponiendo que el modo localizado de la banda plana inferior se estabiliza a alta potencia (como predice la Figura 8.3), entonces (8.18) se cumple, y por ende la luz no debiese escapar hacia las celdas vecinas. En efecto, la luz fluctúa entre el lado izquierdo del anillo (formado por **B** y **F**) y el lado derecho de éste (compuesto por **C** y **E**), generando una oscilación de la posición horizontal del centro de masas, y demostrando a su vez consistencia entre la teoría y los cálculos numéricos.

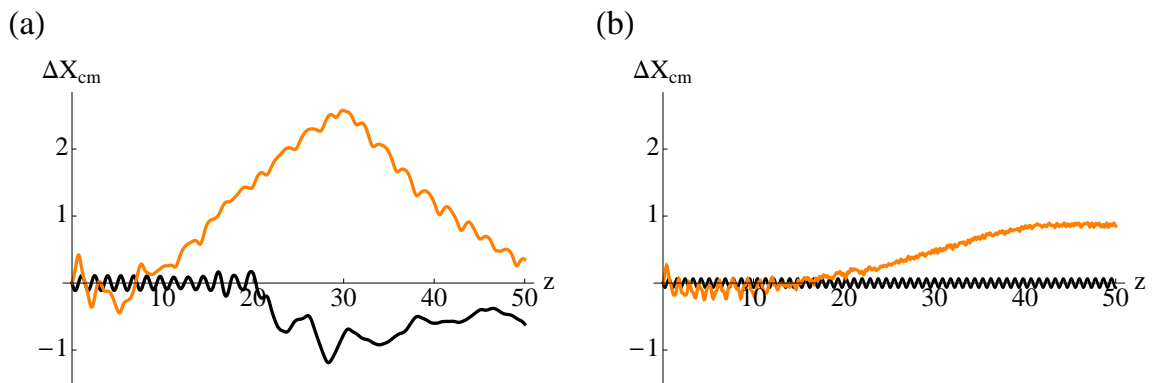


Figura 8.9: Desplazamiento de la posición horizontal del centro de masas en función de z para los modos de banda plana, inyectados con un gradiente de fase $k = 0.5$ a potencias (a) $P = 16$ y (b) $P = 48$. La curva anaranjada (negra) representa el modo no lineal de la banda plana superior (inferior), donde cada amplitud $\psi_{\bar{n}}$ no nula de los anillos fue perturbada inicialmente con $\delta_{\bar{n}} = |\psi_{\bar{n}}|/100$.

Capítulo 9

Cálculo de modos localizados

En los capítulos 5, 6 y 7 se exploraron arreglos periódicos de guías de onda que tienen la particularidad de poseer al menos una banda plana. Esta curva sin dispersión, como se estudió, da paso a un modo localizado en el sistema, cuyo perfil fue presentado en todos los casos sin ahondar en su origen. A modo de complemento, el objetivo del presente capítulo es, mediante argumentos sencillos, explicar cómo encontrar el modo localizado de un sistema que posee banda plana, hallando explícitamente como ejemplo los anillos pertenecientes a la red de Lieb y la cinta de Grafeno.

Como se ha planteado de manera teórica y observado experimentalmente, un modo de banda plana es localizado espacialmente. Sin embargo, tanto la relación de dispersión como los autoestados del sistema surgen de la consideración de soluciones de extensión igual a las dimensiones del arreglo [6]. Entonces, si se comienza utilizando ondas planas para resolver las ecuaciones tipo Schrödinger, el origen de un estado altamente localizado es lo que se busca entender. La explicación se halla planteando el proceso inverso, es decir, dado un modo localizado, se propone la existencia de un estado formado por la replicación de anillos en los distintos lugares del arreglo. Si lo anterior se cumple y es posible hallar dicho perfil extendido, será posible identificar de manera directa los modos localizados para sistemas con banda plana.

Con el fin de poner a prueba lo planteado y a modo de ejemplo, se trabajará con la red de Lieb, cuya geometría y anillo se ilustran en la Figura 9.1. Primeramente, es necesario notar que si la banda plana posee N estados (y se consideran condiciones de borde periódicas), entonces al asociar un anillo a cada modo resultan N soluciones localizadas en la red, cada una en una posición distinta. Esto quiere decir que

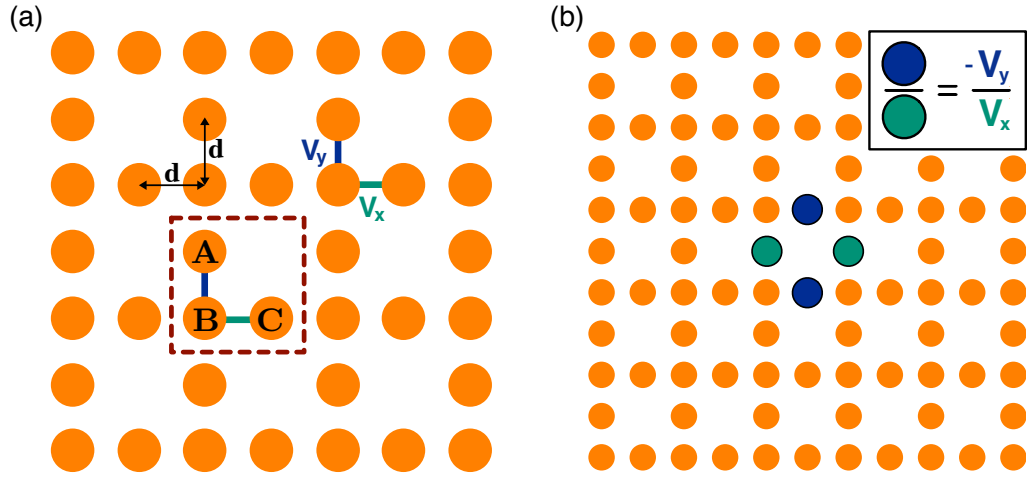


Figura 9.1: (a) Red de Lieb. La distancia entre guías cercanas es d y los acoplamientos vertical y horizontal son V_y y V_x , respectivamente. La zona segmentada corresponde a la celda unitaria, que posee los sitios **A**, **B** y **C**. (b) Modo localizado de banda plana. Éste consta de cuatro sitios, donde las amplitudes vienen dadas por $C/A = -V_y/V_x$, como muestra el cuadro inserto.

moverse de un modo a otro en la estructura de bandas equivale a mover un anillo de una ubicación a otra dentro del arreglo.

Teniendo en cuenta además que los estados localizados en distintas zonas del sistema son linealmente independientes, es sencillo inferir que para formar modos extendidos deben efectuarse combinaciones lineales de todos los anillos existentes en la red.

Se desea entonces, combinando soluciones compactas, generar un perfil (para la guía de onda ubicada en la posición \vec{n}) de la forma

$$u_{\vec{n}} = \{A, B, C\}e^{i\vec{k}\cdot\vec{n}}, \quad (9.1)$$

donde la amplitud a considerar depende del sitio de la celda unitaria, como se muestra en la Figura 9.1(a).

Teniendo en mente la solución que se quiere construir, se suman todos los anillos existentes en el arreglo de Lieb recordando que se tienen condiciones de borde periódicas, lo que da paso a una excitación completamente extendida (con $\lambda = 0$, ya que se están mezclando modos de igual frecuencia) y que cumple la condición (9.1) con $A = -V_x C/V_y$ y $B = 0$.

Además, el modo recién obtenido satisface $\vec{k} \cdot 2d\hat{x} = 2\pi j$ y $\vec{k} \cdot 2d\hat{y} = 2\pi m$, con j y

m enteros (ya que la configuración de amplitudes en la celda unitaria sólo se replica en la red). Por lo tanto, el estado con $\vec{k} = j\pi\hat{x}/d + m\pi\hat{y}/d$ y las amplitudes A , B y C descritas corresponde al perfil extendido buscado. En particular, se considerará que el vector de onda solución es $\vec{k} = \vec{0}$, por ser el que pertenece a la primera zona de Brillouin.

Es importante aquí notar que, dado que sólo existe un autoestado con $\vec{k} = \vec{0}$, la relación entre las amplitudes de la celda unitaria y \vec{k} es unívoca, por lo que es posible realizar el proceso inverso y obtener A , B y C a partir del vector de onda. Usando esto como punto de partida y a modo de generalización, el procedimiento para hallar estados localizados pasa a ser descrito a continuación.

Dado un arreglo periódico que posee banda plana, se escribe el problema de autovalores considerando $\vec{k} = \vec{0}$ y el valor de la frecuencia λ asociada a la banda plana. Una vez encontrado el autovector de la celda unitaria, debe bosquejarse el modo extendido correspondiente a la solución hallada (es decir, deben replicarse las amplitudes de la celda unitaria en varias celdas del arreglo). Posteriormente se inspecciona visualmente el anillo, teniendo en mente que el estado que se tiene es simplemente la suma de todos los modos localizados existentes.

Se procede a buscar ahora, mediante el método descrito y como forma de prueba, el estado compacto de la red de Lieb. Con este fin se calcula, como primer paso, el autovector de la celda unitaria asociado a $\vec{k} = \vec{0}$, que según lo obtenido en el capítulo 5 surge del problema de autovalores

$$\begin{pmatrix} 0 & 2V_y & 0 \\ 2V_y & 0 & 2V_x \\ 0 & 2V_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Como se desea hallar el modo de la banda plana $\lambda = 0$, al reemplazar la frecuencia las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned} 2V_y B &= 0, \\ 2V_y A + 2V_x C &= 0, \\ 2V_x B &= 0, \end{aligned}$$

que conducen a las amplitudes

$$B = 0, \quad A = -\frac{V_x}{V_y} C. \quad (9.2)$$

El perfil resultante con esta configuración de amplitudes, al considerar (por simplicidad y a modo de ilustración) $V_x = V_y$ y $C = 2$, se muestra en la parte izquierda de la Figura 9.2.

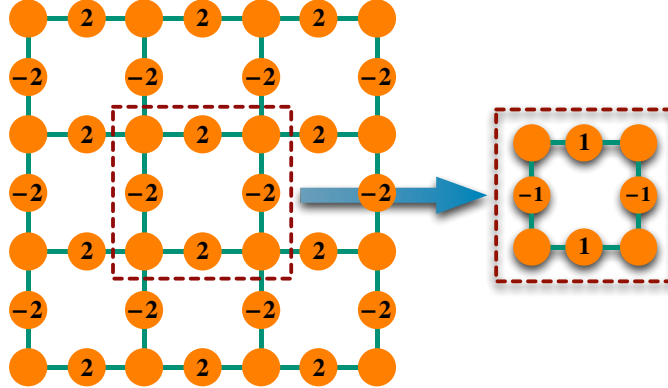


Figura 9.2: Modo extendido en la red de Lieb de la forma (9.1), con $\vec{k} = \vec{0}$ y amplitudes dadas por (9.2), donde se ha considerado $V_x = V_y$ y $C = 2$. El anillo contenido dentro del sistema se muestra en la zona derecha, cuyas amplitudes disminuyen a la mitad al ser aislado.

Como puede observarse, el estado extendido corresponde a todas las celdas unitarias con la misma configuración de amplitudes. En particular es posible notar, mediante simple inspección, que el perfil global es una mera repetición de un modo localizado, descrito en el lado derecho de la Figura 9.2, y cuyas amplitudes son la mitad de las que adquiere al sumarle los anillos contiguos.

A modo de corroboración, es clave verificar que el estado compacto encontrado no difractará en la red, para lo cual se deben buscar los sitios por donde podría escapar luz. En este caso, las guías **B** son las que conectan el modo de banda plana con el resto del arreglo, por lo que debe analizarse la dinámica en ese lugar. Dado que $A = -C$, siempre ocurrirá interferencia de tipo destructiva en los sitios **B**, impidiendo que se genere amplitud, y manteniendo el perfil del anillo.

Utilizando el procedimiento propuesto, se desea ahora encontrar (a primeros vecinos) los modos localizados en la cinta de Grafeno, para lo cual se reescribe la ecuación de

autovalores (6.2) usando $M(\vec{k} = \vec{0})$

$$\begin{pmatrix} 0 & V_2 & 0 & V_1 & 0 & V_2 \\ V_2 & 0 & V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_1 & 0 & V_2 & 0 & 0 \\ V_1 & 0 & V_2 & 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_2 & 0 & V_1 \\ V_2 & 0 & 0 & 0 & V_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix}.$$

Al considerar la banda plana superior $\lambda = V_1$ y resolver el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$A = D = 0, \quad B = C, \quad E = -C, \quad F = E, \quad (9.3)$$

perfil que describe el anillo mostrado en la Figura 6.4(a).

Por otro lado, si ahora se reemplaza $\lambda = -V_1$, al despejar las amplitudes se llega a

$$A = D = 0, \quad B = -C, \quad E = -C, \quad F = -E, \quad (9.4)$$

configuración que da cuenta del modo compacto ilustrado en la Figura 6.4(b).

Es necesario en este paso hacer notar que, debido al nulo solapamiento entre los anillos del sistema, el modo extendido con $\vec{k} = \vec{0}$ en ambos casos ($\lambda = \pm V_1$) corresponde simplemente al estado localizado replicado en todas las celdas unitarias (hexágonos), por lo que no es menester inspeccionar el perfil para hallarlo.

Como extensión de lo realizado, el proceso para obtener el modo localizado fue ejecutado en otros sistemas de banda plana, con un resultado exitoso en todos los casos. Los arreglos cuasi unidimensionales analizados se muestran en la Figura 9.3, donde sus respectivos anillos se representan considerando redes isotrópicas (excepto en la red tipo Diente de Sierra).

A modo de antecedente, los sistemas considerados en la Figura 9.3 han sido presentados en estudios teóricos y/o experimentales basados en el modelo discreto [27, 38, 53, 54]. Sin embargo, a pesar de hacer mención a su existencia y mostrar sus propiedades, en ningún caso se ha explicitado la derivación del anillo correspondiente. Debido a esto, el proceso para hallar los modos localizados se presenta como una herramienta muy útil a la hora de comprender el origen (tanto matemático como físico) de dichos estados. Además, las geometrías presentadas (junto con la red tipo Kagome, cuyo estudio y deducción del modo compacto se presenta en [55]) constituyen gran parte de los sistemas conocidos que poseen banda plana, lo que posiciona

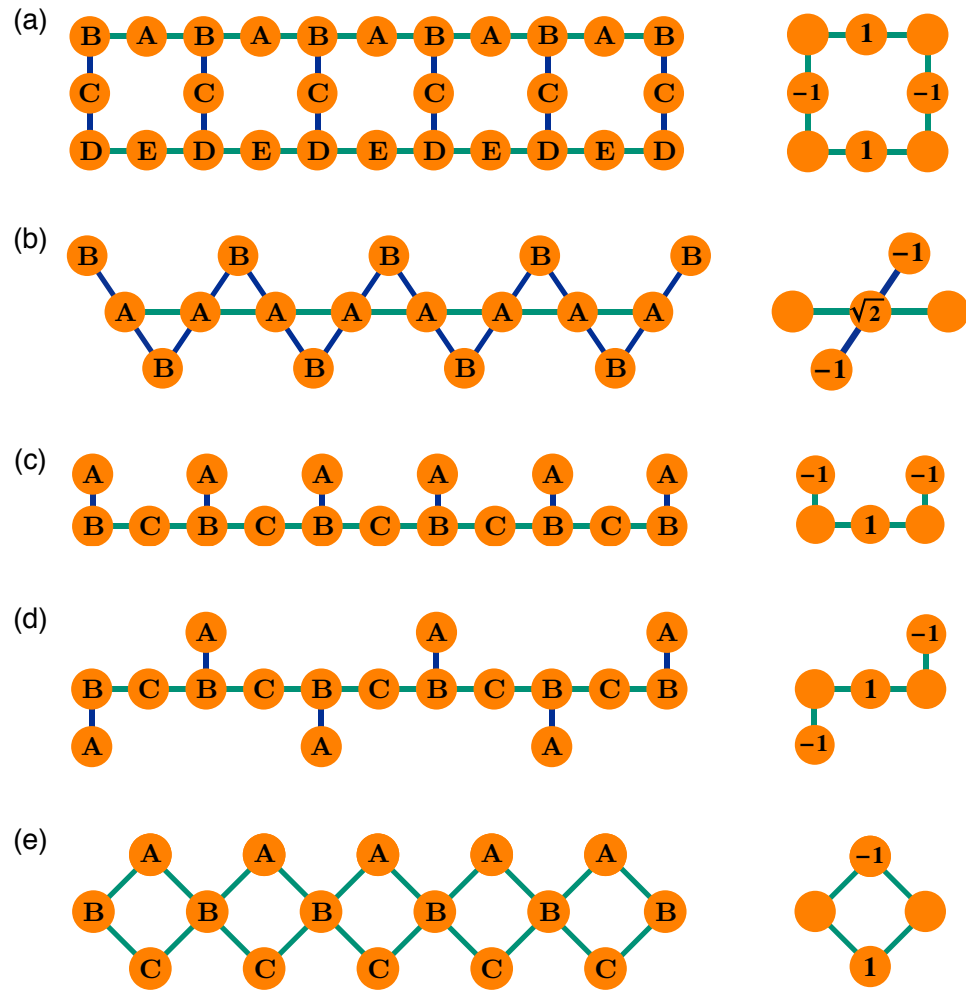


Figura 9.3: Arreglos cuasi unidimensionales que poseen banda plana, donde las líneas de distinto color indican distinto acoplamiento, y cuyo modo compacto se muestra en el lado derecho. (a) Cinta tipo Lieb. (b) Red tipo Diente de Sierra. Arreglo (c) Stub estándar (Lieb unidimensional) y (d) Stub modificado. (e) Cinta de Diamante. A modo de ilustración, en todos los casos (exceptuando el arreglo tipo Diente de Sierra) los anillos se grafican considerando acoplamientos iguales.

al método propuesto como “general”.

Finalmente es importante destacar que, dado que existen N estados localizados linealmente independientes en la cinta, es posible hacer un “cambio de base” en la banda plana y describir todos los modos de dicha superficie como una combinación

lineal de los anillos. En la nueva base (cuya existencia se evidencia al considerar $\vec{k} = \vec{0}$), cada modo compacto deja de ser descrito mediante su vector de onda \vec{k} , y viene dado por su posición \vec{R} en el arreglo. De esta forma, es posible cambiar la representación de los estados de la banda plana desde una descripción en el espacio recíproco a una etiqueta en el espacio real, sin pérdida alguna de información.

Capítulo 10

Conclusiones

Durante esta tesis se han estudiado en profundidad cristales fotónicos de geometrías no triviales utilizando teoría, simulaciones numéricas y observaciones experimentales. A lo largo de toda la investigación se han considerado como modelos descriptivos de la dinámica las ecuaciones tipo Schrödinger discreta lineal y no lineal, que fueron derivadas al comienzo del presente trabajo. En lo que al montaje respecta, se ha diseñado un novedoso sistema de generación y transporte de imágenes con luz (usando como pieza clave moduladores espaciales), lo que ha hecho posible la creación de condiciones iniciales arbitrarias con el fin de observar los fenómenos deseados.

Con las herramientas descritas se ha indagado en la cadena unidimensional (ordenada y con desorden no diagonal), la red tipo Lieb y la cinta de Grafeno. Estas dos últimas configuraciones tienen la particularidad de poseer en su espacio recíproco al menos una banda completamente plana, la cual alberga un tipo de estado localizado no difractante. Teniendo en cuenta lo anterior, se han inspeccionado y destacado las bondades que dichos sistemas presentan a la hora de ser producidos experimentalmente, prediciendo la posible conservación de los anillos ante contextos como anisotropía.

Lógicamente, el desafío experimental correspondía a la excitación de tales modos de banda plana, lo que se logró mediante el correcto funcionamiento del método desarrollado junto a un constante monitoreo de las propiedades de la condición inicial y de salida (por ejemplo, la estructura de fase) [22].

Por otro lado, en esta exploración se ha reportado la observación de dipolos en un arreglo unidimensional, que pueden pensarse como orbitales p de los electrones, y

que fueron generados mediante un procedimiento iterativo. Tal suceso condujo al estudio de las propiedades lineales de aquellos modos excitados, contrastándolas con las pertenecientes al estado base de la guía [28].

Posteriormente, y dado el último resultado mencionado, se extendió el modelo discreto considerando cada guía de onda como bimodal en la cinta tipo Grafeno. Lo anterior da paso a un modelo más complejo e interesante, que produce (en teoría) anillos híbridos para cierta condición de los acoplamientos. No obstante, dicha condición no se cumplía experimentalmente, por lo que el sistema se desacopló y condujo a dinámicas independientes para cada perfil en la guía. Esto implicaba la existencia de un anillo puramente dipolar, la cual se manifestó en la primera observación de esta clase de fenómenos en un contexto óptico [42].

