



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

ECUACIONES CONSTITUTIVAS NO-LINEALES PARA MODELAR ROCAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL MECÁNICA

CLAUDIA ANDREA ORTIZ BENAVIDES

PROFESOR GUÍA:  
ROGER BUSTAMANTE PLAZA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ELENA ATROSHCHENKO  
NÉSTOR GUTIÉRREZ DUARTE

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto FONDECYT No. 1160030

SANTIAGO DE CHILE

2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL MECÁNICA  
POR: CLAUDIA ANDREA ORTIZ BENAVIDES  
FECHA: 2018  
PROF. GUÍA: SR. ROGER BUSTAMANTE PLAZA

## ECUACIONES CONSTITUTIVAS NO-LINEALES PARA MODELAR ROCAS

En el presente trabajo se estudiará el comportamiento mecánico de roca seca tipo ígnea, la cual corresponde al 95 % de la corteza terrestre [1]. Esto con la finalidad de contribuir a estudios relacionados con la predicción de sismos y también al campo de la extracción de recursos naturales en ambientes poco favorables.

El objetivo principal de este estudio es mejorar y precisar las ecuaciones constitutivas no-lineales propuestas por R.Bustamante y K.R Rajagopal que permiten modelar el comportamiento mecánico de las rocas, lo cual se logra mediante los siguientes objetivos específicos: Analizar tres modelos matemáticos aplicados a datos experimentales de ensayos de compresión sin restricción lateral, compresión con restricción lateral y compresión triaxial. Luego, se aplica error de mínimos cuadrados entre los datos experimentales utilizados y los obtenidos de manera teórica para definir la combinación de constantes que entrega el mejor ajuste de los datos teóricos a la curva experimental. Finalmente, a través del ensayo acústico se busca verificar la validez de las ecuaciones constitutivas propuestas.

Para este estudio se supone en particular expresiones donde las deformaciones se tienen como funciones de los esfuerzos y la roca al ser sometida a deformaciones pequeñas presenta un comportamiento elástico no-lineal.

Para este fin, inicialmente se recolectarán datos experimentales obtenidos de los ensayos en roca ya mencionados. Luego, excluyendo el ensayo acústico, a través del software Python se realizará un ajuste a las curvas características de esfuerzo y deformación, utilizando 3 modelos matemáticos que se basan en las ecuaciones constitutivas presentadas en la sección 2.2.3, aplicando error de mínimos cuadrados entre los datos teóricos y experimentales para obtener la combinación de constantes que generan el ajuste más preciso a la curva experimental. Finalmente, a través del uso de ecuaciones incrementales se busca analizar el ajuste de los datos experimentales correspondientes al ensayo acústico con las ecuaciones constitutivas determinadas anteriormente y comprobar la utilidad de éstas.

Los tres modelos propuestos permiten modelar el comportamiento de las rocas, con un error relativo promedio que va desde 7,29 % a 113,0 %. Se debe mencionar que las ecuaciones constitutivas propuestas sólo pueden ser aplicadas hasta un rango de esfuerzo de 15 [MPa] a 30 [MPa]. Respecto al ensayo acústico, las curvas teóricas siguen la tendencia de la curva experimental, lo cual permite validar parcialmente las ecuaciones constitutivas propuestas.

*“Debes descubrir cuál es tu camino y la mejor ruta para llegar a él, porque nadie más sabe cuál es el camino.”*

*Nadia Comaneci*

## **Agradecimientos**

A pasos de dar término a una etapa importante de mi vida, llena de sorpresas en muchos ámbitos, no sólo en lo académico. Debo agradecer en primera instancia a mis padres, Alejandra y Sergio, quienes me han apoyado en todas las cosas que se me han pasado por la cabeza y durante estos años me ha instado a ser una persona integral, curiosa y consciente de las distintas realidades de este mundo. A mi hermano Sergio, quien fue un pilar fundamental en los tiempos de frustración en Bachillerato, que se ha preocupado siempre por mi bienestar y ha confiado 100% en mis capacidades.

A mis amigos de Bachi, en especial a la Frani, Javo, Verito y Amaru por estar siempre ahí.

A mis amigas las lolitas, que me dieron una de las mejores bienvenidas cuando me transferí de bachillerato y han sido un núcleo importante en estos 7 años en ingeniería. Mari, Cami, Anto y Vale, gracias por las conversaciones, las discusiones densas y ser indignadas como yo.

A los mecanipastas, por la buena onda y el apañe. Sumado a la familia de gimnasia del S.I., B.T y CEI 2016, con quienes me llené de aprendizajes personales e hicimos grandes proyectos para la facultad, junto con el Guille y la Ivonne.

A Tomás Ayala, Pipe Salas, Coni Fuentes, Franky, Emilio y Patricio Arrué, quienes tuvieron mucha disposición en ayudarme en el trabajo de memoria con sus conocimientos computacionales y geológicos.

Al profesor Roger Bustamante, por darme la oportunidad de trabajar con él en un área que siempre ha sido de mi interés como la geología y las rocas. Además de guiarme de una manera muy clara y precisa durante todo este trabajo.

A la profesora Elena Atroshchenko, que siempre me ayudó a mejorar mi trabajo agregando nuevas perspectivas.

A Néstor Gutiérrez, que me ayudó a dar un giro más interdisciplinario a mi trabajo y siempre tuvo muy buena disposición para guiarme en temas que no están relacionados con mecánica directamente.

Al IDIEM por facilitar los datos experimentales para este trabajo, así como también al proyecto FONDECYT No. 1160030 ON THE USE OF IMPLICIT CONSTITUTIVE RELATIONS TO MODEL THE BEHAVIOUR OF ELASTIC AND INELASTIC DEFORMATIONS IN CONTINUE: APLICATIONS TO THE MATHEMATICAL MODELLING OF ROCK.

## Tabla de Contenido

1	Introducción .....	1
1.1	Motivación .....	3
1.2	Objetivo General.....	3
1.3	Objetivos Específicos .....	3
1.4	Alcances .....	3
2	Antecedentes Específicos.....	5
2.1	Modelos de Elasticidad.....	5
2.2	Ecuaciones Básicas .....	6
2.2.1	Cinemática y Ecuaciones de Movimiento .....	6
2.2.2	Ecuaciones Constitutivas.....	8
2.2.3	Desigualdades Constitutivas y Restricciones Adicionales .....	8
2.2.4	Modelo Propuesto para Comportamiento de una Roca .....	9
2.2.5	Modelo Propuesto para Comportamiento Mecánico de una Roca .....	11
2.3	Tipos de Ensayos en Rocas.....	14
2.3.1	Compresión sin Restricción Lateral .....	16
2.3.2	Compresión con Restricción Lateral .....	17
2.3.3	Compresión Triaxial.....	19
2.3.4	Ensayo Acústico .....	21
3	Breve Introducción a la Geología de Rocas Ígneas y la Sismología.....	24
3.1	Estructura en Capas de la Tierra .....	24

3.2	Rocas Ígneas .....	25
3.2.1	Texturas Ígneas.....	28
3.2.2	Composición Ígneas .....	33
3.2.3	Alteraciones .....	34
3.2.4	Isotropía y Anisotropía .....	34
3.3	Sismos .....	35
3.4	Cordillera de los Andes.....	39
4	Metodología .....	41
4.1	Recopilación de Datos .....	41
4.2	Programación Modelo No- Lineal Presentado en Sección 2.2.3.1 .....	44
4.3	Programación Ajuste Ensayo Acústico.....	46
5	Resultados .....	47
5.1	Ensayo de Compresión Simple .....	47
5.1.1	Deformación Axial .....	47
5.1.2	Deformación Lateral.....	52
5.2	Ensayo de Compresión con Restricción Lateral .....	58
5.2.1	Deformación Axial .....	58
5.3	Ensayo de Compresión Triaxial.....	63
5.3.1	Deformación Axial .....	63
5.3.2	Deformación Lateral.....	68
5.4	Ensayo Acústico .....	73
6	Discusión.....	77

7	Conclusiones .....	83
8	Bibliografía.....	85

# 1 Introducción

Históricamente la extracción de recursos naturales en ambientes poco favorables ha sido una actividad de suma importancia para el desarrollo económico de las distintas naciones. En el caso de Chile, la minería contribuye en un 15 % a los ingresos fiscales, siendo uno de los aportes más significativos, por esta razón y sumado a la alta actividad sísmica de nuestro país, dada su ubicación en el “Anillo de Fuego del Pacífico”, resulta necesario determinar el comportamiento mecánico de las rocas presentes en la corteza terrestre que almacenan recursos naturales y que son responsables de los movimientos de la tierra. Esto con el fin de mejorar los métodos de extracción actuales, aumentar las medidas de seguridad que estos involucran y contribuir a estudios sismológicos relacionados con la predicción de sismos.

En la corteza terrestre se pueden encontrar tres clases de rocas, cuya clasificación depende de sus condiciones de formación, sobre todo de los parámetros de presión y temperatura. Las tres clases que se conocen actualmente son: rocas ígneas, metamórficas y sedimentarias.

Las rocas ígneas representan el 95% de la corteza terrestre [1], éstas pueden ser clasificadas en plutónicas y volcánicas, en el primer caso la roca se forma a alta presión y temperatura, pero se enfría lentamente permitiendo la formación de cristales bien definidos, mientras que las rocas ígneas volcánicas se enfrían rápidamente al exterior de la corteza terrestre, usualmente tras una erupción volcánica.

En el presente trabajo, se estudiará el comportamiento mecánico de las siguientes rocas tipo ígnea: pórfido, andesita y gabro. Las cuales, en este caso, se caracterizan por tener poca humedad, presentar comportamiento aproximadamente isotrópico, distribución de cristales homogéneo y sin orientación. Pero, además al ser sometidas a deformaciones pequeñas presentan un comportamiento elástico no-lineal.

Generalmente para modelar este comportamiento se ha utilizado la teoría clásica de elasticidad y plasticidad, donde se tiene que el comportamiento elástico de un sólido es lineal y por lo tanto tiene una pendiente constante, correspondiente al módulo de Young (ver Figura 1.1 A). Sin embargo, no todos los sólidos presentan dicho comportamiento elástico, K.R Rajagopal y A.R Srinivasa [2] identificaron una clase de cuerpos elásticos, para los cuales el esfuerzo o la energía almacenada no se pueden expresar explícitamente en términos del gradiente de desplazamiento, como es el caso de las rocas (ver Figura 1.1 B).

A través del trabajo de R.Bustamante y K.R Rajagopal [3] se obtuvo que el comportamiento de rocas secas se puede modelar de manera más precisa a través de ecuaciones constitutivas que

son casos especiales de las relaciones constitutivas implícitas propuestas recientemente en la literatura. Sin embargo, el modelamiento mecánico en este trabajo no presenta la precisión deseada.

En el presente estudio se busca mejorar y precisar las ecuaciones constitutivas no-lineales para modelar rocas propuestas por R. Bustamante y K.R. Rajagopal en [3], mediante la comparación de datos experimentales en rocas y datos teóricos obtenidos a través de tres modelos matemáticos que serán presentados en el capítulo 2.

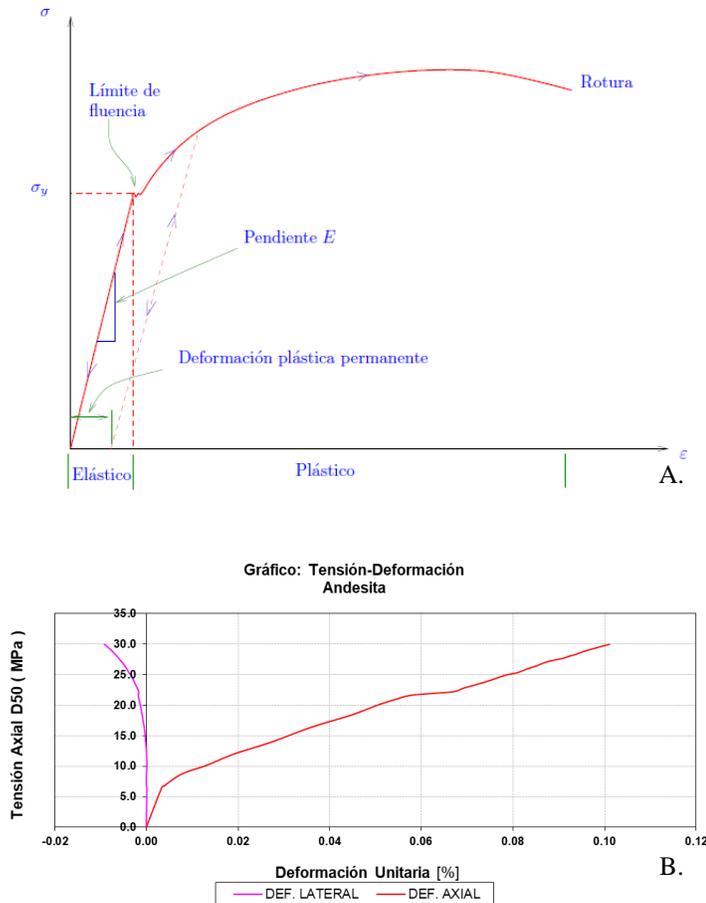


Figura 1.1 Comportamiento de cuerpos elásticos **A.** Resultado típico para ensayo uniaxial de tracción de acuerdo con teoría clásica lineal. **B.** Resultado de comportamiento elástico en roca para ensayo de compresión sin restricción lateral. Fuente: Apunte de resistencia de materiales del profesor Roger Bustamante e IDIEM.

## **1.1 Motivación**

El presente estudio representa el punto de inicio para el desarrollo de nuevos métodos de extracción de recursos naturales en ambientes poco favorables, lo que su vez se puede traducir en una disminución de riesgos para las personas que trabajan en dicho campo. Por otra parte, puede ser de gran utilidad para la disciplina de geo-mecánica en el área de estabilidad, deformación, y resistencia de macizos rocosos, pero también, significa una contribución a la profundización de investigaciones relacionadas con sismología en el área de la geofísica.

## **1.2 Objetivo General**

El objetivo principal del presente estudio es mejorar y precisar las ecuaciones constitutivas no-lineales propuestas por R.Bustamante y K.R Rajagopal en [3] para modelar el comportamiento mecánico de roca seca tipo ígnea.

## **1.3 Objetivos Específicos**

Tomando en cuenta el objetivo general planteado, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Mejorar el modelo no-lineal propuesto por R.Bustamante y K.R Rajagopal en [3], a través de tres modelos matemáticos aplicados a datos experimentales de ensayo de compresión sin restricción lateral, compresión con restricción lateral y compresión triaxial.
- Determinar error de mínimos cuadrados entre los datos experimentales utilizados y los datos teóricos obtenidos a través de los modelos matemáticos utilizados.
- Definir la combinación de constantes que permiten el mejor ajuste de los datos teóricos con menor error a la curva experimental.
- Validar las ecuaciones constitutivas no-lineales obtenidas, a través de su aplicación y comparación con datos experimentales en el ensayo acústico presentado en la sección 2.3.4.

## **1.4 Alcances**

El presente análisis es principalmente de tipo numérico, limitándose a rocas con poca humedad tipo ígnea, suponiendo en una primera aproximación comportamiento elástico no-lineal y sin

disipación de energía. Las rocas por analizar son: andesita, gabro y pórfido, estas presentarían un comportamiento aproximadamente isotrópico, asumiendo que sus cristales no poseen una orientación específica. Los datos experimentales utilizados corresponden a cuatro tipos distintos de ensayos: compresión sin restricción lateral, compresión con restricción lateral, compresión triaxial y acústico. De los ensayos mencionados, el Centro de Investigación, Desarrollo e Innovación de Estructuras y Materiales (IDIEM) facilitó los datos experimentales pertenecientes a los ensayos de compresión sin restricción lateral y compresión triaxial, mientras que los datos experimentales del ensayo de compresión con restricción lateral fueron facilitados por la empresa Codelco, división mina “El Teniente” y los datos experimentales del ensayo acústico se obtuvieron de la publicación de P.A Johnson y P.N.J Rasolfosaon [4].

## 2 Antecedentes Específicos

A continuación, se presenta la información necesaria para entender el tema del presente trabajo de título. Aquí profundizaremos en conceptos de elasticidad, teorías constitutivas implícitas, las ecuaciones básicas necesarias y los distintos tipos de ensayos realizados en las rocas en estudio.

### 2.1 Modelos de Elasticidad

En la actualidad la aproximación clásica de linealización es ampliamente utilizada para describir la respuesta elástica de distintos cuerpos en mecánica de sólidos. De hecho, cualquier otra teoría que involucre deformación de tipo lineal, está destinada a llegar a la teoría clásica lineal, comenzando por la elasticidad de Cauchy [5,6] o la subclase de cuerpos elásticos de Green [7,8], donde se supone que el gradiente de desplazamiento es pequeño. Sin embargo, K.R Rajagopal y A.R Srinivasa [2] identificaron una clase grande de cuerpos elásticos, para los cuales el esfuerzo o la energía almacenada en estos no se puede expresar de manera explícita en términos del gradiente de deformación. Razón por la cual K.R Rajagopal [9,10] propone una nueva clase de cuerpos elásticos que involucra relaciones implícitas entre el esfuerzo y el gradiente de deformación. Esta nueva clase de cuerpos elásticos incluye como subclase especial la elasticidad de Cauchy, pero también incluye relaciones constitutivas para cuerpos isotrópicos en las que el tensor Cauchy-Green se encuentra en función del esfuerzo [11].

Esta nueva clase de modelo define como cuerpo elástico a aquel sólido que es incapaz de disipar energía al estar sometido a cargas u otros procesos. Por otra parte, se considera que la deformación se mantiene pequeña, independiente del tamaño del esfuerzo. Es decir que se cumple la siguiente expresión matemática [11]:

$$\max \|\nabla \mathbf{u}\| = \mathbf{O}(\delta), \delta \ll 1 \quad (1)$$

Donde  $\|\nabla \mathbf{u}\|$  representa la norma del gradiente del vector desplazamiento en función de la posición de una partícula dentro de un cuerpo.

En el presente trabajo se proponen tres modelos matemáticos para estudiar el comportamiento en rocas secas, que se basa en la teoría de cuerpos elásticos implícitas desarrollada por K.R. Rajagopal junto a sus colaboradores [2,10,11,12,13,14] y el trabajo de K.R Rajagopal y R. Bustamante en [3], el cual corresponde al modelo actual para modelar rocas.

Para este fin K.R Rajagopal propone la siguiente relación constitutiva implícita:

$$\mathfrak{F}(\mathbf{T}, \mathbf{B}) = 0 \quad (2)$$

Donde  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzo de Cauchy y  $\mathbf{B}$  es el tensor Cauchy-Green, de (2) se obtiene una subclase donde el tensor de Cauchy-Green se obtiene en función del esfuerzo y se define del siguiente modo:

$$\mathbf{B} = \mathfrak{G}(\mathbf{T}) \quad (3)$$

Además, la ecuación clásica constitutiva para Cauchy en cuerpos elásticos es  $\mathbf{T} = \mathfrak{R}(\mathbf{B})$ . Suponiendo que la norma del gradiente de desplazamiento sea muy pequeña como se muestra en (1), se tiene que el tensor Cauchy-Green tiene aproximadamente la siguiente forma  $\mathbf{B} \approx 2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I}$ , donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformación linealizado (ver ecuación (12)) e  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad. De (3) se obtiene otra subclase donde se tiene la deformación en función del tensor de esfuerzo de Cauchy:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathfrak{S}(\mathbf{T}) \quad (4)$$

Esta nueva subclase resulta primordial a la hora de estudiar cuerpos elásticos que se comportan de manera no lineal, pero con pequeñas deformaciones, comportamiento como es el caso de las rocas ígneas, que es el material de estudio en el presente trabajo. Las ecuaciones anteriormente presentadas se obtuvieron del trabajo de K.R Rajagopal [10].

Cabe mencionar que en el trabajo de R. Bustamante y K.R Rajagopal [3] se observó que la roca seca presenta un comportamiento distinto al estar bajo esfuerzos de tracción y compresión.

## 2.2 Ecuaciones Básicas

### 2.2.1 Cinemática y Ecuaciones de Movimiento

Una partícula en un cuerpo  $\mathcal{B}$  se denota por  $X$ , mientras que en la configuración de referencia ocupa la posición  $\mathbf{X} = \kappa_R(X)$ . Por otra parte, la configuración de referencia se denota por  $\kappa_R(\mathcal{B})$ . En la configuración actual la posición de una partícula se denota por  $\mathbf{x}$  y su función de movimiento viene dada por  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ . Luego el vector desplazamiento se encuentra definido del siguiente modo:

$$\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (5)$$

A continuación, se tiene que el gradiente de desplazamiento viene dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1} \quad (6)$$

Donde  $\mathbf{F}$  corresponde al gradiente de deformación definido a través de:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (7)$$

La velocidad se define por:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (8)$$

El gradiente de la velocidad  $\mathbf{L}$ , su parte simétrica  $\mathbf{D}$  y su parte anti-simétrica  $\mathbf{W}$  se definen como:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} [\mathbf{L} + (\mathbf{L})^T], \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} [\mathbf{L} - (\mathbf{L})^T] \quad (9)$$

Los tensores de alargamiento Cauchy-Green  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  se definen como:

$$\mathbf{B} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{C} := \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad (10)$$

El tensor de deformación Green-St.Venant  $\mathbf{E}$  y la deformación Almansi-Hamel  $\mathbf{e}$  se expresan del siguiente modo:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{e} := \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (11)$$

Finalmente, el tensor de deformación linealizada se basa en aproximaciones moleculares de Navier y se representa a partir de la siguiente expresión matemática:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] \quad (12)$$

El tensor de esfuerzos de Cauchy  $\mathbf{T}$  satisface la ecuación de movimiento siguiente [3]:

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (13)$$

Donde  $\rho$  corresponde a la densidad del cuerpo, mientras que  $\mathbf{b}$  son las fuerzas del cuerpo en la configuración actual.

Cabe mencionar que las expresiones expuestas anteriormente provienen del trabajo de K.R Rajagopal [11].

## 2.2.2 Ecuaciones Constitutivas

El comportamiento mecánico de las rocas está modelado por la ecuación (4), donde se supone la existencia de una función escalar  $\Pi = \Pi(\mathbf{T})$  de manera que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}} \quad (14)$$

Si además suponemos que la función  $\Pi$  es isotrópica, se obtiene que  $\Pi = \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , donde  $\sigma_p$  con  $p=1,2,3$  son los valores propios del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$ . La función  $\Pi$  debe satisfacer la siguiente condición de simetría.

$$\Pi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \Pi(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3) = \Pi(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2) \quad (15)$$

Luego de la ecuación (14) se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p} \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \quad (16)$$

Ecuación representativa de lo que queremos encontrar, donde  $\mathbf{a}^{(p)}$  son los vectores propios de  $\mathbf{T}$ . Si  $\varepsilon_p$ ,  $p=1,2,3$  denota las deformaciones principales, de (16) tenemos que:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_p} \quad (17)$$

Cabe recordar que la deformación en el modelo clásico lineal viene dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{(1-\nu)}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} (tr \mathbf{T}) \mathbf{I} \quad (18)$$

Donde  $E$  y  $\nu$  son respectivamente el módulo de Young y la razón de Poisson.

## 2.2.3 Desigualdades Constitutivas y Restricciones Adicionales

Algunas restricciones adicionales se imponen a las ecuaciones constitutivas para asegurar un comportamiento razonable para el cuerpo, la primera de estas restricciones corresponde a la modificación de la desigualdad de Baker-Ericksen (ver [15]), la cual ha sido propuesta para el modelo (3) como:

$$(\sigma_a - \sigma_b)(\varepsilon_a - \varepsilon_b) > 0, \sigma_a \neq \sigma_b \quad (19)$$

En la desigualdad anterior se supone que las direcciones de las deformaciones principales tienen la misma dirección que los esfuerzos principales. De (17) la desigualdad anterior se convierte en:

$$(\sigma_a - \sigma_b) \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_a} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_b} \right) > 0, \quad \sigma_a \neq \sigma_b \quad (20)$$

Si suponemos que cuando  $\mathbf{T}$  es cero el cuerpo no presenta deformaciones residuales, se tiene que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}(0,0,0) = 0, \quad p = 1,2,3 \quad (21)$$

## 2.2.4 Modelo Propuesto para Comportamiento de una Roca

Con la finalidad de estudiar los datos experimentales a utilizar de las distintas rocas ígneas mencionadas anteriormente, se proponen 3 expresiones para la función escalar  $\Pi$  (expresiones utilizadas en [16] aplicada al modelo (3)), donde la ecuación constitutiva del modelo 1 corresponde a la utilizada en el trabajo de R. Bustamante y K.R Rajagopal en [3]. La expresión de la función escalar  $\Pi$  para el modelo 1 es:

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = & f_1(\sigma_1) + f_1(\sigma_2) + f_1(\sigma_3) + f_2(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3) \\ & + f_2(\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_3) + f_2(\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2) \\ & + f_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

La diferencia que presentan el modelo 1 con el modelo actual propuesto en la literatura, se debe principalmente al valor de las constantes utilizadas, para las funciones  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , dado que, en el modelo actual, estas tienen un valor fijo que se presenta en la *Tabla A.2* del anexo A, mientras que en el modelo 1 del presente trabajo las constantes se van a evaluar en una vecindad de valores que se pueden apreciar en la *Tabla A.1* del anexo A.

Ahora, para el segundo modelo a analizar, a la función anterior se le añade una nueva función denotada por  $h$  (también expuesta en la sección 2.2.4). Luego la función  $\Pi$  es:

$$\begin{aligned}
\Pi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = & f_1(\sigma_1) + f_1(\sigma_2) + f_1(\sigma_3) + f_2(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3 + h(\sigma_2) + h(\sigma_3)) \\
& + f_2(\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_3 + h(\sigma_1) + h(\sigma_3)) \\
& + f_2(\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2 + h(\sigma_1) + h(\sigma_2)) + f_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

Finalmente, para el último modelo a evaluar, la función escalar  $\Pi$  se mantiene como en (22), sólo que esta vez la función  $f_1$  y  $f_2$  sufren modificaciones respecto a lo usado en [3], las que serán mostradas en la subsección 2.2.4. Cabe mencionar que todas las funciones constituyentes de la función  $\Pi$  se explicitan en la sección 2.2.4.

Usando (22) y (23) en (17) se obtiene:

- Primer modelo por evaluar

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p} = & f_1'(\sigma_p) + f_2'(\sigma_p)(\sigma_q + \sigma_r) + f_2(\sigma_q) \\
& + f_2(\sigma_r) + \frac{1}{3}f_3'\left(\frac{\sigma_p + \sigma_q + \sigma_r}{3}\right), \quad p \neq q \neq r
\end{aligned} \tag{24}$$

- Segundo modelo por evaluar

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p} = & f_1'(\sigma_p) + f_2'(\sigma_p)(\sigma_q + \sigma_r + h(\sigma_q) + h(\sigma_r)) + f_2(\sigma_q)(1 + h'(\sigma_p)) \\
& + f_2(\sigma_r)(1 + h'(\sigma_p)) + \frac{1}{3}f_3'\left(\frac{\sigma_p + \sigma_q + \sigma_r}{3}\right), \quad p \neq q \neq r
\end{aligned} \tag{25}$$

Para el tercer modelo es válido (24).

Examinando las ecuaciones del modelo (22) y (23), primero podemos ver que éstas satisfacen las condiciones de simetría presentadas en (15). En segundo lugar se puede apreciar que para los términos derivados de (22) y (23),  $f_1'(\sigma_1)$  se podría usar para estudiar los datos de un test de tensión/compresión simple, mientras que los términos  $f_2'(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3 + h(\sigma_2) + h(\sigma_3)) + f_2(\sigma_2)(1 + h'(\sigma_1)) + f_2(\sigma_3)(1 + h'(\sigma_1))$  y  $f_2'(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3) + f_2(\sigma_2) + f_2(\sigma_3)$  se podrían usar para considerar el efecto lateral de cargas generalizadas de la razón de Poisson, finalmente el último término  $\frac{1}{3}f_3'\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$  podría utilizarse para estudiar los efectos de la carga esférica en el cuerpo, lo cual no será abarcado en el presente trabajo.

De la ecuación (24) y (25) tenemos que:

- Primer modelo por evaluar

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}(0,0,0) = f_1'(0) + 2f_2'(0) + f_2(0) + f_2(0) + \frac{1}{3}f_3'(0) \quad (26)$$

- Segundo modelo por evaluar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}(0,0,0) &= f_1'(0) + 2f_2'(0)h(0) + f_2(0)(1 + h'(0)) \\ &\quad + f_2(0)(1 + h'(0)) + \frac{1}{3}f_3'(0) \end{aligned} \quad (27)$$

Luego (21) se cumple si se supone que:

$$f_1'(0) = 0, f_2(0) = 0, f_3'(0) = 0, h(0) = 0 \quad (28)$$

Cabe mencionar que  $f_2'(0)$  y  $h'(0)$  no necesariamente son cero.

### 2.2.5 Modelo Propuesto para Comportamiento Mecánico de una Roca

Anteriormente se supuso que el comportamiento de las rocas bajo el efecto de tensión y compresión es distinto, lo que implica:

$$f(-x) \neq -f(x) \quad (29)$$

Lo presentado en (29) se cumple para todas las funciones que constituyen (22) y (23).

Se utilizarán las funciones  $f_i$  propuestas en el trabajo de R. Butsmante y K.R Rajagopal en [3], las cuales son:

- Primer modelo para evaluar

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \alpha_1 [d_1^{c_1 x} - c_1 \ln(d_1) x], \\ f_2(x) &= \alpha_2 [d_2^{c_2 x} - 1], \\ f_3(x) &= 3\alpha_3 [d_3^{c_3 x} - c_3 \ln(d_3) x], \end{aligned} \quad (30)$$

- Segundo modelo para evaluar

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \alpha_1 [d_1^{c_1 x} - c_1 \ln(d_1) x], \\
 f_2(x) &= \alpha_2 [d_2^{c_2 x} - 1], \\
 f_3(x) &= 3\alpha_3 [d_3^{c_3 x} - c_3 \ln(d_3) x], \\
 h(x) &= \alpha_4 [d_4^{c_4 x} - 1]
 \end{aligned} \tag{31}$$

- Tercer modelo para evaluar

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \alpha_1 [d_1^{c_1 x} - c_1 \ln(d_1) x] + \beta_1 [g_1^{k_1 x} - k_1 \ln(g_1) x], \\
 f_2(x) &= \alpha_2 [d_2^{c_2 x} - 1] + \beta_2 [g_2^{k_2 x} - 1], \\
 f_3(x) &= 3\alpha_3 [d_3^{c_3 x} - c_3 \ln(d_3) x],
 \end{aligned} \tag{32}$$

Donde  $\alpha_i, c_i, d_i, \beta_i, g_i,$  y  $k_i$  son constantes. Las derivadas de las ecuaciones presentadas en (30), (31) y (32) son:

- Primer modelo para evaluar

$$\begin{aligned}
 f_1'(x) &= \alpha_1 c_1 \ln(d_1) [d_1^{c_1 x} - 1], \\
 f_2'(x) &= \alpha_2 c_2 \ln(d_2) d_2^{c_2 x}, \\
 f_3'(x) &= 3\alpha_3 c_3 \ln(d_3) [d_3^{c_3 x} - 1],
 \end{aligned} \tag{33}$$

- Segundo modelo para evaluar

$$\begin{aligned}
 f_1'(x) &= \alpha_1 c_1 \ln(d_1) [d_1^{c_1 x} - 1], \\
 f_2'(x) &= \alpha_2 c_2 \ln(d_2) d_2^{c_2 x}, \\
 f_3'(x) &= 3\alpha_3 c_3 \ln(d_3) [d_3^{c_3 x} - 1], \\
 h'(x) &= \alpha_4 c_4 \ln(d_4) d_4^{c_4 x}
 \end{aligned} \tag{34}$$

- Tercer modelo para evaluar

$$f_1'(x) = \alpha_1 c_1 \ln(d_1) [d_1^{c_1 x} - 1] + \beta_1 k_1 \ln(g_1) [g_1^{k_1 x} - 1],$$

$$f_2'(x) = \alpha_2 c_2 \ln(d_2) d_2^{c_2 x} + \beta_2 k_2 \ln(g_2) g_2^{k_2 x},$$

$$f_3'(x) = 3\alpha_3 c_3 \ln(d_3) [d_3^{c_3 x} - 1], \quad (35)$$

Es fácil ver que la restricción (29) se satisface para  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  y  $f_3(x)$ .

