



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

INESTABILIDAD DE PATRONES EN SISTEMAS FORZADOS PARAMÉTRICAMENTE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GONZALO JAVIER CAMEL CUELLO

PROFESOR GUÍA:
MARCEL CLERC GAVILÁN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ENRIQUE TIRAPEGUI ZURBANO
JORGE AMAYA ARRIAGADA

CMM- Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2018

Resumen

El presente es un estudio del fenómeno de la *Inestabilidad de Faraday* en una celda de *Hele-Shaw* especialmente delgada lo que provocó histéresis en el cambio de estado de equilibrio.

Este escrito consiste de tres capítulos. El primero es teoría de la resonancia y el segundo y tercero describen dos experimentos en donde se generan patrones sobre la superficie de un fluido en una celda de *Hele-Shaw* sometida a vibración.

En el primer capítulo se explica el concepto de **resonancia** en un péndulo en casos con y sin roce, luego se pasa al concepto de **resonancia paramétrica**, primero en un péndulo y luego en una cadena de péndulos en donde el pivote tiene un movimiento sinusoidal vertical, llegando a obtener ecuaciones de amplitud de estos fenómenos oscilatorios.

En el segundo capítulo se estudia experimentalmente la formación de patrones en un fluido contenido en una celda *Hele-Shaw* vibrada verticalmente. Se usa una celda de acrílico para que sea transparente y se pueda ver el patrón y grabar con una cámara rápida puesta a un lado del montaje.

En el tercer capítulo se estudia lo mismo que en el capítulo anterior pero inclinando el sistema en un pequeño ángulo (lo que produce un efecto de agregar ruido al sistema) y en vez de una cámara puesta a un lado se usa un láser que se refleja en la superficie del fluido y luego llegando a una pantalla. Se observa la figura que hace el láser en la pantalla.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Resonancia	1
1.1.1. Oscilaciones sin roce con forzamiento periódico	2
1.1.2. Oscilaciones con roce sin forzamiento	4
1.1.3. Oscilaciones con rozamiento forzadas	5
1.2. Resonancia paramétrica	6
1.2.1. Explicación informal de la respuesta subarmónica en la resonancia paramétrica	7
1.2.2. Método Butikov-Galerkin en péndulo forzado paramétricamente (Análisis lineal).	8
1.2.3. Análisis débilmente no lineal de un péndulo forzado paramétricamente.	10
1.2.4. Butikov-Galerkin de un sistema de péndulos dispuestos equidistantemente sobre un pivote y acoplados por resortes de torsión (cadena de péndulos).(Análisis lineal).	14
1.2.5. Análisis débilmente no lineal de una cadena de péndulos forzada paramétricamente.	17
1.2.6. Análisis débilmente no lineal en cadena de péndulos con disipación no lineal.	24
1.2.7. Análisis débilmente no lineal en cadena de péndulos con disipación no lineal de mayor orden.	27
1.2.8. Análisis numérico	28
2. Parte Experimental	30
2.1. Montaje	31
2.2. Ejecución del experimento	35
2.3. Observaciones	36
2.4. Análisis de imágenes	36
2.5. Datos y gráficos	38
3. Formación de Patrones en Sistemas Cuasi Reversibles e Influencia del Ruido.	42
3.1. El ruido en física	42

3.1.1. Incorporación del ruido a las ecuaciones que modelan fenómenos físicos	43
3.2. Procedimiento Experimental.	44
3.3. Montaje Experimental.	44
3.4. Método De Medición.	44
3.5. Resultados	47
Bibliografía	53
A. Análisis funcional y Alternativa de Fredholm	56

Índice de tablas

3.1. Valores de los términos de la relación de dispersión en MKS. . .	48
---	----

Índice de figuras

1.1. Péndulo simple: partícula ideal de masa m sujeta mediante una cuerda ideal sin masa y largo l a un punto fijo y sometida a la gravedad.	2
1.2. Amplitud de la solución particular (1.2) en función de ω	3
1.3. segundo término de (1.5)	3
1.4. Amplitud de respuesta b versus frecuencia de forzamiento ω (ecuación 1.18). Azul: $\lambda = 20$, rojo: $\lambda = 10$, negro: $\lambda = 5$. $\omega_0 = 50$. $\Gamma = 1$	6
1.5. Péndulo forzado paramétricamente	7
1.6. Curva de inestabilidad péndulo. Con $\omega_0 = 1$ y $\mu = 0,2$	9
1.7. Curvas inestabilidad péndulo para el método de Butikov con uno, dos y tres modos. $\omega_0 = 1$, $\mu = 0,2$	11
1.8. Diagrama de las soluciones para un péndulo forzado paramétricamente (ecuación 1.30). Con $\mu = 0,001$, $\omega_0 = 1$	13
1.9. Las tres soluciones estacionarias (sin considerar ϕ) posibles de un péndulo forzado paramétricamente, a saber, R_+ , R_- y $R = 0$. $\mu = 0,001$, $\omega_0 = 1, \nu = -0,001$	14
1.10. Cadena de péndulos acoplados por resortes de torsión. 1.10a estática. 1.10b con forzamiento armónico.	15
1.11. Cadena de péndulos descrita por el modelo 1.37. 1.11a muestra a los péndulos estables en la posición invertida. 1.11b muestra los péndulos al existir una inestabilidad espacial en torno la posición invertida.	16
1.12. Aquí vemos a $\lambda_+(k)$ para los parámetros $\mu = 0,1$; $a = 0,048$; $\omega = 2,02$; $\omega_0 = 1$ y $\nu = 0,01$	20
1.13. Inestabilidad numérica.	29
2.1.	30
2.2. Michael Faraday	31
2.3. Imágenes del trabajo original de Faraday	32
2.4. Fotos de patrones sin foto flo.	33
2.5. Celda <i>Helle-Shaw</i>	33
2.6.	34
2.7. Esquema del montaje	35

2.8. Izquierda: Celda montada sobre vibrador, detrás de ella está el osciloscopio y frente a ella la cámara; Derecha: Generador de funciones.	35
2.9. Estado homogéneo. Superficie plana. (Frecuencia forzamiento: 40hz).	36
2.10. Ejemplo de ondas superficiales que se forman sobre el fluido. (Frecuencia forzamiento: 60hz).	37
2.11. Ejemplo de patrón con burbujas molestas. (Frecuencia forzamiento: 60hz).	37
2.12. Ejemplo de sacado de perfil con algoritmo de matlab. (Frecuencia forzamiento: 60hz).	37
2.13. Ejemplo perfil sin la imagen de fondo. (Frecuencia forzamiento: 60hz).	38
2.14. Diagrama ciclo de histéresis o bifurcación subcrítica. Las flechas azules indican los datos tomados cuando se iba subiendo la amplitud y las rojas cuando se iba bajando.	39
2.15. Bifurcación subcrítica. Triángulos azules: subiendo amplitud. Triángulos rojos: bajando amplitud.	39
2.16. Dos bifurcaciones subcríticas	40
2.17. Puntos de bifurcación para distintas frecuencias y para cuando la amplitud se iba aumentando o disminuyendo. Profundidad del líquido 15mm.	40
2.18. Gráficos bifurcación para distintos anchos de celda.	41
3.1. Diagrama esquemático del setup experimental. Una capa de 5mm de agua es contenida en un canal de acero inoxidable que es forzado por un vibrador. La amplitud de la superficie es medida analizando el reflejo de un láser.	45
3.2. Diagrama esquemático de el setup experimental. Una capa de 5mm de agua es contenida en un canal de acero inoxidable que es forzado por un vibrador. La amplitud de la superficie es medida analizando el reflejo de un láser sobre la superficie	46
3.3. En la fotografía se observa el amplificador de audio, generador de señales, osciloscopio y el acelerómetro.	47
3.4. En la fotografía se ve el montaje donde la canal está sobre el vibrador, el láser que apunta sobre la superficie del fluido el cual se refleja en la pantalla.	48
3.5. El plano tangente tiene dos grados de libertad, que son la inclinación del eje x y del eje y, de esta forma se crea la figura de Lissajou (el ocho) que es proporcional a la amplitud de la onda superficial.	49
3.6. Éste es el ocho que es proporcional a la amplitud de la onda superficial. Figura de Lissajou.	50

3.7.	Diagramas de bifurcación sin inclinación dan cuenta de una bifurcación supercrítica cuántica. Los datos que están sobre la línea segmentada con puntos pequeños son extraídos de [36], donde no se percataron que la bifurcación es supercrítica cuántica. Cuando el montaje está sin inclinación el sistema no exhibe una contribución de ruido aditivo significativo.	51
3.8.	Diagramas de bifurcación para la amplitud promedio de las ondas de Faraday para diferentes ángulos de inclinación, $\alpha = \{2,08^\circ; 1,3^\circ; 0,7^\circ; 0,0^\circ\}$, de izquierda a derecha respectivamente, a $F = 95Hz$. La amplitud de la onda $\langle A \rangle$ es medida en unidades arbitrarias. Las líneas continuas son la moda $\langle A \rangle_{mp}$ obtenida desde la fórmula 3.8, con las correspondientes intensidades de ruido aditivo $\eta_0 = 0,035; 0,029; 0,007$ y $0,0$, también de izquierda a derecha, respectivamente. Las líneas segmentadas indican las curvas de bifurcación determinista.	51

Capítulo 1

Introducción

1.1. Resonancia

Un sistema fuera del equilibrio es cualquier sistema que no está en equilibrio termodinámico, por lo tanto se mantiene recibiendo y disipando energía [1]. Luego, un sistema fuera del equilibrio no está aislado, se mantiene en contacto con una fuente externa de energía (e.g.: la Tierra recibiendo radiación del Sol). Por otro lado, los sistemas en equilibrio se caracterizan por exhibir comportamientos permanentes tales como oscilaciones propias (e.g.: resorte que se perturba ligeramente en torno a su punto de equilibrio oscilará con una frecuencia $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, donde k es la constante del resorte y m su masa. E.g. más cotidiano: Las mareas del océano provocadas por la gravedad lunar). Una forma eficiente de entregar energía a un sistema que tiene oscilaciones propias, usando una fuerza externa oscilante, es provocando una *resonancia* [2].

Para ilustrar lo que es una resonancia consideremos el péndulo simple, i.e., una masa bajo la influencia de la gravedad, sujeta a un soporte inmóvil por una cuerda ideal de masa despreciable (ver figura 1.1). Todo péndulo tiene una frecuencia propia de oscilación que depende del largo de la cuerda y de la gravedad del planeta de la siguiente forma [3]:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Siguiendo la idea original de Galileo [3] empecemos a darle vuelo, con soplos por ejemplo, a una frecuencia constante e igual a ν . observaremos que el péndulo alcanza cada vez más altura. Este procedimiento es análogo al de un columpio empujado por otra persona. Este movimiento se genera por un mecanismo físico llamado *resonancia*.

En lo que sigue se explicará analíticamente este fenómeno para distintos casos. ¹

¹Cabe señalar que el primero que hizo estos estudios sobre la resonancia fue **Euler**.

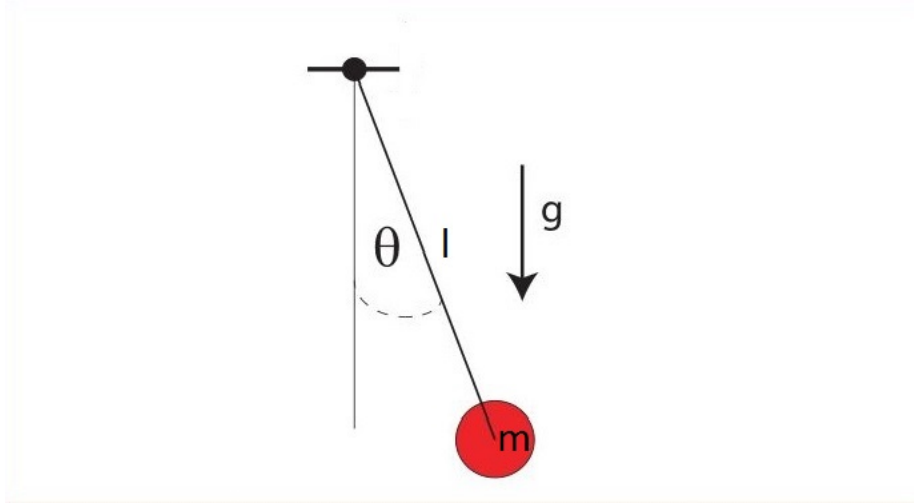


Figura 1.1: Péndulo simple: partícula ideal de masa m sujeta mediante una cuerda ideal sin masa y largo l a un punto fijo y sometida a la gravedad.

1.1.1. Oscilaciones sin roce con forzamiento periódico

Analicemos el péndulo para pequeñas oscilaciones forzadas periódicamente. Éste se puede modelar como sigue:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \Gamma \cos(\omega t) \quad (1.1)$$

donde θ es el ángulo comprendido entre la cuerda y la vertical ($\theta \ll 1$), ω_0 es la frecuencia natural del sistema sin forzamiento, Γ es la amplitud del forzamiento y ω su frecuencia. Busquemos una solución particular para (1.1). Sea $\theta_0 = b \cos(\omega t)$. Sustituyendo en (1.1) y despejando b se obtiene fácilmente $b = \Gamma / (\omega_0^2 - \omega^2)$. Luego la solución particular es:

$$\theta_0(t) = \frac{\Gamma \cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.2)$$

Ahora le sumamos la solución general de la ecuación homogénea y obtenemos la solución general de (1.1):

$$\theta(t) = \bar{a} \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{\Gamma \cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.3)$$

El primer término corresponde a oscilaciones del péndulo sin forzamiento, o sea, las oscilaciones naturales, y el segundo es una oscilación inducida por el forzamiento. \bar{a} y α son constantes que se determinan con las condiciones iniciales. Podemos observar que el segundo término diverge cuando $\omega \rightarrow \omega_0$ (ver figura 1.2).

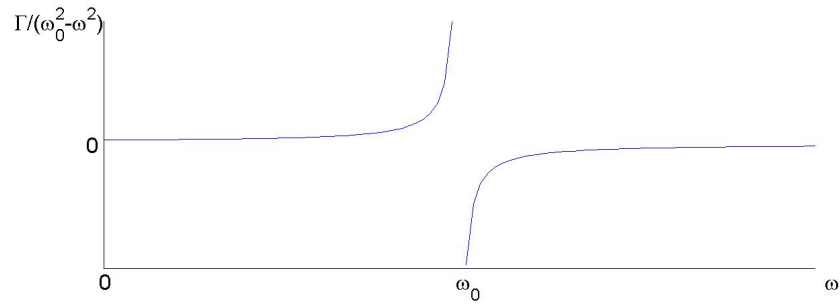


Figura 1.2: Amplitud de la solución particular (1.2) en función de ω

La solución (1.3) no es aplicable en el caso de **resonancia**, o sea, cuando la frecuencia del forzamiento es igual a la frecuencia natural del sistema. Para este caso, escribimos (1.3) de esta forma:

$$\theta = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{\Gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \quad (1.4)$$

(notar que para hacer esto cambiamos el valor de la constante \bar{a} y la renombramos a). Hacemos $\omega \rightarrow \omega_0$ y aplicamos L'Hopital:

$$\theta = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \quad (1.5)$$

Aquí se ve (ver figura 1.3) que la amplitud de las oscilaciones crece linealmente con el tiempo (esto es válido mientras las oscilaciones no dejen de ser pequeñas). Este fenómeno fue observado por Galileo en persona [3]. Esto es **resonancia**.

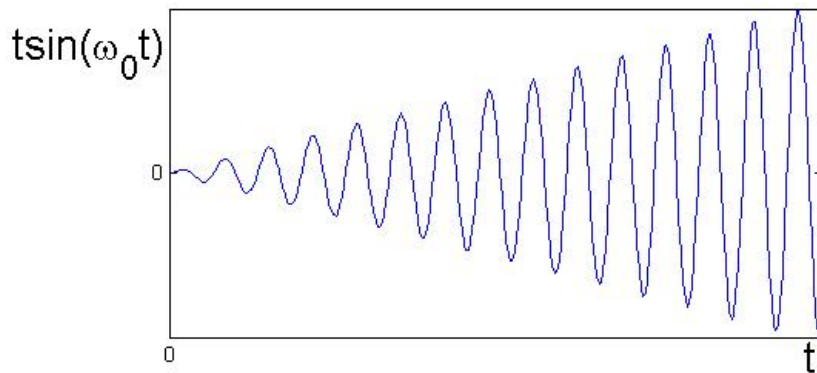


Figura 1.3: segundo término de (1.5)

1.1.2. Oscilaciones con roce sin forzamiento

Analicemos ahora el caso con roce pero sin forzamiento. En este caso se considerará una fuerza de roce proporcional a la velocidad de la partícula (arrastre de Stokes [10]). Este caso queda representado por la ecuación:

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (1.6)$$

donde λ es el *coeficiente de amortiguamiento* y ω_0 es la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento. El origen físico del amortiguamiento se debe a la fricción en los puntos de contacto y con el aire que se desplaza cuando el péndulo se mueve. Ésta es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) con coeficientes constantes. Tomamos $\theta(t) = e^{rt}$ e introducimos en (1.6), quedando la ecuación característica para r

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0, \quad (1.7)$$

de donde se obtienen dos valores para r ,

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad y \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad (1.8)$$

Con lo que la solución general de la ecuación (1.6) es:

$$\theta = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (1.9)$$

Primero veamos el caso $\lambda < \omega_0$. Tenemos para r dos valores complejos conjugados. La solución general puede escribirse como,

$$\theta = \operatorname{Re} \left\{ A e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} \right\}, \quad (1.10)$$

donde A es una constante compleja cualquiera. También se puede escribir,

$$\theta = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (1.11)$$

donde a y α son constantes reales. Como se ve, una oscilación amortiguada puede considerarse como una oscilación armónica cuya amplitud decrece exponencialmente en el tiempo. Su frecuencia ω es menor a la de las oscilaciones libres.

Ahora veamos el caso $\lambda > \omega_0$. Aquí los dos valores de r son reales negativos. La forma general de la ecuación es:

$$\theta = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}. \quad (1.12)$$

Entonces cuando el rozamiento es suficientemente grande el movimiento consiste en una disminución monótona de θ que tiende asintóticamente ($t \rightarrow \infty$) a la posición de equilibrio, y sin oscilar. Este movimiento se llama *amortiguado aperiódico*.

Por último, el caso $\lambda = \omega_0$. Aquí la ecuación característica tiene una raíz doble $r = -\lambda$, por lo que usamos reducción de orden para obtener una segunda solución linealmente independiente. Luego la solución general queda:

$$\theta = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t} \quad (1.13)$$

un caso especial del amortiguamiento aperiódico.

De todo lo anterior observamos que este péndulo presenta una bifurcación en $\lambda = \omega_0$ al pasar de una oscilación amortiguada a un movimiento amortiguado aperiódico. Esto se conoce como *transición amortiguado sobre amortiguado*.