Como siguiente desafío puramente numérico se analizó la cinta de Grafeno a primeros vecinos, considerándola como un sistema con no linealidad tipo cúbica o Kerr enfoncante. Aquí se rastreó la existencia de familias de soluciones localizadas (de uno a cuatro sitios) y se calculó su energía, potencia, grado de participación y estabilidad lineal. En particular, el objetivo de este estudio se relacionaba con la movilidad de soluciones que (cumpliéndose ciertos criterios y añadiendo un gradiente de fase a la condición inicial) se desplazarían a través de la cinta, transformándose continuamente en otros perfiles no lineales y retomando posteriormente su estructura. Luego de encontrar dos regiones de parámetros que asomaban como buenas candidatas para observar movilidad, se presenció dicho fenómeno en una de ellas, mientras que la zona restante dio paso a un desplazamiento local del modo no lineal en juego. Por su parte, los anillos del arreglo resultaron ser compactones [45] (soluciones exactas de la DNLS) que surgen desde las bandas planas y que presentan movilidad nula.

Finalmente, se ha presentado una discusión teórica con respecto al origen de los estados localizados de algunos arreglos con bandas planas, describiendo un procedimiento que permite hallar los anillos de prácticamente todas las geometrías que poseen bandas con cero dispersión.

A modo de conclusión general, la presente tesis ha demostrado que la evolución de

la luz en cristales fotónicos es bien descrita por las ecuaciones tipo Schrödinger, pudiendo realizarse simulaciones numéricas y predicciones teóricas cuya correspondencia con el experimento es evidente. En este último aspecto, el montaje desarrollado se posiciona como una herramienta versátil y precisa, capaz de generar todo tipo de condiciones iniciales a ser inyectadas al sistema.

Por otro lado, es importante destacar que los resultados aquí expuestos pueden ser extrapolados a otros tipos de sistemas discretos, como un electrón en un potencial periódico [3–5]. En particular, existe una analogía directa entre la propagación de luz en cristales fotónicos y la evolución de átomos fríos en redes ópticas [56], por lo que las observaciones presentadas pueden ser reobtenidas en este contexto y extendidas en función de sus propiedades particulares.

Referencias

- [1] Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N. & Meade, R. D. Photonic crystals. *Princeton University Press* (2008).
- [2] Skorobogatiy, M. & Yang, J. Fundamentals of photonic crystal guiding. *Cambridge University Press* (2009).
- [3] Kittel, C. Introduction to solid state physics. *Wiley* (2004).
- [4] Ashcroft, N. W. & Mermin, N. D. Solid state physics. *Harcourt College* (1976).
- [5] Simon, S. H. The oxford solid state basics. *Oxford University Press* (2013).
- [6] Bloch, F. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für Physik* **52**, 555–600 (1929).
- [7] Christodoulides, D. N., Lederer, F. & Silberberg, Y. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature* **424**, 817–823 (2003).
- [8] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloe, F. Quantum mechanics. *Wiley* (1991).
- [9] Allio, R. *et al.* Photorefractive writing and probing of anisotropic linear and nonlinear lattices. *Journal of Optics* **17**, 025101 (2015).
- [10] Kivshar, Y. S. & Agrawal, G. P. Optical solitons. *Academic Press* (2003).
- [11] Szameit, A. & Nolte, S. Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **43**, 163001 (2010).
- [12] Bellouard, Y. *et al.* Stress-state manipulation in fused silica via femtosecond laser irradiation. *Optica* **3**, 1285–1293 (2016).

- [13] Morandotti, R., Peschel, U., Aitchison, J. S., Eisenberg, H. S. & Silberberg, Y. Experimental observation of linear and nonlinear optical bloch oscillations. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4756–4759 (1999).
- [14] Eisenberg, H. S., Silberberg, Y., Morandotti, R., Boyd, A. R. & Aitchison, J. S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3383–3386 (1998).
- [15] Garanovich, I. L., Longhi, S., Sukhorukov, A. A. & Kivshar, Y. S. Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides. *Physics Reports* **518**, 1–79 (2012).
- [16] Vicencio, R. Dinámica controlada de solitones discretos. *Universidad de Chile* (2004).
- [17] Schwartz, T., Bartal, G., Fishman, S. & Segev, M. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature* **446**, 52–55 (2007).
- [18] Fedele, F., Yang, J. & Chen, Z. Defect modes in one-dimensional photonic lattices. *Opt. Lett.* **30**, 1506–1508 (2005).
- [19] Makasyuk, I., Chen, Z. & Yang, J. Band-gap guidance in optically induced photonic lattices with a negative defect. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 223903 (2006).
- [20] Lederer, F. *et al.* Discrete solitons in optics. *Physics Reports* **463**, 1–126 (2008).
- [21] Fleischer, J. W., Carmon, T., Segev, M., Efremidis, N. K. & Christodoulides, D. N. Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 023902 (2003).
- [22] Vicencio, R. A. *et al.* Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245503 (2015).
- [23] Mukherjee, S. *et al.* Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245504 (2015).
- [24] Vicencio, R. A. & Johansson, M. Discrete flat-band solitons in the kagome lattice. *Phys. Rev. A* **87**, 061803 (2013).

- [25] Xia, S. *et al.* Demonstration of flat-band image transmission in optically induced lieb photonic lattices. *Opt. Lett.* **41**, 1435–1438 (2016).
- [26] Zong, Y. *et al.* Observation of localized flat-band states in kagome photonic lattices. *Opt. Express* **24**, 8877–8885 (2016).
- [27] Real, B. *et al.* En preparación .
- [28] Cantillano, C. *et al.* Observation of dipolar transport in one-dimensional photonic lattices. *Science Bulletin* **62**, 339 – 344 (2017).
- [29] Xia, S., Song, D., Zong, Y., Tang, L. & Chen, Z. Observation of self-trapping and rotation of higher-band gap solitons in two-dimensional photonic lattices. *Opt. Express* **23**, 4397–4405 (2015).
- [30] Morales-Inostroza, L. & Vicencio, R. A. Simple method to construct flat-band lattices. *Phys. Rev. A* **94**, 043831 (2016).
- [31] Boyd, R. W. Nonlinear optics. *Academic Press* (2008).
- [32] Snyder, A. W. & Love, J. D. Optical waveguide theory. *Chapman and Hall* (1983).
- [33] Anderson, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* **109**, 1492–1505 (1958).
- [34] Segev, M., Silberberg, Y. & Christodoulides, D. N. Anderson localization of light. *Nature Photonics* **7**, 197–204 (2013).
- [35] Diebel, F., Leykam, D., Kroesen, S., Denz, C. & Desyatnikov, A. S. Conical diffraction and composite lieb bosons in photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 183902 (2016).
- [36] Guzmán-Silva, D. *et al.* Experimental observation of bulk and edge transport in photonic lieb lattices. *New Journal of Physics* **16**, 063061 (2014).
- [37] Guzmán-Silva, D. *et al.* Multistable regime and intermediate solutions in a nonlinear saturable coupler. *Phys. Rev. A* **87**, 043837 (2013).

- [38] Weimann, S. *et al.* Transport in sawtooth photonic lattices. *Opt. Lett.* **41**, 2414–2417 (2016).
- [39] Shockley, W. On the surface states associated with a periodic potential. *Phys. Rev.* **56**, 317–323 (1939).
- [40] Tamm, I. On the possible bound states of electrons on a crystal surface. *Phys. Z. Soviet Union* **1**, 733 (1932).
- [41] Plotnik, Y. *et al.* Observation of unconventional edge states in ‘photonic graphene’. *Nature Materials* **13**, 57–62 (2014).
- [42] Morales-Inostroza, L. *et al.* En preparación .
- [43] Vicencio, R. A., Real, B., Cantillano, C. & Johansson, M. En preparación .
- [44] Flach, S., Kladko, K. & MacKay, R. S. Energy thresholds for discrete breathers in one-, two-, and three-dimensional lattices. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1207–1210 (1997).
- [45] Khare, A., Rasmussen, K., Samuelsen, M. R. & Saxena, A. Exact solutions of the saturable discrete nonlinear schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38**, 807 (2005).
- [46] Johansson, M. Discrete nonlinear schrödinger equations. *Encyclopedia of Non-linear Science* 213–215 (2005).
- [47] Naether, U., Vicencio, R. A. & Stepić, M. Mobility of high-power solitons in saturable nonlinear photonic lattices. *Opt. Lett.* **36**, 1467–1469 (2011).
- [48] Vicencio, R. A. & Johansson, M. Discrete soliton mobility in two-dimensional waveguide arrays with saturable nonlinearity. *Phys. Rev. E* **73**, 046602 (2006).
- [49] Maimistov, A. I. On the stability of flat-band modes in a rhombic nonlinear optical waveguide array. *Journal of Optics* **19**, 045502 (2017).
- [50] Naether, U. Spatially localized modes in discrete nonlinear optical systems. *Universidad de Chile* (2012).

- [51] Kivshar, Y. S. & Campbell, D. K. Peierls-nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes. *Phys. Rev. E* **48**, 3077–3081 (1993).
- [52] Naether, U., Vicencio, R. A. & Johansson, M. Peierls-nabarro energy surfaces and directional mobility of discrete solitons in two-dimensional saturable nonlinear schrödinger lattices. *Phys. Rev. E* **83**, 036601 (2011).
- [53] López-González, D. & Molina, M. I. Linear and nonlinear compact modes in quasi-one-dimensional flatband systems. *Phys. Rev. A* **93**, 043847 (2016).
- [54] Mukherjee, S. & Thomson, R. R. Observation of localized flat-band modes in a quasi-one-dimensional photonic rhombic lattice. *Opt. Lett.* **40**, 5443–5446 (2015).
- [55] Bergman, D. L., Wu, C. & Balents, L. Band touching from real-space topology in frustrated hopping models. *Phys. Rev. B* **78**, 125104 (2008).
- [56] Morsch, O. & Oberthaler, M. Dynamics of bose-einstein condensates in optical lattices. *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179–215 (2006).

Publicaciones

“Photorefractive writing and probing of anisotropic linear and nonlinear lattices”

Journal of Optics

Publicado el 14 de Enero de 2015

Photorefractive writing and probing of anisotropic linear and nonlinear lattices

Raphaël Allio^{1,2}, Diego Guzmán-Silva¹, Camilo Cantillano¹,
Luis Morales-Inostroza¹, Dany Lopez-Gonzalez¹, Sebastián Etcheverry³,
Rodrigo A Vicencio¹ and Julien Armijo¹

¹Departamento de Física, MSI-Nucleus on Advanced Optics, and Center for Optics and Photonics, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile

²Université de Rennes I, France

³Center for Optics and Photonics, Universidad de Concepción, Concepción, Chile

E-mail: julienarmijo@gmail.com

Received 30 September 2014, revised 19 November 2014

Accepted for publication 28 November 2014

Published 14 January 2015



Abstract

We study experimentally the writing of one- and two-dimensional photorefractive lattices, focusing on the often overlooked transient regime. Our measurements agree well with theory, in particular concerning the ratio of the drift to diffusion terms. We then study the transverse dynamics of coherent waves propagating in the lattices, in a few novel and simple configurations. For defocusing linear waves with broad transverse spectrum, we remark that both the intensity distributions in real space ('discrete diffraction') and Fourier space ('Brillouin zone spectroscopy') reflect the Bragg planes and band structure. For nonlinear waves, we observe modulational instability and discrete solitons formation in time domain. We discuss also the non-ideal effects inherent to the photo-induction technique: anisotropy, residual nonlinearity, diffusive term, non-stationarity.

Keywords: photorefractive lattices, diffraction, wave propagation

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

The photorefractive effect is the process by which refractive index changes can be induced in photosensitive crystals as a consequence of illumination with light patterns. This effect is complex, intrinsically nonlocal and anisotropic, and features various regimes [1–5]. In the last decades, the photorefractive effect has been often used for generating waveguide arrays (photonic crystals) and study the linear and nonlinear propagation of light waves inside them. Remarkable realizations included the observation of discrete optical solitons [6], discrete optical vortices in 2D lattices [7], or Anderson localization of light in disordered landscapes [8], among many others.

Despite these numerous works, systematic studies of photorefractive lattice writing and wave propagation inside them, providing quantitative comparisons of measurements with theories, are rare. In this paper, we study the photorefractive lattice writing process, especially in the often

overlooked—but nonetheless relevant—transient regime, and several cases of wave propagation, providing some new observations in simple configurations. We compare measurements with theories and in some cases, for the first time to our knowledge, to simulations with only directly calibrated (and non-adjustable) parameters, using a new lattice calibration method [9]. We discuss overall the validity of the various approximations, and the strength of non-ideal effects, to improve our understanding of photorefractive lattice experiments.

In section 2, we briefly review the standard theory of photorefractive writing and probing. In section 3, we study the transient photorefractive writing, for the simplest case of a 1D lattice. We find good agreement with standard theory concerning the role of various parameters, and the ratio between the drift and diffusion photorefractive terms which is linear in lattice period. In section 4, we study the propagation of simple linear and nonlinear waves in regular lattices. We describe an interesting analogy between the linear patterns of

discrete diffraction (in real space) and Brillouin zone (BZ) spectroscopy (in Fourier space), the Bragg planes and band structure being apparent on both types of pictures, and we compare both measurements to simulations. Finally, we study nonlinear effects in some new configurations. Modulational instability (MI) is observed in a quasi-1D geometry at the center of the BZ for a focusing nonlinearity, and is absent for a defocusing one. The transition from discrete diffraction to a discrete soliton is observed in time, due to the differential writing speed for the lattice and nonlinear effects.

2. Theory of photorefractive lattice writing and probing

2.1. Photorefractive effect

Let us first recall the relevant theoretical frame. The basic mechanism of the photorefractive effect is the photogeneration of mobile charge carriers, generally assumed to be only electrons, which are then subject to displacement in the crystal, purely diffusive (from light to shadow), or driven by an externally applied electric field \mathbf{E}_0 . Their recombination at different locations gives rise to a permanent space-charge electric field \mathbf{E}_{sc} , which, via the linear (Pockels) electro-optic effect, creates modulations of the refractive index inside the crystal.

In the particular case of the most often used strontium barium niobate (SBN) crystals, which belong to the point 4 mm symmetry group, and assuming \mathbf{E}_{sc} oriented along the crystalline axis, transverse direction y (which is valid in the drift dominated case, see below), the extraordinary and ordinary refractive index changes in the crystal can be written (see, e.g., [10])

$$\delta n_e = \frac{1}{2} n_e^3 r_{33} E_{sc}, \quad (1)$$

$$\delta n_o = \frac{1}{2} n_o^3 r_{13} E_{sc}, \quad (2)$$

where n_e and n_o are respectively the extraordinary and ordinary refractive indexes in zero electric field, and r_{ij} the relevant electro-optic coefficients⁴. The standard model used to describe the dynamics of charge carrier generation, displacement, and the resulting field and refractive index modulations, is due to Kukhtarev *et al* [4]. Within this model, most works consider only the steady-state, but the transient regime can also be very relevant experimentally, as we show below.

2.1.1. Isotropic approximation. As a first step, theoretical works have treated purely 1D situations [11, 12], considering $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{y}$ and $\mathbf{E}_{sc} = E_{sc} \mathbf{y}$. In this frame, neglecting the dynamics, and any photovoltaic contribution (which is valid for SBN crystals), the Kukhtarev model allows to derive the

⁴ Here only one component of electric field contributes, this is due to the particular symmetry of SBN crystals [10].

stationary space charge electric field

$$E_{sc}^\infty = \frac{1}{1 + \tilde{I}} \left(E_0 - \frac{k_B T}{e} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y} \right), \quad (3)$$

where T is the temperature, k_B the Boltzmann constant, e the electron charge, and $\tilde{I} = I_W/I_{sat}$ is the writing beam intensity I_W normalized to the ‘dark intensity’ or ‘saturation intensity’ I_{sat} , which is a phenomenological parameter accounting for the probability that electrons are thermally excited in the conduction band. From equation (3) one obtains the stationary refractive index change

$$\delta n^\infty = \delta n_{max}^\infty \frac{1}{1 + \tilde{I}}, \quad (4)$$

where we note

$$\delta n_{max}^\infty = 0.5 n_e^3 r_{33} E_{sc}^\infty. \quad (5)$$

Note that the sign of the photorefractive effect depends on the sign of E_{sc} , thus, nonlinearities of focusing or defocusing type can be generated.

The simplest case is when the diffusion term can be neglected (which we check in section 4), then the non-local contribution disappears and one simply has

$$E_{sc} = \frac{E_0}{1 + \tilde{I}}. \quad (6)$$

The isotropic approximation consists in assuming that this is valid not only as a scalar expression, but also, vectorially, i.e., that equation (6) can be written with the vectorial electric fields \mathbf{E}_{sc} and \mathbf{E}_0 (see, e.g., [6]). We are not aware of quantitative studies or verifications of the validity of such approximation.

2.1.2. Full anisotropic model. The isotropic model of equations (3) and (6) is useful in 1D, and to intuitively grasp the interplay between the different physical mechanisms, for example, to compare the importance of diffusive versus drift mechanisms. However, in the general case of 2D refractive index landscapes, the intrinsic crystal anisotropy and the electric field \mathbf{E}_0 strongly destroys the isotropy of the system.

To describe the photorefractive effect in the general case, an anisotropic model has been proposed by Zozulya and Anderson [5], which has the structure of a nonlinear problem for the electrostatic potential $\phi = \phi_0 - |E_0|y$ such that

$$\mathbf{E}_{sc} = -\nabla\phi, \quad (7)$$

where the light-induced potential ϕ_0 is separated from the contribution of the external field $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{y}$. Starting from the 3D equations of the Kukhtarev model, assuming a slowly varying light intensity field I , one obtains, in the stationary

regime, the governing equation [5, 10]

$$\nabla^2 \phi_0 + \nabla \ln(1 + \tilde{I}) \nabla \phi_0 = |E_0| \frac{\partial \ln(1 + \tilde{I})}{\partial y} - \frac{k_B T}{e} \left[\nabla^2 \ln(1 + \tilde{I}) + \left(\nabla \ln(1 + \tilde{I}) \right)^2 \right], \quad (8)$$

In the right hand side of equation (8), the first term proportional to $|E_0|$ is the drift term, and the second, proportional to $\frac{k_B T}{e} = D\mu$ (where D is the diffusion coefficient and μ the electron mobility), the diffusive term.

If one neglects the diffusive effect (which we discuss in section 4), as, e.g., in [13–15], equation (8) becomes

$$\nabla^2 \phi_0 + \nabla \ln(1 + \tilde{I}) \nabla \phi_0 = |E_0| \frac{\partial \ln(1 + \tilde{I})}{\partial y}. \quad (9)$$

2.1.3. Time evolution of the refractive index. The temporal evolution of the photorefractive effect can have primary importance in experiments. In general, photorefractive recording follows a damped oscillatory behavior [2, 3], however for small index changes, and/or when the writing beam intensity I_W is so low that the associated timescale is much longer than the material's intrinsic microscopic timescales, the writing (and also erasing) processes are well described by an exponential dependence with writing time t_W as

$$\delta n = \delta n^\infty [1 - \exp(-t_W/\tau_W)]. \quad (10)$$

For our parameters, the time constant τ_W is determined by the rate of carrier generation set by I_W since all microscopic timescales are much shorter, thus we have [2]

$$\frac{1}{\tau_W} \propto I_W + I_{\text{sat}}, \quad (11)$$

and the exact value of τ_W depends on several parameters including the lattice period. For our parameters typically $\tau_W \sim 10 - 100$ s for linear lattice writing, while the development of nonlinear patterns is typically one order of magnitude slower (see section 4.2).

2.2. Wave propagation in a photo-written lattice

Linear case. Considering now (regardless of its origin) a transverse refractive index landscape $\delta n(x, y)$, invariant in z , the propagation of a wave of amplitude $\Psi(x, y, z)$ and vacuum wavelength $\lambda = 2\pi/k_0$ in the paraxial approximation obeys a transverse (2+1)D Schrödinger equation [16]

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{1}{2\beta_0} \nabla_\perp^2 \Psi - \frac{\beta_0}{n_0} \delta n(x, y) \Psi, \quad (12)$$

where $n_0 = n_e$, $\beta_0 = 2\pi n_0/\lambda$ is the propagation constant in the crystal, $\nabla_\perp^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ denotes the transverse laplacian operator, the longitudinal (propagation) coordinate $z \leftrightarrow t$ plays the role of the time t , and the potential $V(x, y)$ is here replaced by the refractive index, i.e. $V(x, y) \leftrightarrow -\delta n(x, y)$. The

correspondence to the Schrödinger equation is complete with the additional replacement of the particle mass by the refractive index $m \leftrightarrow n_0$ and the reduced Planck constant $\hbar/2\pi \leftrightarrow \lambda/2\pi$.

