



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

*3-COLOREO EN GRAFOS CON CAMINOS Y CICLOS PROHIBIDOS.*

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS  
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ALBERTO BENJAMÍN ROJAS ANRÍQUEZ

PROFESOR GUÍA:  
MAYA STEIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN  
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CMM- Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE  
2019

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS  
RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: ALBERTO BENJAMÍN ROJAS ANRÍQUEZ  
FECHA: ENERO 2019  
PROF. GUÍA: MAYA STEIN

*3-COLOREO EN GRAFOS CON CAMINOS Y CICLOS PROHIBIDOS.*

El  $k$ -coloreo de vértices de un grafo es un ya conocido problema  $NP$ -completo, debido a esto, los esfuerzos se han concentrado en estudiar el problema restringido a ciertas clases de grafos, para intentar resolverlo en tiempo polinomial. Dentro de las clases de grafos más estudiada, están los grafos  $H$ -free, que son los grafos que no poseen un grafo isomorfo a  $H$  como subgrafo inducido.

En el presente trabajo se investigó el problema de  $3$ -coloreo en grafos  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free (donde  $C_{\leq 2d-1} = \{C_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N} \text{ y } k \leq d\}$ ), para  $d \geq 3$ , obteniendo los siguientes resultados:

- Para el caso particular  $d = 3$ , se puede decidir si un grafo  $G$  de la clase  $(P_9, C_5, C_3)$ -free posee un  $3$ -coloreo (y encontrarlo si es que existe) en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ .
- Para todo  $d \geq 3$ , se puede decidir si un grafo  $G$  de la clase  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1}, C_8)$ -free posee un  $3$ -coloreo (y encontrarlo si es que existe) en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ .
- Para todo  $d \geq 3$ , se puede decidir si un grafo  $G$  de la clase  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free, que tiene un ciclo  $C$  de largo  $2d + 3$  como subgrafo inducido, posee un  $3$ -coloreo (y encontrarlo si es que existe) en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ .



# Agradecimientos

Esta tesis fue producto no solo de mis esfuerzos, sino de una larga lista de personas que me ayudaron a través de mi paso por la universidad, e incluso desde mucho antes de entrar a esta.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, mis padres en particular que siempre me incentivaron y llevaron a ir más lejos, ya que les importó siempre que yo pudiera desarrollarme a cabalidad, donde me entregaron las mejores herramientas que ellos pudieron darme, sin importar cuanto esfuerzo supusiera para ellos, les puedo asegurar que aproveché al máximo cada oportunidad que me dieron, y las ocupé no solo para convertirme en un mejor profesional, sino también para convertirme en una persona mucho más íntegra. Sin ellos toda mi travesía en la universidad no hubiera podido siquiera empezar.

Es verdad que como hijo en verdad siento que he dejado bastante que desear, mi manera de ser no ayuda a expresarme como deseo, pero quiero que sepan que siempre lo he tenido en mente, y que haré lo posible por seguir cambiando para mejor, de verdad estoy agradecido por todo lo que me han dado y estaré en deuda por siempre con ustedes, los quiero mucho.

Agradecer ahora a la gente que conocí en mis inicios en la universidad, a toda la gente de la sección 3 con la que lo pasé tan bien desde que los conocí, en particular a Jaime, Rafa, Chamas y Alfi cuya amistad se extendió por mucho más que solo el comienzo de mi carrera universitaria, sino que se mantiene aún hoy que está acabando, y espero que se mantenga por mucho tiempo más.

Por supuesto agradecer al lugar que me acogió durante tanto tiempo, la carrera de ingeniería matemática, donde pasé muchos momentos felices como también bastante estresantes. En este lugar conocí a innumerables personas (numerables en verdad) con las cuales pude compartir el gusto por las matemáticas. Creo que el hecho de encontrar tanta gente reunida en un mismo lugar que siente pasión por el saber y disfruta aprendiendo es algo impagable, y te impulsa siempre a aprender y conocer más. Me es difícil nombrar tantas personas, pero siento la necesidad de nombrar algunas con las cuales compartí mucho tiempo, sea de estudio, conversaciones o momentos de relax, muchos agradecimientos a Pancho, Ian, Cata, Edgardo, Enzo, Coba, Ambuli, Cami, Dani, Arturo, Nico, y muchos muchos más, por favor, disculpas infinitas a la gente que no nombré, pero les aseguro que estaré agradecido siempre.

Imposible no nombrar a toda la gente de ingeniería eléctrica que conocí después, donde me colé sin ser de la carrera y terminé compartiendo momentos increíbles con todos ellos. Han sido momentos muy lindos y felices que tengo en el recuerdo, aunque también algunos

bastante amargos y fuertes, quizás de los más fuertes por los que he tenido que pasar, sin embargo, nos acompañamos los unos a los otros y logramos mantenernos incluso más unidos que antes, me encantaría nombrar a cada uno de ustedes pero la familia ha crecido tanto que prefiero no hacerlo, de todas maneras estoy seguro que no necesito nombrarlos para que sepan cuanto los quiero. Para ellos solo les tengo deseos de éxito y que nuestra amistad siga creciendo.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Historia y orígenes . . . . .	1
1.2. Trabajos relacionados . . . . .	2
1.3. Resultados del presente trabajo . . . . .	6
<b>2. Conceptos Básicos</b>	<b>8</b>
<b>3. 3-coloreo en grafos <math>(P_9, C_5, C_3)</math>-free.</b>	<b>10</b>
3.1. Estructura de grafos $(P_9, C_5, C_3)$ -free. . . . .	10
3.1.1. Existencia de un $C_9$ inducido . . . . .	14
3.1.2. Existencia de un $C_7$ inducido y libre de $C_9$ . . . . .	24
3.2. Algoritmo de 3-coloreo en grafos $(P_9, C_5, C_3)$ -free . . . . .	34
3.2.1. Existencia de un $C_9$ . . . . .	36
3.2.2. Existencia de un $C_7$ y libre de $C_9$ . . . . .	44
<b>4. 3-coloreo en grafos <math>(P_{2d+3}, C_{2d-1}, \dots, C_3)</math>-free, <math>d \geq 4</math>.</b>	<b>49</b>
4.1. Estructura de un grafo $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free . . . . .	51
4.1.1. Existencia de un $C_{2d+3}$ . . . . .	51
4.1.2. Existencia de un $C_{2d+1}$ y libre de $C_{2d+3}$ . . . . .	60
4.2. Algoritmo de 3-coloreo . . . . .	67
4.2.1. Existencia de un $C_{2d+3}$ . . . . .	67
4.2.2. Existencia de un $C_{2d+1}$ , libre de $C_{2d+3}$ y prohibición de $C_8$ . . . . .	72
<b>5. Complejidad</b>	<b>76</b>
<b>Conclusión</b>	<b>76</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Índice de Tablas

1.1. Tabla de complejidades conocidas para los problemas de $k$ -coloreo en grafos $P_t$ -free, donde '?' denota problemas aún abiertos. . . . .	4
1.2. Tabla de complejidades para el problema de coloreo en grafos $P_t$ -free. . . . .	4

# Índice de Ilustraciones

1.1.	Grafo $K_{1,3}$ , también conocido como <i>claw</i> . . . . .	3
2.1.	Ejemplo de proceso de <i>update</i> realizado sobre el $C_6$ . . . . .	9
3.1.	Visualización de la transformación de la Definición 3.4, donde los nodos de $N(L)$ y $N(R)$ cumplen con ser adyacentes a cada nodo de $L$ y $R$ respectivamente. . . . .	11
3.2.	. . . . .	14
3.3.	Ejemplos de conjuntos estables $T_i, T'_i$ y $S_i, i \in [8]$ . . . . .	15
3.4.	. . . . .	15
3.5.	. . . . .	16
3.6.	. . . . .	17
3.7.	. . . . .	20
3.8.	. . . . .	21
3.9.	. . . . .	21
3.10.	Ejemplo de nodos $y_1, y_2 \in Y_0^S$ . . . . .	22
3.11.	. . . . .	23
3.12.	Ejemplos de conjuntos estables $T_i$ y $D_i, i \in [6]$ . . . . .	25
3.13.	. . . . .	25
3.14.	. . . . .	26
3.15.	Ejemplo de nodos $y_1, y_2 \in Y_0^A$ . . . . .	29
3.16.	. . . . .	29
3.17.	Ejemplo de nodo $y \in Y_0^B$ . . . . .	30
3.18.	. . . . .	30
3.19.	. . . . .	31
3.20.	Ejemplo de nodos $y_1 \in Y_0^C$ e $y_2 \in \bar{Y}_0^C$ . . . . .	31
3.21.	. . . . .	32
3.22.	. . . . .	32
3.23.	. . . . .	38
3.24.	. . . . .	46
3.25.	. . . . .	46
4.1.	A la izquierda, los conjuntos $A$ y $B$ están enlazados, donde los nodos pintados $c_i, c_{i+4}$ y $c_{i+2}$ cumplen la condición para esto. A la derecha, los conjuntos $A'$ y $B'$ no están enlazados . . . . .	50
4.2.	En rojo, los nodos del camino con el cual es definido $d_{max}(A, B)$ , mientras que en verde los nodos del camino con el cual es definido $d_{min}(A, B)$ . . . . .	50
4.3.	. . . . .	52



4.4.	Ejemplos de conjuntos estables $T_i, T'_i$ y $S_i, i \in [8]$ . Notamos que son las mismas estructuras permitidas que el caso $d = 3$ . . . . .	53
4.5.	Ejemplo de nodos $y_1, y_2 \in Y_0^S$ . Esta estructura también se encuentra en el caso $d = 3$ . . . . .	58
4.6.	Ejemplo de nodos $y_1, y_2 \in Y_0^{T'}$ . . . . .	58
4.7.	Ejemplo de nodos $y_1, y_2 \in Y_0^{ST'}$ . . . . .	58
4.8.	Ejemplo de nodos $y_1, y_2 \in Y_0^{T'S}$ . . . . .	59
4.9.	Ejemplos de conjuntos estables $T_i$ y $D_i, i \in [6]$ . Estas son las mismas estructuras permitidas que en el caso $d = 3$ . . . . .	61
4.10.	Ejemplo de nodos $y_1, y_2 \in Y_0^A$ . Esta estructura también se encuentra en el caso $d = 3$ . . . . .	65
4.11.	Ejemplo de nodo $y \in Y_0^B$ . A diferencia del caso $d = 3$ , ahora son adyacentes a conjuntos $D_i$ y $D_{i+4}$ , para algún $i \in [2d]$ . . . . .	65
4.12.	Ejemplo de nodos $y_1 \in Y_0^C$ e $y_2 \in \overline{Y}_0^C$ . Esta estructura también se encuentra en el caso $d = 3$ . . . . .	66
5.1.	Ejemplo del conjunto $Y_0^B$ visto adyacente a conjuntos de la forma $D_i$ y $D_{i+3}$ , para $i = 0$ , como también conjuntos de la forma $D_i$ y $D_{i+4}$ , para $i = 3$ . . . . .	77
5.2.	. . . . .	78
5.3.	En rojo el camino que define el valor $d_{max}(D_i, D_{i+4})$ para los casos $d = 3$ (a la izquierda) y $d = 4$ (a la derecha). . . . .	78
5.4.	En rojo el conjunto $V'$ . . . . .	80
5.5.	. . . . .	81
5.6.	. . . . .	81

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Historia y orígenes

Un coloreo de vértices o nodos de un grafo es un etiquetado de sus vértices, de tal manera que los vértices que sean adyacentes deben poseer etiquetas distintas. Llamamos  $k$ -coloreo de vértices, a un coloreo que use  $k$  etiquetas distintas o menos.

Los orígenes del problema de coloreo de grafos, se remontan a escritos de 1852 entre A. De Morgan y W.R. Hamilton, donde discutían el problema de cuantos colores eran necesarios para pintar un mapa, de tal manera que los colores de territorios que compartan fronteras fueran distintos. Si definimos el grafo  $G$  donde a cada territorio le asociamos un nodo en el plano y conectamos con aristas los nodos que representen territorios limítrofes, lo que buscamos es el menor  $k$  tal que existe un  $k$ -coloreo. El natural  $k$  que satisface la condición anterior es el número cromático de  $G$ , y se denomina  $\chi(G)$ .

El grafo  $G$  anterior, que fue definido a partir del mapa, posee la propiedad de ser *planar*, lo cual significa que es posible dibujarlo en el plano sin que sus aristas se intersecten entre si. Por lo que el problema, de manera más formal, es encontrar el número cromático de un grafo  $G$  planar.

La célebre conjetura del *Problema de los 4 colores* planteaba si es posible colorear cualquier grafo planar con 4 colores. La primera supuesta demostración de esta conjetura sería dada por Kempe en 1879 y 11 años después Heawood encontraría un error en esta, y este terminaría concluyendo que 5 colores eran suficientes para colorear cualquier mapa. Finalmente serían Appel y Haken [2] los que darían la respuesta positiva de que era posible colorearlos con 4 colores recién en 1976. Este problema sería el que daría comienzo al estudio del problema de coloreo en grafos.

De manera formal, el problema de *coloreo* para un grafo  $G = (V, E)$  y un natural  $k$ , es decidir la existencia de una función  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , donde para cada arista  $uv \in E$ ,  $f(u) \neq f(v)$ . Si el natural  $k$  es fijo, decimos que es un problema de  $k$ -coloreo. Si la función  $f$  existe para un grafo  $G$ , decimos que  $G$  es coloreable, análogamente es  $k$ -coloreable si  $k$  es

fijo. El número cromático de un grafo es el menor  $k$  tal que la función  $f$  descrita existe.

La motivación para seguir el estudio de este problema, es debido a sus diversas aplicaciones en distintos campos. Algunas de estas son:

- *Problema de Scheduling*: Supongamos que tenemos que calendarizar exámenes para una universidad, donde tenemos distintos cursos y alumnos inscritos en cada uno de ellos. Es posible que hayan cursos con alumnos comunes. ¿Cómo calendarizamos los exámenes sin que alumnos comunes de 2 cursos tengan exámenes al mismo tiempo? ¿Cuántos bloques de tiempo son necesarios para calendarizar de buena manera todos los exámenes? Este problema puede ser representado por un grafo donde cada nodo es un curso, donde dos nodos son adyacentes si y solo si poseen alumnos comunes. Luego, el número cromático del grafo representará el mínimo número de bloques horarios necesarios.
- *Problema de Radio Frequency Assignment*: distintas frecuencias son asignadas a torres de radio, pero las frecuencias que se asignen a torres cercanas deben ser distintas para que no se interfieran. ¿Cómo asignar frecuencias? ¿Cuál es el mínimo número de frecuencias necesarias para lograr esto? Este problema es una instancia de coloreo en grafos donde cada nodo representa una torre y dos nodos son adyacentes si y solo si las torres asociadas están en rango de interferencia. El número cromático del grafo representa el número mínimo de frecuencias que se necesitan.

Existen también variaciones al concepto de coloreo, como el *lista-coloreo* de vértices, donde cada uno de los vértices  $v$  del grafo  $G$  poseen listas  $L(v)$  que muestran los colores permitidos para pintar a dicho nodo, por lo que un coloreo factible en este caso, además de cumplir con las condiciones ya descritas del coloreo, también debe cumplir que  $f(v) \in L(v)$ .

Para un natural  $k$  fijo, el problema de *k-lista-coloreo* es un caso particular donde  $|L(v)| \leq k$  para cada  $v \in V$  y  $\bigcup_{v \in V(G)} L(v)$  puede ser un conjunto arbitrario, a diferencia del problema de *lista-k-coloreo*, en que las listas de cada nodo cumplen  $L(v) \subseteq \{1, \dots, k\}$ . Ambos problemas generalizan el problema de *k-coloreo*.

Debido al uso práctico y su importancia, es usual estudiar la complejidad computacional del problema de coloreo. La complejidad se refiere a los recursos computacionales que son necesarios para la resolución de este problema, en nuestro caso, nos centraremos en el recurso de tiempo, refiriéndonos principalmente a las clases  $P$  y  $NP$ .

## 1.2. Trabajos relacionados

Es bien sabido que el problema de coloreo para un grafo  $G$  arbitrario y un entero  $k \geq 3$  es uno de los 21 problemas  $NP$ -completos de Karp [22]. Stockmeyer [27] probó que incluso fijando el  $k$ , seguía siendo  $NP$ -completo, es decir, el problema de  $k$ -coloreo también es  $NP$ -completo. A partir de ahora, si hablamos de problema de coloreo, es debido a que el natural  $k$  es parte de la entrada, mientras que al hablar de  $k$ -coloreo,  $k$  es fijo.

Para el caso de  $k = 2$ , el problema de *2-lista-coloreo* puede ser resuelto en tiempo  $\mathcal{O}(|V| +$

$|E|$ ) [11, 12, 28], reduciendo el problema a una instancia de  $2$ -SAT, problema el cual Aspvall, Plass y Tarjan [3] pudieron resolver en tiempo lineal en el número de variables y clausulas. Por supuesto, esto implica que el  $2$ -coloreo también puede ser resuelto en tiempo polinomial.

Debido a la dificultad del problema de  $k$ -coloreo, los esfuerzos se concentraron en investigar y entender el problema restringido a ciertas clases de grafos. Dentro de las clases mas importantes sobre las cuales se investiga, está la de los grafos  $H$ -free, es decir, grafos que no contienen como subgrafo inducido a un grafo isomorfo a  $H$ , para un grafo  $H$  fijo.

Kamiński y Lozin [21] e independientemente Král, Kratochvíl, Tuza, y Woeginger [24] probaron que el  $k$ -coloreo es  $NP$ -completo para grafos que no contengan ciclos de largo menor a  $g$ , para cualquier  $k \geq 3$  y  $g \geq 3$ , lo que implica que el problema de  $k$ -coloreo es  $NP$ -completo para grafos  $H$ -free si  $H$  contiene un ciclo.

Para un grafo  $G = (V, E)$ , definimos su grafo de línea  $L(G) = (V', E')$  donde cada nodo  $v' \in V'$  representa a una arista  $e \in E$ , y dos nodos son adyacentes si y solo si sus aristas asociadas en  $G$  poseen un nodo extremo común. Holyer [17] mostró que el  $k$ -coloreo es  $NP$ -completo para grafos de línea, aunque luego Leven y Galil [13] mostrarían que el problema es  $NP$ -completo para grafos  $K_{1,3}$ -free, lo cual engloba el resultado sobre los grafos de línea.

Combinando los resultados anteriores, solo queda abierta la complejidad del problema de  $k$ -coloreo para la clase de grafos  $H$ -free con  $H$  un grafo acíclico y  $K_{1,3}$ -free (ver Figura 1.1), es decir, una unión disjunta de caminos. Denominamos  $P_t$  a un camino inducido que posee  $t$  vértices.

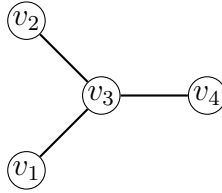


Figura 1.1: Grafo  $K_{1,3}$ , también conocido como *claw*.

Dentro de los resultados mas importantes a la fecha, Huang [19] probó que el problema de  $4$ -coloreo en grafos  $P_7$ -free y el de  $5$ -coloreo en grafos  $P_6$ -free son  $NP$ -completos. Sin embargo no todos los resultados han sido de  $NP$ -completitud, también hay casos donde ha sido posible colorear en tiempo polinomial. Hoàng et al. [18] demostraron que para todo  $k$  fijo existe un algoritmo polinomial que determina si un grafo  $P_5$ -free admite o no un  $k$ -coloreo, a la vez, conjeturaron que el problema de  $4$ -coloreo sobre grafos  $P_6$ -free es resoluble en tiempo polinomial, lo cual recientemente fue demostrado por Chudnovsky, Spirkl y Zhong [9].

Randerath y Schiermeyer [26] mostraron que el problema de  $3$ -coloreo para grafos  $P_6$ -free puede ser resuelto en tiempo polinomial, para que luego este resultado fuera extendido por Broersma et al. [7] mostrando que el problema de  $3$ -coloreo es resoluble en tiempo polinomial para grafos  $H$ -free donde  $H$  cumple que  $|V_H| \leq 6$  o  $H = rP_3$  para algún entero  $r$ , donde  $rP_3$  son  $r$  copias disjuntas del grafo  $P_3$ .

Golovach et al. [15] mostraron que el problema de  $3$ -lista-coloreo puede ser resuelto en tiempo polinomial para los grafos  $P_6$ -free. Bonomo, Chudnovsky, Maceli, Schaudt, Stein y

Zhong [4] probaron que también es posible resolver el  $3$ -coloreo y  $lista$ - $3$ -coloreo en tiempo polinomial para los grafos  $P_7$ -free.

Por otro lado, para el caso  $k = 3$  no se sabe aún si existe  $t \in \mathbb{N}$  donde el problema de  $3$ -coloreo es  $NP$ -completo sobre grafos  $P_t$ -free.

En la siguiente tabla podemos ver más gráficamente lo que se sabe hoy en día.

$k \setminus P_t$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	...
3	P [10]	P [25]	P [26]	P [4]	?	?	...
4	P [10]	P [18]	P [9]	NPC [19]	NPC	NPC	...
5	P [10]	P [18]	NPC [19]	NPC	NPC	NPC	...
6	P [10]	P [18]	NPC	NPC	NPC	NPC	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabla 1.1: Tabla de complejidades conocidas para los problemas de  $k$ -coloreo en grafos  $P_t$ -free, donde '?' denota problemas aún abiertos.

Cabe destacar que el problema de coloreo sobre grafos  $P_4$ -free puede ser resuelto en tiempo polinomial, sin embargo, el coloreo sobre grafos  $P_5$ -free es  $NP$ -completo, pero para cada  $k \geq 3$  fijo, existe un algoritmo que resuelve el  $k$ -coloreo en tiempo polinomial.

$P_t$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	...
Complejidad	P [10]	NPC	NPC [19]	...

Tabla 1.2: Tabla de complejidades para el problema de coloreo en grafos  $P_t$ -free.

Notamos que en la Tabla 1.1, un resultado de  $NP$ -completitud de  $k^*$ -coloreo para grafos  $P_{t^*}$ -free, implicará la  $NP$ -completitud de los problemas de  $k^*$ -coloreo para grafos  $P_t$ -free, para todo  $t \geq t^*$ , ya que un grafo  $P_{t^*}$ -free es en particular  $P_t$ -free.

Al mismo tiempo, si para un grafo  $G$  definimos  $\bar{G}$  como una copia del grafo  $G$  al cual le agregamos un nodo extra  $\bar{v}$  el cual es adyacente a todos los nodos en  $V(G)$ , es fácil ver que si podemos decidir que  $\bar{G}$  es  $(k+1)$ -coloreable en tiempo polinomial, entonces podemos decidir  $k$ -coloreo en  $G$  en tiempo polinomial. Este hecho nos dice que la  $NP$ -completitud de los problemas de  $k^*$ -coloreo para grafos  $P_{t^*}$ -free, implicará la  $NP$ -completitud de los problemas de  $k$ -coloreo para grafos  $P_t$ -free, para  $k \geq k^*$ .

Además de los resultados prohibiendo caminos, también se han estudiado clases de grafos prohibiendo más de un subgrafo inducido, en particular, prohibiendo caminos y ciclos inducidos. Llamamos  $C_s$  a un ciclo de  $s$  vértices. A continuación revisaremos resultados conocidos para grafos  $(P_t, C_s)$ -free. Muchos de estos resultados fueron etapas previas a los resultados sobre grafos  $(P_t)$ -free.

El resultado de que el problema de coloreo puede ser resuelto en tiempo polinomial para grafos  $P_4$ -free, en combinación con los resultados de Král, Kratochvíl, Tuza y Woeginger [23], implican que para  $s \geq 5$ , un entero fijo, el problema de coloreo sobre grafos  $(P_t, C_s)$ -free puede ser resuelto en tiempo polinomial cuando  $t \leq 4$  y es  $NP$ -completo para  $t \geq 5$ .

Para cuando  $s = 3$ , Huang, Johnson y Paulusma [20] demostraron que el 4-coloreo es  $NP$ -completo para los grafos  $(P_{22}, C_3)$ -free, y por lo tanto, el problema de coloreo también. Mientras que Brandstädt, Klemmt y Mahfud [6] demostraron que se puede resolver en tiempo polinomial el problema de coloreo en grafos  $(P_6, C_3)$ -free.

Para  $s = 4$ , Gaspers, Huang y Paulusma [14] probaron que sobre grafos  $(P_t, C_4)$ -free, con  $t \leq 6$ , puede resolverse el problema de coloreo en tiempo polinomial. De manera adicional, probaron la  $NP$ -completitud del problema de coloreo sobre grafos  $(P_t, C_4)$ -free, con  $t \geq 9$ .

Si fijamos el número de colores, para  $t \geq 1$  y  $k \geq 1$ , Golovach, Paulusma y Song probaron que el problema de  $k$ -coloreo es resoluble en tiempo polinomial sobre grafos  $(P_t, K_{r,r})$ -free para todo  $r \geq 1$ , y por lo tanto (tomando  $r = 2$ ) para grafos  $(P_t, C_4)$ -free también [16].

En el caso  $(P_6, C_5)$ -free, Chudnovsky, Maceli, Stacho y Zhongse probaron que el problema de 4-coloreo puede ser resuelto en tiempo polinomial [8], mientras que Bonomo, Chudnovsky, Maceli, Schaudt, Stein y Zhong probaron que en el caso  $(P_7, C_3)$ -free es posible resolver en tiempo polinomial el 3-coloreo [5]. Notamos que estos resultados fueron pasos previos a los resultados de polinomialidad sobre grafos  $P_6$ -free y  $P_7$ -free.

A manera de recuento, adjuntamos el siguiente resumen de resultados sobre el problema de  $k$ -coloreo en grafos  $(P_t, C_s)$ -free [20].

- El  $k$ -coloreo es  $NP$ -completo si
  1.  $k = 4$ ,  $s = 3$  y  $t \geq 22$ .
  2.  $k = 4$ ,  $s = 5$  y  $t \geq 7$ .
  3.  $k = 4$ ,  $s = 6$  y  $t \geq 7$ .
  4.  $k = 4$ ,  $s = 7$  y  $t \geq 9$ .
  5.  $k = 4$ ,  $s \geq 8$  y  $t \geq 7$ .
  6.  $k \geq 5$ ,  $s = 3$  y  $t \geq t_k$  donde  $t_k$  es una constante que solo depende de  $k$ .
  7.  $k \geq 5$ ,  $s = 5$  y  $t \geq 7$ .
  8.  $k \geq 5$ ,  $s \geq 6$  y  $t \geq 6$ .
- El  $k$ -coloreo puede ser resuelto en tiempo polinomial si
  1.  $k \leq 2$ ,  $s \geq 3$  y  $t \geq 1$
  2.  $k = 3$ ,  $s \geq 3$  y  $t \leq 7$
  3.  $k = 3$ ,  $s = 4$  y  $t \geq 1$
  4.  $k = 4$ ,  $s \geq 3$  y  $t \leq 6$
  5.  $k = 4$ ,  $s = 4$  y  $t \geq 1$
  6.  $k = 4$ ,  $s = 5$  y  $t \leq 6$
  7.  $k \geq 5$ ,  $s = 3$  y  $t \leq k + 2$
  8.  $k \geq 5$ ,  $s = 4$  y  $t \geq 1$
  9.  $k \geq 5$ ,  $s \geq 3$  y  $t \leq 5$ .

Por último, para  $k \geq 4$  y  $s \geq 5$ , Huang, Johnson y Paulusma probaron que existe una constante  $t_k^s$  tal que el problema de  $k$ -coloreo es  $NP$ -completo para los grafos  $(P_{t_k^s}, C_s, \dots, C_5, C_3)$ -

free [20], donde se prohíben todos los ciclos inducidos de  $s$  nodos o menos, excepto los de largo 4.

### 1.3. Resultados del presente trabajo

En el presente trabajo se demuestran los siguientes resultados principales. Definimos el conjunto  $C_{\leq 2d-1} = \{C_{2t-1} \mid 2 \leq t \leq d\}$ , es decir, los ciclos impares con  $2d - 1$  vértices o menos.