1.1.3. Oscilaciones con rozamiento forzadas

Ahora, al caso anterior le agregamos forzamiento. La ecuación queda:

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \Gamma \cos(\omega t), \quad (1.14)$$

donde λ es el *coeficiente de amortiguamiento*, ω_0 es la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento, Γ es la amplitud del forzamiento y ω su frecuencia. Conviene trabajar esto en forma compleja:

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \Gamma e^{i\omega t}. \quad (1.15)$$

Supongamos una solución particular:

$$\theta_p = B e^{i\omega t}, \quad (1.16)$$

introduciéndola en (1.15) obtenemos para B :

$$B = \frac{\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda i\omega)}, \quad (1.17)$$

escribiendo $B = b e^{i\delta}$, resulta para b y δ :

$$b = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (1.18)$$

Tomando la parte real de la expresión $B e^{i\omega t} = b e^{i(\omega t + \delta)}$ se obtiene una solución particular de (1.14); añadiéndole la solución homogénea que calculamos antes (para el caso $\lambda < \omega_0$) obtenemos:

$$\theta = a e^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \alpha) + b \cos(\omega t + \delta). \quad (1.19)$$

El primer término disminuye exponencialmente con el tiempo, de modo que al cabo de un intervalo de tiempo suficientemente grande ($t \gtrsim \frac{1}{\lambda}$), sólo queda el segundo término

$$\theta \approx b \cos(\omega t + \delta). \quad (1.20)$$

La expresión (1.18), que da la amplitud de la oscilación forzada, aumenta cuando ω se acerca a ω_0 , pero no tiende a infinito como en el caso de la resonancia sin roce (ver figura 1.4), sin embargo, la amplitud tiene un máximo característico cerca de ω_0 .

Algunas aplicaciones cotidianas de resonancia son los láseres, el horno microondas, resonancias magnéticas, instrumentos musicales, funcionamiento de antenas y otros.

A continuación veremos otra forma de generar resonancia que es de interés para nuestro trabajo.

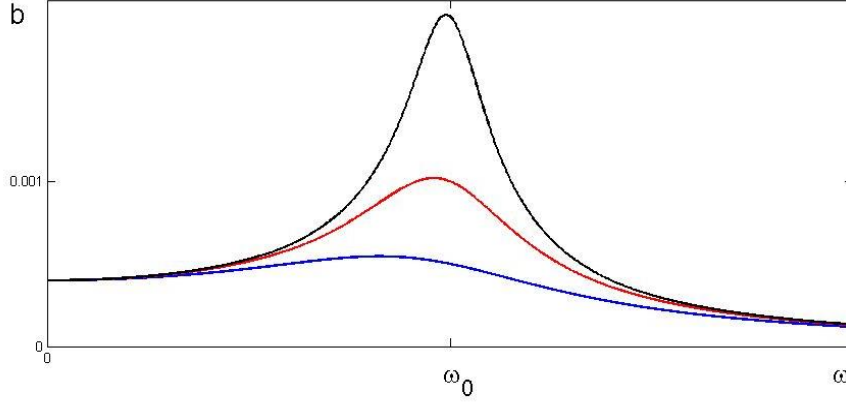


Figura 1.4: Amplitud de respuesta b versus frecuencia de forzamiento ω (ecuación 1.18). Azul: $\lambda = 20$, rojo: $\lambda = 10$, negro: $\lambda = 5$. $\omega_0 = 50$. $\Gamma = 1$.

1.2. Resonancia paramétrica

Otra manera de excitar un sistema con frecuencia propia es a través de la modulación temporal de un parámetro del cual depende la frecuencia natural del sistema (exempli gratia: gravedad o largo cuerda en el caso del péndulo). En este caso decimos que está siendo excitado de forma paramétrica [2]. Una resonancia generada de esta forma se llama *resonancia paramétrica*.

Consideremos a modo de ilustración el péndulo forzado verticalmente de masa m y largo de la cuerda l con disipación húmeda de coeficiente de amortiguamiento μ . Es decir, el pivote del péndulo se mueve verticalmente de manera armónica con amplitud a y frecuencia ω , como se ilustra en la figura 1.5.

Este sistema lo podemos describir (parados en el sistema de referencia acelerado del pivote) por la siguiente ecuación:

$$\ddot{\theta} = -[\omega_0^2 + a\omega^2 \sin(\omega t)] \sin(\theta) - \mu\dot{\theta}, \quad (1.21)$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo del péndulo respecto a la vertical (ver figura 1.5), ω_0 es la frecuencia natural del sistema, μ es el coeficiente de disipación, a y ω son la amplitud y la frecuencia del forzamiento respectivamente.

Si nos paramos en el sistema del soporte del péndulo percibiríamos el movimiento como una gravedad variable. Esto se aprecia en el término que acompaña a $\sin(\theta)$ en la ecuación 1.21

Como sabemos, si el sistema no tiene ganancia ni pérdida de energía (no hay forzamiento ni roce), el péndulo oscilará con su frecuencia natural. En este caso la solución del sistema sería:

$$\theta_l(t) = Ae^{i\omega_0 t} + \bar{A}e^{-i\omega_0 t}. \quad (1.22)$$

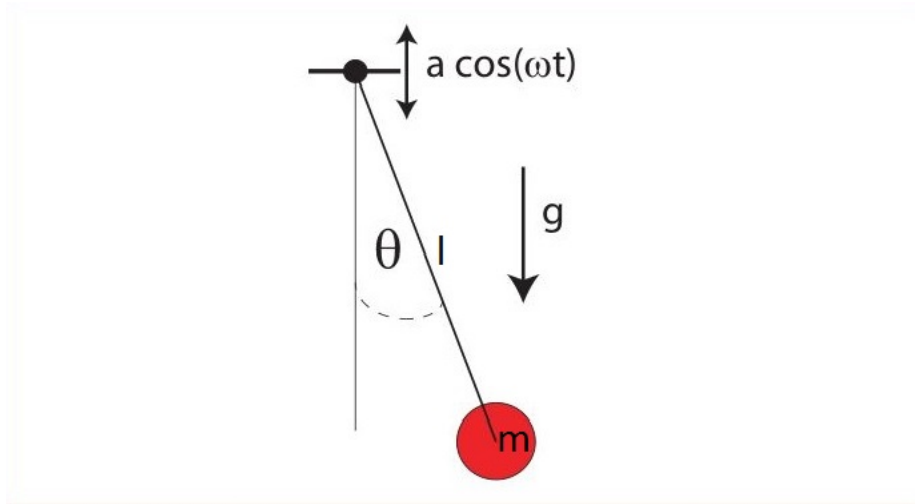


Figura 1.5: Péndulo forzado paramétricamente

Pero como el péndulo está forzado paramétricamente presenta una respuesta subarmónica, i.e. el ángulo responderá a la mitad de la frecuencia de forzamiento. Cabe mencionar que mediante simulaciones computacionales de la ecuación (1.21) se ha observado que con $\omega = \omega_0$ la solución $\theta = 0$ es estable, mientras que con $\omega = 2\omega_0$ se vuelve inestable.

La primera observación de este fenómeno fue reportada en el siglo X, en el llamado *Botafumeiro*, un incensario colocado en un péndulo gigante con el objetivo de perfumar la catedral de Santiago de Compostela [14].

1.2.1. Explicación informal de la respuesta subarmónica en la resonancia paramétrica

Para determinar la frecuencia de resonancia hacemos un análisis lineal. Así la ecuación (1.21) toma la forma siguiente:

$$\ddot{\theta} = -[\omega_0^2 + a\omega^2 \cos(\omega t)]\theta - \mu\dot{\theta} \quad (1.23)$$

$$= -\omega_0^2\theta - a\omega^2 \cos(\omega t)\theta - \mu\dot{\theta} \quad (1.24)$$

Con esta expresión podemos determinar la condición que debe satisfacer la frecuencia de forzamiento para que se produzca resonancia paramétrica.

El primer término de 1.24 ($-\omega_0^2\theta$) provoca que el péndulo oscile con frecuencia natural ω_0 . El tercer término ($-\mu\dot{\theta}$) provoca que estas oscilaciones se amortigüen i.e. que pierdan energía causando disminución de amplitud y eventualmente la detención, y también que la frecuencia de oscilación sea menor.

Si tomamos la solución del péndulo libre $\theta(t) = Ae^{i\omega_0 t} + \bar{A}e^{-i\omega_0 t}$ y lo metemos en el segundo término ($a\omega^2 \cos(\omega t)\theta$) éste toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
a\omega^2 \cos(\omega t)\theta &= (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})(Ae^{i\omega_0 t} + \bar{A}e^{-i\omega_0 t})a\omega^2/2 \\
&= (Ae^{i(\omega+\omega_0)t} + \bar{A}e^{i(\omega-\omega_0)t} + Ae^{i(-\omega+\omega_0)t} + \bar{A}e^{i(-\omega-\omega_0)t})\frac{a\omega^2}{2} \\
&\approx e^{i(\omega_0 \pm \omega)t} + c.c. \quad (c.c. = \text{complejo conjugado})
\end{aligned} \tag{1.25}$$

pero si $\omega = 2\omega_0$ entonces $e^{\pm i(\omega-\omega_0)t} = e^{\pm i\omega_0 t}$ (los otros términos son $e^{\pm i3\omega_0 t}$). Luego este término se comporta como un forzamiento efectivo en resonancia no paramétrica (ver sección 1.1 en la página 1). Por lo tanto esto es una condición de resonancia.

De aquí se obtiene que la resonancia paramétrica ocurre cuando la frecuencia de forzamiento es $\omega = 2\omega_0$.

1.2.2. Método Butikov-Galerkin en péndulo forzado paraméricamente (Análisis lineal).

Con el objetivo de caracterizar el fenómeno anterior tomamos el péndulo linealizado:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta - a\omega^2 \cos(\omega t)\theta - \mu \dot{\theta}$$

y escribimos $\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$, quedando:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta - a\omega^2 \left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right] \theta - \mu \dot{\theta}. \tag{1.26}$$

A la siguiente expansión la llamamos *expansión modal*:

$$\begin{aligned}
\theta &= A_1 e^{i\frac{\omega}{2}t} + A_3 e^{i3\frac{\omega}{2}t} + \dots + c.c. + \dots \\
\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\frac{\omega}{2}nt} + \bar{A}_n e^{-i\frac{\omega}{2}nt}
\end{aligned}$$

Tomamos el primer modo:

$$\theta = A_1 e^{i\frac{\omega}{2}t} + \bar{A}_1 e^{-i\frac{\omega}{2}t}$$

y lo metemos en 1.26 obteniendo:

$$-\left(\frac{\omega^2}{4}\right) A_1 = -\omega_0^2 A_1 - \mu \frac{i\omega}{2} A_1 - \frac{a\omega^2}{2} \bar{A}_1, \quad \text{y lo mismo c.c.} \tag{1.27}$$

En la anterior suprimimos los términos con $e^{\pm i\frac{3\omega}{2}t}$. Escribimos las ecuaciones anteriores en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 - i\frac{\mu\omega}{2} & -\frac{a\omega^2}{2} \\ -\frac{a\omega^2}{2} & \frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 + i\frac{\mu\omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{pmatrix} = 0$$

Para que haya solución no trivial exigimos $Det = 0$, lo que nos da

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)^2 + \frac{\mu^2\omega^2}{4} - \frac{a^2\omega^4}{4} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{a^2}{4} &= \left(\frac{1}{4} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{4\omega^2} \end{aligned} \quad (1.28)$$

En la figura 1.6 vemos el gráfico de esta ecuación.

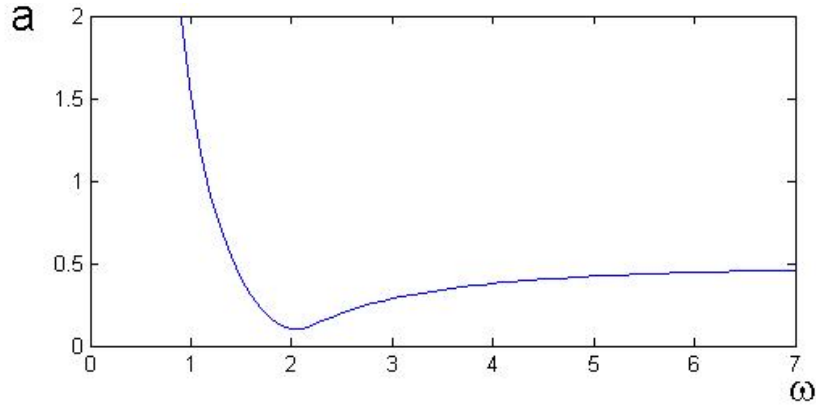


Figura 1.6: Curva de inestabilidad péndulo. Con $\omega_0 = 1$ y $\mu = 0,2$

En la figura 1.6 se ve que la curva tiene un mínimo en $\omega \approx 2\omega_0$ (en gráfico: $\omega_0 = 1$).

Ahora hacemos lo mismo pero con dos modos,

$$\theta = A_1 e^{i\frac{\omega}{2}t} + \bar{A}_1 e^{-i\frac{\omega}{2}t} + A_3 e^{i\frac{3\omega}{2}t} + \bar{A}_3 e^{-i\frac{3\omega}{2}t}$$

Metiéndolo en 1.26 y haciendo lo mismo que con un modo obtenemos la siguiente matriz,

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 - \frac{i\mu\omega}{2} & -\frac{1}{2}a\omega^2 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}a\omega^2 & \frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 + \frac{i\mu\omega}{2} & 0 & -\frac{1}{2}a\omega^2 \\ -\frac{1}{2}a\omega^2 & 0 & \frac{9\omega^2}{4} - \omega_0^2 - \frac{3i\mu\omega}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & 0 & \frac{9\omega^2}{4} - \omega_0^2 + \frac{3i\mu\omega}{2} \end{pmatrix}$$

y haciendo $Det = 0$ nos queda,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{64} \left(-a^2\omega^4 (-4a^2\omega^4 + (6i\mu\omega - 9\omega^2 + 4\omega_0^2) (2i\mu\omega - \omega^2 + 4\omega_0^2)) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{3i\mu\omega}{2} + \frac{9\omega^2}{4} - \omega_0^2 \right) (-4a^2\omega^4 (2i\mu\omega + \omega^2 - 4\omega_0^2) \right. \\
& \quad \left. - (6i\mu\omega - 9\omega^2 + 4\omega_0^2) (4\mu^2\omega^2 + \omega^4 - 4a^2\omega^4 - 8\omega^2\omega_0^2 + 16\omega_0^4)) \right) = 0 \quad (1.29)
\end{aligned}$$

Y haciendo lo mismo con tres modos:

$$\theta = A_1 e^{i\frac{\omega}{2}t} + \bar{A}_1 e^{-i\frac{\omega}{2}t} + A_3 e^{i\frac{3\omega}{2}t} + \bar{A}_3 e^{-i\frac{3\omega}{2}t} + A_5 e^{i\frac{5\omega}{2}t} + \bar{A}_5 e^{-i\frac{5\omega}{2}t}$$

nos queda la matriz,

$$\begin{pmatrix}
\frac{\omega^2}{4} - \frac{i\mu\omega}{2} - \omega_0^2 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & 0 & & & \\
-\frac{1}{2}a\omega^2 & \frac{\omega^2}{4} + \frac{i\mu\omega}{2} - \omega_0^2 & 0 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & & & \\
-\frac{1}{2}a\omega^2 & 0 & \frac{9\omega^2}{4} - \frac{3i\mu\omega}{2} - \omega_0^2 & 0 & \dots & & \\
0 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & 0 & \frac{9\omega^2}{4} + \frac{3i\mu\omega}{2} - \omega_0^2 & & & \\
0 & 0 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & & & \\
& & & & & & \\
& & & & 0 & 0 & \\
& & & & 0 & 0 & \\
& & & & -\frac{1}{2}a\omega^2 & 0 & \\
& & \dots & & 0 & -\frac{1}{2}a\omega^2 & \\
& & & & \frac{25\omega^2}{4} - \frac{5i\mu\omega}{2} - \omega_0^2 & 0 & \\
& & & & 0 & \frac{25\omega^2}{4} + \frac{5i\mu\omega}{2} - \omega_0^2 & \\
& & & & & & \dots
\end{pmatrix}$$

a ésta se le saca el determinante y se hace lo mismo que antes. En el gráfico 1.7 se ven las tres curvas juntas.

En estas curvas se ve que el mínimo siempre es $\approx 2\omega_0$, i.e. la amplitud crítica (amplitud del forzamiento necesaria para que el estado homogéneo se vuelva inestable) es la mínima cuando $\omega = 2\omega_0$.

1.2.3. Análisis débilmente no lineal de un péndulo forzado paramétricamente.

Para entender el origen de la resonancia paramétrica consideramos que el forzamiento y la disipación son pequeños (en la ecuación a y μ pequeños). Luego en la ecuación (1.21) hacemos una aproximación cúbica para el $\text{sen}(\theta)$ en la parte que está multiplicado por ω_0^2 (análisis débilmente no-lineal). El otro término lo aproximamos linealmente ($\text{sen}(\theta) \approx \theta$), ($a, \mu \ll 1, \theta \ll 1$), luego obtenemos

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + \frac{\omega_0^2}{6}\theta^3 - a\omega^2 \cos(\omega t)\theta - \mu\dot{\theta}. \quad (1.30)$$

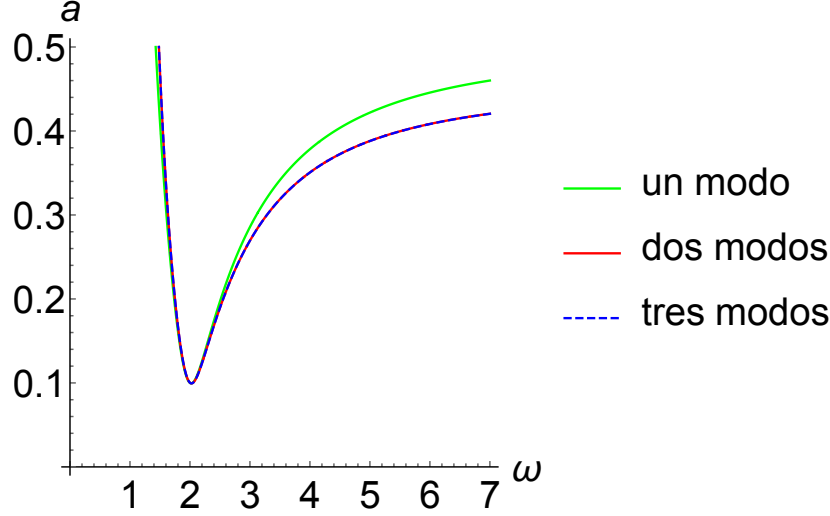


Figura 1.7: Curvas inestabilidad péndulo para el método de Butikov con uno, dos y tres modos. $\omega_0 = 1$, $\mu = 0,2$

Por lo tanto esperamos que la no-linealidad, forzamiento y disipación se equilibren, como mostraremos a continuación. Utilizamos el siguiente *ansatz*:

$$\theta = A(t)e^{i\omega_0 t} + \bar{A}(t)e^{-i\omega_0 t} + W(A, t), \quad (1.31)$$

donde A ha sido promovido a una función ($A \rightarrow A(t)$) en lo que se llama *método de variación de parámetros*. W es una función corrección la cual es no-lineal en A , i.e. $W = \sum_{p+q \geq 3}^n A^p \bar{A}^q e^{i\omega_0(p-q)t} a_{pq}$. $\partial_{tt}A \ll \partial_t A \ll \omega_0 A$ y $A(t) \ll 1$, $W \ll A$, i.e. suponemos que la amplitud es una variable lenta en el tiempo. Introduciendo este *ansatz* en la ecuación 1.30, linealizando en W y despreciando términos pequeños obtenemos:

$$(\partial_{tt} + \omega_0^2)W = \left(-2i\omega_0 \partial_t A + \frac{\omega_0^2}{2} A|A|^2 - i\mu\omega_0 A - \frac{a\omega^2}{2} \bar{A} e^{2i\nu\omega_0 t} \right) e^{i\omega_0 t} + \frac{\omega_0^2}{6} A^3 e^{3i\omega_0 t} + c.c., \quad (1.32)$$

donde $\nu = (\omega - 2\omega_0)/2\omega_0 \ll 1$. Este parámetro da cuenta de la desintonización. Es conocido como *detuning*.