Nonlinear case. For more intense beams, photoexcitation of carriers by the probe beam does influence the refractive index pattern, i.e., nonlinear propagation occurs, and the stationary refractive index is also a function of the beam intensity I . In the general anisotropic case, one has to solve the system of equation (12) combined with equations (7) and (8) (or equation (9) if one neglects the diffusive contribution). This is done in several works (see, e.g., [13, 17]), and it allows to reach a fairly good agreement between simulations and measurements.

Sometimes one also finds the more simplified isotropic approximation, also neglecting the diffusive term, which consists in simply using equation (6) for the nonlinear problem. Then, the propagation of a probe beam in the crystal is approximated by a (2+1)D nonlinear Schrödinger equation (NLSE) with saturable nonlinearity in the form

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{1}{2\beta_0} \nabla_\perp^2 \Psi - \frac{\beta_0}{n_0} \delta n(x, y) \Psi - \Gamma \frac{\Psi}{1 + |\Psi|^2/I_{\text{sat}}}, \quad (13)$$

where $\Gamma = (1/2)k_0^2 n_e^3 r_{33} E_0$ is the effective nonlinear coefficient.

To get an idea of the importance of the photorefractive anisotropy in typical experiments, one can observe, in [5], the simulations using the full anisotropic model of equation (8), including the diffusive term, for a Gaussian beam propagating with attractive nonlinearity. In figures 4 and 7 of [5], one notes several differences in the refractive index profiles in the two transverse directions (y and x in our notations). In particular, the profiles in the c -axis direction display not only a local minimum, but also two local maxima aside of it, which has been observed experimentally in [18]. More complex situations have also been studied, for example the possibility to obtain a hybrid (focusing and defocusing) nonlinearity [15, 17]. Another consequence of the particularity of the photorefractive nonlinearity, is that even the formation of a continuous 2D soliton is not trivial, requiring specific parameter ranges, and has given rise to debate [19, 20].

3. Temporal study of photorefractive lattice writing

3.1. Experimental set-up

For inducing and studying photorefractive lattices, we use standard techniques, as sketched in figure 1. A cw laser beam at wavelength $\lambda = 532$ nm is split in two components of polarization. The ordinary polarized beam is used as a lattice writing beam, modulated in real space with a phase SLM (Holoeye Pluto) and dynamically filtered in Fourier space using an amplitude SLM (Holoeye LCR-1080). This configuration allows us to realize clean non-diffracting lattice beams in any 2D geometry, provided that the transverse spectrum of the lattice waves is contained in a circle [21]. On the other hand, the extraordinary polarized beam is used as a probe beam, which eventually is shapen anisotropically using a cylindrical lens, or defocusing with regular lenses. We use a $10 \times 5 \times 2$ mm³, 0.005% CeO₂ doped SBN:75 crystal,

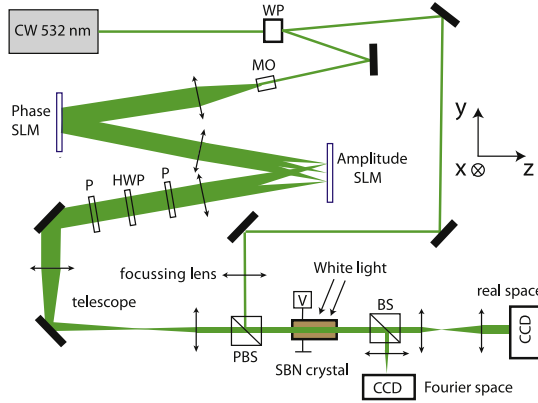


Figure 1. Experimental set-up. WP: Wollaston prism. MO: microscope objective. P: polarizer. HWP: half-wave plate. PBS: polarizing beam splitter. BS: beam splitter.

whose relevant electro-optic coefficients are $r_{33} = 1340 \text{ pm V}^{-1}$ and $n_{13} = 67 \text{ pm V}^{-1}$.⁵ We apply no background illumination during writing and, from the erasing time of lattice patterns in the dark (~ 1 day), we estimate the saturation (dark) intensity in our crystals $I_{\text{sat}} \sim 1 \mu\text{W cm}^{-2}$ i.e., we work at high saturation $I_W \gg I_{\text{sat}}$.

3.2. Writing efficiency in 1D lattices

In this section we present time-resolved measurements of the writing process for regular lattices, using a new calibration technique presented in [9]. For simplicity, we treat only 1D lattices oriented in the strong, c -axis direction y . As noted in [9], 2D lattices involves a higher degree of non-ideal effects, thus, 1D lattices are more favorable for carrying basic quantitative studies.

The experimental sequence consists in first writing a lattice during a writing time t_W with a writing beams of average intensity I_W , and a bias field E_0 . Noting the intensity-dependent refractive index modulation (the refractive index change minus its value at zero intensity)

$$\Delta n(I) = \delta n(I) - \delta n(0), \quad (14)$$

as in [9], we assume $\Delta n(I)$ proportional to the lattice intensity, i.e., of the form⁶

$$\Delta n(y) = \Delta n_0 \sin^2(k_L y/2 + \phi_L), \quad (15)$$

where $k_L = \pi/d$ and d is the lattice period.

⁵ In our notation, the c -axis of the crystal is y .

⁶ It is reasonable to assume a constant refractive index along z since the absorption coefficient for our crystals is $\alpha < 0.4 \text{ cm}^{-1}$ (source: Altechna). Assuming a sinusoidal refractive index profile may not seem valid because we work at high saturation $I_W \gg I_{\text{sat}}$ so that distortions are expected in the stationary regime. However, we work in the transient regime, where the writing speed is proportional to the intensity (see equation (11)), thus the local refractive index in is expected to be proportional to $I_W + I_{\text{sat}} \approx I_W$. Our sinusoidal assumption also neglects any parasitic nonlinear effects for the writing beam.

In a second step, we shut off the lattice waves and send a probing plane wave at very low intensity into the crystal. The intensity distributions at the crystal output face are recorded on the real space CCD camera, and integrated in the x direction so that we consider only profiles $I(y)$. To quantify the strength of the lattices, we use a fitting function, as in [9], of the form

$$I(y) = I_0 [1 + \alpha \cos(k_L y + \phi_1)], \quad (16)$$

where α is a modulation coefficient.

Analytic theories for the photorefractive effect are available in the steady-state regime (see section 2). However, observing the convergence and stabilization to a steady-state is not always easy to achieve in experiments, since we often observe parasitic effects and instabilities, especially for 2D lattices (see, e.g., the 2D lattices calibrations in [9]). On the other hand, it is much easier to extract meaningful information from the behavior at short times, where the refractive index is not yet strong and non-ideal effects are weaker. Last, but not least, the transient photorefractive regime gives access to adjustable lattice strength [9, 22]. Thus, we consider for our study the initial rate of refractive index change

$$v_0 = \left(\frac{\partial \Delta n_0}{\partial t_W} \right)_{t_W=0}. \quad (17)$$

To estimate v_0 from measured data, we plot the modulation ratio α as function of t_W and fit its initial behavior with an exponential function

$$\alpha = \alpha_\infty [1 - \exp(-t_W/\tau_W)]. \quad (18)$$

figure 2(a) shows some examples of this procedure, for $E_0 = 0$, $d = 10 \mu\text{m}$ and different writing beam intensities I_W . Our method for absolute calibration of Δn_0 [9] then allows to convert the initial slope $\partial \alpha / \partial t_W$ into v_0 . For moderate lattice strengths Δn_0 (which is often valid at short times), Δn_0 is simply proportional to α .

In figure 2(b), we show v_0 as function of I_W , for $d = 10 \mu\text{m}$, and for a drift-dominated regime ($E_0 = 0.8 \text{ kV cm}^{-1}$, squares), and a diffusion-dominated regime ($E_0 = 0$, circles). From equation (14), we have $\Delta n^\infty = -\delta n_{\text{max}}^\infty I_W / (I_W + I_{\text{sat}})$, and using equation (11) and $I_W \gg I_{\text{sat}}$ one sees that the initial writing speed is expected to be

$$v_0 = \frac{\Delta n^\infty}{\tau_W} \propto \delta n_{\text{max}}^\infty I_W, \quad (19)$$

i.e. simply linear in I_W . The data in figure 2(b) are in very good agreement with fits using equation (19) (solid lines). The ratio of the fitted slopes is 6.1, in good agreement with the theoretical expectation of 4.9 using equation (21).

In figure 2(c), we plot v_0 for a lattice of period $d = 10 \mu\text{m}$ as function of E_0 . The dependence is nearly linear, which is in agreement with the expectation from the isotropic model (equation (3)). The non-zero offset at $E_0 = 0$ is due to the diffusive term of the photorefractive effect. For our typical working value $E_0 = 1.5 \text{ kV cm}^{-1}$, this offset is small and thus

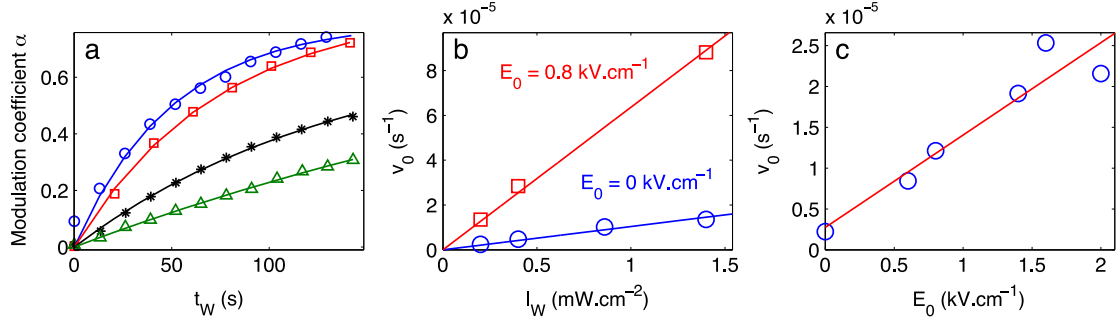


Figure 2. Influence of external parameters on writing efficiency for a 1D lattice of period $d = 10 \mu\text{m}$. (a) Determination of initial writing speed v_0 from fits of the modulation coefficient α as function of writing time t_W with (10), for $E_0 = 0 \text{ V}$, and average writing beam intensities $I_W = 0.2, 0.4, 0.86, 1.4 \text{ mW cm}^{-2}$ (from bottom to top). (b) Initial writing speed v_0 versus I_W for $E_0 = 0$ and 0.8 kV cm^{-1} . Solid lines show linear fits according to equation (19). (c) Initial writing speed v_0 versus applied field E_0 , for $I_W = 0.2 \text{ mW cm}^{-2}$. The solid line is a linear fit to the data.

we reasonably consider that the photorefractive effect lies in the drift-dominated regime.

3.3. Drift versus diffusive photorefractive effects

Let us quantify the relative importance of the drift versus diffusion terms. For fixed lattice period d and writing intensity I_W , according to equation (19), we expect that the initial writing speed is simply proportional to $\delta n_{\text{max}}^{\infty}$ given by equations (3) and (5). Writing the modulation of electric field $\Delta E = E_{\text{sc}}(I) - E_0 = \Delta E^{\text{drift}} + \Delta E^{\text{diff}}$ as

$$\Delta E = \frac{1}{1 + \tilde{I}} \left(-E_0 \tilde{I} - \frac{k_B T}{e} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y} \right), \quad (20)$$

one obtains, using equation (16) and considering only the writing velocity for the lattice maxima

$$\frac{v_0^{\text{drift}}}{v_0^{\text{diff}}} = \frac{\Delta E^{\text{drift}}}{\Delta E^{\text{diff}}} = \frac{e}{k_B T} \frac{E_0}{k_L}. \quad (21)$$

In particular one can express the electric field for which the diffusive and drift terms have the same strength [2] as $E_D = (k_B T/e)k_L$.

In figure 3, we plot the measured ratio $v_0^{\text{drift}}/v_0^{\text{diff}}$ of the initial writing speeds for the diffusive mechanism (with $E_0 = 0$), and the drift mechanism (with $E_0 = 2 \text{ kV cm}^{-1}$), as function of the lattice period d . The ratio $v_0^{\text{drift}}/v_0^{\text{diff}}$ increases linearly as expected with the lattice constant, and the measured slope is very close to the theoretical expectation from equation (21), with $T = 300 \text{ K}$ (solid line), which confirms our analysis and validates equation (19).

4. Observations of linear and nonlinear wave propagation in regular lattices

In this section we study patterns of propagation in simple lattices, for plane waves and Gaussian wave packets.

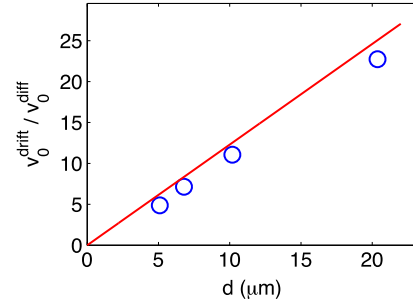


Figure 3. Ratio of initial writing speeds for drift ($E_0 = 2 \text{ kV cm}^{-1}$) and diffusive ($E_0 = 0$) photorefractive mechanisms versus lattice period d , for $I_W = 1 \text{ mW cm}^{-2}$. The solid line is the theoretical prediction equation (21), with no adjustable parameter.

4.1. Linear wave propagation

Figure 4 shows pictures of linear wave propagation in real and Fourier space, for 1D (upper row), square (middle row), and diamond lattices (lower row). The probe beam is a plane wave (first two columns) or a beam with broad transverse spectrum, narrowly defocusing at the crystal input face (to a waist $w_0 = 2.0 \mu\text{m}$), that expands in the crystal (last two columns). For the plane waves, we check in Fourier space (figures 4(b), (f) and (j)) that the probe beam is at the center of the first BZ⁷. Note that lattice periods are not the same for all types of pictures.

4.1.1. Plane wave probe. The real space pictures for the plane wave (figures 4(a), (e) and (i)) correspond to a waveguiding structure analysis [23], which we use for calibrating the lattice strength [9]. Here the anisotropy of the photorefractive effect is very clear. For the square lattice, the modulation of the probe is much stronger in the vertical direction (c -axis) than in the horizontal one, as also reported

⁷ This check is important since the beam propagation in the lattice strongly depends on the input angle.

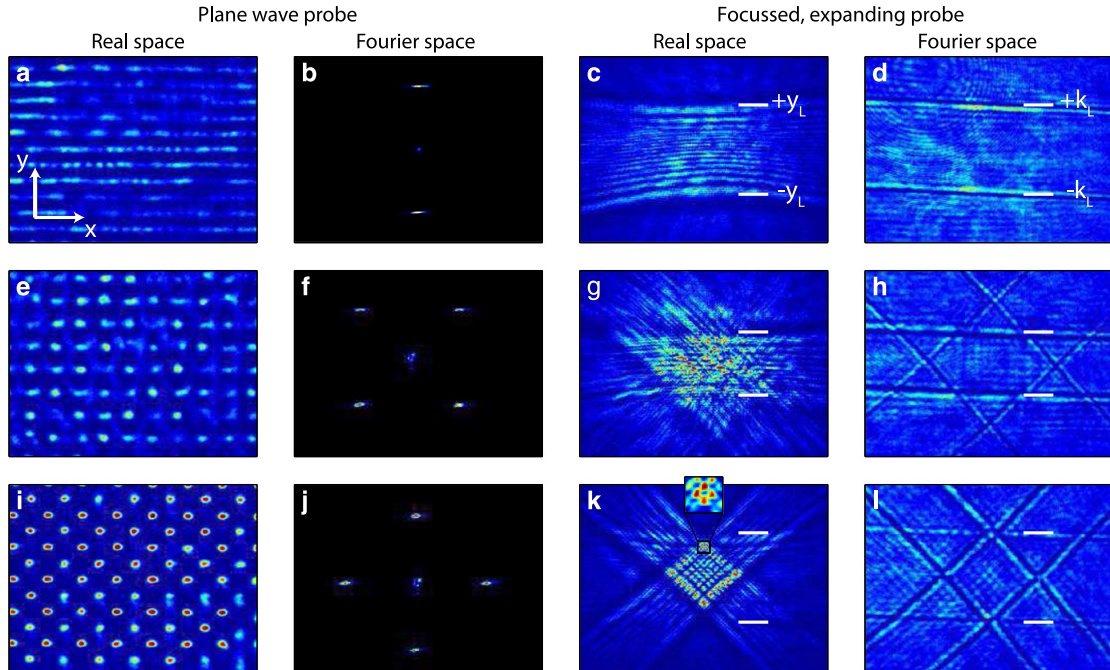


Figure 4. Intensity of a linear probe beam (and writing beam, in second column) at crystal output in real and Fourier space, for a 1D (upper row), square (middle row) and a diamond lattice (lower row). The probe beam is a plane wave (first two columns) or a narrowly defocusing wave at the crystal input, which expands in the lattice (last two columns). (a), (e) and (i) real space output for a plane wave input probe with lattice period $d = 27 \mu\text{m}$ (1D lattice) and $d = 38.5 \mu\text{m}$ (2D lattices) (b), (f) and (j) Fourier images of lattice writing beams (four outside points) and the probe which is a point at $\mathbf{k} = 0$. (c), (g) and (k) real space output for a defocusing probe (discrete diffraction patterns) with $d = 7 \mu\text{m}$ (1D lattice) and $d = 10 \mu\text{m}$ (2D lattices). White lines show the ballistic positions $\pm y_L$ of vertical Bragg components $\pm k_L$. (d), (h) and (l) Fourier images of the defocusing probe (Brillouin zone spectroscopy), with $d = 13.6 \mu\text{m}$ (1D lattice) and $d = 19.2 \mu\text{m}$ (2D lattices), with vertical Bragg components $\pm k_L$ shown as white lines.

in [14]. Also, for the diamond lattice, the probe intensity at the waveguide positions is much higher than for the square lattice (although writing parameters are identical). In our data, the anisotropy in the amplitude of refractive index modulation, is typically a factor 2, as estimated in [9].

In figures 4(a), (e) and (i), some imperfections are also apparent, probably attributable to residual nonlinear effects, i.e., some modulational instability as discussed below. Such imperfections are particularly evident for the 1D lattice, but also for the square and diamond lattice. In the 2D images, the irregularities could also be due to the contribution of the diffusive photorefractive effect.

4.1.2. Focused, expanding probe wave. With a defocusing, expanding linear probe, in real space (figures 4(c), (g) and (k)), we observe the patterns commonly called ‘discrete diffraction’ [24], displaying two outer expanding lobes of high intensity, particularly well seen in the 1D case (figure 4(c)). In figure 5(a) we show a vertical slice of intensity through figure 4(c), and in figure 5(b) a corresponding numerical simulation with a beam propagation code, carried with no adjustable parameters, using a sinusoidal 1D lattice whose strength

$\Delta n_0 = 0.95 \times 10^{-4}$ was determined using our calibration method [9]. To our knowledge, previous works did not present quantitative comparisons of simulations with the measured data. The agreement between the measured and simulated profiles is quite good, which validates our lattice calibration method.

As seen in figure 5, the outer lobes typically involve 3–4 lattice sites. Just beyond those lobes, dark notches (or lines) are present, slightly bended in figure 4(c) due to imaging aberrations. Their positions correspond very well to the positions (marked as white lines in figures 4(c), (g) and (k), and black vertical lines in figure 5) of the ballistic propagation of wave components $\pm k_L$ (at Bragg angles)

$$\pm y_L = \pm \frac{k_L}{k_c} L = \pm \frac{\lambda L}{2n_0 d}, \quad (22)$$

where $k_L = \pi/d$ and $k_c = 2\pi n_e/\lambda$ is the wave vector modulus in the crystal. However one can note that the measured profile is globally wider, which may be due to an imperfect matching of the focal spot of the probe beam at the crystal input face.

For the 2D square lattice (figure 4(g)), the discrete diffraction pattern features a horizontal stripe and additionally two wider diagonal stripes. Due to the lattice waves

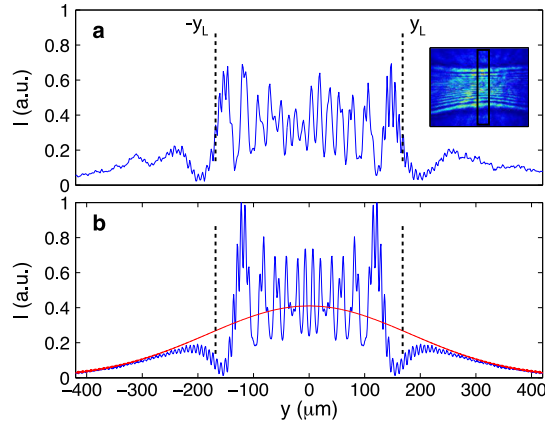


Figure 5. Discrete diffraction in a 1D lattice with period $d = 6.8 \mu\text{m}$ of an expanding wavepacket with initial waist $w_0 = 2.0 \mu\text{m}$ (data of figure 4(c)). (a) Measured profile at crystal output face (integrated in the window shown in black in inset). (b) Simulated profile in 1D lattice with lattice strength $\Delta n_0 = 0.95 \times 10^{-4}$. The red solid line shows the propagation without lattice. Vertical dashed lines show the ballistic positions $\pm y_L$ of Bragg components $\pm k_L$. The total intensity is equal in (a) and (b).