La segunda derivada de  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , serán necesarias para el estudio en el ensayo acústico y se presentan a continuación:

- Primer modelo para evaluar

$$f_1''(x) = \alpha_1 c_1^2 (\ln(d_1))^2 d_1^{c_1 x},$$

$$f_2''(x) = \alpha_2 c_2^2 (\ln(d_3))^2 d_2^{c_2 x},$$

$$f_3''(x) = 3\alpha_3 c_3^2 (\ln(d_3))^2 d_3^{c_3 x} \quad (36)$$

- Segundo modelo para evaluar

$$f_1''(x) = \alpha_1 c_1^2 (\ln(d_1))^2 d_1^{c_1 x},$$

$$f_2''(x) = \alpha_2 c_2^2 (\ln(d_3))^2 d_2^{c_2 x},$$

$$f_3''(x) = 3\alpha_3 c_3^2 (\ln(d_3))^2 d_3^{c_3 x},$$

$$h''(x) = \alpha_4 c_4^2 (\ln(d_4))^2 d_4^{c_4 x} \quad (37)$$

- Tercer modelo para evaluar

$$f_1''(x) = \alpha_1 c_1^2 (\ln(d_1))^2 d_1^{c_1 x} + \beta_1 k_1^2 (\ln(g_1))^2 g_1^{k_1 x},$$

$$f_2''(x) = \alpha_2 c_2^2 (\ln(d_2))^2 d_2^{c_2 x} + \beta_2 k_2^2 (\ln(g_2))^2 g_2^{k_2 x},$$

$$f_3''(x) = 3\alpha_3 c_3^2 (\ln(d_3))^2 d_3^{c_3 x} \quad (38)$$

## 2.3 Tipos de Ensayos en Rocas

En la actualidad se llama ensayo de materiales a toda prueba cuyo fin es determinar las propiedades mecánicas de un material, a través de esta práctica se simulan las condiciones a las cuales el material se encontrará expuesto, en este caso fenómenos que se presentan tanto en la extracción de recursos naturales como en la presencia de sismos. Para efectos del presente trabajo de título, los ensayos que se utilizarán para la obtención de datos experimentales son: compresión sin restricción lateral, compresión con restricción lateral, compresión triaxial y ensayo acústico.

Es importante notar que el ensayo de compresión sin confinamiento actualmente se utiliza para seleccionar técnicas de excavación, mientras que la compresión triaxial se usa para simular las condiciones de esfuerzos a la cual la mayoría de las rocas subterráneas se encuentran sometidas. Por otra parte, el ensayo de compresión con confinamiento y el ensayo acústico permiten simular el comportamiento de una onda sísmica al interior de un cuerpo sólido.

Para los ensayos mencionados, el material en estudio tendrá una geometría cilíndrica, cuya preparación se especifica en la norma ASTM D 4543-08 [17]. Además, la muestra debe cumplir con las siguientes condiciones:

- **Esbeltez:** Hace referencia a la relación altura/diámetro de la muestra, que en este caso debe estar en un rango de 2,0-2,5 y el diámetro no puede ser inferior a 47 mm.
- **Paralelismo:** Corresponde a la máxima diferencia angular entre la línea recta opuesta que mejor ajusta en cada extremo de la muestra. Esta diferencia no puede ser superior a  $0,13^\circ$  para el uso de la muestra en máquinas de prueba con extremo fijo, mientras que en máquinas de prueba de asiento esférico no puede superar los  $0,25^\circ$ .
- **Planitud de caras:** Los extremos de la muestra deben ser cortados de manera paralela de uno respecto al otro y con un ángulo recto respecto al eje longitudinal. La tolerancia de planitud no debe exceder los 25  $\mu\text{m}$ .

En la Figura 2.1 y Figura 2.2 se aprecia que las probetas utilizadas en el IDIEM cumplen con las condiciones antes mencionadas para la condición de paralelismo y planitud de caras.

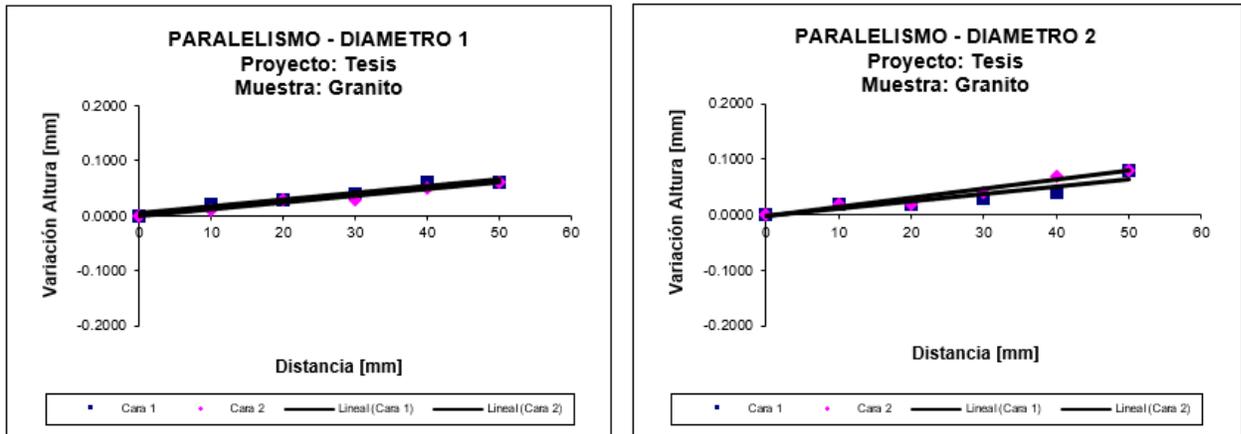


Figura 2.1 Gráfico para análisis de paralelismo en muestra cilíndrica de acuerdo con la norma ASTM D4543-08. Fuente: IDIEM.

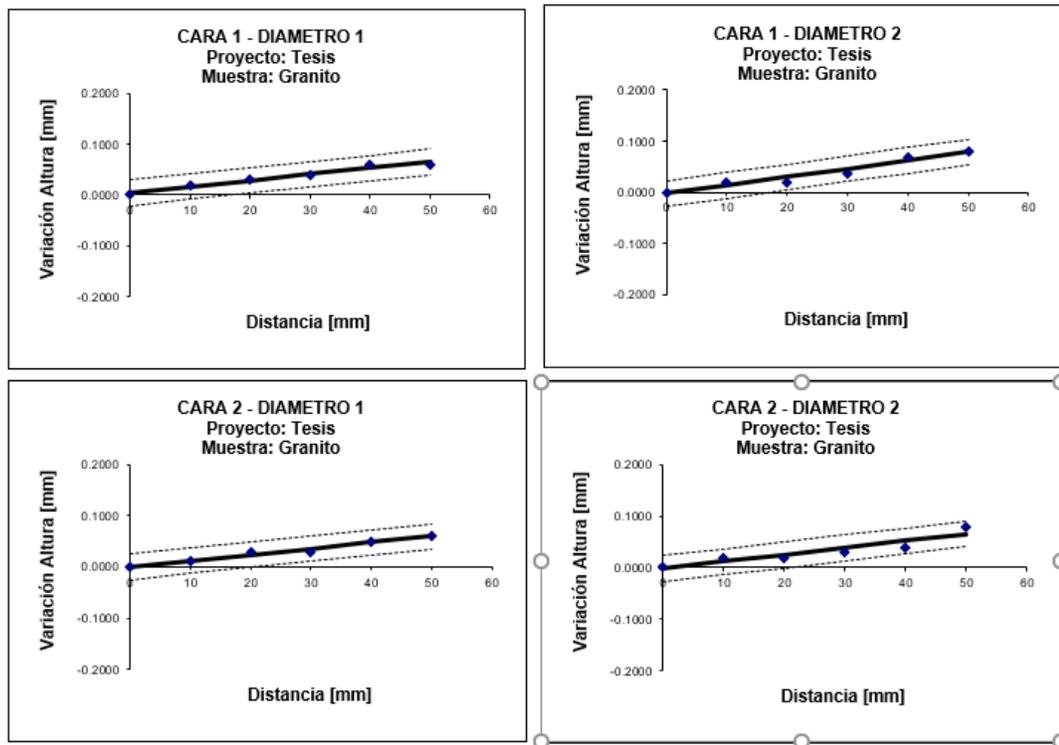
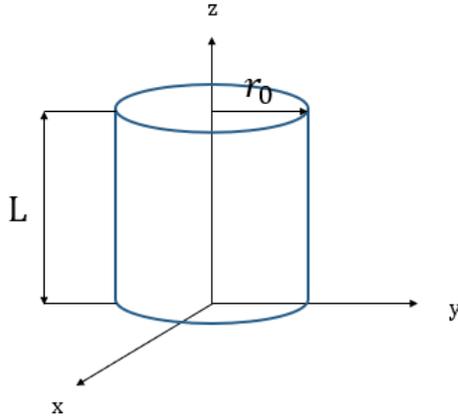


Figura 2.2 Gráfico para análisis de planitud de caras en muestra cilíndrica de acuerdo con la norma ASTM D4543-08. Fuente: IDIEM.

Se debe tener en cuenta que la configuración de la muestra en coordenadas cilíndricas sin presentar deformación (ver Figura 2.3) es:

$$0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq L \quad (39)$$



*Figura 2.3 Geometría cilíndrica de muestra. Fuente: Elaboración propia.*

Los ensayos correspondientes a la compresión sin restricción lateral y compresión triaxial obedecen las normas ASTM D 7012-10, la cual especifica los aparatos e instrumentos para determinar el esfuerzo, deformación, módulo de Young y razón de Poisson [18], mientras que la norma ASTM D 4543-08 especifica la preparación e instrumentación para la preparación de muestras cilíndricas [17], cómo se mencionó anteriormente.

### 2.3.1 Compresión sin Restricción Lateral

Aquí la muestra en estudio, cuya configuración corresponde a (39) es sometida a una carga compresiva en el eje axial. No hay restricciones laterales, por lo tanto, la superficie lateral es libre de expandirse radialmente.

Supongamos que el cilindro en estudio se deforma bajo la influencia de una distribución de esfuerzos de la forma:

$$\mathbf{T} = \sigma_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (40)$$

Donde  $\sigma_z$  es constante. En este problema particular  $\sigma_1 = \sigma_z$  y  $\sigma_2 = \sigma_r = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_\theta = 0$ , de (17) tenemos que:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_z}, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_r} \quad (41)$$

Ambas expresiones evaluadas en las condiciones mencionadas en el párrafo anterior. Ahora como caso especial de (22) y (23) se obtiene:

- Primer y tercer modelo para evaluar

$$\varepsilon_z = f'_1(\sigma_z) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_z}{3}\right) \quad (42)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = f'_2(0)(\sigma_z) + f_2(\sigma_z) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_z}{3}\right) \quad (43)$$

- Segundo modelo para evaluar

$$\varepsilon_z = f'_1(\sigma_z) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_z}{3}\right) \quad (44)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = f'_2(0)(\sigma_z + h(\sigma_z)) + f_2(\sigma_z)(1 + h'(0)) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_z}{3}\right) \quad (45)$$

Dado que  $\mathbf{T}$  es constante, también lo es  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , luego es posible obtener  $\mathbf{u}$  de (5,7,10,12) y la ecuación de movimiento (13) (suponiendo que no hay fuerzas en el cuerpo) se satisface automáticamente. Se debe notar que al usar (14) y (17) las deformaciones radiales y axiales se obtienen directamente como función de la carga  $\sigma_z$ .

A partir de las ecuaciones expuestas se puede imponer una restricción para  $\Pi$  considerando que cuando  $\sigma_z < 0$  tenemos que  $\varepsilon_z < 0$  y  $\varepsilon_r > 0$ , mientras que si  $\sigma_z > 0$ , se tiene que  $\varepsilon_z > 0$  y  $\varepsilon_r < 0$ .

Finalmente, en el caso de (18) se tiene:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_r = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad (46)$$

### 2.3.2 Compresión con Restricción Lateral

En el presente ensayo la muestra cumple con las condiciones de (39), sin embargo, se desconoce como realiza este ensayo la empresa SGS, la cual es contratada para llevar a cabo este ensayo por Codelco, división mina “El Teniente”.

En este caso, debido a la existencia de una restricción lateral se cumple la siguiente restricción:

$$\varepsilon_r = 0 = \varepsilon_\theta \quad (47)$$

Para este ensayo la presencia del esfuerzo de compresión axial produce cargas de reacción en dirección radial y circunferencial, luego, en general suponemos que el tensor de esfuerzo tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{T} = \sigma_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (48)$$

Donde  $\sigma_z$  está dado por los datos experimentales, mientras que  $\sigma_r, \sigma_\theta$  se deben encontrar de la restricción (47). Ahora tomemos  $\sigma_1 = \sigma_z$  y  $\sigma_2 = \sigma_r$  y  $\sigma_3 = \sigma_\theta$ , de (17) tenemos que:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_z}, \quad 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_r}, \quad 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_\theta} \quad (49)$$

Luego se tiene de (22) y (23) que:

- Primer y tercer modelo para evaluar

$$\varepsilon_z = f'_1(\sigma_z) + f'_2(\sigma_z)(\sigma_r + \sigma_\theta) + f_2(\sigma_r) + f_2(\sigma_\theta) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}\right) \quad (50)$$

$$0 = f'_1(\sigma_r) + f'_2(\sigma_r)(\sigma_z + \sigma_\theta) + f_2(\sigma_z) + f_2(\sigma_\theta) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}\right) \quad (51)$$

$$0 = f'_1(\sigma_\theta) + f'_2(\sigma_\theta)(\sigma_z + \sigma_r) + f_2(\sigma_r) + f_2(\sigma_z) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3}\right) \quad (52)$$

- Segundo modelo para evaluar

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= f'_1(\sigma_z) + f'_2(\sigma_z)(\sigma_r + \sigma_\theta + h(\sigma_r) + h(\sigma_\theta)) + f_2(\sigma_r)(1 + h'(\sigma_z)) \\ &\quad + f_2(\sigma_\theta)(1 + h'(\sigma_z)) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}\right) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} 0 &= f'_1(\sigma_r) + f'_2(\sigma_r)(\sigma_z + \sigma_\theta + h(\sigma_z) + h(\sigma_\theta)) + f_2(\sigma_z)(1 + h'(\sigma_r)) \\ &\quad + f_2(\sigma_\theta)(1 + h'(\sigma_r)) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}\right) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} 0 &= f'_1(\sigma_\theta) + f'_2(\sigma_\theta)(\sigma_z + \sigma_r + h(\sigma_z) + h(\sigma_r)) + f_2(\sigma_r)(1 + h'(\sigma_\theta)) \\ &\quad + f_2(\sigma_z)(1 + h'(\sigma_\theta)) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3}\right) \end{aligned} \quad (55)$$

A partir de las ecuaciones (51), (52) y (54), (55) se tiene que  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  deberían ser iguales, en ese caso se obtiene que:

- Primer y tercer modelo para evaluar

$$\varepsilon_z = f'_1(\sigma_z) + 2f'_2(\sigma_z)(\sigma_r) + 2f_2(\sigma_r) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3}\right) \quad (56)$$

$$0 = f_1'(\sigma_r) + f_2'(\sigma_r)(\sigma_z + \sigma_r) + f_2(\sigma_r) + f_2(\sigma_z) + \frac{1}{3}f_3'\left(\frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3}\right) \quad (57)$$

- Segundo modelo para evaluar

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = f_1'(\sigma_z) + 2f_2'(\sigma_z)(\sigma_r + h(\sigma_r)) + 2f_2(\sigma_r)(1 + h'(\sigma_z)) \\ + \frac{1}{3}f_3'\left(\frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3}\right) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} 0 = f_1'(\sigma_r) + f_2'(\sigma_r)(\sigma_z + \sigma_r + h(\sigma_z) + h(\sigma_r)) + f_2(\sigma_r)(1 + h'(\sigma_r)) \\ + f_2(\sigma_z)(1 + h'(\sigma_r)) + \frac{1}{3}f_3'\left(\frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3}\right) \end{aligned} \quad (59)$$

Las ecuaciones (57) y (59) se pueden utilizar para obtener  $\sigma_r$  en función de  $\sigma_z$ .

Otra restricción que se aplica en las funciones  $f_i$  se puede obtener cuando  $\sigma_z = 0$ . En este caso de (56), (57), (58) y (59) se obtiene

- Primer y tercer modelo para evaluar

$$0 = f_1'(\sigma_r) + f_2'(\sigma_r)(\sigma_r) + f_2(\sigma_r) + \frac{1}{3}f_3'\left(\frac{2\sigma_r}{3}\right) \quad (60)$$

- Segundo modelo para evaluar

$$\begin{aligned} 0 = f_1'(\sigma_r) + f_2'(\sigma_r)(\sigma_r + h(0) + h(\sigma_r)) + f_2(\sigma_r)(1 + h'(\sigma_r)) \\ + f_2(0)(1 + h'(\sigma_r)) + \frac{1}{3}f_3'\left(\frac{2\sigma_r}{3}\right) \end{aligned} \quad (61)$$

Es razonable que, en el caso de (60) y (61), en general en ecuaciones algebraicas no lineales,  $\sigma_r$  debiera ser cero.

Finalmente, en el caso de (18) es posible mostrar que

$$\sigma_r = \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_z, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[1 - \frac{2\nu^2}{(1-\nu)}\right]\sigma_z \quad (62)$$

### 2.3.3 Compresión Triaxial

En el ensayo triaxial con compresión, se tiene la misma configuración geométrica presentada en la ecuación (39), en este caso la muestra es sometida a una carga de compresión en dirección

axial y es ingresada a una cámara con aceite que ejerce esfuerzo de manera radial en la muestra, lo que genera deformación y reacción en las direcciones principales, por lo tanto, el tensor de esfuerzo tendrá la siguiente forma:

$$\mathbf{T} = \sigma_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (63)$$

Por otra parte, las deformaciones en las direcciones principales no son nulas y cumplen con las siguientes condiciones:

$$\sigma_r = \sigma_\theta, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta \quad (64)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_z}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_r} \quad (65)$$

Luego se tiene para (22) y (23) que:

- Primer y tercer modelo para evaluar

$$\varepsilon_z = f'_1(\sigma_z) + f'_2(\sigma_z) * 2\sigma_r + 2f_2(\sigma_r) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_z + 2\sigma_r}{3}\right) \quad (66)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = f'_1(\sigma_r) + f'_2(\sigma_r)(\sigma_z + \sigma_r) + f_2(\sigma_r) + f_2(\sigma_z) + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{\sigma_z + 2\sigma_r}{3}\right) \quad (67)$$

- Segundo modelo para evaluar

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = f'_1(\sigma_z) + 2f'_2(\sigma_z)(\sigma_r + h(\sigma_r)) + 2f_2(\sigma_r)(1 + h'(\sigma_z)) \\ + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3}\right) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = f'_1(\sigma_r) + f'_2(\sigma_r)(\sigma_z + \sigma_r + h(\sigma_z) + h(\sigma_r)) \\ + f_2(\sigma_r)(1 + h'(\sigma_r)) + f_2(\sigma_z)(1 + h'(\sigma_r)) \\ + \frac{1}{3}f'_3\left(\frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3}\right) \end{aligned} \quad (69)$$

En este caso también se cumple (62).

### 2.3.4 Ensayo Acústico

En el ensayo acústico, el cilindro descrito en (39) es sometido a esfuerzos de compresión y a través de sensores se estudia la propagación de onda de pequeña magnitud en su estructura, mostrando la velocidad de ondas tipo S y P.

Para poder estudiar la propagación de ondas a través del modelo (14) se considera la metodología realizada en [3], donde se supone que la magnitud de las ondas para el esfuerzo, denotadas por  $\Delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  es muy pequeña comparada con un campo de esfuerzos de tiempo independiente  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  que existe en el cuerpo antes de que  $\Delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  aparezca. En ese caso las propiedades del movimiento de onda  $\Delta\mathbf{u}$  se asocia con  $\Delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ , que puede ser obtenido resolviendo algunas ecuaciones linealizadas incrementales. Las propiedades del movimiento de onda dependerán de la distribución de esfuerzo  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  que es independiente del tiempo.

Ahora supongamos que  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  produce un campo de desplazamiento independiente del tiempo  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ , a su vez ambos son solución de las ecuaciones (13) y (14). Luego se superpone en el cuerpo, un pequeño esfuerzo dependiente del tiempo  $\Delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ , lo que permite definir el campo de esfuerzo siguiente:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \quad (70)$$

Donde se supone que  $|\Delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)| \ll |\mathbf{T}_0(\mathbf{x})|$ . Esta pequeña distribución de esfuerzo dependiente del tiempo que se considera produce un campo de desplazamiento incremental dependiente del tiempo que se denota por  $\Delta\mathbf{u}$ . Luego el campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  se define  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}$ . El punto clave ahora es exigir que  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}$  sean soluciones de (13, 14 y 16), luego reemplazando esas ecuaciones, considerando que  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  son soluciones de (13, 14, 18), después de algunas manipulaciones se obtiene que las ecuaciones incrementales son:

$$\text{div } \Delta\mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \Delta\mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \Delta\varepsilon = \mathcal{A}(\mathbf{T}_0)\Delta\mathbf{T} \quad (71)$$

donde se define:

$$\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{T} \partial \mathbf{T}} \quad (72)$$

En coordenadas Cartesianas (71) tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial \Delta T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 \Delta u_i}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) = \mathcal{A}_{ijkl} \Delta T_{kl} \quad (73)$$

En el caso de que la función  $\Pi(\mathbf{T})$  se escriba en términos de los esfuerzos principales como  $\Pi = \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  se tiene que (ver [19]):

$$\mathcal{A} = \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_p \partial \sigma_q} (\mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} + \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)}) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p} \frac{\partial (\mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)})}{\partial \mathbf{T}} \quad (74)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)})}{\partial \mathbf{T}} &= \frac{1}{\sigma_p - \sigma_q} \mathcal{Q}^{(pq)} + \frac{1}{\sigma_p - \sigma_r} \mathcal{Q}^{(pr)}, p \neq q \neq r \\ \mathcal{Q}^{(pq)} = \mathcal{Q}^{(qp)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} + \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \\ &+ \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} + \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)}) \end{aligned} \quad (75)$$

Es posible demostrar que:

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{klij} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{ijlk} \quad (76)$$

Lo cual es consecuencia de la definición original de  $\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{T} \partial \mathbf{T}}$ .

El sistema de ecuaciones de (73) es lineal para  $\Delta T_{ij}$  y  $\Delta u_i$ , pero los componentes de  $\mathcal{A}_{ijkl}$  dependen de  $T_{oij}$ .

Ahora, considerando la solución para  $\mathbf{T}_o$  obtenida en la sección 2.3.2, se resuelve (73) suponiendo que el cilindro en estudio es un cuerpo infinito, lo cual permite simplificar el presente análisis permitiendo evitar la aparición de reflexiones de onda en el borde del cilindro.

Ahora consideremos la solución

$$\Delta T_{ij}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{T}_{ij} e^{i\omega(\mathbf{s}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-t)}, \quad \Delta u_i(\mathbf{x}, t) = \mathbb{U}_i e^{i\omega(\mathbf{s}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-t)} \quad (77)$$

Donde  $i = \sqrt{-1}$  (número imaginario),  $\omega$  es la frecuencia de onda, mientras que  $s$  es el inverso de la velocidad y  $\mathbf{n}$  es la dirección de propagación. Cabe mencionar que  $\mathbb{T}_{ij}$  y  $\mathbb{U}_i$  son constantes. Substituyendo lo anterior en (73) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix}
M_{1,1} & 0 & 0 & M_{1,4} & M_{1,5} & 0 & M_{1,7} & 0 & 0 \\
0 & M_{2,2} & 0 & M_{2,4} & 0 & M_{2,6} & 0 & M_{2,8} & 0 \\
0 & 0 & M_{3,3} & 0 & M_{3,5} & M_{3,6} & 0 & 0 & M_{3,9} \\
M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} & M_{4,5} & M_{4,6} & M_{4,7} & 0 & 0 \\
M_{5,1} & M_{5,2} & M_{5,3} & M_{5,4} & M_{5,5} & M_{5,6} & 0 & M_{5,8} & 0 \\
M_{6,1} & M_{6,2} & M_{6,3} & M_{6,4} & M_{6,5} & M_{6,6} & 0 & 0 & M_{6,9} \\
M_{7,1} & M_{7,2} & M_{7,3} & M_{7,4} & M_{7,5} & M_{7,6} & M_{7,7} & M_{7,8} & 0 \\
M_{8,1} & M_{8,2} & M_{8,3} & M_{8,4} & M_{8,5} & M_{8,6} & M_{8,7} & 0 & M_{8,9} \\
M_{9,1} & M_{9,2} & M_{9,3} & M_{9,4} & M_{9,5} & M_{9,6} & 0 & M_{9,8} & M_{9,9}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
T_{11} \\
T_{22} \\
T_{33} \\
2T_{12} \\
2T_{13} \\
2T_{23} \\
U_1 \\
U_2 \\
U_3
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix}
\quad (78)$$

Las expresiones matemáticas para  $\mathcal{A}_{ijkl}$  y los elementos de la matriz  $M$  se encuentran expuestas en el anexo F.

Una solución no trivial de (78) se puede encontrar cuando

$$\det[M] = 0 \quad (79)$$

Donde la matriz  $M$  es de  $9 \times 9$  con componentes  $M_{mn}$ . De (79) se obtiene una ecuación polinomial en función de  $s$ .

Para concluir, resulta necesario indicar que los modelos matemáticos presentados y las ecuaciones presentadas, se obtuvieron del trabajo [3].

### 3 Breve Introducción a la Geología de Rocas Ígneas y la Sismología

El presente capítulo tiene como finalidad entregar información respecto a la formación de rocas ígneas, condiciones que afectan su comportamiento mecánico y cómo estas son responsables de los movimientos de la tierra. También busca relacionar lo mencionado anteriormente con la geomorfología nacional, en particular con el levantamiento de los Andes, dado a que este fenómeno es responsable de la actividad sísmica de Chile y la formación de depósitos minerales que aquí se explotan, motivaciones del presente estudio.

#### 3.1 Estructura en Capas de la Tierra

El planeta Tierra que hoy conocemos presenta tres capas: núcleo, manto y corteza (ver Figura 3.1). el núcleo corresponde a la capa más interna, genera un 80% del calor del planeta por medio de decaimiento radiogénico de elementos inestables, este calor genera corrientes convectivas (ver Figura 3.2) y fusión parcial en el manto, una vez fundido el material en el manto, los componentes livianos ascienden y pueden generar corteza oceánica, unirse a la corteza continental o alcanzar la superficie por medio de erupciones volcánicas, mientras que los elementos pesados descienden y se unen al núcleo.

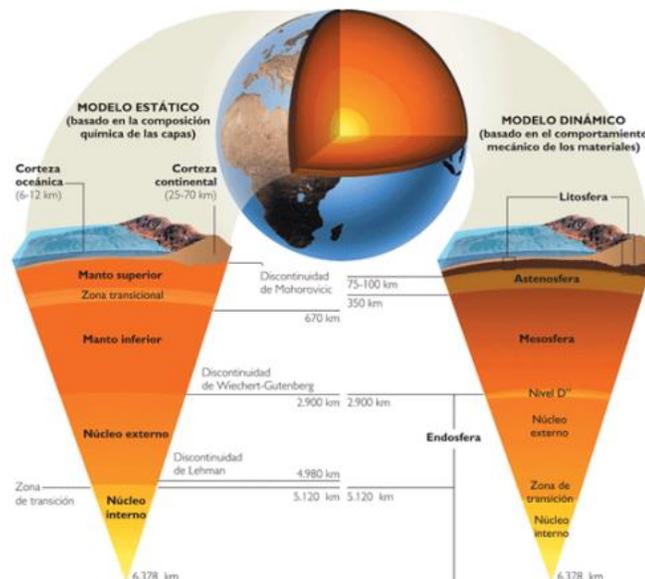


Figura 3.1 Modelo estático y dinámico de las capas constituyentes de la Tierra. Fuente: [20].

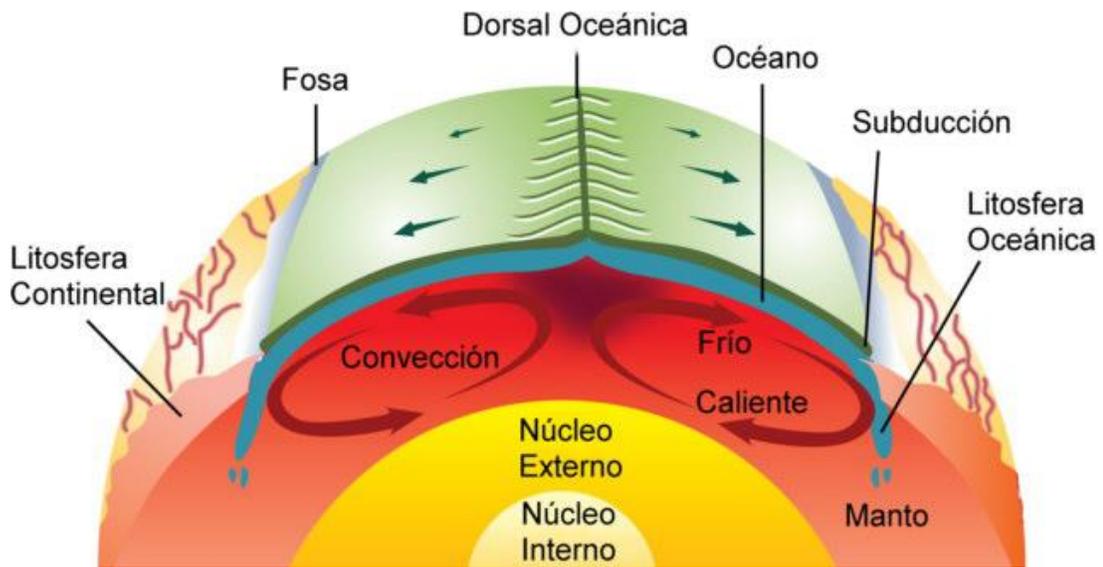


Figura 3.2 Corrientes convectivas de calor en el interior de la Tierra. Fuente: [20].

### 3.2 Rocas Ígneas

Todas las rocas que se presentan en la corteza terrestre forman parte del ciclo de las rocas que se muestra en la Figura 3.3. Sin embargo, en este trabajo sólo nos enfocaremos en las rocas ígneas, dado que la mayoría de las muestras en estudio son de este tipo.

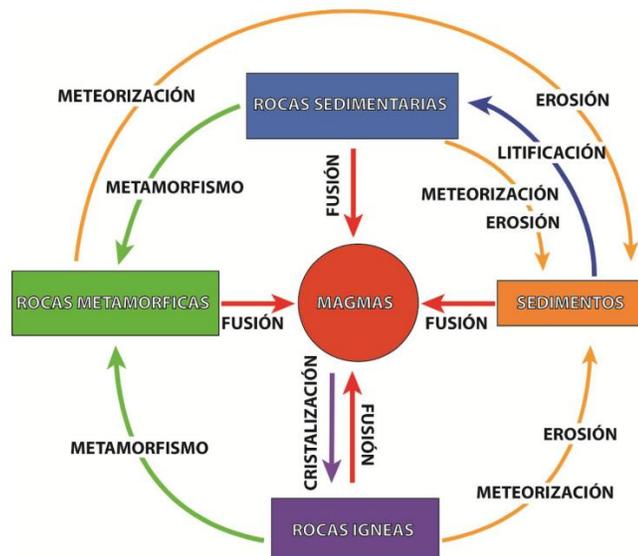


Figura 3.3 Ciclo de las rocas. Fuente: [20].