**Teorema 1.1** *Sea  $G$  un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free. Es posible decidir si  $G$  posee un 3-coloreo factible y encontrarlo (si es que existe) en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ .*

**Teorema 1.2** *Sea  $d \geq 4$  y sea  $G$  un grafo  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1}, C_8)$ -free. Es posible decidir si  $G$  posee un 3-coloreo factible y encontrarlo (si es que existe) en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ .*

En el primer caso, el resultado fue probado mediante la demostración de dos teoremas independientes, uno donde suponemos la existencia de un ciclo  $C_9$ , y el otro donde asumimos que sólo existen ciclos  $C_7$ .

De una manera similar, el Teorema 1.2 es la combinación de dos resultados demostrados en este trabajo.

**Teorema 1.3** *Sea  $d \geq 4$  y sea  $G$  un grafo  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free tal que posee un ciclo  $C$  de largo  $2d + 3$  inducido. Es posible decidir si  $G$  posee un 3-coloreo factible y encontrarlo (si es que existe) en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ .*

**Teorema 1.4** *Sea  $d \geq 4$  y sea  $G$  un grafo  $(P_{2d+3}, C_{2d+3}, C_{\leq 2d-1}, C_8)$ -free. Es posible decidir si  $G$  posee un 3-coloreo factible y encontrarlo (si es que existe) en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ .*

Es importante notar en este caso que el resultado del Teorema 1.3 no es exactamente englobado por el Teorema 1.2, sino que nos da información adicional acerca de decidir colorabilidad sobre grafos  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free.

Recordemos que en el caso del 3-coloreo, aún está abierta la complejidad del problema sobre  $P_t$ -free para  $t \geq 8$ . Mientras que el único resultado polinomial de 3-coloreo prohibiendo caminos largos (largo mayor o igual que 8) es sobre los grafos  $(P_t, C_4)$ -free,  $t \geq 1$ , por lo que existen pocos resultados similares.

Notamos que el hecho de poder resolver en tiempo polinomial el  $k$ -coloreo sobre grafos  $(P_t, C_4)$ -free, con  $t \geq 1$  [16], implica que también es posible para los grafos  $(P_t, C_s, \dots, C_4, C_3)$ -free, para  $s \geq 4$ . Lo anterior nos dice que el resultado de  $NP$ -completitud de  $k$ -coloreo sobre grafos  $(P_{t_k}^s, C_s, \dots, C_5, C_3)$ -free, con  $s \geq 5$  [20], es de los mejores posibles dado que mejora el resultado de  $NP$ -completitud del  $k$ -coloreo sobre grafos con ciclos de largo  $g$  o superior, con  $g \geq 3$ . Nuestro resultado viene a encontrar un  $t$  específico para el cual podemos colorear en tiempo polinomial en el caso  $k = 3$ , sin prohibir ciclos  $C_4$  inducidos ni la gran mayoría de ciclos pares.

Este trabajo posee dos capítulos principales, ambos separados en dos subsecciones, una de estructura y otra del algoritmo. El capítulo 3 es donde se analiza el problema de 3-coloreo sobre grafos  $(P_9, C_5, C_3)$ -free, y el capítulo 4 es donde se busca generalizar el resultado para el 3-coloreo en grafos  $(P_{2t+3}, C_{\leq 2t-1})$ -free, donde finalmente concluimos la adición del  $C_8$  a las restricciones.

La manera de enfrentar el problema es similar en ambos capítulos, se intenta reducir el problema de 3-coloreo a resolver un número finito fijo, dependiente de  $t$ , de instancias de 2-lista-coloreo, el cual sabemos que puede ser resuelto en tiempo polinomial.

Para esto, realizamos transformaciones en el grafo de entrada  $G$ , obteniendo un grafo  $G'$  más "simple", el cual sea equivalente de colorear y posea las mismas restricciones de subgrafos inducidos. Luego introducimos el concepto de *paleta*, que son listas asociadas a los nodos, que poseen los colores con los que está permitido colorear a cada uno, similar a como ocurre en el problema de lista-3-coloreo, aunque las técnicas utilizadas no permiten concluir un resultado más allá del 3-coloreo.

El objetivo es intentar colorear un subconjunto finito de nodos  $V' \subseteq V(G)$ , el cual haga que todo nodo en  $V(G) \setminus V'$  posea a lo más dos colores en su lista, y por lo tanto, defina un problema de 2-lista-coloreo. La razón por la cual es importante que el conjunto  $V'$  sea de tamaño fijo es importante, ya que por cada coloreo factible del conjunto  $V'$ , se generará un problema distinto de 2-lista-coloreo, y debemos probarlos todos.



# Capítulo 2

## Conceptos Básicos

Comencemos por establecer las notaciones y conceptos que serán usados a lo largo de este trabajo.

Denotamos para un grafo  $G$  y un subconjunto no vacío  $S \subseteq V(G)$  por  $N(S)$  al conjunto de vértices en  $V(G) \setminus S$  con vecinos en  $S$ . Para dos conjuntos  $A, B$  disjuntos de  $V(G)$ , definimos  $N_B(A) = N(A) \cap B$ . Si  $A = \{a\}$  simplemente escribimos  $N_B(a)$ . Para simplificar notación a lo largo del trabajo, notaremos como  $[n] := \{0, \dots, n\}$ , la cual no es una notación estándar.

Todos los grafos  $G$  de este trabajo son grafos simples, denotamos a los elementos de  $V(G)$  por vértices o nodos indistintamente y a los elementos de  $E(G)$  por aristas.

Al momento de hablar de ciclos  $C$  de largo  $t$ , usualmente usaremos la notación  $c_i$ ,  $i \in \{0, \dots, t-1\}$  para referirnos a sus nodos, con los índices comprendidos en módulo  $t$ .

Un conjunto de nodos se dice *estable* en un grafo  $G$  si es un subconjunto de  $V$  tal que par a par, no existen aristas entre ellos. Sea  $S$  y  $T$  dos conjuntos de vértices en  $G$ , decimos que  $S$  es *completo* a  $T$  si todo vértice en  $S$  es adyacente a todo vértice en  $T$ , y por el contrario,  $S$  es *anticompleto* a  $T$  si ningún nodo en  $S$  es adyacente a un vértice en  $T$ .

En el contexto del *3-coloreo* de un grafo, se le asignará a cada  $v \in V(G)$  una lista  $L(v) \subseteq \{1, 2, 3\}$  de posibles colores, al conjunto de estas listas  $L := \{L(v) : v \in V(G)\}$  lo llamaremos una *paleta* de  $G$ . A una paleta  $L'$  se le llama *subpaleta* de  $L$ , si se cumple que para todo  $v \in V(G)$ ,  $L'(v) \subseteq L(v)$ . Para un *3-coloreo*  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  de  $G$ , decimos que  $c$  es un coloreo de la tupla  $(G, L)$  si para todo  $v \in V(G)$ ,  $c(v) \in L(v)$ , también podemos decir que  $c$  es un coloreo de  $G$  que respeta a la paleta  $L$ . Decimos que  $(G, L)$  es coloreable si existe un coloreo de  $G$  que respete a la paleta  $L$ . Denotamos ahora  $(G, \mathcal{L})$  a una tupla de un grafo  $G$  y una colección  $\mathcal{L}$  de paletas de  $G$ . Decimos que  $(G, \mathcal{L})$  es coloreable si existe  $L \in \mathcal{L}$  tal que  $(G, L)$  es coloreable.

**Definición 2.1** *Definimos el update de la lista de un nodo  $w$  como el borrado de entradas de la lista  $L(w)$  que aparezcan como el único elemento de la lista de algún nodo  $v \in N(w)$ .*

**Observación** Es claro ver que un *update* no va a cambiar la colorabilidad de una tupla  $(G, L)$ , debido a que al tener un nodo con lista de tamaño 1, está virtualmente coloreado, por lo que si llegáramos a pintar alguno de sus vecinos del mismo color, nuestro coloreo no sería factible. Lo que hace el proceso de *update* es eliminar opciones infactibles.

**Definición 2.2** Si obtenemos una paleta  $L'$  desde una paleta  $L$  al hacer *update* repetidamente en todo nodo  $v \in V(G)$ , decimos que obtuvimos  $L'$  desde  $L$  por *update*.

Para ilustrar de mejor manera el proceso de *update*, consideremos un ejemplo sencillo. Dado un  $C_6$  con listas  $\{1\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$  y  $\{1, 2, 3\}$  respectivamente para los vértices  $c_0, \dots, c_5$ . Si hacemos *update* sobre la paleta, nos da las listas (en orden)  $\{1\}, \{3\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$  y  $\{2, 3\}$ . Notamos que fueron los nodos  $c_0$  y  $c_2$  los que hicieron perder un color a sus vecinos, donde posteriormente  $c_5$  al quedar con su lista de tamaño uno, borra una entrada de la lista de  $c_4$ . Este ejemplo puede verse en la Figura 2.1.

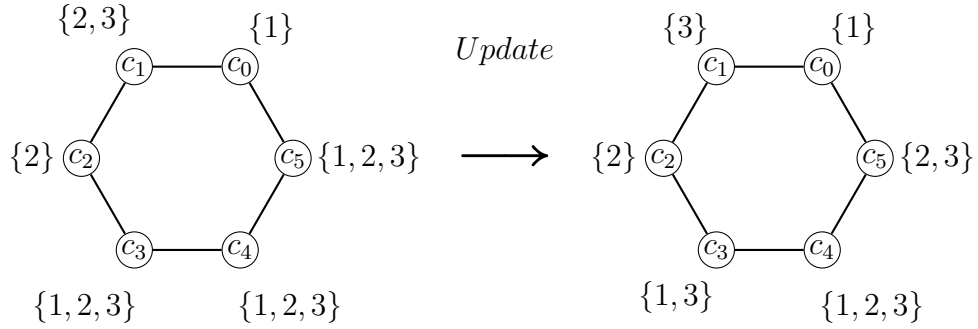


Figura 2.1: Ejemplo de proceso de *update* realizado sobre el  $C_6$ .

Notamos que este proceso puede llevarse a cabo en tiempo  $O(|V(G)| + |E(G)|)$ , y el orden en que se hace *update* desde los nodos no cambia la paleta resultante.

Finalmente, reduciendo a una instancia de *2-SAT*, que puede ser resuelta en tiempo lineal en el número de variables y clausulas, varios autores [11, 12, 28] probaron independientemente el siguiente resultado, que será importante para el desarrollo de este trabajo:

**Teorema 2.3** Si una paleta  $L$  de un grafo  $G$  es tal que  $|L(v)| \leq 2, \forall v \in V(G)$ . Entonces es posible decidir en tiempo  $O(|V(G)| + |E(G)|)$  la colorabilidad de la tupla  $(G, L)$ .

# Capítulo 3

## 3-coloreo en grafos $(P_9, C_5, C_3)$ -free.

El resultado a probar en este capítulo es el siguiente.

**Teorema 3.1** *Sea  $G$  un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free. Es posible decidir si  $G$  posee un 3-coloreo factible y encontrarlo (en caso de que exista) en tiempo polinomial.*

Para llegar a él, iremos paso a paso entendiendo la estructura de un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free en la Sección 3.1, para luego presentar un algoritmo que resuelva el problema en la Sección 3.2. La complejidad relacionada será vista en el Capítulo 5.

### 3.1. Estructura de grafos $(P_9, C_5, C_3)$ -free.

En esta sección, revisaremos lemas y proposiciones que nos ayudarán a entender la estructura que siguen los grafos de la clase ya descrita.

A continuación, veremos un par de resultados ya conocidos que usaremos en las proposiciones estructurales del grafo.

**Lema 3.2** *Sea  $G$  un grafo y  $v, w \in V(G)$  tal que  $vw \notin E(G)$ , si  $N(v) \subseteq N(w)$ , entonces:*

$$G \text{ es } k\text{-coloreable} \iff G \setminus v \text{ es } k\text{-coloreable}$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $G$  es  $k$ -coloreable, es directo ver que cualquier subgrafo inducido lo será también, por lo que  $G \setminus v$  es  $k$ -coloreable también.

Si  $G \setminus v$  es  $k$ -coloreable, sea  $c' : V(G) \setminus v \rightarrow \{1, \dots, k\}$  un  $k$ -coloreo factible del grafo  $G \setminus v$ , y tenemos que  $c'(w) = j$  en dicho coloreo. Como  $c'$  es un coloreo factible, tenemos que todos los nodos en  $N(w)$  poseen un color distinto a  $j$ , luego, como sabemos que  $N(v) \subseteq N(w)$ , los vecinos de  $v$  tampoco tendrán dicho color, por lo que podemos colorear  $v$  de  $j$  y extender  $c'$  a un  $k$ -coloreo factible  $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de  $G$  donde  $c(v) = c'(w)$ .  $\square$

Al proceso de quitar un nodo que cumpla con las hipótesis del Lema 3.2 lo llamaremos *reducción*.

**Definición 3.3** Para un par de nodos  $v_1, v_2 \in V(G)$  distintos y  $B \subseteq V(G) \setminus \{v_1, v_2\}$ , decimos que ambos son clones respecto al conjunto  $B$  si

$$N_B(v_1) = N_B(v_2),$$

Al mismo tiempo, decimos que un conjunto  $A \subseteq V(G)$  es un conjunto clon con respecto a  $B \subseteq V(G) \setminus A$  si  $\forall a_1, a_2 \in A, N_B(a_1) = N_B(a_2)$ .

**Definición 3.4** Para un grafo  $G = (V, E)$ , sea  $H$  un subgrafo inducido bipartito y conexo de  $G$ , con clases de bipartición  $R$  y  $L$ . Si tenemos que los conjuntos  $R$  y  $L$  son clones con respecto a  $V(G) \setminus V(H)$ , definimos al grafo  $G' = (V', E')$  como

$$V' = (V(G) \setminus V(H)) \cup \{l, r\}$$

$$E' = \{vw \in E : v, w \in V(G) \setminus V(H)\} \cup \{rv : v \in N(R)\} \cup \{lv : v \in N(L)\} \cup \{rl\},$$

borrando posibles aristas duplicadas. Llamamos al grafo  $G'$  una simplificación del grafo  $G$ .

Notamos que la transformación anterior, lo que hace es simplificar cada una de las biparticiones  $R, L \subseteq V(G)$  de  $H$  a nodos  $r, l \in V(G')$  adyacentes en  $E(G')$  donde  $r$  y  $l$  poseen las mismas vecindades que  $R$  y  $L$  en  $V(G) \setminus V(H)$  respectivamente, lo cual puede iterarse para así reducir todos los subgrafos inducidos bipartitos que cumplan las condiciones de la Definición 3.4 a aristas.

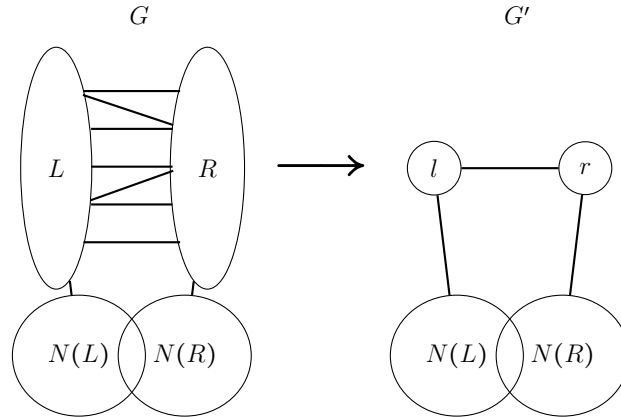


Figura 3.1: Visualización de la transformación de la Definición 3.4, donde los nodos de  $N(L)$  y  $N(R)$  cumplen con ser adyacentes a cada nodo de  $L$  y  $R$  respectivamente.

**Proposición 3.5** Sea  $G = (V, E)$  un grafo, sea  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 3$ . Si  $G'$  es una simplificación de  $G$  entonces tenemos que:

- (a) Si  $G$  es  $P_d$ -free  $\implies G'$  es  $P_d$ -free.
- (b) Si  $G$  es  $C_d$ -free  $\implies G'$  es  $C_d$ -free.
- (c)  $G$  es  $k$ -coloreable  $\iff G'$  es  $k$ -coloreable.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H$  el subgrafo inducido de  $G$ , bipartito y conexo usado para definir  $G'$ , de clases de bipartición  $R, L$  donde  $R, L$  son clones con respecto a  $V(G) \setminus V(H)$ . Para (a), supondremos por contradicción que existe un camino de largo  $d$  inducido  $P'$  en  $G'$  y no en  $G$ .

Es fácil ver que si  $P'$  no ocupa  $\{l, r\}$ , este se encontrará en  $G$ , una contradicción, por lo que asumimos que  $P'$  si ocupa al menos uno de los nodos  $r$  o  $l$ , digamos  $r$ . Asumimos entonces que  $P' = p_1, \dots, p_{i-1}, r, p_{i+1}, \dots, p_d$ .

Podemos tomar un nodo arbitrario de  $R$ , digamos  $r_1$ , y formar el camino  $P = p_1, \dots, p_{i-1}, r_1, p_{i+1}, \dots, p_d$  en  $G$ . Recordemos que como  $r_1$  posee los mismos vecinos de  $r$  en  $V \setminus (L \cup R)$ , el camino  $P$  es inducido, y de largo  $d$ , lo que es una contradicción con que  $G$  sea  $(P_d)$ -free.

En caso de que  $P'$  ocupe ambos nodos, significa que la arista  $(r, l)$  será parte de dicho camino, por lo que sin pérdida de generalidad  $P' = p_1, \dots, p_{i-1}, r, l, p_{i+1}, \dots, p_d$ . Sean  $l_1 \in L$  y  $r_1 \in R$  tal que sean adyacentes en  $G$ , entonces definimos el camino  $P = p_1, \dots, p_{i-1}, r_1, l_1, p_{i+1}, \dots, p_d$  que será inducido porque  $r_1$  posee la misma vecindad en  $G \setminus L$  que  $r$  (lo mismo para  $l_1$ ), lo que es una contradicción, con lo que demostramos la implicancia.

Notamos que el caso de que estemos prohibiendo un ciclo  $C_d$ , la demostración es similar, tomando el ciclo en  $G'$  quitándole los nodos  $r$  o  $l$  y reemplazándolos respectivamente con nodos de  $R$  o  $L$  para formar el mismo ciclo en  $G$ , por lo que (b) se demuestra análogamente. Demostremos ahora la equivalencia (c):

Si  $G$  es  $k$ -coloreable, entonces sea  $c : V \longrightarrow \{1, \dots, k\}$  un  $k$ -coloreo factible para dicho grafo. Sea  $v \in V'$  y sean nodos  $r_1 \in R$  y  $l_1 \in L$  adyacentes en  $G$ , definimos el  $k$ -coloreo  $c'$  para  $G'$  como:

$$c'(v) = \begin{cases} c(v) & \text{si } v \in V \cap V' \\ c(r_1) & \text{si } v = r \\ c(l_1) & \text{si } v = l \end{cases}$$

Es fácil ver que la factibilidad de este coloreo está dada directamente por la factibilidad de  $c$  como coloreo en  $G$ .

Si  $G'$  es  $k$ -coloreable, entonces sea  $c' : V \longrightarrow \{1, \dots, k\}$  un coloreo factible para dicho grafo.

Sea  $v \in V$ , definimos el coloreo  $c$  para  $G$  como:

$$c(v) = \begin{cases} c'(v) & \text{si } v \in V \cap V' \\ c'(r) & \text{si } v \in R \\ c'(l) & \text{si } v \in L \end{cases}$$

Es fácil ver que la factibilidad de este coloreo está dada directamente por la factibilidad de  $c'$  como coloreo en  $G$ .  $\square$

Podemos entonces usar el Lema 3.2 y la Proposición 3.5 para modificar la estructura de un grafo  $G$   $(P_9, C_5, C_3)$ -free, manteniendo los subgrafos inducidos prohibidos y a la vez conservando las propiedades de colorabilidad de cada uno.

Lo que haremos para los grafos  $(P_9, C_5, C_3)$ -free es someterlos a los procesos de *reducción* y *simplificación* hasta que ninguno de los procesos pueda realizarse más. A un grafo  $G$  el cual ya no se pueda someter a los procesos de *reducción* y *simplificación* lo llamaremos un grafo *minimal*.

Tenemos el siguiente corolario directo del Lema 3.2.

**Corolario 3.6** *Sea  $G$  un grafo minimal y  $v, w \in V(G)$  tal que  $vw \notin E(G)$ , entonces existen nodos  $v', w'$  tal que:*

$$v' \in N(v) \setminus N(w) \text{ y } w' \in N(w) \setminus N(v).$$

### 3.1.1. Existencia de un $C_9$ inducido

En esta subsección, intentaremos entender la estructura de un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free el cual posee un ciclo  $C$  de largo 9 como subgrafo inducido, con el objetivo de aprovecharnos de esta estructura para lograr resolver el problema de  $3$ -coloreo posteriormente. Probaremos el siguiente resultado:

**Proposición 3.7** *Sea un grafo  $G$  conexo y minimal, de la clase  $(P_9, C_5, C_3)$ -free, tal que  $G$  posee un ciclo  $C = c_0, c_1, \dots, c_8$  de largo 9 como subgrafo inducido. Tenemos que  $V(G)$  es la unión disjunta de cinco conjuntos de nodos, es decir,*

$$V(G) = V(C) \cup T \cup T' \cup S \cup Y,$$

*Los conjuntos  $T, T'$  y  $S$  están a distancia 1 de  $C$ , mientras que los nodos en  $Y$  están a distancia 2 de  $C$ . Además tenemos que, para todo  $i \in [8]$ :*

- (a) *Existen conjuntos estables disjuntos  $T_i, T'_i$  y  $S_i$ , tal que  $T = \bigcup_{i=0}^8 T_i$ ,  $T' = \bigcup_{i=0}^8 T'_i$  y  $S = \bigcup_{i=0}^8 S_i$ .*
- (b) *Los nodos de los conjuntos  $T_i$ , tienen exactamente dos vecinos en  $C$ , que son nodos  $c_i, c_{i+2}$ .*
- (c) *Los nodos de los conjuntos  $T'_i$ , tienen exactamente dos vecinos en  $C$ , que son nodos  $c_i, c_{i+4}$ .*
- (d) *Los nodos de los conjuntos  $S_i$ , tienen exactamente tres vecinos en  $C$ , que son nodos  $c_i, c_{i+2}, c_{i+4}$ .*
- (e) *Las componentes del grafo  $G[Y]$  son nodos aislados o aristas, y además  $N_{V(G) \setminus Y}(y) \subseteq T' \cup S$ , para todo  $y \in Y$ .*

*La adición en los índices de  $c_i$  es comprendida en módulo 9.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $v$  un nodo adyacente a  $C$  (no perteneciente a este ciclo), notamos que:

- El nodo  $v$  no puede ser adyacente a  $C$  a través de una sola arista. Si esto ocurriera, sea  $c_i$  el nodo al cual  $v$  es adyacente, entonces vemos en la Figura 3.2 que se forma un camino de largo 9 inducido, lo que es una contradicción.

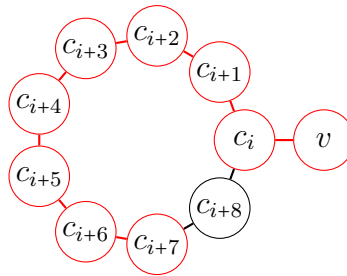


Figura 3.2

- El nodo  $v$  puede estar unido con dos aristas a  $C$ , lo cual resulta en dos casos posibles:
  - Conjuntos  $T_i$ : nodos con vecinos en  $C$  del tipo  $c_i, c_{i+2}, i \in [8]$ .
  - Conjuntos  $T'_i$ : nodos con vecinos en  $C$  del tipo  $c_i, c_{i+4}, i \in [8]$ .

Es fácil ver que todos los demás casos generan un ciclo impar de largo 3 o 5 con  $C$ , los cuales están prohibidos.

- El caso de que  $v$  tenga tres vecinos en  $C$ , solo existe una configuración posible debido a la generación de ciclos prohibidos, que es cuando está unido a nodos  $c_i, c_{i+2}$  y  $c_{i+4}$ , los cuales llamaremos conjuntos  $S_i$ .

Observamos que todos los conjuntos  $T_i, T'_i$  y  $S_i$  son estables, debido a que cada conjunto comparte un vecino común en el ciclo y a la prohibición de  $C_3$ , con lo que quedan definidos los conjuntos  $T, T'$  y  $S$ , y queda probada la afirmación (a) y que los conjuntos  $T_i, T'_i$  y  $S_i$  satisfacen las condiciones (b), (c) y (d).

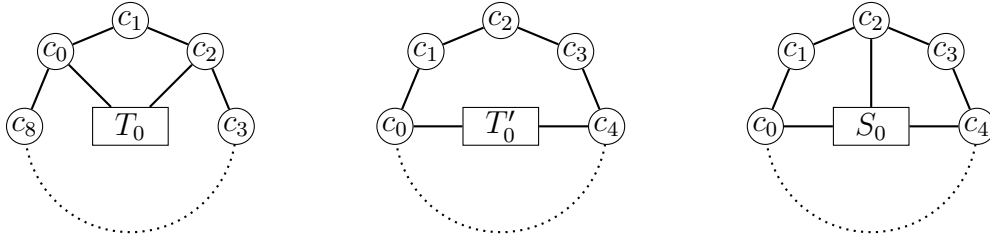


Figura 3.3: Ejemplos de conjuntos estables  $T_i, T'_i$  y  $S_i, i \in [8]$ .

Una vez vista la estructura que rodea a  $C$ , lo que haremos es ver como se disponen los nodos mas lejanos a  $C$ .

Afirmamos que

$$\text{no existen nodos a distancia } \geq 3 \text{ de } C. \quad (3.1)$$

Supongamos que existe un nodo  $z$  a distancia 3 de  $C$ , y sea  $zysc_i$  un camino minimal desde  $z$  hasta  $C$ , donde  $i \in [8]$ . Supondremos que  $s \in S_i$  (adyacente a los nodos  $c_i, c_{i+2}$  y  $c_{i+4}$ ), pues las demostraciones de los otros casos se derivan fácilmente de éste.

Como no existen triángulos en nuestro grafo, no existe arista entre  $z$  y  $s$ , por lo que podemos usar el Corolario 3.6 sobre este par de nodos, lo cual nos dice que existe un nodo  $z' \in N(z) \setminus N(s)$ . Notamos que  $z'$  e  $y$  no son adyacentes porque  $G$  no tiene triángulos. Por lo tanto, podemos formar el camino inducido mostrado en la Figura 3.4.

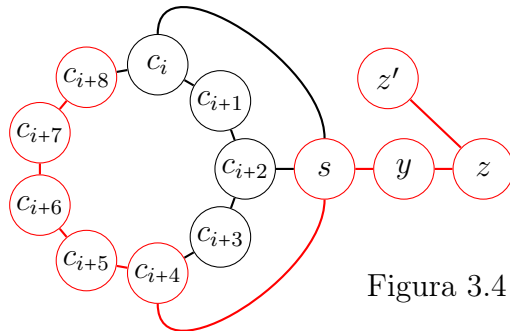


Figura 3.4



Este camino está prohibido. Debido a esto, no pueden existir nodos a distancia 3 de  $C$ , y como  $G$  es conexo, a mayor distancia tampoco, lo que prueba (3.1).

Entonces sólo existen nodos a lo más a distancia 2 de  $C$ , y es a estos nodos a los que denominaremos como nuestro conjunto  $Y$ . A continuación veamos a que conjuntos pueden ser adyacentes a nodos de  $Y$ .

Afirmamos que

$$\text{ningún } y \in Y \text{ es adyacente a } T. \quad (3.2)$$

Sea  $y \in Y$  y sea  $t \in T_i$ . Supongamos que existe una arista que los une. Entonces, podemos formar el camino de la Figura 3.5.

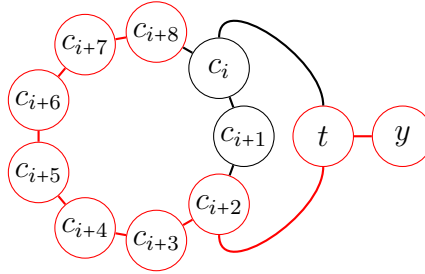


Figura 3.5

Este camino es un  $P_9$  inducido, que está prohibido por lo que es una contradicción y prueba (3.2).

Por lo que los nodos en  $Y$  solo pueden ser adyacentes al conjunto  $T' \cup S$ , lo cual prueba parcialmente la condición (e). Veamos ahora la estructura dentro del conjunto  $Y$ .