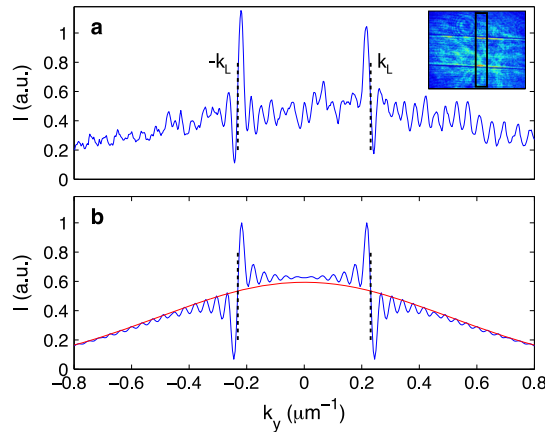


Figure 6. Output intensity in Fourier space (Brillouin zone spectroscopy) for a wavepacket with initial waist $w_0 = 2.0 \mu\text{m}$ expanding in a 1D lattice of period $d = 13.6 \mu\text{m}$ (data of figure 4(d)). (a) Measured Fourier profile (integrated in the window shown in black in inset). (b) Corresponding simulation for a 1D lattice with lattice strength $\Delta n_0 = 0.30 \times 10^{-4}$. The red solid line shows the propagation without lattice. Vertical dashed lines show the Bragg planes $\pm k_L$. The total intensity is equal in (a) and (b).

orientation, the horizontal stripe is narrower than in the 1D case and its edges coincides with the ballistic positions of components $\pm\sqrt{2}k_L$ (white lines). No horizontal modulation is visible, due to the photorefractive anisotropy that causes weaker modulation of refractive index in direction x . For the 2D diamond lattice (figure 4(k)), the four outer lobes form the contour of a central diamond, behind which a horizontal stripe

is visible, having the same width as in the 1D case (white lines). The central zone features a well regular checkerboard pattern, with higher intensity in the four corners, each of them presenting four sites with high intensity (see inset).

For the three lattices, and especially the diamond lattice, one notices that light intensity is still present beyond the ballistic Bragg lines $\pm y_L$ (see also figure 5). This is due to the continuous character of the system. Indeed, for a purely discrete system—the typical model being the discrete NLSE [24]—the discrete diffraction pattern for an initial condition localized at one single lattice site is very similar to our observation, but no intensity at all is present beyond the ballistic Bragg lines (see, e.g., figure 1.2 or figure 2.7 in [24]). The intensity beyond the Bragg lines results from the spectral content of the probe beam beyond the first BZ, in the second and higher bands. Such an observation of band structure in real space has also been studied in [25].

The Fourier images with defocusing probe (figures 4(d), (h) and (l)) are generally referred to as ‘BZ spectroscopy’ [23, 26]. Interestingly, as also noted from simulations in [27], we obtained these pictures using a coherent probe beam (without using a spatial light diffuser as is done in [23, 26]), and the Bragg lines are still very clearly apparent as dark notches. The lines closest to the center mark the edge of the first BZ, matching very well the predictions $\pm k_L$ (and $\pm\sqrt{2}k_L$ for the square lattice), shown as white lines, only in the y direction. For the 2D lattices (square and diamond), higher order Bragg lines are also visible, but the anisotropy causes an almost complete absence of Bragg lines in the vertical direction.

In figure 6, we show a vertical profile (integrated over the window shown in the inset) for the 1D pattern of figure 4(d), comparing it to a simulation with no adjustable parameter, using a sinusoidal 1D lattice, whose strength $\Delta n_0 = 0.30 \times 10^{-4}$ was determined with our method [9]. Here, as for the discrete diffraction patterns (figure 5), the simulation and measured data agree quite well, in particular, displaying two notches and two neighboring intensity maxima on the sides of the Bragg planes $\pm k_L$. In the simulation, the oscillations decay fast away from the Bragg planes $\pm k_L$. In the experimental image, fine observation of the oscillations beyond the first cycle is rendered difficult by parasitic fringes. We note that—to our knowledge—no analytical explanation of the Brillouin spectroscopy patterns has been proposed so far.

Overall, an important structural similarity is apparent between the discrete diffraction (figures 4(c), (g) and (k)) and the BZ spectroscopy pictures (figures 4(d), (h) and (l)).

4.2. Nonlinear wave propagation

For higher probe beam intensities, we observe basic nonlinear propagation phenomena.

4.2.1. Modulation instability (MI) in quasi-1D. MI is a general phenomenon by which an unmodulated carrier wave gets destabilized, and other frequency components grow exponentially from perturbations or background noise. MI

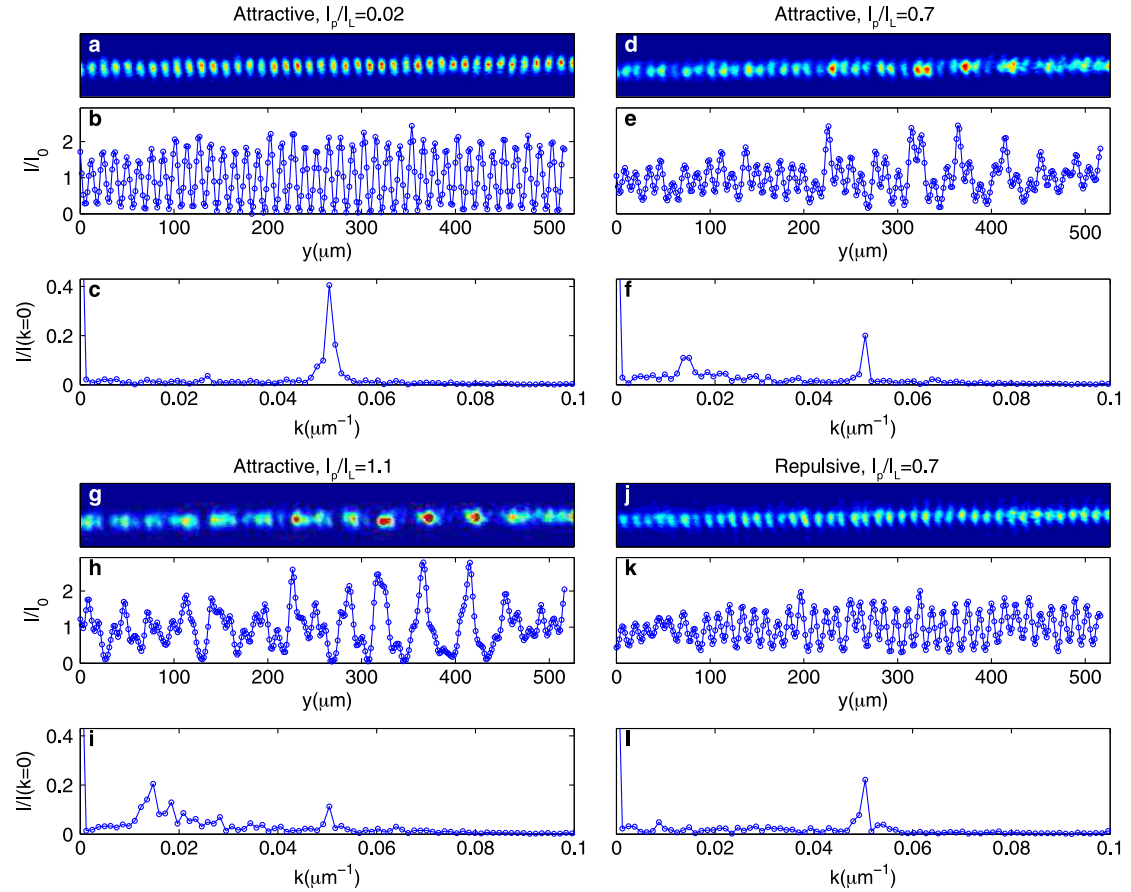


Figure 7. Observation of modulational instability of a quasi-1D plane wave probe beam in a 1D lattice with period $d = 10 \mu\text{m}$, at $t_W = 120 \text{ s}$, with $E_0 = 2 \text{ kV cm}^{-1}$, lattice beam intensity $I_L = 0.2 \text{ mW cm}^{-2}$ and probe beam intensity I_p . For each case the top panel shows the output intensity distribution, the middle panel, the vertically integrated intensity profile, the third panel its Fourier transform. The lattice component lies at $k \approx 0.05 \mu\text{m}^{-1}$ while the MI develops at lower momenta around $k = 0.015 \mu\text{m}^{-1}$. (a)–(c) Linear output with focusing nonlinearity and $I_p/I_L = 0.02$. (d)–(f) Focusing nonlinearity and $I_p/I_L = 0.7$. (g)–(i) Focusing nonlinearity with $I_p/I_L = 1.1$. (j)–(l) Defocusing nonlinearity and $I_p/I_L = 0.7$.

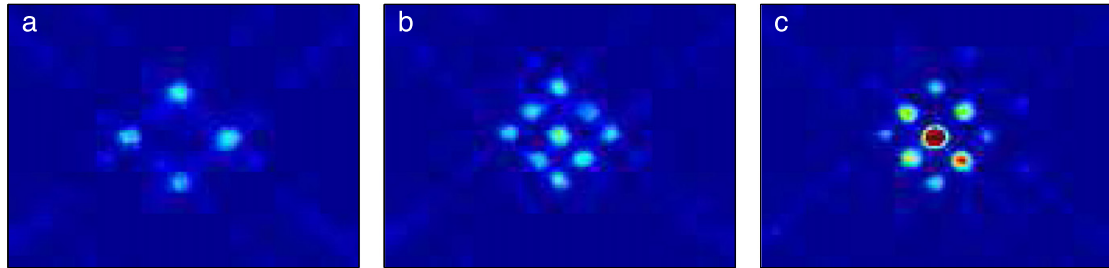


Figure 8. Temporal transition from discrete diffraction to a discrete soliton in a diamond lattice of period $d = 19 \mu\text{m}$ with $I_L = 0.8 \text{ mW cm}^{-2}$, at writing times $t_W = 23 \text{ s}$ (a), 39 s (b), 54 s (c), with same color scale. In (c), the maximal intensity in the central lobe is $I_s/I_L \approx 0.5$.

can be considered as a precursor of soliton formation [28]. In photonics, MI has been studied in many configurations including continuous photorefractive systems [29–33]. In lattice geometries, discrete MI has been observed in semiconducting waveguide arrays with a focusing nonlinearity [34], in the normal diffraction region (central half of the BZ), but also with defocusing nonlinearity in [35], where the destabilization occurs only for carrier wave vectors

lying in the region of anomalous diffraction region (outer half of the BZ, close to the band edge).

In this work we report an observation in a new quasi-1D photorefractive configuration (although the physics is still governed by the full 2D and anisotropic equations (7) and (8)). We use a cylindrical lens of focal length $f = 150$ mm to focus the probe beam in only one direction, while a 1D lattice, of period $d = 10 \mu\text{m}$, covers the entire region of interest (in 2D). The probe beam focus is placed at half of the crystal length $L = 10$ mm. Its waist in the x direction is $w_0 \simeq 25 \mu\text{m}$ and the Rayleigh length is $l_R \simeq 4$ mm, so that the diffraction in the x direction during propagation in the crystal is unimportant. We apply the probe and lattice writing beams together during the same writing time $t_W = 120$ s. (One could envision different times for both beams but this would add parameters and complexify the problem.)

In figure 7, we show the observed output intensity at $t_W = 120$ s, the vertically integrated profiles $I(y)$ and their Fourier transforms $I(k)$ for the linear case (a)–(c), the nonlinear case with focusing nonlinearity ((b)–(d), (g)–(i)) and for a defocusing nonlinearity (j)–(l). In all cases the probe beam is launched at the center of the BZ (momentum $k = 0$), and we quantify the strength of nonlinear effects by the ratio I_p/I_L of the peak probe wave intensity (at input) I_p to the average lattice beam intensity I_L . In all three nonlinear cases, the writing of the lattice is fast, with an exponential time of about 30 s, whereas the effects of MI develop much slower, increasing continuously over more than 200 s.

In the linear case (figures 7(a)–(c), with $I_p/I_L = 0.02$), the probe beam gets modulated essentially at the lattice frequency $k \simeq 0.05 \mu\text{m}^{-1}$. In the nonlinear case with moderate nonlinearity (figures 7(d)–(f), with $I_p/I_L = 0.7$), one notices the reduction of the main modulation, and the appearance of spectral weight around $k = 0.015 \mu\text{m}^{-1}$. For stronger nonlinearity, (figures 7(g)–(i), with $I_p/I_L = 1.1$), the destabilization is stronger, the lattice component at $k \simeq 0.05 \mu\text{m}^{-1}$ is almost erased and the spectral weight in the window $k = 0.015 - 0.03 \mu\text{m}^{-1}$ is more important. This is a particularity of the photorefractive effect, where lattice writing and nonlinear effect rely on the same physical mechanism (see section 2), so that strong nonlinearity can simply erase the underlying lattice structure as in figure 7(g), in the zones where self-focusing is strong.

By contrast, in the defocusing case (figures 7(j)–(l), with $I_p/I_L = 0.7$), the lattice component is almost unaffected by the nonlinearity (in the linear case, it reaches about the same value, always smaller than in the focusing case), and almost no spectral weight is apparent in the MI region, as expected for a carrier plane wave at the center of the BZ [36].

4.2.2. Temporal formation of a discrete soliton. Although the formation of discrete solitons in diamond 2D lattices has already been reported [6, 37], we here present a different observation, in the time domain. In figure 8, we show the output intensity at times $t_W = 23, 39, 54$ s, when a diamond 2D lattice and a defocusing probe beam are simultaneously applied, with a ratio of peak input probe intensity to average

lattice intensity $I_p/I_L \sim 0.5$. At short times (a), the lattice writing effect is already strong so that discrete instead of continuous diffraction is observed, with four well-marked intense outer lobes, whereas nonlinear effects have not yet noticeably come into play. At intermediate (b) and longer times (c), the self-focusing nonlinear term leads to the formation of a discrete soliton-like propagation. The maximal soliton intensity in units of the average lattice intensity, in (c) is $I_p/I_L \simeq 0.5$. In our observation, one notes the differential writing times for the lattice or nonlinear structure, as already noted in our MI measurements, which points at the complexity of the photorefractive dynamics.

5. Conclusion

We have studied basic features of the writing and probing of photorefractive lattices, providing some new verifications and observations in simple configurations. Using linear plane waves and 1D lattices, we analyzed the often overlooked transient regime of photorefractive writing. We checked first that the initial writing speed v_0 is proportional to the writing beam intensity I_W , as expected at high saturation $I_W \gg I_{\text{sat}}$. Using v_0 , we measured the ratio between contributions of the diffusion and drift photorefractive mechanisms, finding very good quantitative agreement with a theory assuming v_0 proportional to the stationary lattice strength. We thereby provided a quantitative check of the commonly used approximation consisting in neglecting the diffusion term.

Further, we studied the linear wave propagation in regular lattices. Using plane waves, we observed effects of the photorefractive anisotropy and parasitic nonlinearities. With defocusing, expanding wavepackets with a broad transverse spectrum, we analyzed discrete diffraction patterns (at finite propagation time, in real space), noting an analogy with the Fourier space patterns of BZ spectroscopy, since Bragg planes and band structure appear in both types of images. Using our new lattice calibration method [9], for the first time to our knowledge, we could quantitatively compare experimental data to simulations based only on direct calibrations and no adjustable parameters, finding good agreement. In the future this approach for quantitative comparisons with simulations can be extended to experiments in more complex lattices.

For nonlinear waves, we observed the development of modulational instability of plane waves in a quasi-1D geometry with focusing nonlinearity, but for a defocusing nonlinearity, no MI was observed, as expected for a carrier plane wave at the center of the BZ. For a defocusing input wave, we recorded the temporal formation of discrete solitons.

In general, our work improves the understanding of photorefractive lattice experiments. Our observations of non-ideal effects (anisotropy, parasitic nonlinearity, diffusive term, non-stationarity), can explain some imperfections typical in experiments, for example the strong damping of longitudinal Talbot-like oscillations for plane waves, reported in [9], or the guided wave distortions apparent in figures 4(a), (e) and (j) or in [13].

Acknowledgments

We acknowledge invaluable technical help from Leonardo Campos, and stimulating discussions with Martin Boguslawski, Anton Desyatnikov and Mario Molina. Work supported by CONICYT fellowships, Programa de Financiamiento Basal de CONICYT (Grant FB0824/2008) and Programa ICM (Grant P10-030-F).

References

- [1] Yeh P 1993 *Introduction to Photorefractive Nonlinear Optics* (New York: Wiley)
- [2] Hall T, Jaura R, Connors L and Foote P 1985 *Prog. Quantum Electron.* **10** 77
- [3] Frejlich J 2007 *Photorefractive Materials: Fundamental Concepts, Holographic Recording and Materials Characterization* (New York: Wiley)
- [4] Kukhtarev N *et al* 1978 *Ferroelectrics* **22** 949
- [5] Zozulya A A and Anderson D Z 1995 *Phys. Rev. A* **51** 1520
- [6] Fleischer J W, Segev M, Efremidis N K and Christodoulides D N 2003 *Nature* **422** 147
- [7] Neshev D N *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 123903
- [8] Schwartz T, Bartal G, Fishman S and Segev M 2007 *Nature* **446** 52
- [9] Armijo J, Allio R and Mejía-Cortés C 2014 *Opt. Express* **22** 20574
- [10] Denz C, Schwab M and Weinau C 2003 *Transverse-Pattern Formation in Photorefractive Optics* vol 188 (Berlin: Springer)
- [11] Segev M *et al* 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 3211
- [12] Christodoulides D N and Carvalho M 1995 *J. Opt. Soc. Am. B* **12** 1628
- [13] Desyatnikov A S *et al* 2006 *Opt. Express* **14** 2851
- [14] Terhalle B *et al* 2007 *Appl. Phys. B* **86** 399
- [15] Zhang P *et al* 2007 *Opt. Express* **15** 536
- [16] Kivshar Y S and Agrawal G P 2003 *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (New York: Academic)
- [17] Zhang P *et al* 2009 *Appl. Phys. B* **95** 559
- [18] Petter J, Denz C, Stepken A and Kaiser F 2002 *J. Opt. Soc. Am. B* **19** 1145
- [19] Duree G C *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 533
- [20] Zozulya A, Anderson D, Mamaev A and Saffman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 419
- [21] Boguslawski M, Rose P and Denz C 2011 *Phys. Rev. A* **84** 013832
- [22] Boguslawski M *et al* 2013 *Opt. Express* **21** 31713
- [23] Terhalle B *et al* 2006 *Phys. Rev. E* **74** 057601
- [24] Lederer F *et al* 2008 *Phys. Rep.* **463** 1
- [25] Mandelik D *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 43
- [26] Bartal G *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 163902
- [27] Liu S *et al* 2010 *Appl. Phys. B* **99** 727
- [28] Daumont I, Dauxois T and Peyrard M 1997 *Nonlinearity* **10** 617
- [29] Kip D *et al* 2000 *Science* **290** 495
- [30] Apolinar-Iribe A, Korneev N, Vysloukh V and Gómez-Sarabia C 2002 *Opt. Lett.* **27** 2088
- [31] Saffman M, McCarthy G and Królikowski W 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6** S397
- [32] Chen Z, Klinger J and Christodoulides D N 2002 *Phys. Rev. E* **66** 066601
- [33] Jeng C-C, Lin Y, Hong R-C and Lee R-K 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 153905
- [34] Meier J *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 163902
- [35] Stepic M, Wirth C, Rüter C E and Kip D 2006 *Opt. Lett.* **31** 247
- [36] Kivshar Y S 1993 *Opt. Lett.* **18** 1147
- [37] Martin H, Eugenieva E D, Chen Z and Christodoulides D N 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 123902

“Observation of Localized States in Lieb Photonic Lattices”

Physical Review Letters

Publicado el 15 de Junio de 2015



Observation of Localized States in Lieb Photonic Lattices

Rodrigo A. Vicencio,^{1,*} Camilo Cantillano,¹ Luis Morales-Inostroza,¹ Bastián Real,¹ Cristian Mejía-Cortés,^{1,†} Steffen Weimann,² Alexander Szameit,² and Mario I. Molina¹

¹*Departamento de Física, MSI-Nucleus on Advanced Optics, and Center for Optics and Photonics (CEFOP), Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago 7800003, Chile*

²*Institute of Applied Physics, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, 07743 Jena, Germany*

(Received 9 December 2014; published 15 June 2015)

We present the first experimental demonstration of a new type of localized state in the continuum, namely, compacton-like linear states in flat-band lattices. To this end, we employ photonic Lieb lattices, which exhibit three tight-binding bands, with one being perfectly flat. Discrete predictions are confirmed by realistic continuous numerical simulations as well as by direct experiments. Our results could be of great importance for fundamental physics as well as for various applications where light needs to be conducted in a diffractionless and localized manner over long distances.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.245503

PACS numbers: 42.82.Et, 78.67.Pt, 63.20.Pw

The localization of excitations in periodical lattices usually must rely on some form of defect, either pointlike or extended, linear or nonlinear, or simply disorder, in order to produce localized modes. However, there is another way of accomplishing this, in which the lattice remains perfectly periodic but is able to support localized states. In that case, one can find extremely localized entities that do not diffract at all, and that remain localized by virtue of a perfect geometric phase cancellation condition. This implies the possibility of using a judicious combination of these modes to transmit or localize information on specific regions of a lattice, without any distortion.