En la Figura 3.3 se puede observar que las rocas ígneas son resultado del enfriamiento y solidificación de partes del magma (material parental de rocas ígneas), el cual se forma a través de un proceso conocido como fusión parcial, que ocurre en una capa que va desde los 100 kilómetros a los 300 kilómetros de profundidad entre la corteza y el manto denominada astenosfera (ver Figura 3.1). En la astenosfera la fusión parcial se puede producir de dos modos, por descompresión del manto o por hidratación.

La fusión parcial por descompresión se debe a que las corrientes convectivas al ascender por el manto lo descomprimen formando magma basáltico; las zonas de afluencia de este magma son las crestas Centro-Oceánicas y es aquí donde constantemente se produce nueva corteza oceánica (ver Figura 3.2). Por otra parte, cuando las corrientes convectivas descienden (subducen) de nuevo, incorporan agua que resulta ser muy liviana para permanecer en la corteza subducida, por lo tanto, esta agua asciende y se disuelve en la astenosfera produciendo fusión por hidratación (ver Figura 3.4) y de este modo se genera un magma que difiere del basáltico.

Una vez generado el cuerpo magmático en el manto, éste al ser menos denso que las rocas que lo rodean, asciende por flotación hacia la superficie, ocasionando en algunos casos erupciones volcánicas, adhiriéndose a la corteza continental o creando corteza oceánica.



*Figura 3.4 Conforme una placa oceánica desciende hacia el manto, el agua y otros compuestos volátiles desaparecen de las rocas de la corteza subducida. Estos volátiles disminuyen la temperatura de fusión de las rocas del manto lo suficiente como para generar fusión [21]. Fuente: [21].*

Las rocas ígneas se clasifican en dos grandes clases dependiendo de sus condiciones de enfriamiento. Si el enfriamiento y solidificación del magma ocurre en la superficie terrestre se denominan extrusivas o volcánicas, un ejemplo de este tipo de roca es el basalto, el cual hace muchos años se usó como materia prima para la creación de Moaís en Isla de Pascua (ver Figura 3.5), dada su gran abundancia en ésta.

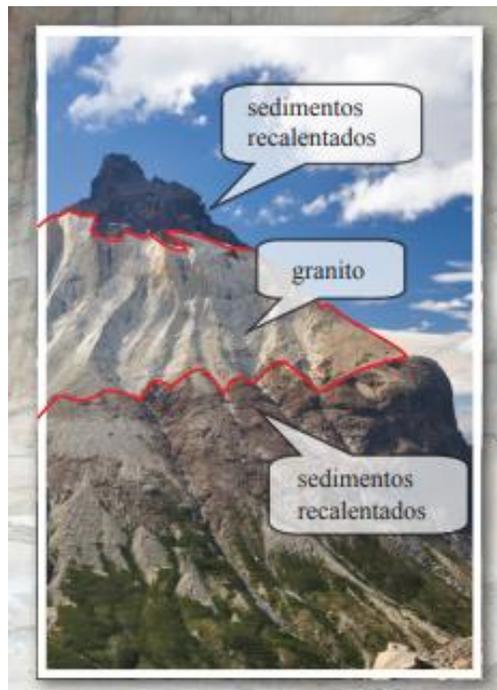


*Figura 3.5 Estatuas esculpidas en basalto que se encuentran en Isla de Pascua (Moaís), dada la abundancia de esta roca en la corteza terrestre de la isla. Fuente:Conaf.*

Por otra parte, si el magma cristaliza al interior de la tierra debido a la pérdida de movilidad, las rocas ígneas resultantes se denominan intrusivas o plutónicas. Estas no se encuentran visibles en la corteza dado a que no alcanzan la superficie, pero resulta posible observarlas cuando hay un ascenso de corteza (por subducción de corteza oceánica bajo la corteza continental) o afloramiento por erosión de rocas cajas (rocas que almacenan rocas intrusivas o depósitos minerales). En Chile podemos encontrar este tipo de roca en el Santuario del Granito Orbicular (ver Figura 3.6), ubicado en la Región de Atacama en la comuna de Caldera. Aquí la roca intrusiva es de composición granítica y probablemente se formó por nucleación en torno a un núcleo de crecimiento (grano mineral u roca extraña) en una cámara de magma en enfriamiento. Otro lugar donde podemos encontrar este tipo de roca es en Los Cuernos del Paine (ver Figura 3.7), en este paisaje se generó una intrusión de roca ígnea en rocas sedimentarias, razón por la cual se puede observar en la montaña una sección oscura correspondiente a roca sedimentaria recalentada, mientras que la sección clara corresponde a una roca ígnea tipo granito.



*Figura 3.6 Cuerpo rocoso de granito orbicular, ubicado en el Santuario del Granito Orbicular, en la Región de Atacama. Fuente: Elaboración propia.*



*Figura 3.7 Distribución de las rocas en Los Cuernos del Paine. Fuente: Conaf.*

### **3.2.1 Texturas Ígneas**

Muchas veces los geólogos se encuentran realizando estudios en terrenos donde no disponen de herramientas suficientemente sofisticadas para definir el origen de las rocas que se pueden

presentar. En el caso de las rocas ígneas, se utiliza el término textura para describir la roca en función del tamaño, forma y ordenamiento de sus cristales (ver Figura 3.8), dado que estas características permiten inferir datos sobre el ambiente donde se forma la roca.

La textura de las rocas ígneas se ve afectada por tres factores principales [21]:

- La velocidad a la cual se enfría el magma
- La cantidad de sílice presente
- La cantidad de gases disueltos en el magma

De los factores mencionados anteriormente, la velocidad de enfriamiento resulta ser el factor más importante, dado que define el desarrollo que pueden tener los cristales.

A medida que la masa del magma asciende en el manto se va enfriando, de este modo sus iones pierden movilidad. Por ejemplo, si un cuerpo magmático grande se localiza a grandes profundidades su enfriamiento puede durar de decenas a centenares de millones de años. Cuando el enfriamiento se da de manera lenta, se ocasiona migración de iones a grandes distancias, donde se juntan con estructuras cristalinas existentes, en este caso se genera el crecimiento de menos cristales, pero con mayor tamaño. Ahora bien, cuando el magma se enfría más rápido, la pérdida de movilidad de los iones es más rápida y se combinan con facilidad, generando el desarrollo de numerosos núcleos embrionarios que compiten por los núcleos disponibles, en este caso se tiene un sólido con pequeños cristales intercrecidos.

Un caso especial que se puede presentar es cuando el material fundido del manto se enfría rápidamente de manera que los iones no tienen tiempo para ordenarse formando una red cristalina. A este tipo de rocas se les llama vidrios (ver Figura 3.8 D).

Las consecuencias de los factores correspondientes a contenido de sílice y gases disueltos en el magma, se presenta a medida que analizamos los distintos tipos de textura.

**Textura afanítica:** Se presenta cuando los cristales constituyentes son tan pequeños, que no se pueden diferenciar a simple vista (Figura 3.8 A). En este caso no es posible identificar claramente los minerales, razón por la cual se caracterizan por su color, si su color es claro significa que tienen un contenido muy bajo de silicatos ferromagnesianos, mientras que si presentan color oscuro poseen alto contenido de silicatos ferromagnesianos.

Muchas rocas afaníticas, presentan huecos, denominados vesículas que son generados por burbujas de gas que escapan cuando se solidifica el magma.

De las rocas estudiadas en el presente trabajo, la andesita presenta la textura descrita y recibe este nombre debido a su abundancia en la Cordillera de los Andes.



*Figura 3.8 Texturas de las rocas ígneas A. afanítica (Grano fino). B. Fanerítica (Grano Grueso). C. Porfídica (Granos grandes rodeados por una matriz). D. Vítrea (Enfriamiento demasiado rápido para formar cristales. Fuente: [21]).*

**Textura Fanerítica:** Tienen su origen en grandes masas de magma que solidifican lentamente, debajo de la superficie, mostrando de este modo un grano grueso (Figura 3.8 B). Esta roca consiste en una masa de cristales intercrecidos que poseen un tamaño similar y son lo suficientemente grandes para poder identificarlos sin ayuda de un microscopio. Dado que las rocas faneríticas se forman en el interior de corteza terrestre, sólo pueden ser vistas a través de afloramientos en la superficie cuando hay erosión que elimina el recubrimiento de rocas que en su momento rodearon las cámaras magmáticas.

Rocas ígneas utilizadas en el presente estudio que presentan este tipo de textura son el granito, gabro, granodioritas y las tonalitas.

**Textura porfídica:** Cuando una roca posee grandes cristales incrustados (denominados fenocristales) en una matriz de cristales más pequeños (definido como pasta), se dice que posee una textura porfídica y se le llama pórfido (Figura 3.8 C). Este tipo de roca se forma cuando existe una masa de magma localizada profundamente en el manto de la tierra, en este caso la masa de magma demora de decenas a centenares de años en solidificar. A medida que el magma asciende, los diferentes cristales que componen el magma cristalizan a temperaturas y velocidades diferentes, razón por la cual algunos cristales llegan a ser muy grandes, mientras que los otros comienzan a

formarse. Si el magma que contiene cristales grandes cambia de condiciones (por ejemplo, al salir a la superficie) la porción líquida restante de lava se enfriara relativamente rápido [21].

**Textura vítrea:** En algunas erupciones volcánicas la roca fundida expulsada al exterior se enfría rápidamente [21] adquiriendo una textura vítrea (Figura 3.8 D). En este caso los iones se encuentran desordenados, dado que se unen antes de poder unirse a una estructura cristalina ordenada. Por ejemplo, la obsidiana, es un vidrio oscuro que en el pasado se utilizaba para fabricar puntas de flecha y lanzas.

Cuando los magmas presentan un alto contenido de sílice forman estructuras largas y en cadena antes de que la cristalización sea completa. Las estructuras antes mencionadas impiden el transporte iónico y aumentan la viscosidad del magma, es decir su resistencia a fluir. Por ejemplo, el magma de tipo granítico (caso alto en sílice), puede ser expulsada como una masa extremadamente viscosa que solidifica como vidrio.

Ahora, si un magma presenta bajo contenido de sílice (magma basáltico es un ejemplo), la lava que genera es muy fluida y esta al enfriarse genera rocas cristalinas de grano fino. Sin embargo, la superficie de lava basáltica se enfría con la rapidez suficiente como para formar una capa fina vítrea. los volcanes hawaianos a veces emiten fuentes de lava que arrojan la lava basáltica decenas de metros en el aire. Una actividad de este tipo puede producir hilos de vidrio volcánico denominado Cabellos de Pele, que reciben su nombre de la diosa hawaiana de los volcanes [21].

**Textura piroclástica:** Cuando las rocas tienen su origen en la consolidación de fragmentos de rocas individuales emitidos durante erupciones volcánicas explosivas, se dice que presentan una textura piroclástica. Los fragmentos expulsados pueden ser cenizas muy finas, gotas fundidas o bloques angulares arrancados de las paredes de la chimenea volcánica durante la erupción. Existen casos donde los fragmentos expulsado se mantuvieron lo suficientemente calientes durante el vuelo para fundirse en el impacto (por ejemplo, la toba, roca piroclástica muy común) (ver Figura 3.9), mientras que en otros casos los fragmentos pueden solidificarse antes del impacto y cementar juntos un tiempo después.

Debido a que las rocas piroclásticas están compuestas por partículas o fragmentos, muchas veces pueden ser confundidas con rocas sedimentarias, dado que los fragmentos que la constituyen no corresponden a cristales interconectados.



*Figura 3.9 Textura piroclástica. Esta roca volcánica consiste en fragmentos de rocas angulares englobados en una matriz de cenizas de color claro [21]. Fuente: Foto de E.J. Tarbuck [21].*

**Textura pegmatítica:** Si en las últimas etapas de cristalización, se genera en el fundido un porcentaje inusualmente alto de agua y volátiles como flúor, cloro y azufre, la roca resultante va a presentar cristales interconectados con un tamaño de grano grueso superior al centímetro, debido a que la migración iónica aumenta en ambientes ricos en líquidos y no a historias de enfriamiento excesivamente largas.

Las rocas con textura pegmatítica, se encuentran mayoritariamente alrededor de los márgenes de rocas plutónicas como pequeñas masas o venas delgadas que comúnmente se extienden en la roca huésped adyacente [21]. Generalmente las pegmatitas presentan una composición parecida al granito, es decir, sus cristales contienen cuarzo, feldespato y moscovita. Sin embargo, existen casos donde presentan minerales valiosos (ver Figura 3.10)



*Figura 3.10 Roca ígnea con textura pegmatítica. Fuente: [20].*

### 3.2.2 Composición Ígneas

La composición de las rocas ígneas está definida químicamente del magma a partir del cual se forma. Sin embargo, su estructura cristalina está compuesta principalmente por tetraedros de silicio-oxígeno ( $\text{SiO}_2$ ), más bien conocidos como silicatos.

El magma, se encuentra constituido en un 98% de su peso por 8 elementos químicos fundamentales, oxígeno ( $\text{O}_2$ ), silicio (Si), aluminio (Al), calcio (Ca), sodio (Na), potasio (K), magnesio (Mg) y hierro (Fe). También pueden presentar en menor proporción elementos como titanio (Ti), manganeso (Mn) y trazas de oro (Au), plata (Ag) y uranio (U).

Los elementos mencionados en el párrafo anterior pueden formar dos grupos de silicatos, los oscuros o ferromagnesianos que son ricos en hierro y magnesio o en ambos, pero pobres en contenido de sílice. Los ferromagnesianos más comunes que se presentan en la corteza terrestre son el olivino, piroxeno, anfíbol y biotita. Por el contrario, los silicatos claros se caracterizan por tener un alto contenido de sílice, en este caso el hierro y magnesio se presentan en cantidades pequeñas, mientras que el potasio, sodio y calcio lo hacen en altas cantidades. Entre los silicatos claros se encuentran el cuarzo, moscovita y feldespato (grupo mineral más abundante en la Tierra).

Las rocas ígneas se pueden clasificar de acuerdo con el contenido de los minerales claros y oscuros ya mencionados (ver Figura 3.11).

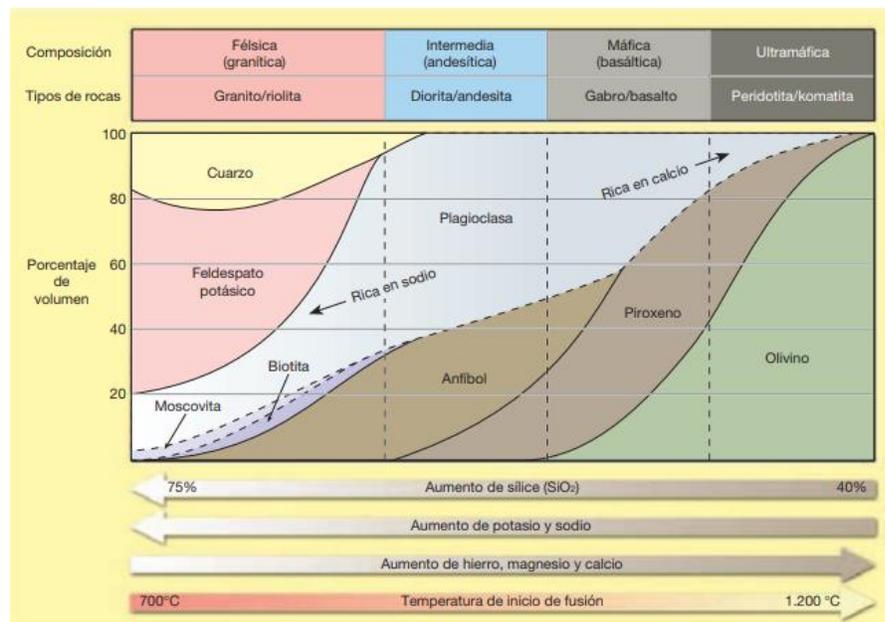


Figura 3.11 Mineralogía de las rocas ígneas comunes y de los magmas a partir de los que se forman [21]. Fuente: Dietrich, Daily y Larsen [21].

### 3.2.3 Alteraciones

En muchos casos las rocas pueden presentar alteraciones, que afectan su comportamiento mecánico, ya sea, aumentando o disminuyendo su resistencia a la fractura. Uno de estos tipos de alteraciones son las hidrotermales, estas se presentan por el ascenso o descenso de aguas calientes que modifican la roca original y que son las responsables muchas veces de depósitos minerales. En la Figura 3.12 se muestra a través del modelo de Lowell y Guilbert los diferentes tipos de alteraciones hidrotermales de la roca caja (roca que almacena el depósito mineral) y las simetrías en el sector alterado [22].

Las zonas alteradas se pueden diferenciar por su contenido de minerales secundarios, los cuales podrían ser distintos o iguales a los minerales de origen primario.

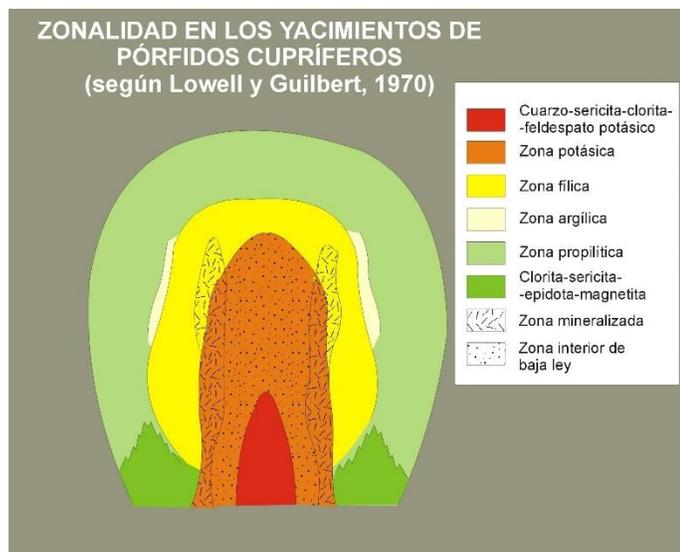


Figura 3.12 Zonación de alteración y mineralización según Lowell y Guilbert. Fuente: [22].

### 3.2.4 Isotropía y Anisotropía

Dependiendo de la manera como cristalizan los minerales, una roca puede presentar comportamiento isotrópico o anisotrópico. Las sustancias isotrópicas se caracterizan por tener el mismo comportamiento elástico en todas las direcciones, mientras que en las sustancias anisotrópicas el comportamiento elástico va a depender de la dirección donde se aplique una fuerza.

Las rocas utilizadas en el presente estudio presentan un comportamiento aproximadamente isotrópico debido a que los cristales que las componen no poseen una orientación definida y además los granos se encuentran distribuidos de manera uniforme.

La anisotropía se puede presentar en una muestra de roca por alteraciones, diferenciación magmática, por intrusiones como es el caso de Los Cuernos del Paine (ver Figura 3.7), donde se tiene una mezcla de roca sedimentaria con roca ígnea, cuyas condiciones de formación son muy diferentes, entre otros. Un ejemplo de roca que puede comportarse de manera anisotrópica como se mencionó puede ser una roca que presente alteraciones cuya distribución sea significativa (ver Figura 3.13).



*Figura 3.13 Fragmento de Silvana. Fuente: Banco de imágenes del CNICE.*

### **3.3 Sismos**

El manto superior con la corteza suprayacente constituye una capa fuerte y rígida llamada litosfera, la cual está rota en fragmentos que los científicos denominan placas. Éstas se encuentran en continuo movimiento, cambiando de tamaño y forma. En la actualidad se conocen 7 placas principales, las que se pueden apreciar en la Figura 3.14. Cabe mencionar que la mayor parte de las deformaciones ocurren en los márgenes de placa.

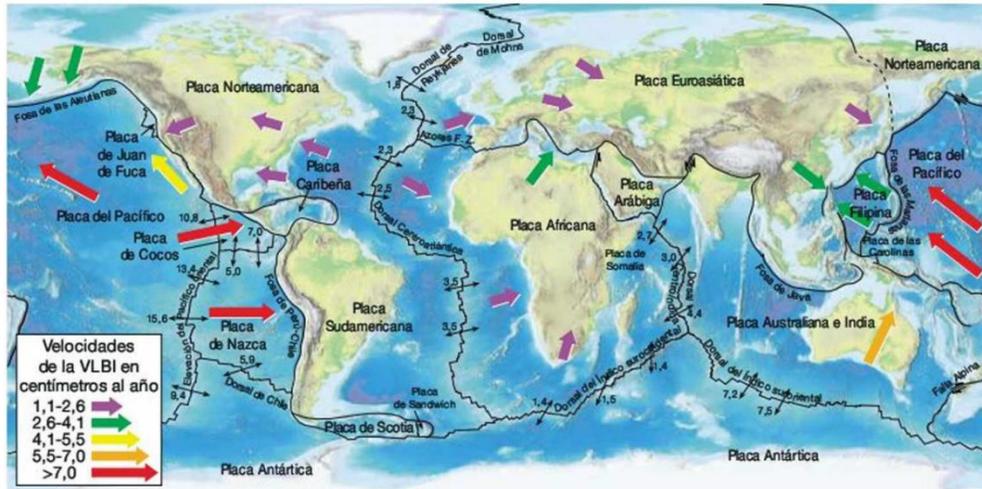


Figura 3.14 direcciones y velocidades del movimiento de placas en centímetros al año. Las velocidades de expansión del fondo oceánico (como se muestra con flechas y cifras negras) se basan en el espaciado de las franjas magnéticas datadas (anomalías). Fuente: [21].

Existen tres tipos de márgenes de placa (ver Figura 3.15):

- Divergentes: Dos placas se separan, lo que genera el ascenso de material desde el manto para crear un nuevo suelo. Se presenta principalmente en el océano.
- Convergentes: Dos placas se juntan provocando el ascenso de la litosfera oceánica debajo de una placa superpuesta que finalmente es reabsorbida en el manto o se genera una colisión de dos bloques continentales para crear un sistema montañoso.
- Transformantes: Dos placas se desplazan lateralmente sin creación ni destrucción de litosfera.

- Divergente  
(Tensional)  
←|→
- Convergente  
(Compresional)  
→|←
- Transformante  
(Cizalla)

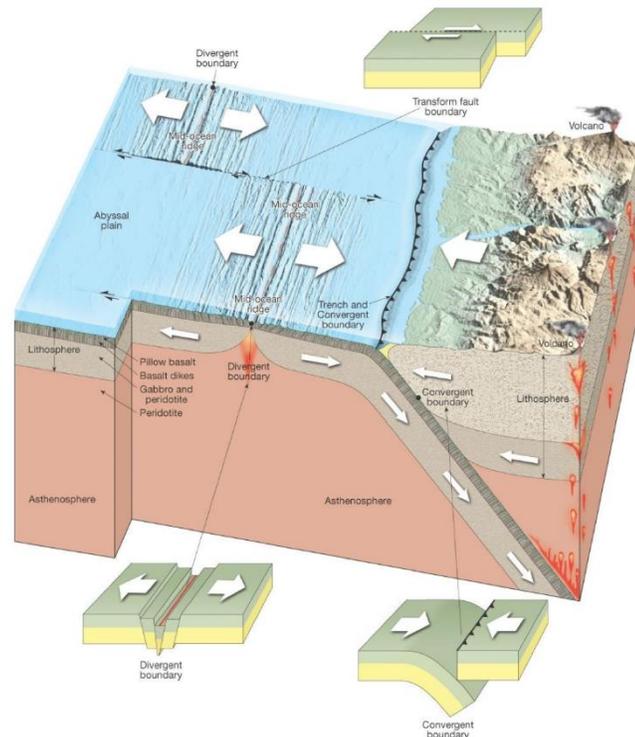


Figura 3.15 Tipos de márgenes de placa en la tierra y como se refleja su comportamiento en la corteza terrestre. Fuente: [23].

Los terremotos o sismos corresponden a la vibración de la tierra producida por la rápida liberación de energía elástica acumulada en las rocas, esto ocurre cuando se supera el límite elástico de la roca. Los terremotos se encuentran asociados a movimientos a lo largo de fallas o márgenes de placa.

Los sismos generan ondas, las cuales se dividen en ondas de cuerpo y superficiales. Las ondas de cuerpo son las que viajan al interior de la tierra y pueden ser de tipo primarias (“P”) y de tipo secundarias (“S”). Las ondas primarias (Figura 3.16 A), son ondas de tipo compresión y extensión en la dirección de avance de la onda, viajan a través de sólidos y líquidos. Además, alcanzan velocidades en un rango de 1450 m/s a 5000 m/s, dependiendo del medio. Por otra parte, las ondas secundarias (Figura 3.16 B), tienen un movimiento perpendicular a la dirección de avance de la onda, sólo viajan a través de sólidos y son más lentas que las ondas primarias, alcanzando velocidades en un rango de 1115 m/s a 3846 m/s.

Las ondas superficiales son aquellas que se presentan cuando las ondas internas llegan a la superficie. Son las causantes de los daños producidos en las construcciones. Además, poseen una menor velocidad de propagación que las ondas primarias y secundarias.

Las ondas superficiales, al igual que las internas se dividen en dos tipos. Ondas tipo Love y ondas tipo Rayleigh. Las ondas de Love (Figura 3.16 D) son ondas superficiales que producen un movimiento horizontal de corte en superficie, su velocidad corresponde a un 90 % de la velocidad de las ondas S y es ligeramente superior a la velocidad de las ondas Rayleigh. Estas ondas sólo se propagan por las superficies. Las ondas Rayleigh (Figura 3.16 C) producen un movimiento elíptico retrógrado del suelo, son más lentas que las ondas internas y su velocidad de propagación es casi un 90% de la velocidad de las ondas S al igual que las ondas Love [23].

En la Figura 3.16 se puede apreciar el movimiento de las ondas mencionadas.

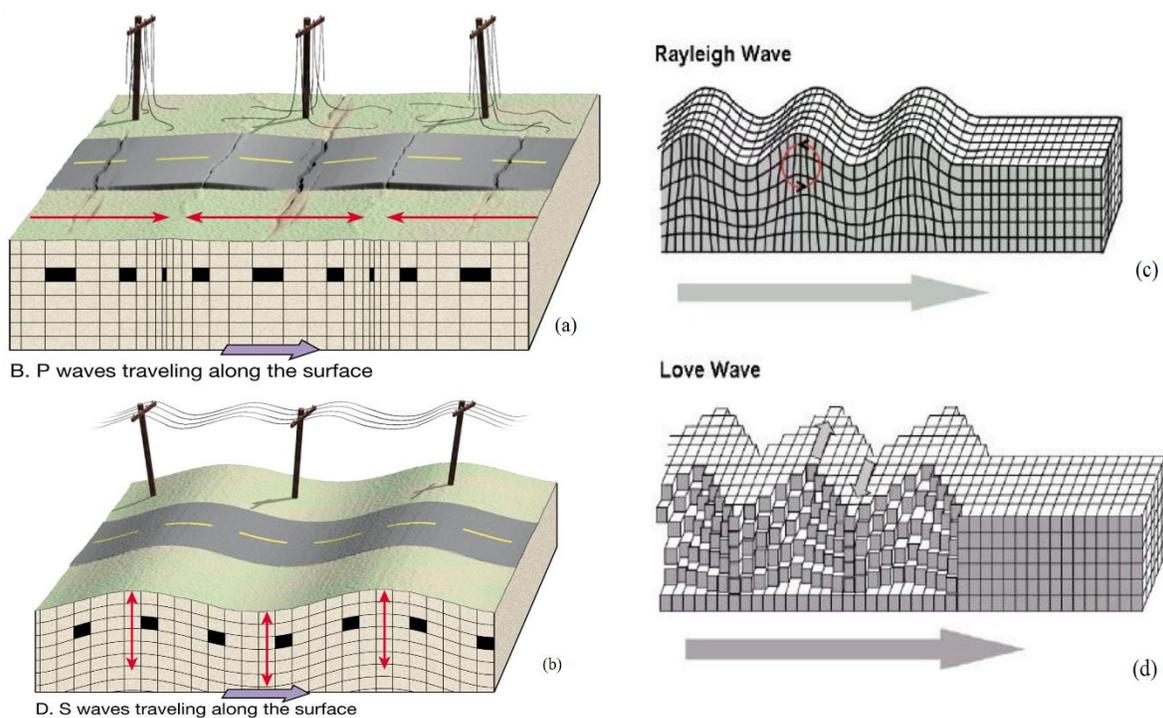


Figura 3.16 Tipo de ondas de cuerpo y superficiales. A. Ondas Primarias (“P”). B. Ondas Secundarias (“S”). C. Ondas Rayleigh. D. Ondas Love. Fuente: Modificada de [23].

### 3.4 Cordillera de los Andes

La Cordillera de los Andes es la cadena montañosa más larga de la Tierra, a diferencia de los Himalayas o los Alpes su origen no se debe a la convergencia de placas continentales, sino que a la subducción de la corteza oceánica bajo la corteza continental de aproximadamente 10.000 kilómetros en los últimos 200 millones de años [24].

La corteza oceánica en esta parte del planeta converge de manera aproximadamente perpendicular al rumbo de la corteza continental (ver Figura 3.17), generando en primera instancia sismos, pero también grandes cantidades de magma a partir de fusión parcial por hidratación como se vio anteriormente. El ángulo perpendicular de convergencia favorece el descenso rápido de agua y, por lo tanto, la fusión de las rocas que se encuentran en el manto.

La inyección continua de las grandes cantidades de magma, generado por la subducción de la corteza oceánica bajo los Andes, por una parte, produce su engrosamiento cortical de estos últimos debido a la formación de rocas ígneas que se adhieren a la corteza continental, pero también hacen dúctil el límite continental del Escudo Brasileño frío, de modo que éste se introduce desde el este en la corteza inferior levantando la corteza continental. Como consecuencia del levantamiento se originaron en el oeste dislocaciones verticales, mientras que en el este ocurrió un derrame de mantos tectónicos apilados sobre el antepaís de la Cordillera [24] (ver Figura 3.17).

Cabe mencionar que el descenso de agua por medio de la subducción de la corteza oceánica como se mencionó en los párrafos anteriores genera alteraciones hidrotermales, responsables de los depósitos minerales que se explotan actualmente, ya que, las rocas magmáticas una vez solidificadas, se comienzan a enriquecer con la circulación de agua en elementos metálicos como cobre, oro y zinc.