Ahora si aplicamos *La Alternativa de Fredholm* a 1.32 (ver apéndice A) logramos ver que lo que está entre paréntesis en el primer término de ésta es cero,

$$0 = (-2i\omega_0\partial_t A + \frac{\omega_0^2}{2}A|A|^2 - i\mu\omega_0 A - \frac{a\omega^2}{2}\bar{A}e^{2i\nu\omega_0 t})e^{i\omega_0 t}$$

ordenando,

$$\partial_t A = -i\frac{\omega_0}{4}A|A|^2 - \frac{\mu}{2}A + i\frac{a\omega^2}{4\omega_0}\bar{A}e^{2i\nu\omega_0 t}. \quad (1.33)$$

Realizando el cambio de variable $A = B\sqrt{\frac{4}{\omega_0}}e^{i\nu\omega_0 t}$, la ecuación anterior queda de la forma

$$\partial_t B = -i\nu\omega_0 B - \frac{\mu}{2}B + i\frac{a\omega^2}{4\omega_0}\bar{B} - iB|B|^2. \quad (1.34)$$

Ésta es la ecuación paramétrica de Schrödinger no lineal [18]. El primer término da cuenta de la desincronización, el segundo de la disipación, el tercero del forzamiento temporal y el cuarto da cuenta de la dependencia no lineal de la frecuencia.

A la ecuación anterior (1.34) la llamamos ***Ecuación de Amplitud***. Notamos que esta ecuación fue escrita por primera vez para entender soluciones tipo partícula en un canal vibrado verticalmente [25].

Esta ecuación también fue derivada de las ecuaciones de fluidos [26, 25].

Recordemos que esta deducción es válida mientras que $A \ll 1$, $a \ll 1$, $\mu \ll 1$ y $\nu \ll 1$. Una solución trivial para esta ecuación es $B = 0$. Para buscar las demás soluciones estacionarias hacemos el siguiente cambio de variable: $B = Re^{i\phi}$, y lo introducimos en la ecuación 1.34 y separamos en parte real e imaginaria, con lo que nos quedan estas dos ecuaciones:

$$\mu = \frac{a\omega^2}{2\omega_0} \sin(2\phi)$$

y

$$R^3 + \nu\omega_0 R - \frac{a\omega^2}{4\omega_0} R \cos(2\phi) = 0.$$

Y de aquí se puede obtener que

$$\sin(2\phi) = \frac{2\mu\omega_0}{a\omega^2}$$

y

$$R_{\pm} = \sqrt{-\nu\omega_0 \pm \sqrt{\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}},$$

con lo que nos quedan cinco soluciones considerando $R = 0$ (para $R \neq 0$ hay dos ϕ). En la figura 1.8 podemos disfrutar de todas las soluciones ubicadas en el espacio de parámetros (γ, ν) , con $\gamma = a\omega^2$.

La zona A está delimitada por $\nu\omega_0 > \sqrt{\frac{\gamma^2}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}$ para $\nu > 0$ y por $\frac{\gamma^2}{16\omega_0^2} < \frac{\mu^2}{4}$ para $\nu < 0$. La zona B lo está por $\frac{\gamma^2}{16\omega_0^2} > \frac{\mu^2}{4}$ y por $\nu\omega_0 < -\sqrt{\frac{\gamma^2}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}$. Y la zona C por $\nu^2\omega_0^2 < \frac{\gamma^2}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}$. Así la solución $R = 0$ es estable en las zonas A y B, mientras que es inestable en la zona C. La solución $R_+ = \sqrt{-\nu\omega_0 + \sqrt{\frac{\gamma^2}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}}$ existe en B y C en forma estable. Y la solución $R_- = \sqrt{-\nu\omega_0 - \sqrt{\frac{\gamma^2}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}}$ sólo existe en B inestablemente.

La estabilidad de estas soluciones se puede calcular fácilmente separando en parte real e imaginaria la amplitud B . Este cálculo se hará para el caso $B = 0$ en la cadena de péndulos en la sección 1.2.5.

Como conclusión podemos decir que el forzamiento paramétrico puede generar resonancia paramétrica y traer consigo hasta cinco posibles soluciones estacionarias para un A, siendo sencillo establecer las regiones de existencia de las soluciones en el llamado “límite cuasi-reversible”, es decir, en el límite con poca disipación e inyección de energía. Estas soluciones de A corresponden a ciclos límites del péndulo en torno a la posición vertical.

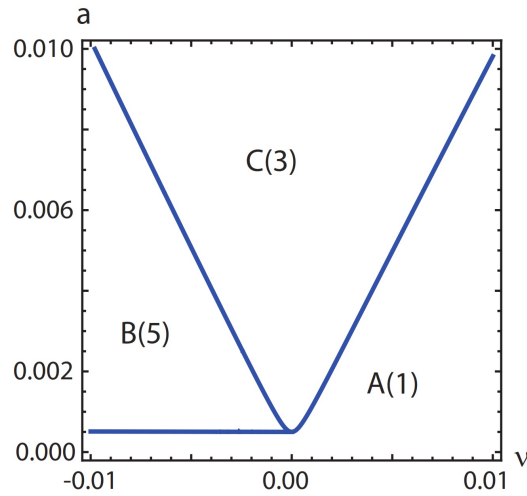


Figura 1.8: Diagrama de las soluciones para un péndulo forzado paramétricamente (ecuación 1.30). Con $\mu = 0,001$, $\omega_0 = 1$.

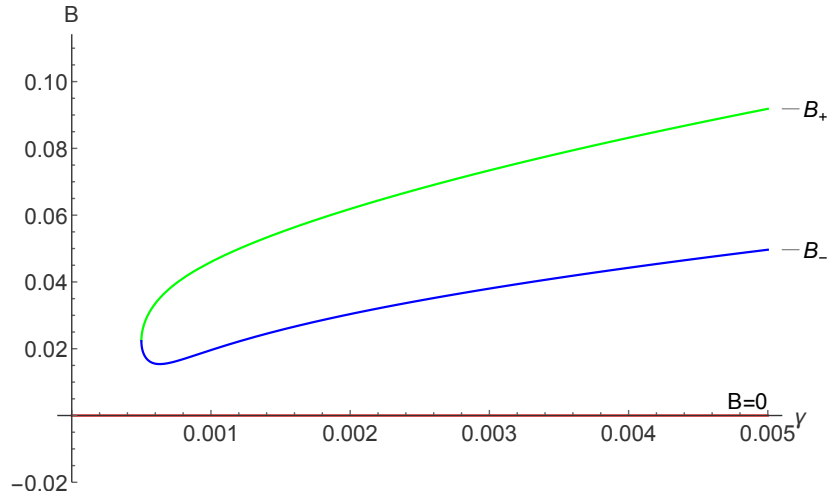


Figura 1.9: Las tres soluciones estacionarias (sin considerar ϕ) posibles de un péndulo forzado paramétricamente, a saber, R_+ , R_- y $R = 0$. $\mu = 0,001$, $\omega_0 = 1, \nu = -0,001$.

1.2.4. Butikov-Galerkin de un sistema de péndulos dispuestos equidistantemente sobre un pivote y acoplados por resortes de torsión (cadena de péndulos). (Análisis lineal).

Consideremos una cadena de péndulos acoplados (figura 1.10). A la ecuación que teníamos para el péndulo simple forzado paramétricamente (1.21) tenemos que agregarle un término de acoplamiento. Si los resortes tienen constante κ el término de acoplamiento para el i -ésimo péndulo es:

$$-\kappa(\theta_i - \theta_{i-1}) + \kappa(\theta_{i+1} - \theta_i) = \kappa[\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}] \quad (1.35)$$

Luego, la ecuación para el i -ésimo péndulo queda:

$$\ddot{\theta}_i(t) = -[\omega_0^2 + a\omega^2 \cos(\omega t)] \sin(\theta_i) - \mu\dot{\theta}_i + \kappa[\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}] \quad (1.36)$$

Ahora, si hacemos el “límite al continuo” en la variable discreta espacial i ($i \rightarrow x$) la ecuación 1.36 se transforma en:

$$\ddot{\theta}(x, t) = -[a\omega^2 \cos(\omega t) + \omega_0^2] \sin(\theta) - \mu\dot{\theta} + \kappa\partial_{xx}\theta \quad (1.37)$$

conocida internacionalmente como la *Ecuación de sine-Gordon forzada*. Donde $\theta(x, t)$ es el ángulo del péndulo en la posición x en el tiempo t , ω_0 representa la frecuencia natural del sistema, a es el desplazamiento normalizado del pivote de toda la cadena que genera el forzamiento, ω es la frecuencia del forzamiento, κ

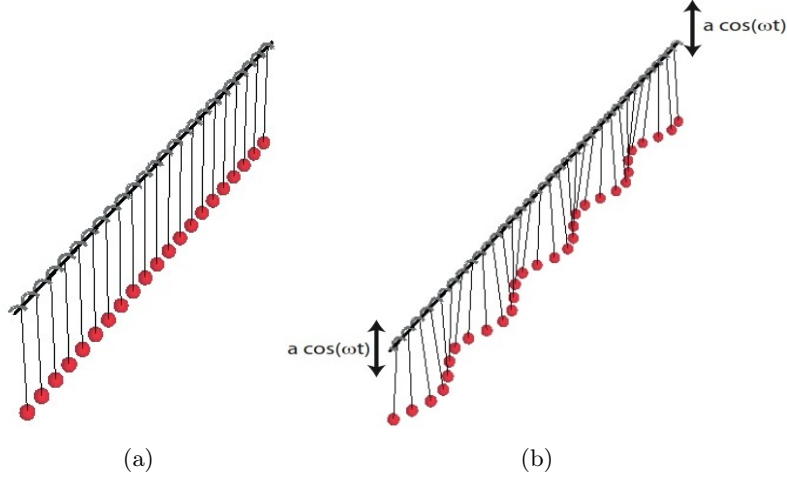


Figura 1.10: Cadena de péndulos acoplados por resortes de torsión. 1.10a estática. 1.10b con forzamiento armónico.

es el acoplamiento (que consideraremos 1 al normalizar el espacio) y μ da cuenta de la disipación.

Se puede observar numéricamente que el modelo 1.37 tiene una inestabilidad espacial, tanto para forzamientos cerca de la región de resonancia usual, como para forzamientos a alta frecuencia. En la figura 1.11, se puede ver la inestabilidad espacial en torno a la posición vertical para un forzamiento de alta frecuencia. Por otro lado, al existir la posibilidad de estabilizar la cadena de péndulos en la posición invertida, como se observa en la figura 1.11a, también se puede desestabilizar y obtener una solución de ondas estacionarias (como se ve en la figura 1.11b).

Para estudiar esta inestabilidad usaremos la estrategia de Butikov [15]. Linealizamos la ecuación 1.37:

$$\ddot{\theta}(x, t) = -[a\omega^2 \cos(\omega t) + \omega_0^2]\theta - \mu\dot{\theta} + \kappa\partial_{xx}\theta, \quad (1.38)$$

y usamos el siguiente *ansatz*:

$$\theta = A_1(x, t)e^{i\omega t/2} + A_3(x, t)e^{3i\omega t/2} + c.c., \quad (1.39)$$

A_1 y A_3 son mucho menores que uno. Metiendo 1.39 en 1.38, separando por modos de oscilación y despreciando los términos más pequeños se obtiene:

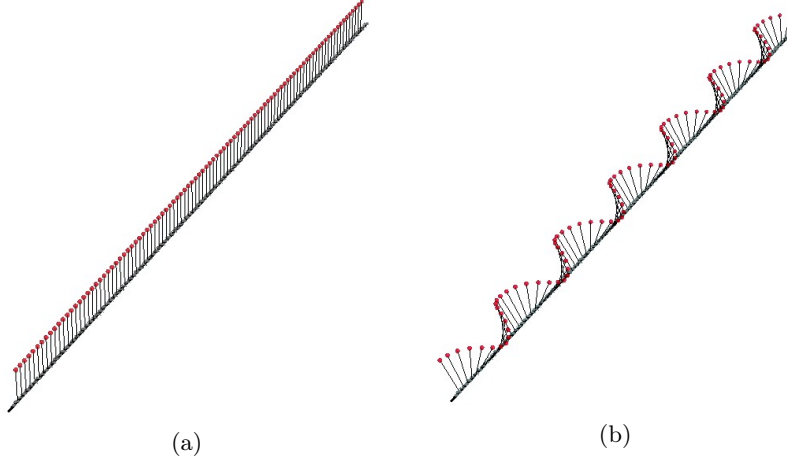


Figura 1.11: Cadena de péndulos descrita por el modelo 1.37. 1.11a muestra a los péndulos estables en la posición invertida. 1.11b muestra los péndulos al existir una inestabilidad espacial en torno la posición invertida.

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_1 + \mu \dot{A}_1 + i\omega \dot{A}_1 &= \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)A_1 - \frac{a\omega^2}{2}\bar{A}_1 - \frac{a\omega^2}{2}A_3 - i\frac{\mu\omega}{2}A_1 + \partial_{xx}A_1 \\
&+ \frac{\omega_0^2}{2}A_1|A_1|^2 + \frac{a\omega^2}{2}A_1(A_3\bar{A}_1 + \frac{A_1\bar{A}_3}{2}) \\
&+ \bar{A}_1\left(\frac{\omega_0^2}{2}A_3\bar{A}_1 + \frac{a\omega^2}{4}|A_1|^2\right) + \frac{a\omega^2}{12}A_1^3
\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_3 + \mu \dot{A}_3 + 3i\omega \dot{A}_3 &= \left(\frac{9\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)A_3 - \frac{a\omega^2}{2}A_1 - 3i\frac{\mu\omega}{2}A_3 + \partial_{xx}A_3 \\
&+ \omega_0^2 A_3|A_1|^2 + \frac{a\omega^2}{4}A_1|A_1|^2 \\
&+ \frac{a\omega^2}{4}A_3\bar{A}_1^2 + \frac{\omega_0^2}{6}A_1^3.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Las ecuaciones 1.40 y 1.41 se pueden utilizar para determinar la inestabilidad espacial. Para esto se supondrá que la dinámica de A_3 y A_1 están dadas por $A_3 = A_{03}e^{ikx+\lambda t}$ y $A_1 = A_{01}e^{ikx+\lambda t}$, pues de otra forma los términos lineales serían contradictorios al suponer que un modo decae más rápido que el otro o que tienen diferentes longitudes de onda. Al realizar el análisis lineal y buscar el punto crítico cuando $\lambda = 0$, se pueden obtener las ecuaciones

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2\right) A_{01} - \frac{a\omega^2}{2}\bar{A}_{01} - \frac{a\omega^2}{2}A_{03} - i\frac{\mu\omega}{2}A_{01} - k^2 A_{01} \tag{1.42}$$

y

$$0 = \left(\frac{9\omega^2}{4} - \omega_0^2 \right) A_{03} - \frac{a\omega^2}{2} A_{01} - 3i \frac{\mu\omega}{2} A_{03} - k^2 A_{03}. \quad (1.43)$$

Luego de 1.43

$$A_{03} = \frac{a\omega^2}{2\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k^2 - i\frac{3\mu\omega}{2}\right)} A_{01}, \quad (1.44)$$

e introduciendo esto último en 1.42 se obtiene la ecuación para A_{01} y su conjugado

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 - i\frac{\mu\omega}{2} - k^2 - \frac{a^2\omega^4}{4\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k^2 - i\frac{3\mu\omega}{2}\right)} \right) A_{01} - \frac{a\omega^2}{2} \bar{A}_{01}. \quad (1.45)$$

Con esta ecuación determinamos la curva de inestabilidad. Para el k crítico queda

$$\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 - k_c^2 - \frac{a^2\omega^4\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k_c^2\right)}{4\left(\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k_c^2\right)^2 + \frac{9\mu^2\omega^2}{4}\right)} = 0$$

y el a crítico deberá cumplir

$$\mu + \frac{3a_c^2\omega^4\mu}{4\left(\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k_c^2\right)^2 + \frac{9\mu^2\omega^2}{4}\right)} = a_c\omega.$$

Así si $\omega \gg \mu$, ω_0 se puede obtener un valor aproximado para k_c^2

$$k_c^2 \approx \frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 \quad (1.46)$$

y

$$a_c \approx \frac{\mu}{\omega}. \quad (1.47)$$

Ahora comparemos con lo hecho en 1.2.2. Si aproximamos 1.28 cuando $\omega \rightarrow 2\omega_0$ nos queda el mismo resultado.