A Lieb lattice [x-y pattern in Fig. 1(a)] is a square depleted lattice that is essentially a two-dimensional counterpart of the “perovskite” structure, which is ubiquitous in nature. The CuO₂ planes of cuprate superconductors are perhaps the most famous example [1,2], but in fact many layered oxides coordinate in this fashion. Initial interest on this lattice began when ferromagnetism was found on the flat band at half filling [3]. Later, it was proven that ferromagnetism in this lattice was robust against spin wave excitations [4]. This lattice also displays unusual topological properties; for instance, in the presence of a uniform magnetic field, the flat band remains flat because of topological reasons [5]. The flat band touches two linearly dispersing intersecting bands at a single Dirac point. In the presence of Kerr nonlinearity the system may exhibit novel conical diffraction at the Dirac cone [6,7]. Very recently, the effect of considering correlated disorder on a Lieb lattice was studied [8], where a square-root singularity in the density of states was predicted. The Lieb lattice can now be realized by, e.g., manipulating cold atoms in optical lattices [9–11] and by direct laser writing of optical waveguides [7,12,13].

The presence of a flat band in the spectrum of a Lieb lattice implies the existence of entirely degenerate states,

the superposition of which displays no dynamical evolution. This allows the formation of four-site ring structures [see dashed line in Fig. 1(a)] that are completely localized in space, constituting a localized state in the continuum. The formation of those localized states arises from the high degeneracy of zero-frequency eigenmodes, as was recently shown in the context of chiral systems connected to a continuum [14]. In these systems, there exist zero-energy states where the wave function has finite amplitude in only one of the subsystems defined by the chiral symmetry. When the system is coupled to leads with a continuum energy band, some of these states remain bounded. These localized states are reminiscent of localized states in the continuum (BIC), originally predicted for nontranslationally invariant potentials [15]. However, the BIC concept has been expanded to different types of potentials, while retaining the principal property of being localized in space and existing inside the continuum, as recently investigated theoretically [16,17] and experimentally [18–21] in different photonics setups.

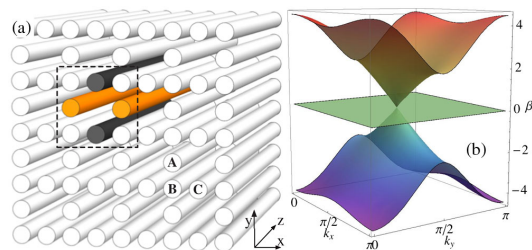


FIG. 1 (color online). (a) A Lieb photonic lattice with sites A, B, and C defining the unitary cell. The dashed-line region encloses a four-site ring-mode profile, where different colors represent different amplitudes and different phases. (b) Linear spectrum of an anisotropic Lieb lattice for $V_y = 2V_x$.

In this Letter, we demonstrate theoretically and experimentally the existence of new localized states consisting of compacton-like linear states residing in the linear band of a perfectly periodic Lieb lattice. They can be considered as a special type of BIC that can be located in any position of the lattice; this is a special property of flat-band states. This compacton-like localized entities do not diffract upon propagation, allowing in this manner the distortionless transmission of information along an optical channel [22].

The evolution of light along the z direction on a Lieb photonic lattice, sketched in Fig. 1(a), composed by weakly coupled identical optical waveguides, is well described by a discrete linear Schrödinger equation [23,24],

$$-i \frac{du_{\vec{n}}}{dz} = \beta_{\vec{n}} u_{\vec{n}} + \sum_{\vec{m}} V_{\vec{n},\vec{m}} u_{\vec{m}}. \quad (1)$$

Here, z is the coordinate along the propagation direction, and $u_{\vec{n}}$ corresponds to the light amplitude at the \vec{n} th waveguide of a Lieb lattice. In our model, all waveguides are assumed to be identical; therefore, they possess the same propagation constants $\beta_{\vec{n}} = \beta_0$ [without loss of generality, we set $\beta_0 = 0$ in (1)]. The coupling (hopping) term between nearest-neighbor lattice sites \vec{n} and \vec{m} is denoted by $V_{\vec{n},\vec{m}}$. The linear spectrum of a Lieb lattice is obtained by solving model (1) with a stationary ansatz, $u_{\vec{n}}(z) = u_{\vec{n}} \exp(i\beta z)$. We assume nearest-neighbor interactions only between sites A , B , and C (unitary cell). To be more general, we consider an anisotropic lattice where the horizontal (V_x) and vertical (V_y) coupling coefficients can be different, but preserve the same lattice properties. For these three different lattice sites, we construct the coupling interactions considering a 2D Bloch wave vector $\vec{k} = \{k_x, k_y\}$ and find three linear bands on this system [12],

$$\beta(\vec{k}) = 0, \pm 2\sqrt{V_x^2 \cos^2(k_x) + V_y^2 \cos^2(k_y)}. \quad (2)$$

In Fig. 1(b), the linear spectrum (2) is shown inside the first Brillouin zone. Two bands are dispersive (nonzero curvature), possessing a particle-hole symmetry [25], where for each \vec{k} there are two eigenfrequencies $\pm\beta(\vec{k})$. We observe that, for $V_y > V_x$, the dispersive bands show a different curvature depending on the direction of the \vec{k} vector, where, in general, y -oriented waves propagate faster. These two bands are connected by a Dirac point at $\beta = 0$. Exactly at this value, a completely flat (nondispersive) band is located. Diagonal interactions are considered negligible in our approach in order to preserve the flatness of this special band [6]. This assumption is well justified by the experiment.

In general, modes in the continuum of any periodic structure are completely extended. However, a flat-band system allows the formation of very localized, compacton-like states [26]. In a Lieb lattice, any closed ring (formed by

eight sites) may support a ring mode, where B -site amplitudes are zero and the other two amplitudes satisfy the relation $V_x C = -V_y A$ for $k_y = k_x$, as sketched in Fig. 1(a). A measure of localization is provided by the participation ratio $R = (\sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}|^2)^2 / \sum_{\vec{n}} |u_{\vec{n}}|^4$, which takes the value 1 for a state localized at a single site and N for a completely delocalized profile (N being the number of lattice sites). In our case, the ring modes have a participation ratio $R \leq 4$; i.e., they constitute a very compact localized state, appearing only by virtue of symmetry in a completely periodic lattice. This new type of BIC-like state can be placed at any position across the lattice and will propagate without diffraction along the longitudinal direction. Additionally, any linear combination of these states will be completely coherent and will propagate without any distortion, allowing for a high-fidelity transmission of information along the longitudinal direction [22].

Tight-binding models, like model (1), are known to describe qualitatively well some particular systems that have short-range (weak coupling) interactions [23,24]. However, the description of a real lattice requires other methods to study the light dynamics. Our goal is to trace the optimal conditions for observing the described discrete phenomenology, avoiding extra interactions that could destroy the flatness of the band [6] and, therefore, impede the observation of linear compact states. In order to be closer to the conditions likely found in an experiment, we study dynamically a Lieb lattice using a continuous approach. We consider a linear paraxial wave equation [12] given by

$$-i \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) = \frac{\nabla_{\perp}^2 \psi(x, y, z)}{2k_0 n_0} + k_0 \Delta n(x, y) \psi(x, y, z), \quad (3)$$

where ψ is the envelope of the electric field, $k_0 = 2\pi/\lambda$ is the wave number in free space, λ is the wavelength, n_0 is the refractive index of the bulk material, and $\Delta n(x, y)$ corresponds to the refractive index structure that defines the Lieb photonic lattice. $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ corresponds to the transverse Laplacian operator. Once the geometry is fixed [in our case, waveguides are elliptical [12], implying a strong effective anisotropy: $V_y \sim 2V_x$ in model (1)], we have essentially two free parameters left, the wavelength and the maximum index contrast $\delta n \equiv \max |\Delta n(x, y) - n_0|$. We implement a beam propagation method to solve Eq. (3) numerically and study the evolution of light across and along a Lieb lattice, considering a lattice period of $d = 20 \mu\text{m}$ and a propagation distance of $L = 10 \text{ cm}$. We consider green light of $\lambda = 532 \text{ nm}$ because it leads to a weaker coupling between lattice sites and, therefore, to a more discrete phenomenology.

By running our simulations at this wavelength, we obtain the results presented in Fig. 2. First, in Fig. 2(a), after exciting a B site, we observe a small diffraction area, which

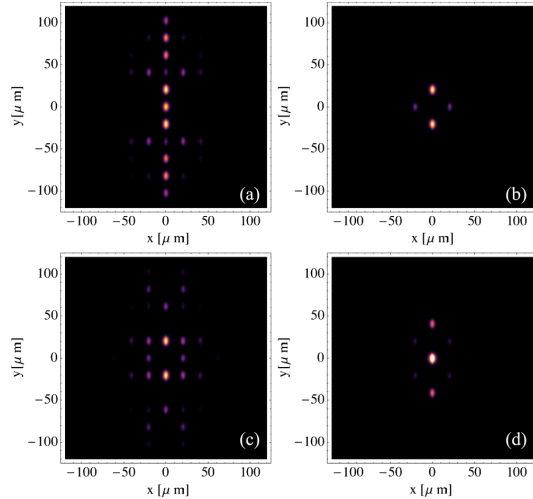


FIG. 2 (color online). Output profiles for different input conditions: (a) B -site excitation, (b) out-of-phase ring, (c) in-phase ring, and (d) two added ring modes. $\lambda = 532$ nm, $d = 20$ μm , $\delta n = 0.7 \times 10^{-3}$, and $L = 10$ cm. Color scheme: inverted black and white map.

is an indication of a weak-interaction (tight-binding) scenario. In addition, due to the waveguide ellipticity, we observe a very anisotropic and vertically oriented dispersion pattern, implying $V_y > V_x$ in model (1). In Fig. 2(b), we observe how a ring mode (i.e., four out-of-phase sites) could effectively be excited by choosing a right index contrast δn (we ran several simulations to find that $\delta n \gtrsim 0.67 \times 10^{-3}$). In Fig. 2(c) we observe how a ring profile with uniform phase structure is destroyed and diffracts all over the lattice. This shows the importance of setting the right phase structure (π) to effectively excite the flat-band states. Finally, as a proof of the numerical excitation of the ring mode, we generate a coherently combined state by summing two neighboring ring modes and propagating it along the system. As Fig. 2(d) shows, we observe the output pattern of this combined state, showing a perfect propagation of ring-mode combinations. We also generated different simple and complex linear combinations; all of them propagated without noticeable distortion.

The excitation of these localized states also gives rise to the onset of different excited eigenstates coming from the complete band structure of the lattice; in our numerical simulations, this manifests itself as a very weak (negligible) background radiation. We perform a longitudinal Fourier transform analysis [22] and study the excited frequency spectrum along the dynamics. We observe the presence of a large and thin peak in the region of the flat band, with a lower excitation of higher bands. By increasing the index contrast δn , we notice that this flat-band peak increases and the gap between the nearest

excited bands widens. Additionally, we perform simulations for propagation distances up to $L = 50$ cm to study the robustness of the ring-mode excitation. By inspecting the excited spectrum, we observe that the peak related to the flat band remains strongly excited in comparison to the rest of the excited spectrum. Although a realistic excitation of a ring mode is not perfect, as it is in a discrete nearest-neighbors model, we numerically find that the generated background radiation is very weak and can be considered negligible in comparison to the excited localized state. For distances d and L considered in this Letter, the effect of next-nearest neighbor interactions appears to be negligible as well. This is due to the weak coupling interaction coming from well-separated waveguides, which makes model (1) a valid approximation to describe the dynamics on this lattice.

To perform the experiments, we fabricate a Lieb photonic lattice using the direct femtosecond laser-writing technique on a $L = 10$ cm-long fused silica glass wafer [27], as sketched in Fig. 3(a). In order to test the quality of this lattice, we launch white light at the input facet and take a microscope image at the output of the crystal [see Fig. 3(b)]. In this figure, we observe the propagating modes of each waveguide, which show a noticeable ellipticity that strongly affects the coupling interactions between nearest neighbors. We observe more evanescent light in between

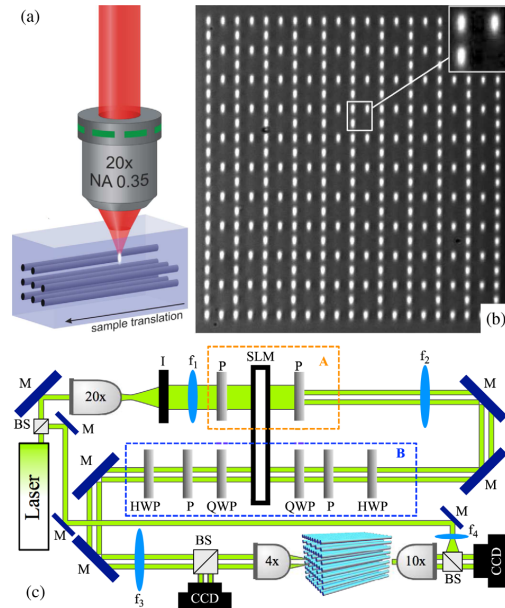


FIG. 3 (color online). (a) Femtosecond laser-writing technique. (b) Microscope image at the output facet of a Lieb lattice for white-light propagation. (c) Experimental setup to study the propagation of light patterns on a Lieb lattice.

vertical sites than in between horizontal ones [see inset in Fig. 3(b)], due to the effective anisotropic coupling ($V_y > V_x$).

The experimental observation of ring modes involves several challenging stages for the preparation of a proper initial condition. We essentially require the creation of the appropriate amplitude and phase pattern to be used as an input excitation, at the input facet of the array. In Fig. 3(c) we describe our experimental setup. We use a Holoeye LC2012 transmission spatial light modulator (SLM) to modulate, simultaneously, the amplitude and phase of a broad beam. We split the SLM display into two parts. In the first path (region A), we modulate the amplitude of the beam by tuning the angle of two polarizers (P). We generate a pattern of several light disks of given radius (to be adjusted to match waveguides at the input facet) and given geometry (considering the Lieb structure). Once this modulation is achieved, we pass this light pattern through the second part of the SLM to modulate the amplitude profile in phase (0 or π). This modulation is performed in region B, by using an array of tuned half-wave (HWP) and quarter-wave (QWP) plates, and polarizers (all components were carefully tuned to optimize the required phase modulation, as well as the intensity of the profile and the respective input polarization [28]). After this stage, we obtain an amplitude- and phase-modulated light pattern, with a given polarization. In our experiment, light is polarized in the horizontal direction \hat{x} , in order to observe a larger diffraction area [29]. Finally, we inject this modulated pattern at the input facet of our Lieb photonic lattice by using a 4 \times microscope objective (MO), and observe the input profile with a CCD camera after being reflected on a beam splitter (BS). We obtain the output profile by using a 10 \times MO and a CCD camera. To study the phase structure of different profiles, we interfere the input and the output patterns with a wide-tilted plane wave.

We start studying the bulk diffraction by using a B-site excitation, which is the input condition that better excites the dispersive part of the linear spectrum [12]. We inject light at the center of the lattice and observe the diffraction pattern shown in Fig. 4(a). We found an excellent agreement with respect to our numerical results [see Fig. 2(a)], which is very important for the calibration of the effective index contrast to be used in our simulations. Then, we prepare a symmetric ring-mode input profile, having four light disks with equal amplitude and a staggered phase structure, and observe its perfect propagation along the lattice [see Fig. 4(b)]. As the input profile is close but not the exact ring mode of the system, the light relaxes to this nonsymmetric configuration due to the anisotropic coupling coefficients. By increasing the image contrast (not shown here), we observe that a very weak radiation is also generated across the lattice, which is a manifestation of the presence of dispersive bands in the system. By interfering the input and output ring-mode profiles with a tilted plane

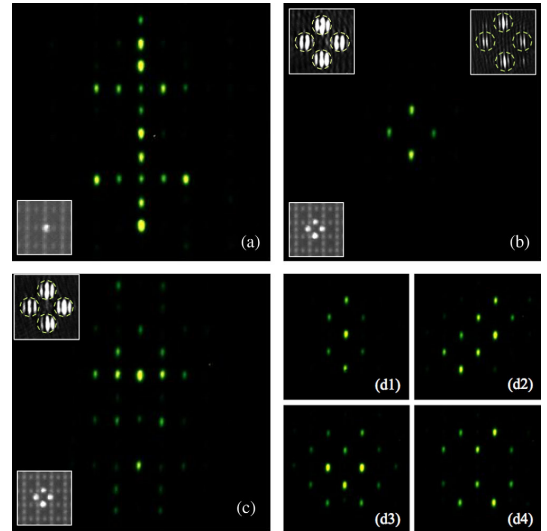


FIG. 4 (color online). Output experimental profiles for different input conditions: (a) B-site excitation, (b) out-of-phase ring, (c) in-phase ring, and (d) composed states excitation. In (a)–(c) lower-left insets show the input intensity profile. Upper insets in (b) and (c) show an interferogram of the ring mode with a tilted plane wave for input (left) and output (right) profiles.

wave, we observe that the phase structure is exactly the expected one [see Fig. 4(b), inset]: There is a π -phase shift difference between neighboring ring sites, as predicted by the tight-binding model. This shows very nicely that the initial discrete model prediction is valid in a realistic environment, and that the fundamental properties of the Lieb lattice are in fact observable in this experiment. We further test the relevance of the phase structure on the input condition by using an in-phase four-site ring excitation, as shown in Fig. 4(c). The output pattern shows a destruction of the initial localized profile due to the excitation of different linear bands (the output phase profile is not shown). This experiment agrees well with our simulations shown in Fig. 2(c) with a difference of the symmetry of the observed profile, which is essentially due to intrinsic fabrication anisotropies or from input conditions that are not perfectly aligned.

Finally, in order to probe the excitation of ring modes as stationary states and their potential use for transmitting optical information in narrow lattice regions, we combine them in different configurations. First, we confirm our numerics from Fig. 2(d), by preparing an initial condition composed by two vertically added ring modes and observing its perfect propagation in Fig. 4(d1). This shows experimentally the robustness of the application of the discrete analysis. This pattern has no discernible background radiation and possesses the same predicted structure for the combination of two anisotropic ring modes.

Additionally, the vertical combination was designed thinking on the highest possible vertical diffraction that could be excited; nevertheless, we observe a perfect localized propagation. Finally, we test other linear combinations. For example, in Fig. 4(d2) we observe the propagation of two noninteracting ring modes along a diagonal. We also study the propagation of more complex patterns by linearly combining four ring modes. We construct and propagate a completely additive combination of four rings [Fig. 4(d3)], and a horizontally added and vertically subtracted one [Fig. 4(d4)]. By carefully selecting the phase and location of these modes, different linear patterns can be propagated to create a code based on these highly localized fundamental states.

In conclusion, we have experimentally observed the excitation of a new special type of localized state embedded into the continuum, consisting of a compact mode residing in the flat band of a Lieb photonic lattice. We have matched the right realistic conditions to observe this very fundamental weak-coupling mode and demonstrated the reality of flat-band systems. We have demonstrated the need to have a correct phase structure to be able to excite these localized entities. Additionally, we have combined these modes to create composite coherent and localized states, which propagate without diffraction across the lattice. This shows the possibility of creating different patterns and propagating them as a secure image transmission mechanism. Our results show a new way to propagate localized patterns by using the very fundamental properties of flat-band systems that can be found and studied in a broad class of physical systems, ranging from solid state and magnetism to photonics. Our results provide a novel scheme of confining and controlling light. We foresee possible applications in, e.g., telecommunication and sensing [30].

The authors wish to thank A. Desyatnikov for valuable discussions. This work was supported in part by Fondef IDeA CA13110244, Fondecyt Grants No. 1120123, No. 3140608, and No. 1151444, Programa ICM Grant No. RC-130001, Programa de Financiamiento Basal Grant No. FB0824, the Deutsche Forschungsgemeinschaft (Grant No. 462/6-1), and the German Ministry of Education and Research (Center for Innovation Competence program, Grant No. 03Z1HN31).