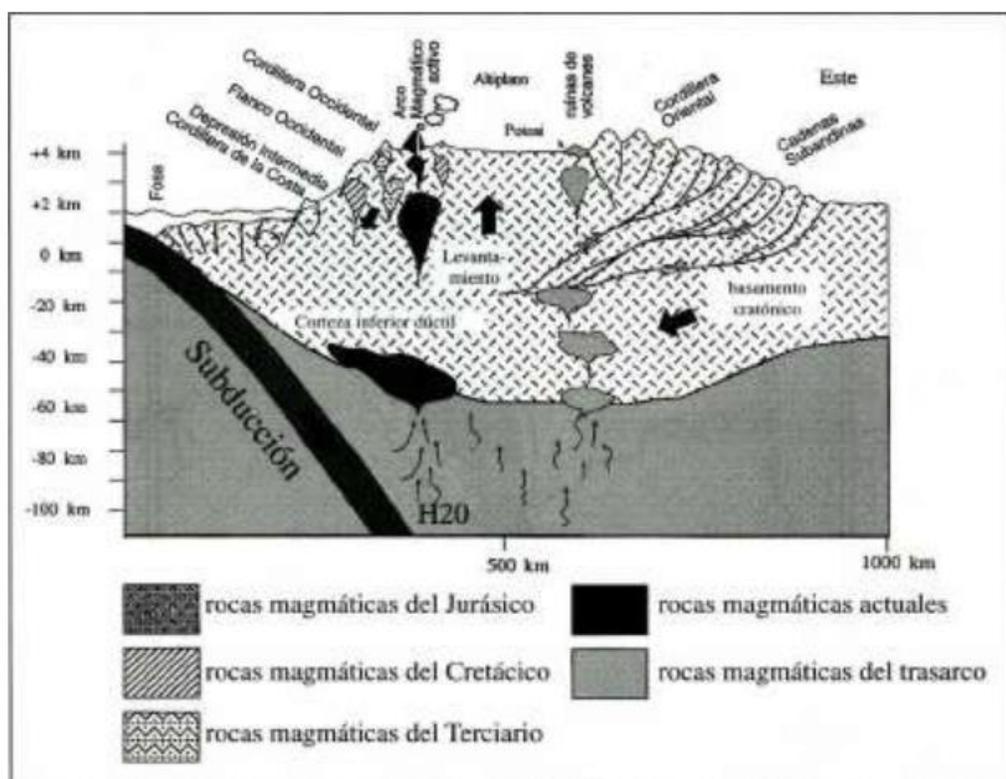


Figura 3.17 Una sección transversal de los Andes Centrales a la altura de Arica ilustra la posible causa de la orogénesis andina y el levantamiento de los Andes. El dibujo no está a escala. [24]. Fuente: [24].

## 4 Metodología

Para concretar los objetivos propuestos en este estudio se identifican tres etapas primordiales correspondientes a:

- Recopilación de datos, la cual involucra obtener los datos experimentales de los ensayos descritos en la sección 2.3.
- Programación de modelos analíticos a través de Python y Numpy en el orden que se presentan en la sección 2.2.3.1, lo cual involucra la obtención del error de mínimos cuadrados entre los datos experimentales y los teóricos, permitiendo obtener la combinación de constantes que mejor se ajusta a los datos experimentales.
- Validación de las ecuaciones constitutivas obtenidas a través del uso de ecuaciones incrementales para ajustar los datos experimentales del ensayo acústico.

Resulta necesario mencionar que en un inicio se trabajará sólo con los ensayos de compresión con y sin restricción lateral y compresión triaxial. Luego de haber propuesto las ecuaciones constitutivas no-lineales para el set de datos de los experimentos mencionados, se procede a realizar el modelo analítico para el ensayo acústico, donde se utilizan ecuaciones incrementales para ajustar los datos experimentales de éste con las ecuaciones determinadas en el ensayo de compresión con restricción lateral.

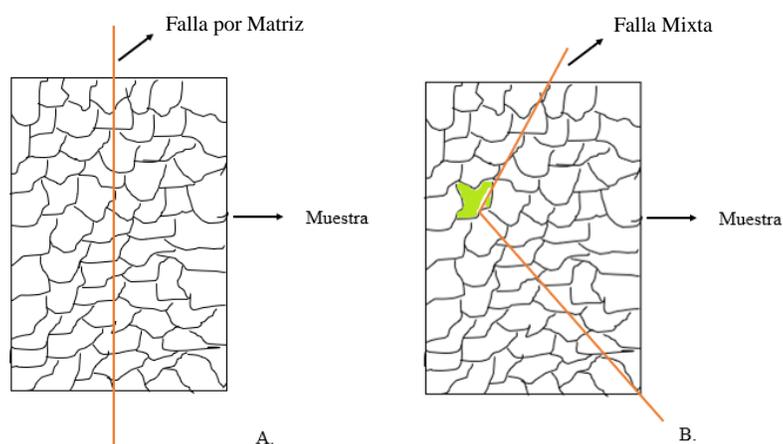
A continuación, se hará una descripción de las etapas descritas anteriormente.

### 4.1 Recopilación de Datos

Para el desarrollo del presente estudio se necesitan datos experimentales del comportamiento de las rocas en ensayo de compresión sin restricción lateral, ensayo de compresión con restricción lateral, ensayo de compresión triaxial y ensayo acústico. De estos experimentos, el ensayo de compresión sin restricción lateral y el de compresión triaxial serán facilitados por el Centro de Investigación, Desarrollo e Innovación de Estructuras y Materiales IDIEM. Mientras que los datos experimentales del ensayo de compresión con restricción lateral fueron proporcionados por Codelco, división “El Teniente” y los datos del ensayo acústico utilizados corresponden a los utilizados por P.A Johnson y P.N.J Rasolfosaon en [4].

En cada uno de los ensayos se va a seleccionar un tipo de roca y un set de datos experimentales para estudiar el comportamiento mecánico de la roca seleccionada hasta su punto de fractura.

Para los ensayos de compresión simple y compresión triaxial se evaluarán pruebas realizadas desde el año 2011 hasta el año 2017 en andesitas, tonalitas, gabro, granitos y granodioritas. Cabe mencionar, que la roca a utilizar debe presentar falla por matriz y no mixta, ya que la falla por matriz no presenta grietas o discontinuidades presentando un plano de falla, por el contrario, la falla mixta se da cuando la roca posee grietas o discontinuidades por la presencia de otras estructuras cristalinas, presentando más de un plano de falla (ver Figura 4.1). Además, las muestras deben presentar poca humedad, ya que esta condición puede tener efectos significativos sobre el esfuerzo y la deformación de la roca, dado que puede generar fuerzas internas en la muestra por el contenido de agua en los poros. Finalmente, las rocas deben tener la menor cantidad de alteraciones, dado que estas pueden disminuir o aumentar la resistencia máxima de la roca al momento de ser ensayada, pero además pueden ser puntos de anisotropía en la muestra.



*Figura 4.1 Representación gráfica de fallas en muestras. A. Falla por matriz. B. Falla mixta. Fuente: Elaboración propia.*

A continuación, se describen brevemente las rocas utilizadas en los ensayos de compresión sin restricción lateral y compresión triaxial. Se excluye, la información presentada en la *Tabla 4.1*, *Tabla 4.2* y *Tabla 4.3* para las rocas ensayadas en las pruebas de compresión con restricción lateral (correspondiente a un pórfido) y ensayo acústico (correspondiente a una Berea Sandstone), debido a que se desconoce dicha información.

Tabla 4.1 Información de ensayo de compresión sin restricción lateral para roca tipo andesita.  
Fuente: IDIEM.

Ensayo de Compresión sin restricción lateral	
Tipo de Roca	Andesita
Tipo de Falla	Matriz
Alteraciones	Propilitica/Argilica, Hematización
Resistencia Máxima D50[MPa]	29,97
Módulo de Young (E[MPa])	34.449,32

Tabla 4.2 Información de ensayo de compresión sin restricción lateral para roca tipo gabro.  
Fuente: IDIEM.

Ensayo de Compresión sin restricción lateral	
Tipo de Roca	Gabro
Tipo de Falla	Matriz
Alteraciones	Filica, Cloritización
Resistencia Máxima D50[MPa]	136,59
Módulo de Young (E[MPa])	74.942,87

Tabla 4.3 Información de ensayo de compresión triaxial para roca tipo gabro. Fuente: IDIEM.

Ensayo de Compresión Triaxial	
Tipo de Roca	Gabro
Tipo de Falla	Matriz
Alteraciones	Cloritica
Tensión de Confinamiento [MPa]	29,50
Resistencia Máxima D50[MPa]	85,79
Módulo de Young (E[MPa])	49.856,76

## 4.2 Programación Modelo No- Lineal Presentado en Sección 2.2.3.1

Para este caso, en donde usando el programa Python y Numpy, se tienen los siguientes objetivos:

- Determinar los datos teóricos.
- Determinar el error de mínimos cuadrados entre los datos experimentales y los teóricos.
- Determinar datos teóricos que presenten el menor error de mínimos cuadrados respecto a los datos experimentales.
- Definir la combinación de constantes que determinan la curva teórica con menor error.

Para obtener los datos teóricos se evalúa el esfuerzo experimental y valores distintos de las constantes pertenecientes a las funciones de la sección 2.2.3.1. Para determinar los valores que tendrán las constantes se define una vecindad que incluye las constantes propuestas por R. Bustamante y K. R Rajagopal, a través de prueba y error. La vecindad para cada constante se presenta en la *Tabla A.1* del anexo A.

Resulta necesario mencionar que el presente trabajo se inició con programaciones en el software matemático Matlab, pero se tuvo que abandonar dado que el algoritmo desarrollado requería intervalos de tiempo muy grandes y no se obtuvieron resultados tan precisos como los obtenidos a través de Python y sus librerías matemáticas. Matlab cuenta con funciones de optimización, pero en versiones más actualizadas, con la cual no se cuenta para el desarrollo del presente trabajo. Además, se debe considerar que Python es un Open source, por lo tanto, de libre acceso, su lenguaje se basa en C++, el cual es un programa que puede estar orientado a objetos, no orientado a objetos o una mezcla de los mencionados, es decir, puede pasar un puntero como argumento de una función para no copiar los datos del objeto. Mientras que, Matlab tiene su lenguaje en base a Java el cual se orienta puramente a objetos, donde los objetos se pasan por referencia (evitando copiar objetos) y los tipos primitivos se pasan por valor (crea una variable y se copia el valor).

Ahora bien, el algoritmo utilizado en el ensayo de compresión sin restricción lateral y la compresión triaxial es el mismo, mientras que el algoritmo utilizado en el ensayo de compresión con confinamiento es distinto dado que debemos determinar el valor del esfuerzo radial y angular, lo cual requiere una optimización con un mayor número de variables.

En este caso se utilizará la librería de Numpy y Scipy, esta última pertenece a Numpy y posee una serie de funciones de optimización.

Para evaluar la deformación teórica en el ensayo de compresión sin confinamiento y compresión triaxial, se utiliza la ecuación `curve.fit()`, en la cual se deben ingresar la función objetivo, los datos experimentales a evaluar que corresponden al esfuerzo, la matriz jacobiana de la función objetivo y los límites de las constantes que componen la función objetivo. La función `curve.fit()` se basa en la optimización en base al cálculo del error de mínimos cuadrados que obedece a la ecuación (80):

$$Error = \sum_{i=1}^m (\varepsilon_{Experimental} - \varepsilon_{Teórica})^2 \quad (80)$$

En el caso del ensayo de compresión con restricción lateral, se deben evaluar los límites de las constantes, pero además encontrar los valores del esfuerzo radial y angular. Por lo tanto no se puede utilizar la función `curve.fit()`, sino que debemos plantear el problema de minimización presentado en (81).

$$\begin{aligned} Min \quad & F(x) = \sum_{i=1}^m (\varepsilon_{Experimental} - \varepsilon_{Teórica})^2 \\ s.a \quad & h(x) = 0 \end{aligned} \quad (81)$$

Donde  $h(x)$  corresponde a las ecuaciones (57) y (59). Luego se aplica la función `scipy.optimize.minimize()` en la cual se debe ingresar la función objetivo  $F(x)$ , las condiciones de

borde que dependen de  $h(x)$  y los límites de las constantes. La función `scipy.optimize.minimize()` ahora que se han ingresado los datos sigue el mismo algoritmo que `curve.fit()`, dado que utilizamos el error de mínimos cuadrados.

Se utilizará el error relativo para analizar de manera cuantitativa los datos teóricos obtenidos respecto a los experimentales. El error relativo se obtiene del siguiente modo:

$$Error\ Relativo = \frac{|Datos\ Experimentales - Datos\ Teóricos|}{|Datos\ de\ Deformación\ Experimentales|} * 100 \quad (82)$$

### 4.3 Programación Ajuste Ensayo Acústico

En el ensayo acústico se busca determinar la utilidad de las ecuaciones constitutivas evaluadas previamente, al igual que en el desarrollo de programación anterior se utiliza Python, dado que a través de su librería Sympy, se puede utilizar lenguaje simbólico, es decir, permite resolver funciones presentando la función algebraica.

Para este modelo se utilizará la ecuación constitutiva perteneciente al ensayo de compresión con confinamiento que posea el mejor ajuste a los datos experimentales. Esto, porque los datos experimentales utilizados en este modelo pertenecen a la publicación de P.A Johnson y P.N.J Rasolfosaon [4]. En el documento se explica que una muestra cilíndrica de Berea Sandstone (arenisca) cuyas dimensiones son: altura de 42.4 [mm] y diámetro de 50.8 [mm] es sometida a un esfuerzo de compresión axial que no excede los 25 [MPa] en compresión con restricción lateral y simultáneamente se aplica un pulso de 1 Hz para obtener la velocidad de onda “P” y “S”.

El algoritmo consiste principalmente en definir una función que determine todos los valores de la matriz  $\mathcal{A}_{ijkl}$  que se encuentran en función de las ecuaciones constitutivas. Luego, a través de listas se arma cada fila de la matriz  $\mathbb{M}$ . Por medio del sistema lista de listas se puede armar la matriz que se utilizará para calcular (79). Como Sympy permite utilizar lenguaje simbólico y entrega una serie de funciones algebraicas, aplicamos la función  $\mathbb{M}.det()$ , donde se obtiene un polinomio que se encuentra en función de la variable  $s$  como se mencionó en la sección 2.3.4. Finalmente se utiliza la función `solve` en el polinomio obtenido, lo cual entrega distintos valores a los cuales se le aplica error relativo y error por mínimos cuadrados para ver cuál es el set de datos teóricos que ajusta de mejor manera la curva experimental.

## 5 Resultados

### 5.1 Ensayo de Compresión Simple

#### 5.1.1 Deformación Axial

A continuación, se presentan los ajustes a los datos experimentales de la roca andesita y gabro para la deformación axial, la comparación de los modelos propuestos con el modelo actual y finalmente las tablas que resumen las constantes que permiten obtener las curvas teóricas, el error de mínimos cuadrados y error relativo promedio que presentan.

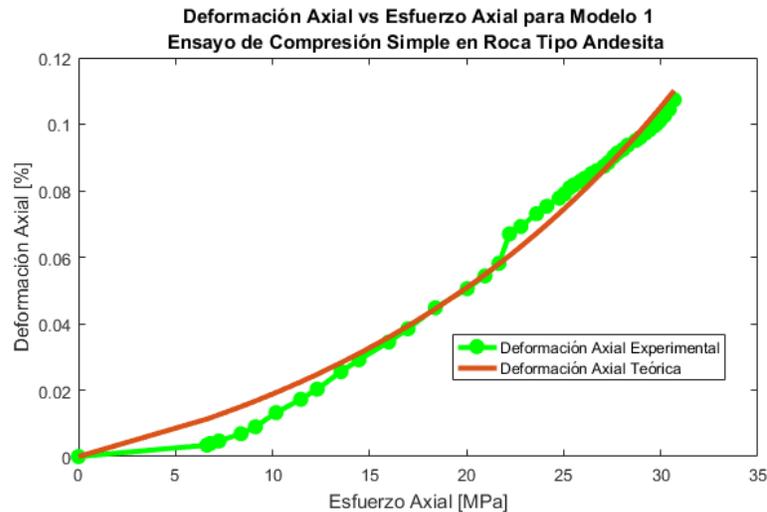


Figura 5.1 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo andesita, para modelo perteneciente a ecuación (22).

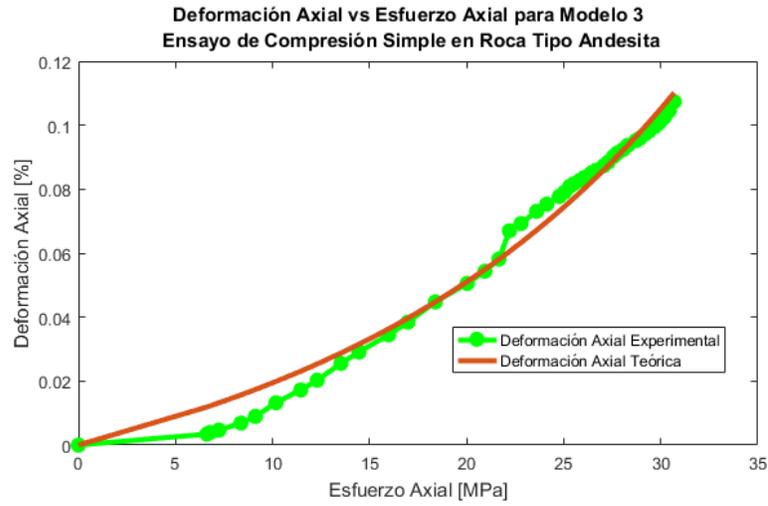


Figura 5.2 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo andesita, para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

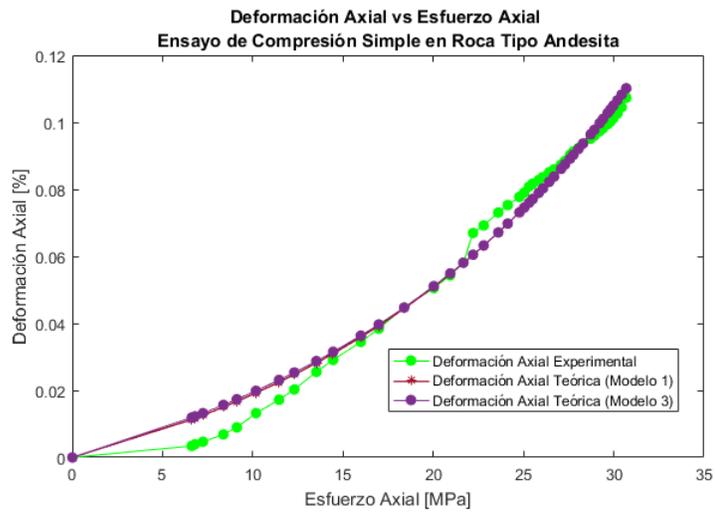


Figura 5.3 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo andesita, para analizar todos los modelos en ensayo de compresión sin restricción lateral.

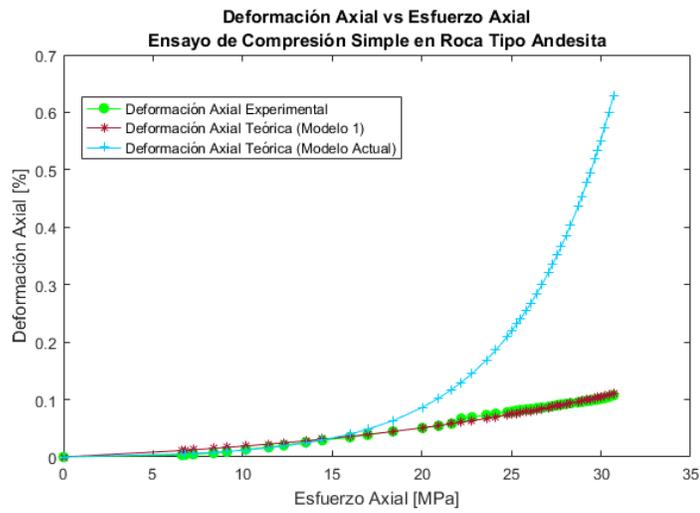


Figura 5.4 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo andesita, para comparar modelo actual con modelo 1 (el que posee el mejor ajuste para el presente ensayo).

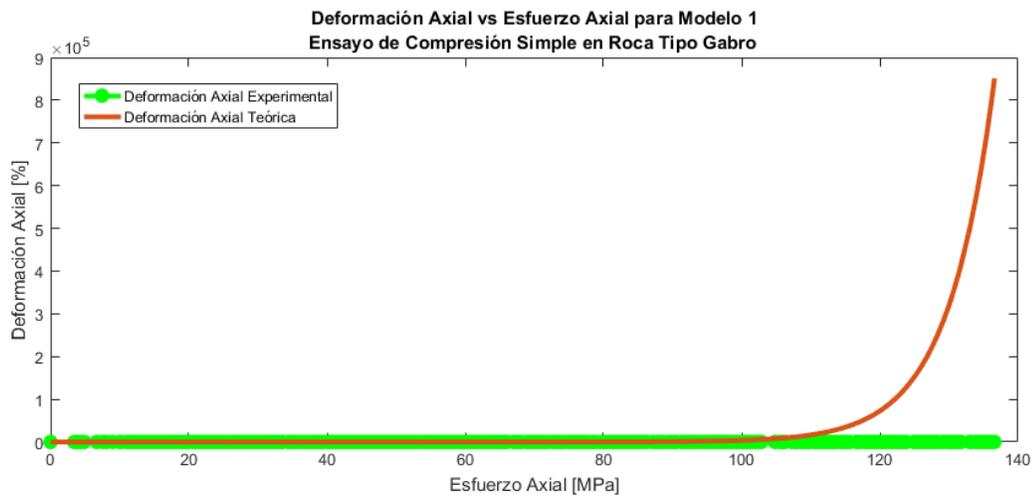


Figura 5.5 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo gabro hasta fractura de la roca en 136,59 [MPa] para modelo perteneciente a ecuación (22).

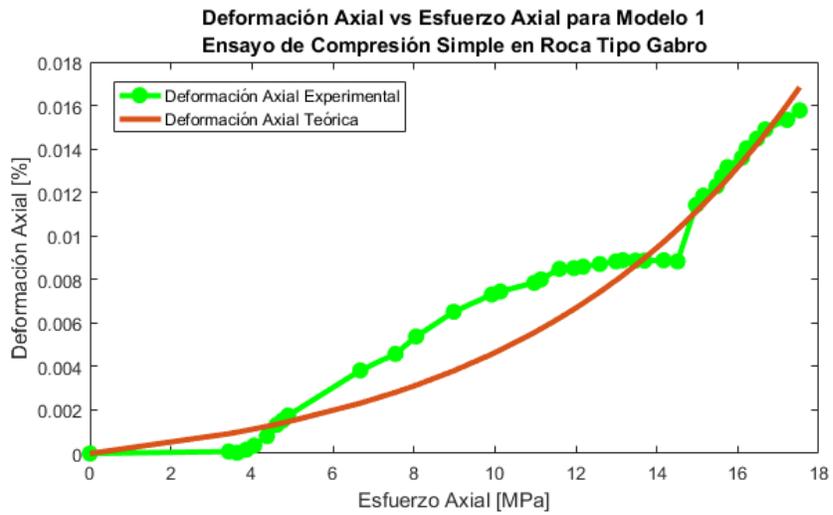


Figura 5.6 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo gabro hasta los 17,53[MPa] para modelo perteneciente a ecuación (22).

Tabla 5.1 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo andesita para modelo perteneciente a ecuación (22).

Combinación de constantes obtenidas						Error de mínimos cuadrados
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	$7,75 \times 10^{-4}$
0,499	-0,0255	0,125	0,00499	-0,0256	0,126	
Error relativo promedio [%]						22,9

Tabla 5.2 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo andesita para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	$\beta_1$	$g_1$	$k_1$
0,364	-0,0276	0,123	0,00349	-0,0274	0,120	0,200	0,0100	0,00900
Error de mínimos cuadrados								$8,58 \times 10^{-4}$
Error relativo promedio [%]								24,7

Tabla 5.3 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo andesita para modelo actual.

Combinación de constantes obtenidas						Error de mínimos cuadrados
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	
0,0110	-0,0800	0,100	0,00100	-0,0800	0,100	2,66
Error relativo promedio [%]						192,7

Tabla 5.4 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo gabro hasta fractura en 136,59 [MPa] para modelo perteneciente a ecuación (22).

Combinación de constantes obtenidas						Error de mínimos cuadrados
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	8,05 x 10 <sup>12</sup>
0,00900	-0,0700	0,120	0,000800	-0,0700	0,120	
Error relativo promedio [%]						1,81 x 10 <sup>7</sup>

Tabla 5.5 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo gabro hasta 17,53 [MPa] para modelo perteneciente a ecuación (22).

Combinación de constantes obtenidas						Error de mínimos cuadrados
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	6,50 x 10 <sup>-5</sup>
0,00900	-0,0700	0,120	0,00160	-0,0810	0,0850	
Error relativo promedio [%]						28,5

### 5.1.2 Deformación Lateral

Ahora, se presentan los ajustes a los datos experimentales de la roca andesita y gabro para la deformación lateral, la comparación de los modelos propuestos con el modelo actual y finalmente

las tablas que resumen las constantes que permiten obtener las curvas teóricas, el error de mínimos cuadrados y error relativo promedio que presentan.

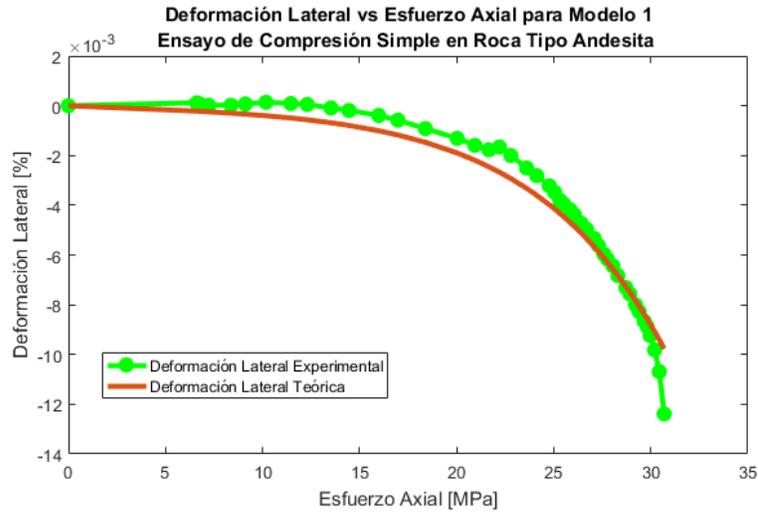


Figura 5.7 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo andesita para modelo perteneciente a ecuación (22).

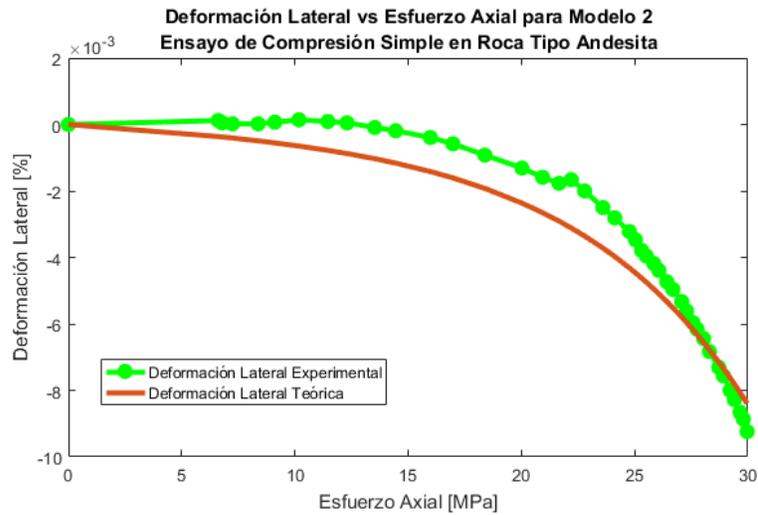


Figura 5.8 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo andesita para modelo perteneciente a ecuación (23).

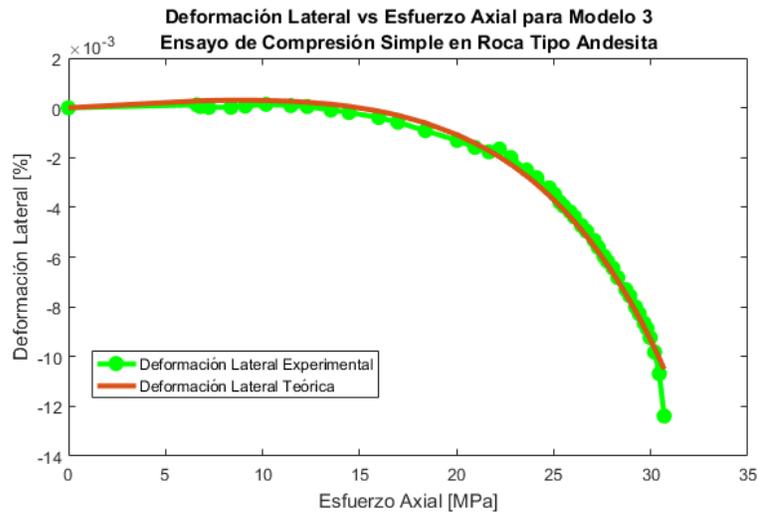


Figura 5.9 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo andesita para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

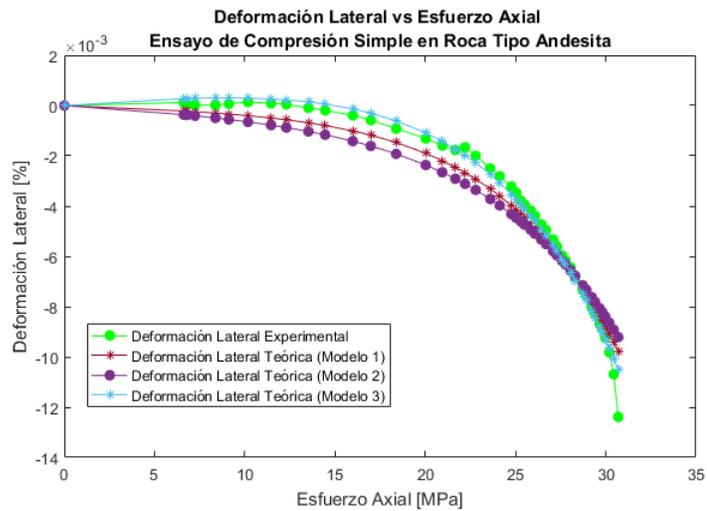


Figura 5.10 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo andesita, para analizar todos los modelos en ensayo de compresión sin restricción lateral.

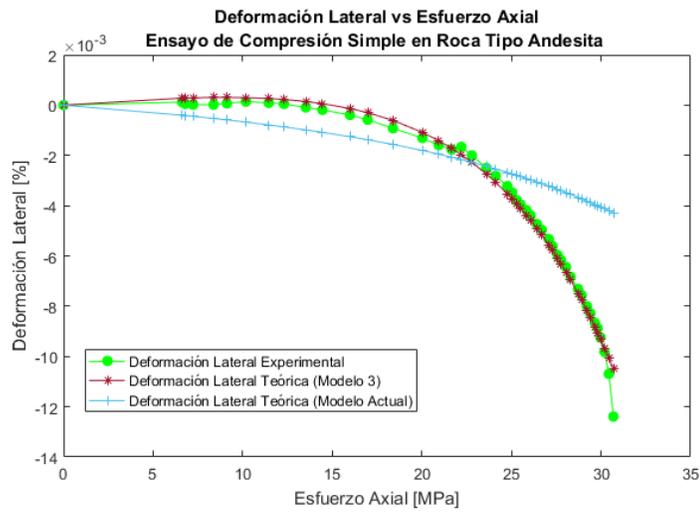


Figura 5.11 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo andesita, para comparar modelo actual con modelo 3 (el que posee el mejor ajuste para el presente ensayo).

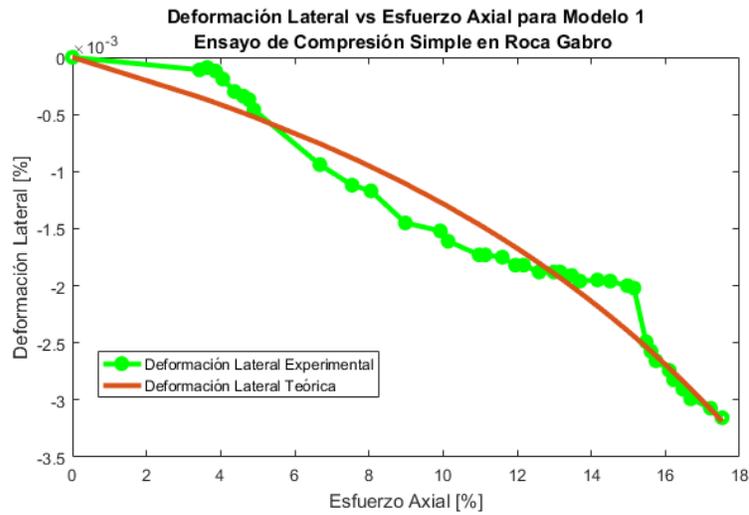


Figura 5.12 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo gabro hasta los 17,53 [MPa] para modelo perteneciente a ecuación (22).