1.2.5. Análisis débilmente no lineal de una cadena de péndulos forzada paramétricamente.

Tomemos la ecuación de la cadena de péndulos acoplados (1.37) que obtuvimos en la sección 1.2.4:

$$\ddot{\theta}(x, t) = -[\omega_0^2 + a\omega^2 \cos(\omega t)] \sin(\theta) - \mu\dot{\theta} + \kappa\partial_{xx}\theta \quad (1.48)$$

Donde κ es la constante del acoplamiento elástico. Consideramos la aproximación débilmente no-lineal:

$$\ddot{\theta}(x, t) = - [\omega_0^2 + a\omega^2 \cos(\omega t)] \theta + \omega_0^2 \frac{\theta^3}{6} - \mu \dot{\theta} + \kappa \partial_{xx} \theta \quad (1.49)$$

Hacemos lo mismo que en la sección 1.2.3. Introducimos el ansatz:

$$\theta = Ae^{i\omega_0 t} + \bar{A}e^{-i\omega_0 t} + W(A, t) \quad (1.50)$$

donde A es una variable lenta y $\partial_{tt}A \ll \omega_0 \partial_t A \ll \omega_0^2 A$. Metemos el ansatz en 1.49 y dejando sólo los términos relevantes obtenemos:

$$\begin{aligned} [\partial_{tt} + \omega_0^2] W = & \left(2i\omega_0 \partial_t A + \frac{\omega_0^2}{2} |A|^2 A - i\mu\omega_0 A - \frac{a\omega^2}{2} \bar{A}e^{2i\nu t} + \kappa \partial_{xx} A \right) e^{i\omega_0 t} \\ & + \left(\frac{\omega_0^2}{6} A^3 - \frac{a\omega^2}{2} A e^{2i\nu t} \right) e^{3i\omega_0 t} + c.c. \quad (1.51) \end{aligned}$$

y usando la Alternativa de Fredholm como hicimos en 1.2.3 obtenemos:

$$\partial_t A = -i \frac{\omega_0}{4} |A|^2 A - \frac{\mu}{2} A - i \frac{a\omega^2}{4\omega_0} \bar{A}e^{2i\nu t} - i \frac{\kappa}{2\omega_0} \partial_{xx} A \quad (1.52)$$

Introducimos los cambios de variable $A = \sqrt{4/\omega_0} \tilde{B} e^{i\nu t}$ y $X = \sqrt{2\omega_0/\kappa} x$ para que nos quede:

$$\partial_t \tilde{B} = -i\nu \tilde{B} - i|\tilde{B}|^2 \tilde{B} - \frac{\mu}{2} \tilde{B} - i \frac{a\omega^2}{4\omega_0} \bar{\tilde{B}} - i \partial_{XX} \tilde{B}. \quad (1.53)$$

La ecuación 1.53 tiene un término extra ($-i \partial_{XX} \tilde{B}$) en comparación con 1.34. Es un término de dispersión que nos dice que tenemos una cadena y no un péndulo solo. Esta ecuación (1.53) tiene las mismas soluciones estacionarias y homogénea que la ec. 1.34. O sea, haciendo el mismo cambio de variable de antes, $\tilde{B} = R e^{i\phi}$ quedan las soluciones:

$$\sin(2\phi) = \frac{2\mu\omega_0}{a\omega^2}$$

y

$$R = \sqrt{-\nu\omega_0 \pm \sqrt{\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}}.$$

Estabilidad

Primero hacemos el siguiente cambio de variable: $\tilde{B} = B e^{-i\pi/4}$. Quedando

$$\partial_t B = -i\nu B - i|B|^2 B - \frac{\mu}{2} B - i \frac{a\omega^2}{4\omega_0} \bar{B} e^{i\pi/2} - i \partial_{XX} B$$

$$\partial_t B = -i\nu B - i|B|^2 B - \frac{\mu}{2} B + \frac{a\omega^2}{4\omega_0} \bar{B} - i\partial_{XX} B \quad (1.54)$$

Estudiaremos la estabilidad de la solución homogénea $B = 0$ (recordar que estamos con espacio). Hacemos una pequeña perturbación,

$$B(x, t) = u(x, t) + iv(x, t) \quad \text{con } |B| \ll 1,$$

que la introducimos en 1.54 quedando

$$\begin{aligned} \dot{u} + i\dot{v} = & -i\nu\omega_0 u + \nu\omega_0 v - \frac{\mu}{2} u - i\frac{\mu}{2} v + \frac{a\omega^2}{4\omega_0} u - i\frac{a\omega^2}{4\omega_0} v + (u^2 + v^2)v - i(u^2 + v^2)u \\ & - i\partial_{xx} u + \partial_{xx} v, \end{aligned}$$

y separando parte real e imaginaria se ve así

$$\dot{u} = \nu\omega_0 v - \frac{\mu}{2} u + \frac{a\omega^2}{4\omega_0} u + (u^2 + v^2)v + \partial_{xx} v \quad (1.55)$$

$$\dot{v} = -\nu\omega_0 u - \frac{\mu}{2} v - \frac{a\omega^2}{4\omega_0} v - (u^2 + v^2)u - \partial_{xx} u \quad (1.56)$$

y considerando sólo los términos lineales (la perturbación es pequeña) queda

$$\dot{u} = \nu\omega_0 v - \frac{\mu}{2} u + \frac{a\omega^2}{4\omega_0} u + \partial_{xx} v \quad (1.57)$$

$$\dot{v} = -\nu\omega_0 u - \frac{\mu}{2} v - \frac{a\omega^2}{4\omega_0} v - \partial_{xx} u \quad (1.58)$$

o

$$\dot{u} = \left(-\frac{\mu}{2} + \frac{a\omega^2}{4\omega_0}\right)u + (\nu\omega_0 + \partial_{xx})v$$

$$\dot{v} = (-\nu\omega_0 - \partial_{xx})u + \left(-\frac{\mu}{2} - \frac{a\omega^2}{4\omega_0}\right)v.$$

Si escribimos la perturbación en forma matricial y con modos de fourier

$$\begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} e^{ikx} + c.c.$$

y la introducimos en 1.57 y 1.58 obtenemos (escrito matricialmente)

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} + \frac{a\omega^2}{4\omega_0} & (\nu\omega_0 - k^2) \\ -(\nu\omega_0 - k^2) & -\frac{\mu}{2} - \frac{a\omega^2}{4\omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Si la parte temporal la ponemos como $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ nos aparece una ecuación de valores propios (los lambdas)

$$\lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} + \frac{a\omega^2}{4\omega_0} & (\nu\omega_0 - k^2) \\ -(\nu\omega_0 - k^2) & -\frac{\mu}{2} - \frac{a\omega^2}{4\omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

de donde se saca para éstos:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} - (\nu\omega_0 - k^2)^2}. \quad (1.61)$$

Aquí vemos que los lambdas dependen de la longitud de onda de la perturbación ($1/k$), por lo que es importante determinar el valor k crítico que desestabilice la solución homogénea (cuando λ pasa a ser no negativo). Por esto sólo nos interesa λ_+ . En la figura 1.12 vemos a $\lambda_+(k)$ poco antes de volverse positivo, y así, haciendo inestable la solución homogénea.

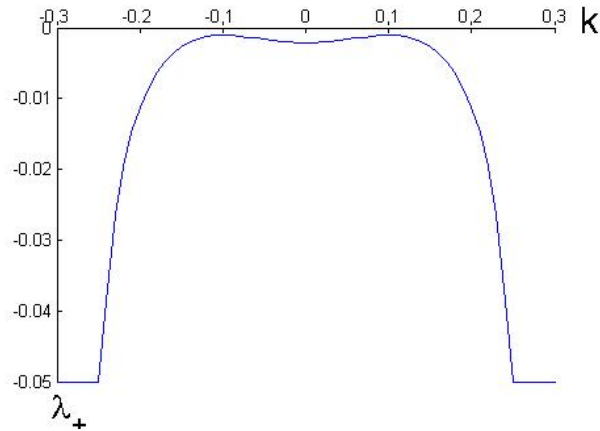


Figura 1.12: Aquí vemos a $\lambda_+(k)$ para los parámetros $\mu = 0,1$; $a = 0,048$; $\omega = 2,02$; $\omega_0 = 1$ y $\nu = 0,01$.

Buscando los máximos de esta curva encontramos los óptimos en

$$k^* = \pm\sqrt{\nu\omega_0}$$

consideramos sólo el positivo.

La curva depende del parámetro a . Ésta se desplaza hacia arriba con éste. Y podemos calcular que su óptimo pasa por el cero cuando

$$\frac{a\omega^2}{4\omega_0} = \frac{\mu}{2}$$

i.e. $a_c = \frac{2\omega_0\mu}{\omega^2}$

o sea, la inestabilidad ocurre cuando $a_c = 2\omega_0\mu/\omega^2$. Esto es más preciso que el resultado obtenido con Butikov (1.47), aunque tanto aquí como en Butikov los resultados convergen a $a_c = \mu/2\omega_0$ cuando $\omega \rightarrow 2\omega_0$.

En lo que sigue usaremos **Formas Normales**. Usaremos un método basado en [28].

Formas Normales

Sea $\gamma_c = a_c\omega^2/4\omega_0 = \mu/2$ y $\gamma = \gamma_c + \Delta\gamma$. Reemplazando k^* y γ en 1.55 y 1.56 y escribiéndolo matricialmente obtenemos

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\nu\omega_0 + \partial_{xx}) \\ -\nu\omega_0 - \partial_{xx} & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [u^2 + v^2]v \\ -[u^2 + v^2]u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\gamma & 0 \\ 0 & -\Delta\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

De formas normales:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{A} + \vec{W}^{[2]} + \vec{W}^{[3]} + \dots \\ \partial_t \vec{A} &= f^1(\vec{A}) + f^2(\vec{A}) + \dots \end{aligned}$$

Usamos el ansatz (lineal):

$$u(\vec{x}, t) = A(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iqx} + c.c., \quad q \equiv \sqrt{\nu\omega_0} \quad (1.63)$$

- $O(1)$ (a orden uno en A , o sea, $A^m \bar{A}^p$, con $m + p = n$):

Lado izquierdo de 1.62:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{[1]} = \dot{A}^{[1]} e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. = f^1 e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c.$$

lado derecho de 1.62:

$$\mathbb{L}Ae^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} Ae^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c.$$

luego,

$$\begin{aligned} f^1 e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. &= 0 \\ \Rightarrow f^1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

- $O(2)$:

$$\vec{u} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iqx} + |W^{[2]} \rangle + c.c.; \quad \partial_t A^{[2]} = f^2$$

lado izquierdo de 1.62:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{[2]} = f^2 e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |W^2 \rangle}{\partial A} \overbrace{\partial_t A^{[1]}}^{=f^1=0} + c.c.$$

lado derecho de 1.62:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} A e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{L} |W^{[2]} \rangle + c.c. &= A e^{iqx} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{L} |W^{[2]} \rangle + c.c. \\ &= \mathbb{L} |W^{[2]} \rangle + c.c. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^2 e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. = \mathbb{L} |W^{[2]} \rangle + c.c.$$

$$\text{pero } \begin{pmatrix} e^{iqx} \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(\mathbb{L}) \quad \therefore \quad f^2 = 0 \quad \wedge \quad |W^{[2]} \rangle = 0.$$

-O(3):

$$\vec{u} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iqx} + |W^{[3]} \rangle + c.c.; \quad \partial_t A^{[3]} = f^3$$

lado izquierdo de 1.62:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{[3]} = f^3 e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |W^3 \rangle}{\partial A} \overbrace{\partial_t A^{[1]}}^{=f^1=0} + c.c.$$

lado derecho de 1.62:

$$\mathbb{L} |W^{[3]} \rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ -(A e^{iqx} + \bar{A} e^{-iqx})^3 \end{pmatrix} + \mathbb{L} \overline{|W^{[3]} \rangle}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} |W^{[3]} \rangle + c.c. = \begin{pmatrix} f^3 e^{iqx} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A^3 e^{3iqx} + 3A|A|^2 e^{iqx} \end{pmatrix} + c.c.$$

$$\Rightarrow f^3 = 0 \quad \wedge \quad |W^{[3]} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{A^3}{8\nu} e^{3iqx} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{3|A|^2 A}{2\mu} e^{iqx}$$

-O(4): $\cancel{\exists}$

-O(5):

$$\vec{u} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iqx} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{A^3}{8\nu} e^{3iqx} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{3|A|^2 A}{2\mu} e^{iqx} + |W^{[5]} \rangle + c.c.$$

$$\partial_t A^{[5]} = f^5$$

lado izquierdo de 1.62:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{[5]} = f^5 e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 + c.c.$$

lado derecho de 1.62:

$$\mathbb{L}|W^{[5]} \rangle + c.c. + \begin{pmatrix} -\frac{3|A|^2 A}{2\mu} e^{iqx} + c.c. \\ -\frac{A^3}{8\nu} e^{3iqx} + c.c. \end{pmatrix} (Ae^{iqx} + \bar{A}e^{-iqx})^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{L}|W^{[5]} \rangle + c.c. &= \begin{pmatrix} f^5 e^{iqx} \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{3|A|^2 A}{2\mu} e^{iqx} + c.c. \\ \frac{A^3}{8\nu} e^{3iqx} + c.c. \end{pmatrix} (A^2 e^{2iqx} + 2|A|^2 + \bar{A}^2 e^{-2iqx}) \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}|W^{[5]} \rangle + c.c. = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\mu} |A|^2 A^3 e^{3iqx} + \frac{9}{2\mu} |A|^4 A e^{iqx} \\ \frac{A^5}{8\nu} e^{5iqx} + \frac{|A|^4 A}{8\nu} e^{iqx} + \frac{2|A|^2 A^3}{8\nu} e^{3iqx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^5 e^{iqx} \\ 0 \end{pmatrix} + c.c.$$

los términos con e^{iqx} se deben anular, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f^5 &= \frac{-9}{2\mu} |A|^4 A \\ \Rightarrow \partial_t A &= \frac{-9}{2\mu} |A|^4 A \end{aligned}$$

Ahora vamos con el unfolding:

$$\vec{u}^{[1,1]} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iqx} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{A^3}{8\nu} e^{3iqx} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{3|A|^2 A}{2\mu} e^{iqx} + |W^{[1,1]} \rangle + c.c.$$

$$\partial_t A = f^{[1,1]} - \frac{9}{2\mu} |A|^4 A$$

Lado izquierdo:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f^{[1,1]} e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c.$$

Lado derecho:

$$\mathbb{L}|W^{[1,1]} \rangle + \Delta\gamma A e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{[1,1]} = \Delta\gamma A$$

$$\Rightarrow \partial_t A = \Delta \gamma A - \frac{9}{2\mu} |A|^4 A$$

De esta ecuación desprendemos que la amplitud crece como raíz cuarta del unfolding ($|A| \propto \sqrt[4]{\Delta \gamma}$). Esta ley se ha observado en mercurio forzado paramétricamente [29], sin embargo estos líquidos son muy conservativos comparados con el agua donde la disipación es mayor. En nuestros experimentos observamos que ésta se comporta como raíz cuadrada. Esto es debido a que nuestro fluido tiene disipación no-lineal. Por lo que en la subsección siguiente agregaremos un término de disipación no lineal a la ecuación de los péndulos (ecuación 1.37).

1.2.6. Análisis débilmente no lineal en cadena de péndulos con disipación no lineal.

El nuevo término de disipación que se le agregue a la ecuación de la cadena de péndulos debe ser consistente con la simetría de la variable que describe el sistema, es decir, debe ser periódico (vale notar que en principio uno puede colocar funciones mucho más generales). La ecuación nueva queda así:

$$\ddot{\theta}(x, t) = -[\omega_0^2 + \gamma \sin(\omega t)] \sin(\theta) + \kappa \partial_{xx} \theta + (-\mu + \delta \cos(\theta)) \dot{\theta}, \quad \text{con } \delta > 0 \quad (1.65)$$

(usamos $\sin(\omega t)$ en vez de $\cos(\omega t)$ por comodidad y $\gamma := a\omega^2$). δ debe ser tal que $-\mu + \delta \cos \theta < 0$ para que el término siga siendo disipativo, i.e. $\delta/\mu < 1$.

Hacemos la aproximación,

$$\delta \cos(\theta) \dot{\theta} \approx \delta \dot{\theta} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

e introduciendo en ésta el ansatz,

$$\theta = A e^{i\omega_0 t} + \bar{A} e^{-i\omega_0 t} + W(A, t)$$

(el mismo que usamos en 1.2.5) quedando,

$$\begin{aligned} \delta \dot{\theta} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) &= \delta (\dot{A} e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 A e^{i\omega_0 t} + c.c. + \dot{W}) \left(1 - \frac{1}{2} \{A^2 e^{2i\omega_0 t} + 2|A|^2 \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 t} + O(A^4)\} \right) \end{aligned}$$

$$= \delta \left(\dot{A} - |A|^2 \dot{A} + i\omega_0 A - |A|^2 i\omega_0 A - \frac{1}{2} A^2 \dot{\bar{A}} + \frac{i\omega_0}{2} \underbrace{A^2 \bar{A}}_{|A|^2 A} \right) e^{i\omega_0 t} + \dots$$

despreciando lo chico,

$$\sim \delta (i\omega_0 A - |A|^2 A i\omega_0 + \frac{i\omega_0}{2} |A|^2 A) e^{i\omega_0 t} + \dots = \delta i\omega_0 \left(A - \frac{1}{2} A |A|^2 \right) e^{i\omega_0 t} + \dots \quad (1.66)$$

esto se le agrega a 1.51 y usando la **Alternativa de Fredholm** como hicimos en 1.2.5 se obtiene,

$$\partial_t A = -\frac{\mu}{2}A + \frac{\gamma}{4\omega_0}\bar{A}e^{2i\nu t} - i\frac{\omega_0}{4}|A|^2A - i\frac{\kappa}{2\omega_0}\partial_{xx}A + \frac{\delta}{2}A - \frac{\delta}{4}A|A|^2$$

haciendo el cambio,

$$A =: B e^{i\nu t} \frac{2}{\sqrt{\omega_0}}$$

nos queda,

$$\dot{B} = -i\nu B - i|B|^2B - \mu' B + \gamma'\bar{B} - \delta'|B|^2B - i\kappa' B_{xx}$$

con,

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{\mu}{2} - \frac{\delta}{2} & \delta' &= \frac{\delta}{\omega_0} \\ \gamma' &= \frac{\gamma}{4\omega_0} & \kappa' &= \frac{\kappa}{2\omega_0}. \end{aligned}$$

Si comparamos con 1.54 vemos que aquí nos aparece un término extra, $\delta|B|^2B$. Éste es debido a la no-linealidad que agregamos a la disipación.

Estabilidad y Formas Normales

La estabilidad es la misma,

$$k_c = \sqrt{\nu\omega_0} =: q \qquad \gamma' = \mu'$$

y definimos como antes,

$$u + iv =: B$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \nu + \kappa'\partial_{xx} \\ -\nu - \kappa'\partial_{xx} & -2\mu' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} (u^2 + v^2) \\ &\quad - \delta' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (u^2 + v^2) + \begin{bmatrix} \Delta\gamma & 0 \\ 0 & -\Delta\gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

-O(1):

Usamos el ansatz de antes,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{[1]} = A(t)e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{A}e^{-iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

$$\partial_t A^{[1]} = f^1$$

y como antes $f^1 = 0$.

$$\text{-O(2): } f^2 = 0 \text{ y } W^2 = 0.$$

-O(3):

$$f^3 e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. = \mathbb{L}|W^3 \rangle - \begin{pmatrix} 0 \\ (Ae^{iqx} + c.c.)^3 \end{pmatrix} - \delta' \begin{pmatrix} (Ae^{iqx} + c.c.)^3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \mathbb{L}\overline{|W^3 \rangle}$$

$$\mathbb{L}|W^3 \rangle + c.c. = \begin{pmatrix} f^3 e^{iqx} + \delta' A^3 e^{3iqx} + \delta' 3|A|^2 A e^{iqx} \\ A^3 e^{3iqx} + 3|A|^2 A e^{iqx} \end{pmatrix} + c.c.$$

$$\Rightarrow f^3 = -3\delta'|A|^2 A$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \nu + \kappa' \partial_{xx} \\ -\nu - \kappa' \partial_{xx} & -2\mu' \end{pmatrix} |W^3 \rangle = \begin{pmatrix} \delta' A^3 e^{3iqx} \\ A^3 e^{3iqx} + 3|A|^2 A e^{iqx} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |W^3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{-\delta' A^3 e^{3iqx}}{(9\kappa' - 1)\nu} + \dots$$

$$\therefore \partial_t A = -3\delta'|A|^2 A.$$

Ahora con unfolding,

-O(1,1):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{[1,1]} = Ae^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. + |W^{[1,1]} \rangle$$

$$\partial_t A^{[1,1]} = f^{[1,1]} - \delta' 3|A|^2 A$$

en la ecuación,

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{[1,1]} = f^{[1,1]} e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c. = \mathbb{L}|W^{[1,1]} \rangle + \Delta\gamma A e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c.$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}|W^{[1,1]} \rangle + c.c. = f^{[1,1]} e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \Delta\gamma A e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c.$$

$$\Rightarrow f^{[1,1]} = \Delta\gamma A$$

$$\therefore \partial_t A = \Delta\gamma A - 3\delta'|A|^2 A$$

Esto sigue siendo super-crítico, sin embargo, la amplitud ahora tiene otra ley, ésta crece como $A = \sqrt{\Delta\gamma/3\delta}$, es decir como una ley de potencia diferente, por lo que agregaremos más disipación no lineal para obtener un término cuántico en la ecuación de amplitud.