* rodrigo@uchile.cl

† Present address: Departamento de Física, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

- [1] V. J. Emery, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2794 (1987).
- [2] R. T. Scalettar, D. J. Scalapino, R. L. Sugar, and S. R. White, *Phys. Rev. B* **44**, 770 (1991).
- [3] E. H. Lieb, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1201 (1989).
- [4] K. Kusakabe and H. Aoki, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 144 (1994).
- [5] H. Aoki, M. Ando, and H. Matsumura, *Phys. Rev. B* **54**, R17296(R) (1996).
- [6] D. Leykam, O. Bahat-Treidel, and A. S. Desyatnikov, *Phys. Rev. A* **86**, 031805(R) (2012).
- [7] F. Diebel, D. Leykam, S. Kroesen, C. Denz, and A. S. Desyatnikov, in *Advanced Photonics*, OSA Technical Digest (Optical Society of America, Washington, DC, 2014), paper NW3A.1.
- [8] J. D. Bodyfelt, D. Leykam, C. Danieli, X. Yu, and S. Flach, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 236403 (2014).
- [9] R. Shen, L. B. Shao, B. Wang, and D. Y. Xing, *Phys. Rev. B* **81**, 041410 (2010).
- [10] N. Goldman, D. F. Urban, and D. Bercioux, *Phys. Rev. A* **83**, 063601 (2011).
- [11] V. Apaja, M. Hyrkas, and M. Manninen, *Phys. Rev. A* **82**, 041402 (2010).
- [12] D. Guzmán-Silva, C. Mejía-Cortés, M. A. Bandres, M. C. Rechtsman, S. Weimann, S. Nolte, M. Segev, A. Szameit, and R. A. Vicencio, *New J. Phys.* **16**, 063061 (2014).
- [13] S. Mukherjee, A. Spracklen, D. Choudhury, N. Goldman, P. Öhberg, E. Andersson, and R. R. Thomson, arXiv:1412.6342 [Phys. Rev. Lett. (to be published)].
- [14] J. Mur-Petit and R. A. Molina, *Phys. Rev. B* **90**, 035434 (2014).
- [15] J. von Neumann and E. Wigner, *Phys. Z.* **30**, 465 (1929).
- [16] E. N. Bulgakov and A. F. Sadreev, *Phys. Rev. B* **78**, 075105 (2008).
- [17] M. I. Molina, A. E. Miroshnichenko, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 070401 (2012).
- [18] D. C. Marinica, A. G. Borisov, and S. V. Shabanov, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 183902 (2008).
- [19] Y. Plotnik, O. Peleg, F. Dreisow, M. Heinrich, S. Nolte, A. Szameit, and M. Segev, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 183901 (2011).
- [20] S. Weimann, Y. Xu, R. Keil, A. E. Miroshnichenko, A. Tünnermann, S. Nolte, A. A. Sukhorukov, A. Szameit, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 240403 (2013).
- [21] G. Corrielli, G. Della Valle, A. Crespi, R. Osellame, and S. Longhi, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 220403 (2013).
- [22] R. A. Vicencio and C. Mejía-Cortés, *J. Opt.* **16**, 015706 (2014).
- [23] S. Flach and A. Gorbach, *Phys. Rep.* **467**, 1 (2008).
- [24] F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Y. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
- [25] J. He, Y.-X. Zhu, Y.-J. Wu, L.-F. Liu, Y. Liang, and S.-P. Kou, *Phys. Rev. B* **87**, 075126 (2013).
- [26] D. L. Bergman, C. Wu, and L. Balents, *Phys. Rev. B* **78**, 125104 (2008).
- [27] A. Szameit and S. Nolte, *J. Phys. B* **43**, 163001 (2010).
- [28] I. Moreno, P. Velásquez, C. R. Fernández-Pousa, M. M. Sánchez-López, and F. Mateos, *J. Appl. Phys.* **94**, 3697 (2003).
- [29] S. Rojas-Rojas, L. Morales-Inostroza, U. Naether, G. B. Xavier, S. Nolte, A. Szameit, R. A. Vicencio, G. Lima, and A. Delgado, *Phys. Rev. A* **90**, 063823 (2014).
- [30] C. W. Hsu, B. Zhen, J. Lee, S.-L. Chua, S. G. Johnson, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić, *Nature (London)* **499**, 188 (2013).

“Transport in Sawtooth photonic lattices”

Optics Letters

Publicado el 16 de Mayo de 2016

Optics Letters

Transport in Sawtooth photonic lattices

STEFFEN WEIMANN,¹ LUIS MORALES-INOSTROZA,² BASTIÁN REAL,² CAMILO CANTILLANO,²
ALEXANDER SZAMEIT,¹ AND RODRIGO A. VICENCIO^{2,*}

¹Institute of Applied Physics, Abbe Center of Photonics, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, 07743 Jena, Germany

²Departamento de Física and MSI-Nucleus on Advanced Optics, Center for Optics and Photonics (CEFOP), Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile

*Corresponding author: rodrigov@uchile.cl

Received 31 March 2016; revised 26 April 2016; accepted 26 April 2016; posted 28 April 2016 (Doc. ID 262281); published 16 May 2016

We investigate, theoretically and experimentally, a photonic realization of a Sawtooth lattice. This special lattice exhibits two spectral bands, with one of them experiencing a complete collapse to a highly degenerate flat band for a special set of inter-site coupling constants. We report the observation of different transport regimes, including strong transport inhibition due to the appearance of the non-diffractive flat band. Moreover, we excite localized Shockley surface states residing in the gap between the two linear bands. © 2016 Optical Society of America

OCIS codes: (130.5296) Photonic crystal waveguides; (130.2790) Guided waves; (110.0110) Imaging systems; (060.5295) Photonic crystal fibers; (060.2350) Fiber optics imaging; (350.4238) Nanophotonics and photonic crystals.

<http://dx.doi.org/10.1364/OL.41.002414>

Commonly, lattices of coupled waveguides exhibit a dispersive band structure, such that different eigenmodes acquire different phases during evolution. As a consequence, excited waves in general diffract. This effect lies at the heart of the conduction properties of any periodic material. Although the propagation of waves in such photonic lattices is well understood [1,2], some lattices have become prominent for exhibiting peculiar non-diffractive properties due to particular characteristics of their spectrum. These structures are perfectly periodic and yet exhibit insulating properties, which is in contrast to Anderson localization [3–5], where transport is inhibited by perturbing the underlying periodicity. The non-intuitive transport behavior in these lattices arises from the fact that at least one of their bands is completely flat, that is, all eigenmodes forming this band are degenerate. These extended Bloch modes can be coherently superposed, forming highly localized Flat band states with a strictly zero background [6]. As a consequence, the observable transport regimes are very sensitive to how the unit cell is excited [7]. Aside from the fundamental interest on the transport properties of periodic systems, flat band lattices are a very promising candidate for non-diffractive image propagation [8,9]. Well-known two-dimensional (2D) examples of non-diffractive lattices are the Kagome and Lieb

lattices. Recently, the experimental implementation of the Kagome lattice [10] and the Lieb lattice [7] were studied, showing that transport strongly depends on which site in the unit cell is excited. Fundamental flat band modes in Lieb lattices were reported in Refs. [9,11,12]. Since flat band modes do not diffract across the lattice, any linear combination of them propagates without diffraction as well [6,8]. Additionally, a very recent work explores the construction of a full flat band using a band engineering method in a photonic crystal, going beyond the tight-binding limit [13]. Although the existence of flat bands does not require a 2D lattice [14–16], there are only few experimental realizations of flat bands in quasi one-dimensional (1D) lattices in general. Very recently, the observation of a linear localized state occupying only two sites in a rhombic (diamond) configuration was reported [17]. In the context of micro-pillar optical cavities, polariton condensation was demonstrated experimentally in 1D Lieb (Stub) lattices [18]. A peculiar incarnation of a 1D system possessing a flat band is the Sawtooth lattice [19] (also known as a Δ chain [20]), used to describe the properties of $\text{YCuO}_{2.5}$ conducting delafossites [21]. The Sawtooth lattice consists of a 1D sequence of triangles forming a lattice; a sketch of it is shown in Fig. 1(a). Note that we show a particular implementation where the triangles have alternating orientation in order to suppress the coupling between successive vertices [15]. Recent studies on the Sawtooth lattice include quantum topological excitations [22], as well as Bose–Einstein condensation in flat band systems [23], with a recent proposal for an experimental implementation [24]. However, a realization of this type of lattice in the laboratory is elusive so far.

In our work, we implement an artificial Sawtooth lattice using a coupled waveguide structure, and investigate its transport properties. We explore the transition into localization for different parameters of the Sawtooth geometry and demonstrate the predicted flat band properties. In particular, we show the existence of Shockley-type edge states [25], as exact solutions of lattices having A -site edges.

The unit cell of the Sawtooth lattice is not affected by the orientation of the triangles as the underlying symmetry is manifested in the tight-binding Hamiltonian: the unit cell consists of only two elements, A and B . In this binary super-lattice, the evolution of the electromagnetic field amplitude along the

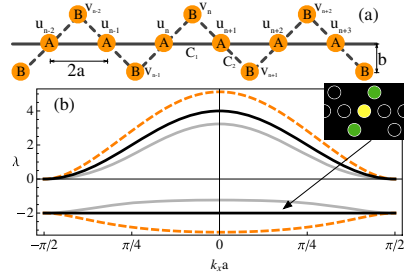


Fig. 1. (a) Implementation of a Sawtooth waveguide lattice, consisting on a sequence of A - and B -sites. The inter-site coupling C_1 (C_2) is represented by full (dashed) straight lines. (b) Linear spectrum of an infinite Sawtooth lattice for $C_2 = C_1$ (gray), $C_2 = \sqrt{2}C_1$ (black), and $C_2 = 2C_1$ (dashed). ($C_1 = 1$.) The inset in (b) shows the profile of a Sawtooth flat band mode (black, green, and yellow correspond to intensities 0, 1, and 2, respectively).

propagation direction z is well described by a sequence of coupled Schrödinger equations:

$$\begin{aligned} -i \frac{du_n}{dz} &= C_1(u_{n+1} + u_{n-1}) + C_2(v_n + v_{n-1}), \\ -i \frac{dv_n}{dz} &= C_2(u_{n+1} + u_n), \end{aligned} \quad (1)$$

where u_n and v_n represent the electromagnetic field amplitudes at the A - and B -sites, respectively, according to Fig. 1(a). The coupling between two A -sites is defined by C_1 , whereas coupling between A - and B -sites is denoted as C_2 [visualized by full and dashed lines, respectively, in Fig. 1(a)]. When implementing this lattice as an array of coupled waveguides, the strength of the coupling constants C_1 and C_2 follows an exponential decaying law on the distance between lattice sites [26]. For simplicity, we define the ratio $\delta \equiv C_2/C_1$ to describe different regimes of the transport on the Sawtooth lattice. In the geometry of the lattice, we set the separation between successive A -sites as $2a$, and the vertical distance between A - and B -sites as b . The plane wave solutions of Eq. (1) are of the form $\{u_n(z), v_n(z)\} = \{U, V \exp(ik_x a)\} \exp(ik_x x_n) \exp(i\lambda z)$, where U and V describe constant amplitudes. k_x defines the transverse wavenumber, and “ $x_n = 2na$ ” gives the horizontal position of the A - and B -sites. The dispersion relation between the longitudinal spatial frequency λ and k_x follows as $\lambda(k_x) = C_1 [\cos(2k_x a) \pm \sqrt{1 + 4(\delta^2 - 1)\cos^2(k_x a) + 4\cos^4(k_x a)}]$, which is the spectrum of the Sawtooth lattice having two bands of different curvature and width. Figure 1(b) shows the linear spectrum of a Sawtooth lattice in the first Brillouin zone for three representative values of δ . We see that for a critical value $\delta_c \equiv \sqrt{2}$, the bands reduce to $\lambda(k_x) = 4C_1 \cos^2(k_x a)$ and $\lambda(k_x) = -2C_1$; i.e., the lower band collapses and becomes completely flat [see black line in Fig. 1(b)]. The states residing in this non-dispersive and highly degenerated band spread only across three sites, as Fig. 1(b)-inset shows. These localized states can be located anywhere in the lattice. As they possess the same propagation constant, they are promising candidates for non-diffractive image propagation [8,9]. For $\delta < \delta_c$, the sign of the curvature is the same for both bands, such that at a given k_x the

states from both bands will propagate in the same direction (but with different velocities). For $\delta > \delta_c$, however, the curvature is opposite, and the states at a fixed k_x propagate in opposite directions. Hence, at the critical value δ_c , the sign of the curvature of the lower band changes, which is inherent to Sawtooth lattices. One possible application of this phenomenon is to use this type of lattice as a beam splitter with two beams traveling in the same or in opposite directions.

Additionally, we numerically compute the spectrum of a finite Sawtooth lattice by directly diagonalizing Eq. (1), for different values of δ , and obtain the spectrum shown in Fig. 2(a). The analytically computed bands $\lambda(k_x)$ agree perfectly with these numerical results, but additionally, an edge state appears [see red curve in Fig. 2(a)]. This mode exists when lattices have at least an A -site edge (for two A -site edges, two degenerate states exist). The mode is well localized and decays into the bulk in an exponential way [see examples in Fig. 2(b)]. (In Fig. 2, we project 2D spatial Sawtooth profiles on simpler 1D rows: $\{\dots, u_{n-1}, v_{n-1}, u_n, v_n, u_{n+1}, v_{n+1}, \dots\}$.) Using the ansatz $\{u_n^e(z), v_n^e(z)\} = \{A, B\} \varepsilon^n \exp(i\lambda_e z)$, with $n \geq 0$ at the A -site edge and $|\varepsilon| < 1$, we analytically find that $B = -A/\delta$, $\varepsilon = (1 - \delta^2)/(1 + \delta^2)$, and $\lambda_e = -2C_1 \delta^2/(1 + \delta^2)$. This edge solution coincides perfectly with the numerically found edge modes. To study the effective size of the edge state and its dependence on the parameter δ , we use the participation ratio, defined as $R \equiv (\sum_n |w_n|^2)^2 / \sum_n |w_n|^4$, where w_n is the projected field amplitude of the edge state at site n . In Fig. 2(b), we plot the corresponding function $R(\delta) = (1 + \delta^2)^2 / 2\delta^2$ for the edge state. We find a minimum of $R = 2$ for $\delta = 1$. At this point, $\varepsilon = 0$, and the mode occupies only the first two lattice sites at the edge with equal amplitude but opposite phases. This highly localized state shows a fundamental condition found in diverse flat band systems, namely that the coupling between these two sites with respect to a third one is completely canceled, and the transmission of energy through the rest of the lattice is

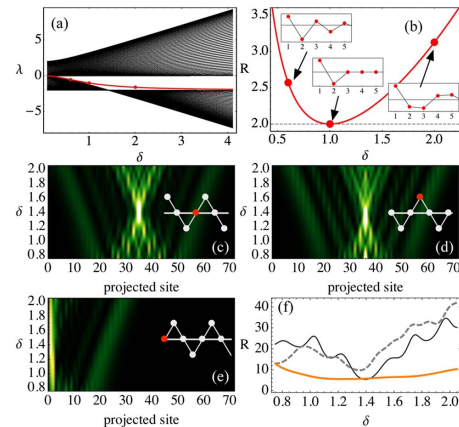


Fig. 2. (a) Linear spectrum λ versus δ . The edge state is plotted in red. (b) Participation ratio R versus δ for surface modes. Insets in (b) show some projected amplitude profiles corresponding to the red dots in (a) and (b). Numerically obtained output intensity profiles versus δ for single-site excitation at the (c) bulk A -site, (d) bulk B -site, and (e) edge A -site for $z_{\max} = 6.5$. (f) Output R versus δ for bulk- A (thin), bulk- B (dashed), and edge- A (orange) sites. ($C_1 = 1$.)

forbidden. For $\delta \rightarrow 0$, the decay factor $\varepsilon \rightarrow 1$, hence, the participation ratio increases rapidly, showing the transition of the mode into an extended mode inside the band. Consequently, for $\delta = 0$, the A and B layers are completely decoupled from each other and no surface state exists [1,2,27,28]. For $\delta > 1$, R increases slowly as $\varepsilon \rightarrow -1$. In this regime, the surface state is still single-peaked, but acquires a non-trivial phase structure; namely $0, \pi, \pi, 0, 0, \dots$ [as insets in Fig. 2(b) show]. For $\delta \gg 1$, the surface mode converges to the upper mode of the lower band at $\lambda_c = -2C_1$.

To study general transport properties, we explore the excitation of individual waveguides at the bulk and surface of a Sawtooth lattice (this type of input condition excites all linear modes having a nonzero amplitude at the site excitation [7], corresponding to an incoherent excitation of different k_x -vectors). Figures 2(c)–2(e) show the output intensity profile for one-site input excitations, obtained by numerically integrating Eq. (1), up to the same propagation distance $z = z_{\max}$ (we set z_{\max} to find good correspondence with the experiments). Figure 2(c) shows the tendency to localization for $\delta \rightarrow \delta_c$ for an A -site bulk excitation. It is important to note that a single-site input excites both bands homogeneously. However, faster waves, mostly coming from the upper band, are hardly visible due to the larger spreading area. Slower waves, mostly belonging to the lower band, spread over a narrower region and possess larger site amplitudes. Close to δ_c , mostly a flat band state is excited, such that the output profile is very narrow with only a weak background arising from the weak excitation of modes from the upper band. For $\delta > \delta_c$, the diffraction is stronger because the lower band is not flat anymore. For $\delta < \delta_c$, both bands also consist of extended modes, but as the band curvature is reduced, the diffraction cone is slightly weaker. In Fig. 2(f), it is shown that the participation ratio of the output light distribution reaches a minimum when $\delta \approx \delta_c$. For a B -site bulk excitation [see Fig. 2(d)], the observation is quite similar, but additionally, a tendency to generate a localized pattern for lower δ is observed. This can be well understood by considering the fact that the underlying reduction of the diagonal coupling C_2 gradually isolates the top or bottom sites from the rest of the lattice. In Fig. 2(f), we observe how the output participation ratio decreases for $\delta \approx \delta_c$ and $\delta \approx 0.75$, and grows for $\delta > \delta_c$. This δ -controlled bulk transport transition can be viewed as an insulator-conductor system governed by the geometry of the lattice. Additionally, these results nicely show how Sawtooth lattices are able to localize energy only by virtue of their geometry without requiring, e.g., disorder or nonlinearity [1,2].

When exciting the A -site edge, we observe a stable and localized intensity distribution at the surface [see Fig. 2(e)]. This is confirmed by the participation ratio shown in Fig. 2(f), which exhibits a minimum for $\delta \approx 1.1$. We observe that for $\delta \approx 1$, the profile is rather flat at the surface with essentially two equal peaks ($v_0 = -u_0$), which is in agreement with the modes shown in Fig. 2(b). For $\delta \gtrsim 1$, the excited profile becomes single-peaked at the edge ($|v_0| < |u_0|$), and the effective size tends to be constant but slowly increasing as δ increases. For $\delta \lesssim 1$, the localized profile shifts its center to the second waveguide ($|v_0| > |u_0|$), and the participation ratio increases.

We fabricated several waveguide lattices in the Sawtooth geometry using the direct femtosecond laser-writing technique [29] on a $L = 10$ cm long fused silica glass chip. A microscopic image of a fabricated lattice is shown in Fig. 3(a). Each

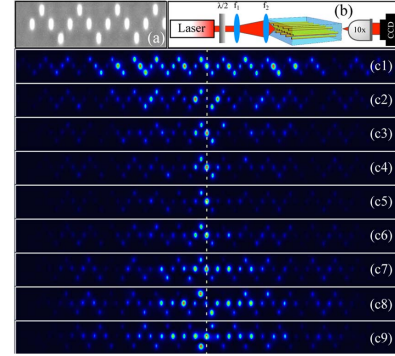


Fig. 3. (a) Microscope image at the output facet of a Sawtooth photonic lattice. (b) Experimental setup for studying transport in this lattice. (c1)–(c9) Experimental output intensity for an A -site bulk excitation with $\delta = 1.89, 1.68, 1.49, 1.44, 1.38, 1.35, 1.13, 1.05$, and 0.93 , respectively. The dashed line indicates the input position.

fabricated array has a constant horizontal period of $a = 11 \mu\text{m}$ but different vertical distances in the interval $b \in \{13, 20\} \mu\text{m}$, such that the ratio δ decreases from 1.89 to 0.82 . This parameter was calibrated by varying the vertical distance b by directly measuring the propagation pattern in a three-sites triangular array, while keeping the horizontal distance a constant. Moreover, the arrays consist of 71 waveguides each, with A -site edges, as shown in Fig. 3(a). To study transport in this lattice, we inject a horizontally polarized 633 nm laser beam into single waveguides, by tightly focusing the beam with a lens of short focal distance. We use a $10\times$ microscope objective to image the intensity patterns from the output facet onto a CCD camera [see Fig. 3(b)]. The exposition of our camera is set such that the background is observable as well.