A continuación, afirmamos que

$$G[Y] \text{ es un grafo bipartito, donde para cada componente conexa, los nodos de la misma clase de bipartición tienen exactamente los mismos vecinos en } V(G) \setminus Y. \quad (3.3)$$

Antes de probarlo, si tenemos el resultado, notamos que una componente conexa de clases de bipartición  $Y_1, Y_2$ , cumple que  $Y_1, Y_2$  son clones con respecto a  $V(G) \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ , y como el grafo  $G$  es minimal, concluimos que cualquier componente conexa de  $Y$  es un nodo aislado o una arista, con lo que terminamos de probar la condición (e).

Para probar (3.3), sean  $y_1, y_2, y_3 \in Y$  tal que forman el  $P_3$  inducido  $y_1 y_2 y_3$ , con extremos  $y_1, y_3$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $y_1$  es adyacente a un nodo  $s \in S_i$ ,  $i \in [8]$ . Notamos que podemos formar el siguiente camino ilustrado en la Figura 3.6, que es un  $P_9$ , por lo que no puede ser inducido o tendríamos una contradicción.

Notamos que la única arista posible (debido a que no hay  $C_3$  y que los nodos en  $Y$  no pueden ser adyacentes al ciclo principal) es entre  $y_3$  y  $s$ .

Esto implica que para cualquier  $P_3$  formado en  $Y$ , el nodo inicial  $y_1$  y el nodo final  $y_3$  deben tener los mismos vecinos en  $V(G) \setminus Y$ .

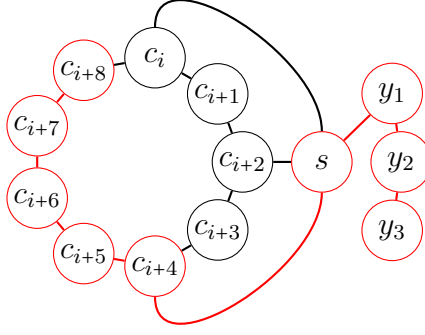


Figura 3.6

Supongamos ahora que el conjunto  $Y$  no es bipartito, por lo tanto, existe un ciclo de largo impar  $C_t$ . Debido al resultado del párrafo anterior, tenemos que los nodos  $c_0, c_2, \dots, c_{t-3}, c_{t-1}$  tienen los mismos vecinos que se ubican a distancia 1 del ciclo principal, sin embargo, los nodos  $c_0$  y  $c_{t-1}$  son adyacentes en este ciclo por ser impar, por lo que si comparten un vecino, se formaría un  $C_3$  que está prohibido, y es una contradicción.

Lo cual significa que no pueden existir ciclos impares en  $Y$ , por lo que define un subgrafo inducido bipartito.

El hecho de que para cada componente conexa de este grafo, los nodos de una misma bipartición tienen la misma vecindad es consecuencia directa de que cualquier  $P_3 = y_1y_2y_3$  formado en  $Y$ , el nodo inicial  $y_1$  y el nodo final  $y_3$  deben tener los mismos vecinos en  $V(G) \setminus Y$ , con lo que probamos (3.3).  $\square$

### Estructura de adyacencia entre conjuntos $S$ , $T$ y $T'$ .

Analizaremos a continuación la forma en que nodos de los conjuntos  $S$ ,  $T$  y  $T'$  pueden ser adyacentes.

Sea  $z, z' \in N(C)$  tal que  $zz' \in E(G)$ . Nuestro objetivo será ver los posibles conjuntos  $T_i$ ,  $T'_i$  o  $S_i$ , para algún  $i \in [8]$ , a los cuales  $z$  y  $z'$  pueden pertenecer.

- Si  $z, z' \in T'$ : si  $z \in T'_i$ , para algún  $i \in [8]$ , notamos que se forman ciclos  $C_5$  para los casos cuando  $z' \in T'_{i+2} \cup T'_{i+3} \cup T'_{i+6} \cup T'_{i+7}$ , y se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T'_{i+4} \cup T'_{i+5}$ . Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+8}$ .
- Si  $z, z' \in S$ : si  $z \in S_i$ , para algún  $i \in [8]$ , podemos descartar los casos cuando  $z' \in S_{i+2} \cup S_{i+3} \cup S_{i+4} \cup S_{i+5} \cup S_{i+6} \cup S_{i+7}$  de la misma manera que en el ítem anterior. Esto deja como única posibilidad que  $z' \in S_{i+1} \cup S_{i+8}$ .
- Si  $z \in S$  y  $z' \in T$ : si  $z \in S_i$ , para algún  $i \in [8]$ , podemos descartar los casos cuando  $z' \in T_{i+2} \cup T_{i+4} \cup T_{i+5} \cup T_{i+6} \cup T_{i+7}$  de la misma manera que en el ítem anterior, además del caso  $z' \in T_i$  ya que se forma un triángulo.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+8}$ .

- Si  $z, z' \in T$ : si  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [8]$ , notamos que se forman ciclos  $C_5$  para los casos cuando  $z' \in T_{i+4} \cup T_{i+5}$ , y se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T'_{i+2} \cup T'_{i+7}$ .

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+6} \cup T_{i+8}$ .

- Si  $z \in T'$  y  $z' \in T$ : si  $z \in T'_i$ , para algún  $i \in [8]$ , notamos que se forman ciclos  $C_5$  para los casos cuando  $z' \in T_{i+5} \cup T_{i+6}$ , y se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T_i \cup T_{i+2} \cup T_{i+4} \cup T_{i+7}$ .

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+8}$ .

- Si  $z \in T'$  y  $z' \in S$ : si  $z \in T'_i$ , para algún  $i \in [8]$ , notamos que se forman ciclos  $C_5$  para los casos cuando  $z' \in S_{i+3} \cup S_{i+6}$ , y se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in S_i \cup S_{i+2} \cup S_{i+4} \cup S_{i+5} \cup S_{i+7}$ .

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in S_{i+1} \cup S_{i+8}$ .

El análisis anterior lo resumiremos en los siguientes lemas.

**Lema 3.8** *Sea  $z \in T'_i$ , para algún  $i \in [8]$ , y sea  $z' \in (T \cup S \cup T')$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces*

$$z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+8} \cup S_{i+1} \cup S_{i+8} \cup T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+8}$$

**Lema 3.9** *Sea  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [8]$ , y sea  $z' \in (T \cup S \cup T')$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces*

$$z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+6} \cup T'_{i+8} \cup S_{i+1} \cup S_{i+6} \cup S_{i+8} \cup T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+6} \cup T_{i+8}.$$

*Similarmente, si  $z \in S_i$ , para algún  $i \in [8]$  y sea  $z' \in (T \cup S \cup T') \setminus S_i$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces*

$$z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+8} \cup S_{i+1} \cup S_{i+8} \cup T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+8}.$$

## Estructura de adyacencia entre $S, T'$ e $Y$

A continuación entenderemos la forma en que componentes de  $Y$  (nodos aislados o aristas) se unen a los conjuntos  $T'$  y  $S$ . A partir de ahora consideraremos el conjunto  $Y^* \subseteq Y$  como el conjunto de vértices aislados en  $G[Y]$ .

Sea  $y \in Y$ , veamos las posibles combinaciones de conjuntos  $S_i, T'_j$  a los que puede ser adyacentes, recordando que no puede ser adyacente al conjunto  $T$  por (3.2). Es fácil ver que no existen problemas cuando  $y$  es adyacente exclusivamente a un conjunto (sea  $S_i$  o  $T'_j$ ) mediante uno o más nodos, por lo que nos concentraremos en los casos donde sea adyacente a más de uno. Los separaremos en tres grupos para que se vea mas claramente.

Sea  $z, z' \in N(y) \setminus Y$ , pero que no poseen los mismos vecinos en  $C$ . Vemos que  $z, z'$  no pueden ser adyacentes entre si ya que no hay  $C_3$ , por lo que  $zyz'$  es un  $P_3$  inducido. Nuestro objetivo será ver los posibles conjuntos a los cuales  $z$  y  $z'$  pueden pertenecer.

- Si  $y$  es adyacente solo al conjunto  $T'$ : cuando  $z \in T'_i$ , si un nodo en  $N_C(z')$  fuera adyacente a alguno de los nodos en  $N_C(z)$ , se formaría un  $C_5$ , que está prohibido, dejando como opciones posibles de vecinos para  $z'$  a los nodos  $c_i, c_{i+2}, c_{i+4}, c_{i+6}, c_{i+7}$ .

En este conjunto de nodos, como estamos suponiendo que  $z' \in T' \setminus T_i$ , el nodo  $z'$  solo puede ser parte del conjunto  $T'_{i+2} \cup T'_{i+7}$ .

- Si  $y$  es adyacente solo al conjunto  $S$ : Cuando  $z \in S_i$ , los únicos vecinos posibles en  $C$  de  $z'$  son  $c_i, c_{i+2}, c_{i+4}, c_{i+6}, c_{i+7}$ .

El único conjunto posible para  $z'$  es  $S_{i+2} \cup S_{i+7}$ .

- Si  $y$  es adyacente a los conjuntos  $T'$  y  $S$ : Cuando  $z \in S_i$ , si  $z' \in T'$ , para evitar la formación de un  $C_5$ , puede ser adyacente a los nodos  $c_i, c_{i+2}, c_{i+4}, c_{i+6}, c_{i+7}$ .

El conjunto al cual  $z'$  puede pertenecer es  $T_i \cup T'_{i+2} \cup T'_{i+7}$ . De manera análoga, si  $z \in T'_i$  y  $z' \in S$ ,  $z'$  puede ser parte del conjunto  $S_i \cup S_{i+2} \cup S_{i+7}$ .

El análisis anterior lo resumiremos en los siguientes lemas.

**Lema 3.10** *Sea  $y \in Y \cap N(T'_i)$ , para algún  $i \in [8]$  y sea  $z \in N(y) \setminus (Y \cup T'_i)$ , entonces*

$$z \in T'_{i+2} \cup T'_{i+7} \cup S_i \cup S_{i+2} \cup S_{i+7}.$$

**Lema 3.11** *Sea  $y \in Y \cap N(S_i)$ , para algún  $i \in [8]$  y sea  $z \in N(y) \setminus (Y \cup S_i)$ , entonces*

$$z \in T'_i \cup T'_{i+2} \cup T'_{i+7} \cup S_{i+2} \cup S_{i+7}.$$

De aquí podemos extraer unos corolarios directos y resultados útiles.

**Corolario 3.12** *Sea  $i \in [8]$ , y sea  $y \in Y \cap N(T'_i)$ . Sea  $z \in N(y) \setminus (Y \cup T'_{i+2} \cup T'_{i+7})$ , entonces el conjunto  $N_C(T'_i) \cap N_C(z) \neq \emptyset$ .*

*Esto significa que si  $z \notin T'$ , siempre compartirá un vecino en el ciclo  $C$  con el conjunto  $T'_i$ .*

DEMOSTRACIÓN. Directo del Lema 3.10. □

**Corolario 3.13** *Sea  $i \in [8]$ , y sea  $y \in Y \cap N(S_i)$ . Sea  $z \in N(y) \setminus Y$ , entonces el conjunto  $N_C(S_i) \cap N_C(z) \neq \emptyset$ .*

DEMOSTRACIÓN. Directo del Lema 3.11. □

**Lema 3.14** *Si existe  $i \in [8]$  e  $y \in Y$  tal que  $y \in N(T'_i)$  y  $T'_{i+2} \cup T'_{i+7} \neq \emptyset$ , entonces  $y$  es completo al conjunto  $T'_i \cup T'_{i+2} \cup T'_{i+7}$ .*

*Los conjuntos  $T'_{i+2}$  y  $T'_{i+7}$  no pueden ser no vacíos al mismo tiempo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $T'_{i+2} \neq \emptyset$ . Sean  $t \in T'_i \cap N(y)$  y  $t' \in T'_{i+2}$ . Luego, suponemos por contradicción que  $yt' \notin E(G)$ . Podemos formar el camino de la Figura 3.7 que es un  $P_9$  inducido, lo cual no puede ocurrir, por lo que  $yt' \in E(G)$ , como esto fue hecho para un nodo arbitrario en  $T'_{i+2}$ , concluimos que  $y$  es completo a  $T'_{i+2}$ .

El camino puede armarse de manera análoga pasando primero por  $T'_{i+2}$  y luego por un nodo arbitrario de  $T'_i$ , logrando que  $y$  es completo a  $T'_i$ .

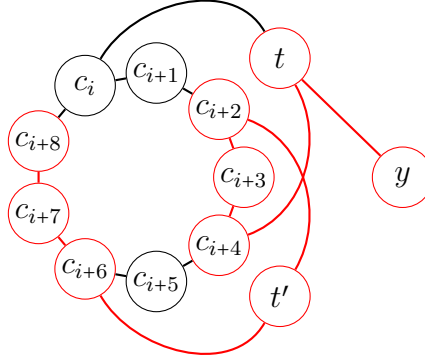


Figura 3.7

Si  $T'_{i+7} \neq \emptyset$ , podemos hacer lo mismo y concluir que  $y$  es completo a  $T'_i \cup T'_{i+2} \cup T'_{i+7}$ , aunque una observación importante es que si existen nodos  $t_1 \in T'_{i+2}$  y  $t_2 \in T'_{i+7}$ , se forma el  $C_5$  inducido  $y - t_1 - c_{i+7} - c_{i+6} - t_2$ . Por lo que los conjuntos  $T'_{i+2}$  y  $T'_{i+7}$  no pueden ser no vacíos al mismo tiempo.  $\square$

Ahora nos enfocaremos en el conjunto  $Y \setminus Y^*$ , es decir, el conjunto de vértices no aislados de  $G[Y]$ .

Para  $y_1, y_2 \in Y$ , donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , afirmamos que

$$\text{para } a \in N(y_1) \setminus Y \text{ y } b \in N(y_2) \setminus Y, \text{ no existe } c \in N_C(a) \cap N_C(b). \quad (3.4)$$

Supongamos que existe  $c \in N_C(a) \cap N_C(b)$ , si  $ab \notin E(G)$ , se forma el  $C_5 = y_1, a, c, b, y_2$  y si es que  $ab \in E(G)$ , se forma el  $C_3 = a, c, b$ , lo que es una contradicción, y prueba (3.4).

Sean  $y_1, y_2 \in Y$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , ahora veremos las combinaciones posibles de conjuntos a los que  $y_1$  e  $y_2$  pueden ser adyacentes, los cuales separaremos en tres grupos. Sean  $z \in N(y_1) \setminus Y$  y  $z' \in N(y_2) \setminus Y$ .

- Si  $z, z'$  pertenecen al conjunto  $T'$ : Asumimos que  $z \in T'_i$ , la afirmación (3.4) nos dice que los posibles vecinos de  $z'$  son  $c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+5}, c_{i+6}, c_{i+7}, c_{i+8}$ . Por lo que  $z'$  puede pertenecer a  $T'_{i+1}, T'_{i+2}, T'_{i+3}, T'_{i+6}, T'_{i+7}$  o  $T'_{i+8}$ .
  - Caso  $T'_{i+2}$ : Si  $z' \in T'_{i+2}$ , notamos que  $zz' \notin E(G)$  ya que se formaría un  $C_5$  con  $c_{i+2}, c_{i+3}$  y  $c_{i+4}$ . Luego, podemos formar el  $P_9$  de la Figura 3.8 el cual es inducido, por lo que tenemos una contradicción. Por lo tanto,  $z' \notin T'_{i+2}$ . Notamos además que el caso  $z' \in T'_{i+7}$  es simétrico a este si intercambiamos los papeles de  $z$  y  $z'$ , por lo que lo descartamos bajo el mismo argumento.

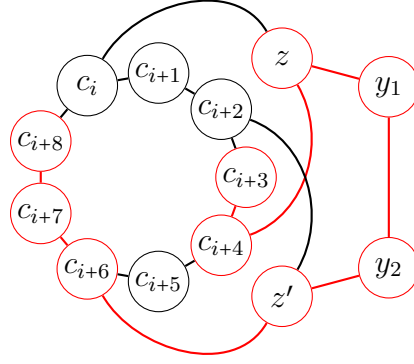


Figura 3.8

- Caso  $T'_{i+3}$ : Si  $z' \in T'_{i+3}$ , notamos que  $zz' \notin E(G)$  ya que se formaría un  $C_5$  con  $c_{i+7}$ ,  $c_{i+8}$  y  $c_i$ . Luego, podemos formar el  $P_9$  de la Figura 3.9.

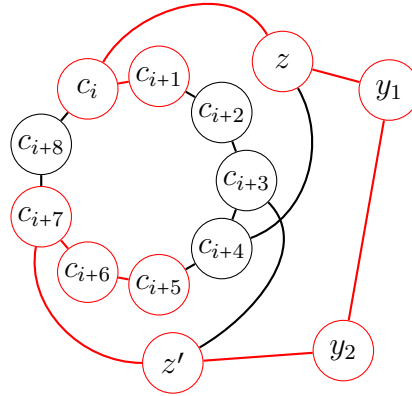


Figura 3.9

Este camino es inducido, por lo que tenemos una contradicción. Por lo tanto,  $z' \notin T'_{i+3}$ . Notamos además que el caso  $z' \in T'_{i+6}$  es simétrico a este si intercambiamos los papeles de  $z$  y  $z'$ , por lo que lo descartamos bajo el mismo argumento.

Con esto, concluimos que  $z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+8}$ .

- Si  $z, z'$  pertenecen al conjunto  $S$ : Asumimos que  $z \in S_i$ , la afirmación (3.4) nos dice que los posibles vecinos de  $z'$  son  $c_{i+1}, c_{i+3}, c_{i+5}, c_{i+6}, c_{i+7}, c_{i+8}$ . Por lo que  $z' \in S_{i+1} \cup S_{i+3} \cup S_{i+6} \cup S_{i+8}$ .
- Si  $z \in S$  e  $z' \in T'$ : Asumimos que  $z \in S_i$ , la afirmación (3.4) nos dice que los vecinos de  $z'$  pueden ser  $c_{i+1}, c_{i+3}, c_{i+5}, c_{i+6}, c_{i+7}, c_{i+8}$ . Por lo que  $z'$  puede pertenecer a  $T'_{i+1}, T'_{i+3}, T'_{i+6}$  o  $T'_{i+8}$ .
  - Caso  $T'_{i+3}$ : Si  $z' \in T'_{i+3}$ , notamos que  $zz' \notin E(G)$  ya que se formaría un  $C_5$  con  $c_{i+7}$ ,  $c_{i+8}$  y  $c_{i+9}$ . Luego, podemos formar el  $P_9$  análogo al caso  $y_1 \in T'_i$  e  $y_2 \in T'_{i+3}$ , el cual es inducido, por lo que tenemos una contradicción. Por lo tanto,  $z' \notin T'_{i+3}$ , notamos además que el caso  $T'_{i+6}$  es simétrico a este, por lo que lo descartamos bajo el mismo argumento.

Por lo que  $z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+8}$ .

El análisis anterior lo resumiremos en los siguientes lemas.

**Lema 3.15** Sea  $i \in [8]$ , y sean  $y \in Y \cap N(T'_i)$  e  $y' \in Y$ , donde  $yy' \in E(G)$ , entonces

$$y' \in N(T'_{i+1} \cup T'_{i+8} \cup S_{i+1} \cup S_{i+8}).$$

**Lema 3.16** Sea  $i \in [8]$ , y sean  $y \in Y \cap N(S_i)$  e  $y' \in Y$ , donde  $yy' \in E(G)$ , entonces

$$y' \in N(T'_{i+1} \cup T'_{i+8} \cup S_{i+1} \cup S_{i+3} \cup S_{i+6} \cup S_{i+8}).$$

A continuación un par de corolarios de estos lemas.

**Corolario 3.17** Sea  $i \in [8]$ , y sean  $y \in Y \cap N(T'_i)$  e  $y' \in Y$ , donde  $yy' \in E(G)$ . Entonces para todo  $v \in N(y') \setminus Y$  y para todo  $c \in N_C(v)$  tenemos que  $c \in N_C(\{c_i, c_{i+4}\})$ .

Esto significa que todos los nodos en  $N(y_2) \setminus Y$  cumplen con que todos sus vecinos en el ciclo son adyacentes a  $c_i$  o  $c_{i+4}$ .

DEMOSTRACIÓN. Directo del Lema 3.15. □

**Corolario 3.18** Sea  $i \in [8]$ , y sean  $y \in Y \cap N(S_i)$  e  $y' \in Y \setminus N(S_{i+3} \cup S_{i+6})$ , donde  $yy' \in E(G)$ . Entonces para todo  $v \in N(y') \setminus Y$  y para todo  $c \in N_C(v)$  tenemos que  $c \in N_C(\{c_i, c_{i+4}\})$ .

DEMOSTRACIÓN. Directo del Lema 3.16. □

Con esto, tenemos todos los casos de adyacencia para los nodos en el conjunto  $Y$ . A continuación definiremos un conjuntos de nodos que será útil de identificar al enunciar el algoritmo.

**Definición 3.19** Al conjunto de nodos  $y_1, y_2 \in Y$  tales que  $y_1 y_2 \in E(G)$  y que sean adyacentes respectivamente a los conjuntos  $S_i$  y  $S_{i+3}$ , para algún  $i \in [8]$ , se les denominará  $Y_i^S$ .

Finalmente denominamos  $Y^S = \bigcup_{i=0}^8 Y_i^S$ .

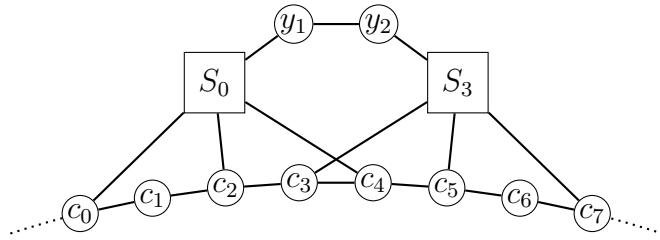


Figura 3.10: Ejemplo de nodos  $y_1, y_2 \in Y_0^S$ .

**Lema 3.20** Para cada  $i \in [8]$ , existen  $s_i^* \in S_i$  y  $s_{i+3}^* \in S_{i+3}$  tal que:

$$N_{Y_i^S}(s_i^*) \cup N_{Y_{i+3}^S}(s_{i+3}^*) = Y_i^S.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $y_1y_2$  e  $y_3y_4$  dos aristas distintas de  $E(Y_i^S)$ , donde  $y_1$  e  $y_3$  son adyacentes a  $S_i$ , e  $y_2$  con  $y_4$  son adyacentes a  $S_{i+3}$ .

Afirmamos que

$$N_{S_i}(y_1) \subseteq N_{S_i}(y_3), \text{ o bien } N_{S_i}(y_3) \subset N_{S_i}(y_1). \quad (3.5)$$

Para probar (3.5), razonaremos por contradicción, es decir, supongamos existen nodos  $s_1 \in N_{S_i}(y_1) \setminus N_{S_i}(y_3)$ ,  $s_3 \in N_{S_i}(y_3) \setminus N_{S_i}(y_1)$ . Sea  $s_4 \in N_{S_{i+3}}(y_4)$ , notamos que podemos formar el camino de la Figura 3.11, el cual es un  $P_9$  inducido, que es una contradicción y prueba (3.5).

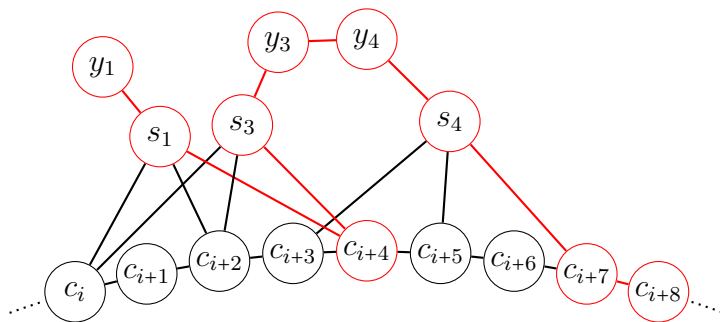


Figura 3.11

Vemos que (3.5) inducirá un orden de inclusión en la familia de vecindades  $\{N_{S_i}(v)\}_{v \in N_{Y_i^S}(S_i)}$ . Sabiendo esto, buscamos una vecindad minimal para dicho orden, la cual vendrá dada por un nodo  $y_i^* \in Y_i^S$ . Por su minimalidad, tendremos que cualquier otra vecindad  $N_{S_i}(y)$ ,  $y \in N_{Y_i^S}(S_i)$  tendrá que cumplir  $N_{S_i}(y_i^*) \subseteq N_{S_i}(y)$ , es decir que cualquier nodo en  $N_{Y_i^S}(S_i)$  debe ser adyacente a nodos en  $N_{S_i}(y_i^*)$ , por lo que tomaremos un nodo arbitrario  $s_i^*$  en dicho conjunto que será nuestro candidato.

Notamos que el camino que armamos puede armarse simétricamente pasando primero por  $S_{i+3}$  y luego por  $S_i$ , con lo cual, con el mismo procedimiento, podemos encontrar nuestro candidato  $s_{i+3}^*$ .

Notamos que  $N_{Y_i^S}(s_i^*) = N_{Y_i^S}(S_i)$  y  $N_{Y_i^S}(s_{i+3}^*) = N_{Y_i^S}(S_{i+3})$ , con lo que concluimos.  $\square$



### 3.1.2. Existencia de un $C_7$ inducido y libre de $C_9$

En la presente sección, intentaremos entender la estructura de un grafo  $(P_9, C_9, C_5, C_3)$ -free el cual posee un ciclo  $C$  de largo 7 como subgrafo inducido, con el objetivo de aprovecharnos de esta estructura para lograr resolver el problema de 3-coloreo posteriormente.

**Proposición 3.21** *Sea un grafo  $G$  conexo y minimal, de la clase  $(P_9, C_9, C_5, C_3)$ -free, tal que posee un ciclo  $C = c_0, c_1, \dots, c_6$  de largo 7 como subgrafo inducido. Tenemos que  $V(G)$  es la unión disjunta de cuatro conjuntos de nodos, es decir,*

$$V(G) = V(C) \cup D \cup T \cup Y,$$

*Los conjuntos  $T$  y  $D$  están a distancia 1 de  $C$ , mientras que los nodos en  $Y$  están a distancia 2 de  $C$ . Además tenemos que, para todo  $i \in [6]$ :*

- (a) *Existen conjuntos estables disjuntos  $T_i$  y  $D_i$ , tal que  $T = \bigcup_{i=0}^6 T_i$  y  $D = \bigcup_{i=0}^6 D_i$ .*
- (b) *Los nodos del conjunto  $D_i$ , tienen exactamente un vecino en  $C$ , que es  $c_i$ .*
- (c) *Los nodos del conjunto  $T_i$ , tienen exactamente dos vecinos en  $C$ , que son los nodos  $c_i, c_{i+2}$ .*
- (d) *Las componentes del grafo  $G[Y]$  son nodos aislados o aristas.*
- (e) *Los nodos del conjunto  $Y \cap N(D)$  son nodos aislados del grafo  $G[Y]$ .*

*La adición en los índices es comprendida en módulo 7.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $v \in V(G)$  adyacente a  $C$ , veamos las maneras posibles en que este nodo puede ser adyacente al ciclo.

- El nodo  $v$  puede estar unido a  $C$  a través de una sola arista. Al conjunto de nodos adyacente solo al nodo  $c_i \in C$ , para  $i \in [6]$ , lo llamaremos  $D_i$ .
- El nodo  $v$  puede estar unido a través de dos aristas a  $C$ . Debido a la prohibición de  $C_5$  y  $C_3$ , solo pueden ser adyacentes a los nodos  $c_i$  y  $c_{i+2}$ , para algún  $i \in [6]$ . Al conjunto adyacente al par de nodos anterior los llamaremos  $T_i$ .
- El nodo  $v$  no puede tener tres o más vecinos en  $C$  debido a la prohibición de  $C_5$  y  $C_3$ .

Observamos que los conjuntos  $T_i$  y  $D_i$  definidos anteriormente son conjuntos estables ya que comparten un vecino común en  $C$  y no hay  $C_3$ , con lo que quedan definidos los conjuntos  $D$  y  $T$ , y quedan probadas las afirmaciones (a), (b) y (c).