Tabla 5.6 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación lateral con mínimo error en roca tipo andesita para modelo perteneciente a ecuación (22).

Combinación de constantes obtenidas						Error de mínimos cuadrados
$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	$1,98 \times 10^{-5}$
-0,000477	-0,0699	0,180	0,00500	-0,0900	0,0800	
Error relativo promedio [%]						186,01

Tabla 5.7 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación lateral con mínimo error en roca tipo andesita para modelo perteneciente a ecuación (23).

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	$\alpha_4$	$c_4$	$d_4$
-0,000333	-0,0700	0,180	0,00499	-0,0375	0,109	0,00134	-0,0857	0,293
Error de mínimos cuadrados								$4,09 \times 10^{-5}$
Error relativo promedio [%]								290,02

Tabla 5.8 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación lateral con mínimo error en roca tipo andesita para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	$\beta_2$	$g_2$	$k_2$
-0,000500	-0,0700	0,180	0,00499	-0,0857	0,0884	-0,0461	0,104	0,000494
Error de mínimos cuadrados								$5,80 \times 10^{-6}$
Error relativo promedio [%]								113,0

Tabla 5.9 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo andesita para modelo actual.

Combinación de constantes obtenidas						Error de mínimos cuadrados
$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	
-0,000400	-0,0500	0,200	0,00100	-0,0800	0,100	$3,42 \times 10^{-4}$
Error relativo promedio [%]						307,6

Tabla 5.10 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación lateral con mínimo error en roca tipo gabro hasta los 17,53 [MPa] para modelo perteneciente a ecuación (22).

Combinación de constantes obtenidas						Error de mínimos cuadrados
$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$	1,46 x 10 <sup>-6</sup>
-0,000500	-0,0650	0,195	0,000950	-0,0900	0,0100	
Error relativo promedio [%]						35,2

## 5.2 Ensayo de Compresión con Restricción Lateral

### 5.2.1 Deformación Axial

En esta sección, se presentan los ajustes a los datos experimentales de roca tipo pórfido para la deformación axial, la comparación de los modelos propuestos con el modelo actual y finalmente se presentan las tablas que resumen las constantes que permiten obtener las curvas teóricas, el esfuerzo radial determinado, el error de mínimos cuadrados y el error relativo promedio que presentan.

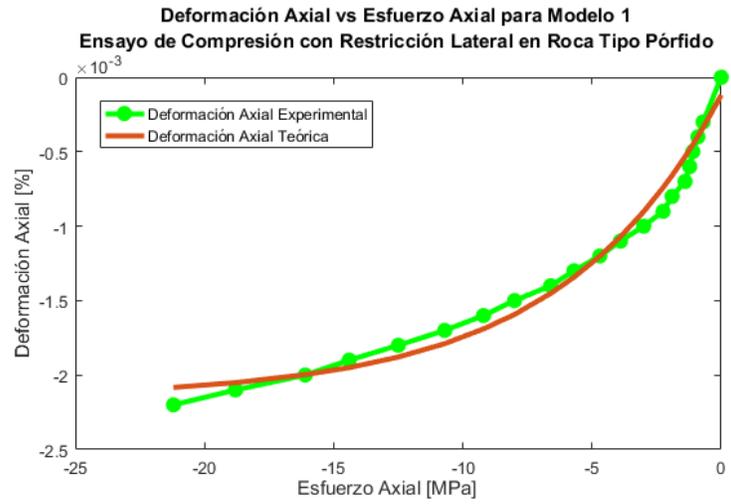


Figura 5.13 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo pórfido para modelo perteneciente a ecuación (22).

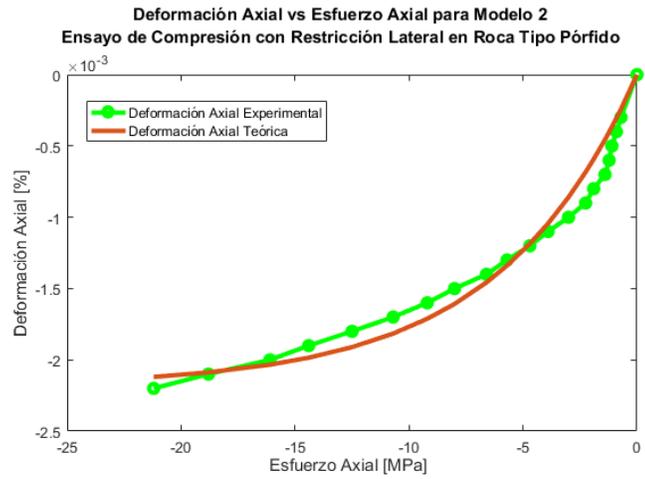


Figura 5.14 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo pórfido para modelo perteneciente a ecuación (23).

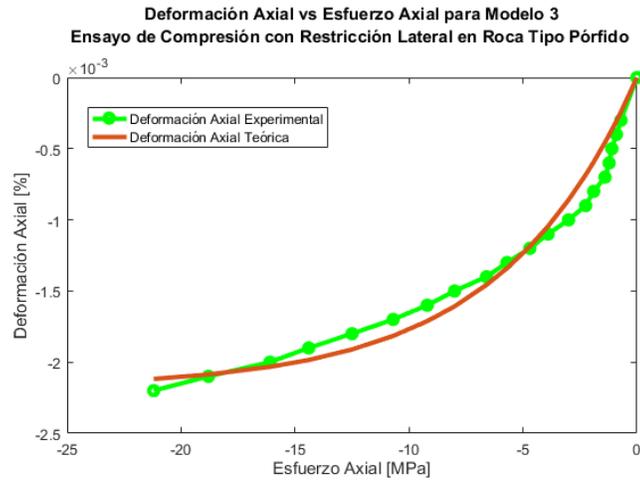


Figura 5.15 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo Pórfido para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

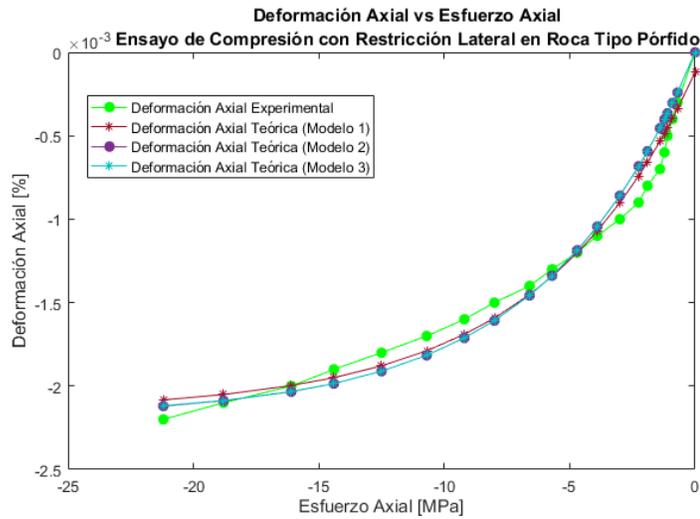


Figura 5.16 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo pórfido, para analizar todos los modelos en ensayo de compresión con restricción lateral.

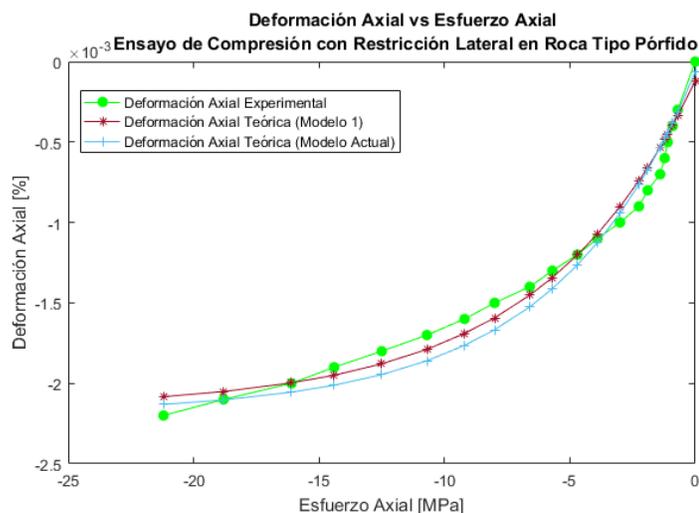


Figura 5.17 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo pórfido, para comparar modelo actual con modelo 1 (el que posee el mejor ajuste para el presente ensayo).

Tabla 5.11 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo pórfido para modelo perteneciente a ecuación (22).

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$
0,0130	-0,0698	0,0908	-0,000499	-0,0699	0,180	0,00159	-0,0280	0,123
Esfuerzo Radial $\sigma_r$								0
Error de mínimos cuadrados								$1,69 \times 10^{-7}$
Error relativo promedio [%]								7,29

Tabla 5.12 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo pórfido para modelo perteneciente a ecuación (23).

Combinación de constantes obtenidas							
$\alpha_1$	0,0130	$\alpha_2$	-0,000400	$\alpha_3$	0,000134	$\alpha_4$	-0,000800
$c_1$	-0,0729	$c_2$	-0,0500	$c_3$	-0,0522	$c_4$	-0,0600
$d_1$	0,101	$d_2$	0,200	$d_3$	0,105	$d_4$	0,545
Esfuerzo Radial $\sigma_r$							0
Error de mínimos cuadrados							$3,13 \times 10^{-7}$
Error relativo promedio [%]							12,1

Tabla 5.13 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo pórfido para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

Combinación de constantes obtenidas									
$\alpha_1$	0,0130	$\alpha_2$	-0,000400	$\alpha_3$	0,000130	$\beta_1$	0,237	$\beta_2$	-0,0220
$c_1$	-0,0721	$c_2$	-0,0500	$c_3$	-0,0333	$k_1$	0,000110	$k_2$	0,138
$d_1$	0,0981	$d_2$	0,0200	$d_3$	0,112	$g_1$	0,0899	$g_2$	0,000320
Esfuerzo Radial $\sigma_r$									0
Error de mínimos cuadrados									$3,11 \times 10^{-7}$
Error relativo promedio [%]									12,0

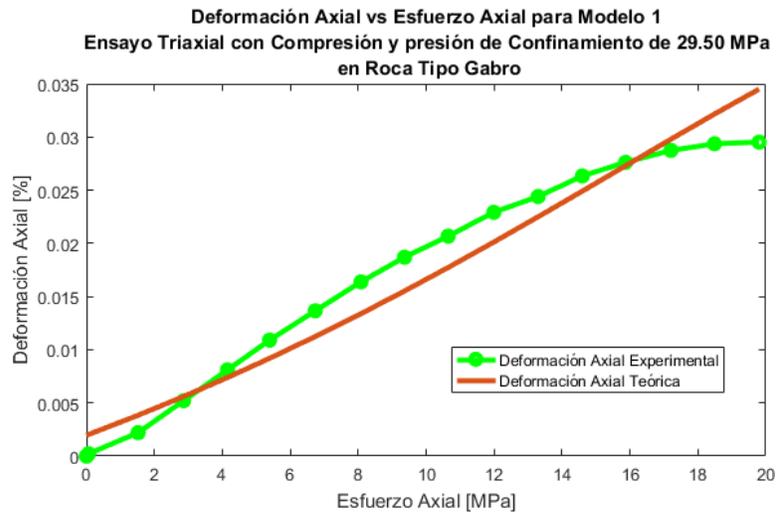
Tabla 5.14 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo pórfido para modelo actual.

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$
0,0110	-0,0800	0,100	-0,000400	-0,0500	0,200	0,00100	-0,0800	0,100
Esfuerzo Radial $\sigma_r$								0
Error de mínimos cuadrados								$2,42 \times 10^{-7}$
Error relativo promedio [%]								8,47

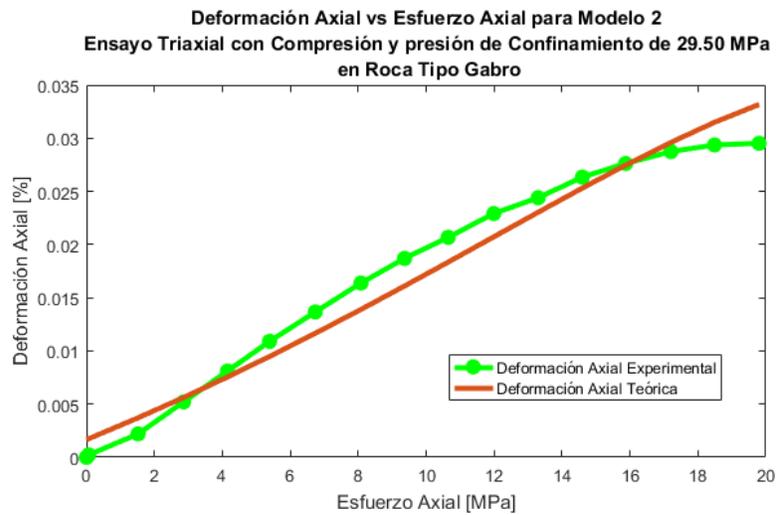
### 5.3 Ensayo de Compresión Triaxial

#### 5.3.1 Deformación Axial

A continuación, se presentan los ajustes a los datos experimentales de roca tipo gabro para la deformación axial, la comparación de los modelos propuestos con el modelo actual y finalmente se presentan las tablas que resumen las constantes que permiten obtener las curvas teóricas, el error de mínimos cuadrados y el error relativo promedio que presentan.



*Figura 5.18 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (22).*



*Figura 5.19 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (23).*

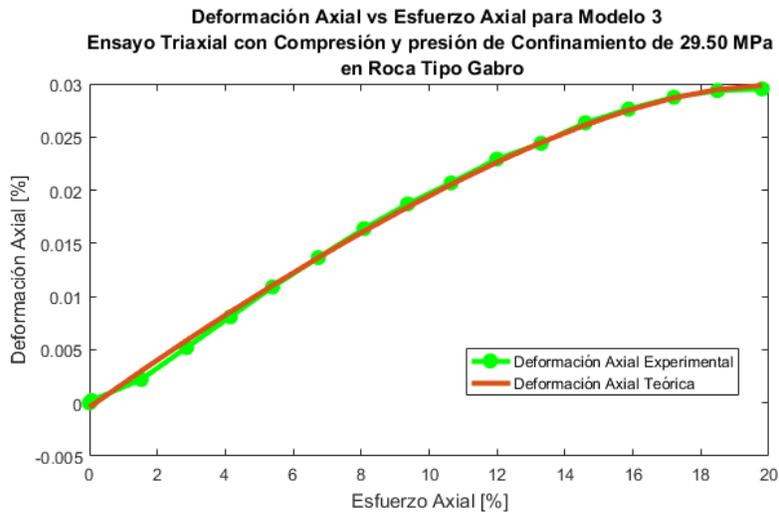


Figura 5.20 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

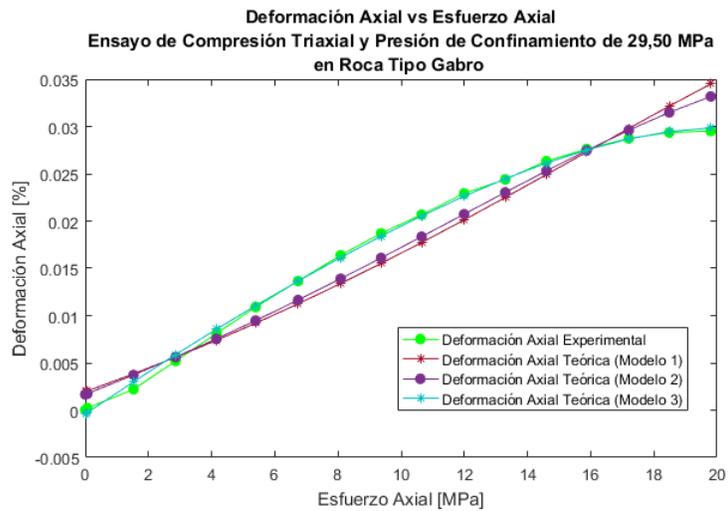
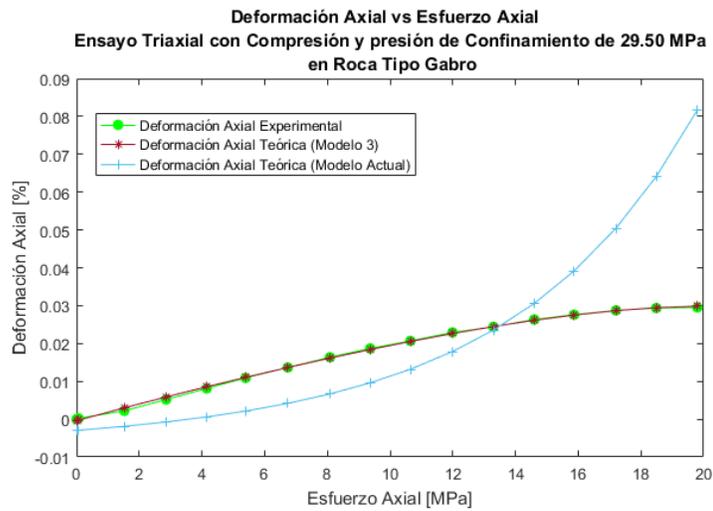


Figura 5.21 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo gabro, para analizar todos los modelos en ensayo de compresión triaxial.



*Figura 5.22 Deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo gabro, para comparar modelo actual con modelo 3 (el que posee el mejor ajuste para el presente ensayo).*

Tabla 5.15 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (22).

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$
0,0130	-0,0200	0,130	-0,000300	-0,0700	0,180	0,00500	-0,0723	0,0931
Error de mínimos cuadrados								$9,79 \times 10^{-5}$
Error relativo promedio [%]								191,2

Tabla 5.16 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (23).

Combinación de constantes obtenidas							
$\alpha_1$	0,0130	$\alpha_2$	-0,000491	$\alpha_3$	0,00500	$\alpha_4$	-0,000400
$c_1$	-0,0200	$c_2$	-0,0700	$c_3$	-0,0743	$c_4$	-0,0900
$d_1$	0,130	$d_2$	0,180	$d_3$	0,0927	$d_4$	0,0500
Error de mínimos cuadrados						6,12 x 10 <sup>-5</sup>	
Error relativo promedio [%]						161,3	

Tabla 5.17 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

Combinación de constantes obtenidas									
$\alpha_1$	0,0130	$\alpha_2$	-0,000404	$\alpha_3$	0,00500	$\beta_1$	0,499	$\beta_2$	-0,0500
$c_1$	-0,0200	$c_2$	-0,0700	$c_3$	-0,0708	$k_1$	0,0118	$k_2$	0,000660
$d_1$	0,130	$d_2$	0,180	$d_3$	0,0994	$g_1$	0,00943	$g_2$	0,0750
Error de mínimos cuadrados								2,36 x 10 <sup>-6</sup>	
Error relativo promedio [%]								45,3	

Tabla 5.18 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo gabro para modelo actual.

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$
0,0110	-0,0800	0,100	-0,000400	-0,0500	0,200	0,00100	-0,0800	0,100
Error de mínimos cuadrados								$5,11 \times 10^{-3}$
Error relativo promedio [%]								354,1

### 5.3.2 Deformación Lateral

Ahora, se presentan los ajustes a los datos experimentales de tipo de roca tipo gabro para la deformación lateral, la comparación de los modelos propuestos con el modelo actual y finalmente se presentan las tablas que resumen las constantes que permiten obtener las curvas teóricas, el esfuerzo radial determinado, el error de mínimos cuadrados y el error relativo promedio que presentan.

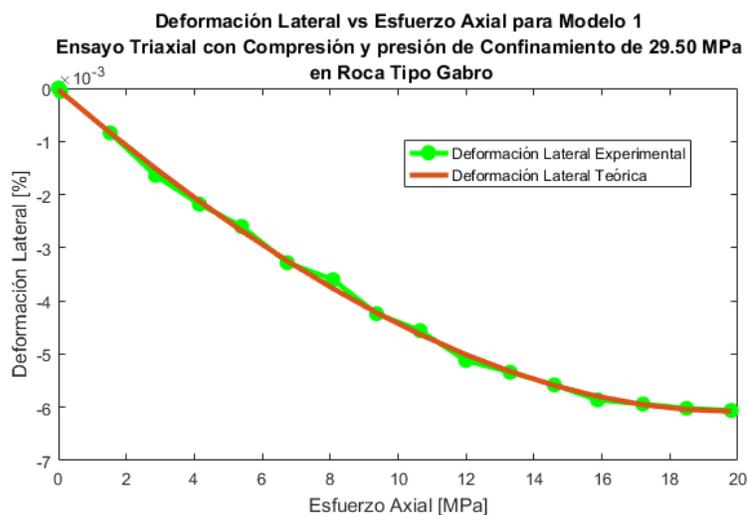


Figura 5.23 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (22).

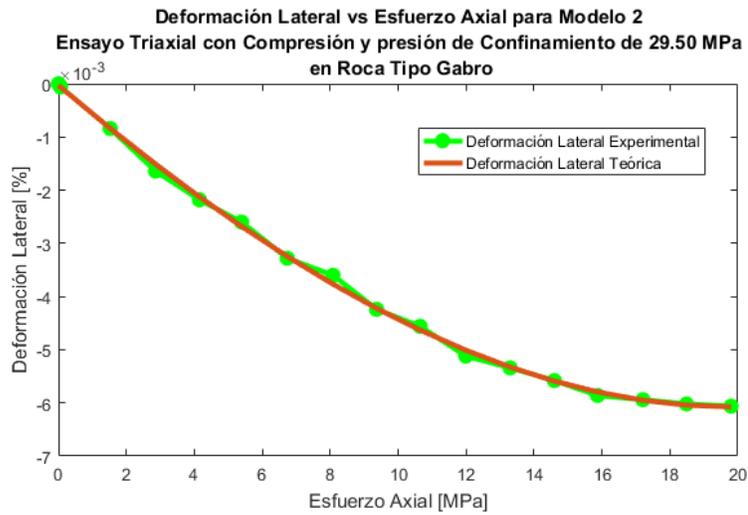


Figura 5.24 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (23).

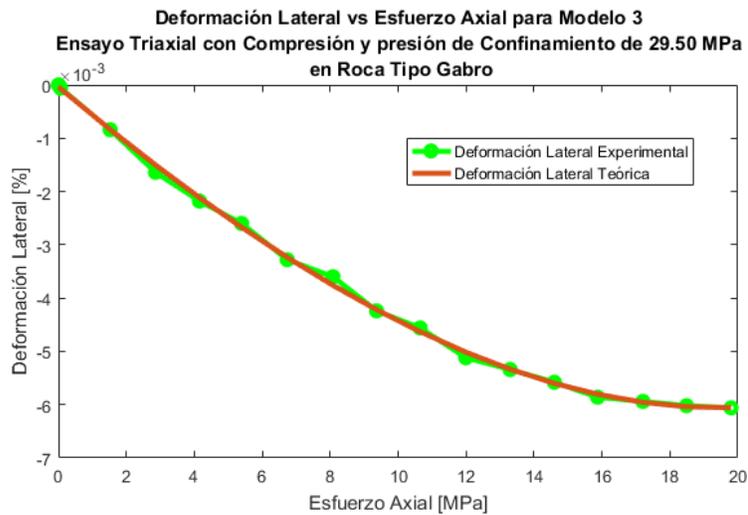


Figura 5.25 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

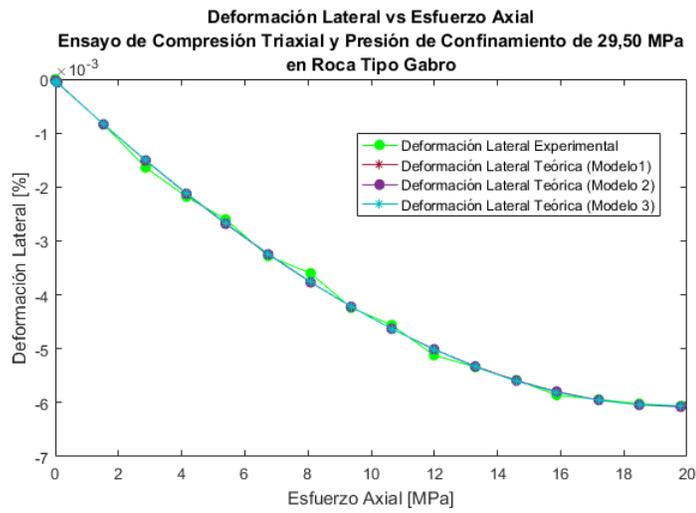


Figura 5.26 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo gabro, para analizar todos los modelos en ensayo de compresión triaxial.

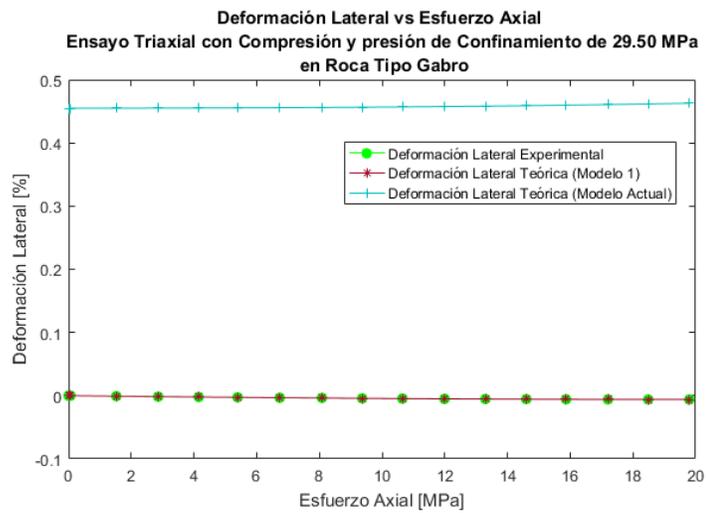


Figura 5.27 Deformación lateral vs esfuerzo axial en roca tipo gabro, para comparar modelo actual con modelo 1 (el que posee el mejor ajuste para el presente ensayo).

Tabla 5.19 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación lateral con mínimo error cuadrado en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (22).

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$
0,0240	-0,0415	0,115	-0,000500	-0,0593	0,191	0,00137	-0,0745	0,0995
Error de mínimos cuadrados								$8,02 \times 10^{-8}$
Error relativo promedio [%]								8,583

Tabla 5.20 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación lateral con mínimo error cuadrado en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (23).

Combinación de constantes obtenidas							
$\alpha_1$	0,0240	$\alpha_2$	-0,000500	$\alpha_3$	0,00137	$\alpha_4$	0,000944
$c_1$	-0,0415	$c_2$	-0,0592	$c_3$	-0,0747	$c_4$	-0,0629
$d_1$	0,115	$d_2$	0,190	$d_3$	0,0999	$d_4$	0,466
Error de mínimos cuadrados						$8,03 \times 10^{-8}$	
Error relativo promedio [%]						8,584	

Tabla 5.21 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación lateral con mínimo error cuadrado en roca tipo gabro para modelo perteneciente a ecuación (22) con modificación para  $f_1$  y  $f_2$ .

Combinación de constantes obtenidas									
$\alpha_1$	0,0180	$\alpha_2$	-0,000490	$\alpha_3$	0,000692	$\beta_1$	0,241	$\beta_2$	-0,00425
$c_1$	-0,0294	$c_2$	-0,0584	$c_3$	-0,0781	$k_1$	0,0199	$k_2$	0,0000600
$d_1$	0,123	$d_2$	0,191	$d_3$	0,0894	$g_1$	0,00866	$g_2$	0,175
Error de mínimos cuadrados									$7,93 \times 10^{-8}$
Error relativo promedio [%]									11,6

Tabla 5.22 Resumen combinación de constantes para ajuste a curva experimental de deformación axial con mínimo error en roca tipo gabro para modelo actual.

Combinación de constantes obtenidas								
$\alpha_1$	$c_1$	$d_1$	$\alpha_2$	$c_2$	$d_2$	$\alpha_3$	$c_3$	$d_3$
0,0110	-0,0800	0,100	-0,000400	-0,0500	0,200	0,00100	-0,0800	0,100
Error de mínimos cuadrados								3,82
Error relativo promedio [%]								180.994,2

## 5.4 Ensayo Acústico

En la presente parte, se presentan los resultados obtenidos al aplicar la ecuación constitutiva del modelo 1 y el modelo actual al ensayo de compresión con confinamiento, para ajustar el modelo acústico. Además, se incluye una tabla resumen con el error de mínimos cuadrados y error relativo promedio de los datos teóricos obtenidos.

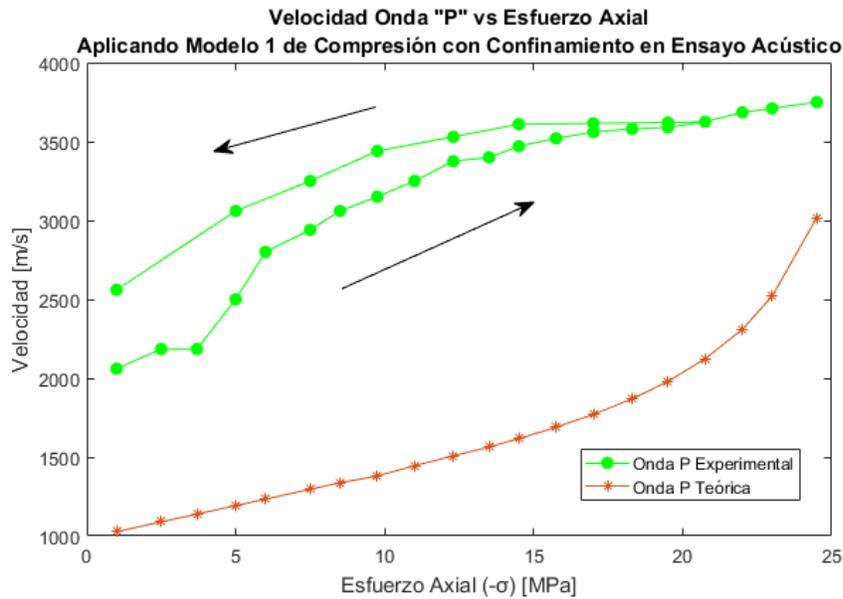


Figura 5.28 Velocidad de onda "P" vs esfuerzo axial aplicando ecuaciones constitutivas pertenecientes al modelo 1 del ensayo de compresión con confinamiento.

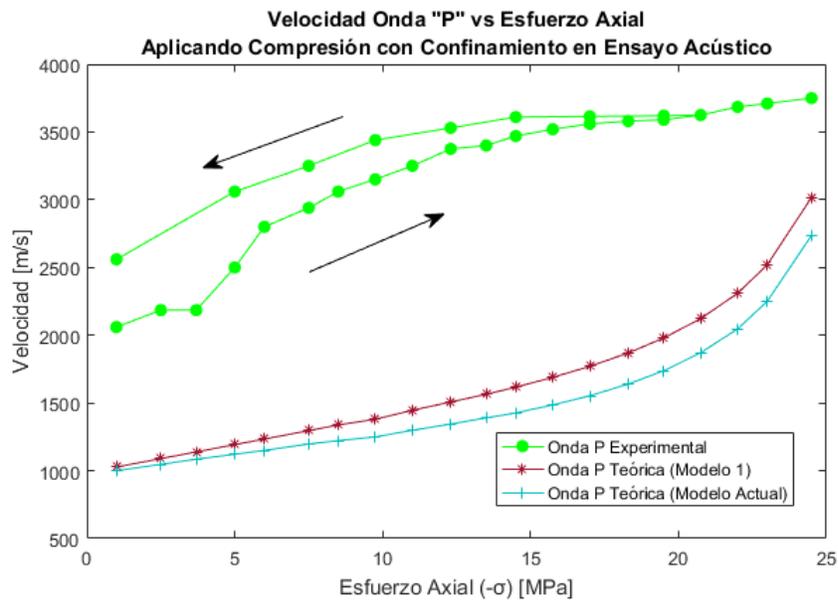


Figura 5.29 Velocidad onda “P” vs esfuerzo axial comparando ecuaciones constitutivas pertenecientes al modelo 1 y al modelo actual del ensayo de compresión con confinamiento.

