



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELÉCTRICA

**DISEÑO DE CONTROLADORES ADAPTABLES DE ORDEN REDUCIDO
PARA EL SISTEMA GENERALIZADO DE LORENZ EN FORMA
CANÓNICA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
ELECTRICISTA

FELIPE ALEJANDRO AMAYA TORRES

PROFESOR GUÍA:
MANUEL DUARTE MERMOUD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN CARLOS TRAVIESO
ANDRÉS CABA RUTE

SANTIAGO DE CHILE
2018

Resumen

Los sistemas caóticos presentan comportamientos que no corresponden a sistemas estocásticos y tampoco a sistemas determinísticos y que frente a pequeños cambios en sus parámetros su evolución temporal varía radicalmente. Estos sistemas aparecen en diferentes ámbitos de las ciencias, tales como estudio de dinámica de fluidos en fluido dinámica, análisis de sistemas climático-atmosféricos en meteorología, análisis de electrocardiogramas y encefalogramas en medicina, solo por nombrar unos pocos. Tanto o más importante que saber analizar el comportamiento caótico de ciertos sistemas, resulta ser el diseño de esquemas de control que inhiban la aparición de este fenómeno.

El principal objetivo de este trabajo es diseñar esquemas de control para el sistema caótico denominado sistema de Lorenz Generalizado en forma canónica, utilizando la menor cantidad de información posible, en términos de señales de control y parámetros ajustables. En la literatura técnica existen metodologías para el control de caos de este tipo de sistemas, que hacen uso de mucha información, la cual no siempre está disponible para el diseño del controlador, lo que las hace impracticables.

La principal contribución de este trabajo es el diseño de tres estrategias de control originales para el sistema de Lorenz generalizado. Las dos primeras emplean dos señales de control (u_1-u_2 y u_1-u_3) mientras que la tercera solo emplea la señal de control u_1 . En todos los casos es posible demostrar analíticamente que todas las señales del sistema de Lorenz generalizado, convergen asintóticamente a cero, mediante un controlador que ajusta un máximo de dos parámetros.

El uso de dos señales de control garantiza que inmediatamente se estabilice el sistema. En cambio el uso de una señal de control tiene la desventaja que requiere esperar a que el sistema este cerca del origen para aplicar control. Este acercamiento esta garantizado que ocurrirá por las propiedades caóticas del sistema generalizado de Lorenz en forma canónica.

Tabla de Contenido

1.	Introducción	1
1.1.	Breve historia de los sistemas caóticos	2
1.2.	Caracterización de los sistemas caóticos	3
1.3.	Aplicación de los sistemas caóticos	4
1.4.	Control de sistemas caóticos	5
1.5.	Objetivos y alcances	6
2.	Control Adaptivo para Sistemas Caóticos	7
2.1.	Sistemas de parámetros desconocidos y constantes	8
2.2.	Sistemas de parámetros desconocidos y variantes en el tiempo	9
2.2.1.	Parámetros variando en forma acotada y arbitraria	9
2.2.2.	Parámetros variando en forma aleatoria	10
2.3.	Controladores con incertidumbre en la componente no lineal.....	12
2.3.1.	Control adaptivo de orden completo	12
2.3.2.	Controladores adaptivos de orden reducido.....	13
2.4.	Controlador en presencia de perturbaciones	15
3.	El Sistema de Lorenz y su Generalización	18
3.1.	Sistema de Lorenz	18
3.2.	Propiedades matemáticas del sistema generalizado de Lorenz.....	20
4.	Diseño de controladores para el sistema generalizado de Lorenz	22
4.1.	Control usando señales u_1 y u_2	22
4.2.	Control usando señales u_1 y u_3	25
4.3.	Control usando la señal u_1	28
5.	Ajuste de ganancias para los esquemas de control	31
5.1.	Control usando señales u_1 y u_2	32
5.2.	Control usando señales u_1 y u_3	37
5.3.	Control usando la señal u_1	44
6.	Conclusiones	47
	Bibliografía	48
	Páginas web	48
	Libros.....	48
	Memorias	49
	Papers	49

1. Introducción

El presente trabajo se lleva a cabo porque representa un ínfimo avance en el área de control de sistemas. Pese a eso se espera que este trabajo beneficie a interesados en el tema tratado, y que potencialmente despierte el interés por el tema en los lectores. Este documento pretende ser útil para estudiantes que estén preparando su memoria y que necesiten una referencia en el tema de control adaptivo para sistemas caóticos. El control de sistemas caóticos ha despertado gran motivación en los últimos veinte años, siendo un tópico cuyos desarrollos han crecido en forma rápida a partir de los trabajos pioneros a comienzos de la década de 1990.

Debido a la atención que el tema ha generado se han hecho numerosos y rápidos avances en el tema, así han surgido métodos de control que son específicos para los sistemas caóticos, que se han expandido y mejorado constantemente. Cada año se hacen numerosas publicaciones que muestran que el campo de estudio aun puede ofrecer caminos nuevos para explorar. Muchas técnicas se han usado para controlar sistemas caóticos, así tenemos técnicas nuevas y específicas para sistemas caóticos, como el método OGY, y otras no tan innovadoras pero igualmente valiosas como backstepping. Pese a los avances, el tema sigue sin agotarse y es de esperar que en los próximos años surjan nuevos enfoques que continúen aportando al control de sistemas caóticos.

En el presente trabajo se propone controlar el sistema generalizado de Lorenz en forma canónica. Dicho sistema no ha sido controlado en la literatura previamente, por lo que aparece como un desafío encontrar esquemas de control que permitan hacer control asintótico en él. Aun que es un objetivo de control modesto se ha agregado la restricción de hacer control de orden reducido para el sistema, lo cual vuelve más interesante el problema de control. El control de orden reducido significa usar menos señales de control que el tamaño del estado del sistema a controlar.

Los resultados obtenidos muestran que es posible hacer control de orden reducido sobre el sistema generalizado de Lorenz en forma canónica. Dicho objetivo se logra usando dos señales de control y usando una señal de control. Para complementar los resultados se harán simulaciones que ejemplifiquen la convergencia asintótica de los sistemas bajo control.

Los objetivos de este trabajo son estudiar el sistema generalizado de Lorenz forma canónica, para luego examinar con que combinaciones de señales de control se puede estabilizar el sistema. Además se propone usar simulaciones para corroborar los resultados. En particular se propone construir dos estrategias de control usando dos señales de control y que ajustan dos parámetros, y una estrategia usando sólo una señal de control ajustando solamente un parámetro. También se busca descartar aquellas combinaciones de señales que con las que no se puede controlar el sistema.

Este trabajo comenzará con una breve introducción donde se hablará de los sistemas caóticos en general, para dar paso a un resumen con los desarrollos más importantes de la literatura. Posteriormente habrá una rápida descripción del sistema de Lorenz y del sistema de Lorenz generalizado en forma canónica, para luego presentar los desarrollos hechos durante esta memoria consistente en tres esquemas de control para el sistema generalizado de Lorenz.

1.1. Breve historia de los sistemas caóticos

El año 1887 el rey Oscar II de Suecia planteó un concurso y ofreció una considerable suma de dinero por demostrar si el sistema solar es o no estable. Los trabajos debían ser presentados en 1888 y el resultado sería anunciado en 1889, durante los festejos del sexagésimo cumpleaños del rey. El matemático Henri Poincaré presentó un trabajo donde, más que resolver el problema, mostraba en forma muy interesante las dificultades asociadas a semejante empresa. Uno de los jurados, Karl Weierstrass, afirmó que: «*Si bien este trabajo no puede ser considerado como la solución completa del desafío presentado, es de tal importancia que su publicación marcará el comienzo de una nueva era en la historia de la Mecánica Celestial.*» [4]

El trabajo de Poincaré efectivamente abrió nuevas líneas de investigación, seguidas por personas como Kolmogorov o Birkhoff [5], y hoy en día es considerado como pionero. En él aparece esbozado que un pequeño cambio en las condiciones iniciales del sistema lleva a grandes diferencias en el resultado final. En el trabajo de Poincaré se aprecian muchas de las ideas que hoy en día asociamos con los sistemas dinámicos no lineales y con el “caos”. Pero en ese tiempo se carecía de una herramienta muy importante: el computador. Muchos sistemas dinámicos no lineales sólo pueden ser resueltos en forma numérica y los computadores nos permiten graficar cómo evolucionan los sistemas no lineales [10].

El siguiente hito es el trabajo que Edward Lorenz, un meteorólogo del MIT. Usando un computador, Lorenz simuló un “sencillo” sistema de ecuaciones no lineales y mostró que su comportamiento, en el largo plazo, es impredecible para efectos prácticos. Lo que Lorenz presentó ya había sido esbozado por Poincaré, en relación a que en los sistemas no lineales pequeños cambios pueden tener grandes consecuencias. Este trabajo fue más allá del mundo académico, en Diciembre de 1972, durante una reunión de la “American Association for the Advancement of Science” (realizada en Washington DC), Lorenz dio una charla titulada “Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil set off a Tornado in Texas” [10]. Es probable que a partir de este título el “caos” haya pasado a la cultura popular con el nombre de “efecto mariposa”.

En la década de 1960 el trabajo de Lorenz pasó relativamente desapercibido por dos razones: la revista donde fue publicado (“Journal of the Atmospheric Sciences”) no era muy conocida fuera del ámbito de la meteorología y los computadores eran relativamente escasos. Durante la siguiente década el trabajo de Lorenz empezó a difundirse entre los físicos y matemáticos, y los computadores fueron volviéndose más accesibles. Científicos de otras disciplinas empezaron a aportar en este ámbito. En 1976, Robert May mostró comportamiento “caótico” en ecuaciones que describen poblaciones de seres vivos [10]. En 1978, Mitchell Feigenbaum mostró que al parecer en el “caos” hay regularidades, posteriormente llamadas “constantes de Feigenbaum” [10]. Cuatro años después Benoît Mandelbrot publicó su libro “Fractal Geometry of Nature” donde se exponen los principios de la geometría fractal [2], herramienta de gran ayuda en el estudio del “caos”. Leon Chua presentó en 1983 un sencillo (y barato) circuito eléctrico, bautizado con su nombre, que presenta comportamiento “caótico” [3].

1.2. Caracterización de los sistemas caóticos

Hasta el momento la pregunta ¿Cuándo un sistema dinámico es caótico? No tiene una respuesta universalmente aceptada. Desde los pioneros trabajos de Lorenz sobre el clima [30] hasta hoy se sigue estudiando el “caos”. Frutos de estas investigaciones ([10], [16], [19]) se han encontrado varias propiedades interesantes, sobre las que una aceptación significativa, y que se atribuyen a los sistemas “caóticos”:

-
- No Linealidad: el comportamiento de los sistemas lineales nunca puede presentar comportamiento “caótico”, es necesaria la presencia de no linealidades para que haya “caos”
- Determinismo: Para que haya “caos” no es necesaria la presencia de elementos aleatorios.
- Sensibilidad a las condiciones iniciales: Las trayectorias divergen de manera exponencial, por tanto condiciones iniciales cercanas se alejan rápidamente.
- Estabilidad global: Los sistemas caóticos tienen sus trayectorias encerradas en una región acotada, llamada atractor “caótico”.
- Ergodicidad: Todos los estados posibles del sistema en una región definida tienen igual probabilidad de ser visitados.
- Órbitas densas: En un atractor caótico existen muchas órbitas muy cercanas entre sí, se dice que las órbitas son “densas” en el atractor.
- Atractor fractal: El atractor de un sistema caótico suele ser un conjunto de dimensión fractal, razón por la cual a veces se les llama “atractor extraño”. Esta interesante propiedad geométrica ha estado históricamente ligada al estudio de los sistemas caóticos, pero hoy se considera menos importante que las anteriores.

Una definición interesante que pretende abarcar todas las ideas mencionadas fue dada por Strogatz [16]:

“Chaos is aperiodic long-term behavior in a deterministic system that exhibits sensitive dependence on initial conditions”

Otra definición interesante fue propuesta en [9]:

“A continuous map $f : X \rightarrow X$ of a metric space is said to be chaotic if it is topologically transitive and its periodic points are dense”

La primera definición es más sencilla de entender, especialmente para personas sin formación matemática avanzada, y describe cómo deben ser las trayectorias para que un sistema sea caótico. La segunda definición en cambio impone condiciones sobre la función que genera las trayectorias.

Es muy posible que ambas definiciones sean matemáticamente equivalentes, pero desde un punto de vista práctico la primera parece ser más útil, por que en muchas situaciones de la vida real sólo es posible tener acceso a las mediciones de ciertas variables, desconociendo información necesaria para usar la segunda definición.

1.3. Aplicación de los sistemas caóticos

Al comienzo se pensaba que el caos era un tipo de comportamiento infrecuente, pero se ha encontrado que está presente en un amplio rango de sistemas dinámicos naturales, y también en sistemas creados por el hombre. A continuación se presenta un resumen de los fenómenos naturales y artificiales que se han descritos como caóticos, y de los beneficios que se puede obtener de ellos:

En Astronomía el movimiento de los cuerpos bajo la acción de la fuerza de gravedad fue el primer caso donde se vislumbró el comportamiento caótico. En 1978 la NASA se aprovechó de este fenómeno para mover el satélite ISEE-3, hacia un cometa, usando poco combustible. Esto fue posible porque el sistema formado por la Luna y la Tierra hizo que el movimiento del satélite fuera caótico [5].

En fluido-dinámica se han reportado diversos sistemas caóticos, aunque todos ellos se derivan de las ecuaciones de Navier Stokes. El caso más famoso es el sistema de Lorenz, un modelo extremadamente simple del clima pero muy ilustrativo del comportamiento caótico ([10], [30]).

En química la reacción de Belousov y Zhabotinsky es un ejemplo de un sistema caótico [16]. Otro caso importante es la mezcla sustancias, donde se busca que el mezclado sea caótico para mejorar la pureza del compuesto final [23].

En sistemas eléctricos también se ha reportado la presencia de caos, siendo el ejemplo emblemático el circuito de Chua [5]. También se ha reportado caos en convertidores dc - dc [34] y en sistemas de potencia [38].

En telecomunicaciones se ha reportado que el tráfico de datos a través de Internet puede comportarse en forma caótica [8]. También se ha estudiado la posibilidad de encriptar datos usando caos [16]. La modulación de señales usando sistemas caóticos se ha investigado [8].

En el ámbito de la medicina se ha encontrado que, bajo condiciones de arritmia, los latidos del corazón presentan comportamiento caótico [10]. También se ha estudiado que las neuronas pueden presentar comportamiento caótico [16].

En el ámbito de la biología se ha encontrado que las poblaciones de insectos poseen comportamiento caótico [31]. También se puede encontrar caos en los modelos que representan la población de animales cuando se trata de depredador y presa [10].

1.4. Control de sistemas caóticos

El estudio y descripción del caos ha llevado a la comunidad científica a interesarse en controlar este tipo de fenómeno, es decir cambiar el comportamiento de estos sistemas para que sigan trayectorias definidas de antemano. A luz del desarrollo histórico esta idea no parece obvia ni sencilla, los primeros sistemas caóticos descritos, como el movimiento de los planetas o el clima, sólo podrían haber sido controlados en simulaciones o en experimentos de laboratorio. Simular un sistema caótico, sin sistema de control, es más sencillo y requiere menos carga computacional.

Además la gran sensibilidad de los sistemas caóticos hacía parecer el control de ellos como algo difícil. ¿Cómo controlar un sistema si un pequeño error de medición puede amplificarse en forma exponencial? La respuesta es que en el “corto plazo” un sistema caótico se ve como si no lo fuera. Entonces, si hay una medición frecuente, de las variables de interés, el error nunca se incrementa significativamente y el control se hace posible.

En 1990 un trabajo fundamental en control de sistemas caóticos fue presentado por Edward Ott, Celso Grebogi y James Yorke en “Physical Review Letters” [33]. Su desarrollo (posteriormente llamado “Método OGY” o “Linealización del mapa de Poincaré”) logró atraer gran atención, gatillando el interés por esta materia. El control de sistemas no lineales ya existía, pero este método era especialmente diseñado para sistemas que fuesen caóticos. En su trabajo ellos se aprovechaban de las singulares propiedades del caos para lograr llevar un sistema a una órbita periódica inestable. Este método inmediatamente reportó un gran interés en el tema. Yang, Liu y Mao lograron extender este método [13]. Otro enfoque diferente y original, basado en realimentación con retraso, fue propuesto en 1992 por Pyragas ([35], [36]), para controlar sistemas caóticos.

Durante estos últimos veinte años el campo de control de sistemas caóticos ha crecido en forma rápida, tal como se aprecia la cantidad de literatura publicada, donde diversos enfoques han sido propuestos en esta área. Se han aplicado métodos de control no lineal más clásicos, y combinaciones de ellos, por ejemplo el método “open-plus-closed-loop” ([17], [26]), Speed Gradient [7], Backstepping [11], Feedback Linearization [14], Control por Estructura Variable ([13], [14]), Redes Neuronales [15] y Lógica Difusa [15].

1.5. Objetivos y alcances

El principal objetivo de este trabajo es diseñar esquemas de control para el sistema caótico denominado sistema de Lorenz Generalizado en forma canónica, utilizando la menor cantidad de información posible, en términos de señales de control y parámetros ajustables. En la literatura técnica existen metodologías para el control de caos de este tipo de sistemas, que hacen uso de mucha información, la cual no siempre está disponible para el diseño del controlador, lo que las hace impracticables.