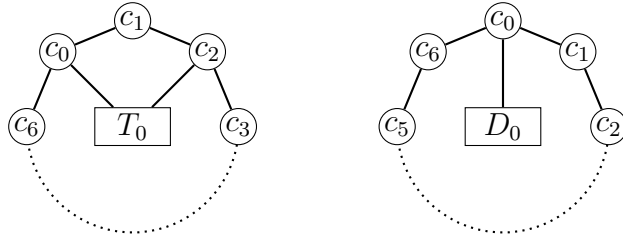


Figura 3.12: Ejemplos de conjuntos estables  $T_i$  y  $D_i$ ,  $i \in [6]$ .

Una vez vista la estructura que rodea a  $C$ , lo que haremos es ver como se disponen los nodos mas lejanos a  $C$ .

Afirmamos que

$$\text{no existen nodos a distancia } \geq 3 \text{ de } C. \quad (3.6)$$

Para ver (3.6), supongamos que existe un nodo  $z$  a distancia 3 de  $C$ , y sea  $zytc_i$  un camino minimal desde  $z$  hasta  $C$ , para algún  $i \in [6]$ , supongamos que  $t \in T_i$  (el caso  $t \in D_i$  es análogo).

Notamos que  $tz \notin E(G)$  ya que no hay triángulos, por lo que podemos usar el Corolario 3.6 para asegurar la existencia de un nodo  $z' \in N(z) \setminus N(t)$ , ya que  $G$  es minimal para el coloreo. Sabiendo esto, podemos armar el  $P_9$  inducido de la Figura 3.13, el cual está prohibido.

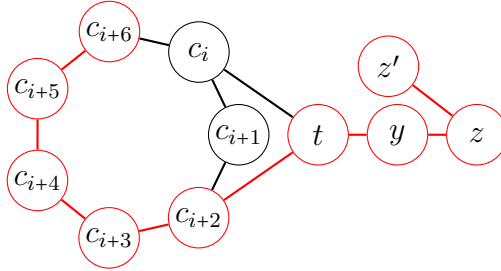


Figura 3.13

Por esto no pueden haber nodos a distancia 3 de  $C$ , y por conexidad de  $G$ , a mayor distancia tampoco, lo cual prueba (3.6).

Entonces solo existen nodos a distancia a lo más 2 de  $C$ , los nodos a distancia 2 de  $C$  serán el conjunto  $Y$ , y ahora pasaremos a comprender su estructura.

Afirmamos que si  $y_1 \in Y \cap N(D)$ , entonces

$$\text{el nodo } y_1 \text{ define una componente conexa aislada del subgrafo } G[Y]. \quad (3.7)$$

En efecto, por contradicción asumimos que existe  $y_2 \in Y$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , tomando cualquier nodo  $d \in D_i \cap N(y_1)$  podemos formar el  $P_9$  inducido de la Figura 3.14 que es una contradicción, lo cual prueba (3.7) y también (e).

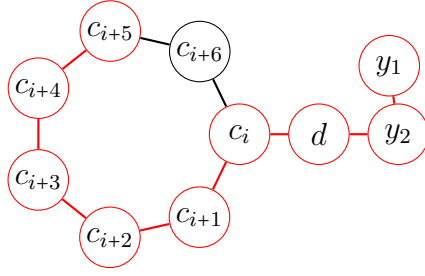


Figura 3.14

Luego, solo nos queda ver el caso de los nodos en  $Y$  adyacentes solo a  $T$ , para esto tenemos una versión análoga a (3.3).

$G[Y]$  es un grafo bipartito, donde para cada componente conexa, los nodos de la misma clase de bipartición tienen exactamente los mismos vecinos en  $T$ . (3.8)

La demostración de (3.8) es análoga a (3.3).

Finalmente, (3.8) nos permite concluir que cada componente conexa de  $Y$  es un nodo aislado o una arista, con lo que terminamos de probar la condición (d) y concluimos.  $\square$

### Estructura de adyacencia entre nodos en $T$ y $D$

Analizaremos a continuación la forma en que nodos de los conjuntos  $T$  y  $D$  pueden ser adyacentes.

Sea  $z, z' \in N(C)$  tal que  $zz' \in E(G)$ . Nuestro objetivo será ver los posibles conjuntos  $T_i$  o  $D_i$ , para algún  $i \in [6]$ , a los cuales  $z$  y  $z'$  pueden pertenecer.

- Si  $z, z' \in T$ : si  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [6]$ , notamos que se forman ciclos  $C_5$  para los casos cuando  $z' \in T_{i+3} \cup T_{i+4}$ , y se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T_{i+2} \cup T_{i+5}$ .  
Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+6}$ .
- Si  $z, z' \in D$ : si  $z \in D_i$ , para algún  $i \in [6]$ , podemos descartar los casos cuando  $z' \in D_{i+2} \cup D_{i+5}$  por formarse un ciclo  $C_5$ .  
Esto deja como única posibilidad que  $z' \in D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+4} \cup D_{i+6}$ .
- Si  $z \in T$  y  $z' \in D$ : si  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [6]$ , notamos que se forman ciclos  $C_5$  para los casos cuando  $z' \in D_{i+4} \cup D_{i+5}$ , y se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in D_{i+2} \cup D_i$ .  
Esto deja como única posibilidad que  $z' \in D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+6}$ .

Podemos resumir el análisis anterior en los siguientes lemas.

**Lema 3.22** *Sea  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [6]$ , y sea  $z' \in (T \cup D)$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces*

$$z' \in T_{i+1} \cup T_{i+6} \cup D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+6}.$$

**Lema 3.23** Sea  $z \in D_i$ , para algún  $i \in [6]$ , y sea  $z' \in (T \cup D)$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces

$$z' \in T_{i+1} \cup T_{i+4} \cup T_{i+6} \cup D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+4} \cup D_{i+6}.$$

### Estructura de adyacencia entre $D, T$ y nodos en $Y$

En esta sección entenderemos las maneras en que pueden ser adyacentes los nodos  $y \in Y$  a los conjuntos  $D$  y  $T$ . Es fácil ver que no existen problemas cuando  $y$  es adyacente exclusivamente a un solo conjunto (sea  $D_i$  o  $T_j$ ,  $i, j \in [6]$ ), por lo que nos concentraremos en los casos donde sea adyacente a más de uno.

Para  $y \in Y$ , sean  $z, z' \in N(y) \setminus Y$ , supondremos que estos nodos no poseen los mismos vecinos en  $C$ . Notamos que  $zyz'$  es un  $P_3$  inducido ya que no hay  $C_3$ . Nuestro objetivo será ver las configuraciones posibles para  $z, z'$ .

- Si  $z, z' \in T$ : Asumimos que  $z \in T_i$ , para  $i \in [6]$ . Notamos que si  $N_C(z')$  es adyacente a uno de los nodos en  $N_C(z)$ , formaríamos un  $C_5$  inducido, lo que no puede ocurrir, dejando como posibles opciones de vecinos para  $z'$  a los nodos  $c_i, c_{i+2}, c_{i+4}, c_{i+5}$ .

Debido a esto,  $z' \in T_{i+2} \cup T_{i+5}$ , notando que  $y \notin N(T_{i+2}) \cap N(T_{i+5})$  porque se forma un  $C_5$ .

- Si  $z, z' \in D$ : Asumimos que  $z \in D_i$ , para  $i \in [6]$ . Vemos que  $N_C(z')$  no es adyacente a los nodos en  $N_C(z)$ , además de esto, si un vecino de  $z'$  en el ciclo se encuentra a distancia 2 de  $c_i$ , se forma un  $C_9$ , que no puede existir por nuestras suposiciones, dejando como posibles opciones para vecinos de  $z'$  a  $c_{i+3}$  y  $c_{i+4}$ .

Luego,  $z' \in D_{i+3} \cup D_{i+4}$ , notando que  $y \notin N(D_{i+3}) \cap N(D_{i+4})$  porque se forma un  $C_5$ .

- Si  $z \in T$  y  $z' \in D$ : Asumimos que  $z \in T_i$ , para  $i \in [6]$ . Vemos que  $N_C(z')$  no puede ser adyacente a los nodos en  $N_C(z)$ , dejando como posibles opciones a los nodos  $c_i, c_{i+2}, c_{i+4}, c_{i+5}$ . Debido a esto,  $z'$  puede formar parte del conjunto  $D_i \cup D_{i+2} \cup D_{i+4} \cup D_{i+5}$ .

De la misma forma, si  $z' \in D_i$ , para  $i \in [6]$  fijo,  $z$  puede formar parte del conjunto  $T_i \cup T_{i+2} \cup T_{i+3} \cup T_{i+5}$ .

Denominaremos nodos de tipo A a los  $y \in Y$  tal que  $(N(y) \setminus Y) \subseteq T$ , nodos de tipo B a los  $y \in Y$  tal que  $(N(y) \setminus Y) \subseteq D$  y nodos de tipo C a los  $y \in Y$  que posean vecinos tanto en  $T$  como en  $D$ .

Podemos resumir el análisis anterior en los siguientes lemas.

**Lema 3.24** Sea  $y \in Y$  nodo de tipo A o tipo C, adyacente a conjuntos  $T_i$  y  $T_j$  distintos con  $i, j \in [6]$ . Entonces  $j = i + 2$  o  $j = i + 7$ .

De donde se desprende inmediatamente el siguiente resultado.

**Corolario 3.25** Para cada nodo  $y \in Y$  de tipo A, existe  $v \in V(C_7)$  tal que para todo  $z \in N(y) \setminus Y$ ,  $zv \in E(G)$ .

**Lema 3.26** Sea  $y \in Y$  nodo de tipo B o tipo C, adyacente a conjuntos  $D_i$  y  $D_j$  distintos con  $i, j \in [6]$ . Entonces existe  $i^* \in [6]$  tal que  $y \in N(D_{i^*}) \cap N(D_{i^*+3})$ .

**Lema 3.27** Sea  $y \in Y \cap N(D_i)$ , para  $i \in [6]$ , un nodo de tipo C adyacente a un conjunto  $T_j$ , para  $j \in [6]$ . Entonces  $j \in \{i, i+2, i+3, i+5\}$ .

Debido al Lema 3.24,  $y$  no puede pertenecer a  $N(T_i) \cap N(T_{i+3})$ ,  $N(T_{i+2}) \cap N(T_{i+5})$  ni  $N(T_{i+2}) \cap N(T_{i+3})$ .

Intercambiando los roles de  $T$  y  $D$ , tendremos que si  $y \in Y \cap N(T_i)$ , para  $i \in [6]$ , un nodo de tipo C adyacente a un conjunto  $D_j$ , para  $j \in [6]$ . Entonces  $j \in \{i, i+2, i+4, i+5\}$ .

Debido al Lema 3.26,  $y$  no puede pertenecer a  $N(D_i) \cap N(D_{i+2})$ ,  $N(D_{i+2}) \cap N(D_{i+4})$  ni  $N(D_{i+4}) \cap N(D_{i+5})$ .

Recordando la Proposición 3.21 (e), tenemos que los nodos de tipo B y C son nodos aislados al ser vistos como subgrafo inducido de  $G[Y]$ , por lo que ya poseemos toda la información necesaria de ellos con los Lemas 3.26, 3.27 y 3.27, sin embargo, los nodos de tipo A pueden formar aristas, por lo que debemos analizar las distintas combinaciones de adyacencia para ellas también.

Para ello tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.28** Para  $y_1, y_2 \in Y$  nodos de tipo A tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , donde  $y_1 \in N(T_i)$  y sea  $z' \in N(y_2) \setminus Y$ , para  $i \in [6]$ . Entonces  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+4} \cup T_{i+6}$ .

Debido al Lema 3.24,  $y_2$  no puede pertenecer a  $N(T_{i+3}) \cap N(T_{i+4})$ ,  $N(T_{i+1}) \cap N(T_{i+4})$  ni  $N(T_{i+3}) \cap N(T_{i+6})$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z \in N_{V(G) \setminus Y}(y_1) \cap T_i$ , notamos que si  $z'$  es adyacente a  $c_i$  o  $c_{i+2}$ , formaríamos un  $C_3$  o un  $C_5$  inducido (incluso si no fuera inducido, la única manera que no lo sea es que  $zz' \in E(G)$ , lo cual forma un  $C_3$  que también está prohibido), por lo que  $z'$  solo puede ser adyacente a  $c_{i+1}, c_{i+3}, c_{i+4}, c_{i+5}$  y  $c_{i+6}$ . Esto hace que  $z'$  pueda pertenecer a  $T_{i+1}, T_{i+3}, T_{i+4}$  y  $T_{i+6}$ .  $\square$

De donde se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 3.29** Sean  $y_1 \in Y \cap N(T_i)$  e  $y_2 \in Y$  nodos de tipo A donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , para  $i \in [6]$ . Entonces para todo  $v \in N(y_2) \setminus Y$ , existe  $c \in N_C(v)$  tal que  $c \in \{c_{i+1}, c_{i+3}, c_{i+6}\}$ .

A continuación, identificaremos algunos conjuntos de nodos que serán de importancia al momento de enunciar el algoritmo.

**Definición 3.30** Al conjunto de nodos  $y_1, y_2 \in Y$  de tipo A tales que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , que sean adyacentes respectivamente a los conjuntos  $T_i$  y  $T_{i+3}$ , para  $i \in [6]$ , se les denominará  $Y_i^A$ .

Es importante notar que cada conjunto  $Y_i^A$  induce un subgrafo bipartito, con clases de

bipartición  $N_{Y_i^A}(T_i)$  y  $N_{Y_i^A}(T_{i+3})$ .

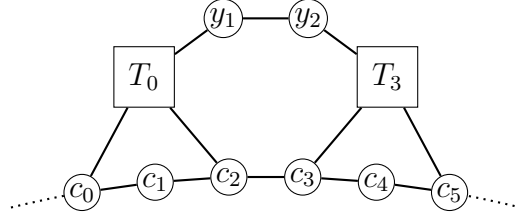


Figura 3.15: Ejemplo de nodos  $y_1, y_2 \in Y_0^A$ .

Para este conjunto de nodos tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.31** Sea  $i \in [6]$ , para cada conjunto  $Y_i^A$  existen nodos  $t_i \in T_i$  y  $t_{i+3} \in T_{i+3}$  tales que:

$$N_{Y_i^A}(t_i) \cup N_{Y_i^A}(t_{i+3}) = Y_i^A,$$

es decir, todos los nodos de  $Y_i^A$  deben ser adyacentes a  $t_i$  o  $t_{i+3}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $y_1y_2$  e  $y_3y_4$  dos aristas distintas de  $E(Y_i^A)$ , donde  $y_1$  e  $y_3$  son adyacentes a  $T_i$ , e  $y_2$  con  $y_4$  son adyacentes a  $T_{i+3}$ .

Afirmamos que

$$N_{T_i}(y_1) \subseteq N_{T_i}(y_3), \text{ o bien } N_{T_i}(y_3) \subset N_{T_i}(y_1). \quad (3.9)$$

Para probar (3.9), razonaremos por contradicción, es decir, existen  $t_1 \in N_{T_i}(y_1) \setminus N_{T_i}(y_3)$ ,  $t_3 \in N_{T_i}(y_3) \setminus N_{T_i}(y_1)$ . Sea  $t_4 \in N_{T_{i+3}}(y_4)$ , notamos que podemos formar el camino de la Figura 3.16, el cual es un  $P_9$  inducido y por lo tanto una contradicción, lo cual prueba (3.9). Esto implica que existirá un orden de inclusión asociado a la familia de vecindades  $\{N_{T_i}(y)\}_{y \in N_{Y_i^A}(T_i)}$ .

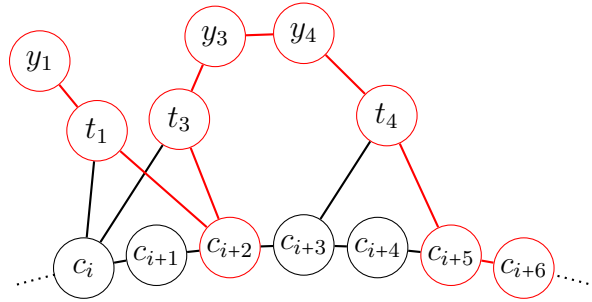


Figura 3.16

Sea  $t_i$  un nodo cualquiera en  $N_{T_i}(y^*)$ , donde la vecindad  $N_{T_i}(y^*)$  es una vecindad minimal para la inclusión con respecto a la familia  $\{N_{T_i}(y)\}_{y \in N_{Y_i^A}(T_i)}$ . Debido a la minimalidad, cualquier nodo  $y \in N_{Y_i^A}(T_i)$  tendrá que cumplir que  $N_{T_i}(y^*) \subseteq N_{T_i}(y)$  y por lo tanto  $t_i \in N_{T_i}(y)$ ,  $\forall y \in N_{Y_i^A}(T_i)$ .

El procedimiento anterior puede ser hecho de manera simétrica para el conjunto  $N_{Y_i^A}(T_{i+3})$ , por lo que también existe un orden sobre la familia de vecindades  $\{N_{T_{i+3}}(y)\}_{y \in N_{Y_i^A}(T_{i+3})}$ . De aquí podemos encontrar un nodo  $t_{i+3} \in N_{T_{i+3}}(y^*)$  donde la vecindad  $N_{T_{i+3}}(y^*)$  es una vecindad minimal para la inclusión con respecto al orden anterior. Luego, para cualquier nodo  $y \in N_{Y_i^A}(T_{i+3})$  tendremos  $N_{T_{i+3}}(y^*) \subseteq N_{T_{i+3}}(y)$  y por lo tanto  $t_{i+3} \in N_{T_{i+3}}(y)$ , para todo  $y \in N_{Y_i^A}(T_{i+3})$ .

Los nodos  $t_i$  y  $t_{i+3}$  son los que cumplen el lema. □

**Definición 3.32** Al conjunto de nodos  $y \in Y$  de tipo  $B$  que sean adyacentes a los conjuntos  $D_i$  y  $D_{i+3}$ , para algún  $i \in [6]$ , se les denominará  $Y_i^B$ .

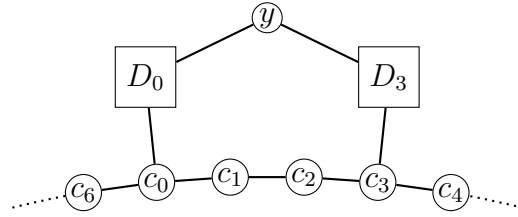


Figura 3.17: Ejemplo de nodo  $y \in Y_0^B$ .

Sobre este conjunto de nodos tenemos el siguiente resultado.

**Lema 3.33** Sea  $i \in [6]$ , para cada conjunto  $Y_i^B$  existen nodos  $d_i \in D_i$  y  $d_{i+3} \in D_{i+3}$  tal que:

$$N_{Y_i^B}(d_i) \cup N_{Y_i^B}(d_{i+3}) = Y_i^B$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $y_1, y_2 \in Y_i^B$ , supongamos que existen  $d_1 \in N_{D_i}(y_1) \setminus N_{D_i}(y_2)$ ,  $d_2 \in N_{D_i}(y_2) \setminus N_{D_i}(y_1)$ . Sea  $d_3 \in N_{D_{i+3}}(y_2)$ , notamos que podemos formar el camino de la Figura 3.18.

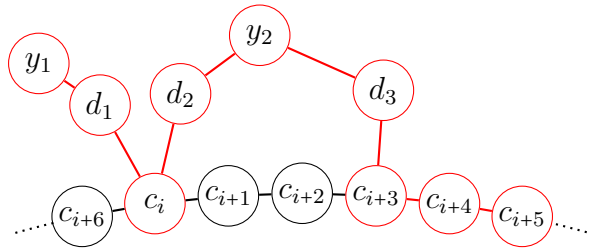


Figura 3.18

En este camino, para evitar que sea inducido, debe existir alguna de las aristas  $d_1d_3$  o  $y_1d_3$ . En el caso  $d_1d_3$ , podemos formar el  $C_5$  de la Figura 3.19.

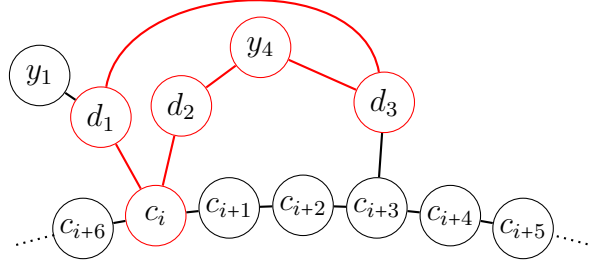


Figura 3.19

Este  $C_5$  es inducido, lo que es una contradicción, por lo que  $y_1d_3 \in E(G)$ . Notamos que  $d_3$  es un nodo arbitrario en  $N(y_2)$ , y podríamos haber tomado un nodo  $d_4 \in N_{D_{i+3}}(y_1)$  para concluir que  $y_2d_4 \in E(G)$ . Concluimos que si no ocurre que  $N_{D_i}(y_1) \subseteq N_{D_i}(y_2)$ , o bien  $N_{D_i}(y_2) \subset N_{D_i}(y_1)$ , entonces  $N_{D_{i+3}}(y_2) = N_{D_{i+3}}(y_1)$ .

Sea  $d_i$  un nodo cualquiera en  $N_{D_i}(y^*)$ , donde la vecindad  $N_{D_i}(y^*)$  es una vecindad minimal para la inclusión con respecto a la familia  $\{N_{D_i}(y)\}_{y \in Y_i^B}$ . Tomaremos también un nodo  $d_{i+3}$  cualquiera en  $N_{D_{i+3}}(y^*)$ .

Debido a la minimalidad, cualquier nodo  $y \in Y_i^B$  tendrá que cumplir que  $N_{D_i}(y^*) \subseteq N_{D_i}(y)$  o bien  $N_{D_{i+3}}(y^*) = N_{D_{i+3}}(y)$ . Esto significa que  $d_i \in N_{D_i}(y)$  o  $d_{i+3} \in N_{D_{i+3}}(y)$ , para todo  $y \in Y_i^B$ .  $\square$

**Definición 3.34** Al conjunto de nodos  $y \in Y$  de tipo  $C$  que sean adyacentes a los conjuntos  $T_i$  y  $D_{i+4}$ , para algún  $i \in [6]$ , se les denominará  $Y_i^C$ , mientras que a los que sean adyacentes a  $T_i$  y  $D_{i+5}$  (caso simétrico) se les denominará  $\bar{Y}_i^C$ .

Notamos que por el Lema 3.26, el nodo  $y$  no puede ser adyacente al mismo tiempo a  $D_{i+4}$  y a  $D_{i+5}$ , por lo cual, los conjuntos  $Y_i^C$  y  $\bar{Y}_i^C$  son disjuntos.



Figura 3.20: Ejemplo de nodos  $y_1 \in Y_0^C$  e  $y_2 \in \bar{Y}_0^C$ .

Para este conjunto de nodos tenemos el siguiente resultado.



**Lema 3.35** Sea  $i \in [6]$ , para cada conjunto  $Y_i^C$  existen nodos  $t_i \in T_i$  y  $d_{i+4} \in D_{i+4}$  tal que:

$$N_{Y_i^C}(t_i) \cup N_{Y_i^C}(d_{i+4}) = Y_i^C$$

Esto también es válido para cada conjunto  $\overline{Y}_i^C$ , donde existen nodos  $\bar{t}_i \in T_i$  y  $d_{i+5} \in D_{i+5}$  que cumplen  $N_{\overline{Y}_i^C}(t_i) \cup N_{\overline{Y}_i^C}(d_{i+5}) = \overline{Y}_i^C$ .

DEMOSTRACIÓN. Debido a la estructura simétrica que poseen  $Y_i^C$  e  $\overline{Y}_i^C$ , podemos sin pérdida de generalidad trabajar solo con  $Y_i^C$ .

Sean  $y_1, y_2 \in Y_i^C$ , supongamos que existen  $t_1 \in N_{T_i}(y_1) \setminus N_{T_i}(y_2)$ ,  $t_2 \in N_{T_i}(y_2) \setminus N_{T_i}(y_1)$ . Sea  $d_1 \in N_{D_{i+4}}(y_2)$ , notamos que podemos formar el camino de la Figura 3.21, donde para evitar que sea inducido, las aristas posibles son  $t_1d_1$  o  $y_1d_1$ .

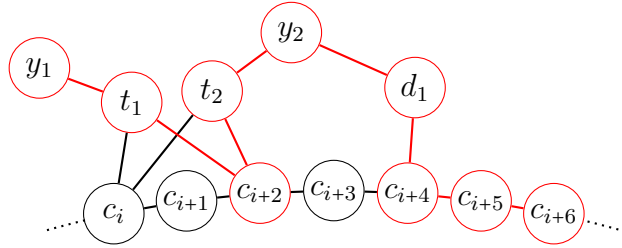


Figura 3.21

En el caso de la existencia de  $t_1d_1$ , podemos formar el  $C_5$  de la Figura 3.22, el cual es un  $C_5$  inducido, que es una contradicción, por lo que  $y_1d_1 \in E(G)$ .

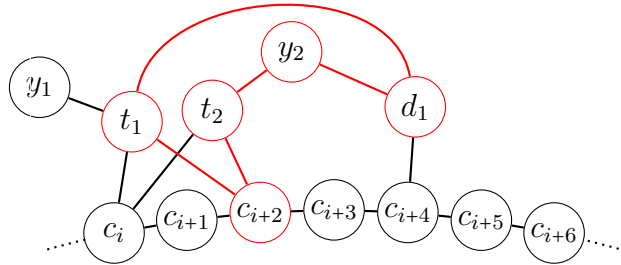


Figura 3.22

Al igual que en la demostración del Lema 3.33, podemos usar esto para concluir que si no ocurre que  $N_{T_i}(y_1) \subseteq N_{T_i}(y_2)$ , o bien  $N_{T_i}(y_2) \subset N_{T_i}(y_1)$ , entonces  $N_{D_{i+4}}(y_2) = N_{D_{i+4}}(y_1)$ .

Sea  $t_i$  un nodo cualquiera en  $N_{T_i}(y^*)$ , donde la vecindad  $N_{D_i}(y^*)$  es una vecindad minimal para la inclusión con respecto a la familia  $\{N_{T_i}(y)\}_{y \in Y_i^C}$ . Tomaremos también un nodo  $d_{i+4}$  cualquiera en  $N_{D_{i+4}}(y^*)$ .

Debido a la minimalidad, cualquier nodo  $y \in Y_i^C$  tendrá que cumplir que  $N_{T_i}(y^*) \subseteq N_{T_i}(y)$  o bien  $N_{D_{i+4}}(y^*) = N_{D_{i+4}}(y)$ . Esto significa que  $t_i \in N_{T_i}(y)$  o  $d_{i+4} \in N_{D_{i+4}}(y)$ , para todo  $y \in Y_i^B$ .  $\square$

Con esto, concluimos el análisis de adyacencia para el conjunto  $Y$ .

### 3.2. Algoritmo de 3-coloreo en grafos $(P_9, C_5, C_3)$ -free

Sea  $G$  un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free, si  $G$  es bipartito, implica automáticamente que puede colorearse con dos colores, por lo que podemos concluir inmediatamente. En consecuencia, nos concentraremos en el caso donde  $G$  no es bipartito. Entonces, existen ciclos impares, los cuales deben ser ciclos  $C_9$  o  $C_7$  inducidos, debido a que los ciclos impares más pequeños están prohibidos.

Gracias al Lema 3.2 y la Proposición 3.5 nos basta con determinar un algoritmo que decida la corolabilidad de un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free que es minimal, al cual por comodidad seguiremos llamando  $G$ .

Fijaremos en el grafo  $G$  un ciclo  $C_l$ , donde  $l = 9$  si es que existe algún ciclo inducido de largo 9, en su defecto,  $l = 7$ . Inicialmente tendremos una paleta  $L_{inicial}$  donde para todo  $v \in V(G)$ ,  $L_{inicial}(v) = \{1, 2, 3\}$  (desde aquí en adelante, cualquier paleta definida sobre  $G$ , será una subpaleta de  $L_{inicial}$ ). A partir de  $L_{inicial}$  crearemos una familia  $\{L_i\}_{i \in I}$  de subpaletas de  $L_{inicial}$ , donde cada  $L_i$ , con  $i \in I$ , es el resultado de pintar el ciclo  $C_l$  (fijar listas de tamaño 1 para cada nodo  $c \in V(C_l)$ ) y haber realizado un proceso de update. Habrá una subpaleta para cada uno de los coloreos existentes del ciclo  $C_l$ , descartando las paletas que al momento de hacer update sobre dicha paleta, resulten con nodos con su lista vacía, ya que significa que el coloreo no es factible.