We first study bulk transport by exciting a central A -site in each lattice, as presented in Fig. 3(c). We observe how transport is governed by the properties of the two bands discussed above. Similar to our simulations, faster modes residing in the upper band are weakly visible compared to the slower modes from the lower band. For a smaller value of b (i.e., larger δ), light strongly spreads all over the lattice, as shown in Figs. 3(c1) and 3(c2). When the vertical distance is increased and δ approaches δ_c [see Figs. 3(c3)–3(c6)], we observe light trapping around the excited waveguide. This is a strong indication of the reduction of the curvature and width of the lower band, which is the most excited band for this localized input condition (a single-site excitation is very close to a three-sites flat band mode profile). Taking a look at the background of the intensity distributions, we observe that the upper band, where the modes possess a flat phase distribution, is excited only weakly, and some light propagates away from the input excitation. For $\delta < \delta_c$, the diffraction of the background increases again, but is weaker compared to the case where $\delta > \delta_c$, such that the light is concentrated around the excited site with a more homogenous amplitude profile [see Figs. 3(c7)–3(c9)]. All these observations agree very well with our numerical results shown in Fig. 2(c).

In the next experiment, we excite a bulk B -site in each lattice, as shown in Fig. 4(a). We observe that for $\delta > \delta_c$ the light spreads slower than for a bulk A excitation, but nevertheless a

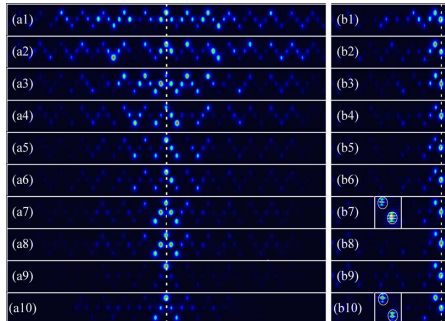


Fig. 4. Experimental output intensity for a (a) B -site bulk and for an (b) A -site edge excitation. Insets in (b7) and (b10) show an interferogram between the respective output profile and a tilted plane wave [9]. $\delta = 1.89, 1.68, 1.49, 1.44, 1.38, 1.35, 1.13, 1.05, 0.93, \text{ and } 0.82$, respectively. Dashed line indicates input position.

good transport over the lattice is observed. Again, there is a tendency for localization close to δ_c , but not as strong as in the previous case where an A -site was excited. Notably, the strongest localization is obtained for a value of $\delta = 0.93$, that is, slightly off the critical value, which is in agreement with the numerical simulations presented in Fig. 2(d). Finally, we explore the excitation of edge states by injecting light at the A -site edge. Our results are shown in Fig. 4(b). In general, for any δ -value, we observe the excitation of a very well localized pattern, as expected from our simulations shown in Fig. 2(e). As described above, we observe a transition from a two-site localized profile (for $\delta \approx 1$) to a one-peaked profile for increasing δ . The light diffraction pattern essentially corresponds to the excitation of the predicted surface state discussed in Figs. 2(a) and 2(b). We include two insets in Fig. 4(b) to show the phase structure of this profile for the first A - and B -sites, observing a clear π -phase difference between them. Following the formal definitions, this surface profile corresponds to an edge state originated by an effective defect at the surface that arises from the reduction of nearest-neighbor interactions [7,30] as well as from a band crossing occurring at $\delta = \delta_c$, as shown in Fig. 2(a). By inspecting the states in the lower band, we observe a kind of band twist at this critical value, such that our observed edge state is of the Shockley-type [31,32].

In conclusion, we have studied the fundamental transport properties of a Sawtooth photonic lattice. We have shown that bulk transport strongly depends on the particular geometry of this lattice, with a strong tendency to localization for $\delta \approx \delta_c$. For A - or B -site bulk excitation, the energy tends to concentrate strongly at the input region, and transport is reduced drastically. We found that for B -site bulk excitation, light tends to localize even for smaller values of δ , depending on the particular propagation distance. When injecting light at the A -edge, a localized Shockley surface state is excited. Therefore, in general, this special lattice allows us to localize energy in different positions, depending on their particular coupling parameters, beyond the excitation of the flat band phenomenology. This is very important when considering the use of waveguide lattices for transmitting information in the low-power regime, that is, without employing nonlinearities.

Funding. Programa ICM (RC130001); Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) (1151444); Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) (462/6-1, BL 574/13-1, SZ 276/7-1, SZ 276/9-1); German Ministry of Education and Research (Center for Innovation Competence program) (03Z1HN31).

REFERENCES

1. F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Y. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
2. S. Flach and A. Gorbach, *Phys. Rep.* **467**, 1 (2008).
3. P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
4. T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, *Nature* **446**, 52 (2007).
5. Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. N. Christodoulides, and Y. Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013906 (2008).
6. D. L. Bergman, C. Wu, and L. Balents, *Phys. Rev. B* **78**, 125104 (2008).
7. D. Guzmán-Silva, C. Mejía-Cortés, M. A. Bandres, M. C. Rechtsman, S. Weimann, S. Nolte, M. Segev, A. Szameit, and R. A. Vicencio, *New J. Phys.* **16**, 063061 (2014).
8. R. A. Vicencio and C. Mejía-Cortés, *J. Opt.* **16**, 015706 (2014).
9. R. A. Vicencio, C. Cantillano, L. Morales-Inostroza, B. Real, C. Mejía-Cortés, S. Weimann, A. Szameit, and M. I. Molina, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245503 (2015).
10. M. Boguslawski, P. Rose, and C. Denz, *Appl. Phys. Lett.* **98**, 061111 (2011).
11. S. Mukherjee, A. Spracklen, D. Choudhury, N. Goldman, P. Öhberg, E. Andersson, and R. R. Thomson, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245504 (2015).
12. S. Xia, Y. Hu, D. Song, Y. Zong, L. Tang, and Z. Chen, *Opt. Lett.* **41**, 1435 (2016).
13. C. Xu, G. Wang, Z. H. Hang, J. Luo, C. T. Chan, and Y. Lai, *Sci. Rep.* **5**, 18181 (2015).
14. M. I. Molina, *Phys. Rev. A* **92**, 063813 (2015).
15. M. Johansson, U. Naether, and R. A. Vicencio, *Phys. Rev. E* **92**, 032912 (2015).
16. P. P. Beliĉev, G. Glirorić, A. Radosavljević, A. Maluckov, M. Stepić, R. A. Vicencio, and M. Johansson, *Phys. Rev. E* **92**, 052916 (2015).
17. S. Mukherjee and R. R. Thomson, *Opt. Lett.* **40**, 5443 (2015).
18. F. Baboux, L. Ge, T. Jacqmin, M. Biondi, A. Lemaître, L. Le Gratiet, I. Sagnes, S. Schmidt, H. E. Türeci, A. Amo, and J. Bloch, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 066402 (2016).
19. T. Nakamura and K. Kubo, *Phys. Rev. B* **53**, 6393 (1996).
20. D. Sen, B. S. Shastry, R. E. Walstedt, and R. Cava, *Phys. Rev. B* **53**, 6401 (1996).
21. R. E. Walstedt, R. J. Cava, R. F. Bell, J. J. Krajewski, and W. F. Peck, Jr., *Phys. Rev. B* **49**, 12369 (1994).
22. S. A. Blundell and M. D. Núñez-Regueiro, *Eur. Phys. J. B* **31**, 453 (2003).
23. S. D. Huber and E. Altman, *Phys. Rev. B* **82**, 184502 (2010).
24. T. Zhang and G.-B. Jo, *Sci. Rep.* **5**, 16044 (2015).
25. W. Shockley, *Phys. Rev.* **56**, 317 (1939).
26. A. Szameit, F. Dreisow, T. Pertsch, S. Nolte, and A. Tünnermann, *Opt. Exp.* **15**, 1579 (2007).
27. C. R. Rosberg, D. N. Neshev, W. Krolikowski, A. Mitchell, R. A. Vicencio, M. I. Molina, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 083901 (2006).
28. E. Smirnov, M. Stepić, C. E. Rüter, D. Kip, and V. Shandarov, *Opt. Lett.* **31**, 2338 (2006).
29. A. Szameit and S. Nolte, *J. Phys. B* **43**, 163001 (2010).
30. Y. Plotnik, M. C. Rechtsman, D. Song, M. Heinrich, J. M. Zeuner, S. Nolte, Y. Lumer, N. Malkova, J. Xu, A. Szameit, Z. Chen, and M. Segev, *Nat. Mater.* **13**, 57 (2013).
31. N. Malkova, I. Hromada, X. Wang, G. Bryant, and Z. Chen, *Opt. Lett.* **34**, 1633 (2009).
32. N. Malkova, I. Hromada, X. Wang, G. Bryant, and Z. Chen, *Phys. Rev. A* **80**, 043806 (2009).

“Observation of dipolar transport in one-dimensional photonic lattices”

Science Bulletin

Publicado el 28 de Enero de 2017



Contents lists available at ScienceDirect

Science Bulletin

journal homepage: www.elsevier.com/locate/scib

Article

Observation of dipolar transport in one-dimensional photonic lattices

Camilo Cantillano^a, Luis Morales-Inostroza^a, Bastián Real^a, Santiago Rojas-Rojas^b, Aldo Delgado^b, Alexander Szameit^c, Rodrigo A. Vicencio^{a,*}^aDepartamento de Física, MSI-Nucleus on Advanced Optics, and Center for Optics and Photonics (CEFOP), Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile^bCenter for Optics and Photonics and MSI-Nucleus on Advanced Optics, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile^cInstitute for Physics, University of Rostock, D-18059 Rostock, Germany

ARTICLE INFO

Article history:

Received 27 December 2016

Received in revised form 19 January 2017

Accepted 20 January 2017

Available online 28 January 2017

Keywords:

Photonic lattices
Waveguide arrays
Wave propagation
Integrated optics

ABSTRACT

We experimentally study the transport properties of dipolar and fundamental modes on one dimensional (1D) coupled waveguide arrays. By carefully modulating a wide optical beam, we are able to effectively excite dipolar or fundamental modes to study discrete diffraction (single-site excitation) and gaussian beam propagation (multi-site excitation plus a phase gradient). We observe that dipolar modes experience a larger spreading area due to an effective larger coupling constant, which is found to be more than two times larger than the one for fundamental modes. Additionally, we study the effect of non-diagonal disorder and find that while fundamental modes are already trapped on a weakly disorder array, dipoles are still able to propagate across the system.

© 2017 Science China Press. Published by Elsevier B.V. and Science China Press. All rights reserved.

1. Introduction

Waveguide arrays and photonic lattices are an important field of study where many fundamental and applied problems can be investigated in a rather simple configuration [1,2]. Most of the theoretical and experimental efforts have been focused on studying transport and localization properties in various contexts, such as complex beam steering [3–5], Bloch oscillations [6–8], dynamic localization [9,10], relativistic emulations [11], discrete solitons [12–14], and many more. Recently, even the absence of transport and linear localization in complex lattice geometries was investigated [15–20].

Importantly, almost all previous works have considered single-mode waveguides only. This somehow reduces the complexity of the studied problem, allowing a more direct verification of theoretical results on simpler experimental setups. But, optical waveguides could also host higher order modes. Their excitation could promote richer dynamics and new interesting phenomena, as it has been suggested for cold-atoms loaded in optical potentials [21–24] (in that context, dipolar modes are known as p-modes). However, in general, a precise excitation of different modes or complex spatial structures may be simpler using light than atoms [15], as we will show along this work.

In this work, we present a first systematic study on the diffraction properties of dipolar modes in coupled waveguide arrays. We find that dipoles form another first tight-binding band, that is fundamentally distinct from the higher-order bands of continuous periodical systems [25]. Our waveguide arrays are fabricated using a very precise femtosecond-laser technique [26], which produces micrometer waveguides disposed on a given two-dimensional transversal pattern. Light propagating on these waveguides is well trapped in space, allowing a theoretical description based on coupled-mode theory, due to the weak coupling interaction between neighboring waveguides. By using a green laser beam and a modulation setup, we are able to effectively excite fundamental and dipolar modes, and study their dynamical properties in ordered as well as in disordered waveguide lattices [27].

2. Waveguide modes

A single-mode waveguide could become multimode when reducing the laser wavelength, or when increasing its cross-section or refractive index contrast [28,29]. A first excited mode is denominated “dipolar” LP11 mode [30], which can have an horizontal or vertical distribution, depending on the particular waveguide geometry. The experimental excitation of higher-order modes has already been reported in Ref. [31] for highly elliptical two-dimensional waveguides [26], although a systematic study in the context of weakly coupled systems is still elusive.

* Corresponding author.

E-mail address: rvicencio@uchile.cl (R.A. Vicencio).

The analytical treatment for finding the modes of elliptical waveguides is not trivial [32], essentially due to their geometry and complex refractive index profiles. Therefore, we implement a numerical finite-difference method to find the propagating modes of our elliptical waveguides of geometry $\epsilon_x \times \epsilon_y = 5.2 \mu\text{m} \times 13 \mu\text{m}$, excited using a green laser of 532 nm. Waveguide parameters were tuned in order to match our experimental observations, using a bulk fused-silica index $n_0 = 1.46$ and a maximum index contrast of $\Delta n = 0.73 \times 10^{-3}$ (This is obtained by fitting the experimental index profiles from Ref. [26], and constructing a continuous index gradient function, where ϵ_x and ϵ_y describe the widths of the ellipse shown in Fig. 1a and b). We look for modes of a single waveguide and find that, in our highly elliptical regime ($\epsilon_x/\epsilon_y = 0.40$), there are only two possible solutions: the fundamental mode sketched in Fig. 1a and the vertical dipolar mode shown in Fig. 1b (corresponding to dots shown in Fig. 1c). We notice that the fundamental mode is well trapped at the waveguide center, while the dipolar mode presents a more extended tail in the upper and lower region, with zero amplitude at the center.

By tuning the ratio ϵ_x/ϵ_y , we find the possible solutions as a function of their longitudinal propagation constant β_0 , as shown in Fig. 1c. We find that an additional horizontally oriented dipolar mode appears, as shown by a dashed line in Fig. 1c. This occurs when the waveguide geometry tends to a circular limit ($\epsilon_x/\epsilon_y = 1$), where both, horizontal and vertical, dipolar modes converge and degenerate.

Following the method described in Ref. [27], we computed the horizontal coupling coefficients for fundamental and dipolar modes, for two identical waveguides separated –center to center– by a given distance a (see Fig. 1d). First of all, we observe a typical

exponential decaying tendency for the coupling constant of both modes [26,31]. Then, we clearly see that the dipolar horizontal coupling is always larger due to the more extended dipole tail. As an example, for a distance $a = 16 \mu\text{m}$, the couplings are $C^f = 0.314 \text{ cm}^{-1}$ and $C^d = 0.760 \text{ cm}^{-1}$, for the fundamental (f) and dipolar (d) modes, respectively (as indicated by dots in Fig. 1d). It is important to mention that in the configuration explored along this work (i.e., vertically oriented elliptical waveguides), there is no coupling between fundamental and dipolar modes. This is due to an exact cancellation of the superposition integral for any waveguide separation.

3. Transport on a 1D lattice

We focus on a one-dimensional array of identical elliptical waveguides, as shown in Fig. 2a, where each white region corresponds to the experimental propagating profile, after white-light illumination. In this configuration, light trapped at each site of the array interacts only weakly with their surrounding via nearest-neighbor interactions. We describe the dynamics across the lattice using a set of coupled-mode equations [1,2,33],

$$-i \frac{d\psi_n^j}{dz} = \beta_0^j \psi_n^j + (C_{n+1}^j \psi_{n+1}^j + C_n^j \psi_{n-1}^j), \quad (1)$$

where ψ_n^j describes the amplitude of the optical field at the n th-site, for the fundamental ($j = f$) or dipolar ($j = d$) modes, while paraxially propagating along the longitudinal coordinate z . The coefficients β_0^j describe the waveguide longitudinal propagation constants, while the coefficients C_n^j correspond to the horizontal coupling coefficients between sites n and $n - 1$.

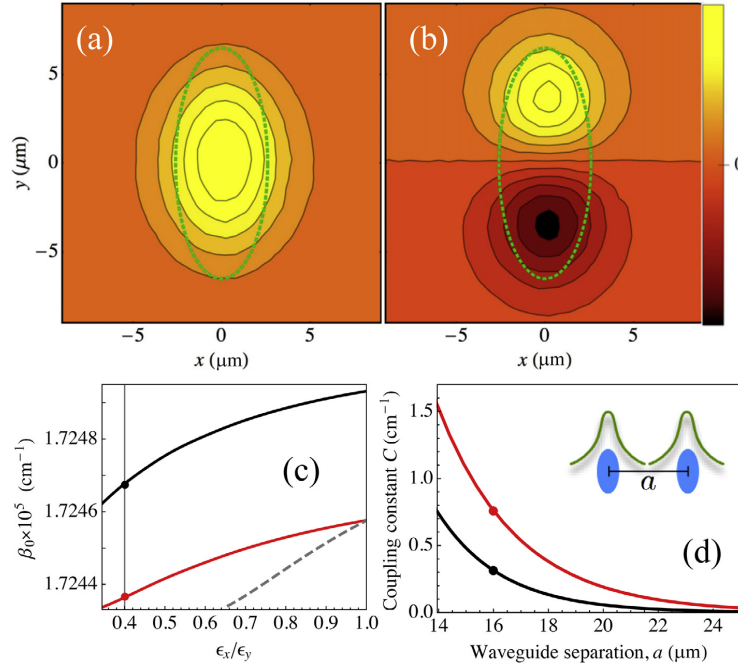


Fig. 1. (Color online) Waveguide modes and their constants. (a) Fundamental and (b) dipolar mode profiles of an elliptical waveguide (dotted ellipses indicate the waveguide profile). (c) Solutions diagram in terms of the waveguide geometry ϵ_x/ϵ_y and the longitudinal propagation constant β_0 . (d) Coupling constants versus waveguide separation. In (c) and (d) fundamental and dipolar modes are shown in black and red color, respectively.

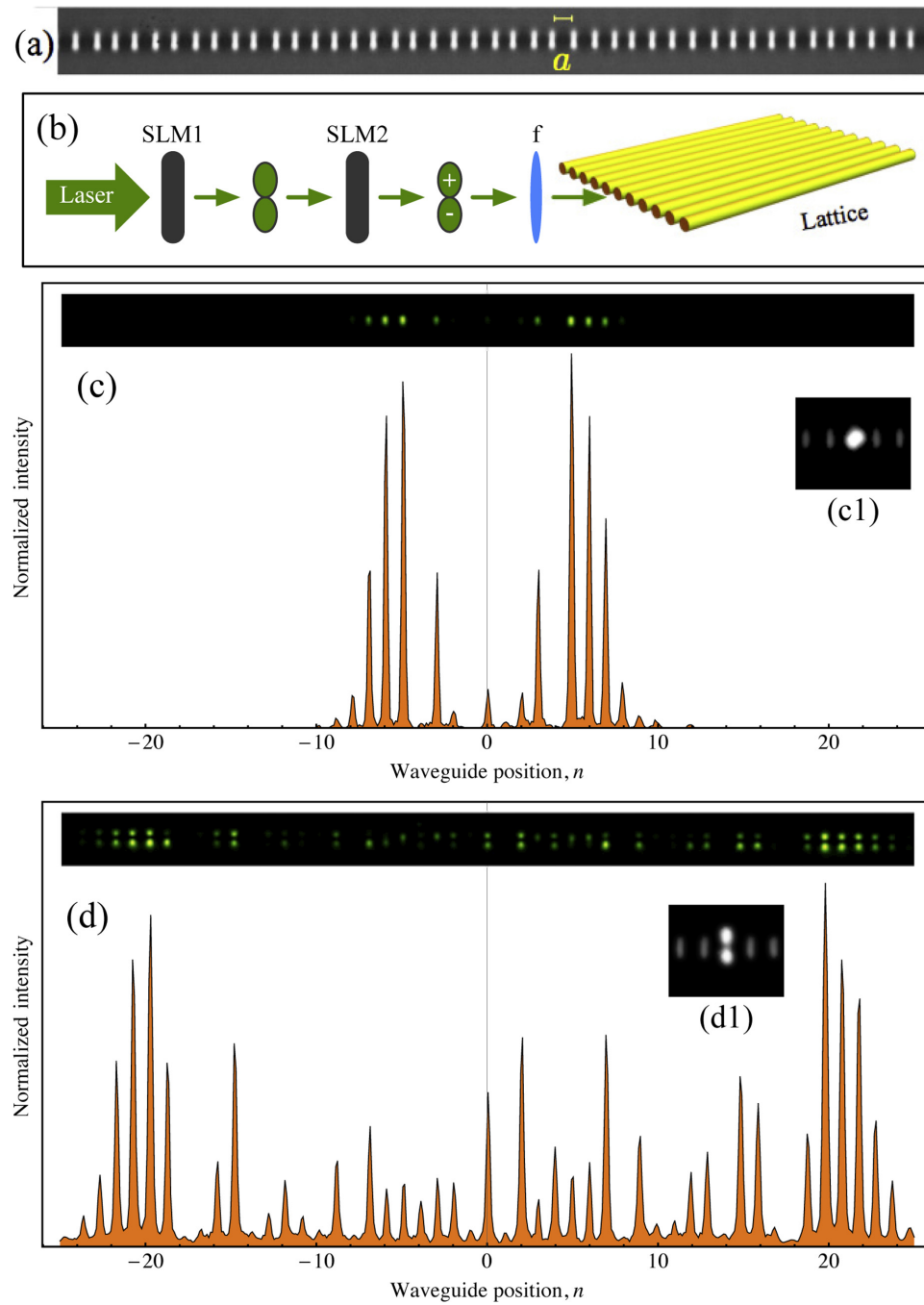


Fig. 2. (Color online) Discrete diffraction. (a) Microscope image at the output facet of an ordered 1D photonic lattice. (b) Experimental setup. Discrete diffraction for a single-site (c) fundamental and (d) dipolar mode excitations, using the input profile shown in c1 and d1, respectively. In (c) and (d) an output facet image (top) and an integrated transversal profile (center) are shown.