La principal contribución de este trabajo es el diseño de tres estrategias de control originales para el sistema de Lorenz generalizado. Las dos primeras emplean dos señales de control (u_1 - u_2 y u_1 - u_3) mientras que la tercera solo emplea la señal de control u_1 . En todos los casos es posible demostrar analíticamente que todas las señales del sistema de Lorenz generalizado, convergen asintóticamente a cero, mediante un controlador que ajusta un máximo de dos parámetros.

2. Control Adaptivo para Sistemas Caóticos

El control adaptivo, o adaptable, es una técnica que se desarrolló desde fines de los años cuarenta en adelante, principalmente en Europa y Estados Unidos, hasta hoy en día. Se pretende controlar pese a desconocer información del sistema. El término control adaptable surgió inspirado en la biología, donde los seres vivos se adaptan a su medio ambiente pese a no conocerlo completamente.

En el diseño de sistemas de control es frecuente encontrarse con incertidumbres sobre el sistema a controlar. Esto ocurre por distintos motivos, a veces no existen instrumentos de medición adecuados o estos son muy caros; otras veces es imposible medir ciertos parámetros; a veces las mediciones son muy lentas; a veces los parámetros cambian en el tiempo por factores externos, como el clima o la iluminación; etc.

En el desarrollo del control adaptable es posible mencionar dos importantes corrientes. La primera es llamada control adaptable indirecto, que busca estimar la información faltante para luego controlar como si todo fuera conocido. El segundo método, control adaptable directo, busca identificar y controlar en una sola instancia.

Un hito importante en el desarrollo de esta técnica fue presentado en 1980, donde varios autores, trabajando en forma independiente, aplicaron en forma exitosa el control adaptable a sistemas lineales e invariantes, demostrando además la equivalencia entre control adaptable directo e indirecto para ese tipo de sistemas. A partir de entonces el control adaptable ha ido expandiéndose en diferentes direcciones, por ejemplo se ha expandido fuera del área académica hacia la industria y el mundo militar [12].

En el plano teórico se pretende aplicar a sistemas no lineales, como los sistemas caóticos, debido a las ventajas que promete este enfoque. Los sistemas caóticos son sensibles al cambio en sus parámetros, porque el comportamiento de un sistema dinámico puede pasar de no caótico a caótico, y viceversa, según cómo cambia un parámetro, incluso cuando el cambio es pequeño. Hoy es posible clasificar las técnicas adaptivas en tres grandes grupos:

- Control adaptivo directo: Pretende controlar sin conocer los parámetros y sin intentar identificarlos en forma explícita.
- Control adaptivo indirecto: Pretende controlar un sistema sin conocer los parámetros pero realizando una identificación explícita de los parámetros.
- Métodos para caja negra: pretenden controlar un sistema teniendo sólo acceso a datos de entrada y salida.

Varios de los métodos ya mencionados han sido modificados para ser adaptivos, en forma directa o indirecta, por ejemplo existe Adaptive Backstepping [11] y Adaptive Feedback Linearization [14].

En el ámbito del control adaptivo directo también se han modificados técnicas no adaptivas, pero en este trabajo se presentan principalmente técnicas basadas en funciones de Lyapunov, principalmente "Direct Cancellation" [6], para control adaptivo de sistemas caóticos.

A continuación se presenta una revisión de los trabajos más importantes, de los últimos diez años, en el ámbito de control adaptable para sistemas caóticos:

2.1. Sistemas de parámetros desconocidos y constantes

El control, y la sincronización, de sistemas caóticos con parámetros desconocidos y constantes es un tópico de gran interés por su posible aplicación en diversos ámbitos. El método que se presenta a continuación ha sido usado por varios autores ([25], [27], [39], [40], [45], [46], [47]) para controlar y sincronizar sistemas caóticos. Sea el sistema caótico:

$$\dot{x} = f(x) + G(x) \cdot \theta + u \quad (.1)$$

Donde $x \in R^n$ es el estado del sistema; $f(x) \in R^n$ y $G(x) \in R^{n \times m}$ son funciones conocidas; $\theta \in R^m$ es el vector de parámetros del sistema, que se asumen desconocidos pero constantes; y $u \in R^n$ corresponde al controlador. Se asume que sin controlador el origen es el único de punto de equilibrio y es inestable. Se propone usar el siguiente controlador:

$$u = -f(x) - G(x) \cdot \tilde{\theta} - \alpha \cdot x \quad (.2)$$

Donde $\alpha > 0$ es una constante arbitraria y $\tilde{\theta}$ es un estimador de θ cuya expresión se deducirá más adelante. Reemplazando (.1) en (.2) se tiene:

$$\dot{x} = G(x) \cdot \theta - G(x) \cdot \tilde{\theta} - \alpha \cdot x \quad (.3)$$

La justificación de este método se basa en construir una función de Lyapunov semi definida negativa tipo cuadrática:

$$V = 0.5(x^T x + \bar{\theta}^T \bar{\theta}) \quad (.4)$$

Donde $\bar{\theta} = \theta - \tilde{\theta}$, y por lo tanto se tiene que $\dot{\bar{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}}$. Calculando la derivada de V:

$$\dot{V} = x^T \dot{x} + \bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}} \quad (.5)$$

Reemplazando (.3) en (.5) se obtiene lo siguiente:

$$\dot{V} = x^T G(x) \theta - x^T G(x) \tilde{\theta} - \alpha x^T x + \bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}} \quad (.6)$$

Agrupando términos se tiene lo siguiente:

$$\dot{V} = x^T G(x) (\theta - \tilde{\theta}) - \alpha x^T x + \bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}} \quad (.7)$$

De esta expresión inmediatamente se sugiere que $\dot{\bar{\theta}}^T = -\dot{\tilde{\theta}}^T = -x^T G(x)$, con lo cual se cumple que \dot{V} es semi definida negativa:

$$\dot{V} = -\alpha x^T x \quad (.8)$$

Este método permite estabilizar un sistema en el origen. Cuando el punto de equilibrio no es el origen, para aplicar este método, es necesario conocer el punto equilibrio, como puede apreciarse en ([21], [44]).

Este método requiere un controlador de dimensión igual al estado. En [42] una variante del método anterior es usada para disminuir la dimensión del controlador, pero con el inconveniente de un, potencialmente exagerado, aumento en las acciones de control.

2.2. Sistemas de parámetros desconocidos y variantes en el tiempo

A continuación analizaremos el caso del control de caos cuando los parámetros del sistema caótico son desconocidos y varían con el tiempo.

2.2.1. Parámetros variando en forma acotada y arbitraria

Tomando como punto de partida el trabajo de [29] en [22] se propone usar un esquema para estabilizar sistemas caóticos de parámetros desconocidos, variantes en el tiempo pero acotados. El esquema es válido para sistemas de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\theta + Bu$$

Donde $x \in R^n$ es el estado del sistema; $f(x) \in R^n$ y $F(x) \in R^{n \times p}$ son funciones conocidas y continuamente diferenciables; $B \in R^{n \times m}$ es una matriz constante, invertible y desconocida; $u \in R^m$ corresponde al controlador; y $\theta(t) \in R^m$ corresponde al vector de parámetros, el cual es variable y desconocido, pero cumple que:

$$\exists \beta \in R, \|\theta(t)\| < \beta$$

Siendo β desconocido. Se asume que $f(0) = 0$ y $F(0) = 0$, con lo cual el origen resulta ser un punto de equilibrio. Con esto se pretende estabilizar el sistema en el origen usando un controlador acotado. Para esto se define:

$$\hat{f}(x) = f(x) - A_m x(t)$$

Donde $A_m \in R^{n \times n}$ es cualquier matriz asintóticamente estable. También es necesario definir como P a la matriz positiva definida y simétrica que es solución de la ecuación:

$$A_m^T P + P A_m = -Q$$

Donde $Q \in R^{n \times n}$ es cualquier matriz simétrica y definida positiva, tal que $0 < 2\varepsilon < \lambda_{\min}(Q)$, con $\lambda_{\min}(Q)$ el menor valor propio de Q . Se propone usar el siguiente controlador:

$$u = K_1(t)[- \hat{f}(x) + \alpha(e, x, \hat{\beta})]$$

Donde las funciones α y K_1 se definen:

$$\alpha(x, \hat{\beta}) = -\frac{F(x)\mu(x)\hat{\beta}^2}{\|\mu(x)\|\hat{\beta} + \varepsilon\|x\|^2} \quad \dot{K}_1 = K_1 P x [f(x) - \alpha(x, \hat{\beta})]^T K_1^T K_1$$

A su vez las funciones β y μ quedan definidas por:

$$\dot{\hat{\beta}} = \gamma \|\mu(x)\| \quad (\gamma > 0) \quad \mu^T(x) = x^T P F(x)$$

Con esto es posible demostrar dos cosas, primero el controlador es local y uniformemente acotado; y segundo el controlador logra que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Una variante del método anterior es propuesta en [22], la cual permite el seguimiento de trayectoria, pero requiere más información a priori del sistema a controlar.

2.2.2. Parámetros variando en forma aleatoria

En [37] se presenta un esquema para controlar sistemas caóticos cuyos parámetros varían en forma aleatoria en el tiempo. Este método se aplica sistemas de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\theta + G(x)u$$

Donde $x \in R^n$ es el estado del sistema, $f(x) \in R^n$, $F(x) \in R^{n \times m}$ y $G(x) \in R^{n \times n}$ son funciones conocidas; $u \in R^n$ corresponde al controlador; $\theta \in R^m$ es el vector de parámetros y cumple que:

$$\theta = \bar{\theta} + \Delta \dot{W}$$

Considerando que $\Delta \in R^{n \times m}$ es una matriz arbitraria y conocida, que puede variar con el tiempo o con el estado, pero que es siempre acotada; W es un vector proceso de Wiener (también llamado proceso browniano estándar) y $\bar{\theta}$ es un vector constante. Se asume que:

- $G(x)$ es siempre invertible.
- Las funciones $f(x)$, $F(x)$ y $G(x)$ son funciones derivables y con primera derivada continua.
- Se conoce una cota para $\bar{\theta}$: $\|\bar{\theta}\|_2 < \Theta$
- Se conoce una cota para $F(x)$: $\|F(x)\|_2 < M$
- Se conoce una cota para Δ : $\|\Delta\|_2 < N$

Sea $e = x - \bar{x}$ y $k > 0$ una constante arbitraria. Se define:

$$S = \left\{ e \in R^n \left| E[e^T e] \leq \frac{n \cdot N^2 \cdot M^2}{k} \right. \right\}$$

Sea \bar{x} una órbita inestable y periódica definida por:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) + F(\bar{x}) \cdot \bar{\theta}$$

Se busca que $\|x - \bar{x}\|_2 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ (en este caso $\|x(t)\|_2 = (E[x^T(t)x(t)]^{1/2})$). Para esto se propone usar el siguiente controlador:

$$u = -G^{-1}(x) \cdot [f(x) - f(\bar{x}) + (F(x) - F(\bar{x})) \cdot \alpha + 2 \cdot \lambda \cdot \Theta \cdot \|F(x) - F(\bar{x})\|_2 \cdot \text{sign}(x - \bar{x}) + k(x - \bar{x})]$$

Donde las funciones λ y $\dot{\alpha}$ se definen como se muestra a continuación:

$$\lambda = \begin{cases} 0, (x - \bar{x}) \notin S \\ 1, (x - \bar{x}) \in S \end{cases}$$

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} [F(x) - F(\bar{x})]^T (x - \bar{x}), (x - \bar{x}) \notin S \\ 0, (x - \bar{x}) \in S \end{cases}$$

Con esto se logra que:

$$E[(x(t) - \bar{x}(t))^T (x(t) - \bar{x}(t))] \leq \frac{n \cdot N^2 \cdot M^2}{k}, t \rightarrow \infty$$

2.3. Controladores con incertidumbre en la componente no lineal

Se presentan dos enfoques; uno de orden completo (cuando se tiene acceso al vector de estado completo del sistema) y otro cuando se tiene acceso solamente las variables de salida del sistema.

2.3.1. Control adaptivo de orden completo

El siguiente método propuesto en [41] pretende estabilizar el sistema en el origen, sólo el estado del sistema. Sea un sistema caótico de la forma siguiente:

$$\dot{x} = Ax + f(x) + u$$

Donde $x \in R^n$ es el estado del sistema; $f(x) \in R^n$ es una función desconocida; $u \in R^n$ corresponde al controlador y $A \in R^{n \times n}$ es una matriz de parámetros desconocidos. Se asume:

- $f(t) \in L_2 \cap L_\infty$ y $\dot{f}(t) \in L_\infty$, lo cual implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$
- Existe k^* tal que $(A - k^* I)$ es una matriz definida o semi definida negativa.

Sea $k = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ una matriz diagonal, tal que los elementos de la diagonal son de la siguiente forma:

$$\dot{k}_i = x_i^2$$

Se propone usar el siguiente controlador:

$$u = -k \cdot x$$

Con lo cual es posible demostrar que el sistema resulta estable o asintóticamente estable según la matriz $(A - k * I)$ sea semi definida o definida negativa.

2.3.2. Controladores adaptivos de orden reducido

En general no es siempre posible aplicar acciones de control a un sistema completo. A veces es físicamente imposible, otras veces resulta muy caro, puede ser riesgoso, etc.

En [43] se propone un método para diseñar controladores de orden reducido. Sea un sistema dinámico de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -AX + f(X, Y) \\ \dot{Y} &= g(X, Y) + U\end{aligned}$$

Donde $X \in R^n$, $Y \in R^m$ son los vectores de estado del sistema. La matriz $A \in R^{n \times n}$. Se asume que $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ y $g: R^n \times R^m \rightarrow R^m$ son funciones no lineales de X e Y, y cumplen que $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 0$. Para poder controlar el sistema los autores requieren los siguientes supuestos:

- Existen una matriz definida positiva P y una matriz definida positiva diagonal Q ($Q = \text{diag}[q_j], j = 1, \dots, m$), satisfaciendo la siguiente desigualdad: $X^T P f(X, Y) + Y^T Q g(X, Y) \leq X^T \Phi X + Y^T \Psi Y$, con Φ una matriz simétrica y Ψ una matriz diagonal ($\Psi = \text{diag}[\Psi_j], j = 1, \dots, m$).
- Existe $\mu > 0$ tal que la matriz $PA + A^T P - \mu P - 2\Phi$ es definida positiva y se cumple que $\left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\| \leq M \exp\left(-\frac{\mu t}{2}\right)$, para $t \geq 0$, con $M > 0$. Con esto se cumple que el siguiente controlador:

$$\begin{aligned}U(Y) &= -K(t)Y \text{ con } K(t) = \text{diag}(k_j(t)) \\ \dot{k}_j(t) &= \theta_j y_j^2 \exp(\mu t) \quad j = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Que el sistema y su controlador forman un nuevo sistema, el cual es global y exponencialmente estable. A continuación se presenta un resumen de la demostración, sea la siguiente función de Lyapunov:

$$V(t) = (X^T P X + Y^T Q Y) \exp(\mu t) + \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\theta_j} (k_j - k_j^*)^2$$

$$\dot{V} = [X^T P(-AX + f(X, Y)) + (-AX + f(X, Y))^T P X + 2Y^T Q g(X, Y) - 2Y^T Q K Y] \exp(\mu t)$$

$$\begin{aligned}
& + \mu(X^T P X + Y^T Q Y) \exp(\mu t) + 2 \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\theta_j} (k_j - k_j^*) \theta_j y_j^2 \exp(\mu t) \\
= & \left\{ -X^T (PA + A^T P - \mu P) X + 2X^T P f(X, Y) + 2Y^T Q g(X, Y) + \mu Y^T Q Y - 2Y^T Q K^* Y \right\} \exp(\mu t) \\
\leq & - \left\{ X^T (PA + A^T P - \mu P - 2\Phi) X + 2Y^T Q (K^* - \Psi - \mu I) Y \right\} \exp(\mu t)
\end{aligned}$$

Definiendo λ_1 como el mínimo de los valores propios de las matrices $(PA + A^T P - \mu P - 2\Phi)$ y $Q(K^* - \Psi - \mu I)$ se tiene lo siguiente:

$$\dot{V} \leq -\lambda_1 \begin{bmatrix} X^T & Y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \exp(\mu t)$$

Definiendo λ_2 como el mínimo de los valores propios de las matrices P y Q (las cuales por ser definidas positivas tiene valores propios positivos), se tiene que:

$$\begin{bmatrix} X^T & Y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \leq \frac{1}{\lambda_2} (X^T P X + Y^T Q Y) \leq \frac{1}{\lambda_2} V(t) \exp(-\mu t) \leq \frac{1}{\lambda_2} V(0) \exp(-\mu t)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\| \leq M \exp\left(-\frac{\mu}{2} t\right) \text{ con } M = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \sqrt{V(0)} > 0$$

Con lo cual se obtiene el resultado.

En [48] se presentan dos esquemas de control adaptivo de orden reducido para el sistema de Lorenz, que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x) + u_1 \\
\dot{y} &= \rho x - y - xz + u_2 \\
\dot{z} &= xy - \beta z + u_3
\end{aligned}$$

En el trabajo ya mencionado se proponen dos esquemas adaptivos de control de orden reducido para el sistema de Lorenz. El primer método consiste en:

$$u_1 = -\hat{k}_1 x, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad \text{con } \dot{\hat{k}}_1 = \gamma x^2$$

Donde γ es una ganancia adaptiva. El segundo controlador adaptivo de orden reducido es el siguiente:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\hat{k}_2 y, \quad u_3 = 0, \quad \text{con } \dot{\hat{k}}_2 = \gamma y^2$$

Donde γ es, de nuevo, una ganancia adaptiva. Este esquema es sólo aplicable al sistema de Lorenz, pero su sencillez y elegancia lo hacen un referente interesante a la momento de hablar de control adaptivo para sistemas caóticos.