Como en esta familia de subpaletas  $\{L_i\}_{i \in I}$  se encuentran todos los coloreos factibles posibles, si es que el grafo es 3-coloreable, cada coloreo factible (si es que existe) debe ser una subpaleta de alguna paleta en  $\{L_i\}_{i \in I}$ .

Debido a que identificamos el ciclo base  $C_l$ , podemos hacer uso de nuestros resultados estructurales, Proposiciones 3.7 y 3.21, por lo que en nuestro grafo  $G$  podemos identificar los conjuntos  $C$ ,  $T$ ,  $T'$ ,  $S$  e  $Y$  en caso de que  $l = 9$  y en el caso contrario, los conjuntos  $C$ ,  $T$ ,  $D$  e  $Y$ , donde en ambos casos el conjunto  $C$  está dado por el ciclo  $C_l$ .

**Definición 3.36** Sea  $G$  un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free, no bipartito y minimal, y sean  $L$  y  $L'$  paletas de  $G$ . Decimos que  $L'$  es subpaleta ideal de  $L$  si cumple:

(a) Si para un nodo  $y \in Y$ , tal que  $|L(y)| = 3$ , existe  $j \in L(y)$  tal que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y)} L(v), \quad (3.10)$$

entonces  $L'(y) = \{j\}$ .

(b) Si para  $y_1, y_2 \in Y$  con  $|L(y_1)| = 3$ , donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , tal que existen  $j \in L(y_1)$  y  $k \in L(y_2)$  distintos tal que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y_1) \setminus Y} L(v), \quad y \quad k \notin \bigcup_{v \in N(y_2) \setminus Y} L(v), \quad (3.11)$$

entonces  $L'(y_1) = \{j\}$  y  $L'(y_2) = \{k\}$ .

(c) Para todo  $v \in V(G)$  que no cumpla con las condiciones anteriores,  $L(v) = L'(v)$ .

En particular,  $L'$  es subpaleta de  $L$ . Decimos que  $L$  es paleta ideal si es igual a alguna de sus subpaletas ideales.

**Lema 3.37** Sea  $G$  un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free, no bipartito, minimal y sean  $L$  una paleta de  $G$  y  $L'$  una subpaleta ideal de  $L$ . Entonces existe un 3-coloreo factible  $c = \{c(v) | v \in V\}$  subpaleta de  $L$  si y solo si existe 3-coloreo factible  $c' = \{c'(v) | v \in V\}$  que es subpaleta de  $L'$ .

DEMOSTRACIÓN. Si es que existe un 3-coloreo  $c'$  que sea subpaleta de  $L'$ , es directo que también es subpaleta de  $L$ .

Si existe un 3-coloreo factible  $c = \{c(v) | v \in V\}$  que sea subpaleta de  $L$ , existen dos casos donde  $L$  y  $L'$  pueden diferir.

- (a) Existe  $y \in Y$ , tal que  $|L(y)| = 3$ , y  $j \in L(y)$  tal que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y)} L(v),$$

En este caso, definimos  $c'(y) = \{j\}$ .

- (b) Existen  $y_1, y_2 \in Y$  con  $|L(y_1)| = 3$  o  $|L(y_2)| = 3$ , donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , y además existen  $j \in L(y_1)$  y  $k \in L(y_2)$  tal que

$$i \notin \bigcup_{v \in N(y_1) \setminus Y} L(v), \quad j \notin \bigcup_{v \in N(y_2) \setminus Y} L(v),$$

En este caso, definimos  $c'(y_1) = \{j\}$  y  $c'(y_2) = \{k\}$ .

Para todo nodo  $v \in V(G)$  que no entre en los casos anteriores, definimos  $c'(v) = c(v)$ .

Es fácil notar que  $c'$  es subpaleta de  $L'$ , por lo que nos queda probar su factibilidad. Chequemos los nodos de las situaciones (a) o (b), ya que para los demás nodos la factibilidad es directa porque  $c$  es coloreo factible.

En caso de que exista  $y \in Y$  en la situación (a), es claro ver que como fue coloreado con un color que no se encuentra en las listas de sus vecinos, la factibilidad no se ve alterada.

En caso de que exista  $y_1, y_2 \in Y$  en la situación (b), no habrá problema entre ellos, debido a que los colores con lo que son pintados son distintos. Tampoco hay problema con sus vecinos en  $V(G) \setminus Y$  por la misma razón anterior, el color de  $c'(y_1)$  no está en las listas de  $N(y_1) \setminus Y$  (análogo con  $y_2$ ).

Lo anterior implica que  $c'$  es factible, por lo que concluimos.  $\square$

Gracias a lo anterior, podemos reemplazar cada paleta  $L_i$  con una subpaleta ideal, sin alterar la colorabilidad de la tupla  $(G, L_i)$ , para todo  $i \in I$ .

Lo que haremos será entregarle a nuestro algoritmo como entrada la tupla  $(G, L_i)$ , donde  $G$  es un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free, no bipartito y minimal, y  $L_i$  es una de las paletas de la familia  $\{L_i\}_{i \in I}$ , que es paleta ideal.

Nuestro objetivo será, mediante precoloreos y update a las listas, intentar que nuestro problema de  $\mathcal{3}$ -coloreo se reduzca a resolver un problema de  $\mathcal{2}$ -lista-coloreo, para así lograr concluir con el Teorema 2.3. Como en la lista de entrada  $L_i$  ya coloreamos el conjunto  $C$  y realizamos el posterior update, el único conjunto que podría tener aún nodos con lista de tamaño tres, independiente del valor de  $l$ , es  $Y$ .

A partir de ahora se supondrá que las paletas ideales  $L$  enunciadas en los lemas siguientes ya pasaron por un proceso de update, por lo que no existen nodos  $v, w \in V(G)$ , con  $v, w \in E(G)$ , tal que  $|L(v)| = 1$  y  $L(v) \subseteq L(w)$ .

### 3.2.1. Existencia de un $C_9$

Sea  $(G, L)$  la tupla de entrada de nuestro algoritmo, donde  $G$  es un grafo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free donde existe un ciclo  $C_9$  inducido y  $L$  es una paleta ideal. Una vez encontrado el  $C_9$  inducido, también identificaremos los conjuntos de la Proposición 3.7.

A continuación veremos algunos lemas para entender como se ve una paleta ideal  $L$  en la estructura del grafo  $G$ .

**Lema 3.38** *Sean  $L$  una paleta ideal e  $y \in Y^*$ . Si  $|L(y)| = 3$ , entonces existe  $i \in [8]$  tal que  $y \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $y \in Y^*$  tal que  $|L(y)| = 3$ , veamos los posibles casos.

(a) Si  $y \in N(S)$ :

Sea  $s \in N(y) \cap S$ , sin pérdida de generalidad  $s \in S_i$ .

Notamos que como  $|L(y)| = 3$ , significa que ningún nodo en  $N(y)$  puede estar pintado, de lo contrario, el update hubiera quitado algún color de  $L(y)$ . Debido a esto, los nodos que hayan sido pintados en  $N_{C_9}(s)$  deben estar pintados del mismo color, que denominaremos  $j$ .

Ocupamos directamente el Corolario 3.13, que dice cualquier nodo  $z \in N(y)$  compartirá un vecino con  $s$  en el ciclo  $C_9$ . Además, todos los vecinos de  $z$  en el ciclo  $C_9$  están pintados del mismo color, por lo que concluimos que deben ver el mismo color que el nodo  $s$ . Luego, tenemos que existe  $j \in L(y)$  tal que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y)} L(v),$$

y además  $|L(y)| = 3$ , lo que es una contradicción con que  $L$  es paleta ideal, por lo que dicha configuración no puede ocurrir.

(b) Si  $y$  es vecino de un único conjunto  $T'_i$ , para  $i \in [8]$ :

Notamos que si  $y$  es adyacente a un conjunto único  $T'_i$ , para  $i \in [8]$ , como  $|L(y)| = 3$ , significa que ningún nodo en  $N(y)$  puede estar pintado. Debido a esto, los nodos  $c_i$  y  $c_{i+2}$  deben estar pintados del mismo color, que denominaremos  $j$ . Como suponemos que  $N(y) \subseteq T'_i$ , se cumple que existe  $j \in L(y)$  tal que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y)} L(v),$$

con lo que llegamos a la misma contradicción de (a).

Luego, por el Lema 3.10, existe un  $i \in [8]$ , tal que  $y \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , con lo cual concluimos.  $\square$

A continuación analizaremos el conjunto  $Y \setminus Y^*$ .

Con respecto a las paletas de los nodos en  $N(C) \setminus C$ , es importante notar que estos nodos pueden quedar pintados debido al update, pero no necesariamente por ver dos colores distintos en el ciclo, sino que puede ser ocasionado por nodos en  $V(G) \setminus C$  que fueron pintados, lo cual será importante en suposiciones de lemas posteriores.

**Lema 3.39** Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus (Y^* \cup Y^S)$ , donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , y sea  $L$  una paleta ideal tal que  $|L(y_1)| = 3$ . Si  $|L(y_2)| = 2$  y para todo  $v \in N(y_2) \setminus Y$  se tiene que  $v$  solo ve un color en el ciclo  $C$ , entonces existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $y_1 \in N(S_i)$ , para algún  $i \in [8]$ . Por el Lema 3.16, y como  $y_1, y_2 \notin Y^S$ , tenemos que  $y_2 \in N(T'_{i+1} \cup T'_{i+8} \cup S_{i+1} \cup S_{i+8})$ .

Como  $|L(y_1)| = 3$ , el conjunto  $S_i$  debe ver solo un color en el ciclo  $C$ , por lo que supondremos que  $L(c_i) = L(c_{i+2}) = L(c_{i+4}) = \{j\}$ , y debido al Corolario 3.13, todos los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  deben ver al color  $j$  en el ciclo  $C$ .

Como  $|L(y_2)| = 2$  posee dos colores en su lista, es porque debe existir un nodo  $v' \in N(y_2)$  pintado, que asumiremos sin pérdida de generalidad en  $T'_{i+1} \cup S_{i+1}$ . Como  $N(y_2) \setminus Y$  solo ve un color en el ciclo  $C$ , supondremos que los nodos en  $T'_{i+1} \cup S_{i+1}$  ven al color  $k$ , que por factibilidad del coloreo, debe ser distinto a  $j$ .

Como  $v'$  solo ve al color  $k$  en el ciclo, la razón por la que está pintado es que existe  $z \in N(v') \setminus C$  pintado y adyacente a él que le quita un color.

Notamos que si  $L(z) = \{l\}$ , entonces  $L(v') = \{j\}$ , lo que implica que  $L(y_2) = \{k, l\}$ , esto significa que  $y_1$  cumple (3.10), lo que es una contradicción con que  $L$  es paleta ideal. Por lo tanto, suponemos de ahora en adelante que  $L(z) = \{j\}$ , y por tanto  $L(v') = \{l\}$ .

Supongamos que  $z \in Y$  y sea  $s \in N(y_1) \cap S_i$ , podemos formar el camino de la Figura 3.23, donde el nodo  $s$  no puede ser adyacente con  $z$  (por el Lema 3.12 si  $v' \in T'_{i+1}$  o por el Lema 3.13 si  $v' \in S_{i+1}$ ), por lo que la única manera de que el  $P_9$  no sea inducido, es que  $sv' \in E(G)$ .

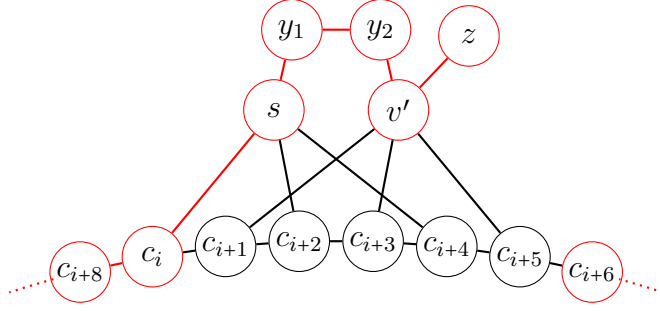


Figura 3.23

Si  $sv'$  existe, entonces  $L(s) = \{k\}$ , lo cual contradice el hecho de que  $|L(y_1)| = 3$ . Concluimos que  $z \notin Y$ .

Supongamos ahora que  $z \in T' \cup S \cup T$ , gracias al Lema 3.8, sabemos que  $z \in T'_{i+2} \cup T'_i \cup S_{i+2} \cup S_i \cup T_{i+2} \cup T_{i+4} \cup T_i$  (sin importar si  $v' \in T'_{i+1}$  o  $v' \in S_{i+1}$ ). Sin embargo, todos estos conjuntos cumplen con que son adyacentes a algún nodo en  $\{c_i, c_{i+2}, c_{i+4}\}$ , los cuales están pintados con el color  $j$ , el mismo color de  $z$ , lo que contradice la factibilidad del coloreo, por lo que concluimos que  $y_1 \notin N(S_i)$ , por lo que la única posibilidad es que  $y_1 \in N(T'_i)$ , para algún  $i \in [8]$ .

Por el Lema 3.15, sabemos que  $y_2 \in N(T'_{i+1} \cup T'_{i+8} \cup S_{i+1} \cup S_{i+8})$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $v' \in T'_{i+1} \cup S_{i+1}$ .

Debido al Lema 3.14, si  $T'_{i+2} \neq \emptyset$ , podemos concluir el resultado inmediatamente, por lo que nos basta probar que  $T'_{i+2} \neq \emptyset$  ( $y_1 \notin N(T'_{i+7})$  por el Lema 3.15 al suponer que  $y_2 \in N(T'_{i+1} \cup S_{i+1})$ ). Como  $|L(y_1)| = 3$ , supondremos que  $L(c_i) = L(c_{i+4}) = \{j\}$  y por el Corolario 3.12, podemos concluir que todos los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  deben ver al color  $j$  en el ciclo  $C$ . El color que ve  $T'_{i+1} \cup S_{i+1}$  en el ciclo será  $k$ , distinto de  $j$ .

Supondremos la existencia del nodo  $z$  como antes, y sabemos que  $z \notin Y$ , debido a que podemos formar el  $P_9$  anterior y llegar a la contradicción análoga del caso  $y_1 \in N(S_i)$ . Además, también tendremos que  $L(z) = \{j\}$  y  $L(v') = \{l\}$ , para no contradecir que  $L$  es paleta ideal.

Finalmente, si  $z \in T' \cup S \cup T$ , gracias al Lema 3.8, sabemos que  $z \in T'_{i+2} \cup T'_i \cup S_{i+2} \cup S_i \cup T_{i+2} \cup T_{i+4} \cup T_i$  (sin importar si  $v' \in T'_{i+1}$  o  $v' \in S_{i+1}$ ). Sin embargo, todos estos conjuntos, salvo  $T'_{i+2}$ , son adyacentes a  $c_i$  o  $c_{i+4}$ , por lo que no pueden tener el color  $j$  en sus listas, esto obliga a que  $z \in T'_{i+2}$ , lo que prueba que  $T'_{i+2} \neq \emptyset$ , por lo tanto  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$  por el Lema 3.14.  $\square$

Definiremos ahora dos condiciones que usaremos luego.

**Definición 3.40** Para un nodo  $y \in Y$  y una paleta  $L_1$ , definimos la condición de color faltante:

(CF) Existe  $j \in \{1, 2, 3\}$  tal que para todo  $v \in N(y) \setminus Y$ ,  $j \notin L_1(v)$ .

**Definición 3.41** Sean  $y_1, y_2 \in Y$ , donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , definimos la condición de coloración:

(CC) No existe color  $j$  tal que falte en las lista de un nodo en  $N(y_2) \setminus Y$  y también de  $N(y_1) \setminus Y$ .

A continuación, intentaremos chequear para cada una de las configuraciones las condiciones (CF) y (CC). Para eso, tenemos los siguientes lemas.

**Lema 3.42** Sea  $y_1 \in Y \setminus Y^*$  y sea  $L$  paleta ideal. Si  $y_1$  no cumple (CF) y  $|L(y_1)| = 3$ , entonces existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

DEMOSTRACIÓN. Notamos que todos los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  deben ver solo un color en el ciclo  $C_9$ , ya que si vieran dos estos serían pintados por el update, haciendo que también  $y_1$  pierda un color de su lista.

Los Corolarios 3.12 y 3.13 nos dicen que los conjuntos a los que  $y_1$  sea adyacente, salvo cuando existe un  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , comparten un vecino en el ciclo  $C_9$ . Como cada conjunto solo puede ver un color en el ciclo, podemos concluir que todos los conjuntos deben ver exactamente el mismo color, que significa que estos casos si cumplen con la condición (CF), por lo que la única configuración que no puede cumplir (CF) es cuando existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .  $\square$

**Lema 3.43** Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus Y^*$  y sea  $L$  paleta ideal tal que  $|L(y_1)| = 3$ . Si no se cumple (CC), entonces existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1, y_2 \in Y_i^S$  o  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $B = N(y_2) \setminus Y$  y  $A = N(y_1) \setminus Y$  y supongamos que  $|L(y_2)| = 3$ . Como  $|L(y_1)| = 3$ , por los Corolarios 3.12 y 3.13 tenemos que todos los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  deben ver el mismo color en el ciclo  $C$ , salvo cuando existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ . Llamamos a dicho color  $j$ .

A la vez, los Corolarios 3.17 y 3.18 nos dicen que, salvo cuando  $y_1 \in N(S_i)$  e  $y_2 \in N(S_{i+3}) \Delta N(S_{i+6})$ , tenemos que

$$\text{para todo } v \in N_{C_9}(B), \text{ existe } w \in N_{C_9}(A) \text{ tal que } v_1 v_2 \in E(G),$$

lo cual junto a la condición que los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  ven al color  $j$  en el ciclo  $C$ , implica directamente la condición (CC). Por tanto, las únicas configuraciones posibles para que (CC) no se cumpla son  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$  o  $y_1 \in N(S_i)$  e  $y_2 \in N(S_{i+3}) \Delta N(S_{i+6})$ , es decir, existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1, y_2 \in Y_i^S$ .

En caso de que  $|L(y_2)| = 2$ , si existe un nodo  $v \in B$  que ve dos colores distintos en el ciclo  $C$ , por los Corolarios 3.17 y 3.18, sabemos que (salvo cuando  $y_1 \in N(S_i)$  e  $y_2 \in N(S_{i+3}) \Delta N(S_{i+6})$ )



$v$  debe ver los colores  $k$  y  $l$ , por lo que  $L(y_2) = \{k, l\}$ , implicando que  $y_1$  cumple (3.10), que contradice que  $L$  es paleta ideal.

Si todo nodo en  $B$  ve solo un color en el ciclo  $C$ , entonces debe existir un nodo  $z \in N(C) \setminus C$  de lista de tamaño 1, adyacente a un nodo  $b \in B$  tal que  $b$  es pintado del color que hace que  $(CC)$  no se cumpla. Por el Lema 3.39, concluimos que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$  o  $y_1, y_2 \in Y_i^S$  para que esto ocurra.  $\square$

**Lema 3.44** Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus (Y^* \cup Y^S)$ , donde  $y_1 y_2 \in E(G)$  y donde no existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , y sea  $L$  paleta ideal tal que  $|L(y_1)| = 3$ . Si  $y_1$  cumple  $(CF)$  y se cumple  $(CC)$ , entonces  $|L(y_2)| = 3$  y  $y_2 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$  para algún  $i \in [8]$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $L$  es tal que  $|L(y_1)| = 3$ , entonces los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  ven solo un color en el ciclo  $C_9$  (si no, entonces el update le hubiera quitado un color a  $L(y_1)$ ), y debido a la condición  $(CF)$ , obliga a que dicho color sea el mismo para todo nodo en  $N(y_1) \setminus Y$ , llamémoslo  $j$ .

Si  $|L(y_2)| = 2$ , debe ser porque existe un nodo  $v \in N(y_2) \setminus Y$  que fue pintado, y debido al update,  $y_2$  perdió un color. Supondremos que  $v$  entonces debe ver dos colores distintos en el ciclo  $C_9$ , si no lo hace, por el Lema 3.39, entonces existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , que es una contradicción.

Como  $v$  ve dos colores en el ciclo, por la condición  $(CC)$ , estos colores deben ser distintos a  $j$ , es decir, son  $k$  y  $l$ . Esto significa que el color faltante en  $L(y_2)$  es  $j$ . Luego,  $y_1$  cumple (3.10), pero  $|L(y_1)| = 3$ , lo cual es una contradicción con que  $L$  es paleta ideal, por lo que  $|L(y_2)| \neq 2$ . Como a la paleta se le hizo un update anteriormente, entonces tampoco es posible que  $y_2$  posea una sola entrada en su lista, implicando que  $|L(y_2)| = 3$

Si ahora asumimos que  $y_2$  también cumple  $(CF)$ , como  $|L(y_2)| = 3$ , entonces los nodos en  $N(y_2) \setminus Y$  ven solo un color en el ciclo  $C_9$  (de la misma manera que con  $y_1$ ), y debido a la condición  $(CF)$ , obliga a que dicho color sea el mismo para todo nodo en  $N(y_2) \setminus Y$ , llamémoslo  $k$ .

Debido a la condición  $(CC)$ , tenemos que  $j \neq k$ , por lo que se cumple (3.11), pero  $|L(y_1)| = |L(y_2)| = 3$ , lo cual es una contradicción con que  $L$  es paleta ideal y concluimos que  $y_2$  no cumple  $(CF)$ , que por el Lema 3.42 implica que  $y_2 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$  para algún  $i \in [8]$ .  $\square$

Gracias a los lemas anteriores, sabemos qué conjuntos pueden tener nodos con listas de tamaño tres al momento de entrar al algoritmo.

## Algoritmo de 3-coloreo

A continuación veremos el algoritmo. Recordemos que el input para este algoritmo es una tupla  $(G, L_{i^*})$ , donde  $G$  es un grafo de la clase  $(P_9, C_5, C_3)$ -free, conexo y minimal, y  $L_{i^*}$  es una paleta ideal perteneciente a la familia  $\{L_i\}_{i \in I}$ .

---

**Algorithm 1** Coloreo  $(P_9, C_5, C_3)$ -free

---

```
1: procedure  $ALG_{C_9}(G, L_{i^*})$ 
2:    $\mathcal{L}_f \leftarrow \emptyset$ 
3:    $C \leftarrow$  ciclo  $C_9$ 
4:   for  $i \in [8]$  do
5:      $\bar{T} \leftarrow t_i \in T'_i$  arbitrario
6:      $\bar{S} \leftarrow s_i$  y  $s_{i+3}$  del Lema 3.20
7:   end for
8:   Pintamos los nodos en  $\bar{T}$  ( $T$ -coloreo) y  $\bar{S}$  ( $S$ -coloreo) de todas las maneras posibles,
   esto genera la familia de paletas  $\mathcal{L}$ , subpaletas de  $L_{i^*}$ .
9:   for  $L \in \mathcal{L}$  do
10:     $L \leftarrow update(L)$ 
11:    if  $L$  es factible then
12:       $L \leftarrow ideal(L)$ 
13:       $\mathcal{L}_f \leftarrow \mathcal{L}_f \cup L$ 
14:    end if
15:  end for
16:  return  $(G, \mathcal{L}_f)$ 
17: end procedure
```

---

**Proposición 3.45** Para toda  $L \in \mathcal{L}_f$ , paletas retornadas del algoritmo, se cumple que para todo  $v \in V(G)$ ,  $|L(v)| \leq 2$ .

DEMOSTRACIÓN. El resultado es consecuencia directa de los lemas siguientes.

**Lema 3.46** Para todo  $L \in \mathcal{L}_f$  y para todo  $y \in Y^*$ ,  $|L(y)| \leq 2$ .

**Lema 3.47** Para todo  $L \in \mathcal{L}_f$  y para todo  $y \in Y \setminus Y^*$ ,  $|L(y)| \leq 2$ .

Esto debido a que es directo que los nodos en  $V(G) \setminus Y$  tienen listas de tamaño menor estricto que tres, ya que el ciclo  $C_9$  está pintado y le quita al menos un color a todos los nodos adyacentes a él.

Ambos lemas serán probados posteriormente. □

Gracias a la Proposición 3.45, podemos utilizar el Teorema 2.3 para resolver el problema de 2-lista-coloreo para cada paleta  $L \in \mathcal{L}_f$ . Si es que logramos encontrar un 2-lista-coloreo factible para alguna de ellas, dicho coloreo será también un 3-coloreo, por lo que el grafo será 3-coloreable y tendremos el coloreo factible. En caso de que todas las paletas sean infactibles para el 2-lista-coloreo, entonces concluimos que el grafo no era 3-coloreable en primer lugar.

## Demostración del Lema 3.46

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\hat{L} \in \mathcal{L}_f$  e  $y \in Y^*$ , supongamos que  $|\hat{L}(y)| = 3$ . Por el Lema 3.38, sabemos que existe  $i \in [8]$  tal que  $y \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

Sea  $L \in \mathcal{L}_f$ , podemos utilizar el Lema 3.14 directamente, tenemos que  $y$  será completo a  $T'_i$ , en particular, será adyacente al nodo  $t_i$  que fue pintado en el  $T$ -coloreo. Esto significa que  $y$  debió haber perdido un color en el update posterior, lo cual es una contradicción.  $\square$

## Demostración del Lema 3.47

DEMOSTRACIÓN. Supongamos ahora que existe  $y_1 \in Y \setminus Y^*$  y sea  $\hat{L}$  paleta de entrada al algoritmo tal que  $|\hat{L}(y_1)| = 3$ , sea también  $y_2 \in Y \setminus Y^*$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ .

- (0) Por el Lema 3.44, sabemos que si tenemos las condiciones (CF) y (CC) que  $|\hat{L}(y_1)| = |\hat{L}(y_2)| = 3$  y que sin pérdida de generalidad  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , para algún  $i \in [8]$ . Por el Lema 3.15, tenemos que  $y_2 \in N(S_{i+1}) \cup N(T'_{i+1})$ .

El conjunto  $T'_i$  debe ver un sólo color en el ciclo  $C$ , ya que  $|\hat{L}(y_1)| = 3$ , al cual llamaremos  $j$  (analogamente para el conjunto  $T'_{i+2}$ , llamaremos a este color  $k$ ). Lo mismo ocurre para  $S_{i+1}$  y  $T'_{i+1}$ , deben ver un sólo color en el ciclo  $C$ , y como ambos conjuntos tienen vecinos comunes en el ciclo  $C$ , sabemos que dicho color es el mismo, llamémoslo  $l$ . Como  $c_{i+1}, c_{i+5} \in N(S_{i+1}) \cap N(T'_{i+1})$  son adyacentes respectivamente a  $c_{i+2} \in N(T'_{i+2})$  y  $c_{i+4} \in N(T'_i)$ , tenemos que  $l$  es distinto a  $j$  y  $k$ .

Si  $j = k$ , significa que a los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  les faltará el color  $j$ , mientras que a los nodos en  $N(y_2) \setminus Y$  les faltará  $l$ , y como ambos tienen 3 entradas en sus listas,  $y_1$  e  $y_2$  cumplen (3.11), lo que contradice que la paleta  $\hat{L}$  sea ideal.

Si  $j \neq k$ , entonces la configuración que entrará al algoritmo es  $\hat{L}(T'_i) = \{k, l\}$ ,  $\hat{L}(T'_{i+2}) = \{j, l\}$  y sabemos que para todo  $v \in T'_{i+1} \cup S_{i+1}$ ,  $\hat{L}(v) = \{j, k\}$ .