We start our study considering an homogenous ordered lattice such that $C_n^j = C^j$. When injecting light on a single lattice site, a well-known pattern is observed after evolution, the so-called discrete diffraction [1,2]. Its main feature is to concentrate the energy not at the center (as in continuous diffraction), but at the outside external lobes. This linear problem has a formal analytical solution: $\psi_n^j(z) = \psi_0^j J_n(2C^j z)$, where J_n is the Bessel function of order n . This pattern is considered as a main signature for a discrete optical system, when experiencing first band dynamics.

To experimentally study this, we fabricate an ordered lattice of 81 waveguides (see Fig. 2a) with a lattice constant of $a = 16 \mu\text{m}$, on a $L = 10 \text{ cm}$ long fused silica chip (the geometrical shape of every waveguide corresponds to a super-gaussian of third order, with a cross section of about $4 \times 13 \mu\text{m}^2$ [34]). We study linear propagation using an experimental setup based on a sequence of two Spatial Light Modulators (SLMs) as sketched in Fig. 2b: we first use a transmission Holoeye LC2012 SLM (SLM1) to create an amplitude profile and, then, we modulate its phase using a reflective phase-only Holoeye PLUTO SLM (SLM2). In this way, we are able to excite a lattice injecting a modulated 532 nm laser beam on a single (or several) waveguide (s) with an input profile, as shown in Figs. 2c1 and d1, for fundamental and dipolar excitation, respectively. The generation of dipolar input profile requires amplitude as well as phase modulation in order to mimic the mode profile shown in Fig. 1b. However, to obtain the right experimental mode profile is not straightforward. We first inject a basic dipolar profile and experimentally observe the output image. We look for a clear dipole profile located at any waveguide and obtain its shape. Then, we use that shape to create an image in the SLM1 as a new input profile (of course, in the SLM2 we add the respective phase). We inject this new profile in the input facet and observe again the output pattern. We repeat this process up to observing only dipoles at the output profile. This is an experimentally iterative method we developed in this work, that allows us to obtain very precise input excitations.

Fig. 2c and d show the experimentally obtained discrete diffraction patterns for both input excitations. We observe that dipolar modes experience a larger spreading area compared to a standard fundamental mode excitation. The dipolar diffraction pattern shows a very broad profile, similar to the one observed for a similar lattice but using infrared light at 800 nm [35]. Our results clearly show the possibility to excite two very different spatial light distributions by simply changing the input profile. This could be used as a switch between two distinguishable orthogonal states, considering that the coupling between fundamental and dipolar modes is always zero in this geometry, without any hybridization [23].

Propagating stationary solutions of model (Eq. (1)) are obtained using the plane wave (PW) ansatz $\psi_n^j(z) = \psi_0^j \exp(ik_x n a) \exp(i\beta_j z)$ [4,5]. We find the system's longitudinal frequencies β_j as a function of the transversal wave-vector k_x : $\beta_j(k_x) = \beta_0^j + 2C^j \cos(k_x a)$. This expression defines two similar linear bands, but shifted in frequency depending on the specific coefficients. Both modes experience first-band dynamics, but in two completely independent bands. $\beta_j(k_x)$ corresponds to the dispersion relation for the lattice modes, and the derivative with respect to k_x gives the transversal discrete PW velocity

$$V_x^j/a \equiv \frac{\partial \beta_j}{\partial k_x} = -2C^j \sin(k_x a), \quad (2)$$

which becomes zero for $k_x a = m\pi$, with $m \in \mathbb{Z}$. This velocity finds a maximum $|V_x^j/a| = 2C^j$ for $k_x a = (2n+1)\pi/2$, with $n \in \mathbb{Z}$. As the linear band is bounded, there is a maximum transversal velocity determined by the coupling coefficients of each excited mode (in fact, the external propagating lobes in Fig. 2c and d propagate approximately

at this maximum velocity, defining the maximum covered area for linear transport on a given lattice). In order to test this prediction, we take advantage of the capability of our experimental setup and investigate the propagation properties of an ordered lattice by injecting a tilted gaussian beam. This gaussian profile requires to be as wider as possible in order to closely represent a PW of single wave-vector k_x . However, real setups are finite in the number of waveguides as well as in the propagation coordinate. Therefore, we implement our experiment using gaussian profiles that cover only 7 sites of the array, and adjusting the gaussian width to better match the theory (Eq. (2)). Using our SLM setup, we generated discretized gaussian profiles composed of fundamental or dipolar modes, as shown in Fig. 3a. We made a fine sweep of the input tilt by varying the input phase $\phi = k_x a$ in the interval $\{0, 2\pi\}$, with step size of $\pi/60$. For both mode configurations, we took 120 output profiles at $z = L$ and computed their center of mass transversal velocity, defined as $V_c^j \equiv X_c^j/L$, where $X_c^j = an_c^j$ and $n_c^j = \sum_n n |\psi_n^j|^2 / \sum_n |\psi_n^j|^2$. We collect our experimental results in Fig. 3.

We observe a good agreement between the experimental data (dots connected by lines) and the theoretical prediction for the transversal velocity (dashed lines). We made a fit of our experimental data and the theoretical formula (Eq. (2)), obtaining the coupling coefficients: $C^f = 0.316 \text{ cm}^{-1}$ and $C^d = 0.761 \text{ cm}^{-1}$ (these values are almost equal to the numerical coefficients described before). In the examples shown in Fig. 3, we observe a more visible dispersion for the dipolar gaussian beam compared to the fundamental mode one. This is essentially originated due to the complexity of generating a modulated dipole gaussian profile. But, nevertheless, the center of mass velocity follows a clear sine function tendency, validating our experimental method. Additionally, considering also the discrete diffraction results, we experimentally validate the use of simple (first band) tight-binding models (Eq. (1)) to theoretically study dipolar excitations on 1D lattices configurations.

4. Transport on disordered 1D lattices

Finally, we study the effect of disorder on 1D waveguide arrays, using fundamental and dipolar excitations. It is well known that disorder induces localization due to multiple destructive interference of randomly distributed scatters [36], what has been already confirmed experimentally in photonic lattices [37,38]. We fabricated eight lattices with 81 sites each, where disorder was created by randomly varying the distance between neighboring waveguides in the interval $a \in \{16 - \delta, 16 + \delta\} \mu\text{m}$, with $\delta = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. δ is defined as the spacing disorder (a larger δ implies a larger range of possible distances between neighbor waveguides, therefore an increasing degree of disorder). Our lattices, composed of identical waveguides, present only coupling (off-diagonal) disorder in model (Eq. (1)); i.e., the coefficients C_n^j are not constant due to the randomness in the horizontal waveguide positions [35,27] (a different waveguide separation produces a different local coupling coefficient between two neighboring waveguides, as expected from Fig. 1d). Fig. 4a and b show examples of an ordered ($\delta = 0$) and a disordered ($\delta = 5$) lattice. In order to have statistic, we illuminated every array in 40 different sites using single-site fundamental or dipolar mode excitations (as shown in Fig. 2b1 and c1). We obtained 40 output images for every array, and every mode, and computed the respective participation ratio $R^j \equiv (\sum |\psi_n^j|^2)^2 / \sum |\psi_n^j|^4$. We obtained an averaged value \bar{R}^j , including its standard deviation σ_R , as shown in Fig. 4c. We observe an overall tendency to localization for both modes as the disorder strength increases, as expected for disordered finite lattices [27,35].

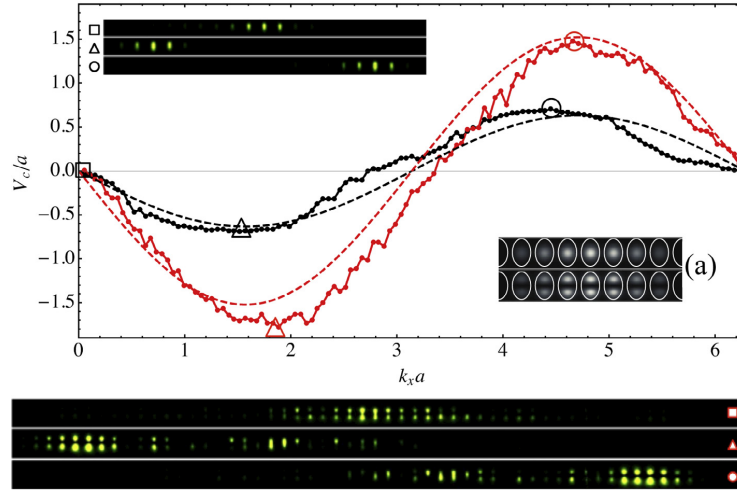


Fig. 3. (Color online) Beam propagation. (a) Input profiles. Main figure: velocity V_c/a of a discretized Gaussian beam versus the normalized transverse wavevector $k_x a$. Dots connected by lines and dashed lines correspond to the experimental and the theoretical data, respectively. Black and red color correspond to fundamental and dipolar modes. Insets show output intensity profiles corresponding to symbol positions.

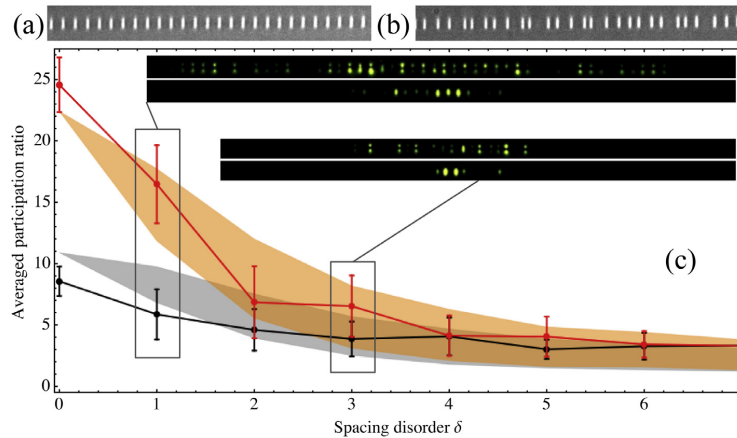


Fig. 4. (Color online) Transport in disordered lattices. Microscope image at the output facet of an (a) ordered and (b) disordered one-dimensional photonic lattice. (c) Averaged participation ratio \bar{R} versus spacing disorder δ . Dots show experimental values for fundamental (black) and dipolar (red) modes (bars indicate the experimental standard deviation). The shaded regions show the numerical results for the fundamental (gray) and the dipolar (orange) modes. Insets show two examples.

We numerically integrated model (Eq. (1)) by considering a random distribution of coupling constants C_n^j , in the interval $\{C^j(a + \delta), C^j(a - \delta)\}$. We considered the same range of distances as in the experiments (determined by parameter δ), assuming the dependence of coupling constants presented in Fig. 1d. We generated 100 realizations for every value of δ , and obtained the region $\bar{R}^j \pm \sigma_R$, which is shown by shaded areas in Fig. 4c. First of all, we find a very good qualitative agreement between our experimental and numerical results, validating again the utilization of model (Eq. (1)) to describe the dynamics of fundamental and dipolar modes on 1D lattices. We observe that the fabricated disordered lattices rapidly conduce to localization for the fundamental mode, while there is still a good transport for dipolar propagation (see examples

at $\delta = 1$). For even stronger disorder, dipolar modes still have the opportunity to explore the lattice and disseminate the energy, while the fundamental excitation is already well localized in space. When disorder is very strong ($\delta > 4$), both modes tend to spatially localize with an almost equal averaged participation ratio of $\bar{R} \approx 3$. Although there is a strong propagation difference for zero, weak and intermediate disorder, for stronger one any input excitation will remain localized as originally predicted in Ref. [36].

5. Conclusions

In conclusion, we have theoretically and experimentally studied a 1D waveguide array by considering fundamental and dipolar

mode excitations. We have shown, using single-site and gaussian beam excitations, that the spreading area is enhanced for dipolar modes in this lattice. Additionally, we have explored the effect of considering disorder on a 1D lattice and have shown that its effect is weaker for dipolar modes, although for stronger disorder both modes localize. After three different experiments, we validate the use of model (Eq. (1)) as a good theoretical description to study the dynamics of fundamental and dipolar modes in a first-band environment. Extension to hybrid interactions, higher dimensions, and nonlinear effects [21–23,39–43] are interesting extensions to be explored in detail in the future. Our experimental results may open up a new window to perform p-orbital quantum simulations using photons. Our setup may also provide a more controllable platform for the study of exotic p-orbital phases, which have been previously suggested in the context of cold atoms in optical lattices [24].

Conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

Acknowledgments

Authors want to acknowledge M. Johansson for useful discussions and U. Naether for fabricating the lattices. This work was supported in part by Program ICM (RC130001), FONDECYT (1151444), the Deutsche Forschungsgemeinschaft (462/6–1, SZ 276/7–1, SZ 276/9–1, BL 574/13–1), and the German Ministry of Education and Research (Center for Innovation Competence Program, 03Z1HN31).

References

- [1] Lederer F, Stegeman GI, Christodoulides DN, et al. Discrete solitons in optics. *Phys Rep* 2008;463:1–126.
- [2] Flach S, Gorbach A. Discrete breathers – advances in theory and applications. *Phys Rep* 2008;467:1–116.
- [3] Aceves AB, De Angelis C, Trillo S, et al. Storage and steering of self-trapped discrete solitons in nonlinear waveguide arrays. *Opt Lett* 1994;19:332–4.
- [4] Pertsch T, Zentgraf T, Peschel U, et al. Anomalous refraction and diffraction in discrete optical systems. *Phys Rev Lett* 2002;88:093901.
- [5] Eisenberg HS, Silberberg Y, Morandotti R, et al. Diffraction management. *Phys Rev Lett* 2000;85:1863.
- [6] Pertsch T, Dannberg P, Elfein W, et al. Optical Bloch oscillations in temperature tuned waveguide arrays. *Phys Rev Lett* 1999;83:4752.
- [7] Peschel U, Pertsch T, Lederer F. Optical Bloch oscillations in waveguide arrays. *Opt Lett* 1998;23:1701–3.
- [8] Trompeter H, Krolikowski W, Neshev DN, et al. Bloch oscillations and zener tunneling in two-dimensional photonic lattices. *Phys Rev Lett* 2006;96:053903.
- [9] Longhi S, Marangoni M, Lobino M, et al. Observation of dynamic localization in periodically curved waveguide arrays. *Phys Rev Lett* 2006;96:243901.
- [10] Szameit A, Garanovich IL, Heinrich M, et al. Observation of two-dimensional dynamic localization of light. *Phys Rev Lett* 2010;104:223903.
- [11] Keil R, Zeuner JM, Dreisow F, et al. The random mass Dirac model and long-range correlations on an integrated optical platform. *Nat Commun* 2013;4:1368.
- [12] Christodoulides DN, Joseph RI. Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides. *Opt Lett* 1988;13:794–6.
- [13] Eisenberg HS, Silberberg Y, Morandotti R, et al. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays. *Phys Rev Lett* 1998;81:3383.
- [14] Fleischer JW, Segev M, Efremidis NK, et al. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices. *Nature* 2003;422:147.
- [15] Vicencio RA, Cantillano C, Morales-Inostroza L, et al. Observation of localized states in Lieb photonic lattices. *Phys Rev Lett* 2015;114:245503.
- [16] Mukherjee S, Spracklen A, Choudhury D, et al. Observation of a localized flat-band state in a photonic Lieb lattice. *Phys Rev Lett* 2015;114:245504.
- [17] Mukherjee S, Thomson RR. Observation of localized flat-band modes in a quasi-one-dimensional photonic rhombic lattice. *Opt Lett* 2015;40:5443–6.
- [18] Weimann S, Morales-Inostroza L, Real B, et al. Transport in sawtooth photonic lattices. *Opt Lett* 2016;41:2414–7.
- [19] Xia S, Hu Y, Song D, et al. Demonstration of flat-band image transmission in optically induced Lieb photonic lattices. *Opt Lett* 2016;41:1435–8.
- [20] Zong Y, Xia S, Tang L, et al. Observation of localized flat-band states in Kagome photonic lattices. *Opt Express* 2016;24:8877–85.
- [21] Wu C, Bergman D, Balents L, et al. Flat bands and wigner crystallization in the Honeycomb optical lattice. *Phys Rev Lett* 2007;88:070401.
- [22] Li X, Zhao E, Liu WV. Topological states in a ladder-like optical lattice containing ultracold atoms in higher orbital bands. *Nat Commun* 2013;4:1523.
- [23] Yin S, Baarsma JE, Heikkinen MOJ, et al. Superfluid phases of fermions with hybridized s and p orbitals. *Phys Rev A* 2015;92:053616.
- [24] Li X, Liu WV. Physics of higher orbital bands in optical lattices: a review. *Rep Prog Phys* 2016;79:116401.
- [25] Mandelik D, Eisenberg HS, Silberberg Y, et al. Band-gap structure of waveguide arrays and excitation of floquet-bloch solitons. *Phys Rev Lett* 2003;90:053902.
- [26] Szameit A, Nolte S. Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures. *J Phys B: At Mol Opt Phys* 2010;43:163001.
- [27] Rojas-Rojas S, Morales-Inostroza L, Naether U, et al. Analytical model for polarization-dependent light propagation in waveguide arrays and applications. *Phys Rev A* 2014;90:063823.
- [28] Snyder AW, Young WR. Modes of optical waveguides. *J Opt Soc Am* 1978;68:297.
- [29] Snyder AW, Love JD. Optical waveguide theory. New York: Chapman and Hall; 1983.
- [30] Gloge D. Weakly guiding fibers. *Appl Opt* 1971;10:2252.
- [31] Szameit A, Blömer D, Burghoff J, et al. Hexagonal waveguide arrays written with fs-laser pulses. *Appl Phys B* 2006;82:507.
- [32] Kumar A, Varshney RK. Propagation characteristics of highly elliptical core optical waveguides: a perturbation approach. *Opt Quantum Electron* 1984;16:349.
- [33] Marcuse D. Theory of dielectric optical waveguides. New York: Academic Press; 1974.
- [34] Szameit A, Dreisow F, Pertsch T, et al. Control of directional evanescent coupling in fs laser written waveguides. *Opt Exp* 2007;15:1579.
- [35] Naether U, Rojas-Rojas S, Martínez AJ, et al. Enhanced distribution of a wavepacket in lattices with disorder and nonlinearity. *Opt Express* 2013;21:927.
- [36] Anderson PW. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys Rev* 1958;109:1492.
- [37] Schwartz T, Bartal G, Fishman S, et al. Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature* 2007;446:52.
- [38] Lahini Y, Avidan A, Pozzi F, et al. Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices. *Phys Rev Lett* 2008;100:013906.
- [39] Johansson M, Sukhorukov AA, Kivshar YS. Discrete reduced-symmetry solitons and second-band vortices in two-dimensional nonlinear waveguide arrays. *Phys Rev E* 2009;80:046604.
- [40] Conforti M, De Angelis C, Akylas TR. Energy localization and transport in binary waveguide arrays. *Phys Rev A* 2011;83:043822.
- [41] Keil R, Poli C, Heinrich M, et al. Universal sign control of coupling in tight-binding lattices. *Phys Rev Lett* 2016;116:213901.
- [42] Rose R, Richter R, Terhalle B, et al. Discrete and dipole-mode gap solitons in higher-order nonlinear photonic lattices. *Appl Phys B* 2007;89:521.
- [43] Xia S, Song D, Zong Y, et al. Observation of self-trapping and rotation of higher-band solitons in two-dimensional photonic lattices. *Opt Express* 2015;23:4397.