En [49] los autores proponen un nuevo método para estabilizar un sistema caótico, sin perder generalidad se asume que:

$$\dot{x} = f(x)$$

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que el origen es un punto de equilibrio. Para alcanzar estabilidad se asume que existe un cambio de coordenadas no singular $y = Tx$, tal que el sistema anterior puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= g_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= g_2(z_1, z_2)\end{aligned}$$

También se asume que el subsistema $\dot{z}_2 = g_2(0, z_2)$ es uniformemente exponencialmente estable cerca del origen $z_2 = 0$ para todo z_1 . Además se requiere que $g_2(z_1, z_2)$ sea suave en una vecindad de $z_1 = 0$.

Para lograr estabilizar el sistema en el punto de equilibrio $x_e = 0$ se agrega el siguiente control:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= g_1(z_1, z_2) + u_1 = g_1(z_1, z_2) + k_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= g_2(z_1, z_2)\end{aligned}$$

Donde se el parámetro k_1 se ajuste de acuerdo a la siguiente ley de ajuste:

$$\dot{k}_1 = -\gamma \|z_1\|^2$$

Con γ una ganancia adaptiva arbitraria pero de signo positivo. Con esto es posible estabilizar el sistema a su punto de equilibrio $x_e = 0$

2.4. Controlador en presencia de perturbaciones

En [32] se propone un controlador para un sistema que puede ser no lineal en los parámetros. Considérese un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t) + d(t)$$

Donde $x \in \Omega \subseteq R^n$ es el estado del sistema, el cual se asume disponible para medirlo. El vector $u \in R^n$ corresponde al controlador. El vector $d \in R^n$ es una perturbación externa, con cota superior δ tal que $\|d(t)\| \leq \delta < \infty$, siendo δ desconocida. Se asume que $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ es una función no lineal desconocida, que satisface la condición Lipschitz:

$$\|f(x, t) - f(x^*, t)\| \leq L \|x - x^*\|$$

Donde L es un escalar positivo y desconocido; x^* es un punto de equilibrio, es decir $f(x) = 0$ y $f(\dot{x}) = 0$; $G : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R^{n \times n}$ es una función suave, tal que para asegurar la controlabilidad del sistema se requiere que $G(x, t) \neq 0 \forall x \in R^n$, y se asume que:

$$G(x, t) \geq \inf_{x, t} \underline{\lambda}(G)I > 0 \forall x \in R^n$$

Donde $\underline{\lambda}(G) = \underline{g}$ representa el menor valor propio de la matriz G e I representa la matriz identidad de la dimensión apropiada.

Sea $\tilde{x}(t)$ una señal arbitraria de referencia, con primera derivada acotada, es decir $\|\dot{\tilde{x}}(t)\|_{\infty} \leq \gamma$. El objetivo de control es encontrar una entrada u tal que todas las señales en el lazo cerrado sean acotadas y que se cumpla que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$

Es decir se busca un seguimiento asintótico de la trayectoria de referencia. Para esto se proponen dos esquemas de control similares.

Esquema 1:

$$u = \theta e + \mu \operatorname{sgn}(e) \quad \dot{\theta} = -k_1 \|e\|^2 \quad \dot{\mu} = -k_2 \|e\|_1$$

Donde $\operatorname{sgn}(\cdot)$ corresponde a la función signo; k_1, k_2 son constantes arbitrarias positivas. Para demostrar que el controlador es estable se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$V(e, \theta, \mu) = \frac{1}{2} e^T e + \frac{g}{2k_1} (\theta - \hat{\theta})^2 + \frac{g}{2k_2} (\mu - \hat{\mu})$$

Cuya derivada se presenta a continuación:

$$\dot{V} = e^T (f + Gu + d - \dot{\tilde{x}}) + \frac{g}{k_1} \dot{\theta} (\theta - \hat{\theta})^2 + \frac{g}{2k_2} \dot{\mu} (\mu - \hat{\mu})$$

Acotando de forma adecuada se prueba que:

$$\dot{V} \leq (L + \underline{g}\hat{\theta}) \|e\|^2 + (\delta + \gamma + L\sigma + \underline{g}\hat{\mu}) \|e\|_1$$

Como existen $\hat{\theta}$ y $\hat{\mu}$, tales que $(L + \underline{g}\hat{\theta}) < 0$ y $(\delta + \gamma + L\sigma + \underline{g}\hat{\mu}) < 0$ se tiene el resultado.

Esquema 2

Sea el siguiente controlador:

$$u = -\bar{k}e + (\theta\|x\|_\infty + \mu) \operatorname{sgn}(e) \quad \dot{\theta} = -k_1\|e\|_1\|x\|_\infty \quad \dot{\mu} = -k_2\|e\|_1$$

Donde k_1 , k_2 y \bar{k} son constantes arbitrarias positivas. Para probar el resultado se usa la siguiente función de Lyapunov:

$$V(e, \theta, \mu) = \frac{1}{2}e^T e + \frac{g}{2k_1}(\theta - \hat{\theta})^2 + \frac{g}{2k_2}(\mu - \hat{\mu})$$

Con derivada:

$$\dot{V} = e^T (f + Gu + d - \dot{\tilde{x}}) + \frac{g}{k_1}\dot{\theta}(\theta - \hat{\theta})^2 + \frac{g}{2k_2}\dot{\mu}(\mu - \hat{\mu})$$

Expresión que puede acotarse de la siguiente manera:

$$\dot{V} \leq -\bar{k}g\|e\|^2 + (L\sqrt{n} + g\hat{\theta})\|e\|_1\|x\|_\infty + (\delta + \gamma + g\hat{\mu})\|e\|_1$$

Como existen $\hat{\theta}$ y $\hat{\mu}$, tales que $(L\sqrt{n} + g\hat{\theta}) < 0$ y $(\delta + \gamma + g\hat{\mu}) < 0$ se tiene el resultado.

3. El Sistema de Lorenz y su Generalización

En este Capítulo se describe en detalle el sistema de Lorenz generalizado y sus principales propiedades. Este sistema será nuestro objeto de estudio para el diseño de estrategias de control que se describen en el Capítulo 4.

3.1. Sistema de Lorenz

Un interesante punto de partida para el estudio del caos son las ecuaciones de Lorenz, tanto por su historia como por sus propiedades matemáticas. Además se ha reportado que el mismo conjunto de ecuaciones modela el comportamiento de algunos láseres y dínamos, como se aprecia en ([24], [28]).

El sistema de Lorenz se obtiene como resultado de modelar el comportamiento de un fluido, aire en el caso de la atmósfera, que se mueve entre dos placas paralelas. La placa de abajo representa la tierra, y está a una temperatura T_w . La placa superior representa otra capa de la atmósfera o el espacio exterior, y se encuentra a temperatura T_c , con $T_c < T_w$. Se asume que el sistema es infinito hacia la derecha y hacia la izquierda, como se muestra en la Figura 3.1.

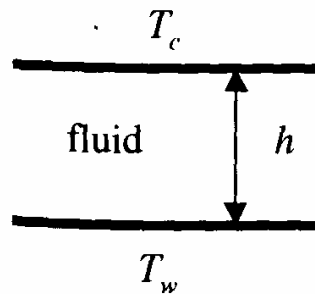


Figura 3.1.- Esquema que representa un modelo simple atmosférico.

Si la diferencia de temperatura es pequeña el fluido se mantiene quieto por su viscosidad, y el calor fluye lentamente a través del aire hacia arriba. Pero cuando la temperatura aumente el fluido empieza a moverse, como se muestra en la Figura 3.2.

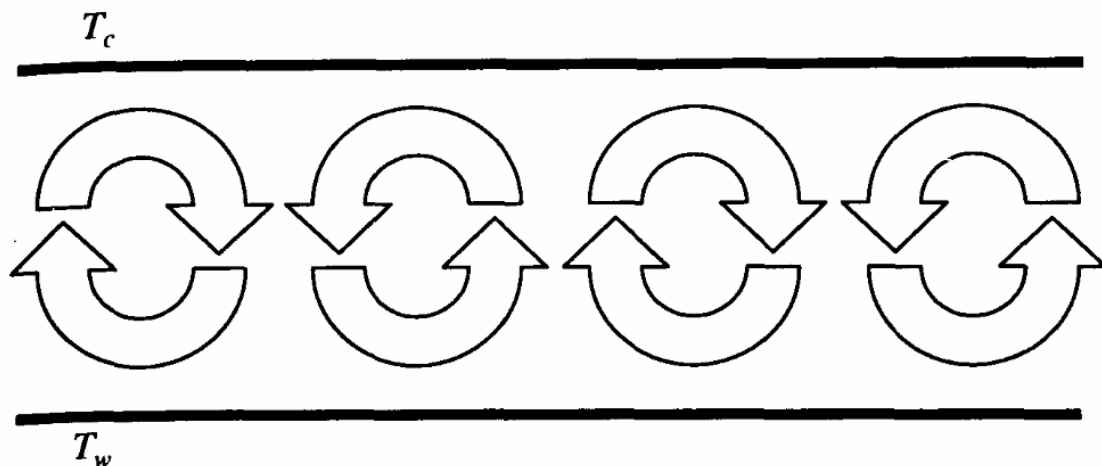


Figura 3.2.- Esquema que representa movimiento del fluido.

La deducción matemática de las ecuaciones de Lorenz puede ser encontrada en [10]. La variable X esta relacionada con la dependencia temporal de la llamada función de fluido a chorro. La variable Y es proporcional a la diferencia de temperatura entre el fluido ascendente y el descendente a una altura dada. Mientras que Z es proporcional a la desviación de la linealidad de la temperatura como función de la altura. El parámetro p es llamado número de “Prandtl”, que en términos aproximados, compara la pérdida de energía debido a viscosidad con la pérdida de energía debida a conducción térmica. El parámetro r es proporcional al número de Rayleigh, el cual es una medida adimensional de la diferencia de temperatura entre la capa inferior y la superior del fluido. El parámetro b esta dado por la razón entre la altura del sistema y el radio de los círculos donde se mueve el fluido. A continuación se presenta el sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= p(Y - X) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \quad (3.1) \\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}$$

Sin embargo, como se demuestra en [20], es posible reescribir el sistema de Lorenz, mediante un cambio de variables apropiado, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Este sistema de ecuaciones (3.2) se denomina sistema generalizado de Lorenz en forma canónica, y es caótico en la medida que se cumpla que $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$. Esta expresión permite relacionar el sistema de Lorenz generalizado con otros sistemas estudiados en la literatura. En [20] se mencionan como varía la equivalencia según varíe el parámetro τ :

- Si $\tau \in (-\infty, -1)$ entonces es equivalente al sistema hiperbólico de Lorenz
- Si $\tau = -1$ entonces es equivalente al modelo de Shimizu-Morioka (el cual es equivalente al sistema Liu-Liu-Liu-Liu)
- Si $\tau \in (-1, 0)$ entonces es equivalente al sistema de Chen
- Si $\tau = 0$ entonces es equivalente al sistema Lü
- Si $\tau \in (0, \infty)$ entonces es equivalente al sistema de Lorenz
-

Cabe destacar que el sistema generalizado de Lorenz tiene 3 puntos de equilibrio:

$$E = (0, 0, 0)^T$$

$$\begin{aligned}E^+ &= \left(\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \tau \lambda_1)}}, \lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \tau \lambda_1)}}, \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)^T \\ E^- &= \left(-\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \tau \lambda_1)}}, -\lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \tau \lambda_1)}}, \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)^T\end{aligned}$$

3.2. Propiedades matemáticas del sistema generalizado de Lorenz

El sistema generalizado de Lorenz (3.2) puede escribirse de la forma que sigue:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 - z_1 z_3 + z_2 z_3 + u_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_3 + u_2 \\ \dot{z}_3 &= \lambda_3 z_3 + z_1^2 + \tau z_1 z_2 - z_1 z_2 - \tau z_2^2 + u_3\end{aligned}\quad (3.3)$$

Una técnica usada para estudiar sistemas dinámicos consiste en linealizar cerca de un punto de interés para luego analizar el sistema lineal resultante. Para linealizar un sistema dinámico es necesario que las ecuaciones que describen el sistema posean derivadas continuas condición que garantiza la existencia de una aproximación lineal. Con este método es posible simplificar el análisis matemático pues donde la aproximación sea válida la información sobre la aproximación lineal será también cierta para el sistema original.

Para el presente trabajo se desea conocer la controlabilidad asintótica del sistema cerca de sus puntos de equilibrios, empezando por el origen. Sea E el punto de equilibrio donde se desea linealizar, se asume que el sistema se puede expresar como se muestra a continuación:

$$\dot{\bar{z}} = F(\bar{z}, \bar{u})$$

Donde $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathfrak{R}^3$, $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathfrak{R}^3$ y $F : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$. Si $E = (\bar{z}_E^T, \bar{u}_E^T)^T$ la expresión general para linealizar un sistema está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{\bar{z}} \approx \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right|_E (\bar{z} - \bar{z}_E) + \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{u}} \right|_E (\bar{u} - \bar{u}_E)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - z_3 & z_3 & -z_1 + z_2 \\ -z_3 & \lambda_2 + z_3 & -z_1 + z_2 \\ 2z_1 - \tau z_2 - z_2 & \tau z_1 - z_1 - 2\tau z_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Asumiendo que el punto de equilibrio es el origen ($z_E = (0,0,0)^T$ y $u_E = (0,0,0)^T$) es posible determinar que:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right|_E = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{u}} \right|_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual el sistema linealizado tiene la siguiente apariencia:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + u_1 \\
\dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + u_2 \\
\dot{z}_3 &= \lambda_3 z_3 + u_3
\end{aligned} \quad (3.4)$$

En notación matricial se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Según se demuestra en [18] las propiedades de la aproximación lineal (3.5) se convierten en condiciones necesarias para la estabilidad asintótica del sistema no linealizado. Para que el sistema esté en régimen caótico es necesario que se cumpla la condición $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$. Para estudiar esta aproximación lineal es necesario centrarse en la siguiente matriz:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$$

Esta matriz cuadrada permite entender la dinámica del sistema linealizado. Como se trata de una matriz diagonal se pueden determinar sus valores propios mirando los elementos presentes en la diagonal. Para que el sistema sea asintóticamente estable es necesario modificar la dinámica del sistema por medio de las entradas de control. Inmediatamente se puede observar que la dinámica sin señales de control genera un sistema no estable, pues λ_1 es positivo si el sistema está en régimen caótico. Siguiendo el mismo razonamiento se puede concluir que cualquier combinación de señales de control que no incluya a u_1 resultará en un sistema no estable. Así es posible decir que sólo las siguientes combinaciones de señales de control $\{u_1\}$; $\{u_1, u_2\}$ y $\{u_1, u_3\}$ pueden dar lugar a un lazo cerrado de control estable. En cambio las combinaciones de señales de control $\{u_2\}$; $\{u_3\}$ y $\{u_2, u_3\}$ no pueden dar lugar a lazos cerrados de control estables, y por lo tanto su estudio se puede desechar. Finalmente cabe decir que señales de control de orden completo (usando u_1 , u_2 y u_3) pueden estabilizar asintóticamente el sistema pues incluye a la señal de control u_1 .

4. Diseño de controladores para el sistema generalizado de Lorenz

En este Capítulo se describe en detalle tres estrategias de control originales para controlar el sistema de Lorenz generalizado (3.3), usando dos señales de control y también solamente una. En los tres casos se demuestra analíticamente que todas las señales del sistema convergen asintóticamente a cero.

4.1. Método de control usando señales u_1 y u_2

Sea desea controlar el sistema generalizado de Lorenz usando sólo las señales de control u_1 y u_2 . Se necesita por tanto dar una descripción matemática de las señales de control a aplicar al sistema para que éste sea asintóticamente estable en lazo cerrado. Para esto se propone usar las siguientes señales de control:

$$u_1 = -R_1 z_1 - \hat{\lambda}_1 z_1 \quad u_2 = z_1 z_3 - \hat{\tau} z_1 z_3 + \hat{\tau} z_2 z_3 - z_2 z_3 - R_2 z_2 \quad (4.1.1)$$

Donde R_1 y R_2 son ganancias de realimentación, mientras que $\hat{\lambda}_1$ y $\hat{\tau}$ son los estimadores de λ_1 y τ respectivamente, y se ajustan mediante las siguientes leyes:

$$\dot{\hat{\lambda}}_1 = A_1 z_1^2 \quad \dot{\hat{\tau}} = A_2 (z_1 z_2 z_3 - z_2^2 z_3) \quad (4.1.2)$$

Donde A_1 y A_2 son ganancias adaptivas.

Teorema 4.1

Dados el sistema generalizado de Lorenz (3.3), la leyes de control (4.1.1) y las leyes de ajuste (4.1.2), entonces el sistema resultante es asintóticamente estable.