1.2.7. Análisis débilmente no lineal en cadena de péndulos con disipación no lineal de mayor orden.

La ecuación del péndulo con disipación no-lineal era,

$$\ddot{\theta}(x, t) = -[\omega_0^2 + \gamma \text{sen}(\omega t)] \sin(\theta) + \kappa \partial_{xx} \theta + (-\mu + \delta \cos(\theta)) \dot{\theta}, \quad \text{con } \delta > 0$$

Para aumentar la no-linealidad le agregamos un término a la aproximación del coseno,

$$\delta \cos(\theta) \dot{\theta} \approx \delta \dot{\theta} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} \right)$$

usando el ansatz 1.67 tenemos,

$$\begin{aligned} \delta \dot{\theta} \frac{\theta^4}{4!} &= \delta \left(\dot{A} e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 A e^{i\omega_0 t} + c.c. + \dot{W} \right) \frac{1}{4!} \left(A^4 e^{4i\omega_0 t} + \binom{4}{3} A^2 |A|^2 e^{2i\omega_0 t} \right. \\ &\quad \left. + c.c.(2 \text{ térm.}) + \binom{4}{2} |A|^4 + O(A^6) \right) \\ &= \delta \left[\frac{A^2}{6} |A|^2 \dot{A} + \frac{i\omega_0}{12} A |A|^4 + \frac{|A|^4}{4} \dot{A} \right] e^{i\omega_0 t} + \dots \end{aligned}$$

despreciando lo chico,

$$\delta \dot{\theta} \frac{\theta^4}{4!} \approx \delta \left[\frac{i\omega_0}{12} |A|^4 A \right] e^{i\omega_0 t} + \dots$$

esto se agrega a 1.66 y se hace lo mismo de antes, con lo que,

$$\partial_t A = -\frac{\mu}{2} A + \frac{\gamma}{4\omega_0} \bar{A} e^{2i\nu t} - i \frac{\omega_0}{4} |A|^2 A - i \frac{\kappa}{2\omega_0} \partial_{xx} A + \frac{\delta}{2} A - \frac{\delta}{4} A |A|^2 + \frac{\delta}{24} |A|^4 A$$

el cambio,

$$A =: B e^{i\nu t} \frac{2}{\sqrt{\omega_0}}$$

$$\Rightarrow \dot{B} = -i\nu B - i|B|^2 B - \mu' B + \gamma' \bar{B} - \frac{\delta}{\omega_0} |B|^2 B - i\kappa' B_{xx} + \frac{2\delta}{3\omega_0^2} |B|^4 B \quad (1.68)$$

con,

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{\mu}{2} - \frac{\delta}{2} \\ \gamma' &= \frac{\gamma}{4\omega_0} & \kappa' &= \frac{\kappa}{2\omega_0}. \end{aligned}$$

Estabilidad y Formas Normales de la solución periódica

La estabilidad es la misma,

$$k_c = \sqrt{\nu\omega_0} =: q \quad \gamma' = \mu'$$

y como antes,

$$u + iv := B$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \nu + \kappa' \partial_{xx} \\ -\nu - \kappa' \partial_{xx} & -2\mu' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} (u^2 + v^2) \\ &\quad - \delta' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (u^2 + v^2) + \frac{2}{3} \delta'' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (u^2 + v^2)^2 + \begin{bmatrix} \Delta\gamma & 0 \\ 0 & -\Delta\gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $\delta'' := \delta/\omega_0^2$.

Las formas normales son lo mismo quedando,

$$\partial_t A = \Delta\gamma A - 3\delta' |A|^2 A$$

La inclusión de términos disipativos no lineales cambia el tipo de transición supercrítica cuántica a una transición supercrítica cúbica.

1.2.8. Análisis numérico

Haciendo una simulación numérica de la cadena de péndulos y observando como se comporta la función amplitud de la oscilación de ésta obtuvimos lo que se ve en la figura 1.13.

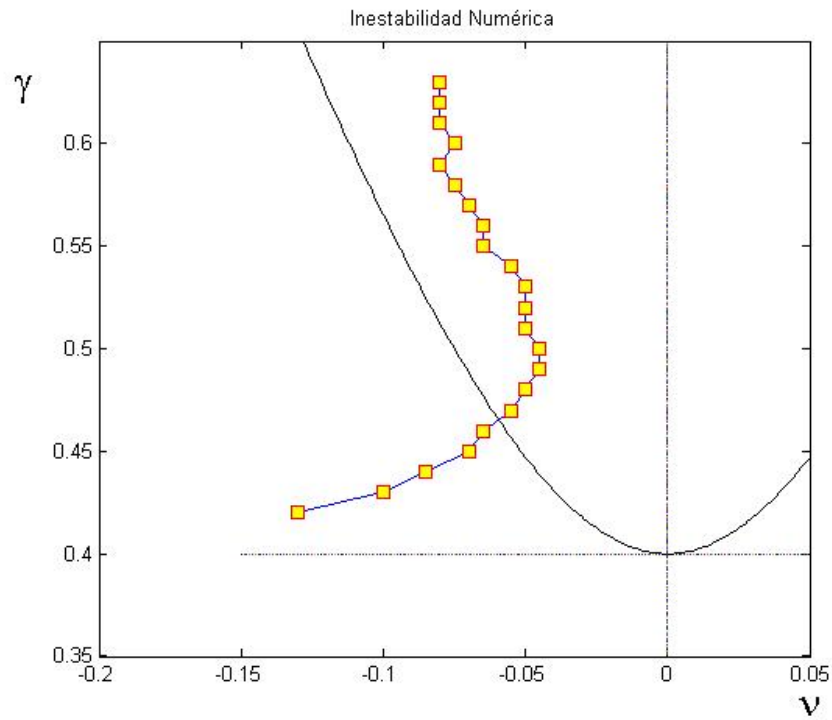


Figura 1.13: Inestabilidad numérica.

Un buen ejemplo de osciladores acoplados son los fluidos, entendiendo que la superficie de un fluido se puede modelar como osciladores acoplados. Por esto estudiamos un fluido sometido a una vibración vertical. Acá observamos la superficie con dos técnicas distintas. Una es una medición local (con un láser) y la otra es global. En el capítulo siguiente se describen estos experimentos.

Capítulo 2

Parte Experimental

En este capítulo estudiaremos experimentalmente la formación de patrones en un contenedor cuasi bi-dimensional tipo celda *Hele-Shaw* (placas paralelas separadas por una distancia pequeña en comparación con las dimensiones de éstas) con un fluido Newtoniano (agua), el cual es forzado verticalmente de manera oscilatoria. Este experimento es conocido en la literatura como el montaje de Faraday [17].

Un sistema físico realista, que se puede ver como el límite al continuo de un sistema discreto de osciladores acoplados, es la superficie de un fluido [4]. Lo anterior lo podemos entender simplemente basado en nuestra experiencia cotidiana con fluidos. Cuando uno perturba la superficie de un fluido naturalmente vemos la propagación de ondas (figura 2.1a). Por otro lado si uno observa el movimiento de boyas en la superficie del mar (figura 2.1b), uno observa que éstas oscilan a una frecuencia muy determinada, es decir, la superficie de un fluido es un oscilador. A grandes perturbaciones vemos comportamientos complejos como el rompimiento de olas en el borde del mar (figura 2.1c). Lo anterior nos lleva a concluir que para grandes deformaciones la superficie del mar deviene en un oscilador no lineal.



(a) Ondas en el agua. (b) Boya que oscila con las olas del mar. (c) Ola reventando.

Figura 2.1

Por lo tanto, en forma intuitiva, sabemos que un fluido en equilibrio se

comporta como un conjunto de osciladores no lineales. Para forzar paramétri- camente la superficie de un fluido éste puede someterse a una oscilación vertical [13, 25, 17, 27]. Igualmente es importante notar que debido al contacto del fluido con su contenedor, se produce en este tipo de sistema disipación de energía. Por lo tanto uno esperaría encontrar que la superficie se auto organiza de manera de absorber y disipar la energía [1, 6] . Lo anterior se puede lograr por medio de la formación de patrones y estructuras localizadas. En esto consiste nuestro trabajo de campo y es lo que se explicará a continuación. Vale comentar que el primer científico que encontró la formación de patrones fue **Michael Faraday** [17] (figura 2.3). Es interesante notar que Faraday estaba tratando de caracte- rizar los modos normales de oscilación de un fluido en un contenedor vibrado (fenómeno de forzamiento lineal), sin embargo, para su sorpresa, descubre que los patrones oscilaban a la mitad de la frecuencia de vibración del contenedor. Lo que es inaceptable para una teoría de modos propios.

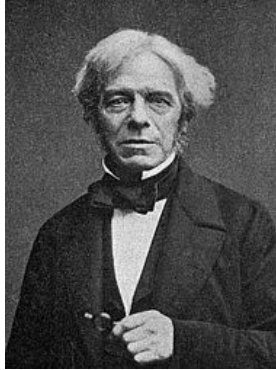


Figura 2.2: Michael Faraday

2.1. Montaje

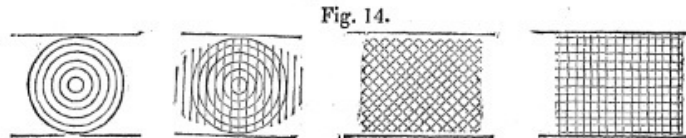
El montaje experimental, ilustrado en la figura 2.7, está compuesto princi- palmente por un fluido Newtoniano, celda *Hele-Shaw*, vibrador, generador de funciones, amplificador, acelerómetro y cámara. Todos estos elementos a conti- nuación serán detallados:

MEZCLA M10:

Para el estudio utilizaremos un fluido Newtoniano, es decir, las ecuaciones de Navier-Stokes son una adecuada descripción del fluido en estudio. Nosotros usaremos agua. Sin embargo, la fricción del agua con las paredes del contenedor (vidrio o polimetilmetacrilato) son relevantes y generan complejos efectos (figura 2.4).

Una manera de sobrepasar esta dificultad es considerar surfactantes como KODAC Foto Flo, los cuales al aglomerarse en la superficie del fluido, por medio

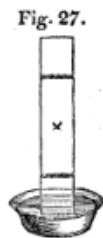
it up altogether: if the vibratory force be gradually diminished, then the heaps as gradually fall, but without returning through the order in which they were produced. The following lines may serve to indicate the course of the phenomena.



When perfectly formed, the heaps are also to the number of ten in three inches with the same depth of water as that which produced the rings. The intervals between the rings and the heaps are the same, other influential circumstances remaining unaltered.

(a) Página 325.

113. On arranging the long plate (67. 81) vertically, so that the lower extremity dipped about one third of an inch into water, fig. 27, and causing it to vibrate by applying the rod at X, or by tapping the plate with the finger, undulations of a peculiar character were observed: those passing from the plate towards the sides of the basin were scarcely visible though the plate vibrated strongly, but in place of such appeared others, in the production of which the mechanical force



(b) Página 334.

Figura 2.3: Imágenes del trabajo original de Faraday

de generar mono capas atómicas hidrofílicas, cambian radicalmente las propiedades de fricción del fluido. Por lo tanto pequeñas cantidades de surfactantes cambian notablemente la fricción con las paredes.

A continuación detallaremos las condiciones del fluido que utilizamos:

Fabricamos un fluido consistente en una mezcla cuya proporción volumétrica es 0,9 de agua destilada y 0,1 de surfactante Kodak Photo Flo 200. Usamos agua destilada por reproducibilidad, i.e. para poder generar siempre la misma mezcla, cuando el agua está contaminada no sabemos cuántos elementos tiene y es difícil controlar sus propiedades. El surfactante es agregado para disminuir la tensión superficial del agua y facilitar la aparición de ondas superficiales en el fluido, que es lo que nos interesa observar [13].

Las proporciones de la mezcla se obtuvieron haciendo varias pruebas para lograr una combinación que permitiera la formación de estructuras superficiales sin que aparecieran demasiadas burbujas, las que estropeaban el experimento.

CELDA:

El fluido está contenido en una celda de acrílico de $140 \times 45 \times 2 \text{ mm}^3$ (figu-

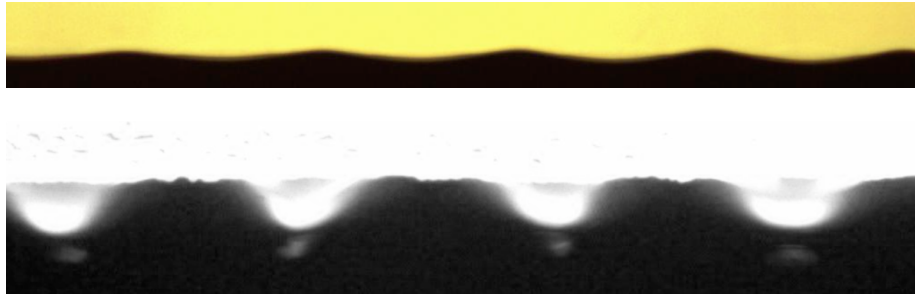


Figura 2.4: Fotos de patrones sin foto flo.

ra 2.5). Con estas dimensiones nos queda una celda quasi-bidimensional (celda *Hele-Shaw*) donde el espesor de la celda es del orden de la longitud de capilaridad, esto facilita experimentalmente que el fluido exhiba una dinámica esencialmente transversal. Así la superficie del fluido contenido en ella es quasi-unidimensional, lo que nos garantiza un fenómeno unidimensional.

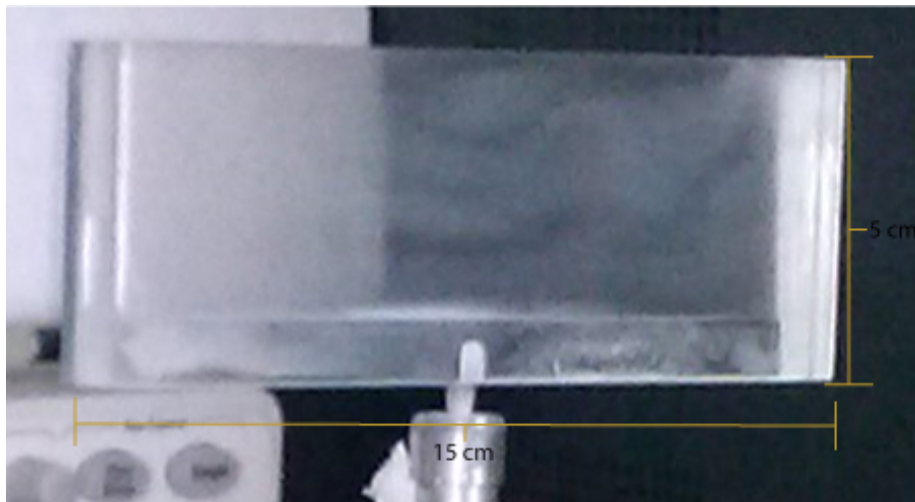


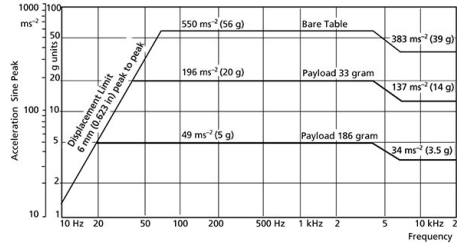
Figura 2.5: Celda *Hele-Shaw*

VIBRADOR:

Ésta está montada en un vibrador electro-mecánico marca Brüel & Kjær, modelo 4810 (figuras 2.6a 2.7 y 2.8). El vibrador produce un movimiento lineal (vertical) controlado por la señal que se le introduzca. Nosotros usamos una señal sinusoidal la que produce un movimiento oscilatorio cuya amplitud y frecuencia se controla con la amplitud y frecuencia de la señal introducida. El principio físico que se aplica en este vibrador es la *inducción electromagnética*, id est, el sistema está compuesto por dos bobinas sobre las cuales se hace pasar una corriente alterna induciendo atracción y repulsión entre ellas.



(a) mini-shaker Brüel Kjær tipo 4810



(b) sine performance curves

Figura 2.6

GENERADOR Y AMPLIFICADOR El vibrador es alimentado con una señal sinusoidal generada en un generador de funciones marca Rigol, modelo DG2041A. y ésta pasada por un amplificador marca Brüel & Kjær, modelo Power Amplifier Type 2732 antes de ser alimentada al vibrador.

ACELERÓMETRO Sobre la celda ha sido instalado un acelerómetro (piezoeléctrico) marca PCB Piezotronics con el fin de medir las aceleraciones que experimenta la celda. El acelerómetro funciona con un piezoeléctrico que cuando es sometido a aceleraciones genera diferencias de voltaje que dependen de la violencia de la aceleración. Éstas son amplificadas por el amplificador y medidas por un voltímetro y un osciloscopio.

ILUMINACIÓN La celda es iluminada por un arreglo de luces blancas led. La luz pasa por un difusor antes de golpear la celda en una de sus caras. Esto es para que la iluminación sea más pareja y no tan intensa en un solo punto.

CÁMARA: Se usa una cámara CCD ¹ colocada apuntando la otra cara de la celda (a contra luz) para tomar imágenes y videos del perfil de la superficie del fluido para posterior análisis. Las imágenes se toman en escala de grises. Algunas de estas imágenes son tomadas estroboscópicamente para obtener una imagen estática.

¹Un dispositivo de carga acoplada (en inglés charge-coupled device, conocido también como CCD) es un circuito integrado que contiene un número determinado de condensadores enlazados o acoplados. Bajo el control de un circuito interno, cada condensador puede transferir su carga eléctrica a uno o a varios de los condensadores que estén a su lado en el circuito impreso.