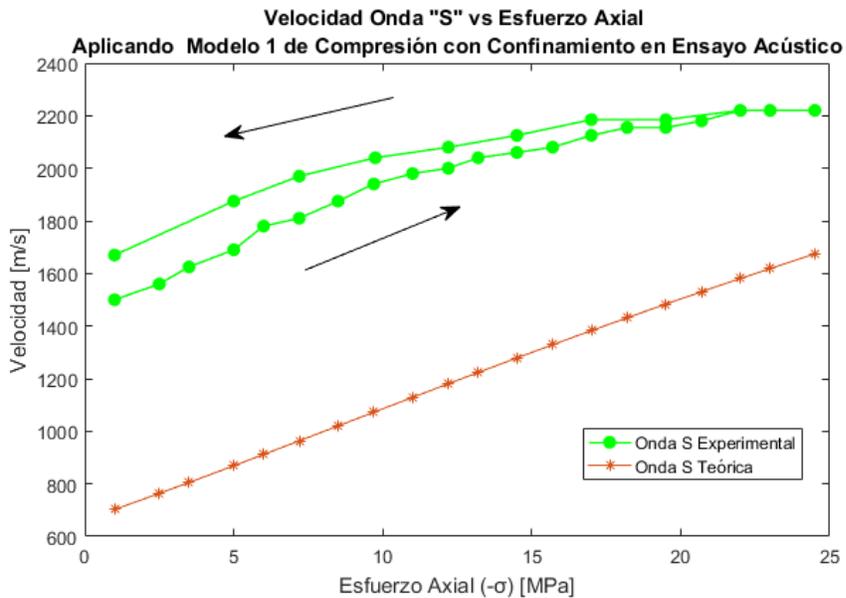


Figura 5.30 Velocidad de onda “S” vs esfuerzo Axial aplicando ecuaciones constitutivas pertenecientes al modelo 1 del ensayo de compresión con confinamiento.

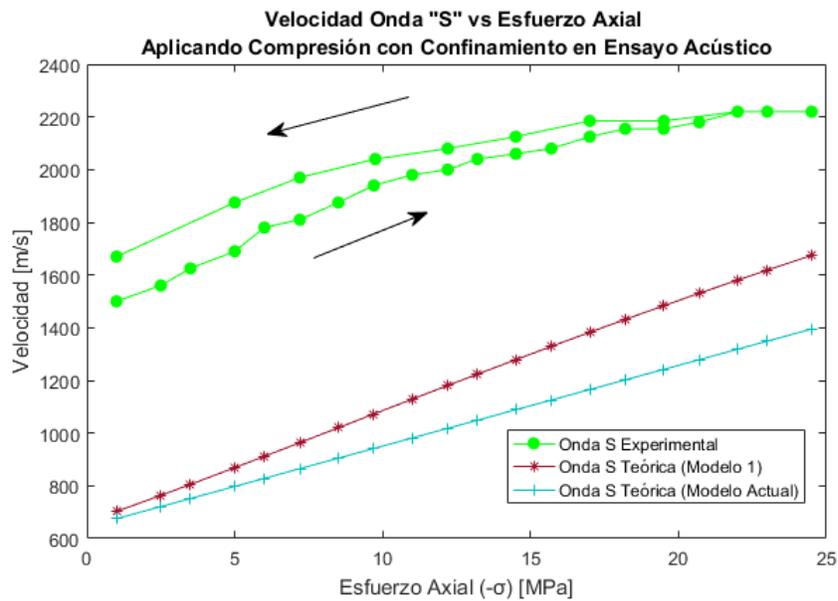


Figura 5.31 Velocidad onda “S” vs esfuerzo axial comparando ecuaciones constitutivas pertenecientes al modelo 1 y modelo actual obtenidas del ensayo de compresión con restricción lateral.

Tabla 5.23 Resumen error de mínimos cuadrados y error relativo promedio para los datos teóricos obtenidos para la velocidad de onda “P” y “S”.

Onda “P”		Onda “S”	
Error de Mínimos Cuadrados	4,80 x 10 <sup>7</sup>	Error de Mínimos Cuadrados	1,18 x 10 <sup>7</sup>
Error Relativo Promedio [%]	48,4	Error Relativo Promedio [%]	39,9

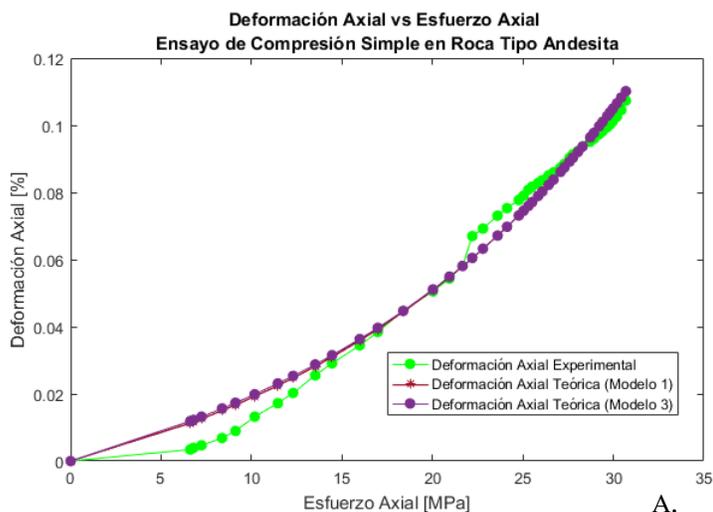
Tabla 5.24 Resumen de error de mínimos cuadrados y error relativo promedio para los datos teóricos obtenidos de la aplicación del modelo actual en el ensayo acústico para la velocidad de onda “P” y “S”.

Onda “P”		Onda “S”	
Error de Mínimos Cuadrados	$5,87 \times 10^7$	Error de Mínimos Cuadrados	$1,72 \times 10^7$
Error Relativo Promedio [%]	53,2	Error Relativo Promedio [%]	47,8

## 6 Discusión

A partir de la Figura 5.3 se puede apreciar que los modelos propuestos 1 y 3 para la deformación axial en el ensayo de compresión sin restricción lateral en la muestra de andesita, se ajustan a la curva experimental sin diferencias significativas, lo cual también se puede apreciar al analizar el error de mínimos cuadrados y el error relativo promedio (ver *Tabla 5.1* y *Tabla 5.2*). Ahora, si se realiza un zoom a la Figura 5.3 (ver Figura 6.1), se puede observar el modelo 1 es más preciso que el modelo 3 y por lo tanto, posee un menor error relativo promedio y error de mínimos cuadrados, correspondientes a 22,9 % y  $7,75 \times 10^{-4}$ . Por otra parte, se debe notar que desde el inicio del ensayo hasta los 13,52 [MPa], el error relativo promedio se encuentra en el rango de 10 % a un 230 %, sin embargo, después de los 13,52 [MPa] se obtiene un error relativo promedio de un 3,46 %, lo cual es mucho más aceptable (detalles en el anexo B). Esto se puede deber tanto a errores humanos al momento de realizar los ensayos, como de errores en la instrumentación.

Al comparar el modelo 1 (más preciso para la deformación axial en el ensayo de compresión sin restricción lateral) con el modelo actual, se puede observar en la Figura 5.4 que el modelo obtenido en el presente estudio es mucho más preciso que el obtenido en el modelo actual, esto también se refleja en los valores de error relativo promedio y error de mínimos cuadrados para el modelo actual en la *Tabla 5.3*, cuyos valores son respectivamente un 192,7% y 2,66, lo cual es bastante superior a los obtenidos por el modelo 1.



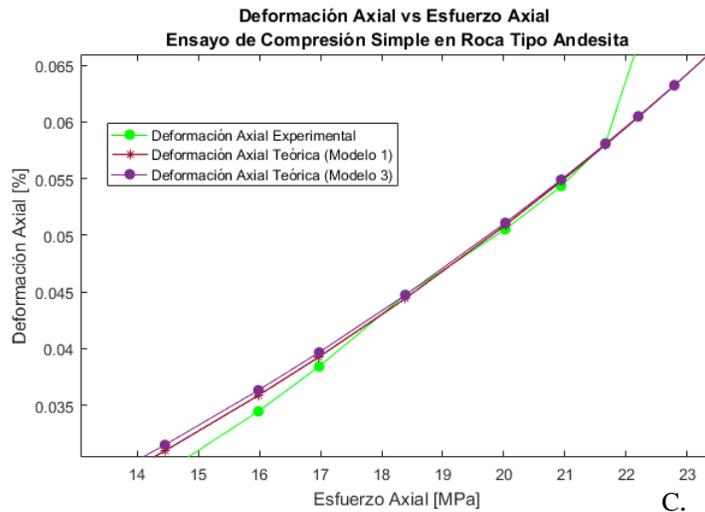
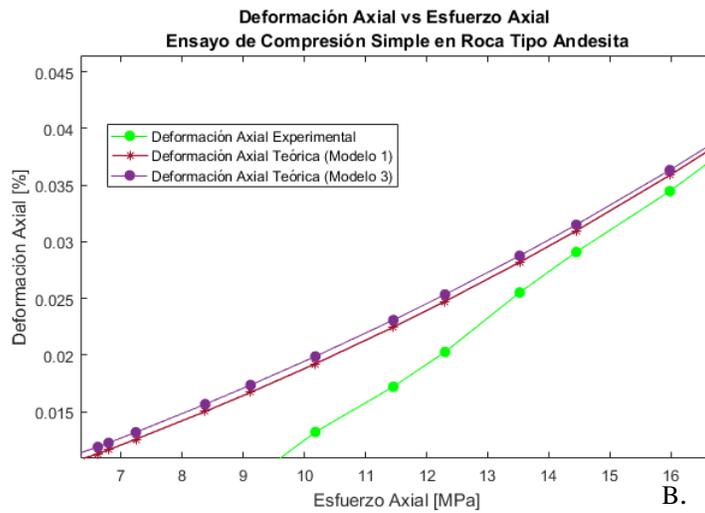
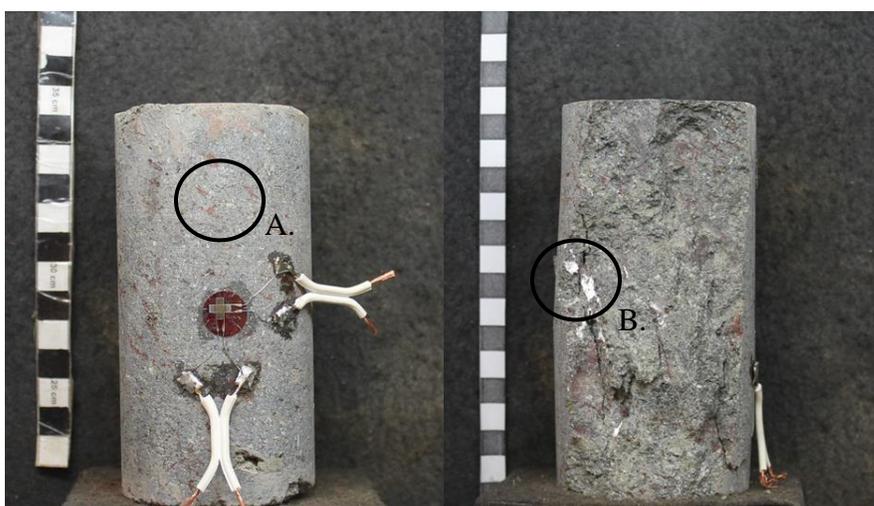


Figura 6.1 Vista en detalle de los resultados de deformación axial vs esfuerzo axial en ensayo de compresión sin restricción lateral. **A.** Resultado modelo 1 y 3. **B.** Primera vista en detalle **C.** Segunda vista en detalle. Fuente: Elaboración propia.

En la sección 5.1 de los resultados para el ensayo de compresión sin restricción lateral se añadió el análisis de una muestra de gabro, debido a que esta roca respecto a la andesita presenta un esfuerzo axial de fractura superior que se encuentra en un rango de 124-303 [MPa], mientras que la andesita se fractura en compresión en un rango de 90-100 [MPa] (rangos de fractura válido cuando ambas rocas no presentan alteraciones), esto se debe a que el gabro es una roca ígnea intrusiva o plutónica, cuya textura es fanerítica, por lo tanto sus cristales se forman a partir de un enfriamiento lento al interior de la superficie terrestre, son bien definidos y se pueden identificar a simple vista. Por el contrario, la andesita es una roca extrusiva o volcánica, cuya textura es afanítica, lo que implica (como se mencionó en la sección 3.1.1) que su enfriamiento ocurre en la superficie y por lo tanto su cristalización no es completa, por lo tanto, los enlaces que presenta

entre sus cristales no son tan fuertes, como los enlaces que presenta el gabro que es una roca plutónica. En el caso del presente trabajo, la muestra de andesita utilizada presenta fractura por compresión a los 31,09 [MPa], lo cual está debajo del rango que generalmente presenta como se mencionó anteriormente, la razón de este comportamiento se debe a la existencia de alteraciones argílicas y de hematización (ver Figura 6.2) que produjeron una disminución de la resistencia a la fractura de la muestra (ver *Tabla 4.1*). En este caso las alteraciones de la muestra no representan un foco de anisotropía porque al tomar los datos experimentales el strain gage (instrumento que mide la deformación) sólo abarca una porción pequeña de la muestra, que es aproximadamente isotrópica y por lo tanto su análisis es válido en este trabajo.



*Figura 6.2 Muestra de andesita utilizada en el presente trabajo para ensayo de compresión sin restricción lateral y sus alteraciones A. Alteraciones de hematización. B. Alteraciones argílicas. Fuente: IDIEM.*

Ahora, para la deformación axial en el ensayo mencionado, pero en la roca tipo gabro se aprecia que, si se evalúan las ecuaciones constitutivas propuestas en el modelo 1 hasta el punto de fractura de la roca, el modelo no logra ajustar la curva experimental, lo cual se puede observar en la Figura 5.5, donde se podría pensar que el gabro no se deforma, pero en la Figura 6.3 se puede apreciar que el gabro si presenta una deformación y que ésta es no lineal al aplicar compresión. Si se evalúan las ecuaciones constitutivas del modelo 1 en un rango menor de esfuerzo (hasta los 17,53 [MPa]) se puede apreciar que éste si se ajusta a la curva experimental con un error relativo promedio y de mínimos cuadrados de 28,5 % y  $6,50 \times 10^{-5}$ , valores cercanos a los obtenidos para la andesita. De este análisis se puede concluir que las ecuaciones constitutivas no-lineales propuestas son válidas hasta un rango de 15-30 [MPa].

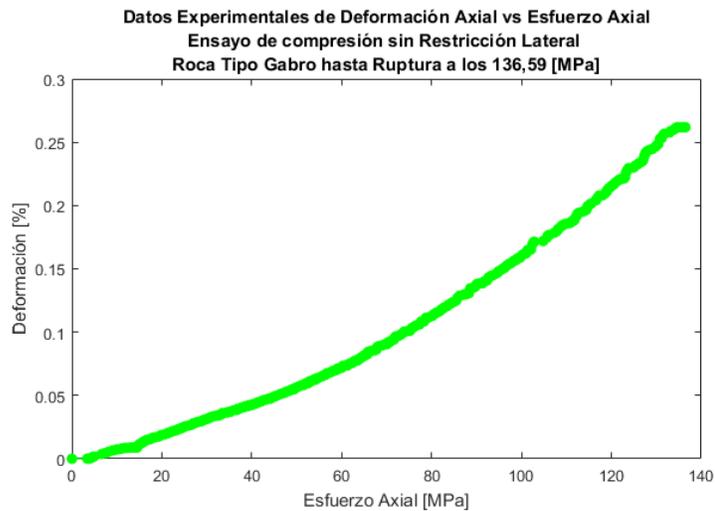


Figura 6.3 Datos experimentales de deformación axial vs esfuerzo axial en roca tipo gabro hasta su fractura a los 136,59 [MPa]. Fuente: IDIEM.

Para la deformación lateral en el ensayo de compresión sin restricción lateral, en el caso de la andesita, se observa que los 3 modelos aplicados pueden modelar el comportamiento de la roca (ver Figura 5.10). Sin embargo, es claro que el modelo 3 es el que ajusta a la curva experimental de manera más precisa, presentando un menor error relativo promedio y de mínimos cuadrados que los otros dos modelos. Resulta necesario notar en la *Tabla 5.6*, *Tabla 5.7* y *Tabla 5.8*, que el error relativo promedio resulta bastante alto, a pesar de que los gráficos indican lo contrario, esto se debe a la misma razón que se analizó para la deformación axial anteriormente. En este caso, previo a los 20 [MPa] aproximadamente se tienen errores del orden de 102,9 % a 661,1 %, mientras que considerando las deformaciones desde los 20 [MPa] hasta los 30,69 [MPa] el error relativo promedio es de 16,7 %, esto se puede apreciar mejor en el anexo B. El gabro por otra parte también logra ajustar la curva, en este caso con un menor error relativo promedio y de mínimos cuadrados (35,2 % y  $1,46 \times 10^{-6}$  aproximadamente). Al igual que la deformación axial para este ensayo el modelo actual resulta ser menos preciso que el modelo obtenido en este trabajo con valores de error relativo promedio y error de mínimos cuadrados correspondientes a 307,6 % y  $3,42 \times 10^{-4}$  (ver *Tabla 5.9*).

Finalmente, para el ensayo de compresión sin restricción lateral se puede notar que  $\alpha_3$ ,  $c_3$  y  $d_3$  comunes para deformación axial y lateral en la andesita, no son iguales.

En el ensayo de compresión con restricción lateral, donde se presenta sólo deformación axial. Se puede observar en la Figura 5.16 que los modelos al igual que en el ensayo de compresión sin restricción lateral, se ajustan de manera adecuada a la curva experimental, siendo el más representativo el modelo 1 con un error relativo promedio de 7,29 %, mientras que el error de mínimos cuadrados es de  $1,69 \times 10^{-7}$ . Para los modelos 2 y 3 se puede apreciar que sus errores no

muestran diferencias significativas con un valor de error relativo promedio aproximado de 12 % y un error de mínimos cuadrados de alrededor de  $3,10 \times 10^{-7}$  (ver *Tabla 5.11*, *Tabla 5.12* y *Tabla 5.13*). En este ensayo, el modelo actual logra ajustar a la curva experimental de manera precisa, pero es menos preciso que el modelo 1 (ver Figura 5.17) con un error relativo promedio de 8,47 % y un error de mínimos cuadrados de  $2,42 \times 10^{-7}$  (ver *Tabla 5.14*).

Para la deformación axial en el ensayo de compresión triaxial se puede notar que sólo el modelo 3 permite ajustar la curva teórica a la curva experimental (ver Figura 5.21), se puede observar que el error relativo promedio es de 45,3 % y un error de mínimos cuadrados de  $2,36 \times 10^{-6}$ . En este caso ocurre lo mismo que en la deformación axial de la compresión sin restricción lateral, en la cual existen puntos que presentan errores relativos muy grandes, en este caso va desde un 5,72 % a un 528,0 % antes de los 3 [MPa], mientras que, después de este esfuerzo el error relativo promedio oscila entre 0,0659 % y 1,615 %. Por lo tanto, si sólo se considerara la carga que va desde los 5,39 [MPa] hasta los 19,801 [MPa] se tendría un error relativo promedio de 0,808 %. (detalles en anexo D). En esta sección al comparar el modelo 3 (el que ajusta de manera más precisa a la curva experimental) con el modelo actual, se puede apreciar que el modelo actual no sigue la tendencia de la curva experimental (ver Figura 5.22 ) y, por lo tanto, falla al modelar el comportamiento mecánico para este ensayo.

En el caso de la deformación lateral para el ensayo mencionado en el párrafo anterior, se puede ver que todos los modelos ajustan de manera precisa a la curva experimental (ver Figura 5.26), presentando errores relativos promedios bajos del orden de un 8 % a un 11 %. En este caso tanto el modelo 1 como el modelo 2, presentan una diferencia en sus errores insignificante. De la *Tabla 5.19* y *Tabla 5.20* se puede notar que las constantes  $\alpha_1, c_1, d_1, \alpha_2, c_2, d_2, \alpha_3, c_3$  y  $d_3$  toman valores iguales o con diferencias insignificantes, por lo tanto, se puede inferir que la función  $h(x)$  le quita precisión al modelo en este caso. Al comparar el modelo 1, que resulta el más preciso para el presente trabajo con el modelo actual, de la Figura 5.27 no se puede apreciar la tendencia que sigue el modelo actual porque los valores teóricos de deformación son superiores a los valores experimentales de la deformación. De la Figura 6.4 se puede apreciar que al igual que el caso anterior, la deformación lateral para este ensayo tiene otra tendencia y por lo tanto es inválido.

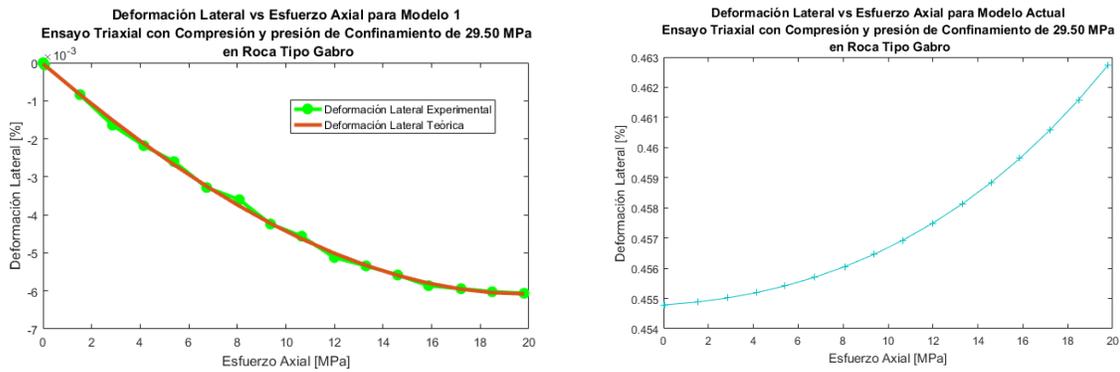


Figura 6.4 Comparación entre modelo 1 y modelo actual. Fuente: Elaboración propia.

Se debe notar que para los tres ensayos analizados anteriormente el modelo 1 y el modelo 3 fueron los que caracterizaron de manera más precisa la curva experimental de esfuerzo y deformación de las rocas, esto se puede deber a que el modelo 3 presenta una modificación respecto al modelo 1 estudiado como se aprecia en las ecuaciones 30 y 32 de la sección 2.2.4.

Finalmente, para el ensayo acústico de la Figura 5.28 y Figura 5.30, se tiene que, a pesar de haber evaluado el modelo más preciso obtenido del análisis de los datos de compresión con restricción lateral, este no logró ajustar de manera precisa las velocidades de ondas experimentales. Esto se puede deber en primera instancia a que los datos experimentales de rocas utilizadas son diferentes, en el caso del ensayo de compresión con restricción lateral se evaluó una roca tipo pórfido, mientras que los datos experimentales del ensayo acústico pertenecen a la roca tipo Berea Sandstone, esto resulta significativo, dado que las propiedades mecánicas de las rocas se encuentran estrechamente relacionadas a la litología, historia de esfuerzos, erosión, humedad y procesos geológicos. Aquí se trabajó con una roca ígnea y otra sedimentaria, lo cual ya respalda que las condiciones de formación son distintas, esto porque una roca sedimentaria se forma a partir de procesos de meteorización, erosión y litificación. Por otra parte, se puede apreciar que el comportamiento de la onda “S” teórica es similar a la experimental, mientras que la onda “P” teórica posee la misma tendencia que la Onda “P” experimental, este hecho permite decir que las ecuaciones constitutivas propuestas no son cien por ciento inválidas. Respecto al ir y venir de la onda se observa que la curva teórica toma los mismos valores, esto se debe a que en el presente trabajo se considera que el cuerpo elástico en estudio no disipa energía. Al comparar los resultados del presente trabajo con el modelo actual, se puede apreciar en la Figura 5.29 que la onda “P” del modelo actual sigue la misma tendencia que la curva experimental y la resultante al aplicar el modelo 1 y lo mismo ocurre en el caso de la onda “S” (ver Figura 5.31), en este caso el modelo actual tiene una tendencia similar al modelo 1, pero la curva resultante es menos precisa.

## 7 Conclusiones

El presente trabajo se centra en la mejora de las ecuaciones constitutivas propuestas por los profesores R.Bustamante y K.R Rajagopal para modelar rocas que presentan poca humedad, con el fin de contribuir a estudios relacionados con la predicción de sismos en el área de la geofísica, pero también contribuir a mejoras en los métodos de extracción utilizados.

A partir del ensayo de compresión sin restricción lateral se concluye en primera instancia que, las ecuaciones constitutivas propuestas sólo se pueden aplicar hasta un rango de esfuerzo de 15 [MPa] a 30 [MPa], lo cual depende exclusivamente de la roca en estudio.

Por otra parte, para los ensayos de compresión sin restricción lateral, compresión con restricción lateral y compresión triaxial, se observa que la mayoría de los modelos logra ajustar de manera precisa los datos teóricos con los experimentales, presentando un error relativo promedio que va desde el 7,29 % hasta 113,0 %. Como se mencionó anteriormente, algunos errores relativos promedio presentan un alto valor debido a que una cantidad no tan significativa de datos presenta diferencias significativas respecto a su error relativo promedio, estos van desde un error del 102 % a 661 %, que es el caso de la deformación axial para el ensayo de compresión triaxial.

En la mayoría de los casos tanto el modelo 1 como el modelo 3 presentaron alta precisión, esto se debe a que el modelo 3 presenta una modificación respecto al modelo 1, como se aprecia en las ecuaciones 30 y 32 de la sección 2.2.4.

Respecto al ensayo acústico se puede concluir que, el objetivo no fue cumplido, sin embargo, la metodología utilizada no permite afirmar de manera tajante que las ecuaciones constitutivas propuestas no permiten modelar el comportamiento de la velocidad de ondas tipo “P” y “S”, esto porque las rocas utilizadas son distintas, una corresponde a una roca ígnea mientras que la otra corresponde a una roca sedimentaria, lo cual implica que su comportamiento mecánico es distinto, porque éste depende de la litología, la historia de esfuerzos, la erosión, el contenido de humedad y los procesos geológicos. Sin embargo, la curva de velocidad para la onda “S” teórica muestra un comportamiento similar a la velocidad de la onda “S” experimental, mientras que la onda “P” teórica presenta una tendencia similar a la curva experimental, de este modo las ecuaciones constitutivas propuestas no son inválidas en un cien por ciento.

Finalmente, se propone realizar un mayor número de ensayos, por cada tipo de ensayo utilizado en este documento y aplicado a un solo tipo de roca, cuyas muestras sean obtenidas bajo las mismas condiciones, dado que en el presente trabajo sólo se analizó una muestra de gabro y andesita para el ensayo de compresión sin restricción lateral, un pórfido para el ensayo con restricción lateral y una muestra de gabro para la compresión triaxial, todos extraídos de lugares distintos, esto con la finalidad de poder estudiar el comportamiento de las constantes que presentan las ecuaciones

constitutivas para cada caso y ver la consistencia de estas. Además, esta medida puede permitir verificar la utilidad de las ecuaciones constitutivas propuestas a través del ensayo acústico de manera más precisa, dado que las rocas en este caso tienen mayor posibilidad de presentar un comportamiento mecánico igual. A lo mencionado anteriormente se debe sumar la realización del ensayo de tracción para comprobar que el comportamiento mecánico de las rocas en tracción y compresión es distinto.

## 8 Bibliografía

- [1] Rodríguez R. (2011). La roca más abundante en la corteza terrestre. Caracas. Venezuela: *Geología Venezolana*. Recuperado de <http://geologiavenezolana.blogspot.cl/2011/12/la-roca-mas-abundante-en-la-corteza.html>.
- [2] Bustamante R., Rajagopal K.R.: A nonlinear model for the mechanical behaviour of rock *Acta Mechanica* (accepted) (2017)
- [3] Rajagopal K.R., Srinivasa A.R.: On the response of non-dissipative solids. *Proc. R. Soc. A* **463**, 357-367 (2007)
- [4] Johnson, P. A., & Rasolofosaon, P. N. J. (1996). Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies. *Nonlinear processes in geophysics*, 3(2), 77-88.
- [5] Cowie, P. A., & Scholz, C. H. (1992). Physical explanation for the displacement-length relationship of faults using a post-yield fracture mechanics model. *Journal of Structural Geology*, 14(10), 1133-1148.
- [6] Dragon, A., & Mroz, Z. (1979). A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *International Journal of Engineering Science*, 17(2), 121-137.
- [7] Hoek E.: The development of rock engineering. In practical Rock engineering, [www.rocscience.com](http://www.rocscience.com) (2007)
- [8] Hudson J.A., Harrison J.P.: Engineering rock mechanics: An introduction to the principles. Pergamon (1997)
- [9] Poulos H.G., Davis E.H.: Elastic solutions for soil and rock mechanics. John Wiley & Sons (1974)
- [10] Rajagopal K.R.: On implicit constitutive theories. *Appl. Math.* **48**, 279-319 (2003)
- [11] Rajagopal K.R.: On a new class of models in elasticity. *Math. Comput. Appl.* **15**, 506-528 (2010)
- [12] Rajagopal K.R.: The elasticity of elasticity. *Z. für Angew. Math. Phys.* **58**, 309-317 (2007)
- [13] Rajagopal K.R., Srinivasa A.R.: On the response of non-dissipative solids that are not hyperelastic. *Proc. R. Soc. A* **465**, 493-500 (2009)
- [14] Rajagopal K.R.: Conspectus of concepts of elasticity. *Math. Mech. Solids* **16**, 536-562 (2011)
- [15] Baker M., Ericksen J.L.: Inequalities restricting the form of stress-deformation relations for isotropic elastic solids and Reiner-Rivlin fluids. *J. Wash. Acad. Sci.* **44**, 33-35 (1954)
- [16] Bustamante R.: Solutions of some boundary value problems for a class of constitutive relations for non-linear elastic bodies that is not Green elastic. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **69**, 257-279 (2016)
- [17] ASTM. *ASTM D4543-08: Standard Practices for Preparing Rock Core as Cylindrical Test Specimens and Verifying Conformance to Dimensional and Shape Tolerances*, 2017.

- [18] ASTM. *ASTM D7012-10: Standard Test Method for Compressive Strength and Elastic Moduli of Intact Rock Core Specimens under Varying States of Stress and Temperatures*, 2017.
- [19] Shariff, M. H. B. M. (2017). Spectral Derivatives in Continuum Mechanics. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 70(4), 479-496.
- [20] Barra F. (2014). *GL3101-3: Rocas Ígneas* [Class handout]. Departamento de Geología, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- [21] Tarbuck E., Lutgens F. (2005). *Ciencias de la tierra*. Madrid, España:Pearson.
- [22] Griem W. (2007). Recorrido Geológico: Depósitos Minerales. Alteración hidrotermal. Atacama. Chile: *Museo Virtual, Geología*. Recuperado de <http://www.geovirtual2.cl/Museovirtual/083ageo.htm>.
- [23] Barra F. (2014). *GL3101-3: Terremotos* [Class handout]. Departamento de Geología, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- [24] Seyfried, H., Worrier, G., Uhlig, D., Kohler, I., & Calvo, C. (1998). Introducción a la geología y morfología de los Andes en el norte de Chile. *Chungara (Arica)*, 30(1), 7-39.

---

## **Anexo A**

### **Constantes a Utilizar en Modelos Presentados en 2.2.3.1**

---

Tabla A.1 Rango al que pertenecen las constantes a utilizar en las funciones presentadas en (30), (31) y (32).