Demostración

Se propone mostrar que es posible elegir una función cuadrática, por lo tanto definida positiva, como candidata a función de Lyapunov y que con las señales de control definidas como en (4.1) y (4.2) esta función candidata es una función de Lyapunov, es decir su derivada temporal es semidefinida, para el sistema en lazo cerrado. Sea la siguiente función cuadrática:

$$V(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + A_1^{-1} \bar{\lambda}^2 + A_2^{-1} \bar{\tau}^2}{2} \quad (4.1.3)$$

Donde $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 - \hat{\lambda}_1$ y $\bar{\tau} = \tau - \hat{\tau}$ son los errores de estimación paramétrica. Esta función cuadrática es definida positiva siempre que A_1^{-1} y A_2^{-1} sean positivos. Para obtener el resultado es necesario que la derivada de V sea al menos semi definida negativa. Para probar esta afirmación se comenzará considerando la derivada de (4.3):

$$\dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1 \dot{\bar{\lambda}}_1 + A_2^{-1} \bar{\tau} \dot{\bar{\tau}} \quad (4.1.4)$$

Ahora se procede a reemplazar \dot{z}_1 , \dot{z}_2 y \dot{z}_3 desde (3.3), con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) &= z_1(\lambda_1 z_1 - z_1 z_3 + z_2 z_3 + u_1) + z_2(\lambda_2 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_3 + u_2) \\ &+ z_3(\lambda_3 z_3 + z_1^2 + \tau z_1 z_2 - z_1 z_2 - \tau z_2^2) + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1 \dot{\bar{\lambda}}_1 + A_2^{-1} \bar{\tau} \dot{\bar{\tau}} \quad (4.1.5) \end{aligned}$$

Multiplicando y cancelando términos similares se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) &= \lambda_1 z_1^2 + z_1 u_1 + \lambda_2 z_2^2 + z_2^2 z_3 + z_2 u_2 \\ &+ \lambda_3 z_3^2 + \tau z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 - \tau z_2^2 z_3 + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1 \dot{\bar{\lambda}}_1 + A_2^{-1} \bar{\tau} \dot{\bar{\tau}} \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

Dado que $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 - \hat{\lambda}_1$ y $\bar{\tau} = \tau - \hat{\tau}$ se tiene que:

$$\dot{\bar{\lambda}}_1 = -\dot{\hat{\lambda}}_1 \quad \dot{\bar{\tau}} = -\dot{\hat{\tau}} \quad (4.1.7)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.7) en (4.6) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) &= \lambda_1 z_1^2 + z_1 u_1 + \lambda_2 z_2^2 + z_2^2 z_3 + z_2 u_2 \\ &+ \lambda_3 z_3^2 + \tau z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 - \tau z_2^2 z_3 - A_1^{-1} (\lambda_1 - \hat{\lambda}_1) \dot{\hat{\lambda}}_1 - A_2^{-1} (\tau - \hat{\tau}) \dot{\hat{\tau}} \quad (4.1.8) \end{aligned}$$

Esta a su vez se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) &= \lambda_1 z_1^2 + z_1 u_1 + \lambda_2 z_2^2 + z_2^2 z_3 + z_2 u_2 \\ &+ \lambda_3 z_3^2 + \tau z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 - \tau z_2^2 z_3 - A_1^{-1} \lambda_1 \dot{\hat{\lambda}}_1 + A_1^{-1} \hat{\lambda}_1 \dot{\hat{\lambda}}_1 - A_2^{-1} \tau \dot{\hat{\tau}} + A_2^{-1} \hat{\tau} \dot{\hat{\tau}} \quad (4.1.9) \end{aligned}$$

Reemplazando en (4.1.9) los valores de u_1 , u_2 , $\hat{\lambda}_1$ y $\hat{\tau}$ dados por (4.1.1) y (4.1.2) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \lambda_1 z_1^2 + z_1(-R_1 z_1 - \hat{\lambda}_1 z_1) + \lambda_2 z_2^2 + z_2^2 z_3 + z_2(z_1 z_3 - \hat{\tau} z_1 z_3 - \hat{\tau} z_2 z_3 - z_2 z_3 - R_2 z_2) \\ &+ \lambda_3 z_3^2 + \tau z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 - \tau z_2^2 z_3 - A_1^{-1} A_1 \lambda_1 z_1^2 + A_1^{-1} A_1 \hat{\lambda}_1 z_1^2 - A_2^{-1} A_2 \tau (z_1 z_2 z_3 + z_2^2 z_3) + A_2^{-1} A_2 \hat{\tau} (z_1 z_2 z_3 + z_2^2 z_3) \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

Multiplicando y cancelando términos semejantes se tiene que:

$$\dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) = -R_1 z_1^2 + (\lambda_2 - R_2) z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 \quad (4.1.11)$$

Para que (4.1.11) sea una función semi definida negativa es necesario que $R_1 > 0$ y que $\lambda_2 - R_2 < 0$, dado que $\lambda_3 < 0$. Si se cumplen las condiciones mencionadas es posible aplicar el corolario del lema de Barbalat, como aparece mencionado en [12] con lo que se tiene que

$\lim_{t \rightarrow \infty} (z_1, z_2, z_3) = 0$. Además todas las señales del sistema formado por (3.3), (4.1.1) y (4.1.2) permanecen acotadas. Sin embargo no se logra, necesariamente, convergencia a cero de los errores de estimación paramétrico, condición que no es necesaria en este caso. Para tener convergencia a cero de los errores paramétricos es necesario que se cumplan condiciones de excitación persistente en las entradas de control u_1 y u_2 , como se señala en [12].

A continuación se presenta una simulación para ilustrar el comportamiento del sistema bajo control. Para esta simulación se escogieron $\lambda_2 = -3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_3 = -1$; $z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = 1$; $\hat{\lambda}(0) = \hat{\tau}(0) = 0$. En la figura 4.1.1 se muestra la evolución temporal de las variables de estado z_1 , z_2 y z_3 , mientras que en 4.1.2 se muestra la evolución de las señales de control.

Estado en función del tiempo

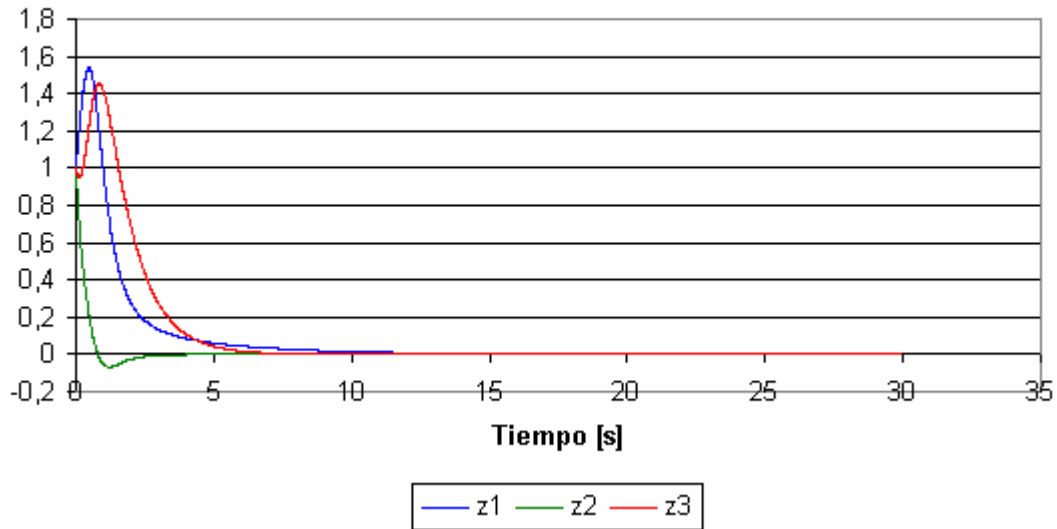


Figura 4.1.1: Evolución de las variables de estado

Esfuerzo de control en función del tiempo

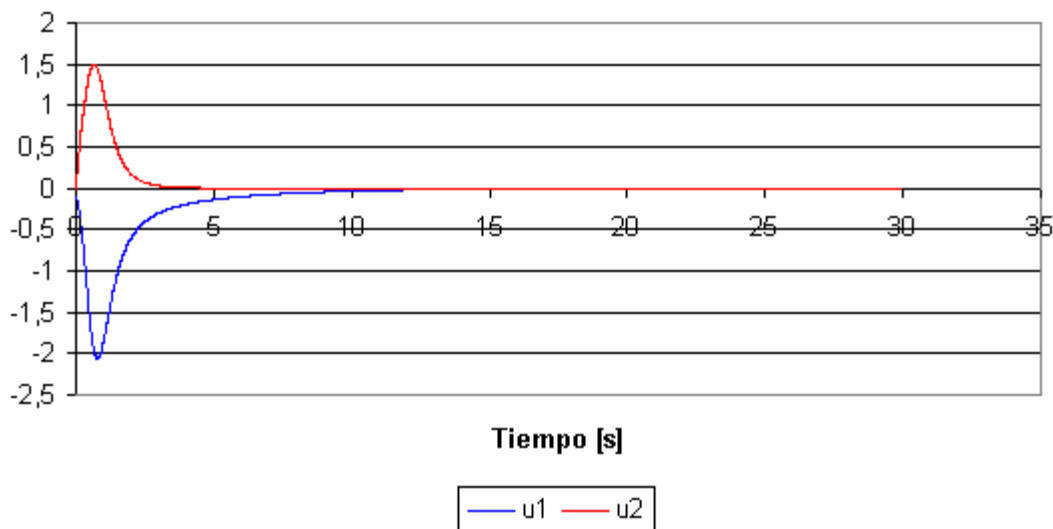


Figura 4.1.2: Evolución del esfuerzo de control para el esquema que usa señales u_1 y u_2 .

4.2. Método de control usando señales u_1 y u_3

Sea desea controlar el sistema generalizado de Lorenz usando sólo las señales de control u_1 y u_3 . Se necesita por tanto dar una descripción matemática de las señales de control a aplicar al sistema para que esta sea asintóticamente estable en lazo cerrado. Para esto se propone usar las siguientes señales de control:

$$u_1 = -R_1 z_1 - \hat{\lambda}_1 z_1 \quad u_3 = z_1 z_2 - z_2^2 - \hat{t}(z_1 z_2 - z_2^2) - R_2 z_3 \quad (4.2.1)$$

Donde $\hat{\lambda}_1$ y \hat{t} se definen de la siguiente manera:

$$\hat{\lambda}_1 = A_1 z_1^2 \quad \hat{t} = A_2 (z_1 z_2 z_3 - z_2^2 z_3) \quad (4.2.2)$$

Teorema 4.2

Dado el sistema generalizado de Lorenz (3.3), las leyes de control (4.2.1) y las leyes de ajuste (4.2.2) entonces el sistema resultante es asintóticamente estable.

Demostración.

Se propone mostrar que es posible elegir una función cuadrática como candidata a función de Lyapunov y que con las señales de control definidas como ya se mencionó esta función candidata es una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado. Sea la siguiente función cuadrática:

$$V(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1^2 + A_2^{-1} \bar{\tau}^2}{2} \quad (4.2.3)$$

Donde $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 - \hat{\lambda}_1$ y $\bar{\tau} = \tau - \hat{\tau}$. Esta función cuadrática es definida positiva si A_1^{-1} y A_2^{-1} son positivos. Para tener el resultado es necesario que su derivada sea al menos semi definida negativa. Para probar esta afirmación se comenzará considerando la derivada de (4.2.3):

$$\dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1 \dot{\bar{\lambda}}_1 + A_2^{-1} \bar{\tau} \dot{\bar{\tau}} \quad (4.2.4)$$

Ahora hay que se procede a reemplazar \dot{z}_1 , \dot{z}_2 y \dot{z}_3 desde (3.3), con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) &= z_1(\lambda_1 z_1 - z_1 z_3 + z_2 z_3 + u_1) + z_2(\lambda_2 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_3) \\ &+ z_3(\lambda_3 z_3 + z_1^2 + \tau z_1 z_2 - z_1 z_2 + \tau z_2^2 + u_3) + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1 \dot{\bar{\lambda}}_1 + A_2^{-1} \bar{\tau} \dot{\bar{\tau}} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Multiplicando y cancelando términos similares se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) &= \lambda_1 z_1^2 + z_1 u_1 + \lambda_2 z_2^2 + z_2^2 z_3 \\ &+ \lambda_3 z_3^2 + \tau z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 + \tau z_2^2 z_3 - R_2 z_3^2 + z_3 u_3 + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1 \dot{\bar{\lambda}}_1 + A_2^{-1} \bar{\tau} \dot{\bar{\tau}} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Definiendo como $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 - \hat{\lambda}_1$ y $\bar{\tau} = \tau - \hat{\tau}$ se tiene que:

$$\dot{\bar{\lambda}}_1 = -\dot{\hat{\lambda}}_1 \quad \dot{\bar{\tau}} = -\dot{\hat{\tau}} \quad (4.2.7)$$

Reemplazando (4.2.7) en (4.2.6) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) &= \lambda_1 z_1^2 + z_1 u_1 + \lambda_2 z_2^2 + z_2^2 z_3 \\ &+ \lambda_3 z_3^2 + \tau z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 + \tau z_2^2 z_3 - R_2 z_3^2 + z_3 u_3 - A_1^{-1} (\lambda_1 - \hat{\lambda}_1) \dot{\hat{\lambda}}_1 - A_2^{-1} (\tau - \hat{\tau}) \dot{\hat{\tau}} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Esto a su vez se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) &= \lambda_1 z_1^2 + z_1 u_1 + \lambda_2 z_2^2 + z_2^2 z_3 \\ &+ \lambda_3 z_3^2 + \tau z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 + \tau z_2^2 z_3 - R_2 z_3^2 + z_3 u_3 - A_1^{-1} \lambda_1 \dot{\hat{\lambda}}_1 + A_1^{-1} \hat{\lambda}_1 \dot{\hat{\lambda}}_1 - A_2^{-1} \tau \dot{\hat{\tau}} + A_2^{-1} \hat{\tau} \dot{\hat{\tau}} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

En esta ecuación se reemplazan los valores de (4.2.1) y (4.2.2) para obtener:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, z_3) &= \lambda_1 z_1^2 + z_1(-R z_1 - \hat{\lambda}_1 z_1) + \lambda_2 z_2^2 + z_2^2 z_3 + \lambda_3 z_3^2 + \tau z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 + \tau z_2^2 z_3 - R_2 z_3^2 \\ &+ z_3(z_1 z_2 - z_2^2 - \hat{\tau}(z_1 z_2 + z_2^2)) - A_1^{-1} A_1 \lambda_1 z_1^2 + A_1^{-1} A_1 \hat{\lambda}_1 z_1^2 - A_2^{-1} A_2 \tau (z_1 z_2 z_3 + z_2^2 z_3) + A_2^{-1} A_2 \hat{\tau} (z_1 z_2 z_3 + z_2^2 z_3) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Multiplicando y cancelando términos semejantes se tiene que:

$$\dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) = -R_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + (\lambda_3 - R_2) z_3^2 \quad (4.2.11)$$

Con lo cual se tiene que $\dot{V}(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}, \bar{\tau})$ es una función semi definida negativa si $R_1 < 0$ y $\lambda_3 - R_2 < 0$, dado que $\lambda_2 < 0$. De acuerdo al corolario del lema de Barbalat, como aparece descrito en [12], se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} (z_1, z_2, z_3) = 0$.

A continuación se presenta una simulación para mostrar la evolución temporal del sistema bajo el sistema de control presentado en esta sección. Para la simulación se usarán: $\lambda_2 = -3$; $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_3 = -1$, condiciones iniciales serán: $z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = 1$; $\hat{\lambda}(0) = \hat{\tau}(0) = 0$.

Estado en función del tiempo

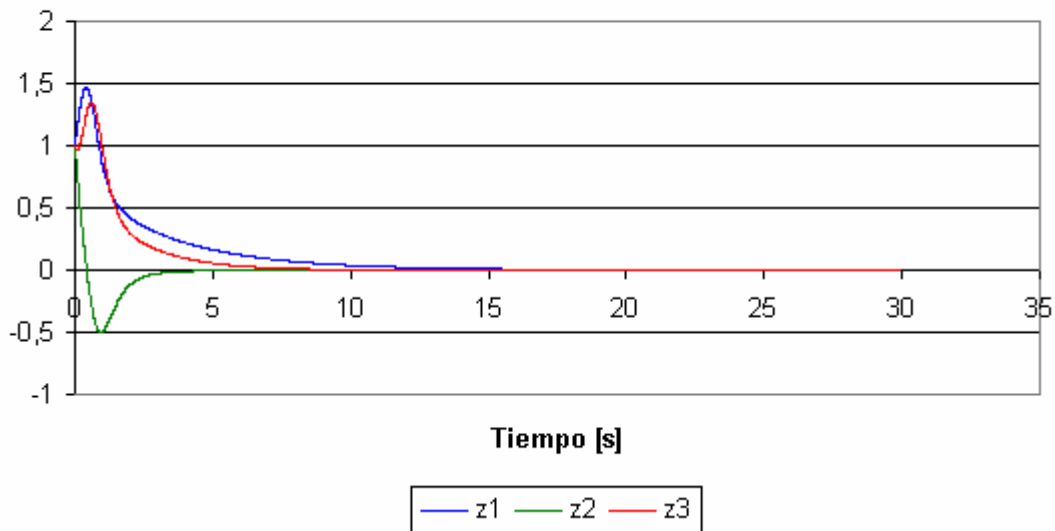


Figura 4.2.1: Evolución de las variables de estado

Esfuerzo de control en función del tiempo

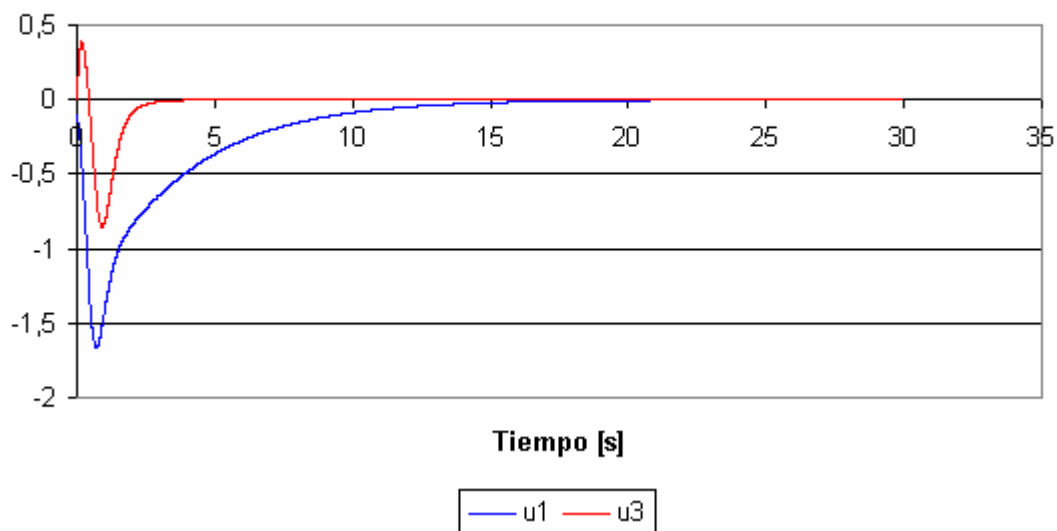


Figura 4.2.2 Esfuerzo de control para el esquema que usa señales u_1 y u_3 .