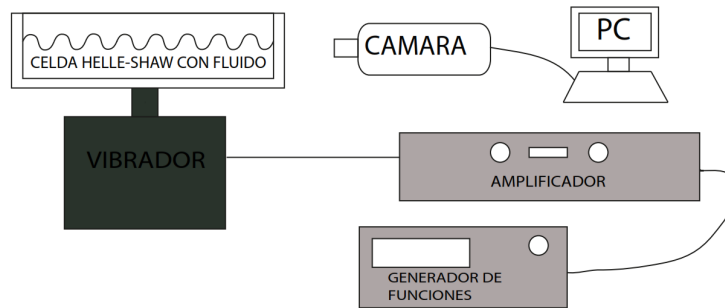


Figura 2.7: Esquema del montaje



Figura 2.8: Izquierda: Celda montada sobre vibrador, detrás de ella está el osciloscopio y frente a ella la cámara; Derecha: Generador de funciones.

2.2. Ejecución del experimento

La celda es llenada con el fluido a distintas profundidades y se le aplica una vibración armónica vertical. El fluido se desplaza solidariamente con el contenedor, es decir, para un observador externo al contenedor el fluido oscila con la frecuencia del vibrador. En estas circunstancias se observa que, para una frecuencia fija, al ir aumentando la amplitud, se llega a un punto donde aparecen patrones en la superficie del fluido (ondas estacionarias), a este fenómeno se le llama *inestabilidad de Faraday* [17]. A una amplitud menor la superficie permanece plana (estado homogéneo).

Las ondas que aparecen tienen una frecuencia igual a la mitad de la frecuencia del forzamiento. A esto se le llama una respuesta *subarmónica*, que es característica de una resonancia paramétrica. Estas ondas son resultado del balance de momentum inyectado al fluido y la disipación con las paredes.

Se hicieron observaciones llenando la celda a profundidades de 10, 15 y 20 mm y usando señales de varias frecuencias para explorar el espacio de fase y encontrar

alguna que fuera medible dentro de la precisión experimental disponible.

El rango de frecuencias usadas variaba entre 35 y 70 hz a pasos de 5 hz . Por cada frecuencia se buscaba el punto de bifurcación usando como variable la amplitud de la señal.

Partiendo del estado homogéneo se empezaba a aumentar la amplitud discretamente. En cada paso se esperaba algunos segundos (típicamente del orden de 5) para ver si ocurría la bifurcación. De ser negativo, se pasaba al siguiente paso. Habiendo encontrado el punto de bifurcación se hacía el mismo proceso pero disminuyendo la amplitud hasta el punto donde se volvía al estado homogéneo. La amplitud del patrón aumentaba con la amplitud de la señal (ver figuras 2.15 y 2.16). Si se aumentaba mucho la amplitud llegaba un momento en el que se empezaban a eyectar gotas.

Otra cosa que se observó es que al inclinar el sistema, y a partir de cierto ángulo, el patrón empezaba a viajar hacia el lado de mayor profundidad.

2.3. Observaciones

En general para bajas amplitudes de forzamiento la superficie del fluido permanece homogénea (plana horizontal) (figura 2.9).

A medida que se aumenta la amplitud (a una frecuencia fija) se llega a un punto en que el sistema se reorganiza en estructuras periódicas llamadas *patrones* (figura 2.10). El punto donde ocurre este cambio se llama *punto de bifurcación*, ya que la solución cambia cualitativamente.

El punto de bifurcación es dependiente de la frecuencia del forzamiento y aumenta linealmente con ésta (figura 2.17).

Estos patrones que aparecen son ondas estacionarias cuya frecuencia es la mitad de la frecuencia del forzamiento, por esto se dice que el sistema responde de forma *subarmónica*.

La longitud de onda del patrón depende de la frecuencia del forcing, disminuyendo con ésta.

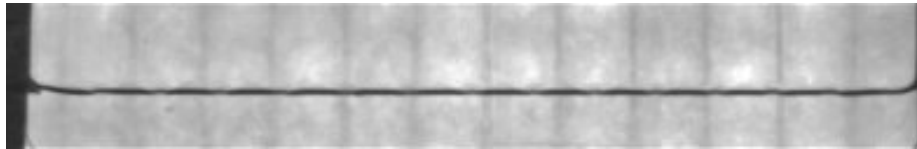


Figura 2.9: Estado homogéneo. Superficie plana. (Frecuencia forzamiento: 40hz).

2.4. Análisis de imágenes

Las imágenes obtenidas son pasadas por un algoritmo hecho en matlab para obtener el perfil de la superficie del fluido.

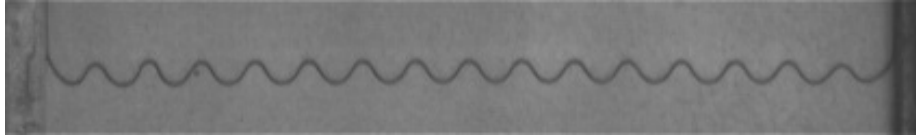


Figura 2.10: Ejemplo de ondas superficiales que se forman sobre el fluido. (Frecuencia forzamiento: 60hz).

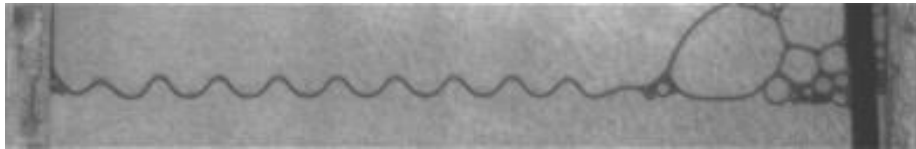


Figura 2.11: Ejemplo de patrón con burbujas molestas. (Frecuencia forzamiento: 60hz).

ALGORITMO:

Detrás de la celda ponemos una superficie blanca para tener un buen y uniforme contraste, y detrás de ésta se pone la iluminación.

A partir de las filmaciones a la celda en movimiento se selecciona una buena imagen y se convierte a blanco y negro. Estas imágenes son matrices de valores entre 0 (negro) y 255 (blanco). El fluido se ve más oscuro que el fondo, por lo que, tiene valores más bajos en la matriz. Luego, lo que hace el algoritmo es recorrer la matriz de arriba a abajo y de izquierda a derecha y cuando encuentra una pixel con un valor menor a cierto *umbral* pone el valor de la fila de ese pixel en un vector (en la posición del vector con el valor de la columna de ese pixel). El valor del *umbral* se determina a ojo pasando varias veces el algoritmo. Así se obtiene un vector $y(x)$ (figura 2.13) que nos da la forma del perfil. Una vez obtenido el perfil, éste es sometido a un suavizado (*smooth*), que consiste en promediar cada valor de y con sus 4 vecinos más cercanos, para facilitar el análisis posterior.

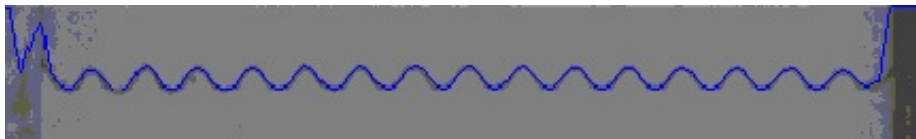


Figura 2.12: Ejemplo de sacado de perfil con algoritmo de matlab. (Frecuencia forzamiento: 60hz).

Obtenida la imagen del perfil se le aplica una *fft* en matlab y así se puede obtener la longitud de onda. Esto se trató de hacer algunas veces pero no resultó mucho.

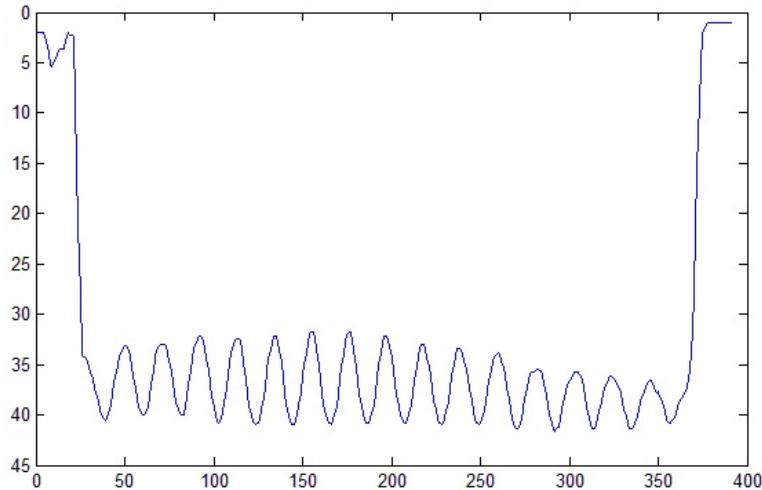


Figura 2.13: Ejemplo perfil sin la imagen de fondo. (Frecuencia forzamiento: 60hz).

2.5. Datos y gráficos

Al medir los puntos de bifurcación subiendo y bajando la amplitud (como se describió en la sección 2.2) se observó que ocurría un tipo de bifurcación subcrítica (ciclo de histéresis, figura 2.14), como se ve en las figuras 2.15 y 2.16.

En el gráfico de la figura 2.17 podemos observar los puntos de bifurcación para distintas frecuencias obtenidos subiendo y bajando la amplitud (sección 2.2). Podemos apreciar que se produce histéresis en todas las frecuencias en que se hicieron medidas, y que los puntos de bifurcación van aumentando linealmente con la frecuencia. Es importante notar que la inestabilidad de Faraday (emergencia de ondas subarmónicas estacionarias) comunmente es asociada a una bifurcación super crítica, la cual efectivamente es observada en contenedores con razones de aspecto similares. Sin embargo, en una celda de Hele-Shaw los efectos de capilaridad son relevantes y cambian la naturaleza de la bifurcación. En la figura 2.18 se ven bifurcaciones para distintos anchos de celda. En la de un milímetro de ancho se aprecia que existe histéresis (bifurcación subcrítica). En anchos superiores se ven bifurcaciones super críticas.

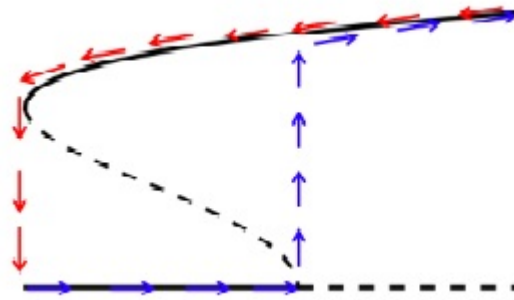


Figura 2.14: Diagrama ciclo de histéresis o bifurcación subcrítica. Las flechas azules indican los datos tomados cuando se iba subiendo la amplitud y las rojas cuando se iba bajando.

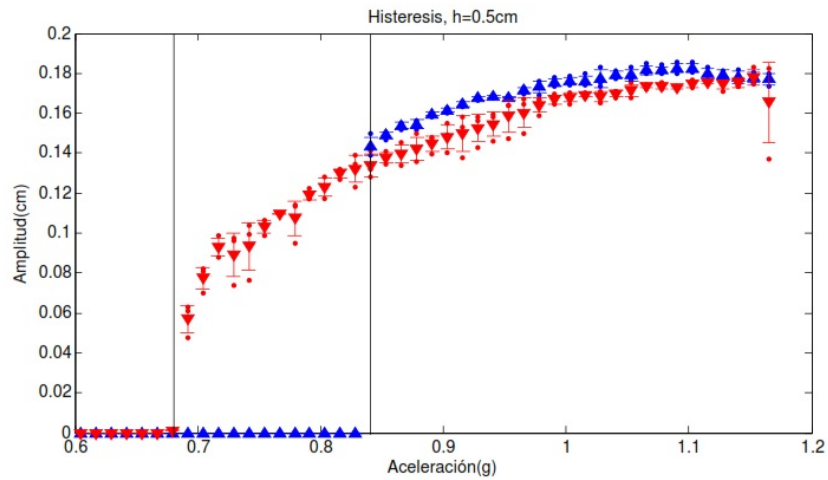


Figura 2.15: Bifurcación subcrítica. Triángulos azules: subiendo amplitud. Triángulos rojos: bajando amplitud.

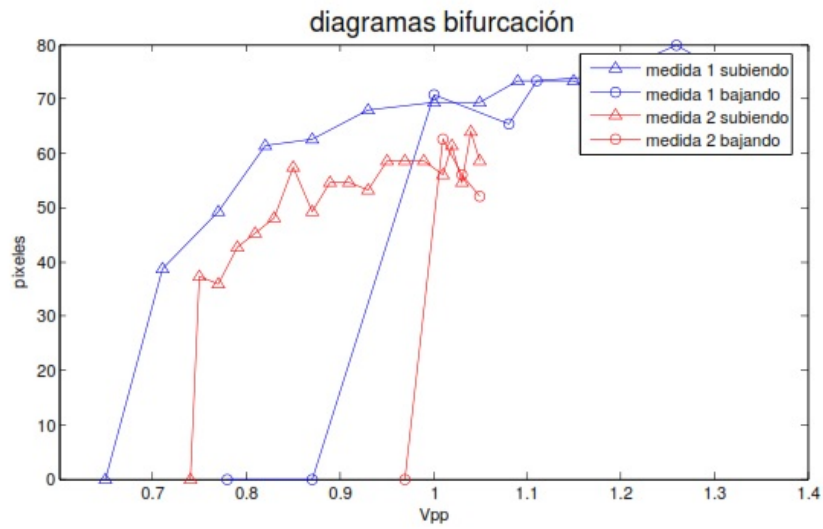


Figura 2.16: Dos bifurcaciones subcríticas

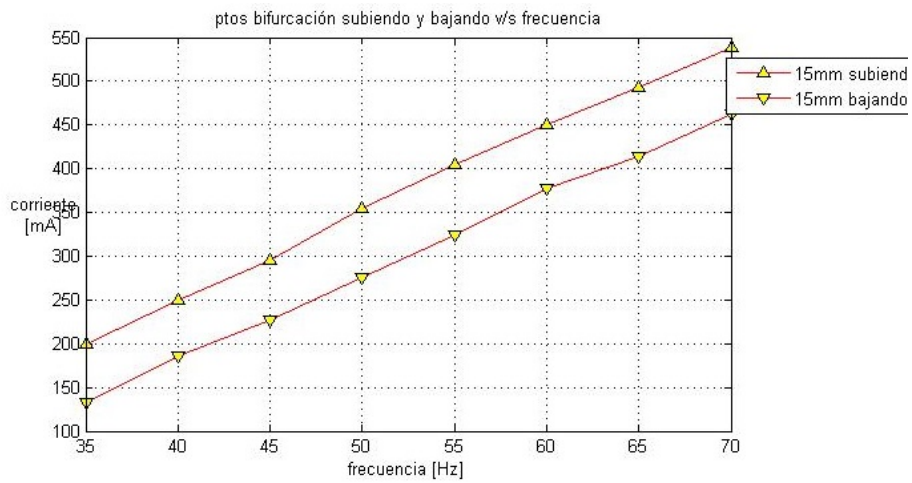


Figura 2.17: Puntos de bifurcación para distintas frecuencias y para cuando la amplitud se iba aumentando o disminuyendo. Profundidad del líquido 15mm.

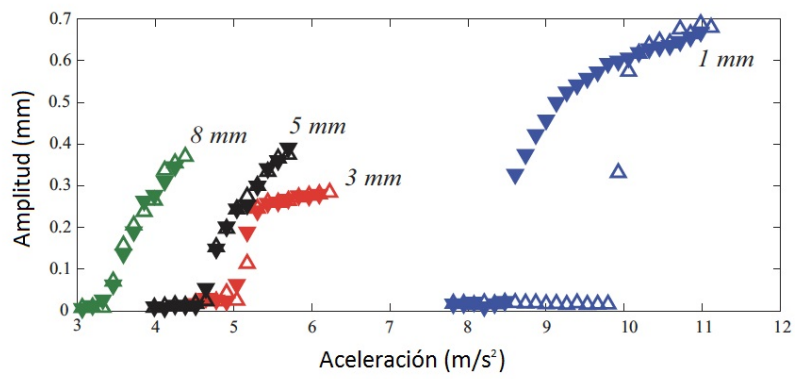


Figura 2.18: Gráficos bifurcación para distintos anchos de celda.

Capítulo 3

Formación de Patrones en Sistemas Cuasi Reversibles e Influencia del Ruido.

3.1. El ruido en física

En física se le llama *ruido* a todas las interacciones y señales fluctuantes en el tiempo (y espacio a veces) cuya dependencia temporal no puede ser determinada con precisión. El ruido está presente en todos los fenómenos físicos. Sus causas varían mucho dependiendo de la naturaleza del fenómeno en estudio: la agitación térmica y la turbulencia son ejemplos de fuentes de fluctuaciones, que en realidad tienen que ver con la gran cantidad de variables (grados de libertad) involucradas en la dinámica de un sistema. El *Ruido Johnson-Nyquist* [30, 31], descubierto en 1928, es otro caso de ruido térmico: la agitación térmica de los electrones en un conductor genera una fluctuación en la diferencia de potencial entre dos extremos del material.

Las fluctuaciones del vacío [32, 33] es otro tipo de ruido. El ruido de fondo cósmico genera interesantes efectos relacionados con la creación y destrucción espontánea de partículas.

El *Movimiento Browniano* [34] es posiblemente el primer fenómeno en motivar el concepto de ruido en física. Fue descubierto por el botánico Robert Brown en 1827 [34], quien observó el movimiento aleatorio de partículas de polen inmersas en agua¹. El movimiento browniano fue descrito por primera vez por Einstein en 1905 [35]. Los estudios de Einstein motivaron la creación de un nuevo campo en la Física: la *Mecánica Estadística*, y también en la matemática: el *Cálculo Estocástico*.

¹Aunque Jan Ingenhousz ya había observado en 1785 un movimiento similar de partículas de carbón en alcohol

3.1.1. Incorporación del ruido a las ecuaciones que modelan fenómenos físicos

Consideremos por simplicidad un sistema de E.D.O.'s de primer orden:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{f}(\vec{a}) \quad (3.1)$$

Como dijimos antes los fenómenos físicos tienen una componente que no se puede modelar determinísticamente. Aquí es donde entra a jugar la modelación estocástica. En 3.1 el lado derecho ($\vec{f}(\vec{a})$) es en realidad un promedio de estas fluctuaciones.

Para incorporar el ruido usamos una función estocástica (variable aleatoria) $\vec{\zeta}(t)$. Ésta no es una función de t , si no que en cada instante t toma un valor aleatorio según una densidad de probabilidad $p(\vec{\zeta}(t))$ con $\langle \zeta_i(t) \rangle = 0 \quad \forall i, t$.

Como \vec{f} no depende explícitamente de t en 3.1 el sistema es invariante ante traslaciones temporales, por lo tanto, las fluctuaciones deben tener un comportamiento similar. Luego suponemos que la densidad de probabilidad $p(\vec{\zeta})$ no depende del tiempo. Como consecuencia de esto ocurre que el valor que tome $\vec{\zeta}(t)$ es independiente de los valores que haya tomado antes.