Sabemos que  $y_1$  es completo a  $T'_i$  y  $T'_{i+2}$ , por lo que perderá al menos un color en el proceso de  $T$ -coloreo. Existen dos situaciones posibles, que dependen de los colores que fueron usados para pintar los nodos  $t_i, t_{i+2} \in \bar{T}$ :

- Si  $t_i$  es pintado  $k$  o  $t_{i+2}$  es pintado  $j$ : Notamos que en cualquiera de los dos casos, ambos estarán pintados de un color distinto, pintando  $y_1$  en el posterior update, y por consiguiente, quitándole un color de la lista a  $y_2$ , por lo que para toda paleta  $L \in \mathcal{L}_f$ ,  $|L(y_1)| \leq 2$  y  $|L(y_2)| \leq 2$ .
  - Si  $t_i$  y  $t_{i+2}$  son pintados  $l$ : Significará que  $y_1$  no tendrá  $l$  en su lista, al igual que los nodos del conjunto  $N(y_2) \setminus Y$ , por lo que los nodos en  $N(y_2)$  no tendrán a  $l$  en su lista, haciendo que  $y_2$  cumpla (3.10) y así sea pintado al idealizar las paletas factibles en el algoritmo.
- (1) Supongamos que no se cumple (CC), el Lema 3.43 nos dice entonces que existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1, y_2 \in Y_i^S$  o  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

Si  $y_1, y_2 \in Y_i^S$ , sabemos que el algoritmo pintó en el proceso de  $S$ -coloreo los nodos del Lema 3.20, por lo que para toda paleta  $L \in \mathcal{L}_f$ ,  $|L(y_1)| \leq 2$  y  $|L(y_2)| \leq 2$ . Si existe  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , entonces el Lema 3.15 nos dice que  $y_2 \in N(S_{i+1}) \cup N(T'_{i+1})$ .

Si  $|\hat{L}(y_2)| = 2$ , como el algoritmo pinta los nodos en  $\bar{T}$  en el proceso de  $T$ -coloreo,  $y_1$  perderá un color, por lo que para toda paleta  $L \in \mathcal{L}_f$ ,  $|L(y_1)| \leq 2$  y  $|L(y_2)| \leq 2$ .

Debido a esto, asumimos que  $|\hat{L}(y_2)| = 3$ , pero también tenemos que  $|\hat{L}(y_1)| = 3$  y  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , situación que ya fue vista en el caso (0).

(2) Supondremos que se cumple  $(CC)$ , pero que no se cumple  $(CF)$  para  $y_1$ .

Por el Lema 3.42, si  $y_1 \in Y$  no cumple  $(CF)$ , entonces debe existir  $i \in [8]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ . Por el Lema 3.15, tenemos que  $y_2 \in N(S_{i+1}) \cup N(T'_{i+1})$ .

El conjunto  $T'_i$  debe ver un sólo color en el ciclo  $C$ , ya que  $|\hat{L}(y_1)| = 3$ , al cual llamaremos  $j$  (analogamente para el conjunto  $T'_{i+2}$ , llamaremos a este color  $k$ ). Como  $y_1$  no cumple  $(CF)$ , sabemos que  $j \neq k$ .

Sabemos por el Lema 3.14 que  $y_1$  es completo a  $T'_i$  y  $T'_{i+2}$ , por lo que perderá al menos un color en el proceso de  $T$ -coloreo. En el caso que  $|\hat{L}(y_2)| = 2$ , concluimos que para  $L \in \mathcal{L}_f$ ,  $|L(y_1)| \leq 2$  y  $|L(y_2)| \leq 2$ . Si  $|\hat{L}(y_2)| = 3$ , además tenemos que  $|\hat{L}(y_1)| = 3$  y  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , situación que ya fue vista en el caso (0).

□

### 3.2.2. Existencia de un $C_7$ y libre de $C_9$

Sea  $(G, L)$  la tupla de entrada de nuestro algoritmo, donde  $G$  es un grafo  $(P_9, C_9, C_5, C_3)$ -free donde existe un ciclo  $C_7$  inducido y  $L$  es una subpaleta ideal de una paleta  $L_i$ ,  $i \in I$ . Una vez encontrado el  $C_7$  inducido, también identificaremos los conjuntos de la Proposición 3.21.

A continuación veremos algunos lemas para entender como se ve una paleta ideal  $L$  en la estructura del grafo  $G$ .

**Lema 3.48** Sean  $L$  paleta ideal e  $y \in Y^*$ . Si  $|L(y)| = 3$ , entonces existe  $i \in [6]$  tal que  $y \in Y_i^B \cup Y_i^C \cup \overline{Y}_i^C$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe  $\hat{y} \in Y^*$  tal que  $|L(\hat{y})| = 3$ .

(a) Si  $\hat{y}$  es nodo de tipo B.

Si existe un único  $i \in [6]$  tal que  $y \in N(D_i)$ , como al conjunto  $D_i$  le faltará un color en su lista, que es el color que tiene el nodo  $c_i$ , digamos  $j$ . Luego,  $j \in L(\hat{y})$  pero

$$j \notin \bigcup_{v \in N(\hat{y})} L(v),$$

lo que es una contradicción ya que  $L$  es paleta ideal.

Luego, por el Lema 3.26, si  $\hat{y}$  es adyacente a conjuntos  $D_i$  y  $D_j$ ,  $j \neq i$ , entonces existe  $i^* \in [6]$  tal que  $\hat{y} \in N(D_{i^*}) \cap N(D_{i^*+3})$ , es decir,  $\hat{y} \in Y_{i^*}^B$ .

(b) Si  $\hat{y}$  es un nodo de tipo C.

En este caso tenemos que  $y \in N(T_i)$ , para algún  $i \in [6]$ . Como  $|L(\hat{y})| = 3$ , sabemos que  $T_i$  ve un único color en el ciclo  $C_7$ , llamemos a este color  $j$ .

Si  $\hat{y} \in N(T_i) \cap N(D_i)$  y a la vez  $\hat{y} \notin N((T \cup D) \setminus (T_i \cup D_i))$ , entonces  $j \in L(\hat{y})$  y

$$j \notin \bigcup_{v \in N(\hat{y})} L(v),$$

lo que es una contradicción con que  $L$  es paleta ideal.

Notamos que el caso cuando  $\hat{y} \in N(T_i) \cap N(D_{i+2})$  e  $\hat{y} \notin N((T \cup D) \setminus (T_i \cup D_{i+2}))$  es simétrico al anterior, y no pueden ocurrir al mismo tiempo por el Lema 3.26.

Esto nos deja como los únicos casos posibles, si es que  $\hat{y}$  es nodo de tipo C, que exista  $i \in [2d]$  tal que  $\hat{y} \in Y_i^C$  o  $\hat{y} \in \overline{Y}_i^C$ .

(c) Si  $\hat{y}$  es nodo de tipo A.

Si existe un único  $i \in [6]$  tal que  $y \in N(T_i)$ , como  $|L(\hat{y})| = 3$ , el conjunto  $T_i$  debe ver un único color en el ciclo  $C_7$ , llamémoslo  $j$ . Luego,  $j \in L(\hat{y})$  y

$$j \notin \bigcup_{v \in N(\hat{y})} L(v),$$

lo que es una contradicción ya que  $L$  es paleta ideal.

En caso de que sea adyacente a conjuntos  $T_i$  y  $T_j$ , con  $j \neq i$ , por el Lema 3.24 tenemos que existe  $i^* \in [6]$  tal que  $\hat{y} \in N(T_{i^*}) \cap N(T_{i^*+2})$ .

Sabemos que tanto  $T_i$  como  $T_{i+2}$  deben ver solo un color en el  $C_7$ , y como ambos comparten a  $c_{i+2}$  como vecino, el color que ven debe ser el mismo, digamos  $j$ . Luego,  $j \in L(\hat{y})$  y

$$j \notin \bigcup_{v \in N(\hat{y})} L(v),$$

lo que es una contradicción ya que  $L$  es paleta ideal, por lo que  $\hat{y}$  no puede ser un nodo tipo A.

Esto concluye la demostración del lema. □

A continuación, tenemos resultados para nodos  $y \in Y \setminus Y^*$ .

**Lema 3.49** *Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus Y^*$  nodos de tipo A, donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , y sea  $L$  paleta ideal. Entonces no puede ocurrir que  $|L(y_1)| = 3$  y  $|L(y_2)| = 3$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $|L(y_1)| = 3$  y  $|L(y_2)| = 3$ . Como  $y_1$  tiene lista de tamaño 3, los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  no pueden estar pintados, por lo que cada uno debe mirar un solo color en el ciclo  $C_7$ . Lo mismo ocurre con el nodo  $y_2$ .

Sabiendo lo anterior, y haciendo uso del Corolario 3.25, tenemos que el color que mira cada uno de los distintos conjuntos adyacentes a  $y_1$  debe ser el mismo, ya que todo par de nodos en  $N(y_1)$  debe tener un vecino común en el ciclo  $C_7$ , llamemos a dicho color  $j$ . Análogamente para  $y_2$ , llamemos a dicho color  $k$ .

Finalmente, haciendo uso del Corolario 3.29, concluimos que  $j \neq k$ , por lo que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y_1) \setminus Y} L(v), \quad k \notin \bigcup_{v \in N(y_2) \setminus Y} L(v),$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que  $L$  es una paleta ideal. □

**Lema 3.50** *Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus Y^*$  nodos de tipo A, donde  $y_1, y_2 \in E(G)$ , y sea  $L$  paleta ideal. Si  $y_1 \in N(T_i)$ , para algún  $i \in [6]$ , e  $y_2 \notin N(T_{i+3}) \cup N(T_{i+4})$ , entonces no puede ocurrir que  $|L(y_1)| = 3$  y  $|L(y_2)| = 2$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $|L(y_1)| = 3$  y  $|L(y_2)| = 2$ . Como el nodo  $y_1$  cumple con tener lista de tamaño 3, los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  no pueden estar pintados, por lo que cada uno debe mirar un solo color en el ciclo  $C_7$ . Por el Corolario 3.25 podemos concluir que el color que ven los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  es el mismo, lo llamaremos  $l$ .

Notamos que gracias al Lema 3.28, sabemos que  $y_2 \in T_{i+1} \cup T_{i+6}$  (ya que  $y_2 \notin N(T_{i+3}) \cup N(T_{i+4})$ ). Como  $|L(y_2)| = 2$ , existe  $v \in N(y_2) \setminus Y$  que fue pintado.

Si suponemos que  $v$  ve dos colores en el ciclo  $C$ , por factibilidad del coloreo, tenemos que los colores que deben ver los conjuntos  $T_{i+1}$  y  $T_{i+6}$  deben ser distintos a  $l$ , es decir, son  $j$  y  $k$ . Por lo tanto,  $L(v) = \{l\}$  y  $L(y_2) = \{j, k\}$ , entonces

$$l \notin \bigcup_{v \in N(y_1)} L(v),$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que  $L$  es una paleta ideal.

Si  $v$  solo ve un color en el ciclo  $C$ , entonces existe  $z \in V(G) \setminus C$  que fue pintado y le quitó un color a  $v$ . Llamemos  $k$  al color que  $v$  ve en el ciclo  $C$ . Notamos que si  $L(v) = \{l\}$ , llegaremos a la misma contradicción anterior, por lo que supondremos que  $L(v) = \{j\}$ , por lo que  $L(z) = \{l\}$ .

Supondremos sin pérdida de generalidad que  $v \in T_{i+1}$ , el caso  $T_{i+6}$  será análogo. Si suponemos que  $z \in T \cup D$ , gracias al Lema 3.22, sabemos que  $z \in T_{i+2} \cup T_i \cup D_{i+2} \cup D_{i+4} \cup D_i$ . Sin embargo, como los nodos  $c_i$  y  $c_{i+2}$  están pintados  $l$ ,  $z$  no puede ser adyacente a ellos por factibilidad del coloreo, por lo que la única configuración posible es que  $z \in D_{i+4}$ .

Sea  $t \in N(y_1) \cap T_i$ , podemos armar el camino de la Figura 3.24, donde la única manera que no sea inducido, es que  $tv \in E(G)$ , pero esto implicaría que  $L(t) = \{k\}$ , lo cual contradice el hecho de que  $|L(y_1)| = 3$ . Concluimos que  $z \notin T \cup D$ .

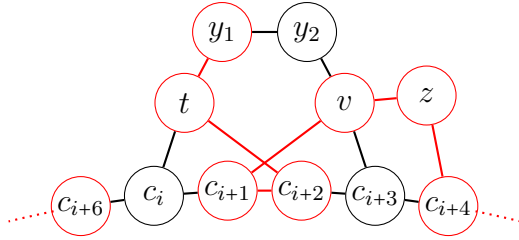


Figura 3.24

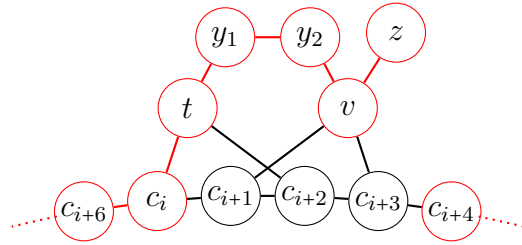


Figura 3.25

Por lo que solo puede ser que  $z \in Y$ , pero si esto ocurre, podemos armar el camino de la Figura 3.25, donde la única manera que no sea inducido, es que  $tv \in E(G)$ , provocando la misma contradicción anterior. Concluimos que no puede ocurrir que  $|L(y_1)| = 3$  y  $|L(y_2)| = 2$ .

□

## Algoritmo de 3-coloreo

A continuación veremos el algoritmo. Recordemos que el input para este algoritmo es una tupla  $(G, L_{i^*})$ , donde  $G$  es un grafo de la clase  $(P_9, C_9, C_5, C_3)$ -free, conexo y minimal, y  $L_{i^*}$  es una paleta ideal perteneciente a la familia  $\{L_i\}_{i \in I}$ .

---

### Algorithm 2 Coloreo $(P_9, C_9, C_5, C_3)$ -free

---

```

1: procedure  $ALG_{C_7}(G, L_{i^*})$ 
2:    $\mathcal{L}_f \leftarrow \emptyset$ 
3:    $C \leftarrow$  ciclo  $C_7$ 
4:   for  $i \in [6]$  do
5:      $\bar{A} \leftarrow t_i$  y  $t_{i+3}$  del Lema 3.31
6:      $\bar{B} \leftarrow d_i$  y  $d_{i+3}$  del Lema 3.33
7:      $\bar{C}_1 \leftarrow t_i$  y  $d_{i+4}$  del Lema 3.35
8:      $\bar{C}_2 \leftarrow t_i$  y  $d_{i+5}$  del Lema 3.35
9:   end for
10:  Pintamos los nodos en  $\bar{A}$  ( $A$ -coloreo),  $\bar{B}$  ( $B$ -coloreo),  $\bar{C}_1$  y  $\bar{C}_2$  ( $C$ -coloreo) de todas las
    maneras posibles, esto genera la familia de paletas  $\mathcal{L}$ , subpaletas de  $L_{i^*}$ .
11:  for  $L \in \mathcal{L}$  do
12:     $L \leftarrow update(L)$ 
13:    if  $L$  es factible then
14:       $\mathcal{L}_f \leftarrow \mathcal{L}_f \cup L$ 
15:    end if
16:  end for
17:  return  $(G, \mathcal{L}_f)$ 
18: end procedure

```

---

**Proposición 3.51** Para toda  $L \in \mathcal{L}_f$ , subpaletas retornadas del algoritmo, se cumple que para todo  $v \in V(G)$ ,  $|L(v)| \leq 2$ .

DEMOSTRACIÓN. Es directo que los nodos en  $V(G) \setminus Y$  tienen listas de tamaño menor estricto que 3, ya que el ciclo  $C_7$  fue pintado, y le quita al menos un color a los nodos que son adyacentes a él. Gracias a los Lemas 3.48, 3.49 y 3.50 sabemos que los únicos nodos en  $Y$  que pueden tener listas de tamaño tres son los que pertenecen a  $Y_i^A \cup Y_i^B \cup Y_i^C \cup \bar{Y}_i^C$  para algún  $i \in [6]$ .

Para los casos faltantes tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.52** Sean  $y \in Y_i^A \cup Y_i^B \cup Y_i^C \cup \bar{Y}_i^C$  y sea  $L \in \mathcal{L}_f$ . Entonces  $|L(y)| \leq 2$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue directamente de los Lemas 3.31, 3.33 y 3.35 y de los procesos de  $A$ -coloreo,  $B$ -coloreo y  $C$ -coloreo en el algoritmo.  $\square$

$\square$



Gracias a la Proposición 3.51 podemos utilizar el Teorema 2.3 para resolver el problema de *2-lista-coloreo* para cada paleta  $L \in \mathcal{L}_f$ . Si es que logramos encontrar un *2-lista-coloreo* factible para alguna de ellas, dicho coloreo será también un *3-coloreo*, por lo que el grafo será *3-coloreable* y tendremos el coloreo factible. En caso de que todas las paletas sean infactibles para el *2-lista-coloreo*, entonces concluimos que el grafo no era *3-coloreable* en primer lugar, esto debido a que nuestra familia  $\mathcal{L}_f$  contiene como subpaletas a cualquier coloreo factible.

# Capítulo 4

## *3-coloreo en grafos*

### *$(P_{2d+3}, C_{2d-1}, \dots, C_3)$ -free, $d \geq 4$ .*

En este capítulo se intentará realizar una generalización del resultado obtenido en el capítulo anterior.

Siguiendo la misma estructura que en el capítulo anterior, lo primero que haremos será entender la estructura de un grafo  $(P_{2d+3}, C_{2d-1}, C_{2d-3}, \dots, C_3)$ -free,  $d \geq 4$ , que para una mayor comodidad en la notación, lo llamaremos simplemente  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free, notando que el caso  $d = 3$  es exactamente el caso  $(P_9, C_5, C_3)$ -free.

Notamos además que como en este caso suponemos  $d \geq 4$ , entonces siempre estarán prohibidos los ciclos  $C_7$ ,  $C_5$  y  $C_3$ . Definiremos además algunos conceptos que serán usados recurrentemente para simplificar los análisis en las siguientes secciones.

**Definición 4.1** Sea  $t \geq 1$  y sea  $C = c_0, \dots, c_t$  un ciclo inducido, sean  $v_1, v_2 \in C$ . Definimos  $P_{min}^C(v_1, v_2)$  al conjunto de nodos del camino más corto que une los nodos  $v_1$  y  $v_2$  (sin incluirlos) en el ciclo  $C$ . Análogamente definimos  $P_{max}^C(v_1, v_2)$  al conjunto de nodos del camino más largo que une los nodos  $v_1$  y  $v_2$  (sin incluirlos) en el ciclo  $C$ .

**Definición 4.2** Sea  $t \geq 1$  y sea  $C = c_0, \dots, c_t$  un ciclo inducido, sean además  $A, B \subseteq V(G) \setminus C$ . Decimos que  $A$  y  $B$  están enlazados si existen nodos  $a_1, a_2 \in N_C(A)$  y un nodo  $b_1 \in N_C(B) \cap (P(a_1, a_2) \cup \{a_1, b_1\})$  donde  $a \notin P(a_1, a_2)$ , para todo  $a \in N_C(A) \setminus (\{a_1, a_2\})$ .

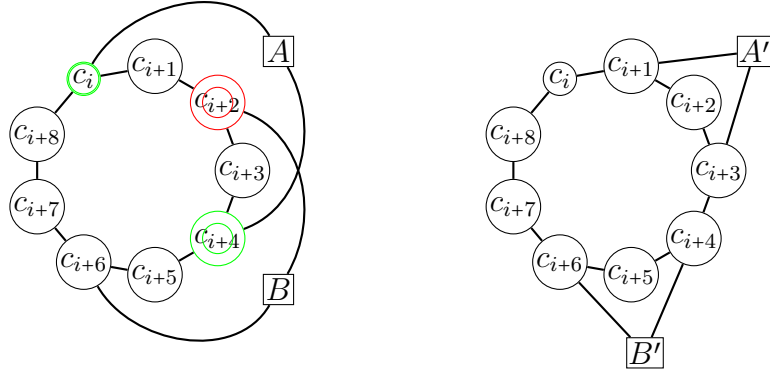


Figura 4.1: A la izquierda, los conjuntos  $A$  y  $B$  están enlazados, donde los nodos pintados  $c_i, c_{i+4}$  y  $c_{i+2}$  cumplen la condición para esto. A la derecha, los conjuntos  $A'$  y  $B'$  no están enlazados

**Definición 4.3** Sean  $A, B \subseteq V(G)$  conjuntos no enlazados y distintos de nodos adyacentes al ciclo  $C$ . Definimos  $d_{min}^C(A, B)$  como el tamaño del camino  $P$  más corto en el ciclo  $C$  que une nodos de  $N_C(A)$  con  $N_C(B)$ , sin contar los extremos y tal que  $V(P) \subseteq V(C) \setminus (N_C(A) \cup N_C(B))$ .

De la misma manera, definimos  $d_{max}^C(A, B)$  como su análogo pero de largo máximo.

Si es que no existe ambigüedad con respecto al ciclo  $C$  que utilizamos ni a los conjuntos  $A, B$  usados, simplificaremos la notación a  $d_{min}$  y  $d_{max}$  en vez de  $d_{min}^C(A, B)$  y  $d_{max}^C(A, B)$ .

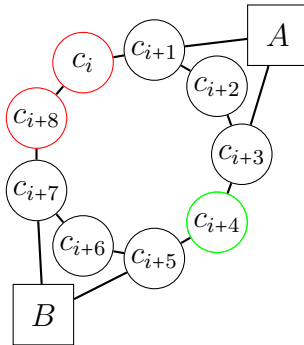


Figura 4.2: En rojo, los nodos del camino con el cual es definido  $d_{max}(A, B)$ , mientras que en verde los nodos del camino con el cual es definido  $d_{min}(A, B)$ .

## 4.1. Estructura de un grafo $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free

Trabajaremos exclusivamente con grafos minimales para el coloreo ya que, debido a la Proposición 3.5 y al Lema 3.2, será equivalente de colorear y heredará las propiedades de prohibición de caminos y ciclos inducidos.

### 4.1.1. Existencia de un $C_{2d+3}$

En la siguiente subsección, intentaremos entender la estructura de un grafo  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free el cual posee un ciclo  $C$  de largo  $2d + 3$  como subgrafo inducido, con el objetivo de aprovecharnos de esta estructura para lograr resolver el problema de  $\beta$ -coloreo posteriormente.

Probaremos el siguiente resultado:

**Proposición 4.4** *Sea un grafo  $G$  conexo y minimal, de la clase  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free, tal que  $G$  posee un ciclo  $C = c_0, c_1, \dots, c_{2d+2}$  de largo  $2d+3$  como subgrafo inducido. Tenemos que  $V(G)$  es la unión disjunta de cinco conjuntos de nodos, es decir,*

$$V(G) = V(C) \cup T \cup T' \cup S \cup Y,$$

Los nodos de los conjuntos  $T, T'$  y  $S$  est n a distancia 1 de  $C$ , mientras que los nodos en  $Y$  est n a distancia 2 de  $C$ . Además tenemos que, para todo  $i \in [2d + 2]$ :

- (a) Existen conjuntos estables disjuntos  $T_i, T'_i$  y  $S_i$ , tal que  $T = \bigcup_{i=0}^{2d+2} T_i$ ,  $T' = \bigcup_{i=0}^{2d+2} T'_i$  y  $S = \bigcup_{i=0}^{2d+2} S_i$ .
- (b) Los nodos de los conjuntos  $T_i$ , tienen exactamente dos vecinos en  $C$ , que son nodos  $c_i, c_{i+2}$ .
- (c) Los nodos de los conjuntos  $T'_i$ , tienen exactamente dos vecinos en  $C$ , que son nodos  $c_i, c_{i+4}$ .
- (d) Los nodos de los conjuntos  $S_i$ , tienen exactamente tres vecinos en  $C$ , que son nodos  $c_i, c_{i+2}, c_{i+4}$ .
- (e) Las componentes del grafo  $G[Y]$  son nodos aislados o aristas, y además  $N(y) \setminus Y \subseteq T' \cup S$ , para todo  $y \in Y$ .

La adición en los índices de  $c_i$  es comprendida en módulo  $2d + 2$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $v$  un nodo adyacente a  $C$  (no perteneciente a este ciclo), notamos que:

- El nodo  $v$  no puede ser adyacente al ciclo a través de una sola arista. Si esto ocurriera, sea  $c_i$  el nodo al cual  $v$  es adyacente, entonces el camino de la Figura 4.3 es un camino de largo  $2d + 3$  inducido, el cual está prohibido, por lo que tenemos una contradicción.

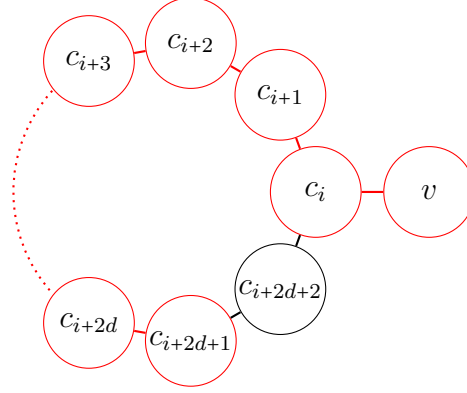


Figura 4.3

- El nodo  $v$  puede estar unido con 2 aristas al  $C_{2d+3}$ , lo cual resulta en 2 casos posibles:
  - Conjuntos  $T_i$ : nodos con vecinos en el ciclo  $C$  del tipo  $c_i, c_{i+2}, i \in [2d+2]$ .
  - Conjuntos  $T'_i$ : nodos con vecinos en el ciclo del tipo  $c_i, c_{i+4}, i \in [2d+2]$ .

En el resto de los casos, sean  $a, b \in N_C(v)$ , notamos que se forman dos ciclos, uno interno que será de largo  $|P_{min}^C(a, b)| + 3$ , y uno externo de largo  $|P_{max}^C(a, b)| + 3$ .

Notamos además que  $|P_{min}^C(a, b)| + |P_{max}^C(a, b)| = 2d + 1$ , por lo que para cada posible configuración de  $a, b$ , los caminos tendrán distinta paridad, esto implica que siempre alguno de los ciclos que se forme de esta configuración será impar, y quitando del análisis las configuraciones anteriores (conjuntos  $T_i$  y  $T'_i$ ), tenemos que el camino mas largo estará acotado superiormente por  $2d - 3$ , por lo que el ciclo impar más grande que se forma es de largo  $2d - 1$ , lo que significa que todas las configuraciones tendrán un ciclo prohibido (el camino mas corto siempre estará acotado superiormente por  $\frac{2d+3}{2}$ , por lo que cualquier ciclo impar que se forme con él, será prohibido).

- En el caso de que  $v$  tenga 3 vecinos en el ciclo, notamos que si a un ciclo impar inducido prohibido le agregamos una arista como cuerda, se formará otro ciclo impar más pequeño dentro. Por lo que cualquier ciclo impar prohibido en el caso anterior, también estará prohibido aquí. El único caso posible es  $c_i, c_{i+2}$  y  $c_{i+4}$ . A conjuntos que sean adyacentes a dichos nodos, para  $i \in [2d+2]$ , los llamaremos  $S_i$ .
- No pueden haber nodos de mayor grado, ya que siempre forman ciclos impares prohibidos.

Observamos que todos los conjuntos  $T_i, T'_i$  y  $S_i$  son estables, debido a que cada conjunto comparte un vecino común en el ciclo y a la prohibición de  $C_3$ , con lo que quedan definidos los conjuntos  $T, T'$  y  $S$ , y queda probada la afirmación (a) y que los conjuntos  $T_i, T'_i$  y  $S_i$  satisfacen las condiciones (b), (c) y (d).

Una vez vista la estructura que rodea a  $C$ , lo que haremos es ver como se disponen los nodos mas lejanos a  $C$ .

Afirmamos que

$$\text{no existen nodos a distancia } \geq 3 \text{ de } C. \quad (4.1)$$

La demostración de este hecho es análoga a la Proposición 3.1.

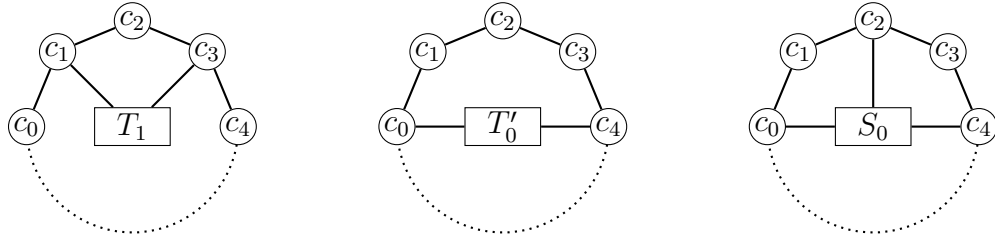


Figura 4.4: Ejemplos de conjuntos estables  $T_i$ ,  $T'_i$  y  $S_i$ ,  $i \in [8]$ . Notamos que son las mismas estructuras permitidas que el caso  $d = 3$ .