4.3. Método de control usando la señal u_1

Para controlar el sistema usando exclusivamente la señal u_1 se propone un esquema de control diferente al usado en los casos anteriores. Este esquema se basa en la propiedad de densidad de las órbitas dentro del atractor. Se propone aplicar control sólo cuando el sistema está cerca del punto de equilibrio, con lo cual se simplifica la estructura matemática del controlador. Se puede asegurar que las trayectorias pasarán arbitrariamente cerca de cualquier punto del atractor por que las órbitas son densas dentro del atractor. El sistema linealizado en torno al origen tiene la formulación matemática mostrada en (3.4):

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + u_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + u_2 \\ \dot{z}_3 &= \lambda_3 z_3 + u_3\end{aligned}$$

Se propone usar la siguiente ley de control :

$$u_1 = -\hat{\lambda}_1 z_1 - R_1 z_1 \quad (4.3.1)$$

Con la siguiente ley de ajuste para el parámetro $\hat{\lambda}_1$:

$$\dot{\hat{\lambda}}_1 = A_1 z_1^2 \quad (4.3.2)$$

Teorema 4.3

Dado el sistema generalizado de Lorenz linealizado (3.4), la ley de control (4.3.1) y la ley de ajuste (4.3.2) el sistema resultante es asintóticamente en la zona donde la linealización sea válida.

Demostración

Con esto se puede definir el siguiente sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{\hat{\lambda}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 - \hat{\lambda}_1 z_1 - R_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \\ \lambda_3 z_3 \\ A_1 z_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

Para este sistema dinámico se propone usar la siguiente función candidata para demostrar que el sistema aumentado sea Lyapunov estable:

$$V(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}_1) = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1^2}{2} \quad (4.3.4)$$

Donde se tiene que $\bar{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1 - \lambda_1$, y por lo tanto $\dot{\bar{\lambda}}_1 = \dot{\hat{\lambda}}_1$. Se tiene $V(z_1, z_2, z_3, \bar{\lambda}_1)$ es una función definida positiva siempre que A_1^{-1} sea positivo. Para tener el resultado deseado es necesario analizar la derivada de (4.3.4) para chequear que sea al menos semi definida negativa.

$$\dot{V} = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 + A_1^{-1} \bar{\lambda}_1 \dot{\bar{\lambda}}_1 \quad (4.3.5)$$

Reemplazando los valores de las respectivas derivadas temporales (3.4) se tiene lo siguiente:

$$\dot{V} = \lambda_1 z_1^2 - \hat{\lambda}_1 z_1^2 - R_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + A_1^{-1} A_1 \hat{\lambda}_1 z_1^2 - A_1^{-1} A_1 \lambda_1 z_1^2 \quad (4.3.6)$$

Cancelando términos se obtiene lo siguiente:

$$\dot{V} = -R_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 \quad (4.3.7)$$

Como el sistema está en régimen caótico se cumple que $\lambda_2, \lambda_3 < 0$, por lo tanto se tiene que la función \dot{V} es semi definida negativa si $R_1 < 0$. Usando un argumento tipo corolario del lema de Barbalat, como el mostrado en [12], se concluye que el sistema convergerá al origen en la medida que el tiempo tienda a infinito.

Para finalizar esta demostración hay que probar que la trayectoria del sistema sin control eventualmente entra en la zona donde la aproximación lineal al sistema es válida. Para esto es necesario usar el siguiente resultado:

Dado un sistema caótico definido por la ecuación:

$$\dot{\bar{x}} = J(\bar{x})$$

Sea P un punto cualquiera perteneciente al atractor del sistema (en este caso P será un punto de equilibrio del sistema). Entonces de acuerdo a [9] se tiene que sí el sistema es caótico entonces se cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{t} \in (0, \infty) \Rightarrow |x(\tilde{t}) - P| < \varepsilon$$

Para que poder activar el sistema de control propuesto es necesario que este se encuentre suficientemente cerca del origen para que la aproximación lineal sea válida. Para este caso se usará la esfera de radio unitario como cerca del origen.

A continuación se presenta una simulación que gráfica el comportamiento del sistema en el tiempo bajo el control propuesto. Para esta simulación se usarán $\lambda_2 = -3$; $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_3 = -1$, condiciones iniciales serán: $z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = 1$; $\hat{\lambda}(0) = \hat{\tau}(0) = 0$.

Estado en función del tiempo

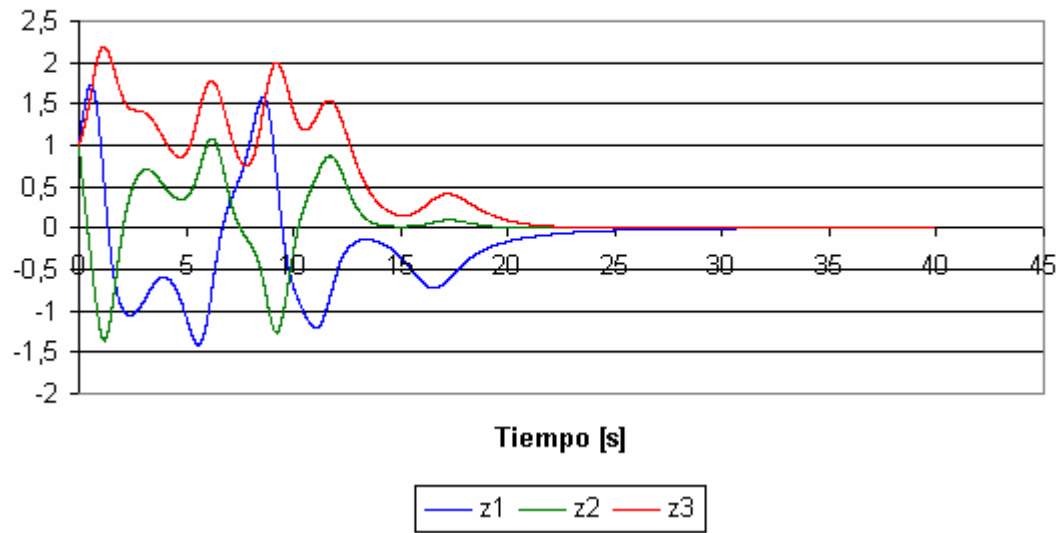


Figura 4.3.1: Evolución de las variables de estado

Esfuerzo de control en función del tiempo

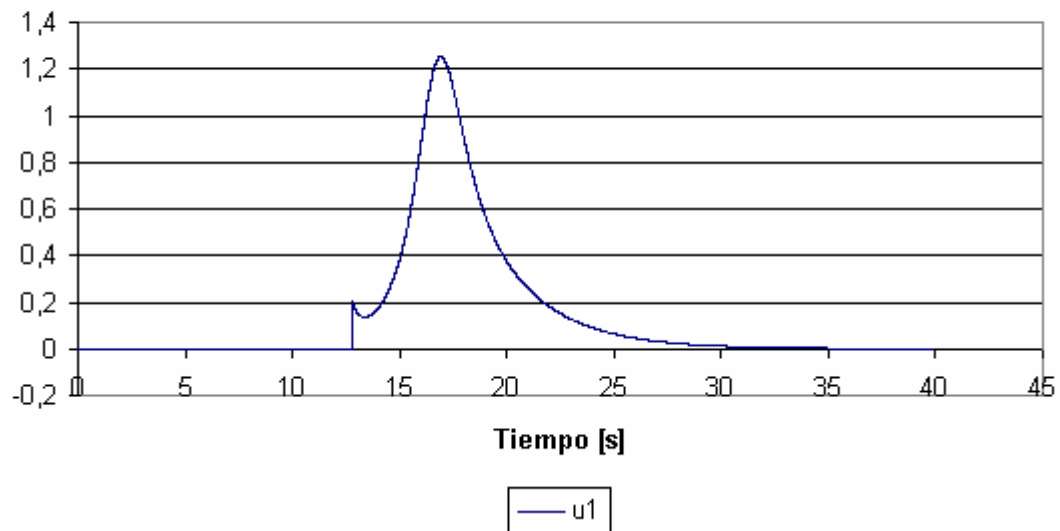


Figura 4.3.2 Evolución de la señal de control para el esquema que usa sólo la señal u_1 .

5. Ajuste de ganancias para los esquemas de control

Este capítulo pretende orientar al lector sobre como ajustar las ganancias asociadas a cada esquema de control propuesto. Las ganancias, de realimentación y adaptivas, son parámetros de un esquema de control que, dentro de cierto rango, no afectan la estabilidad del esquema de control. Aun que las ganancias no afectan la estabilidad del sistema pueden afectar su rendimiento o el esfuerzo de control necesario para estabilizar el sistema. Por lo tanto es necesario encontrar valores adecuados para ellas.

En este capítulo se intentará buscar valores aceptables usando simulaciones para calcular la integral del error cuadrático (ISE) y la integral cuadrática de la entrada (ISI). Estos índices se usarán para tener una referencia de los rangos aceptables para las ganancias y de las zonas que conviene evitar. Sea el vector $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ entonces el índice ISE se define por la siguiente integral $ISE = \int (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$, y corresponde a la desviación respecto a cero del vector \bar{z} . El índice ISI se define a partir de un vector de entrada $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ como la integral $ISI = \int u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ y corresponde al esfuerzo que debe realizar el sistema de control para estabilizar un sistema.

Para cada esquema de control se estudiará cómo varían los índices ISE e ISI al variar una ganancia a la vez, en un rango en que sea posible garantizar estabilidad.

Las ganancias para estos esquemas de control se dividen en dos tipos: ganancias adaptivas y ganancias de retroalimentación. Las ganancias adaptivas acompañan a los parámetros ajustables, por su parte las ganancias de retroalimentación van directamente en el lazo de control.

En las simulaciones se usarán los siguientes valores para los parámetros del sistema de Lorenz generalizado $\lambda_2 = -3$, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_3 = -1$. Para las condiciones iniciales se usarán $z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = 1$ y $\hat{\lambda}_1(0) = \hat{\lambda}_2(0) = \hat{\lambda}_3(0) = \hat{\tau}(0) = 0$.

5.1. Control usando señales u_1 y u_2

Las ganancias que este controlador posee se denominarán R_1 y R_2 para las ganancias de retroalimentación, mientras que las ganancias adaptivas serán A_1 y A_2 . Estas se encuentran en este esquema de control ubicadas según se señala a continuación:

$$u_1 = -R_1 z_1 - \hat{\lambda}_1 z_1 \quad u_2 = z_1 z_3 - \hat{\tau} z_1 z_3 + \hat{\tau} z_2 z_3 - z_2 z_3 - R_2 z_2$$

$$\dot{\hat{\lambda}}_1 = A_1 z_1^2 \quad \dot{\hat{\tau}} = A_2 (z_1 z_2 z_3 - z_2^2 z_3)$$

El resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de realimentación R_1 , dicho resultado se muestra en la figura 5.1, tanto para el índice ISE como para el índice ISI

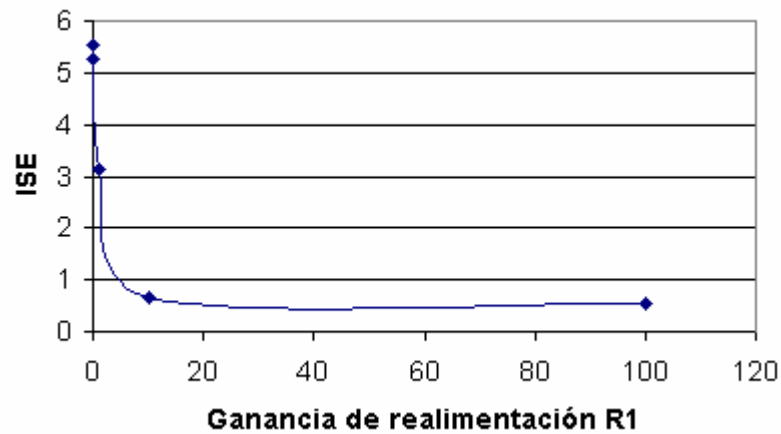


Figura 5.1a: Efecto de la ganancia de realimentación R_1 sobre el ISE

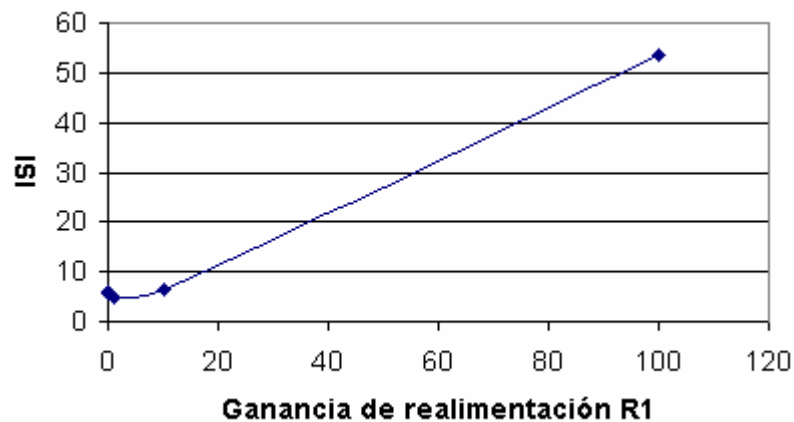


Figura 5.1b: Efecto de la ganancia de realimentación R_1 sobre el ISI

Ganancia R1	ISE	ISI
0,0001	5,55943418	5,85845253
0,001	5,55685991	5,85696445
0,01	5,53115311	5,84217432
0,1	5,27767819	5,7028
1	3,12387439	4,69384038
10	0,65431705	6,59348158
100	0,54463814	53,6903644
150	0,54302059	101,615157
200	0,54824829	294,055657
250	0,58432571	1675,52839

Tabla 5.1: Resumen de la influencia de R1 sobre el ISE y el ISI

De la figura 5.1a, 5.1b y de la tabla 5.1, se aprecia que el ISE es decreciente hasta que la ganancia es aproximadamente diez, luego el ISE es aproximadamente constante. Sin embargo, el ISI tiene forma de “U” con un mínimo aproximado de uno. Por lo tanto se sugiere usar una ganancia entre uno y diez para el sistema de control de modo de mantener ambos índices pequeños.