Una simple forma de construir ζ a primer orden aleatorio es:

$$\vec{\zeta}(t) = M(\vec{a}) \cdot \vec{\xi}(t)$$

Donde $M(\vec{a})$ es una matriz de funciones de \vec{a} y $\vec{\xi}(t)$ es un arreglo de variables aleatorias independientes entre sí. Se llama **ruido aditivo** cuando los M_{ij} son ctes. Y **ruido multiplicativo** cuando sí dependen de \vec{a} .

Como $\vec{\zeta}$ tiene media nula y densidad de probabilidad estacionaria, las ξ_k deberían comportarse igual (y ser independientes como se dijo antes), i.e.:

$$\langle \xi_k(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_k(t) \xi_{k'}(t') \rangle = \delta_{kk'} \delta(t - t')$$

donde $\delta_{kk'}$ es la *delta de Kronecker* y $\delta(t - t')$ es la *delta de Dirac*. Estas propiedades hacen que $\vec{\xi}(t)$ sea una función de **ruido blanco descorrelado**.

Incorporando el ruido en la ecuación 3.1 obtenemos una *ecuación diferencial estocástica* o **ecuación de Langevin**

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{f}(\vec{a}) + M(\vec{a}) \cdot \vec{\xi}(t) \quad (3.2)$$

Estas ecuaciones no satisfacen el *principio de determinismo*, a saber, si conocemos las condiciones iniciales de un sistema podemos conocer toda su evolución en el tiempo con total precisión.

Una alternativa es hacer un estudio probabilístico de la evolución del sistema y obtener una densidad de probabilidad para \vec{a} : $p(\vec{a}, t)$. Del cálculo estocástico [11] se obtiene una ecuación para $p(\vec{a}, t)$ llamada **ecuación de Fokker-Planck**:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\left(-f_i + \frac{1}{2} M_{ik} \frac{\partial M_{jk}}{\partial a_j} \right) p + \frac{1}{2} M_{ik} M_{jk} \frac{\partial p}{\partial a_j} \right) \quad (3.3)$$

3.2. Procedimiento Experimental.

Para examinar los efectos del ruido en una bifurcación supercrítica quíntica, se procede a perturbar paraméricamente una canal rígida cuasi-unidimensional, es decir, cuyo largo es mucho mayor que su ancho (ver figura 3.1), cuyas dimensiones son $16,7\text{cm}$ de largo, $0,7\text{cm}$ de ancho y $1,0\text{cm}$ de profundidad. Es importante notar que en estas condiciones el tamaño de los meniscos (estimado en $0,6\text{cm}$) hace que los estudios teóricos en estas condiciones sean complejos. La mayoría de éstos considera infinito o cero el sistema en la dirección horizontal, es decir, ignora la dinámica horizontal o el efecto de los meniscos. En este último caso será el marco donde nuestro sistema se desarrollará.

En el interior de la canal se coloca agua destilada. Para perturbar la canal utilizamos un vibrador electromagnético modelo *VTS80*, conectado a un amplificador y éste al generador de señales modelo Agilent *33220A*. La aceleración es medida con un acelerómetro de Piezoelectric modelo *PCB340A65*. Al caracterizar la salida del vibrador se obtiene sólo aceleración vertical, puesto que la aceleración transversal es menor que el 2% de la aceleración vertical, esta aceleración horizontal fue medida por medio de conectar el piezo eléctrico en la dirección horizontal y estudiar como el sistema responde en el rango de parámetros en estudio. Luego, el generador de señales se programa con una función sinusoidal a la cual se le puede variar la frecuencia y amplitud. Este sistema es manejado como un sistema de co-dimensión uno, puesto que se fija la frecuencia y se hace un barrido en la aceleración. Todo el estudio se realiza entorno al punto de bifurcación, las amplitudes que se estudian en la vecindad de la bifurcación son pequeñas, luego para poder medirlas se utiliza un láser que se refleja en la superficie libre del fluido y las variaciones de la altura se miden de una forma indirecta en una pantalla midiendo la amplitud de una figura de Lissajou, la cual en nuestro caso corresponde a un ocho (ver figura 3.2).

3.3. Montaje Experimental.

El montaje representado por el esquema 3.2 muestra al vibrador de manera que el eje de éste es perpendicular al canal, además el sistema puede ser inclinado. En la figura 3.3 se observa el amplificador de audio, generador de señales, osciloscopio y el acelerómetro que es el instrumental de medición que se utilizó. La figura 3.4 se puede ver todo el montaje donde el láser apunta la superficie del canal y es reflejado en la pantalla.

3.4. Método De Medición.

La medición de la amplitud de las ondas superficiales se realiza usando un sistema óptico propuesto por [38] y utilizado por [37] (ver figura 3.5).

tomando $\partial_y \zeta = 0$ para hacer más sencillo el cálculo tomando P como la distancia entre el plano $Z = 0$ y P y D la distancia entre el punto de incidencia

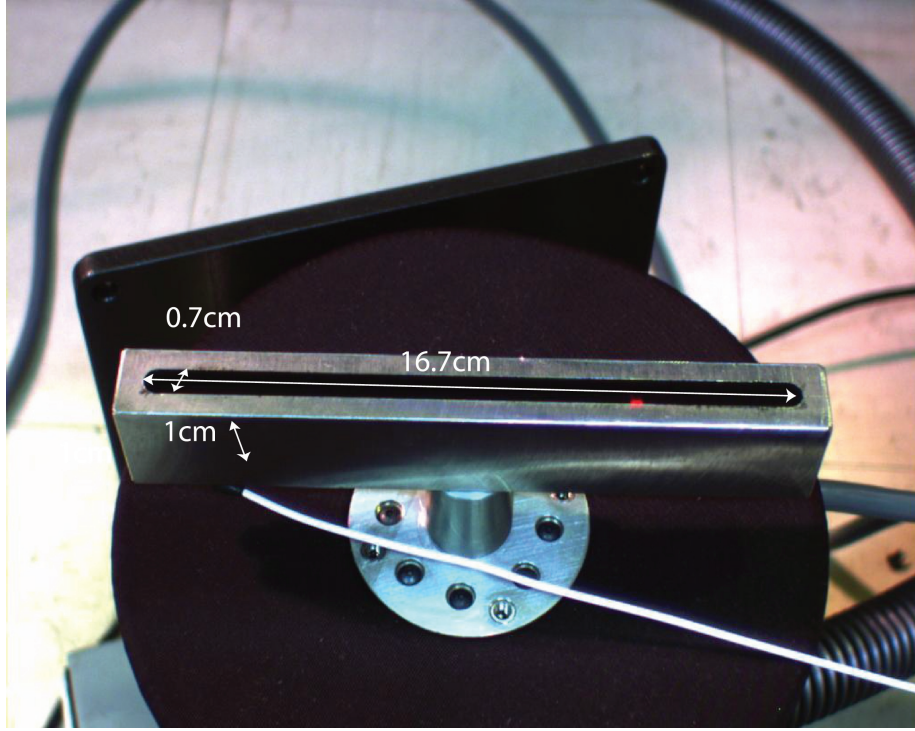


Figura 3.1: Diagrama esquemático del setup experimental. Una capa de 5mm de agua es contenida en un canal de acero inoxidable que es forzado por un vibrador. La amplitud de la superficie es medida analizando el reflejo de un láser.

del láser y la pantalla y el plano tangente coincide con el plano $Z = 0$ tenemos la siguiente relación

$$\tan \theta + 2\partial_x \zeta \sec^2 \theta = \frac{P}{D} \quad (3.4)$$

$$\frac{P}{D} = \tan \theta \left\{ 1 - 4 \frac{\partial_x \zeta}{\sin 2\theta} \right\} \quad (3.5)$$

$$A = K_1 + K_2 \partial_x \zeta \quad (3.6)$$

donde K_1 y K_2 son constantes luego la amplitud tiene una relación lineal con la amplitud del ocho 3.6.

La onda cerca del punto de bifurcación tiene décimas de milímetro, esto dificulta su medición puesto que queremos caracterizar y medir el punto de bifurcación. La proyección del láser es una figura de Lissajou (ver 3.6), la distancia que separa los extremos de la proyección es proporcional a la amplitud de la

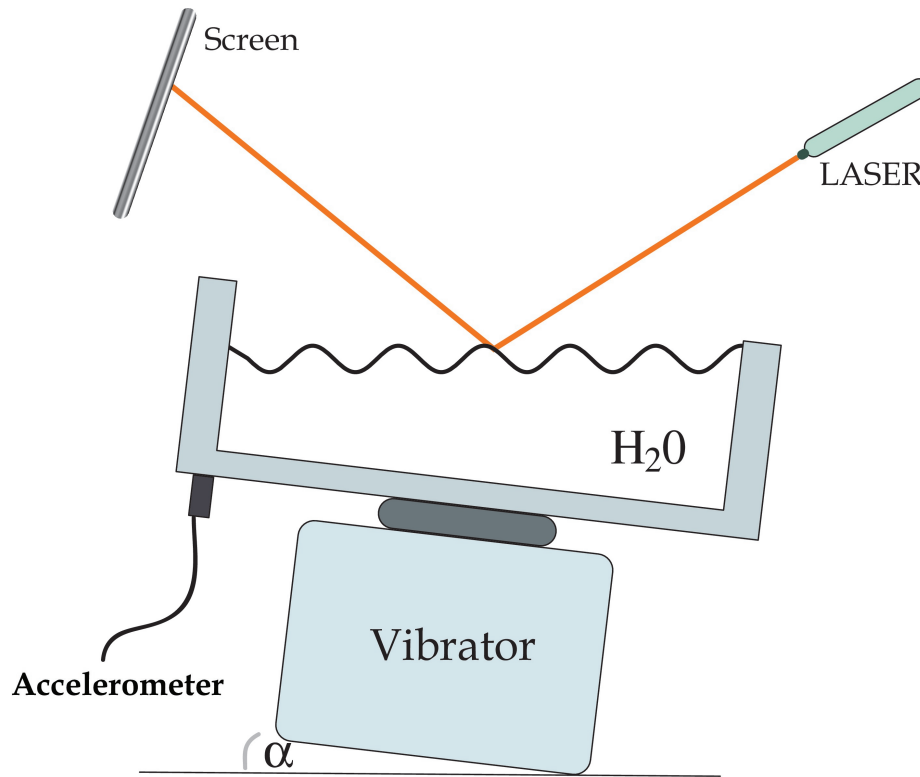


Figura 3.2: Diagrama esquemático de el setup experimental. Una capa de 5mm de agua es contenida en un canal de acero inoxidable que es forzado por un vibrador. La amplitud de la superficie es medida analizando el reflejo de un láser sobre la superficie

onda superficial en el caso de un modo simple de excitación en este experimento como ya mostramos. Este método no permite medir instantáneamente la amplitud ya que el movimiento del láser reflejado en la pantalla es muy rido, luego medimos la amplitud de la figura de Lissajou sobre la pantalla. La amplitud es una amplitud promedio en el tiempo $\langle A \rangle$, Obtenida utilizando una cámara digital modelo AVT Marlin 80, la cual la calibramos con una regla para relacionar la longitud con los pixeles de la pantalla. Para hacer la medición utilizamos el software ImageJ. El sistema puede ser inclinado en un ángulo α pequeño (ver figura 3.2), al inclinar el sistema se logra que éste pierda simetría, es decir, los meniscos son distintos, también aparece una fuerza horizontal, debido a que el canal ahora es vibrado horizontalmente, produciendo frentes y emisión de ondas las cuales colisionan con las ondas subarmónicas generando una dinámica compleja.



Figura 3.3: En la fotografía se observa el amplificador de audio, generador de señales, osciloscopio y el acelerómetro.

3.5. Resultados

En el caso sin inclinación ($\alpha = 0 \pm 0,05$ rad), la amplitud promedio $\langle A \rangle$ de la onda en la vecindad del umbral de la inestabilidad de Faraday es presentado en la figura 3.7 como una función del parámetro aceleración normalizada para $F = 95Hz$ y $F = 60Hz$. Para que el sistema sea fuertemente afectado por la dinámica quebrada por los meniscos hemos escogido frecuencias donde el tamaño de los meniscos son comparable a la amplitud, es decir, hay un fuerte acoplamiento entre los meniscos y la amplitud de la onda. Para ambas frecuencias, se observa detuning positivo (aproximadamente $2,5Hz$) a $95Hz$. La longitud de onda observada está de acuerdo con la aproximación de agua profunda y es del orden de $3mm$.

Benjamin y Ursell (1954) trabajaron en la ecuación de Euler para un ruido no viscoso y mostraron que cada modo normal (para pequeñas amplitudes) actúa como un oscilador armónico cuya relación de dispersión es:

$$\omega_0^2 = \left[gk + \sigma \frac{k^3}{\rho} \right] \tanh(kh)$$

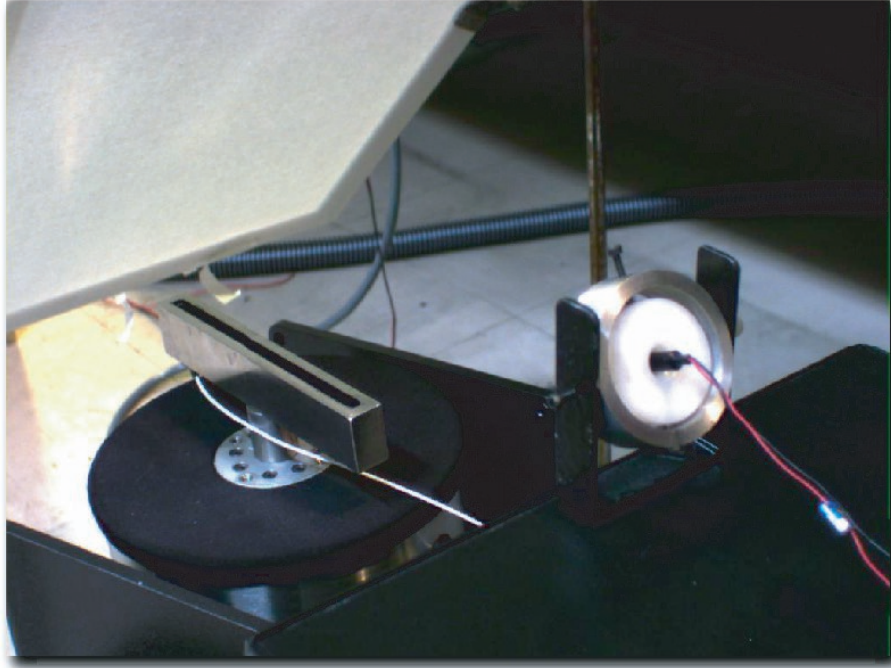


Figura 3.4: En la fotografía se ve el montaje donde la canal está sobre el vibrador, el láser que apunta sobre la superficie del fluido el cual se refleja en la pantalla.

donde g es la aceleración de gravedad, k el número de onda, ρ la densidad del fluido, σ es la tensión superficial del fluido, y h la profundidad del fluido. La aproximación de agua profunda es $\tanh(kh) \approx 1$ luego la relación de dispersión para agua profunda queda

$$\omega_0^2 = gk + \sigma \frac{k^3}{\rho}$$

Para $F = 95Hz$ se midió la relación de dispersión con los valores de la tabla 3.1 obteniendo una $F = 95,69Hz$.

Valores para la relación de dispersión				
λ	σ	g	ρ	F
0.00278	0.0295	9.8	1000	95.69

Tabla 3.1: Valores de los términos de la relación de dispersión en MKS.

La aceleración del contenedor es $a_v = \gamma\Omega^2$, donde γ y $\Omega = 2\pi F$ son la amplitud de la vibración y la frecuencia angular respectivamente. La bifurcación es limitada superiormente por la eyección de gotas, es decir, a medida que aumento la aceleración del vibrador la forma de la onda superficial es cada vez

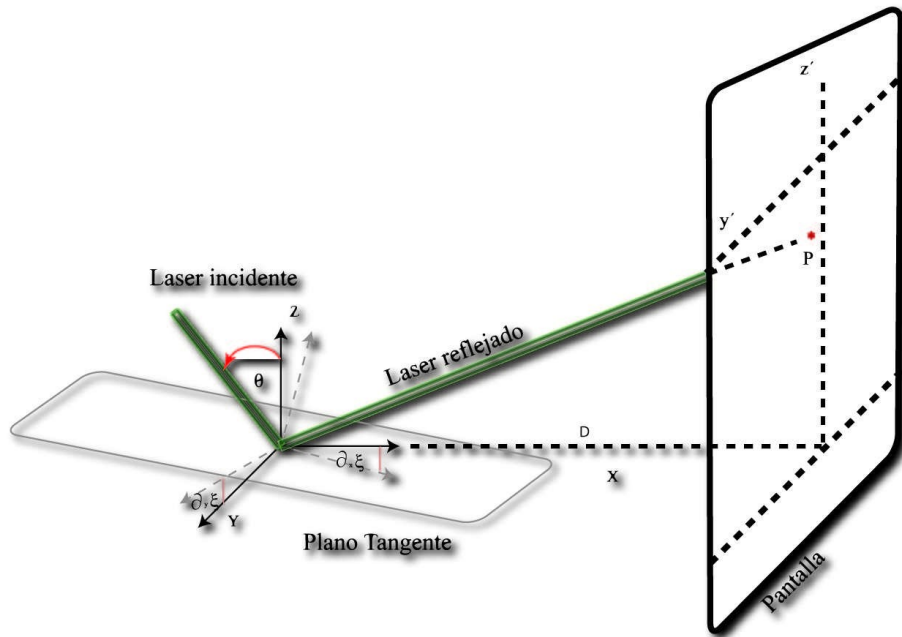


Figura 3.5: El plano tangente tiene dos grados de libertad, que son la inclinación del eje x y del eje y, de esta forma se crea la figura de Lissajou (el ocho) que es proporcional a la amplitud de la onda superficial.

más puntiaguda dando origen a eyección de gotas a partir de un valor crítico de la aceleración. El comportamiento de $\langle A \rangle$ como función a_v para la situación supercrítica satisface la ley $\langle A \rangle \propto (a_v - a_c)^{1/4}$, donde a_c es la aceleración crítica por la cual el sistema exhibe la inestabilidad de Faraday. Generalmente, una bifurcación supercrítica satisface la ley $\langle A \rangle \propto (a_v - a_c)^{1/2}$, la cual es consecuencia de una ecuación de amplitud cubica no lineal [6] para el patron. De verdad, los diagramas de bifurcación supercríticos mostrados en la figura 3.7 se debe a la saturación de ondas superficiales por no linealidades quinticas. De ahí, la inestabilidad de Faraday para una amplia gama de parámetros expone una bifurcación supercrítica quintica, desde el punto vista de las bifurcaciones una bifurcación supercrítica quintica es de codimensión dos, es decir, no es una bifurcación genérica, sin embargo para sistemas cuasi reversibles como hemos mostrado en las secciones anteriores es una situación genérica. Notamos que el estudio de este tipo de sistemas es interesante ya que permite estudiar bifurcaciones que son poco frecuentes.