Constantes	Límite inferior	Límite superior
$\alpha_1$	0,013	0,05
$\alpha_2$	-0,0005	-0,0003
$\alpha_3$	0,00013	0,005
$\alpha_4$	-0,0004	0,002
$c_1$	-0,09	-0,02
$c_2$	-0,07	-0,03
$c_3$	-0,09	-0,02
$c_4$	-0,09	-0,03
$d_1$	0,08	0,13
$d_2$	0,18	0,22
$d_3$	0,08	0,13
$d_4$	0,025	0,05
$\beta_1$	0,2	0,5
$g_1$	0,00011	0,01
$k_1$	0,009	0,09
$\beta_2$	-0,05	0,006
$g_2$	0,075	0,2
$k_2$	-0,00002	0,00066

Tabla A.2 Conjunto de constantes propuestas por R. Bustamante y K.R Rajagopal.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
0,011	-0,0004	0,001	-0,08	-0,05	-0,08	0,1	0,2	0,1

---

**Anexo B**

**Compresión sin Restricción Lateral**  
**Datos Experimentales y Resultados**

---

- Datos experimentales y resultados andesita en deformación axial (Modelo 1)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.000000	0.000	0.000E+00
6.616	0.003430	0.011297	229.359	6.189E-05
6.792	0.003940	0.011655	195.812	5.952E-05
7.238	0.004680	0.012578	168.761	6.238E-05
8.375	0.006860	0.015031	119.111	6.677E-05
9.117	0.008960	0.016715	86.551	6.014E-05
10.179	0.013220	0.019241	45.545	3.625E-05
11.455	0.017220	0.022472	30.499	2.758E-05
12.301	0.020280	0.024740	21.992	1.989E-05
13.524	0.025530	0.028200	10.458	7.129E-06
14.451	0.029100	0.030977	6.450	3.523E-06
15.982	0.034470	0.035876	4.079	1.977E-06
16.976	0.038430	0.039276	2.201	7.157E-07
18.387	0.044750	0.044420	0.737	1.089E-07

20.026	0.050530	0.050901	0.734	1.376E-07
20.939	0.054340	0.054765	0.782	1.806E-07
21.665	0.058130	0.057971	0.274	2.528E-08
22.202	0.066980	0.060427	9.784	4.294E-05
22.793	0.069230	0.063210	8.696	3.624E-05
23.599	0.073080	0.067149	8.116	3.518E-05
24.123	0.075310	0.069801	7.315	3.035E-05
24.768	0.077730	0.073168	5.869	2.081E-05
25.037	0.079040	0.074605	5.611	1.967E-05
25.305	0.080850	0.076063	5.921	2.292E-05
25.507	0.081680	0.077172	5.519	2.032E-05
25.843	0.082790	0.079043	4.526	1.404E-05
26.071	0.083660	0.080335	3.974	1.106E-05
26.420	0.085090	0.082343	3.228	7.546E-06
26.689	0.085970	0.083912	2.394	4.235E-06
27.078	0.087390	0.086227	1.331	1.353E-06
27.294	0.088460	0.087525	1.057	8.742E-07

27.576	0.090300	0.089252	1.161	1.098E-06
27.764	0.091310	0.090417	0.978	7.974E-07
28.046	0.092370	0.092189	0.196	3.276E-08
28.301	0.093700	0.093812	0.120	1.254E-08
28.717	0.095150	0.096510	1.429	1.850E-06
28.919	0.095940	0.097839	1.979	3.606E-06
29.214	0.097340	0.099810	2.537	6.101E-06
29.403	0.098240	0.101084	2.895	8.088E-06
29.658	0.099430	0.102829	3.418	1.155E-05
29.806	0.100150	0.103850	3.694	1.369E-05
29.967	0.101140	0.104975	3.792	1.471E-05
30.195	0.102590	0.106583	3.892	1.594E-05
30.437	0.104520	0.108307	3.623	1.434E-05
30.692	0.107350	0.110153	2.611	7.857E-06
Resultados			22.867	7.754E-04

- Datos experimentales y resultados andesita en deformación axial (Modelo 2)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.0000000	0.000	0.000E+00
6.616	0.003430	0.0118950	246.793	7.166E-05
6.792	0.003940	0.0122590	211.142	6.921E-05
7.238	0.004680	0.0131970	181.987	7.254E-05
8.375	0.006860	0.0156740	128.484	7.769E-05
9.117	0.008960	0.0173660	93.817	7.066E-05
10.179	0.013220	0.0198910	50.461	4.450E-05
11.455	0.017220	0.0231040	34.170	3.462E-05
12.301	0.020280	0.0253510	25.005	2.572E-05
13.524	0.025530	0.0287690	12.687	1.049E-05
14.451	0.029100	0.0315060	8.268	5.789E-06
15.982	0.034470	0.0363280	5.390	3.452E-06
16.976	0.038430	0.0396710	3.229	1.540E-06
18.387	0.044750	0.0447270	0.051	5.290E-10

20.026	0.050530	0.0511030	1.134	3.283E-07
20.939	0.054340	0.0549100	1.049	3.249E-07
21.665	0.058130	0.0580710	0.101	3.481E-09
22.202	0.066980	0.0604950	9.682	4.206E-05
22.793	0.069230	0.0632450	8.645	3.582E-05
23.599	0.073080	0.0671420	8.125	3.526E-05
24.123	0.075310	0.0697690	7.358	3.070E-05
24.768	0.077730	0.0731100	5.944	2.134E-05
25.037	0.079040	0.0745380	5.696	2.027E-05
25.305	0.080850	0.0759870	6.015	2.365E-05
25.507	0.081680	0.0770890	5.621	2.108E-05
25.843	0.082790	0.0789510	4.637	1.474E-05
26.071	0.083660	0.0802380	4.090	1.171E-05
26.420	0.085090	0.0822390	3.351	8.128E-06
26.689	0.085970	0.0838040	2.519	4.692E-06
27.078	0.087390	0.0861150	1.459	1.626E-06
27.294	0.088460	0.0874130	1.184	1.096E-06

27.576	0.090300	0.0891390	1.286	1.348E-06
27.764	0.091310	0.0903050	1.101	1.010E-06
28.046	0.092370	0.0920800	0.314	8.410E-08
28.301	0.093700	0.0937070	0.007	4.900E-11
28.717	0.095150	0.0964140	1.328	1.598E-06
28.919	0.095940	0.0977480	1.885	3.269E-06
29.214	0.097340	0.0997300	2.455	5.712E-06
29.403	0.098240	0.1010110	2.821	7.678E-06
29.658	0.099430	0.1027670	3.356	1.114E-05
29.806	0.100150	0.1037950	3.640	1.329E-05
29.967	0.101140	0.1049290	3.746	1.436E-05
30.195	0.102590	0.1065510	3.861	1.569E-05
30.437	0.104520	0.1082910	3.608	1.422E-05
30.692	0.107350	0.1101550	2.613	7.868E-06
Resultados			24.669	8.579E-04

- Datos experimentales y resultados andesita en deformación axial (Modelo actual)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.0000000	0.000	0.000E+00
6.616	0.003430	0.0052670	53.557	3.375E-06
6.792	0.003940	0.0055130	39.924	2.474E-06
7.238	0.004680	0.0061750	31.944	2.235E-06
8.375	0.006860	0.0081280	18.484	1.608E-06
9.117	0.008960	0.0096440	7.634	4.679E-07
10.179	0.013220	0.0122040	7.685	1.032E-06
11.455	0.017220	0.0160240	6.945	1.430E-06
12.301	0.020280	0.0191000	5.819	1.392E-06
13.524	0.025530	0.0244830	4.101	1.096E-06
14.451	0.029100	0.0294520	1.210	1.239E-07
15.982	0.034470	0.0397720	15.381	2.811E-05
16.976	0.038430	0.0482090	25.446	9.563E-05
18.387	0.044750	0.0631690	41.160	3.393E-04

20.026	0.050530	0.0862100	70.612	1.273E-03
20.939	0.054340	0.1024130	88.467	2.311E-03
21.665	0.058130	0.1173710	101.911	3.509E-03
22.202	0.066980	0.1298150	93.812	3.948E-03
22.793	0.069230	0.1450020	109.450	5.741E-03
23.599	0.073080	0.1685680	130.662	9.118E-03
24.123	0.075310	0.1858650	146.800	1.222E-02
24.768	0.077730	0.2095840	169.631	1.739E-02
25.037	0.079040	0.2203310	178.759	1.996E-02
25.305	0.080850	0.2316230	186.485	2.273E-02
25.507	0.081680	0.2404740	194.410	2.522E-02
25.843	0.082790	0.2559560	209.163	2.999E-02
26.071	0.083660	0.2670470	219.205	3.363E-02
26.420	0.085090	0.2849460	234.876	3.994E-02
26.689	0.085970	0.2995170	248.397	4.560E-02
27.078	0.087390	0.3219550	268.412	5.502E-02
27.294	0.088460	0.3350530	278.762	6.081E-02

27.576	0.090300	0.3530380	290.961	6.903E-02
27.764	0.091310	0.3655580	300.348	7.521E-02
28.046	0.092370	0.3851940	317.012	8.575E-02
28.301	0.093700	0.4038280	330.980	9.618E-02
28.717	0.095150	0.4361980	358.432	1.163E-01
28.919	0.095940	0.4527920	371.953	1.273E-01
29.214	0.097340	0.4782350	391.304	1.451E-01
29.403	0.098240	0.4951980	404.070	1.576E-01
29.658	0.099430	0.5191230	422.099	1.761E-01
29.806	0.100150	0.5335010	432.702	1.878E-01
29.967	0.101140	0.5496630	443.467	2.012E-01
30.195	0.102590	0.5733730	458.898	2.216E-01
30.437	0.104520	0.5995790	473.650	2.451E-01
30.692	0.107350	0.6285640	485.528	2.717E-01
Resultados			192.678	2.565E+00

- Datos experimentales y resultados andesita en deformación lateral (Modelo 1)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.0000000	0.0000000	0.000	0.000E+00
6.616	0.0001200	-0.0002170	280.833	1.136E-07
6.792	0.0000500	-0.0002250	550.000	7.563E-08
7.238	0.0000200	-0.0002440	1320.000	6.970E-08
8.375	0.0000200	-0.0002990	1595.000	1.018E-07
9.117	0.0000700	-0.0003390	584.286	1.673E-07
10.179	0.0001400	-0.0004030	387.857	2.948E-07
11.455	0.0000900	-0.0004940	648.889	3.411E-07
12.301	0.0000500	-0.0005650	1230.000	3.782E-07
13.524	-0.0000900	-0.0006850	661.111	3.540E-07
14.451	-0.0001900	-0.0007920	316.842	3.624E-07
15.982	-0.0003900	-0.0010070	158.205	3.807E-07
16.976	-0.0005800	-0.0011770	102.931	3.564E-07
18.387	-0.0009200	-0.0014690	59.674	3.014E-07

20.026	-0.0013100	-0.0019000	45.038	3.481E-07
20.939	-0.0015900	-0.0021920	37.862	3.624E-07
21.665	-0.0017700	-0.0024560	38.757	4.706E-07
22.202	-0.0016600	-0.0026710	60.904	1.022E-06
22.793	-0.0020000	-0.0029280	46.400	8.612E-07
23.599	-0.0025000	-0.0033190	32.760	6.708E-07
24.123	-0.0028100	-0.0036000	28.114	6.241E-07
24.768	-0.0032200	-0.0039770	23.509	5.730E-07
25.037	-0.0034700	-0.0041450	19.452	4.556E-07
25.305	-0.0037900	-0.0043210	14.011	2.820E-07
25.507	-0.0039500	-0.0044570	12.835	2.570E-07
25.843	-0.0041800	-0.0046930	12.273	2.632E-07
26.071	-0.0043900	-0.0048600	10.706	2.209E-07
26.420	-0.0047300	-0.0051270	8.393	1.576E-07
26.689	-0.0049600	-0.0053420	7.702	1.459E-07
27.078	-0.0053300	-0.0056690	6.360	1.149E-07
27.294	-0.0056100	-0.0058580	4.421	6.150E-08

27.576	-0.0059600	-0.0061140	2.584	2.372E-08
27.764	-0.0061600	-0.0062910	2.127	1.716E-08
28.046	-0.0064400	-0.0065670	1.972	1.613E-08
28.301	-0.0068300	-0.0068250	0.073	2.500E-11
28.717	-0.0073100	-0.0072680	0.575	1.764E-09
28.919	-0.0075600	-0.0074920	0.899	4.624E-09
29.214	-0.0080000	-0.0078330	2.088	2.789E-08
29.403	-0.0082800	-0.0080580	2.681	4.928E-08
29.658	-0.0086600	-0.0083720	3.326	8.294E-08
29.806	-0.0088700	-0.0085590	3.506	9.672E-08
29.967	-0.0092400	-0.0087690	5.097	2.218E-07
30.195	-0.0098200	-0.0090730	7.607	5.580E-07
30.437	-0.0106900	-0.0094060	12.011	1.649E-06
30.692	-0.0123900	-0.0097710	21.138	6.859E-06
Resultados			186.018	1.980E-05

- Datos experimentales y resultados andesita en deformación lateral (Modelo 2)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.0000000	0.000	0.000E+00
6.616	0.000120	-0.0003630	402.500	2.333E-07
6.792	0.000050	-0.0003750	850.000	1.806E-07
7.238	0.000020	-0.0004060	2130.000	1.815E-07
8.375	0.000020	-0.0004920	2560.000	2.621E-07
9.117	0.000070	-0.0005540	891.429	3.894E-07
10.179	0.000140	-0.0006490	563.571	6.225E-07
11.455	0.000090	-0.0007780	964.444	7.534E-07
12.301	0.000050	-0.0008740	1848.000	8.538E-07
13.524	-0.000090	-0.0010290	1043.333	8.817E-07
14.451	-0.000190	-0.0011620	511.579	9.448E-07
15.982	-0.000390	-0.0014160	263.077	1.053E-06
16.976	-0.000580	-0.0016070	177.069	1.055E-06
18.387	-0.000920	-0.0019220	108.913	1.004E-06

20.026	-0.001310	-0.0023650	80.534	1.113E-06
20.939	-0.001590	-0.0026540	66.918	1.132E-06
21.665	-0.001770	-0.0029100	64.407	1.300E-06
22.202	-0.001660	-0.0031140	87.590	2.114E-06
22.793	-0.002000	-0.0033570	67.850	1.841E-06
23.599	-0.002500	-0.0037180	48.720	1.484E-06
24.123	-0.002810	-0.0039740	41.423	1.355E-06
24.768	-0.003220	-0.0043140	33.975	1.197E-06
25.037	-0.003470	-0.0044640	28.646	9.880E-07
25.305	-0.003790	-0.0046200	21.900	6.889E-07
25.507	-0.003950	-0.0047400	20.000	6.241E-07
25.843	-0.004180	-0.0049480	18.373	5.898E-07
26.071	-0.004390	-0.0050940	16.036	4.956E-07
26.420	-0.004730	-0.0053270	12.622	3.564E-07
26.689	-0.004960	-0.0055130	11.149	3.058E-07
27.078	-0.005330	-0.0057940	8.705	2.153E-07
27.294	-0.005610	-0.0059560	6.168	1.197E-07

27.576	-0.005960	-0.0061750	3.607	4.623E-08
27.764	-0.006160	-0.0063260	2.695	2.756E-08
28.046	-0.006440	-0.0065590	1.848	1.416E-08
28.301	-0.006830	-0.0067770	0.776	2.809E-09
28.717	-0.007310	-0.0071490	2.202	2.592E-08
28.919	-0.007560	-0.0073360	2.963	5.018E-08
29.214	-0.008000	-0.0076200	4.750	1.444E-07
29.403	-0.008280	-0.0078060	5.725	2.247E-07
29.658	-0.008660	-0.0080660	6.859	3.528E-07
29.806	-0.008870	-0.0082210	7.317	4.212E-07
29.967	-0.009240	-0.0083930	9.167	7.174E-07
30.195	-0.009820	-0.0086430	11.986	1.385E-06
30.437	-0.010690	-0.0089160	16.595	3.147E-06
30.692	-0.012390	-0.0092140	25.634	1.009E-05
Resultados			290.023	4.098E-05

- Datos experimentales y resultados andesita en deformación lateral (Modelo 3)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.0000000	0.000	0.000E+00
6.616	0.000120	0.0002780	131.667	2.496E-08
6.792	0.000050	0.0002820	464.000	5.382E-08
7.238	0.000020	0.0002910	1355.000	7.344E-08
8.375	0.000020	0.0003050	1425.000	8.123E-08
9.117	0.000070	0.0003060	337.143	5.570E-08
10.179	0.000140	0.0002960	111.429	2.434E-08
11.455	0.000090	0.0002630	192.222	2.993E-08
12.301	0.000050	0.0002250	350.000	3.063E-08
13.524	-0.000090	0.0001450	261.111	5.523E-08
14.451	-0.000190	0.0000600	131.579	6.250E-08
15.982	-0.000390	-0.0001330	65.897	6.605E-08
16.976	-0.000580	-0.0003010	48.103	7.784E-08
18.387	-0.000920	-0.0006060	34.130	9.860E-08

20.026	-0.001310	-0.0010830	17.328	5.153E-08
20.939	-0.001590	-0.0014160	10.943	3.028E-08
21.665	-0.001770	-0.0017210	2.768	2.401E-09
22.202	-0.001660	-0.0019720	18.795	9.734E-08
22.793	-0.002000	-0.0022750	13.750	7.563E-08
23.599	-0.002500	-0.0027380	9.520	5.664E-08
24.123	-0.002810	-0.0030730	9.359	6.917E-08
24.768	-0.003220	-0.0035240	9.441	9.242E-08
25.037	-0.003470	-0.0037250	7.349	6.503E-08
25.305	-0.003790	-0.0039360	3.852	2.132E-08
25.507	-0.003950	-0.0040990	3.772	2.220E-08
25.843	-0.004180	-0.0043830	4.856	4.121E-08
26.071	-0.004390	-0.0045840	4.419	3.764E-08
26.420	-0.004730	-0.0049060	3.721	3.098E-08
26.689	-0.004960	-0.0051650	4.133	4.203E-08
27.078	-0.005330	-0.0055590	4.296	5.244E-08
27.294	-0.005610	-0.0057860	3.137	3.098E-08

27.576	-0.005960	-0.0060960	2.282	1.850E-08
27.764	-0.006160	-0.0063100	2.435	2.250E-08
28.046	-0.006440	-0.0066420	3.137	4.080E-08
28.301	-0.006830	-0.0069540	1.816	1.538E-08
28.717	-0.007310	-0.0074880	2.435	3.168E-08
28.919	-0.007560	-0.0077590	2.632	3.960E-08
29.214	-0.008000	-0.0081700	2.125	2.890E-08
29.403	-0.008280	-0.0084410	1.944	2.592E-08
29.658	-0.008660	-0.0088200	1.848	2.560E-08
29.806	-0.008870	-0.0090460	1.984	3.098E-08
29.967	-0.009240	-0.0092980	0.628	3.364E-09
30.195	-0.009820	-0.0096650	1.578	2.403E-08
30.437	-0.010690	-0.0100660	5.837	3.894E-07
30.692	-0.012390	-0.0105050	15.214	3.553E-06
Resultados			112.992	5.803E-06

- Datos experimentales y resultados andesita en deformación lateral (Modelo actual)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.0000	0.000000	0.000	0.000E+00
6.616	0.0001	-0.000402	435.000	2.725E-07
6.792	0.0001	-0.000414	928.000	2.153E-07
7.238	0.0000	-0.000446	2330.000	2.172E-07
8.375	0.0000	-0.000530	2750.000	3.025E-07
9.117	0.0001	-0.000588	940.000	4.330E-07
10.179	0.0001	-0.000675	582.143	6.642E-07
11.455	0.0001	-0.000786	973.333	7.674E-07
12.301	0.0001	-0.000865	1830.000	8.372E-07
13.524	-0.0001	-0.000985	994.444	8.010E-07
14.451	-0.0002	-0.001082	469.474	7.957E-07
15.982	-0.0004	-0.001255	221.795	7.482E-07
16.976	-0.0006	-0.001376	137.241	6.336E-07
18.387	-0.0009	-0.001563	69.891	4.134E-07

20.026	-0.0013	-0.001803	37.634	2.430E-07
20.939	-0.0016	-0.001949	22.579	1.289E-07
21.665	-0.0018	-0.002072	17.062	9.120E-08
22.202	-0.0017	-0.002167	30.542	2.570E-07
22.793	-0.0020	-0.002275	13.750	7.563E-08
23.599	-0.0025	-0.002431	2.760	4.761E-09
24.123	-0.0028	-0.002537	9.715	7.453E-08
24.768	-0.0032	-0.002674	16.957	2.981E-07
25.037	-0.0035	-0.002733	21.239	5.432E-07
25.305	-0.0038	-0.002793	26.306	9.940E-07
25.507	-0.0040	-0.002838	28.152	1.237E-06
25.843	-0.0042	-0.002916	30.239	1.598E-06
26.071	-0.0044	-0.002970	32.346	2.016E-06
26.420	-0.0047	-0.003055	35.412	2.806E-06
26.689	-0.0050	-0.003121	37.077	3.382E-06
27.078	-0.0053	-0.003220	39.587	4.452E-06
27.294	-0.0056	-0.003275	41.622	5.452E-06

27.576	-0.0060	-0.003350	43.792	6.812E-06
27.764	-0.0062	-0.003400	44.805	7.618E-06
28.046	-0.0064	-0.003478	45.994	8.773E-06
28.301	-0.0068	-0.003549	48.038	1.076E-05
28.717	-0.0073	-0.003668	49.822	1.326E-05
28.919	-0.0076	-0.003727	50.701	1.469E-05
29.214	-0.0080	-0.003815	52.313	1.751E-05
29.403	-0.0083	-0.003873	53.225	1.942E-05
29.658	-0.0087	-0.003951	54.376	2.217E-05
29.806	-0.0089	-0.003998	54.927	2.374E-05
29.967	-0.0092	-0.004049	56.180	2.695E-05
30.195	-0.0098	-0.004123	58.014	3.246E-05
30.437	-0.0107	-0.004202	60.692	4.209E-05
30.692	-0.0124	-0.004288	65.391	6.564E-05
Resultados			307.613	3.427E-04

- Muestra de andesita antes y después del ensayo de compresión sin restricción lateral.



- Datos experimentales y resultados gabro (Rango adecuado hasta 17,22 [MPa]) en deformación Axial (Modelo 1)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.000000	0.000	0.000E+00
3.429	0.000908	0.000086	90.486	6.752E-07
3.638	0.000980	0.000035	96.473	8.934E-07
3.863	0.001059	0.000173	83.684	7.855E-07
4.058	0.001130	0.000363	67.886	5.884E-07

4.372	0.001249	0.000795	36.346	2.060E-07
4.611	0.001343	0.001313	2.210	8.812E-10
4.761	0.001404	0.001521	8.338	1.370E-08
4.896	0.001459	0.001745	19.599	8.180E-08
6.678	0.002310	0.003819	65.350	2.278E-06
7.546	0.002812	0.004579	62.861	3.124E-06
8.055	0.003137	0.005374	71.288	5.003E-06
8.983	0.003798	0.006515	71.530	7.380E-06
9.927	0.004568	0.007309	60.003	7.514E-06
10.136	0.004754	0.007448	56.645	7.253E-06
10.973	0.005557	0.007845	41.163	5.233E-06
11.136	0.005726	0.008001	39.717	5.173E-06
11.597	0.006225	0.008484	36.302	5.106E-06
11.954	0.006635	0.008519	28.402	3.551E-06
12.177	0.006902	0.008588	24.433	2.844E-06
12.593	0.007425	0.008709	17.288	1.648E-06
12.994	0.007961	0.008830	10.912	7.547E-07

13.158	0.008189	0.008882	8.464	4.803E-07
13.470	0.008639	0.008865	2.614	5.099E-08
13.693	0.008974	0.008865	1.214	1.187E-08
14.169	0.009725	0.008882	8.666	7.103E-07
14.511	0.010298	0.008830	14.258	2.156E-06
14.972	0.011119	0.011424	2.742	9.295E-08
15.150	0.011452	0.011858	3.550	1.653E-07
15.477	0.012085	0.012293	1.723	4.335E-08
15.611	0.012354	0.012728	3.033	1.404E-07
15.745	0.012627	0.013163	4.243	2.871E-07
16.102	0.013384	0.013598	1.602	4.597E-08
16.220	0.013644	0.014033	2.847	1.509E-07
16.473	0.014215	0.014468	1.780	6.403E-08
16.681	0.014701	0.014903	1.375	4.084E-08
17.217	0.016021	0.015337	4.268	4.676E-07
Resultados			28.467	6.501E-05

- Datos experimentales y resultados gabro (Rango adecuado hasta 17,22 [MPa]) en deformación lateral (Modelo 1)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórico [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.000000	0.000	0.000E+00
3.429	-0.000110	-0.000349	217.556	5.727E-08
3.638	-0.000090	-0.000373	314.461	8.010E-08
3.863	-0.000120	-0.000399	232.313	7.772E-08
4.058	-0.000190	-0.000421	121.793	5.355E-08
4.372	-0.000300	-0.000459	52.842	2.513E-08
4.611	-0.000340	-0.000487	43.326	2.170E-08
4.761	-0.000370	-0.000506	36.634	1.837E-08
4.896	-0.000460	-0.000522	13.499	3.856E-09
6.678	-0.000940	-0.000756	19.578	3.387E-08
7.546	-0.001120	-0.000881	21.337	5.711E-08
8.055	-0.001170	-0.000958	18.104	4.487E-08
8.983	-0.001450	-0.001107	23.673	1.178E-07
9.927	-0.001520	-0.001269	16.503	6.292E-08

10.136	-0.001610	-0.001307	18.825	9.186E-08
10.973	-0.001730	-0.001464	15.364	7.064E-08
11.136	-0.001730	-0.001496	13.513	5.465E-08
11.597	-0.001750	-0.001589	9.206	2.595E-08
11.954	-0.001820	-0.001663	8.618	2.460E-08
12.177	-0.001820	-0.001711	6.006	1.195E-08
12.593	-0.001880	-0.001802	4.148	6.082E-09
12.994	-0.001880	-0.001893	0.701	1.738E-10
13.158	-0.001880	-0.001931	2.725	2.624E-09
13.470	-0.001910	-0.002005	4.995	9.103E-09
13.693	-0.001960	-0.002060	5.088	9.945E-09
14.169	-0.001950	-0.002179	11.749	5.249E-08
14.511	-0.001960	-0.002268	15.722	9.495E-08
14.972	-0.002000	-0.002393	19.627	1.541E-07
15.150	-0.002020	-0.002442	20.899	1.782E-07
15.477	-0.002491	-0.002535	1.775	1.955E-09
15.611	-0.002574	-0.002574	0.000	8.837E-17

15.745	-0.002657	-0.002613	1.646	1.914E-09
16.102	-0.002740	-0.002721	0.713	3.821E-10
16.220	-0.002823	-0.002757	2.342	4.374E-09
16.473	-0.002907	-0.002836	2.415	4.926E-09
16.681	-0.002990	-0.002903	2.903	7.532E-09
17.217	-0.003073	-0.003080	0.238	5.349E-11
Resultados			35.158	1.463E-06

- Muestra de gabro antes y después del ensayo de compresión sin restricción lateral.