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de realimentación R2, el resultado se muestra en la figura 5.2, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

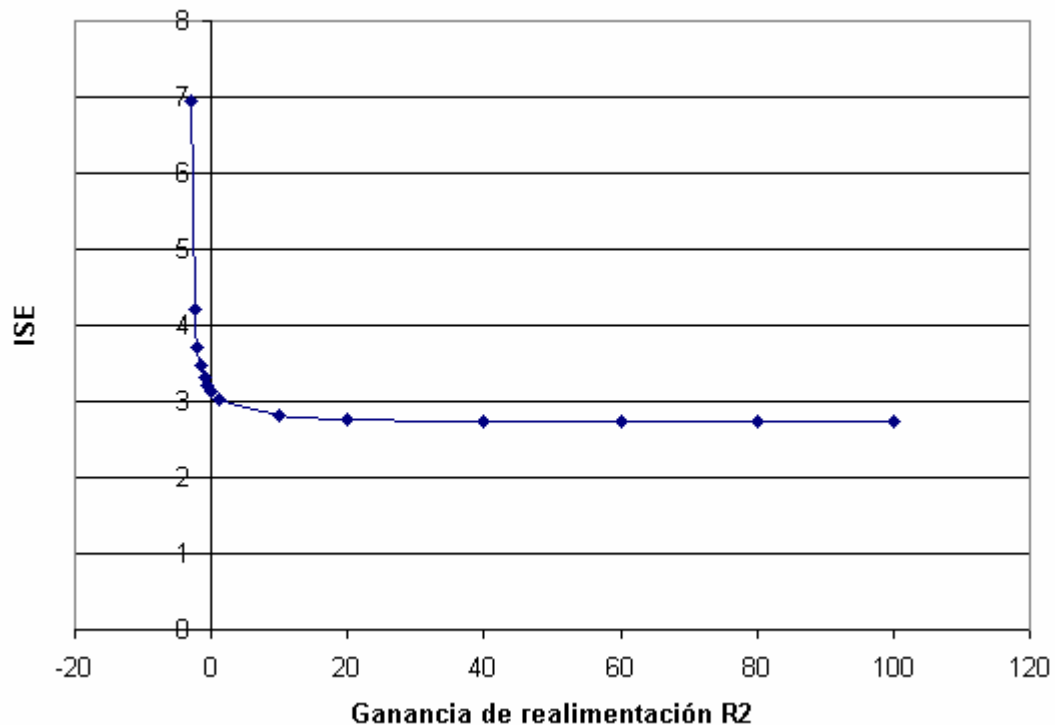


Figura 5.2a: Efecto de la ganancia de realimentación R2 sobre el ISE

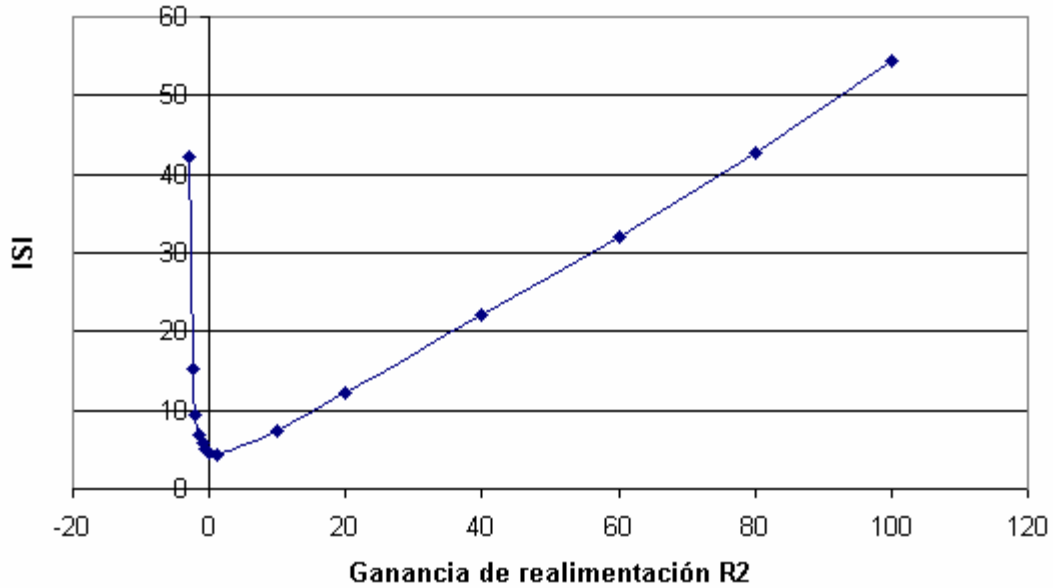


Figura 5.2b: Efecto de la ganancia de realimentación sobre el ISI

Ganancia R2	ISE	ISI
-2,9	6,95597193	42,2430856
-2,5	4,22362601	15,1724626
-2	3,72248245	9,2825163
-1,5	3,47234095	6,94615614
-1	3,31229431	5,73951128
-0,5	3,20257056	5,06894404
0	3,12387439	4,69384038
1	3,02058809	4,41355387
10	2,80452203	7,39800512
20	2,76557366	12,1352625
40	2,7427571	21,9988327
60	2,73457191	32,0728387
80	2,73036913	42,589136
100	2,72782317	54,3055605
250	2,72668242	2019,23533

Tabla 5.2: Resumen de la influencia de R2 sobre el ISE y el ISI

Del capítulo anterior se sabe que para la ganancia R2 el rango aceptable es $R_2 > \lambda_2 = -3$. De las figuras 5.2a, 5.2b y de la tabla 5.2 se aprecia que en este caso el ISE es decreciente con la ganancia de realimentación R2, mientras que el ISI tiene una forma de “U”, con un mínimo alrededor de uno. Se sugiere por lo tanto elegir esta ganancia tomando un valor entre uno y diez, de forma tal que el ISE sea razonablemente pequeño mientras que ISI también sea relativamente bajo.

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de realimentación A1, el resultado se muestra en la figura 5.3, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

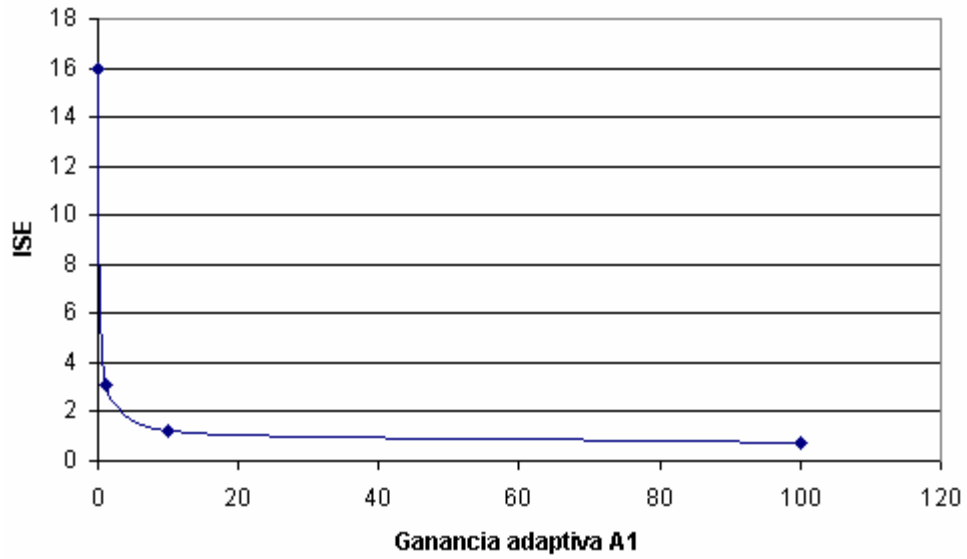


Figura 5.3a: Efecto de la ganancia A1 en el ISE

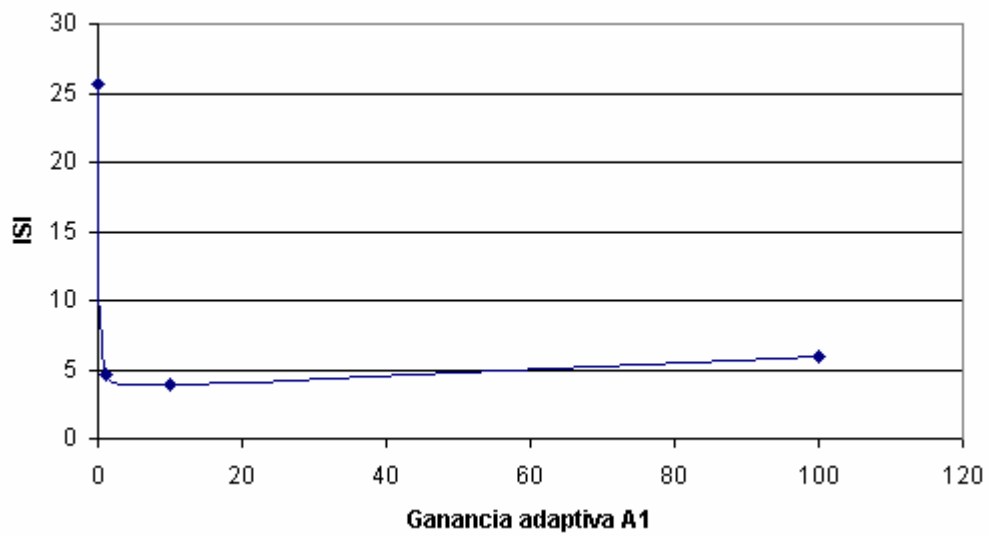


Figura 5.3b: Efecto de la ganancia A1 en el ISI

Ganancia A1	ISE	ISI
0,0001	60,5116651	59,3471264
0,001	59,3127126	58,5500754
0,01	49,1353838	52,3491486
0,1	15,9756302	25,6227636
1	3,12387439	4,69384038
10	1,25304013	3,98092804
100	0,74009915	5,97629965
1000	0,59624208	13,2278379
10000	0,55355636	36,4121954

Tabla 5.3: Resumen de la influencia de la ganancia A1 sobre el ISE y el ISI

A partir de las figuras 5.3a, 5.3b y de la tabla 5.3 se observa que el ISE es decreciente con la ganancia, por su parte el ISI tiene forma de “U”. Es posible afirmar que la zona donde el ISE es pequeño sin que el ISI sea grande corresponde al intervalo [1,10], mientras que hay que evitar las zonas donde la ganancia es muy baja o donde es muy alta.

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de realimentación A2, el resultado se muestra en la figura 5.4, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

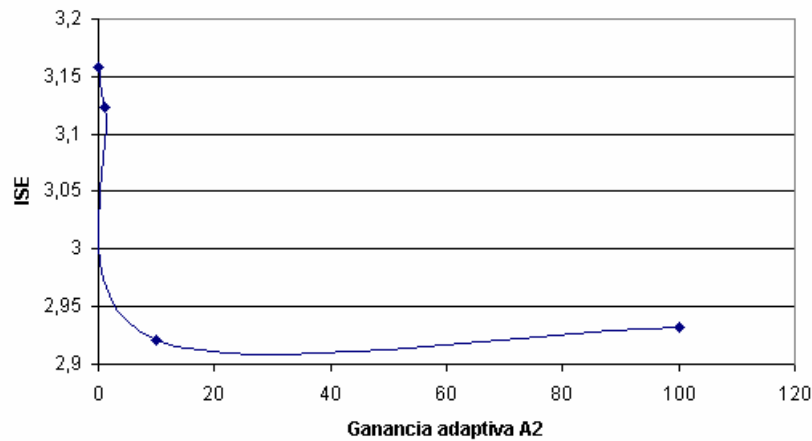


Figura 5.4a: Efecto de la ganancia A2 en el índice ISE

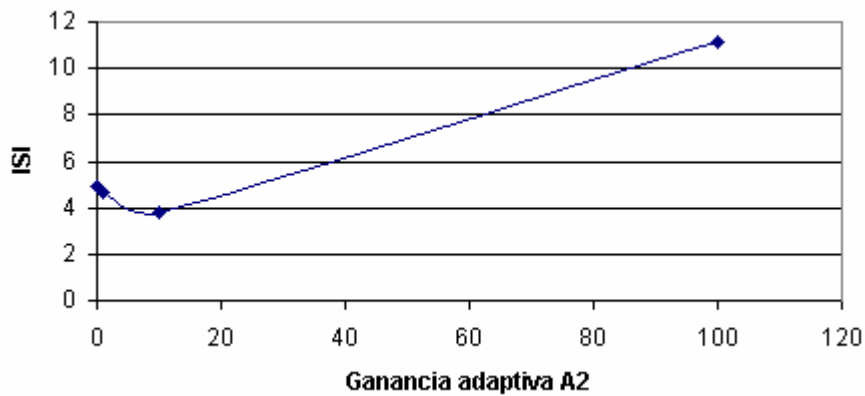


Figura 5.4b: Efecto de la ganancia A2 en el índice ISI

Ganancia A2	ISE	ISI
0,0001	3,16199882	4,95421082
0,001	3,16196318	4,95395948
0,01	3,16160695	4,95144779
0,1	3,15805722	4,92649853
1	3,12387439	4,69384038
10	2,92120418	3,75703487
100	2,93200945	11,1356777
1000	2,94191103	89,2187783
10000	2,87590405	666,479077

Tabla 5.4: Resumen de la influencia de A2 en los índices ISE y el ISI

A partir de las figuras 5.4a, 5.4b y de la tabla 5.4 se aprecia que el ISE es decreciente con la ganancia y el ISI es creciente. Se recomienda elegir valores en la zona donde ambos índices sean pequeños, lo cual en este caso ocurre cuando la ganancia esta entre diez y cien.

5.2. Control usando señales u_1 y u_3

Las ganancias que este controlador posee se denominarán R_1 y R_2 para las ganancias de retroalimentación, mientras que las ganancias adaptivas serán A_1 y A_2 . Estas se encuentran en este esquema de control ubicadas según se señala a continuación:

$$u_1 = -R_1 z_1 - \hat{\lambda}_1 z_1 \quad u_3 = z_1 z_2 - z_2^2 - \hat{t}(z_1 z_2 - z_2^2) - R_2 z_3$$

$$\dot{\hat{\lambda}}_1 = A_1 z_1^2 \quad \dot{\hat{t}} = A_2 (z_1 z_2 z_3 - z_2^2 z_3)$$

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de realimentación R_1 , el resultado se muestra en la figura 5.5, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

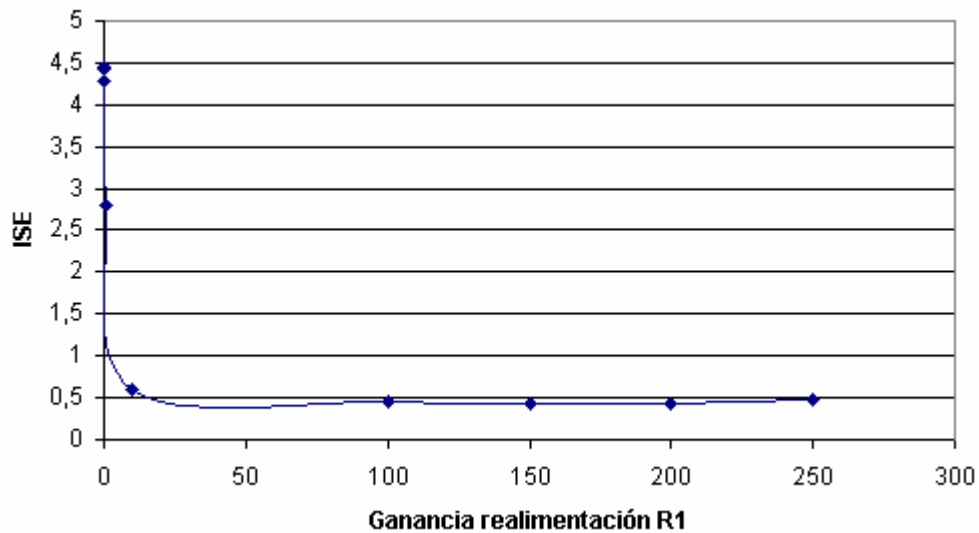


Figura 5.5a: Efecto de la ganancia de realimentación R_1 en el ISE

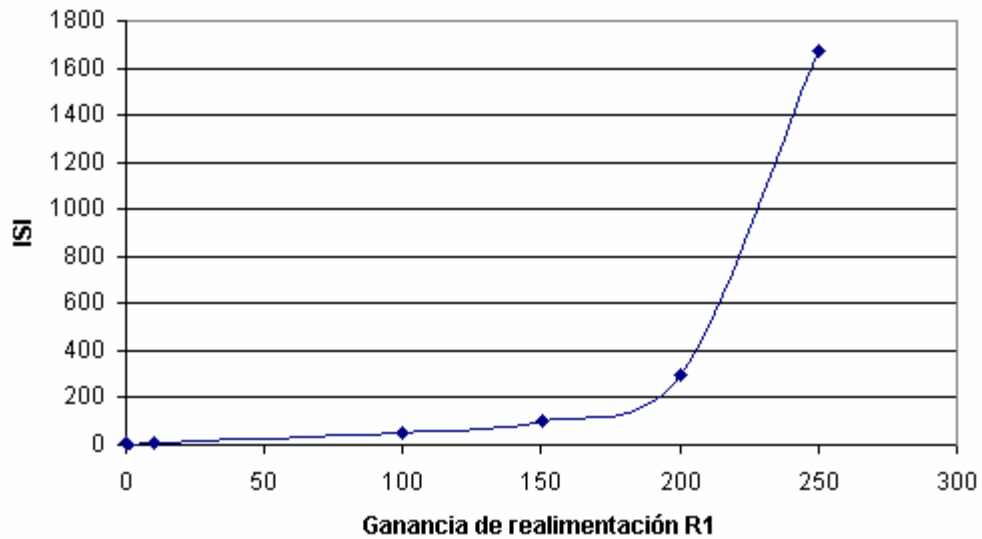


Figura 5.5b: Efecto de la ganancia de realimentación R1 en el ISI

Ganancia R1	ISE	ISI
0,0001	4,44726246	4,71208441
0,001	4,44572565	4,70937865
0,01	4,43036464	4,6826437
0,1	4,27735971	4,44510012
1	2,80632084	3,48098355
10	0,60532731	6,59940957
100	0,44304731	53,6891654
150	0,43903114	101,613669
200	0,44236532	294,043044
250	0,4734631	1675,05229

Tabla 5.5: resumen de la influencia de la ganancia R1 en los índices ISE e ISI

De las figuras 5.5a, 5.5b y de la tabla 5.5 se observa que el índice ISE es decreciente con la ganancia, mientras que el ISI es creciente con la ganancia. Se sugiere usar valores entre diez y cien para la ganancia, por que en esta zona los índices ISE e ISI son pequeños simultáneamente.