Es importante notar que en las medidas experimentales sin inclinar no observamos un suavizamiento de la curva debido a las fluctuaciones, luego el sistema no tiene una fuente aditiva de ruido si no que multiplicativo, es decir, para amplitud cero el ruido es despreciable. Desde un punto de vista de ecuaciones de amplitud esto queda modelado como,

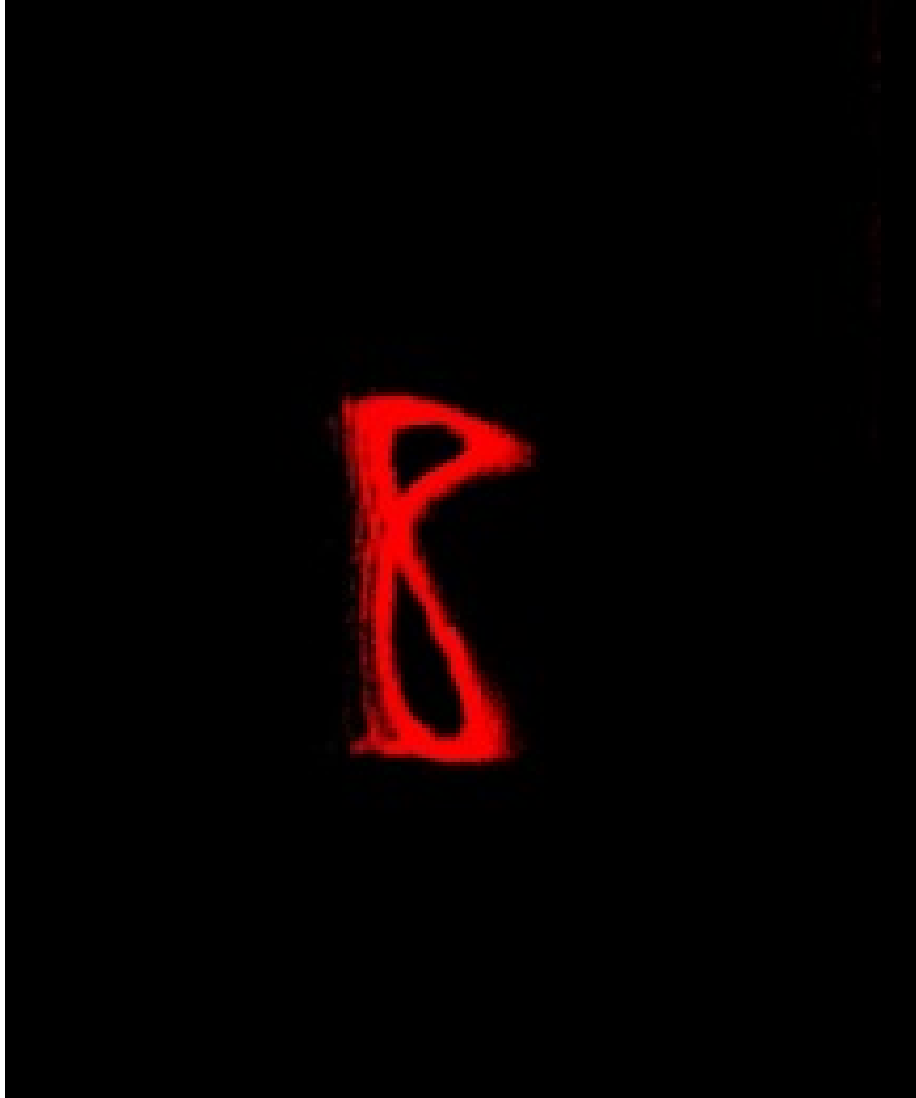


Figura 3.6: Éste es el ocho que es proporcional a la amplitud de la onda superficial. Figura de Lissajou.

$$\partial_t A = \epsilon A - |A|^2 A + Af(|A|, \zeta(t)).$$

Luego uno espera una transición abrupta, continua pero no diferenciable en el diagrama de bifurcación.

Debido a la naturaleza macroscópica del sistema, debemos considerar las fluctuaciones que exhibe este sistema.

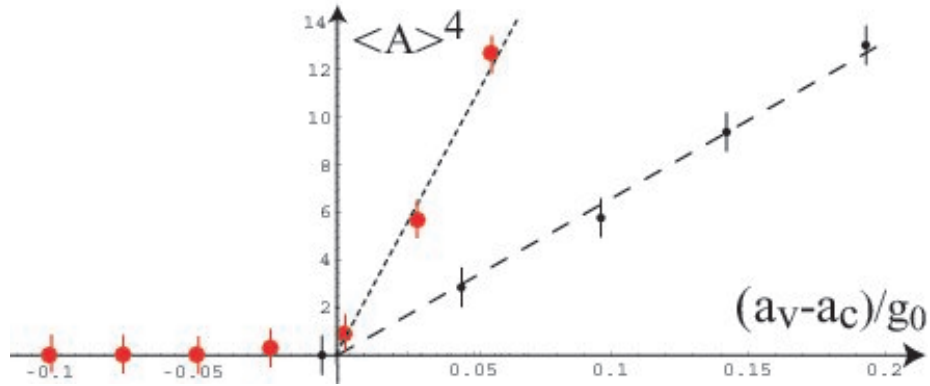


Figura 3.7: Diagramas de bifurcación sin inclinación dan cuenta de una bifurcación supercrítica quintica. Los datos que están sobre la línea segmentada con puntos pequeños son extraídos de [36], donde no se percataron que la bifurcación es supercrítica quintica. Cuando el montaje está sin inclinación el sistema no exhibe una contribución de ruido aditivo significativo.

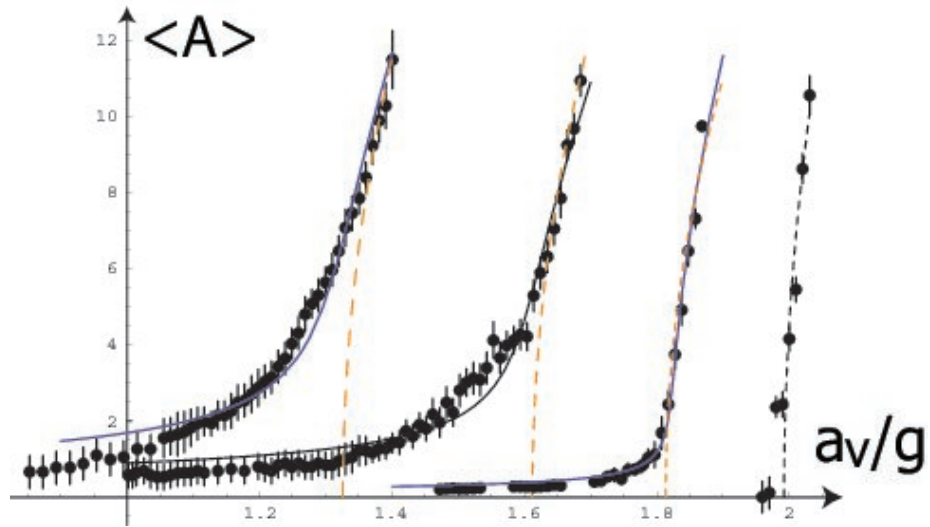


Figura 3.8: Diagramas de bifurcación para la amplitud promedio de las ondas de Faraday para diferentes ángulos de inclinación, $\alpha = \{2, 08^\circ; 1, 3^\circ; 0, 7^\circ; 0, 0^\circ\}$, de izquierda a derecha respectivamente, a $F = 95Hz$. La amplitud de la onda $\langle A \rangle$ es medida en unidades arbitrarias. Las líneas continuas son la moda $\langle A \rangle_{mp}$ obtenida desde la fórmula 3.8, con las correspondientes intensidades de ruido aditivo $\eta_0 = 0, 035; 0, 029; 0, 007$ y $0, 0$, también de izquierda a derecha, respectivamente. Las líneas segmentadas indican las curvas de bifurcación determinista.

En general, una fuente fluctuante proporcional a la amplitud de la onda —ruido multiplicativo— no es un fenómeno robusto en la naturaleza, porque cualquier imperfección o perturbación a montaje suma términos que fluctúan constantemente —ruido aditivo— que no se anula cuando la amplitud es cero. Una ecuación de amplitud con ruido aditivo queda así,

$$\partial_t A = \epsilon A - |A|^2 A + \sqrt{\eta} \xi(t), \quad (3.7)$$

llamada *ecuación de Langevin*. η es una constante positiva y ξ es una función de ruido blanco descorrelado. Debido al ruido en la ecuación 3.7 ésta no se puede resolver determinísticamente, pero sí se puede obtener una densidad de probabilidad para A . Esta densidad está regida por la **ecuación de Fokker-Planck**, la cual se deriva del *cálculo estocástico* [11]:

$$\partial_t p = \partial_a \left(-\epsilon A + |A|^2 A + \frac{\eta}{2} \partial_{\bar{A}} \right) p + c.c.$$

de ésta se obtiene,

$$p(|A|) = Q(\epsilon, \eta) |A| e^{[\epsilon |A|^2 - (|A|^4)/2]/\eta},$$

con $Q(\epsilon, \eta) \equiv 2\sqrt{2}e^{-\epsilon^2/2\eta}/\text{erfc}(-\frac{\epsilon}{\sqrt{2\eta}})\sqrt{\pi\eta}$. De esto sacamos que,

$$\langle A \rangle_{mp} = \sqrt{\frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 2\eta}}{2}}. \quad (3.8)$$

Esta ecuación se usó para fitear las curvas de la figura 3.8.

Con el objetivo de estudiar como la inclinación y fluctuaciones afectan las curvas de bifurcación, se inclina ligeramente la canal en un ángulo α (ver figura 3.2), tal que el eje de vibración también es inclinado ligeramente de la dirección vertical. La pequeña vibración horizontal induce emisión de ondas superficiales desde los meniscos, y con la onda estable sub-armónica, se establece una complicada dinámica de ondas en la superficie. Aquí, la de los meniscos engendran una perturbación compleja las ondas superficiales sub-armónicas, en particular es una fluctuación aditiva, que es independiente del valor de la amplitud superficial. En la figura 3.8, se presentan las curvas de bifurcación para diferentes ángulos de inclinación para una frecuencia de excitación dada. Al inclinar el sistema la modificación de su forma y de su punto de bifurcación es abrupta para los pequeños ángulos impuestos. Por lo tanto, observamos que una pequeña modificación origina un drástico cambio en el diagrama de bifurcación, el cual es gatillado por las fluctuaciones.

Bibliografía

- [1] G. Nicolis I. Prigogine. «Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations». John Wiley and Sons, New York. (1977).
- [2] L. D. Landau E. M. Lifshitz. «Curso de Física Teórica. Volumen I: Mecánica». Segunda edición. Editorial Reverté, S. A. (1994).
- [3] A. Frova M. Marenzana. «Thus Spoke Galileo». Primera edición. Oxford University Press. (2006).
- [4] Landau L. D. Lifshitz E. M. «Curso de Física Teórica. Volumen VI: Mecánica de Fluidos». Primera edición. Editorial Reverté, S. A. (1985).
- [5] Steven H. Strogatz. «Nonlinear Dynamics and Chaos; with applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering». Perseus Books. Reading, Massachusetts.
- [6] M. C. Cross P. C. Hohenberg. «Pattern Formation Outside of Equilibrium». Reviews of Modern Physics 65, página 851 (1993).
- [7] M. C. Cross H. Greenside. «Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems». Cambridge University Press, New York (2009).
- [8] H. Brezis. «Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations». Springer-Verlag, New York (2011).
- [9] J. Kevorkian J. D. Cole. «Multiple Scale and Singular Perturbation Methods». Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [10] G.K. Batchelor. «An Introduction to Fluid Dynamics». Cambridge University Press. New York (1967).
- [11] C. W. Gardiner. «Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and Natural Sciences». Second Edition. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York (1997).
- [12] Juan Ignacio Ortega Piwonka. «Formación de Patrones Subarmónicos en una Capa Granular Fluidizada por Medio de un Flujo Periódico de Aire».

- Tesis para Optar al Grado de Magister en Ciencias con Mención en Física. Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Santiago (2010).
- [13] Gordillo L. «Non-Propagating Hydrodynamic Solitons in a Quasi-one-dimensional Free Surface Subject to Vertical Vibrations». Tesis para optar al grado de doctor en ciencias mención Física. Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Santiago (2012).
 - [14] Sanmartín J. R. [1984] **O Botafumeiro: Parametric Pumping in the Middle Ages** *Am. J. Phys.* **52**, 937.
 - [15] Butikov E. I., *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 6209 (2002); *Am. J. Phys.* **69**, 755 (2001).
 - [16] Butikov E. I. [2001] **On the Dynamic Stabilization of an Inverted Pendulum** *Am. J. Phys.* **69**, 6.
 - [17] Faraday M. [1831] **On a Peculiar Class of Acoustical Figures and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces** *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* **121**, 299-340.
 - [18] Clerc M. G., Coulibaly S., Laroze D. [2009] **Parametrically Driven Instability in Quasi-Reversal Systems** *Int. J. Bifurcat. Chaos.* **19**, 3525-3532.
 - [19] Clerc M. G., Falcón C., Fernández-Oto C., Tirapegui E. [2012] **Effective-Parametric Resonance in a Non-Oscillating System** *EPL* **98**, 30006.
 - [20] Clerc M. G., Falcón C. [2005] **Localized Patterns and Hole Solutions in One-Dimensional Extended Systems** *Physica A* **356**, 48-53.
 - [21] Rajchenbach J., Leroux A., Clamond D. [2011] **New Standing Solitary Waves in Water** *Phys. Rev. Lett.* **107**, 024502.
 - [22] Garay J., Ortega I., Clerc M. G., Falcón C. [2012] **Symmetry-Induced Pinning-Depinning Transition of a Subharmonic Wave Pattern** *Phys. Rev. E* **85**, 035201.
 - [23] Clerc M. G., Falcón C., García-Ñustes M. A., Odent V., Ortega I. [2014] **Emergence of Spatiotemporal Dislocation Chains in Drifting Patterns** *Chaos* **24**, 023133.
 - [24] Clerc M. G., Falcón C., Tirapegui E. [2006] **Front Propagation Sustained by Additive Noise** *Phys. Rev. E* **74**, 011303.
 - [25] J. W. Miles. [1984] **Parametrically Excited Solitary Waves** *J. Fluid. Mech.* **148**, 451-60.

- [26] A. Larraza & S. Putterman. [1984] **Theory of Non-Propagating Surface-Wave Solitons** *J. Fluid. Mech.* **148**, 443-9.
- [27] J. Wu, R. Keolian, I. Rudnick. [1984] **Observation of a Nonpropagating Hydrodynamic Soliton** *Phys. Rev. Lett.* **52**, 16.
- [28] Elphick C., Tirapegui E., Brachet M. E., Couillet P., Iooss G. [1987] **A simple global characterization for normal forms of singular vector fields** *Physica D: Nonlinear Phenomena* **29(1-2)**, 95-127.
- [29] Pétrélis F., Aumaître S., Fauve S. [2005] **Effect of phase noise on parametric instabilities** *Phys. Rev. Lett.* **94(7)**, 070603.
- [30] Johnson J. B. [1928] **Thermal Agitation of Electricity in Conductors** *Phys. Rev.* **32**, 97.
- [31] Nyquist H. [1928] **Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors** *Phys. Rev.* **32**, 110-113.
- [32] Ryder L. H. «Quantum Field Theory», Second Edition. Cambridge University Press. (1996).
- [33] Milionni P. W. «The Quantum Vacuum: an Introduction to Quantum Electrodynamics». Academic Press. San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto. (1993).
- [34] Brown R. [1828] **A brief account of microscopical observations made in the months of June, July August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.** *Philosophical Magazine* **4**, 161-173.
- [35] Einstein A. [1905] **Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen** *Ann. Phys.* **322**, 549-560.
- [36] S. Residori, R. Berthet, B. Roman, and S. Fauve. [2001] *Phys. Rev. Lett.* **88**, 024502.
- [37] S. Douady, Tesis de doctorado. 38, 40 (1989).
- [38] J. walker. [1985] **How the sun's reflection from water offers a means of calculating the slopes of waves** *Sci. Am.*, 108-111.
- [39] G. Agez, M. Clerc and E. Louvergneaux. [2008] **Universal shape law of stochastic supercritical bifurcations: Theory and experiments** *Phys. Rev. E* **77**, 026218.

Apéndice A

Análisis funcional y Alternativa de Fredholm

Definamos el siguiente producto punto o interno sobre un espacio vectorial de funciones.

$$\langle f|g \rangle := \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{f}g, \quad \text{con } T = 2\pi n/\omega_0 \quad (\text{A.1})$$

con esto tenemos un espacio de Hilbert. Y sobre el mismo espacio definamos el siguiente operador:

$$L := \partial_{tt} + \omega_0^2 \quad (\text{A.2})$$

En este espacio L resulta ser autoadjunto ($L = L^\dagger$). Con estas condiciones tenemos el siguiente teorema:

Dada la ecuación,

$$LW = b \quad (\text{A.3})$$

$$\exists \text{ sol. } \text{ssi } \langle b|v \rangle = 0, \forall v \in \text{Ker}(L^\dagger)$$

esta es la condición de solubilidad. [8]

La ecuación 1.32 tiene la forma de A.3. En nuestro caso el $\text{ker}(L) = \{e^{i\omega_0 t}, e^{-i\omega_0 t}\}$. Luego si hacemos producto punto por la derecha entre el elemento del $\text{ker } e^{i\omega_0 t}$ y el lado derecho de la ecuación 1.32 por la condición de solubilidad nos queda:

$$0 = \left\langle e^{i\omega_0 t} \left| \left(-2i\omega_0 \partial_t A + \frac{\omega_0^2}{2} A|A|^2 - i\mu\omega_0 A - \frac{a\omega^2}{2} \bar{A} e^{2iv\omega_0 t} \right) e^{i\omega_0 t} \right\rangle + \left\langle e^{i\omega_0 t} \left| \frac{\omega_0^2}{6} A^3 e^{3i\omega_0 t} \right\rangle + \langle e^{i\omega_0 t} | c.c. \rangle \quad (\text{A.4})$$

Dado que A es lento en el tiempo ($\partial_{tt}A \ll \partial_t A \ll \omega_0 A$) comparado con $e^{i\omega_0 t}$, en la integral del producto punto A.1 se puede sacar como factor todos los términos con A (el rango de integración es muy pequeño para que A tenga alguna variación considerable) y también el término con $e^{2i\nu\omega_0 t}$ (ya que al ser ν muy chico este término también es lento en el tiempo). Lo anterior se puede justificar por medio de suponer separación de escalas [9]. Y como

$$\langle e^{i\omega_0 t} | e^{i\omega_0 t} \rangle = 1 \quad y \quad \langle e^{i\omega_0 t} | e^{\pm i3\omega_0 t} \rangle = 0$$

nos queda que:

$$0 = (-2i\omega_0 \partial_t A + \frac{\omega_0^2}{2} A |A|^2 - i\mu\omega_0 A - \frac{a\omega^2}{2} \bar{A} e^{2i\nu\omega_0 t}) e^{i\omega_0 t}$$