Entonces sólo existen nodos a lo más a distancia 2 de  $C$ , y es a estos nodos a los que denominaremos como nuestro conjunto  $Y$ . A continuación veamos a que conjuntos pueden ser adyacentes a nodos de  $Y$ .

Afirmamos que

$$\text{ningún } y \in Y \text{ es adyacente a } T. \quad (4.2)$$

La demostración de este hecho es análoga a la proposición 3.2, donde podemos alargar el camino prohibido aprovechando que nuestro ciclo base  $C$  es más largo.

Por lo que los nodos en  $Y$  solo pueden ser adyacentes al conjunto  $T' \cup S$ , lo cual prueba parcialmente la condición (e). Veamos ahora la estructura dentro del conjunto  $Y$ .

A continuación afirmamos que

$$G[Y] \text{ es un grafo bipartito, donde para cada componente conexa, los nodos de la misma clase de bipartición tienen exactamente los mismos vecinos en } V(G) \setminus Y. \quad (4.3)$$

Si tenemos el resultado, notamos que una componente conexa de clases de bipartición  $Y_1, Y_2$ , cumple que  $Y_1, Y_2$  son clones con respecto a  $V(G) \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ , y como el grafo  $G$  es minimal, concluimos que cualquier componente conexa de  $Y$  es un nodo aislado o una arista, con lo que terminamos de probar la condición (e).

No se probará (4.3) ya que es totalmente análogo a (3.3). □

### Estructura de adyacencia entre conjuntos $S$ , $T$ y $T'$ .

Analizaremos a continuación la forma en que nodos de los conjuntos  $S$ ,  $T$  y  $T'$  pueden ser adyacentes.

Sea  $z, z' \in N(C)$  tal que  $zz' \in E(G)$ . Nuestro objetivo será ver los posibles conjuntos  $T_i$ ,  $T'_i$  o  $S_i$ , para algún  $i \in [2d+2]$ , a los cuales  $z$  y  $z'$  pueden pertenecer. Usaremos  $d_{min}$  y  $d_{max}$  para referirnos a  $d_{min}^C(z, z')$  y  $d_{max}^C(z, z')$

- Si  $z, z' \in T'$ : si  $z \in T'_i$ , para algún  $i \in [2d+2]$ , si  $z'$  pertenece a un conjunto enlazado, notamos que se forman ciclos  $C_5$  para los casos cuando  $z' \in T'_{i+2} \cup T'_{i+2d+1}$ , se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T'_{i+4} \cup T'_{i+2d-1}$  y se forman ciclos  $C_{2d-1}$  para los casos  $z' \in T'_{i+3} \cup T'_{i+2d}$ .

En los casos no enlazados, tenemos que los ciclos que se forman serán de largo  $C_{d_{min}+4}$  y  $C_{d_{max}+4}$ , mientras que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 7$ , esto significa que siempre se formará un ciclo impar en cada configuración. Y como el ciclo impar más grande que puede formarse es de largo  $2d - 3$ , todos los ciclos impares que se formen están prohibidos.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+2d+2}$ .

- Si  $z, z' \in S$ : si  $z \in S_i$ , para algún  $i \in [2d + 2]$ , si  $z'$  pertenece a un conjunto enlazado, notamos que se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in S_{i+2} \cup S_{i+2d+1} \cup S_{i+4} \cup S_{i+2d-1}$  y se forman ciclos  $C_{2d-1}$  para los casos  $z' \in S_{i+3} \cup S_{i+2d}$ .

Podemos descartar los casos no enlazados de manera análoga al caso anterior.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in S_{i+1} \cup S_{i+2d+2}$ .

- Si  $z, z' \in T$ : si  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [2d + 2]$ , si  $z'$  pertenece a un conjunto enlazado, notamos que se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T'_{i+2} \cup T'_{i+2d+1}$ .

En los casos no enlazados, tenemos que los ciclos que se forman serán de largo  $C_{d_{min}+4}$  y  $C_{d_{max}+4}$ , mientras que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 3$ , permitiendo que  $z' \in T_{i+3} \cup T_{i+2d}$ , todos los demás ciclos impares que se formen están prohibidos (serán de largo  $\leq 2d - 1$ ).

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+2d} \cup T_{i+2d+2}$ .

- Si  $z \in T'$  y  $z' \in T$ : si  $z \in T'_i$ , para algún  $i \in [2d+2]$ , si  $z'$  pertenece a un conjunto enlazado, notamos que se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T_i \cup T_{i+2} \cup T_{i+4} \cup T_{i+2d+1}$ .

En los casos no enlazados, tenemos que los ciclos que se forman serán de largo  $C_{d_{min}+4}$  y  $C_{d_{max}+4}$ , mientras que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 5$ , que hace que todos los ciclos impares que se formen estén prohibidos.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+2d+2}$ .

- Si  $z \in S$  y  $z' \in T$ : si  $z \in S_i$ , para algún  $i \in [2d+2]$ , si  $z'$  pertenece a un conjunto enlazado, notamos que se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T_i \cup T_{i+2} \cup T_{i+4} \cup T_{i+2d+1}$ .

Los casos no enlazados son análogos al caso anterior, están todos prohibidos.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+2d+2}$ .

- Si  $z \in S$  y  $z' \in T'$ : si  $z \in S_i$ , para algún  $i \in [2d+2]$ , si  $z'$  pertenece a un conjunto enlazado, notamos que se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T'_i \cup T'_{i+2} \cup T'_{i+4} \cup T'_{i+2d-1} \cup S_{i+2d+1}$ , mientras que se forman ciclos  $C_{2d-1}$  para los casos  $z' \in T'_{i+3} \cup T'_{i+2d}$ .

Los casos no enlazados son análogos al caso  $z, z' \in T'$ , están todos prohibidos.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+2d+2}$ .

El análisis anterior lo resumiremos en los siguientes lemas.

**Lema 4.5** Sea  $z \in T'_i$ , para algún  $i \in [2d + 2]$ , y sea  $z' \in (T \cup S \cup T')$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces

$$z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+2d+2} \cup S_{i+1} \cup S_{i+2d+2} \cup T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+2d+2}$$

**Lema 4.6** Sea  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [2d + 2]$ , y sea  $z' \in (T \cup S \cup T')$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces

$$z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+2d} \cup T'_{i+2d+2} \cup S_{i+1} \cup S_{i+2d} \cup S_{i+2d+2} \cup T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+2d} \cup T_{i+2d+2}$$

De lo anterior, podemos concluir el siguiente corolario.

**Corolario 4.7** Sean nodos  $v \in S \cup T'$  y  $w \in S \cup T' \cup T$  tal que  $vw \in E(G)$ , entonces para todo  $z_1 \in N_C(w)$  existe  $z_2 \in N_C(v)$  tal que  $z_1 z_2 \in E(G)$ .

### Estructura de adyacencia entre $S, T'$ e $Y$ .

A continuación veremos resultados para entender exactamente la forma en que componentes de  $G[Y]$  (nodos aislados o aristas) se unen a los conjuntos  $T'$  y  $S$ . Definimos el conjunto  $Y^* \subseteq Y$  como el conjunto de nodos aislados de  $G[Y]$ .

Sea  $y \in Y$ , veamos las posibles combinaciones de conjuntos  $S_i, T'_j$  a los que puede ser adyacente, recordando que no puede ser adyacente al conjunto  $T$  por la Proposición 4.4 (e). Es fácil ver que no existen problemas cuando  $y$  es adyacente exclusivamente a un conjunto (sea  $S_i$  o  $T'_j$ ) mediante uno o más nodos, por lo que nos concentraremos en los casos donde sea adyacente a más de uno. Los separaremos en tres grupos para que se vea mas claramente.

Sea  $z, z' \in N(y) \setminus Y$ , pero que no poseen los mismos vecinos en  $C$ . Vemos que  $z, z'$  no pueden ser adyacentes entre si ya que no hay  $C_3$ , por lo que forman un  $P_3$  inducido. Nuestro objetivo será ver los posibles conjuntos a los cuales  $z$  y  $z'$  pueden pertenecer. Usaremos  $d_{min}$  y  $d_{max}$  para referirnos a  $d_{min}^C(z, z')$  y  $d_{max}^C(z, z')$ .

- Si  $y$  es adyacente solo al conjunto  $T'$ : cuando  $z \in T'_i$ , si un nodo en  $N_C(z')$  fuera adyacente a alguno de los nodos en  $N_C(z)$ , se formaría un  $C_5$ , por lo que los conjuntos  $T'_{i+1}, T'_{i+2d+2}, T'_{i+3}$  y  $T'_{i+2d}$  están descartados, al igual que  $T'_{i+4}$  y  $T'_{i+2d-1}$  que forman un ciclo  $C_{2d-1}$ .

Con respecto a los  $T'$  no enlazados, tenemos que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 7$ , por lo que el ciclo interno y externo siempre tendrán paridades distintas. Se formarán los ciclos  $C_{d_{min}+5}$  y  $C_{d_{max}+5}$ , donde  $d_{max} \leq 2d - 7$ , por lo que el tamaño máximo de los ciclos será  $2d - 2$ , por lo que en todas las configuraciones existirá un ciclo prohibido.

Como estamos suponiendo que  $z' \in T' \setminus T_i$ , el nodo  $z'$  solo puede ser parte de los conjuntos  $T'_{i+2}$  o  $T'_{i+2d+1}$ .

- Si  $y$  es adyacente solo al conjunto  $S$ : cuando  $z \in S_i$ , como se forma un  $P_3$  inducido, si un nodo en  $N_C(z')$  fuera adyacente a alguno de los nodos en  $N_C(z)$ , se formaría un  $C_5$ , por lo que los conjuntos  $S_{i+1}, S_{i+2d+2}, S_{i+3}$  y  $S_{i+2d}$  están descartados, al igual que  $S_{i+4}$  y  $S_{i+2d-1}$  que forman un ciclo  $C_{2d-1}$ .

Con respecto a los casos no enlazados, es análogo al caso con  $T'$ .

Como estamos suponiendo que  $z' \in S \setminus S_i$ , el nodo  $z'$  solo puede ser parte de los conjuntos  $S_{i+2}$  o  $S_{i+2d+1}$ .

- Si  $y$  es adyacente a conjuntos  $S$  y  $T'$ : Los argumentos para el último caso son análogos a los anteriores y se concluye que las configuraciones posibles son  $S_i$  con  $T'_i, T'_{i+2}$  y  $T'_{i+2d+1}$ , de la misma manera,  $T'_i$  con  $S_i, S_{i+2}$  y  $S_{i+2d+1}$ .

El análisis anterior lo resumiremos en los siguientes lemas.

**Lema 4.8** Sea  $y \in Y \cap N(T'_i)$ , para algún  $i \in [2d + 2]$  y sea  $z \in N(y) \setminus (Y \cup T'_i)$  su vecino,



entonces

$$z \in T'_{i+2} \cup T'_{i+2d+1} \cup S_i \cup S_{i+2} \cup S_{i+2d+1}.$$

**Lema 4.9** Sea  $y \in Y \cap N(S_i)$ , para algún  $i \in [2d+2]$  y sea  $z \in N(y) \setminus (Y \cup S_i)$  su vecino, entonces

$$z \in T'_i \cup T'_{i+2} \cup T'_{i+2d+1} \cup S_{i+2} \cup S_{i+2d+1}.$$

De aquí podemos extraer unos corolarios útiles que no serán demostrados debido a que son análogos a los Corolarios 3.12 y 3.13.

**Corolario 4.10** Sea  $i \in [2d+2]$ , y sea  $y \in Y \cap N(T'_i)$ . Sea  $z \in N(y) \setminus (T'_{i+2} \cup T'_{i+2d+1} \cup Y)$ , entonces el conjunto  $N_C(T'_i) \cap N_C(z) \neq \emptyset$ .

*Esto significa que si  $z \notin T'$ , siempre compartirá un vecino en el ciclo  $C$  con el conjunto  $T'_i$ .*

**Corolario 4.11** Sea  $i \in [2d+2]$ , y sea  $y \in Y \cap N(S_i)$ . Sea  $z \in N(y) \setminus Y$ , entonces el conjunto  $N_C(S_i) \cap N_C(z) \neq \emptyset$ .

**Lema 4.12** Si existe  $i \in [2d+2]$  e  $y \in Y$  tal que  $y \in N(T'_i)$  y  $T'_{i+2} \cup T'_{i+2d+1} \neq \emptyset$ , entonces  $y$  es completo al conjunto  $T'_i \cup T'_{i+2} \cup T'_{i+2d+1}$ .

**Observación** A lo menos uno de los conjuntos  $T'_{i+2}$  y  $T'_{i+2d+1}$  es vacío.

La demostración es análoga a la del Lema 3.14.

Ahora nos enfocaremos en el conjunto  $Y \setminus Y^*$ , es decir, las componentes conexas no aisladas de  $G[Y]$ .

Para  $y_1, y_2 \in Y$ , donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , afirmamos que

$$\text{para } a \in N(y_1) \setminus Y \text{ y } b \in N(y_2) \setminus Y, \text{ } ab \notin E(G). \quad (4.4)$$

Esta afirmación se prueba de manera análoga a la Afirmación 3.4.

Sean  $y_1, y_2 \in Y$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , ahora veremos las combinaciones posibles de conjuntos a los que  $y_1$  y  $y_2$  pueden ser adyacentes, los cuales separaremos en 3 grupos. Sean  $z \in N(y_1)$  y  $z' \in N(y_2)$ . Usaremos  $d_{min}$  y  $d_{max}$  para referirnos a  $d_{min}^C(z, z')$  y  $d_{max}^C(z, z')$ .

- Si  $z, z'$  pertenecen al conjunto  $T'$ : Asumimos que  $z \in T'_i$ , la afirmación (4.4) nos ayuda a descartar que  $z'$  pertenezca a  $T'_i, T'_{i+4}$  y  $T'_{i+2d-1}$ , además podemos descartar  $T'_{i+2}$  y  $T'_{i+2d+1}$  porque se forma un  $C_7$  (y en caso de que  $zz' \in E(G)$ , se forma un  $C_5$ ).  
Para el caso no enlazado, notamos que también  $d_{min} + d_{max} = 2d - 7$ , mientras que los ciclos que ahora se formarán serán  $C_{d_{min}+6}$  y  $C_{d_{max}+6}$ . Debido a lo anterior, siempre se formará un ciclo impar prohibido, por lo que podemos descartarlos todos.  
Con esto, concluimos que  $z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+2d+2} \cup T'_{i+3} \cup T'_{i+2d}$ . Cabe destacar que el caso  $T'_i$  con  $T'_{i+3}$  o con  $T'_{i+2d}$  no ocurría cuando  $d = 3$ .
- Si  $z, z'$  pertenecen al conjunto  $S$ : Asumimos que  $z \in S_i$ , la afirmación (4.4) nos ayuda a descartar que  $z'$  pertenezca a  $S_i, S_{i+4}, S_{i+2d-1}, S_{i+2}$  y  $S_{2d+1}$ .

Para el caso no enlazado, es totalmente análogo a cuando  $z, z' \in T'$ , por lo que descartamos todos estos.

Con esto, concluimos que  $z' \in S_{i+1} \cup S_{i+2d+2} \cup S_{i+3} \cup S_{i+2d}$ .

- Si  $z \in S$  e  $z' \in T'$ : Asumimos que  $z \in S_i$ , la afirmación (4.4) nos ayuda a descartar que  $z'$  pertenezca a  $T'_i, T'_{i+4}, T'_{i+2d-1}, T'_{i+2}$  y  $T'_{2d+1}$ . Por lo que en los casos enlazados,  $z'$  podría pertenecer a  $T'_{i+1}, T'_{i+2d+2}, T'_{i+3}$  y  $T'_{i+2d}$ .

Para el caso no enlazado, es totalmente análogo a cuando  $z, z' \in T'$ , por lo que descartamos todos estos.

Con esto, concluimos que  $z' \in T'_{i+1} \cup T'_{i+2d+2} \cup T'_{i+3} \cup T'_{i+2d}$ .

De manera análoga, si  $z \in T'_i$ , tendremos que  $z' \in S_{i+1} \cup S_{i+2d+2} \cup S_{i+3} \cup S_{i+2d}$ . Cabe destacar que el caso  $S_i$  con  $T'_{i+3}$  o  $T'_{i+2d}$  no ocurría para  $d = 3$ .

El análisis anterior lo resumiremos en los siguientes lemas.

**Lema 4.13** *Sea  $i \in [2d + 2]$ , y sean  $y \in Y \cap N(T'_i)$  e  $y' \in Y$ , donde  $yy' \in E(G)$ , entonces*

$$y' \in N(T'_{i+1} \cup T'_{i+2d+2} \cup T'_{i+3} \cup T'_{i+2d} \cup S_{i+1} \cup S_{i+2d+2} \cup S_{i+3} \cup S_{i+2d})$$

**Lema 4.14** *Sea  $i \in [2d + 2]$ , y sean  $y \in Y \cap N(S_i)$  e  $y' \in Y$ , donde  $yy' \in E(G)$ , entonces*

$$y' \in N(T'_{i+1} \cup T'_{i+2d+2} \cup T'_{i+3} \cup T'_{i+2d} \cup S_{i+1} \cup S_{i+2d+2} \cup S_{i+3} \cup S_{i+2d}).$$

A continuación presentaremos un par de corolarios de los lemas de adyacencia.

**Corolario 4.15** *Sea  $i \in [2d + 2]$ , y sean  $y \in Y \cap N(T'_i)$  e  $y' \in Y \setminus N(T'_{i+3} \cup S_{i+3} \cup T'_{i+2d} \cup S_{i+2d})$ , donde  $yy' \in E(G)$ . Entonces para todo  $v \in N(y') \setminus Y$  y para todo  $c \in N_C(v)$  tenemos que  $c \in N_C(\{c_i, c_{i+4}\})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Directo del Lema 4.13. □

**Corolario 4.16** *Sea  $i \in [2d + 2]$ , y sean  $y \in Y \cap N(S_i)$  e  $y' \in Y \setminus N(T'_{i+3} \cup T'_{i+2d} \cup S_{i+3} \cup S_{i+2d})$ , donde  $yy' \in E(G)$ , entonces para todo  $v \in N(y') \setminus Y$  y para todo  $c \in N_C(v)$  tenemos que  $c \in N_C(\{c_i, c_{i+4}\})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Directo del Lema 4.14. □

Con esto, tenemos todos los casos de adyacencia para los nodos en el conjunto  $Y$ . A continuación definiremos algunos conjuntos de nodos que serán útiles de identificar al enunciar el algoritmo.

**Definición 4.17** *Al conjunto de nodos  $y_1, y_2 \in Y$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , que sean adyacentes respectivamente a los conjuntos  $S_i$  y  $S_{i+3}$ , para  $i \in [2d + 2]$ , se les denominará  $Y_i^S$ .*

*Notamos que este conjunto es bipartito, de clases de bipartición  $N_{Y_i^S}(S_i), N_{Y_i^S}(S_{i+3})$ .*

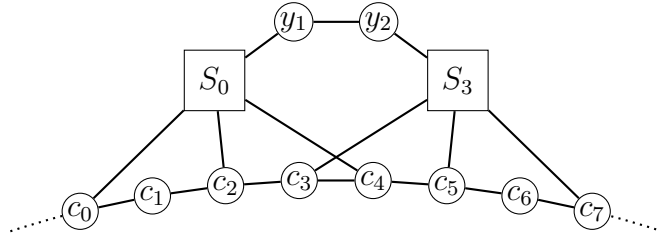


Figura 4.5: Ejemplo de nodos  $y_1, y_2 \in Y_0^S$ . Esta estructura también se encuentra en el caso  $d = 3$ .

**Definición 4.18** Al conjunto de nodos  $y_1, y_2 \in Y$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , que sean adyacentes respectivamente a los conjuntos  $T'_i$  y  $T'_{i+3}$ , para  $i \in [2d + 2]$ , se les denominará  $Y_i^{T'}$ .

Notamos que este conjunto es bipartito, de clases de bipartición  $N_{Y_i^{T'}}(T'_i)$ ,  $N_{Y_i^{T'}}(T'_{i+3})$ .

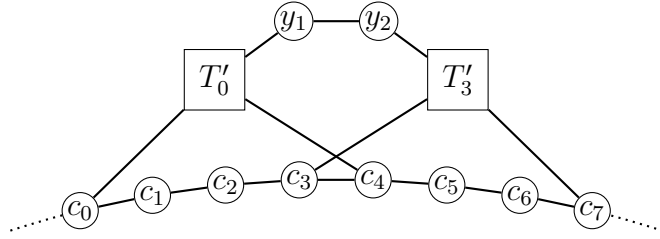


Figura 4.6: Ejemplo de nodos  $y_1, y_2 \in Y_0^{T'}$ .

**Definición 4.19** Al conjunto de nodos  $y_1, y_2 \in Y$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , que sean adyacentes respectivamente a los conjuntos  $S_i$  y  $T'_{i+3}$ , para  $i \in [2d + 2]$ , se les denominará  $Y_i^{ST'}$ .

Notamos que este conjunto es bipartito, de clases de bipartición  $N_{Y_i^{ST'}}(S_i)$ ,  $N_{Y_i^{ST'}}(T'_{i+3})$ .

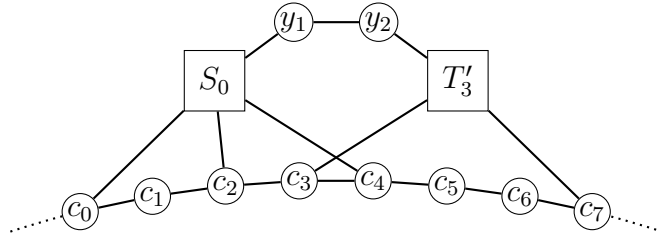


Figura 4.7: Ejemplo de nodos  $y_1, y_2 \in Y_0^{ST'}$ .

**Definición 4.20** Al conjunto de nodos  $y_1, y_2 \in Y$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , que sean adyacentes respectivamente a los conjuntos  $T'_i$  y  $S_{i+3}$ , para  $i \in [2d + 2]$ , se les denominará  $Y_i^{T'S}$ .

Notamos que este conjunto es bipartito, de clases de bipartición  $N_{Y_i^{T'S}}(T'_i)$ ,  $N_{Y_i^{T'S}}(S_{i+3})$ .

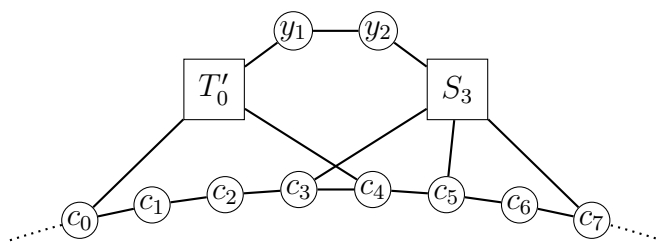


Figura 4.8: Ejemplo de nodos  $y_1, y_2 \in Y_0^{T'S}$ .

**Lema 4.21** Sea  $i \in [2d + 2]$ , para cada conjunto  $Y_i^F$ , con  $F \in \{S, T', ST', T'S\}$ , existen  $v_i^*, v_{i+3}^* \in N(Y_i^D)$  tal que

$$N_{Y_i^F}(v_i^*) \cup N_{Y_i^F}(v_{i+3}^*) = Y_i^F.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la del Lema 3.20. □

### 4.1.2. Existencia de un $C_{2d+1}$ y libre de $C_{2d+3}$

En la siguiente subsección, intentaremos entender la estructura de un grafo  $(P_{2d+3}, C_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free el cual posee un ciclo  $C$  de largo  $2d+1$  como subgrafo inducido, con el objetivo de aprovecharnos de esta estructura para lograr resolver el problema de  $\beta$ -coloreo posteriormente.

**Proposición 4.22** *Sea un grafo  $G$  conexo y minimal, de la clase  $(P_{2d+3}, C_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free, tal que posee un ciclo  $C = c_0, c_1, \dots, c_{2d}$  de largo  $2d+1$  como subgrafo inducido. Tenemos que  $V(G)$  será la unión disjunta de cuatro conjuntos de nodos, es decir,*

$$V(G) = V(C) \cup D \cup T \cup Y.$$

Los conjuntos  $T$  y  $D$  están a distancia 1 de  $C$ , mientras que los nodos en  $Y$  están a distancia 2 de  $C$ . Además tenemos que, para todo  $i \in [2d]$ :

- (a) Existen conjuntos estables disjuntos  $T_i$  y  $D_i$ , tal que  $T = \bigcup_{i=0}^{2d} T_i$  y  $D = \bigcup_{i=0}^{2d} D_i$ .
- (b) Los nodos del conjunto  $D_i$ , tienen exactamente un vecino en  $C$ , que es  $c_i$ .
- (c) Los nodos del conjunto  $T_i$ , tienen exactamente dos vecinos en  $C$ , que son los nodos  $c_i, c_{i+2}$ .
- (d) Las componentes del grafo  $G[Y]$  son nodos aislados o aristas.
- (e) Las componentes del grafo  $G[Y \cap N(D)]$  son nodos aislados.

La adición en los índices es comprendida en módulo  $2d$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $v \in V(G)$  adyacente a  $C$ , veamos las maneras posibles en que este nodo puede ser adyacente al ciclo.

- El nodo  $v$  puede estar unido al  $c_{2d+1}$  a través de una arista. Al conjunto de nodos que se unan con una arista al nodo  $c_i \in C$ , para algún  $i \in [2d]$ , los llamaremos  $D_i$ .
- El nodo  $v$  puede estar unido a través de 2 aristas a  $C$ . Un caso posible es que esté unido a los nodos  $c_i$  y  $c_{i+2}$ , para algún  $i \in [2d]$ , ya que el ciclo impar que se forma es de largo  $2d+1$ . Llamaremos a los conjuntos unidos a este par de nodos como  $T_i$ .

Si definimos  $P_{min}^C$  como el camino más corto sobre el ciclo  $C$  que une los vecinos de  $v$ , sin contar sus extremos (similar para  $P_{max}^C$ ), tenemos que se formarán ciclos de largo  $|P_{min}^C| + 3$  y  $|P_{max}^C| + 3$ . Como  $|P_{min}^C| + |P_{max}^C| = 2d - 1$ , tenemos que la paridad de ambos caminos siempre será diferente, por lo que siempre se formará un ciclo impar, y como el camino más largo estará acotado superiormente por  $2d - 3$  (si no contamos los casos  $c_i$  con  $c_{i+1}$  que forman un triángulo y  $c_i$  con  $c_{i+2}$  que ya sabemos que está permitido), tendremos que cualquier ciclo impar que se forme será prohibido.

- El nodo  $v$  no puede tener 3 o más vecinos ya que, recordamos que si a un ciclo impar se le agrega una cuerda, se formará siempre un ciclo impar más pequeño, el cual estará siempre prohibido, por lo que a las configuraciones que son adyacentes con 2 aristas no podremos agregarles una arista extra para volverlas factibles.

En el caso del conjunto  $T_i$ , si agregamos una cuerda interior, formaríamos triángulos, y si agregamos una cuerda al ciclo exterior, se formaría un ciclo impar de largo menor que  $2d+1$ , por lo que tampoco será posible.

Observamos que los conjuntos  $T_i$  y  $D_i$  definidos anteriormente definen conjuntos estables ya que comparten un vecino común en  $C$  y no hay  $C_3$ , con lo que quedan definidos los conjuntos  $D$  y  $T$ , y queda probada la afirmación (a) y que los conjuntos  $D_i$  y  $T_i$ , para  $i \in [2d]$ , satisfacen las condiciones (b) y (c).

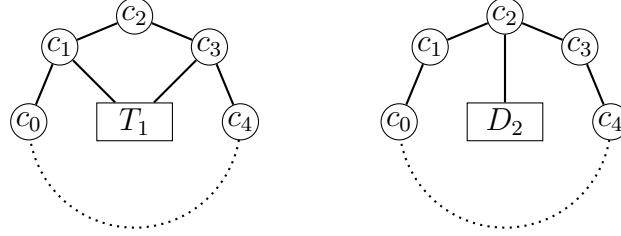


Figura 4.9: Ejemplos de conjuntos estables  $T_i$  y  $D_i$ ,  $i \in [6]$ . Estas son las mismas estructuras permitidas que en el caso  $d = 3$ .