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de realimentación R2, el resultado se muestra en la figura 5.6, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

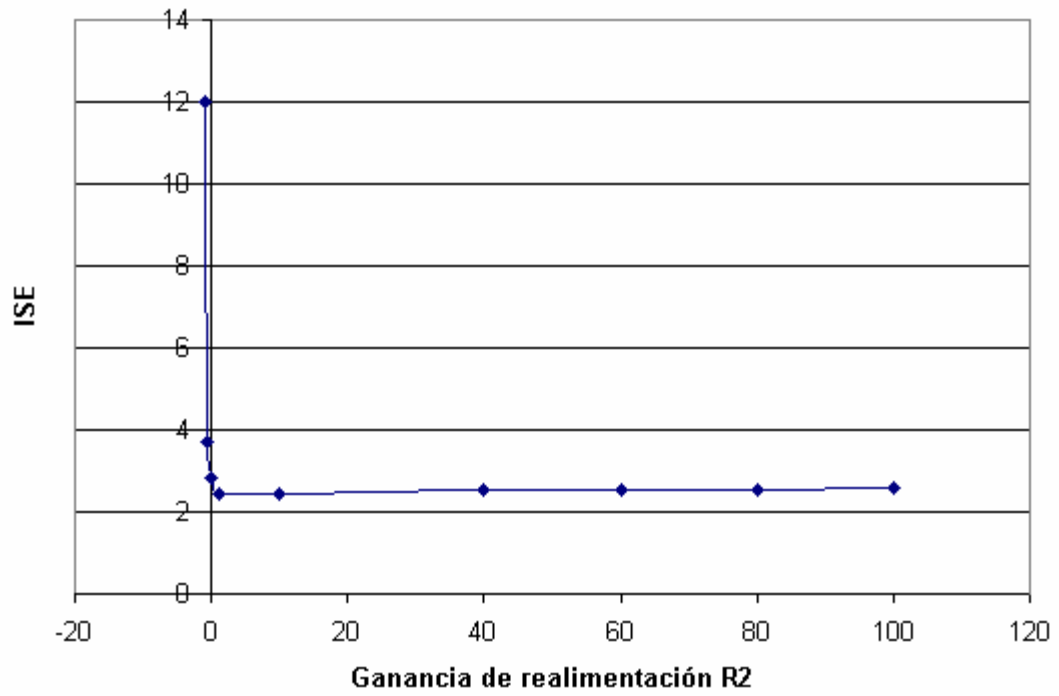


Figura 5.6a: Efecto de la ganancia de realimentación R2 en el ISE

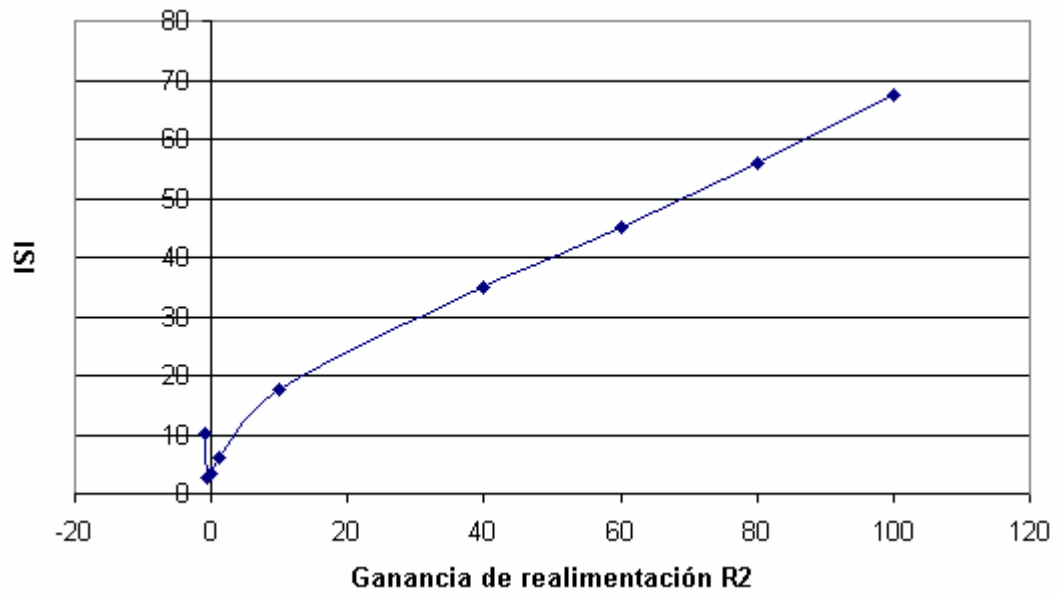


Figura 5.6b: Efecto de la ganancia de realimentación R2 en el ISI

Ganancia R2	ISE	ISI
-0,9	11,9806799	10,248885
-0,5	3,72295211	2,87804266
0	2,80632084	3,48098353
1	2,44181537	6,17129133
10	2,44626343	17,6529402
40	2,5378715	34,8028418
60	2,5515029	45,1895769
80	2,5586439	55,820344
100	2,56310419	67,493568
250	2,60089329	1848,74865

Tabla 5.6: resumen de la influencia de la ganancia R2 en los índices ISE e ISI

Esta ganancia satisface que $-1 = \lambda_3 < R_2$. A partir de las figuras 5.6a, 5.6b y de la tabla 5.6 se aprecia que el índice ISE es decreciente con la ganancia R2, el ISI por su parte tiene forma de “U” con un mínimo que ocurre cuando la ganancia esta cerca de cero. Por lo tanto se recomienda usar una ganancia entre cero y uno, pues en ese sector tanto el ISE como el ISI son valores bajos.

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de adaptiva A1, el resultado se muestra en la figura 5.7, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

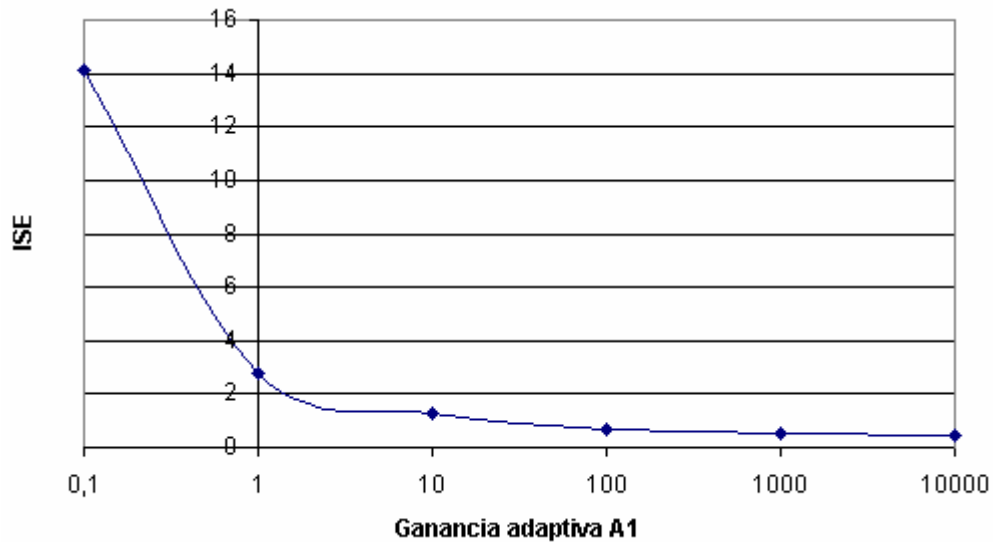


Figura 5.7a: Efecto de la ganancia adaptiva A1 en el ISE

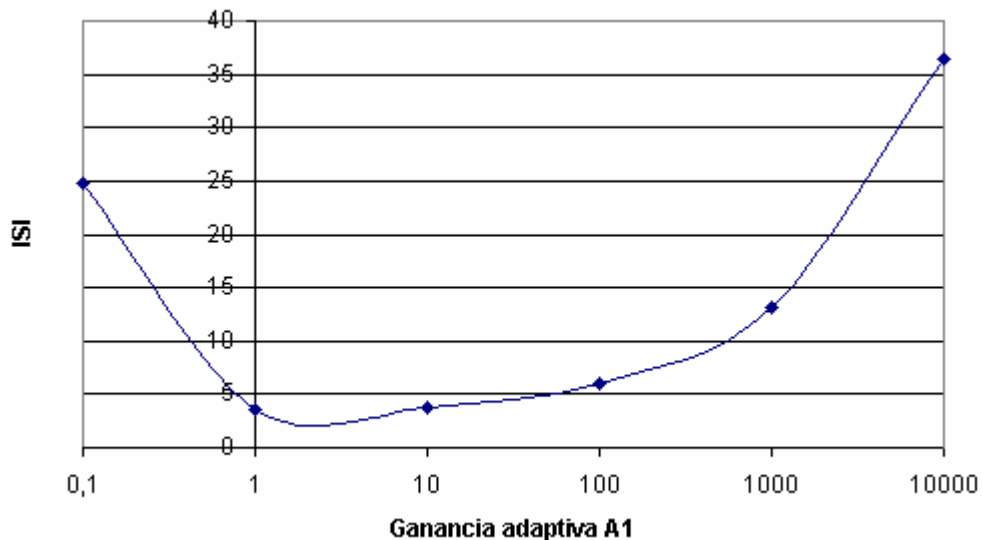


Figura 5.7b: Efecto de la ganancia adaptiva A1 en el ISI

Ganancia A1	ISE	ISI
0,0005	3469,90241	3024259,95
0,001	1662,02521	631539,309
0,01	123,162425	1673,61084
0,1	14,1272415	24,7895494
1	2,80632084	3,48098355
10	1,31410959	3,76547519
100	0,71286775	5,97360358
1000	0,51693788	13,2220363
10000	0,4548861	36,409456

Tabla 5.7: resumen de la influencia de la ganancia R1 en los índices ISE e ISI

De las figuras 5.7a, 5.7b y de la tabla 5.7 se aprecia que para estas simulaciones el índice ISE es decreciente, el ISI por su parte tiene un mínimo alrededor de uno por se sugiere escoger la ganancia como un valor entre cero y uno, zona donde el ISE y el ISI son simultáneamente valores pequeños.

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de adaptiva A2, el resultado se muestra en la figura 5.8, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

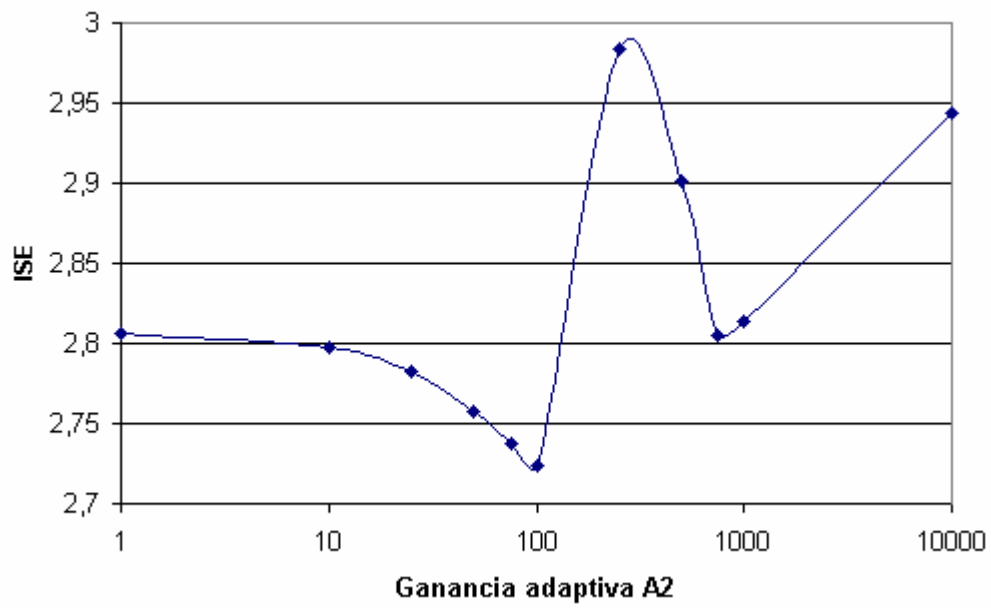


Figura 5.8a: Efecto de la ganancia adaptiva A2 en el ISE

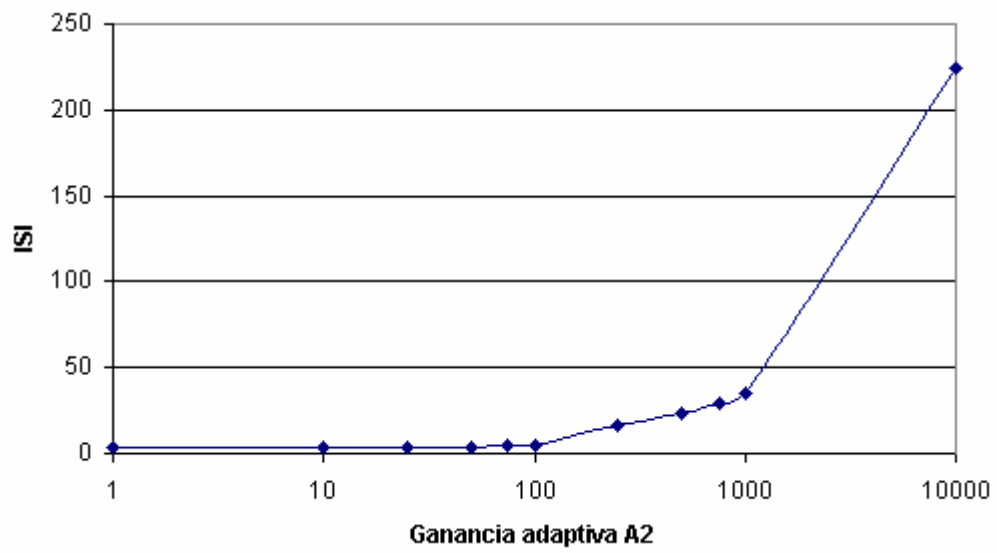


Figura 5.8b: Efecto de la ganancia adaptiva A2 en el ISI

Ganancia A2	ISE	ISI
0,0001	2,80729682	3,48261664
0,001	2,80729594	3,48261502
0,01	2,80728717	3,48259885
0,1	2,80719944	3,48243862
1	2,80632084	3,48098354
10	2,79742101	3,48115009
25	2,78232645	3,54088269
50	2,75783557	3,80559908
75	2,73710764	4,27611373
100	2,7243375	4,94950492
250	2,98331083	15,8448635
500	2,90108447	23,2753168
750	2,80545824	28,9053951
1000	2,81388646	34,9966112
10000	2,94383937	224,763765

Tabla 5.8: resumen de la influencia de la ganancia A2 en los índices ISE e ISI

De las figuras 5.8a, 5.8b y de la tabla 5.8 en este caso se ve que el índice ISE tiene un mínimo en cien, mientras que el índice ISI es creciente con la ganancia. Se recomienda evitar la zona donde el índice ISI es alto, y mantenerse donde el ISE es bajo, lo que sucede cuando la ganancia esta entre setenta y cinco y cien.

5.3. Control usando señales u_1

Este controlador soporta dos ganancias, la de realimentación se denominará R_1 , mientras que la ganancia adaptiva será A_1 . Estas se encuentran en este esquema de control ubicadas según se señala a continuación:

$$u_1 = -\hat{\lambda}_1 z_1 - R_1 z_1 \quad \hat{\lambda}_1 = A_1 z_1^2$$

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia de realimentación R_1 , el resultado se muestra en la figura 5.9, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

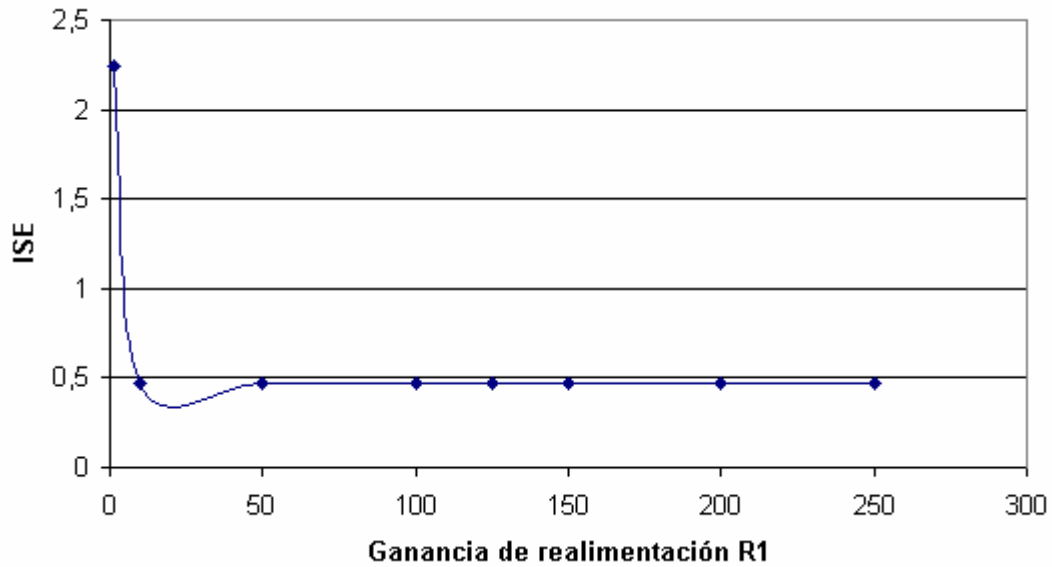


Figura 5.9a: Efecto de la ganancia de realimentación R_1 en el ISE

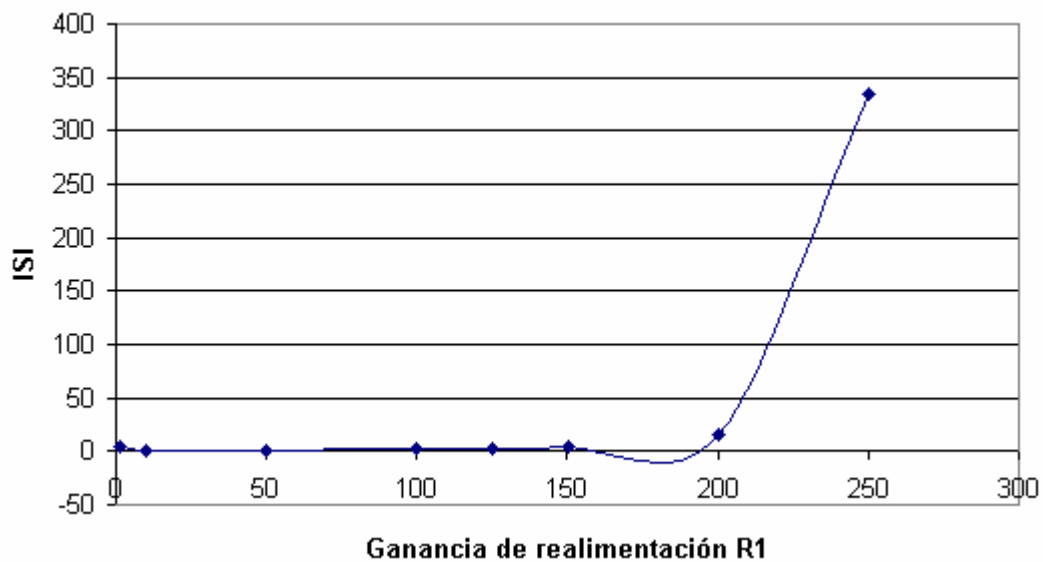


Figura 5.9b: Efecto de la ganancia de realimentación R_1 en el ISI

Ganancia R1	ISE	ISI
1	2,24403377	3,94066639
10	0,47413551	0,19573239
50	0,46867814	1,0482535
100	0,46791858	2,25193529
125	0,46779957	3,19629887
150	0,46776609	4,82972587
200	0,46802359	15,2739827
250	0,47222451	334,749164

Tabla 5.9: resumen de la influencia de la ganancia R1 en los índices ISE e ISI

En la figuras 5.9a, 5.9b y de la tabla 5.9 se observa que el índice ISE es decreciente con la ganancia pero el índice ISI es decreciente con la ganancia. La recomendación es elegir un valor en la zona en que ambos índices sean pequeños, lo cual en este caso ocurre cuando la ganancia esta entre diez y cincuenta.