---

**Anexo C**

**Compresión con Restricción Lateral**

**Datos Experimentales y Resultados**

---

- Datos experimentales y resultados p6rfido en deformaci3n axial (Modelo 1)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Te3rica [%]	Error Relativo [%]	Error de M3nimos Cuadrados
0.000	0.000000	-0.000120	0.000	1.440E-08
-0.700	-0.000300	-0.000338	12.667	1.444E-09
-0.900	-0.000400	-0.000396	1.000	1.600E-11
-1.100	-0.000500	-0.000452	9.600	2.304E-09
-1.220	-0.000600	-0.000485	19.167	1.323E-08
-1.400	-0.000700	-0.000533	23.857	2.789E-08
-1.900	-0.000800	-0.000659	17.625	1.988E-08
-2.250	-0.000900	-0.000741	17.667	2.528E-08
-3.000	-0.001000	-0.000902	9.800	9.604E-09
-3.900	-0.001100	-0.001071	2.636	8.410E-10
-4.700	-0.001200	-0.001202	0.167	4.000E-12
-5.700	-0.001300	-0.001343	3.308	1.849E-09
-6.600	-0.001400	-0.001452	3.714	2.704E-09
-8.000	-0.001500	-0.001593	6.200	8.649E-09

-9.200	-0.001600	-0.001690	5.625	8.100E-09
-10.700	-0.001700	-0.001789	5.235	7.921E-09
-12.500	-0.001800	-0.001879	4.389	6.241E-09
-14.400	-0.001900	-0.001950	2.632	2.500E-09
-16.100	-0.002000	-0.001997	0.150	9.000E-12
-18.800	-0.002100	-0.002051	2.333	2.401E-09
-21.200	-0.002200	-0.002083	5.318	1.369E-08
Resultados			7.290	1.690E-07

- Datos experimentales y resultados p6rfido en deformaci3n axial (Modelo 2)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Te3rica [%]	Error Relativo [%]	Error de M3nimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.000000	0.000	0.000E+00
-0.700	-0.000300	-0.000241	19.667	3.481E-09
-0.900	-0.000400	-0.000304	24.000	9.216E-09
-1.100	-0.000500	-0.000366	26.800	1.796E-08
-1.220	-0.000600	-0.000402	33.000	3.920E-08

-1.400	-0.000700	-0.000455	35.000	6.003E-08
-1.900	-0.000800	-0.000593	25.875	4.285E-08
-2.250	-0.000900	-0.000683	24.111	4.709E-08
-3.000	-0.001000	-0.000859	14.100	1.988E-08
-3.900	-0.001100	-0.001044	5.091	3.136E-09
-4.700	-0.001200	-0.001186	1.167	1.960E-10
-5.700	-0.001300	-0.001339	3.000	1.521E-09
-6.600	-0.001400	-0.001457	4.071	3.249E-09
-8.000	-0.001500	-0.001608	7.200	1.166E-08
-9.200	-0.001600	-0.001712	7.000	1.254E-08
-10.700	-0.001700	-0.001816	6.824	1.346E-08
-12.500	-0.001800	-0.001911	6.167	1.232E-08
-14.400	-0.001900	-0.001985	4.474	7.225E-09
-16.100	-0.002000	-0.002034	1.700	1.156E-09
-18.800	-0.002100	-0.002088	0.571	1.440E-10
-21.200	-0.002200	-0.002120	3.636	6.400E-09
Resultados			12.069	3.127E-07

- Datos experimentales y resultados p3rfido en deformaci3n axial (Modelo 3)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Te3rica [%]	Error Relativo [%]	Error de M3nimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.000000	0.000	0.000E+00
-0.700	-0.000300	-0.000241	19.667	3.481E-09
-0.900	-0.000400	-0.000305	23.750	9.025E-09
-1.100	-0.000500	-0.000366	26.800	1.796E-08
-1.220	-0.000600	-0.000403	32.833	3.881E-08
-1.400	-0.000700	-0.000455	35.000	6.003E-08
-1.900	-0.000800	-0.000594	25.750	4.244E-08
-2.250	-0.000900	-0.000684	24.000	4.666E-08
-3.000	-0.001000	-0.000860	14.000	1.960E-08
-3.900	-0.001100	-0.001045	5.000	3.025E-09
-4.700	-0.001200	-0.001187	1.083	1.690E-10
-5.700	-0.001300	-0.001340	3.077	1.600E-09
-6.600	-0.001400	-0.001457	4.071	3.249E-09
-8.000	-0.001500	-0.001608	7.200	1.166E-08

-9.200	-0.001600	-0.001712	7.000	1.254E-08
-10.700	-0.001700	-0.001816	6.824	1.346E-08
-12.500	-0.001800	-0.001911	6.167	1.232E-08
-14.400	-0.001900	-0.001985	4.474	7.225E-09
-16.100	-0.002000	-0.002033	1.650	1.089E-09
-18.800	-0.002100	-0.002087	0.619	1.690E-10
-21.200	-0.002200	-0.002118	3.727	6.724E-09
Resultados			12.033	3.112E-07

- Datos experimentales y resultados pórfido en deformación axial (Modelo actual)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	-0.000064	0.000	4.096E-09
-0.700	-0.000300	-0.000314	4.667	1.960E-10
-0.900	-0.000400	-0.000379	5.250	4.410E-10
-1.100	-0.000500	-0.000443	11.400	3.249E-09
-1.220	-0.000600	-0.000479	20.167	1.464E-08

-1.400	-0.000700	-0.000533	23.857	2.789E-08
-1.900	-0.000800	-0.000674	15.750	1.588E-08
-2.250	-0.000900	-0.000765	15.000	1.823E-08
-3.000	-0.001000	-0.000942	5.800	3.364E-09
-3.900	-0.001100	-0.001125	2.273	6.250E-10
-4.700	-0.001200	-0.001264	5.333	4.096E-09
-5.700	-0.001300	-0.001412	8.615	1.254E-08
-6.600	-0.001400	-0.001525	8.929	1.563E-08
-8.000	-0.001500	-0.001667	11.133	2.789E-08
-9.200	-0.001600	-0.001764	10.250	2.690E-08
-10.700	-0.001700	-0.001860	9.412	2.560E-08
-12.500	-0.001800	-0.001946	8.111	2.132E-08
-14.400	-0.001900	-0.002012	5.895	1.254E-08
-16.100	-0.002000	-0.002055	2.750	3.025E-09
-18.800	-0.002100	-0.002103	0.143	9.000E-12
-21.200	-0.002200	-0.002131	3.136	4.761E-09
Resultados			8.470	2.429E-07

---

**Anexo D**

**Ensayo Compresión Triaxial con Presión de Confinamiento  
de 29,50 MPa**

**Datos Experimentales y Resultados**

---

- Datos experimentales y resultados gabro en deformación axial (Modelo 1)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.001953	0.000	3.814E-06
0.032	0.000080	0.001991	2388.750	3.652E-06
0.063	0.000220	0.002029	822.273	3.272E-06
1.524	0.002200	0.003841	74.591	2.693E-06
2.859	0.005200	0.005596	7.615	1.568E-07
4.152	0.008100	0.007388	8.790	5.069E-07
5.392	0.010900	0.009192	15.670	2.917E-06
6.737	0.013660	0.011243	17.694	5.842E-06
8.083	0.016380	0.013390	18.254	8.940E-06
9.365	0.018700	0.015521	17.000	1.011E-05
10.647	0.020680	0.017729	14.270	8.708E-06
11.992	0.022920	0.020119	12.221	7.846E-06
13.296	0.024400	0.022495	7.807	3.629E-06
14.599	0.026340	0.024913	5.418	2.036E-06

15.871	0.027620	0.027295	1.177	1.056E-07
17.205	0.028740	0.029793	3.664	1.109E-06
18.488	0.029360	0.032157	9.527	7.823E-06
19.802	0.029520	0.034503	16.880	2.483E-05
Resultados			191.200	9.799E-05

- Datos experimentales y resultados gabro en deformación axial (Modelo 2)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.001655	0.000	2.739E-06
0.032	0.000080	0.001696	2020.000	2.611E-06
0.063	0.000220	0.001737	689.545	2.301E-06
1.524	0.002200	0.003715	68.864	2.295E-06
2.859	0.005200	0.005619	8.058	1.756E-07
4.152	0.008100	0.007550	6.790	3.025E-07
5.392	0.010900	0.009480	13.028	2.016E-06
6.737	0.013660	0.011653	14.693	4.028E-06

8.083	0.016380	0.013901	15.134	6.145E-06
9.365	0.018700	0.016102	13.893	6.750E-06
10.647	0.020680	0.018345	11.291	5.452E-06
11.992	0.022920	0.020726	9.572	4.814E-06
13.296	0.024400	0.023033	5.602	1.869E-06
14.599	0.026340	0.025309	3.914	1.063E-06
15.871	0.027620	0.027463	0.568	2.465E-08
17.205	0.028740	0.029605	3.010	7.482E-07
18.488	0.029360	0.031490	7.255	4.537E-06
19.802	0.029520	0.033172	12.371	1.334E-05
Resultados			161.310	6.121E-05

- Datos experimentales y resultados gabro en deformación axial (Modelo 3)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	-0.000414	0.000	1.714E-07
0.032	0.000080	-0.000342	527.500	1.781E-07

0.063	0.000220	-0.000270	222.727	2.401E-07
1.524	0.002200	0.002999	36.318	6.384E-07
2.859	0.005200	0.005875	12.981	4.556E-07
4.152	0.008100	0.008563	5.716	2.144E-07
5.392	0.010900	0.011052	1.394	2.310E-08
6.737	0.013660	0.013651	0.066	8.100E-11
8.083	0.016380	0.016139	1.471	5.808E-08
9.365	0.018700	0.018398	1.615	9.120E-08
10.647	0.020680	0.020533	0.711	2.161E-08
11.992	0.022920	0.022624	1.291	8.762E-08
13.296	0.024400	0.024478	0.320	6.084E-09
14.599	0.026340	0.026132	0.790	4.326E-08
15.871	0.027620	0.027519	0.366	1.020E-08
17.205	0.028740	0.028683	0.198	3.249E-09
18.488	0.029360	0.029464	0.354	1.082E-08
19.802	0.029520	0.029850	1.118	1.089E-07
Resultados			45.274	2.362E-06

- Datos experimentales y resultados gabro en deformación axial (Modelo actual)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Axial Experimental [%]	Def. Axial Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	-0.002978	0.000	8.868E-06
0.032	0.000080	-0.002958	3797.500	9.229E-06
0.063	0.000220	-0.002937	1435.000	9.967E-06
1.524	0.002200	-0.001893	186.045	1.675E-05
2.859	0.005200	-0.000741	114.250	3.530E-05
4.152	0.008100	0.000598	92.617	5.628E-05
5.392	0.010900	0.002141	80.358	7.672E-05
6.737	0.013660	0.004172	69.458	9.002E-05
8.083	0.016380	0.006668	59.292	9.432E-05
9.365	0.018700	0.009593	48.701	8.294E-05
10.647	0.020680	0.013188	36.228	5.613E-05
11.992	0.022920	0.017869	22.038	2.551E-05
13.296	0.024400	0.023525	3.586	7.656E-07
14.599	0.026340	0.030578	16.090	1.796E-05

15.871	0.027620	0.039162	41.789	1.332E-04
17.205	0.028740	0.050461	75.578	4.718E-04
18.488	0.029360	0.064105	118.341	1.207E-03
19.802	0.029520	0.081688	176.721	2.722E-03
Resultados			354.088	5.114E-03

- Datos experimentales y resultados gabro en deformación lateral (Modelo 1)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	-0.000028	0.000	7.840E-10
0.032	-0.000020	-0.000045	125.000	6.250E-10
0.063	-0.000060	-0.000062	3.333	4.000E-12
1.524	-0.000840	-0.000837	0.357	9.000E-12
2.859	-0.001640	-0.001509	7.988	1.716E-08
4.152	-0.002180	-0.002125	2.523	3.025E-09
5.392	-0.002600	-0.002682	3.154	6.724E-09
6.737	-0.003280	-0.003247	1.006	1.089E-09

8.083	-0.003600	-0.003767	4.639	2.789E-08
9.365	-0.004240	-0.004221	0.448	3.610E-10
10.647	-0.004560	-0.004630	1.535	4.900E-09
11.992	-0.005120	-0.005009	2.168	1.232E-08
13.296	-0.005340	-0.005326	0.262	1.960E-10
14.599	-0.005580	-0.005590	0.179	1.000E-10
15.871	-0.005860	-0.005795	1.109	4.225E-09
17.205	-0.005940	-0.005951	0.185	1.210E-10
18.488	-0.006020	-0.006042	0.365	4.840E-10
19.802	-0.006060	-0.006075	0.248	2.250E-10
Resultados			8.583	8.024E-08

- Datos experimentales y resultados gabro en deformación lateral (Modelo 2)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	-0.000028	0.000	7.840E-10
0.032	-0.000020	-0.000045	125.000	6.250E-10

0.063	-0.000060	-0.000062	3.333	4.000E-12
1.524	-0.000840	-0.000837	0.357	9.000E-12
2.859	-0.001640	-0.001509	7.988	1.716E-08
4.152	-0.002180	-0.002125	2.523	3.025E-09
5.392	-0.002600	-0.002682	3.154	6.724E-09
6.737	-0.003280	-0.003247	1.006	1.089E-09
8.083	-0.003600	-0.003767	4.639	2.789E-08
9.365	-0.004240	-0.004221	0.448	3.610E-10
10.647	-0.004560	-0.004630	1.535	4.900E-09
11.992	-0.005120	-0.005009	2.168	1.232E-08
13.296	-0.005340	-0.005326	0.262	1.960E-10
14.599	-0.005580	-0.005590	0.179	1.000E-10
15.871	-0.005860	-0.005794	1.126	4.356E-09
17.205	-0.005940	-0.005951	0.185	1.210E-10
18.488	-0.006020	-0.006042	0.365	4.840E-10
19.802	-0.006060	-0.006075	0.248	2.250E-10
Resultados			8.584	8.037E-08

- Datos experimentales y resultados gabro en deformación lateral (Modelo 3)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	-0.000036	0.000	1.296E-09
0.032	-0.000020	-0.000053	165.000	1.089E-09
0.063	-0.000060	-0.000070	16.667	1.000E-10
1.524	-0.000840	-0.000836	0.476	1.600E-11
2.859	-0.001640	-0.001502	8.415	1.904E-08
4.152	-0.002180	-0.002116	2.936	4.096E-09
5.392	-0.002600	-0.002672	2.769	5.184E-09
6.737	-0.003280	-0.003237	1.311	1.849E-09
8.083	-0.003600	-0.003761	4.472	2.592E-08
9.365	-0.004240	-0.004218	0.519	4.840E-10
10.647	-0.004560	-0.004631	1.557	5.041E-09
11.992	-0.005120	-0.005015	2.051	1.103E-08
13.296	-0.005340	-0.005335	0.094	2.500E-11
14.599	-0.005580	-0.005601	0.376	4.410E-10

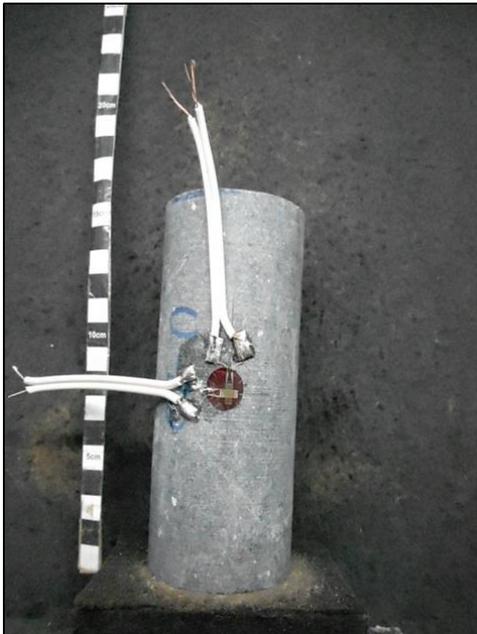
15.871	-0.005860	-0.005805	0.939	3.025E-09
17.205	-0.005940	-0.005957	0.286	2.890E-10
18.488	-0.006020	-0.006040	0.332	4.000E-10
19.802	-0.006060	-0.006058	0.033	4.000E-12
Resultados			11.568	7.932E-08

- Datos experimentales y resultados gabro en deformación lateral (Modelo actual)

Esfuerzo Axial Experimental [MPa]	Def. Lateral Experimental [%]	Def. Lateral Teórica [%]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
0.000	0.000000	0.454785	0.000	2.068E-01
0.032	-0.000020	0.454787	2274035.000	2.068E-01
0.063	-0.000060	0.454788	758080.000	2.069E-01
1.524	-0.000840	0.454883	54252.738	2.077E-01
2.859	-0.001640	0.455017	27844.939	2.085E-01
4.152	-0.002180	0.455194	20980.459	2.092E-01
5.392	-0.002600	0.455411	17615.808	2.098E-01
6.737	-0.003280	0.455702	13993.354	2.107E-01

8.083	-0.003600	0.456057	12768.250	2.113E-01
9.365	-0.004240	0.456458	10865.519	2.122E-01
10.647	-0.004560	0.456926	10120.307	2.130E-01
11.992	-0.005120	0.457496	9035.469	2.140E-01
13.296	-0.005340	0.458129	8679.195	2.148E-01
14.599	-0.005580	0.458849	8323.100	2.157E-01
15.871	-0.005860	0.459643	7943.737	2.167E-01
17.205	-0.005940	0.460580	7853.872	2.176E-01
18.488	-0.006020	0.461588	7767.575	2.187E-01
19.802	-0.006060	0.462739	7735.957	2.198E-01
Resultados			180994.182	3.820E+00

- Muestra de gabra antes y después del ensayo de compresión triaxial.



---

**Anexo E**

**Ensayo Acústico**

**Datos Experimentales y Resultados**

---

- Datos experimentales y resultados para onda “P” (Aplicando modelo 1 obtenido de análisis en pórfido en datos experimentales de Berea Sandstone)

Esfuerzo Axial [MPa]	Onda P Experimental [m/s]	Onda P Teórica [m/s]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
-1.000	2060.000	1027.271	50.132	1.067E+06
-2.500	2185.000	1089.484	50.138	1.200E+06
-3.700	2185.000	1139.074	47.868	1.094E+06
-5.000	2500.000	1192.647	52.294	1.709E+06
-6.000	2800.000	1233.838	55.934	2.453E+06
-7.500	2940.000	1295.891	55.922	2.703E+06
-8.500	3060.000	1337.703	56.284	2.966E+06
-9.750	3150.000	1380.167	56.185	3.132E+06
-11.000	3250.000	1445.820	55.513	3.255E+06
-12.300	3375.000	1507.480	55.334	3.488E+06
-13.500	3400.000	1564.397	53.988	3.369E+06
-14.500	3470.000	1616.961	53.402	3.434E+06
-15.750	3520.000	1688.915	52.019	3.353E+06
-17.000	3560.000	1770.372	50.270	3.203E+06

-18.300	3580.000	1869.393	47.782	2.926E+06
-19.500	3590.000	1979.508	44.860	2.594E+06
-20.750	3625.000	2122.903	41.437	2.256E+06
-22.000	3685.000	2309.629	37.324	1.892E+06
-23.000	3710.000	2519.964	32.076	1.416E+06
-24.500	3750.000	3017.410	19.536	5.367E+05
Resultados			48.415	4.805E+07

- Datos experimentales y resultados para onda “P” (Aplicando modelo actual obtenido de análisis en pórfido en datos experimentales de Berea Sandstone).

Esfuerzo Axial [MPa]	Onda P Experimental [m/s]	Onda P Teórica [m/s]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
-1.000	2060.000	999.7999137	51.466	1.124E+06
-2.500	2185.000	1046.909187	52.087	1.295E+06
-3.700	2185.000	1085.478754	50.321	1.209E+06
-5.000	2500.000	1121.420006	55.143	1.900E+06
-6.000	2800.000	1150.301321	58.918	2.722E+06
-7.500	2940.000	1197.193963	59.279	3.037E+06

-8.500	3060.000	1222.312857	60.055	3.377E+06
-9.750	3150.000	1249.322291	60.339	3.613E+06
-11.000	3250.000	1298.379357	60.050	3.809E+06
-12.300	3375.000	1345.014158	60.148	4.121E+06
-13.500	3400.000	1389.720855	59.126	4.041E+06
-14.500	3470.000	1426.945611	58.878	4.174E+06
-15.750	3520.000	1485.366468	57.802	4.140E+06
-17.000	3560.000	1552.928874	56.378	4.028E+06
-18.300	3580.000	1639.891114	54.193	3.764E+06
-19.500	3590.000	1737.822292	51.593	3.431E+06
-20.750	3625.000	1870.815399	48.391	3.077E+06
-22.000	3685.000	2047.199624	44.445	2.682E+06
-23.000	3710.000	2250.246318	39.346	2.131E+06
-24.500	3750.000	2737.838014	26.991	1.024E+06
Resultados			53.247	5.870E+07

- Datos experimentales y resultados para onda “S” (Aplicando modelo 1 obtenido de análisis en pórfido en datos experimentales de Berea Sandstone))

Esfuerzo Axial [MPa]	Onda s Experimental [m/s]	Onda S Teórica [m/s]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
-1.000	1500.000	702.479	53.168	6.360E+05
-2.500	1560.000	763.539	51.055	6.343E+05
-3.500	1625.000	805.198	50.449	6.721E+05
-5.000	1690.000	868.787	48.592	6.744E+05
-6.000	1780.000	911.735	48.779	7.539E+05
-7.200	1810.000	963.660	46.759	7.163E+05
-8.500	1875.000	1020.183	45.590	7.307E+05
-9.700	1940.000	1072.403	44.721	7.527E+05
-11.000	1980.000	1128.829	42.988	7.245E+05
-12.200	2000.000	1180.619	40.969	6.714E+05
-13.200	2040.000	1223.468	40.026	6.667E+05
-14.500	2060.000	1278.637	37.930	6.105E+05
-15.700	2080.000	1328.935	36.109	5.641E+05
-17.000	2125.000	1382.659	34.934	5.511E+05

-18.200	2155.000	1431.483	33.574	5.235E+05
-19.500	2155.000	1483.497	31.160	4.509E+05
-20.700	2180.000	1530.665	29.786	4.216E+05
-22.000	2220.000	1580.835	28.791	4.085E+05
-23.000	2220.000	1618.762	27.083	3.615E+05
-24.500	2220.000	1674.573	24.569	2.975E+05
Resultados			39.852	1.182E+07

- Datos experimentales y resultados para onda “S” (Aplicando modelo actual obtenido de análisis en pórfido en datos experimentales de Berea Sandstone).

Esfuerzo Axial [MPa]	Onda s Experimental [m/s]	Onda S Teórica [m/s]	Error Relativo [%]	Error de Mínimos Cuadrados
-1.000	1500.000	675.008	54.999	6.806E+05
-2.500	1560.000	720.965	53.784	7.040E+05
-3.500	1625.000	751.603	53.748	7.628E+05
-5.000	1690.000	797.560	52.807	7.964E+05
-6.000	1780.000	828.198	53.472	9.059E+05

-7.200	1810.000	864.964	52.212	8.931E+05
-8.500	1875.000	904.793	51.744	9.413E+05
-9.700	1940.000	941.559	51.466	9.969E+05
-11.000	1980.000	981.388	50.435	9.972E+05
-12.200	2000.000	1018.154	49.092	9.640E+05
-13.200	2040.000	1048.792	48.589	9.825E+05
-14.500	2060.000	1088.621	47.154	9.436E+05
-15.700	2080.000	1125.387	45.895	9.113E+05
-17.000	2125.000	1165.216	45.166	9.212E+05
-18.200	2155.000	1201.982	44.224	9.082E+05
-19.500	2155.000	1241.811	42.375	8.339E+05
-20.700	2180.000	1278.577	41.350	8.126E+05
-22.000	2220.000	1318.406	40.612	8.129E+05
-23.000	2220.000	1349.044	39.232	7.586E+05
-24.500	2220.000	1395.001	37.162	6.806E+05
Resultados			47.776	1.721E+07

---

## **Anexo F**

### **Componentes Matriz $\mathbb{M}$ y $\mathcal{A}_{ijkl}$**

---

- Componentes Matriz  $\mathbb{M}$

$$\mathbb{M}_{1,1} = isn_1, \quad \mathbb{M}_{1,4} = \frac{isn_2}{2}, \quad \mathbb{M}_{1,5} = \frac{isn_3}{2}, \quad \mathbb{M}_{1,7} = \rho\omega,$$

$$\mathbb{M}_{2,2} = isn_2, \quad \mathbb{M}_{2,4} = \frac{isn_1}{2}, \quad \mathbb{M}_{2,6} = \frac{isn_3}{2}, \quad \mathbb{M}_{2,8} = \rho\omega,$$

$$\mathbb{M}_{3,3} = isn_3, \quad \mathbb{M}_{3,5} = \frac{isn_1}{2}, \quad \mathbb{M}_{3,6} = \frac{isn_2}{2}, \quad \mathbb{M}_{3,9} = \rho\omega,$$

$$\mathbb{M}_{4,1} = \mathcal{A}_{1111}, \quad \mathbb{M}_{4,2} = \mathcal{A}_{1122}, \quad \mathbb{M}_{4,3} = \mathcal{A}_{1133}, \quad \mathbb{M}_{4,4} = \mathcal{A}_{1112}, \quad \mathbb{M}_{4,5} = \mathcal{A}_{1113},$$

$$\mathbb{M}_{4,6} = \mathcal{A}_{1123}, \quad \mathbb{M}_{4,7} = -n_1 i\omega s,$$

$$\mathbb{M}_{5,1} = \mathcal{A}_{1122}, \quad \mathbb{M}_{5,2} = \mathcal{A}_{2222}, \quad \mathbb{M}_{5,3} = \mathcal{A}_{2233}, \quad \mathbb{M}_{5,4} = \mathcal{A}_{2212}, \quad \mathbb{M}_{5,5} = \mathcal{A}_{2213},$$

$$\mathbb{M}_{5,6} = \mathcal{A}_{2223}, \quad \mathbb{M}_{5,8} = -n_2 i\omega s,$$

$$\mathbb{M}_{6,1} = \mathcal{A}_{1133}, \quad \mathbb{M}_{6,2} = \mathcal{A}_{2233}, \quad \mathbb{M}_{6,3} = \mathcal{A}_{3333}, \quad \mathbb{M}_{6,4} = \mathcal{A}_{3312}, \quad \mathbb{M}_{6,5} = \mathcal{A}_{3313},$$

$$\mathbb{M}_{6,6} = \mathcal{A}_{3323}, \quad \mathbb{M}_{6,9} = -n_3 i\omega s,$$

$$\mathbb{M}_{7,1} = \mathcal{A}_{1112}, \quad \mathbb{M}_{7,2} = \mathcal{A}_{2212}, \quad \mathbb{M}_{7,3} = \mathcal{A}_{3312}, \quad \mathbb{M}_{7,4} = \mathcal{A}_{1212}, \quad \mathbb{M}_{7,5} = \mathcal{A}_{1213},$$

$$\mathbb{M}_{7,6} = \mathcal{A}_{1223}, \quad \mathbb{M}_{7,7} = -\frac{n_2 i\omega s}{2}, \quad \mathbb{M}_{7,8} = -\frac{n_1 i\omega s}{2},$$

$$\mathbb{M}_{8,1} = \mathcal{A}_{1113}, \quad \mathbb{M}_{8,2} = \mathcal{A}_{2213}, \quad \mathbb{M}_{8,3} = \mathcal{A}_{3313}, \quad \mathbb{M}_{8,4} = \mathcal{A}_{1213}, \quad \mathbb{M}_{8,5} = \mathcal{A}_{1313},$$

$$\mathbb{M}_{8,6} = \mathcal{A}_{1323}, \quad \mathbb{M}_{8,7} = -\frac{n_3 i\omega s}{2}, \quad \mathbb{M}_{8,9} = -\frac{n_1 i\omega s}{2},$$

$$\mathbb{M}_{9,1} = \mathcal{A}_{1123}, \quad \mathbb{M}_{9,2} = \mathcal{A}_{2223}, \quad \mathbb{M}_{9,3} = \mathcal{A}_{3323}, \quad \mathbb{M}_{9,4} = \mathcal{A}_{1223}, \quad \mathbb{M}_{9,5} = \mathcal{A}_{1323},$$

$$\mathbb{M}_{9,6} = \mathcal{A}_{2323}, \quad \mathbb{M}_{9,8} = -\frac{n_3 i\omega s}{2}, \quad \mathbb{M}_{9,9} = -\frac{n_2 i\omega s}{2},$$

- Componentes de la matriz  $\mathcal{A}_{ijkl}$  (válido para modelo 1 y 3).

$$\mathcal{A}_{1111} = f_1''(\sigma_1) + f_2''(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{2222} = f_1''(\sigma_2) + f_2''(\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{3333} = f_1''(\sigma_3) + f_2''(\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{1122} = f_2'(\sigma_1) + f_2'(\sigma_2) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{1133} = f_2'(\sigma_1) + f_2'(\sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{2233} = f_2'(\sigma_2) + f_2'(\sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{1212} = \frac{[f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_1) + f_1'(\sigma_1) - f_1'(\sigma_2) + (\sigma_2 + \sigma_3)f_2'(\sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2)]}{2(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$\mathcal{A}_{1313} = \frac{[f_2(\sigma_3) - f_2(\sigma_1) + f_1'(\sigma_1) - f_1'(\sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3)f_2'(\sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3)]}{2(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$\mathcal{A}_{2323} = \frac{[f_2(\sigma_3) - f_2(\sigma_2) + f_1'(\sigma_2) - f_1'(\sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2) - (\sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3)]}{2(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$\mathcal{A}_{1112} = 0, \mathcal{A}_{1113} = 0, \mathcal{A}_{1123} = 0, \mathcal{A}_{2212} = 0, \mathcal{A}_{2213} = 0, \mathcal{A}_{2223} = 0,$$

$$\mathcal{A}_{3312} = 0, \mathcal{A}_{3313} = 0, \mathcal{A}_{3323} = 0, \mathcal{A}_{1213} = 0, \mathcal{A}_{1223} = 0, \mathcal{A}_{1323} = 0,$$

Si  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 = \sigma$  y se tiene que  $\mathcal{A}_{1212}$  es

$$\mathcal{A}_{1212} = \frac{1}{2}[f_1''(\sigma) + (\sigma + \sigma_3)f_2''(\sigma) - 2f_2'(\sigma)]$$

Por otra parte, si  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_3 = \sigma$  se obtiene  $\mathcal{A}_{1313}$  es

$$\mathcal{A}_{1313} = \frac{1}{2} [f_1''(\sigma) + (\sigma_2 + \sigma)f_2''(\sigma) - 2f_2'(\sigma)]$$

Finalmente, si  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_3 = \sigma$  se obtienen que  $\mathcal{A}_{2323}$  es

$$\mathcal{A}_{2323} = \frac{1}{2} [f_1''(\sigma) + (\sigma_1 + \sigma)f_2''(\sigma) - 2f_2'(\sigma)]$$

- Componentes de la matriz  $\mathcal{A}_{ijkl}$  (válido para modelo 2).

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1111} &= f_1''(\sigma_1) + (h(\sigma_2) + h(\sigma_3) + \sigma_2 + \sigma_3)f_2''(\sigma_1) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) \\ &\quad + (f_2(\sigma_2) + f_2(\sigma_3))h''(\sigma_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2222} &= f_1''(\sigma_2) + (h(\sigma_1) + h(\sigma_3) + \sigma_1 + \sigma_3)f_2''(\sigma_2) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) \\ &\quad + (f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_3))h''(\sigma_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3333} &= f_1''(\sigma_3) + (h(\sigma_1) + h(\sigma_2) + \sigma_1 + \sigma_2)f_2''(\sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) \\ &\quad + (f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_2))h''(\sigma_3) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{1122} = f_2'(\sigma_2)(1 + h'(\sigma_1)) + f_2'(\sigma_1)(1 + h'(\sigma_2)) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{1133} = f_2'(\sigma_3)(1 + h'(\sigma_1)) + f_2'(\sigma_1)(1 + h'(\sigma_3)) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{2233} = f_2'(\sigma_3)(1 + h'(\sigma_2)) + f_2'(\sigma_2)(1 + h'(\sigma_3)) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{1212} = \frac{1}{2(\sigma_1 - \sigma_2)} \left[ f_2(\sigma_2) + f_2(\sigma_3) + f_1'(\sigma_1) + (h(\sigma_2) + h(\sigma_3) + \sigma_2 + \sigma_3)f_2'(\sigma_1) + \frac{1}{3}f_3' \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) + (f_2(\sigma_2) + f_2(\sigma_3))h'(\sigma_1) \right] - \frac{1}{2(\sigma_1 - \sigma_2)} \left[ f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_3) + f_1'(\sigma_2) + (h(\sigma_1) + h(\sigma_3) + \sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2) + \frac{1}{3}f_3' \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) + (f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_3))h'(\sigma_2) \right]$$

$$\mathcal{A}_{1313} = \frac{1}{2(\sigma_1 - \sigma_2)} \left[ f_2(\sigma_2) + f_2(\sigma_3) + f_1'(\sigma_1) + (h(\sigma_2) + h(\sigma_3) + \sigma_2 + \sigma_3)f_2'(\sigma_1) + \frac{1}{3}f_3' \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) + (f_2(\sigma_2) + f_2(\sigma_3))h'(\sigma_1) \right] - \frac{1}{2(\sigma_1 - \sigma_2)} \left[ f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_2) + f_1'(\sigma_3) + (h(\sigma_1) + h(\sigma_2) + \sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3) + \frac{1}{3}f_3' \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) + (f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_2))h'(\sigma_3) \right]$$

$$\mathcal{A}_{2323} = \frac{1}{2(\sigma_1 - \sigma_2)} \left[ f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_3) + f_1'(\sigma_2) + (h(\sigma_1) + h(\sigma_3) + \sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2) + \frac{1}{3}f_3' \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) + (f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_3))h'(\sigma_2) \right] - \frac{1}{2(\sigma_1 - \sigma_2)} \left[ f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_2) + f_1'(\sigma_3) + (h(\sigma_1) + h(\sigma_2) + \sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3) + \frac{1}{3}f_3' \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) + (f_2(\sigma_1) + f_2(\sigma_2))h'(\sigma_3) \right]$$

Si  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 = \sigma$  y se tiene que  $\mathcal{A}_{1212}$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1212} &= \frac{1}{2} \left[ f_1''(\sigma) + (h(\sigma) + h(\sigma_3) + \sigma + \sigma_3)f_2''(\sigma) + \frac{1}{9}f_3'' \left( \frac{2\sigma + \sigma_3}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + (f_2(\sigma) + f_2(\sigma_3))h''(\sigma) \right] - \frac{1}{2} [f_2'(\sigma) + (h'(\sigma) + 1)f_2'(\sigma) \\ &\quad + \frac{1}{9}f_3'' \left( \frac{2\sigma + \sigma_3}{3} \right) + f_2'(\sigma)h'(\sigma)] \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_3 = \sigma$  se obtiene  $\mathcal{A}_{1313}$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1313} &= \frac{1}{2} \left[ f_1''(\sigma) + (h(\sigma) + h(\sigma_2) + \sigma + \sigma_2)f_2''(\sigma) + \frac{1}{9}f_3'' \left( \frac{2\sigma + \sigma_2}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + (f_2(\sigma) + f_2(\sigma_2))h''(\sigma) \right] - \frac{1}{2} [f_2'(\sigma) + (h'(\sigma) + 1)f_2'(\sigma) \\ &\quad + \frac{1}{9}f_3'' \left( \frac{2\sigma + \sigma_2}{3} \right) + f_2'(\sigma)h'(\sigma)] \end{aligned}$$

Finalmente, si  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_3 = \sigma$  se obtienen que  $\mathcal{A}_{2323}$  es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{2323} = & \frac{1}{2} \left[ f_1''(\sigma) + (h(\sigma) + h(\sigma_1) + \sigma + \sigma_1) f_2''(\sigma) + \frac{1}{9} f_3'' \left( \frac{2\sigma + \sigma_1}{3} \right) \right. \\ & \left. + (f_2(\sigma) + f_2(\sigma_1)) h''(\sigma) \right] - \frac{1}{2} [f_2'(\sigma) + (h'(\sigma) + 1) f_2'(\sigma) \\ & + \frac{1}{9} f_3' \left( \frac{2\sigma + \sigma_1}{3} \right) + f_2'(\sigma) h'(\sigma)]\end{aligned}$$