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones, manteniendo fijas todas las ganancias y variando sólo la ganancia adaptiva A1, el resultado se muestra en la figura 5.10, tanto para el índice ISE como para el índice ISI.

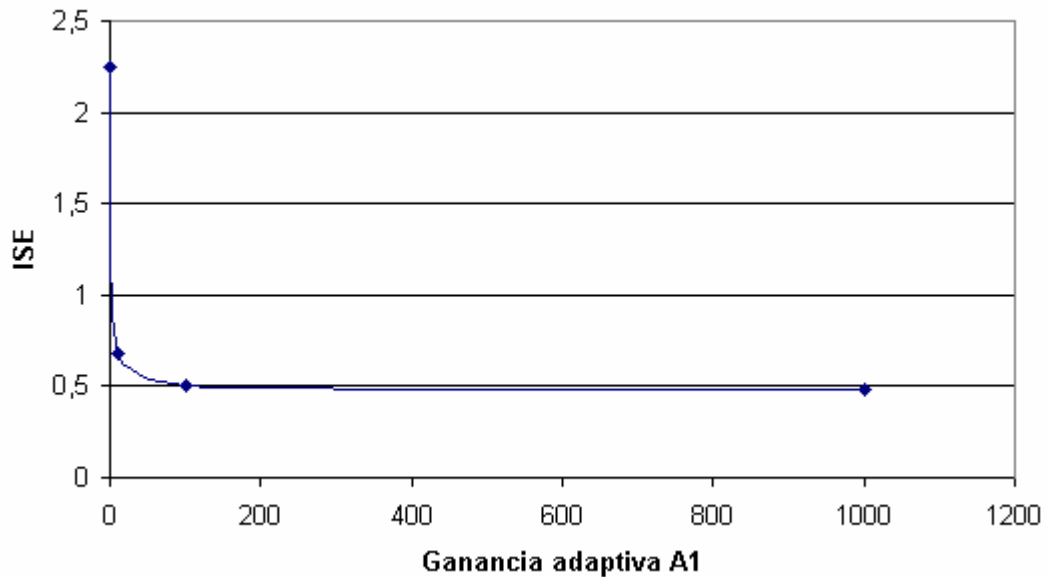


Figura 5.10a: Efecto de la ganancia adaptiva A1 en el ISE

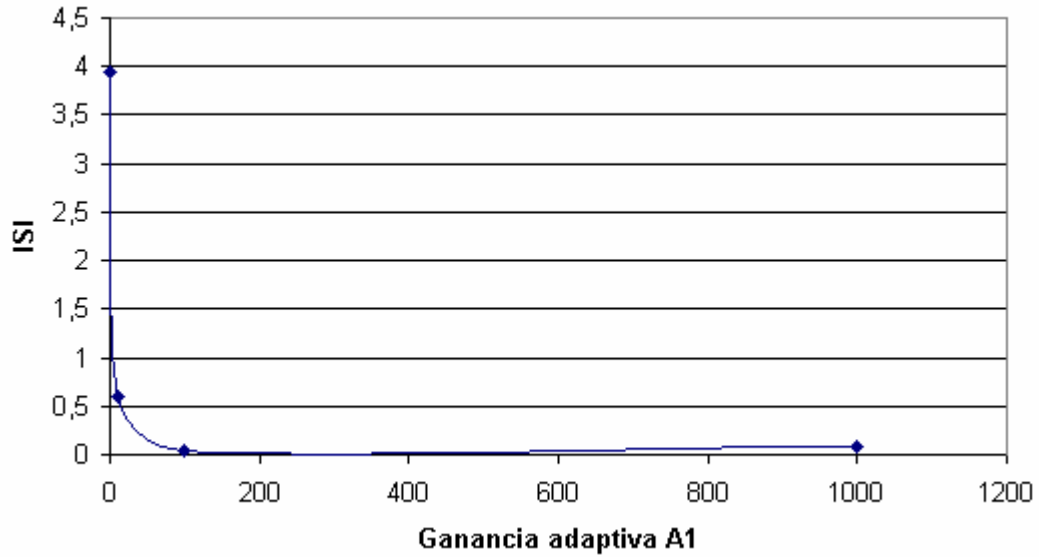


Figura 5.10b: Efecto de la ganancia adaptativa A1 en el ISE

Ganancia A1	ISE	ISI
1	2,24403377	3,94066639
10	0,67783001	0,60405042
100	0,50349072	0,04720781
1000	0,48428268	0,07604173
10000	0,47451505	0,25132852
100000	0,47012719	0,7507136
1000000	0,46783728	20,242789

Tabla 5.10: resumen de la influencia de la ganancia A1 en los índices ISE e ISI

A partir de las figuras 5.10a, 5.10b y de la tabla 5.10 se observa que el índice ISE es decreciente con la ganancia, pero el índice ISI tiene forma de “U” alcanzando su mínimo cuando la ganancia es cien. En este caso se recomienda usar valores entre cien y mil para esta ganancia, con tal de tener un valor bajo para el índice ISE y para el índice ISI.

6. Conclusiones

A partir de los desarrollos presentados en esta memoria es posible concluir que se alcanzaron los objetivos inicialmente planteados. En los capítulos correspondientes se logró hacer control sobre el sistema generalizado de Lorenz en forma canónica. El trabajo correspondiente fue complementado con simulaciones que corroboran los resultados previamente demostrados en forma analítica.

Se logró diseñar esquemas de control usando las señales $u_1 - u_2$, $u_1 - u_3$ y u_1 . Los esquemas con las señales $u_1 - u_2$ y con $u_1 - u_3$ logran convergencia asintótica inmediatamente. En cambio, el esquema de control que emplea sólo la señal u_1 de control requiere acercarse al origen para activarse, dicho acercamiento es garantizado por las propiedades caóticas del sistema generalizado de Lorenz en forma canónica. Una vez que el sistema se acerca al origen el controlador usando sólo la señal u_1 puede lograr convergencia asintótica al origen.

Cabe mencionar que los esquemas de control con las señales $u_1 - u_2$ y con $u_1 - u_3$ requieren ajustar dos parámetros, mientras que el esquema donde se usa u_1 requiere ajustar sólo un parámetro. La desventaja de usar sólo la señal de control u_1 es que requiere esperar que el sistema se acerque al origen antes de aplicar el control, mientras que si se usan dos señales de control no es necesario esperar dicho acercamiento y esos controladores comienzan a funcionar de inmediato.

Las combinaciones restantes de señales de control son solo u_2 , solo u_3 y $u_2 - u_3$. Estas combinaciones no pueden por si mismas lograr control sobre el sistema. Según lo demostrado estas señales de control no pueden estabilizar el sistema generalizado de Lorenz. Para obtener dicha conclusión se usó una versión linealizada del sistema generalizado de Lorenz, estudio que reveló que cerca del origen las señales de control mencionadas no pueden lograr estabilidad asintótica.

También se estudió la influencia de las ganancias de realimentación (R_1 y R_2) y de las ganancias adaptiva (A_1 y A_2) sobre el comportamiento del sistema bajo control. Se concluyó que existen rangos específicos para estos parámetros que hacen que los índices ISE e ISI alcancen valores mínimos. Como trabajo futuro se plantea estudiar en detalle otros esquemas de control para el sistema generalizado de Lorenz en forma canónica, mediante el empleo de otras funciones de Lyapunov.

Bibliografía

Páginas web

- [1] The Great Courses. Chaos [Online]. Visitada 3 de Julio de 2011. Disponible:
http://www.thegreatcourses.com/tgc/courses/course_detail.aspx?cid=1333
- [2] Wikipedia, the free encyclopedia. (actualizada 22 Abril 2011) Benoit Mandelbrot [online]. Vista 15 Junio 2010. Disponible:
http://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot
- [3] Wikipedia, the free encyclopedia. (actualizada 7 Junio 2010) Chua`s Circuit [online]. Vista 15 Junio 2010. Disponible:
http://en.wikipedia.org/wiki/Chua%27s_circuit
- [4] Wikipedia, the free encyclopedia. (actualizada 28 Abril 2011) Henri Poincaré [online]. Vista 15 Junio 2010. Disponible:
http://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9

Libros

- [5] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, Chaos, an introduction to dynamical systems, Springer Verlag New York, 1996, New York, USA.
- [6] A. Astolfi, D. Karagiannis, R. Ortega, Nonlinear and Adaptive Control with Applications, Springer Verlag London Limited, 2008.
- [7] A. L. Fradkov, A. Yu. Pogromsky, Introduction to control of oscillations and chaos, 1999, World Scientific Pub Co Inc.
- [8] G. Chen, X. Yu, Chaos Control, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2003, Alemania.
- [9] B. Hasselblatt, A. Katok, A First Course in Dynamics with a Panorama of Recent Developments, 2003, Cambridge University Press, USA.
- [10] R. C. Hilborn, Chaos and Nonlinear Dynamics, An Introduction for Scientists and Engineerings, Oxford University Press, Segunda edición, 2000, Oxford, UK.
- [11] P. Ioannou, B. Fidan, Adaptive Control Tutorial, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2006.
- [12] K. S. Narendra, A. M. Annaswamy, Stable Adaptive Systems, Prentice-Hall Inc, 1989, New Jersey, USA.
- [13] W. Perruquetti, J. P. Barbot, Eds., Chaos in automatic control, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2006, Boca Raton, Florida, EEUU.
- [14] E. Schöll, H. G. Schuster, Eds., Handbook of Chaos Control, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2008, Weinheim, Germany.
- [15] J. Spooner et al., Stable adaptive control and estimation for nonlinear systems, John Wiley & Sons Inc, 2002.
- [16] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering, Westview Press, December 2000, Cambridge, USA.
- [17] H. Zhang, D. Liu, Z. Wang, Controlling Chaos, Suppression, Synchronization and Chaotification, Springer Verlag London Limited, 2009.
- [18] Eduardo D. Sontag, Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. Second Edition, Springer, New York, 1998.

Memorias

[19] J. L. Estrada, “Diseño de Estrategias de Control Adaptivo para Sistemas no Lineales y Caóticos”, Tesis para optar al grado Magíster en Ciencias de la Ingeniería Mención: Eléctrica, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2004.

Papers

[20] Sergej Čelikovský, Guanrong Chen. “On the generalized Lorenz canonical form” *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 26, Issue 5, Pages 1271-1276, December 2005.

[21] Awad El-Gohary, Rizk Yassen. “Adaptive control and synchronization of a coupled dynamo system with uncertain parameters” *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 29, Issue 5, Pages 1085-1094, September 2006.

[22] J. L. Estrada, M. A. Duarte-Mermoud, J. C. Travieso-Torres, N. H. Beltrán. “Simplified robust adaptive control of a class of time varying chaotic systems”, *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, Volume 27, Issue 2, Pages 511-519, 2008.

[23] A. L. Fradkov, R. J. Evans. “Control of chaos: Methods and applications in engineering”, *Annual Reviews in Control*, Volume 29, Issue 1, Pages 33-56, 2005.

[24] H. Haken. "Analogy between higher instabilities in fluids and lasers". *Physics Letters A*, 53 (1), 77–78, 1975.

[25] Xichang Han, Lihua Miao, Yan Zhao, Qiuye Sun. “Adaptive control of a class of novel hyperchaotic systems with fully unknown parameters” *Advanced Computer Control (ICACC), 2010 2nd International Conference on*, Volume 2, Page(s): 160 - 163, 2010.

[26] E. A. Jackson, I. Grosu. “An OPCL control of complex dynamic systems”, *Physica D*, 85, 1-9, 1995.

[27] Qiang Jia. “Adaptive control and synchronization of a new hyperchaotic system with unknown parameters”, *Physics Letters A*, Volume 362, Issues 5-6, Pages 424-429, 12 March 2007.

[28] E. Knobloch. "Chaos in the segmented disc dynamo". *Physics Letters A*, 82 (9): 439–440, 1981.

[29] Zhi Li, Guanrong Chen, Songjiao Shi, Chongzhao Han. “Robust adaptive tracking control for a class of uncertain chaotic systems” *Physics Letters A*, Volume 310, Issue 1, Pages 40-43, 7 April 2003.

[30] E. N. Lorenz. “Deterministic Nonperiodic Flow” *Journal of Atmospheric Science*, 20, 130-141, 1963.

[31] R. May. “Simple Mathematical models with very Complicated Dynamics” *Nature*, 261, 459-67, 1976.

[32] N. Noroozi, M. Roopaei, P. Karimaghaee, A. A. Safavi. “Simple adaptive variable structure control for unknown chaotic systems” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 15, Issue 3, Pages 707-727, March 2010.

[33] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke. “Controlling Chaos”, *Physics Review Letters*, Volume 64, Number 11, Pages 1196-1199, 12 Marzo 1990.

[34] G. Poddar, K. Chakrabarty, S. Banerjee. “Control of chaos in dc–dc converters”, *IEEE Transactions on Circuits Systems I*, 45, 672 – 676, 1998.

[35] K. Pyragas. “Continuous control of chaos by self controlling feedback” *Physics Review Letters A*, 170, 421-428, 1992.

- [36] K. Pyragas. “Control of chaos via unstable delayed feedback controller” *Physics Review Letters A*, 89, 2265-2268, 2001.
- [37] Hassan Salarieh, Aria Alasty. “Adaptive control of chaotic systems with stochastic time varying unknown parameters” *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 38, Issue 1, Pages 168-177, Octobre 2008.
- [38] K. N. Srivastava, S. C. Srivastava. “Elimination of dynamic bifurcation and chaos in power systems using facts devices”, *IEEE Transactions on Circuits Systems I*, 45,72–78, 1998.
- [39] Mei Sun, Lixin Tian, Qiang Jia. “Adaptive control and synchronization of a four-dimensional energy resources system with unknown parameters” *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 39, Issue 4, Pages 1943-1949, 28 February 2009.
- [40] Mei Sun, Lixin Tian, Shumin Jiang, Jun Xu. “Feedback control and adaptive control of the energy resource chaotic system” *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 32, Issue 5, Pages 1725-1734, June 2007.
- [41] Chaohai Tao, Xuefei Liu. “Feedback and adaptive control and synchronization of a set of chaotic and hyperchaotic systems” *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 32, Issue 4, Pages 1572-1581, Mayo 2007.
- [42] Xiaoqun Wu, Jun-an Lu. “Adaptive control of uncertain Lü system” *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 22, Issue 2, Pages 375-381, Octobre 2004.
- [43] Jiang-Wen Xiao, Jiexuan Gao, Yuehua Huang, Yan-Wu Wang. “Reduced-order adaptive control design for the stabilization and synchronization of a class of nonlinear chaotic systems” *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 42, Issue 2, 30, Pages 1156-1162, October 2009.
- [44] M.T. Yassen. “Adaptive chaos control and synchronization for uncertain new chaotic dynamical system” *Physics Letters A*, Volume 350, Issues 1-2, Pages 36-43, 30 January 2006.
- [45] Yan Zhao, Tiejian Zhang, Lihua Miao, Wei Deng. “Adaptive control for a class of chaotic systems with unknown parameters”. *Control and Decision Conference (CCDC)*, 2010 Chinese, Page(s): 2586 – 2589, 2010.
- [46] Xiaobing Zhou, Yue Wu, Yi Li, Hongquan Xue. “Adaptive control and synchronization of a new modified hyperchaotic Lü system with uncertain parameters”. *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 39, Issue 5, Pages 2477-2483, 15 March 2009.
- [47] Xiaobing Zhou, Yue Wu, Yi. Li, Hongquan Xue. “Adaptive control and synchronization of a novel hyperchaotic system with uncertain parameters”. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 203, Issue 1, Pages 80-85, 1 September 2008.
- [48] Teh-Lu Liao, Sheng-Hung Lin. “Adaptive control and synchronization of Lorenz systems”. *Journal of the Franklin Institute*, Volume 336, Issue 6, Pages 925-937, August 1999.
- [49] Guoxin Chen. “A simple adaptive feedback control method for chaos and hyper-chaos control”. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 217, Issue 17, Pages 7258-7264, 1 May 2011.