Una vez vista la estructura que rodea a  $C$ , lo que haremos es ver como se disponen los nodos mas lejanos a  $C$ .

Afirmamos que

$$\text{no existen nodos a distancia } \geq 3 \text{ de } C. \quad (4.5)$$

La demostración de este hecho es totalmente análoga a la de (3.6).

Entonces solo existen nodos a lo más a distancia 2 de  $C$ , definimos el conjunto  $Y$  como los nodos a distancia 2 de  $C$ . Ahora pasaremos a comprender su estructura.

Afirmamos que si  $y \in Y \cap N(D)$ , entonces

$$\text{el nodo } y \text{ define una componente conexa aislada del subgrafo } G[Y]. \quad (4.6)$$

La demostración es análoga a (3.7), lo cual prueba (e).

Luego, solo nos queda ver el caso de los nodos en  $Y$  adyacentes solo a  $T$ , para esto tenemos una versión análoga a (4.3).

$$G[Y] \text{ es un grafo bipartito, donde para cada componente conexa, los nodos de la misma clase de bipartición tienen exactamente los mismos vecinos en } T. \quad (4.7)$$

La demostración de (4.7) es análoga a (4.3).

Finalmente, (4.7) nos permite concluir que cada componente conexa de  $Y$  es un nodo aislado o una arista, con lo que terminamos de probar la condición (d) y concluimos.  $\square$

### Estructura de adyacencia entre nodos en $T$ y $D$

Analizaremos a continuación la forma en que nodos de los conjuntos  $T$  y  $D$  pueden ser adyacentes.

Sea  $z, z' \in N(C)$  tal que  $zz' \in E(G)$ . Nuestro objetivo será ver los posibles conjuntos  $T_i$  o  $D_i$ , para algún  $i \in [8]$ , a los cuales  $z$  y  $z'$  pueden pertenecer.

Usaremos  $d_{min}$  y  $d_{max}$  para referirnos a  $d_{min}^C(z, z')$  y  $d_{max}^C(z, z')$ .

- Si  $z, z' \in T$ : si  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [2d]$ , notamos que se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in T_{i+2} \cup T_{i+2d-1}$ .

Para los casos no enlazados, tenemos que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 5$  mientras que los ciclos que se forman serán  $C_{d_{min}+4}$  y  $C_{d_{min}+4}$ , por lo que el ciclo impar más grande que se forme será de largo  $2d - 1$ , implicando que todos los ciclos impares que se formen serán prohibidos.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+2d}$ .

- Si  $z, z' \in D$ : si  $z \in D_i$ , para algún  $i \in [2d]$ , podemos descartar los casos cuando  $z' \in D_{i+2} \cup D_{i+2d-1}$  por formarse un ciclo  $C_5$ .

Para los demás casos, tenemos que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 1$  mientras que los ciclos que se forman serán  $C_{d_{min}+4}$  y  $C_{d_{min}+4}$ , implicando que  $z' \in D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+2d-2} \cup D_{i+2d}$ . Los ciclos impares que se formen para los demás casos serán prohibidos.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+2d-2} \cup D_{i+2d}$ .

- Si  $z \in T$  y  $z' \in D$ : si  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [2d]$ , notamos que se forman ciclos  $C_3$  para los casos  $z' \in D_i \cup D_{i+2}$ .

Para los casos no enlazados, tenemos que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 3$  mientras que los ciclos que se forman serán  $C_{d_{min}+4}$  y  $C_{d_{min}+4}$ , permitiendo que  $z' \in D_{i+3} \cup D_{i+2d}$ . Los ciclos impares que se formen para los demás casos serán prohibidos.

Esto deja como única posibilidad que  $z' \in D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+2d}$ .

Podemos resumir el análisis anterior en los siguientes lemas.

**Lema 4.23** *Sea  $z \in T_i$ , para algún  $i \in [2d]$ , y sea  $z' \in (T \cup D)$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces*

$$z' \in T_{i+1} \cup T_{i+2d} \cup D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+2d}.$$

**Lema 4.24** *Sea  $z \in D_i$ , para algún  $i \in [2d]$ , y sea  $z' \in (T \cup D)$ , tal que  $zz' \in E(G)$ , entonces*

$$z' \in T_{i+1} \cup T_{i+2d-2} \cup T_{i+2d} \cup D_{i+1} \cup D_{i+3} \cup D_{i+2d-2} \cup D_{i+2d}.$$

De los lemas anteriores podemos desprender el siguiente corolario.

**Corolario 4.25** *Sean nodos  $v \in T$  y  $w \in T \cup D$  tal que  $vw \in E(G)$ , entonces para todo  $z_1 \in N_C(w)$  existe  $z_2 \in N_C(v)$  tal que  $z_1 z_2 \in E(G)$ .*

## Estructura de adyacencia entre $D, T$ y nodos en $Y$

En esta sección entenderemos las maneras en que pueden ser adyacentes los nodos  $y \in Y$  a los conjuntos  $D, T$ . Es fácil ver que no existen problemas cuando  $y$  es adyacente exclusivamente a un conjunto (sea  $D_i$  o  $T_i$ , para algún  $i \in [2d]$ ), por lo que nos concentraremos en los casos donde sea adyacente a más de uno.

Para  $y \in Y$ , sean  $z, z' \in N(y) \setminus Y$ , supondremos que estos nodos no poseen los mismos vecinos en  $C$ . Notamos que  $zyz'$  es un  $P_3$  inducido ya que no hay  $C_3$ . Nuestro objetivo será ver las configuraciones posibles para  $z, z'$ .

Usaremos  $d_{min}$  y  $d_{max}$  para referirnos a  $d_{min}^C(z, z')$  y  $d_{max}^C(z, z')$ .

- Si  $z, z' \in T$ : Asumimos que  $z \in T_i$ , para  $i \in [2d]$ . Notamos que si  $N_C(z')$  es adyacente a uno de los nodos en  $N_C(z)$ , formaríamos un  $C_5$  inducido, lo que no puede ocurrir, por lo que descartamos los casos enlazados  $T_{i+1}$ ,  $T_{i+2d}$ ,  $T_{i+3}$  y  $T_{i+2d-2}$ .

Para los casos no enlazados, tenemos que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 5$ , que es impar, y los ciclos formados serán  $C_{5+d_{min}}$  y  $C_{5+d_{max}}$ , por lo que siempre habrá un ciclo impar formado por alguno de los 2 caminos, y todos serán de largo menor que  $2d - 1$ , por lo que estarán prohibidos.

Esto nos dice que  $z' \in T_{i+2} \cup T_{i+2d-1}$ , notando que  $y \notin N(T_{i+2}) \cap N(T_{i+2d-1})$  porque se forma un  $C_{2d-1}$ .

- Si  $z, z' \in D$ : Asumimos que  $z \in D_i$ , para  $i \in [2d]$ . Vemos que  $N_C(z')$  no es adyacente a los nodos en  $N_C(z)$ , ya que formaríamos un  $C_5$  inducido, por lo que descartamos los casos  $D_{i+1}$  y  $D_{i+2d}$ .

Para los casos no enlazados, tenemos que  $d_{min} + d_{max} = 2d - 1$ , que es impar, y los ciclos formados serán  $C_{5+d_{min}}$  y  $C_{5+d_{max}}$ , por lo que cuando  $d_{max} = 2d - 2$  formaremos un ciclo de largo  $2d + 3$  que está prohibido, lo cual descarta los casos donde  $z'$  pertenece a  $D_{i+2}$  o  $D_{i+2d-1}$ . Para cuando  $d_{max} = 2d - 4$  no habrá problema, pero para casos donde  $d_{max} \leq 2d - 5$  siempre se formará un ciclo de largo prohibido.

Esto nos dice que  $z' \in D_{i+4} \cup D_{i+2d-3}$ , notando que  $y \notin N(D_{i+4}) \cap N(D_{i+2d-3})$  porque se forma un  $C_{2d-3}$ .

- Si  $z \in T$  y  $z' \in D$ : Asumimos que  $z \in T_i$ , para  $i \in [2d]$ . Vemos que  $N_C(z')$  no puede ser adyacente a los nodos en  $N_C(z)$ , por lo que descartamos  $D_{i+2d}$ ,  $D_{i+1}$  y  $D_{i+3}$ .

Para los casos no enlazados, notamos que  $d_{max} + d_{min} = 2d - 3$ , y los ciclos que se forman son  $C_{5+d_{max}}$  y  $C_{5+d_{min}}$ , por lo que el caso donde  $d_{max} = 2d - 4$  ( $T_{i+4}$  y  $T_{i+2d-1}$ ) generará un ciclo de largo  $2d + 1$  y estará permitido, pero para los demás, siempre se formará un ciclo impar prohibido.

Esto implica que  $z' \in D_i \cup D_{i+2} \cup D_{i+4} \cup D_{i+2d-1}$ . De manera análoga, si  $z \in D_i$ , tenemos que  $z' \in T_{i+2} \cup T_i \cup T_{i+2d-1} \cup T_{i+2d-3}$ .

Denominaremos nodos de tipo A a los  $y \in Y$  tal que  $N_{V(G) \setminus Y}(y) \subseteq T$ , nodos de tipo B a los  $y \in Y$  tal que  $N(y) \setminus Y \subseteq D$  y nodos de tipo C a los  $y \in Y$  que posean vecinos tanto en  $T$  como en  $D$ .

Podemos resumir el análisis anterior en los siguientes lemas.

**Lema 4.26** *Sea  $y \in Y$ , nodo de tipo A o tipo C, adyacente a conjuntos  $T_i$  y  $T_j$  distintos con  $i, j \in [2d]$ . Entonces existe  $i^* \in [2d]$  tal que  $y \in N(T_{i^*}) \cap N(T_{i^*+2})$*

De donde se desprende inmediatamente el siguiente resultado.

**Corolario 4.27** *Sea  $y \in Y$  un nodo de tipo A, tenemos que para todo  $z, z' \in N(y)$ , existe*



$v \in N_C(z)$  tal que  $v \in N_C(z')$ .

*Esto significa que todos los vecinos de  $y$  tendrán un vecino común en el ciclo  $C$ .*

**Lema 4.28** *Sea  $y \in Y$  nodo de tipo B o tipo C, adyacente a conjuntos  $D_i$  y  $D_j$  distintos con  $i, j \in [6]$ . Entonces existe  $i^* \in [2d]$  tal que  $y \in N(D_{i^*}) \cap N(D_{i^*+4})$ .*

**Lema 4.29** *Sea  $y \in Y \cap N(D_i)$ , para  $i \in [2d]$ , un nodo de tipo C adyacente a un conjunto  $T_j$ , para  $j \in [6]$ . Entonces  $j \in \{i, i+2, i+2d-1, i+2d-3\}$ .*

*Debido al Lema 4.26,  $y$  no puede pertenecer a  $N(T_i) \cap N(T_{i+2d-3})$ ,  $N(T_{i+2}) \cap N(T_{i+2d-1})$  ni  $N(T_{i+2}) \cap N(T_{i+2d-3})$ .*

*Intercambiando los roles de  $T$  y  $D$ , tendremos que si  $y \in Y \cap N(T_i)$ , para  $i \in [2d]$ , es un nodo de tipo C adyacente a un conjunto  $D_j$ , para  $j \in [2d]$ . Entonces  $j \in \{i, i+2, i+4, i+2d-1\}$ .*

*Debido al Lema 3.26,  $y$  no puede pertenecer a  $N(D_i) \cap N(D_{i+2})$ ,  $N(D_{i+2}) \cap N(D_{i+4})$  ni  $N(D_{i+4}) \cap N(D_{i+2d-1})$ .*

Recordando la Proposición 3.21 (e), tenemos que los nodos de tipo B y C son nodos aislados al ser vistos como subgrafo inducido de  $G[Y]$ , por lo que ya poseemos toda la información necesaria de ellos con los Lemas 4.28, 4.29 y 4.29, sin embargo, los nodos de tipo A pueden formar aristas, por lo que debemos analizar las distintas combinaciones de adyacencia para ellos también.

**Lema 4.30** *Para  $y_1, y_2 \in Y$  nodos de tipo A tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , donde  $y_1 \in N(T_i)$  y sea  $z' \in N(y_2) \setminus Y$ , para  $i \in [2d]$ . Entonces  $z' \in T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+2d-2} \cup T_{i+2d}$ .*

*Debido al Lema 4.26,  $y_2$  no puede pertenecer a  $N(T_{i+3}) \cap N(T_{i+2d-2})$ ,  $N(T_{i+1}) \cap N(T_{i+2d-2})$  ni  $N(T_{i+3}) \cap N(T_{i+2d})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z \in N(y_1) \cap T_i$ , notamos que si  $z'$  es adyacente a  $c_i$  o  $c_{i+2}$ , formaríamos un  $C_5$  (incluso si no fuera inducido, la única manera que no lo sea es que  $zz' \in E(G)$ , lo cual forma un  $C_3$  que también está prohibido), por lo que descartamos los casos donde  $z'$  pertenezca a  $T'_i, T'_{i+2}$  y  $T'_{i+2d-1}$ .

Para los conjuntos no enlazados, tenemos que  $d_{max} + d_{min} = 2d - 5$ , por lo que siempre van a diferir en paridad, y los ciclos que se formarán serán  $C_{6+d_{min}}$  y  $C_{6+d_{max}}$ , cuando  $d_{max} = 2d - 5$  el ciclo impar que se forma será de largo  $2d + 1$  y no habrá problema, pero para el resto de los casos, siempre existirá un ciclo impar de tamaño prohibido, por lo que serán descartados.

Esto hace que  $z'$  pueda pertenecer a  $T_{i+1}, T_{i+3}, T_{i+2d-2}$  y  $T_{i+2d}$ . □

Del lema anterior se desprende el siguiente corolario directo.

**Corolario 4.31** *Sean  $y_1 \in T \cap N(T_i)$  e  $y_2 \in Y$  nodos de tipo A donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , para  $i \in [2d]$ . Entonces para todo  $v \in N(y_2) \setminus Y$ , existe  $c \in N_C(v)$  tal que  $c \in N_C(\{c_i, c_{i+2}\})$ .*

A continuación, le pondremos nombres a algunos conjuntos de nodos para llamarlos más cómodamente al enunciar el algoritmo.

**Definición 4.32** Al conjunto de nodos  $y_1, y_2 \in Y$  de tipo  $A$  tal que  $y_1 y_2 \in E(G)$ , que sean adyacentes respectivamente a los conjuntos  $T_i$  y  $T_{i+3}$ , para  $i \in [2d]$ , se les denominará  $Y_i^A$ .

Es importante notar que cada conjunto  $Y_i^A$  es bipartito, con clases de bipartición  $N_{Y_i^A}(T_i)$  y  $N_{Y_i^A}(T_{i+3})$ .

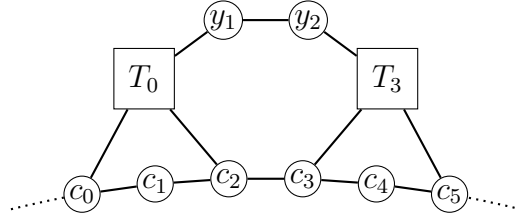


Figura 4.10: Ejemplo de nodos  $y_1, y_2 \in Y_0^A$ . Esta estructura también se encuentra en el caso  $d = 3$ .

Para estos nodos, tenemos la siguiente propiedad.

**Lema 4.33** Sea  $i \in [2d]$ , para cada conjunto  $Y_i^A$  existen nodos  $t_i \in T_i$  y  $t_{i+3} \in T_{i+3}$  tal que:

$$N_{Y_i^A}(t_i) \cup N_{Y_i^A}(t_{i+3}) = Y_i^A,$$

es decir, todos los nodos de  $Y_i^A$  deben ser adyacentes a  $t_i$  o  $t_{i+3}$ .

DEMOSTRACIÓN. Análogo a la demostración del Lema 3.31. □

**Definición 4.34** Al conjunto de nodos  $y \in Y$  de tipo  $B$  que sean adyacentes a los conjuntos  $D_i$  y  $D_{i+4}$ , para algún  $i \in [2d]$ , se les denominará  $Y_i^B$ .

El caso donde el nodo  $y \in Y$  es adyacente respectivamente a  $D_i$  y  $D_{i+2d-2}$  está incluido en esta definición, ya que formarían el conjunto  $Y_{i^*}^B$  para  $i^* = i + 2d - 2$ .

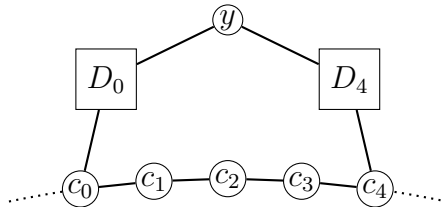


Figura 4.11: Ejemplo de nodo  $y \in Y_0^B$ . A diferencia del caso  $d = 3$ , ahora son adyacentes a conjuntos  $D_i$  y  $D_{i+4}$ , para algún  $i \in [2d]$ .

**Definición 4.35** Al conjunto de nodos  $y \in Y$  de tipo  $C$  que sean adyacentes a los conjuntos  $T_i$  y  $D_{i+4}$ , para algún  $i \in [2d]$ , se les denominará  $Y_i^C$ , mientras que a los que sean adyacentes a  $T_i$  y  $D_{i+2d-1}$  (caso simétrico) se les denominará  $\bar{Y}_i^C$ .



Figura 4.12: Ejemplo de nodos  $y_1 \in Y_0^C$  e  $y_2 \in \bar{Y}_0^C$ . Esta estructura también se encuentra en el caso  $d = 3$ .

Para este conjunto de nodos tenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.36** Sea  $i \in [2d]$ , para cada conjunto  $Y_i^C$  existen nodos  $t_i \in T_i$  y  $d_{i+4} \in D_{i+4}$  tal que:

$$N_{Y_i^C}(t_i) \cup N_{Y_i^C}(d_{i+4}) = Y_i^C$$

Esto también es válido para cada conjunto  $\bar{Y}_i^C$ , donde existen nodos  $\bar{t}_i \in T_i$  y  $d_{i+2d-1} \in D_{i+2d-1}$  que cumplen  $N_{\bar{Y}_i^C}(\bar{t}_i) \cup N_{\bar{Y}_i^C}(d_{i+2d-1}) = \bar{Y}_i^C$ .

DEMOSTRACIÓN. Análogo a la demostración del Lema 3.35. □

Con esto, concluimos el análisis de adyacencia para el conjunto  $Y$ .

## 4.2. Algoritmo de 3-coloreo

Sea  $G$  un grafo  $(P_{2d+3}, C_{2e-1})$ -free, si  $G$  es bipartito, implica automáticamente que puede colorearse con dos colores, por lo que podemos concluir inmediatamente. En consecuencia, nos concentraremos en el caso donde  $G$  no es bipartito. Entonces, existen ciclos impares, los cuales deben ser ciclos  $C_{2d+3}$  o  $C_{2d+1}$  inducidos, debido a que los ciclos impares más pequeños están prohibidos.

Gracias al Lema 3.2 y la Proposición 3.5 nos basta con determinar un algoritmo que decida la colorabilidad de un grafo  $(P_{2d+3}, C_{2e-1})$ -free que es minimal, al cual por comodidad seguiremos llamando  $G$ .

De manera análoga a la Sección 3.2, fijamos un ciclo  $C_t$  donde  $t = 2d + 3$  si existe algún ciclo inducido de largo 9, en su defecto,  $t = 2d + 1$ . También definiendo la paleta inicial donde para todo  $v \in V(G)$ ,  $L_{inicial}(v) = \{1, 2, 3\}$ , a partir de la cual, generaremos nuestra familia de paletas  $\{L_i\}_{i \in I}$ , que será el resultado de pintar el ciclo  $C_t$  de todas las maneras posibles (realizando un posterior update y descartando los coloreos que no sean factibles).

Recordamos que como identificamos el ciclo base  $C_t$ , podemos hacer uso de nuestros resultados estructurales, Proposiciones 4.4 y 4.22, por lo que en nuestro grafo  $G$  podemos identificar los conjuntos  $C, T, T', S$  e  $Y$  en caso de que  $t = 2d + 3$  y en el caso contrario, los conjuntos  $C, T, D$  e  $Y$ , donde en ambos casos el conjunto  $C$  está dado por el ciclo  $C_t$ .

Gracias al Lema 3.37, podemos reemplazar cada paleta  $L_i$  con una subpaleta ideal, sin alterar la colorabilidad de la tupla  $(G, L_i)$ , para todo  $i \in I$ .

Le entregaremos a nuestro algoritmo como entrada la tupla  $(G, L_i)$ , donde  $G$  es un grafo  $(P_{2d+3}, C_{2e-1})$ -free, no bipartito y minimal, y  $L_i$  es una de las paletas de la familia  $\{L_i\}_{i \in I}$ , que es paleta ideal.

El objetivo será el mismo que en la Sección 3.2, intentar que nuestro problema de 3-coloreo se reduzca a resolver un problema de 2-lista-coloreo, para así lograr concluir con el Teorema 2.3.

### 4.2.1. Existencia de un $C_{2d+3}$

Sea  $(G, L)$  la tupla de entrada de nuestro algoritmo, donde  $G$  es un grafo  $(P_{2d+3}, C_{2e-1})$ -free donde existe un ciclo  $C_{2d+3}$  inducido y  $L$  es una paleta ideal. Una vez encontrado el  $C_{2d+3}$  inducido, también identificaremos los conjuntos de la Proposición 4.4.

A continuación veremos algunos lemas para entender como se ve una paleta ideal  $L$  en la estructura del grafo  $G$ .

**Lema 4.37** Sean  $L$  una paleta ideal e  $y \in Y^*$ . Si  $|L(y)| = 3$ , entonces existe  $i \in [2d + 2]$  tal que  $y \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $y \in Y^*$  tal que  $|L(y)| = 3$ , veamos los posibles casos.

(a) Si  $y \in N(S)$ :

Sea  $s \in N(y) \cap S$ , sin pérdida de generalidad  $s \in S_i$ , para algún  $i \in [2d+2]$ .

Notamos que como  $|L(y)| = 3$ , significa que ningún nodo en  $N(y)$  puede estar pintado, de lo contrario, el update hubiera quitado algún color de  $L(y)$ . Debido a esto, los nodos que hayan sido pintados en  $N_{C_{2d+3}}(s)$  deben estar pintados del mismo color, que denominaremos  $j$ .

Ocupamos directamente el Corolario 4.11, que dice cualquier nodo  $z \in N(y)$  compartirá un vecino con  $s$  en el ciclo  $C_{2d+3}$ , en particular con el nodo  $s$ . Además, todos los vecinos de  $z$  en el ciclo  $C_{2d+3}$  están pintados del mismo color, por lo que concluimos que deben ver el mismo color que el nodo  $s$ . Luego, tenemos que existe  $j \in L(y)$  tal que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y)} L(v),$$

y además  $|L(y)| = 3$ , lo que es una contradicción con que  $L$  es paleta ideal, por lo que dicha configuración no puede ocurrir.

(b) Si  $y$  es vecino de un único conjunto  $T'_i$ , para  $i \in [2d+2]$ :

Notamos que si  $y$  es adyacente a un conjunto único  $T'_i$ , para  $i \in [2d+2]$ , como  $|L(y)| = 3$ , significa que ningún nodo en  $N(y)$  puede estar pintado. Debido a esto, los nodos  $c_i$  y  $c_{i+2}$  deben estar pintados del mismo color, que denominaremos  $j$ . Como suponemos que  $N(y) \subseteq T'_i$ , se cumple que existe  $j \in L(y)$  tal que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y)} L(v),$$

con lo que llegamos a la misma contradicción de (a).

Luego, por el Lema 4.8, existe un  $i \in [2d+2]$ , tal que  $y \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , con lo cual concluimos.  $\square$

A continuación analizaremos el conjunto  $Y \setminus Y^*$ .

Con respecto a las paletas de los nodos en  $N(C) \setminus C$ , es importante notar que estos nodos pueden quedar pintados debido al update, pero no necesariamente por ver dos colores distintos en el ciclo, sino que puede ser ocasionado por nodos en  $V(G) \setminus C$  que fueron pintados, lo cual será importante en suposiciones de lemas posteriores.

**Lema 4.38** Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus (Y^* \cup Y^S \cup Y^{T'} \cup Y^{ST'} \cup Y^{T'S})$ , donde  $y_1, y_2 \in E(G)$ , y sea  $L$  una paleta ideal tal que  $|L(y_1)| = 3$ . Si  $|L(y_2)| = 2$  y para todo  $v \in N(y_2) \setminus Y$  se tiene que  $v$  solo ve un color en el ciclo  $C$ , entonces existe  $i \in [2d+2]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga al Lema 3.39.  $\square$

Definiremos las mismas condiciones  $(CF)$  y  $(CC)$  de las Definiciones 3.40 y 3.41.

**Lema 4.39** Sea  $y_1 \in Y \setminus Y^*$  y sea  $L$  paleta ideal. Si  $y_1$  no cumple  $(CF)$  y  $|L(y_1)| = 3$ , entonces existe  $i \in [2d + 2]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga al Lema 3.42. □

**Lema 4.40** Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus Y^*$  y sea  $L$  paleta ideal tal que  $|L(y_1)| = 3$ . Si no se cumple  $(CC)$ , entonces existe  $i \in [2d + 2]$  tal que  $y_1, y_2 \in Y_i^S \cup Y_i^{T'} \cup Y_i^{ST'} \cup Y_i^{T'S}$  o  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga al Lema 3.43. □

**Lema 4.41** Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus (Y^* \cup Y^S \cup Y^{T'} \cup Y^{ST'} \cup Y^{T'S})$ , donde  $y_1, y_2 \in E(G)$  y donde no existe  $i \in [2d + 2]$  tal que  $y_1 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ , y sea  $L$  paleta ideal tal que  $|L(y_1)| = 3$ . Si  $y_1$  cumple  $(CF)$  y se cumple  $(CC)$ , entonces  $|L(y_2)| = 3$  y  $y_2 \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$  para algún  $i \in [8]$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga al Lema 3.43. □

Gracias a los lemas anteriores, sabemos qué conjuntos pueden tener nodos con listas de tamaño tres al momento de entrar al algoritmo.

## Algoritmo de 3-coloreo

A continuación veremos el algoritmo. Recordemos que el input para este algoritmo es una tupla  $(G, L_{i^*})$ , donde  $G$  es un grafo de la clase  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free, conexo y minimal, y  $L_{i^*}$  es una paleta ideal perteneciente a la familia  $\{L_i\}_{i \in I}$ .

---

**Algorithm 3** Coloreo  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free

---

```

1: procedure  $ALG_{C_{2d+3}}(G, L_{i^*})$ 
2:    $\mathcal{L}_f \leftarrow \emptyset$ 
3:    $C \leftarrow$  ciclo  $C_{2d+3}$ 
4:   for  $i \in [2d+2]$  do
5:      $\bar{T} \leftarrow t_i \in T'_i$  arbitrario
6:      $\bar{S} \leftarrow v_i^*$  y  $v_{i+3}^*$  del Lema 4.21 para  $F = S$ 
7:      $\bar{S}\bar{T} \leftarrow v_i^*$  y  $v_{i+3}^*$  del Lema 4.21 para  $F = ST'$ 
8:      $\bar{T}\bar{S} \leftarrow v_i^*$  y  $v_{i+3}^*$  del Lema 4.21 para  $F = T'S$ 
9:      $\bar{T}\bar{T} \leftarrow v_i^*$  y  $v_{i+3}^*$  del Lema 4.21 para  $F = T'$ 
10:  end for
11:  Pintamos los nodos en  $\bar{T}$  ( $T$ -coloreo),  $\bar{S}$  ( $S$ -coloreo),  $\bar{S}\bar{T}$  ( $ST'$ -coloreo),  $\bar{T}\bar{S}$  ( $T'S$ -coloreo) y  $\bar{T}\bar{T}$  ( $T'$ -coloreo) de todas las maneras posibles, esto genera la familia de paletas  $\mathcal{L}$ , subpaletas de  $L_{i^*}$ .
12:  for  $L \in \mathcal{L}$  do
13:     $L \leftarrow update(L)$ 
14:    if  $L$  es factible then
15:       $L \leftarrow ideal(L)$ 
16:       $\mathcal{L}_f \leftarrow \mathcal{L}_f \cup L$ 
17:    end if
18:  end for
19:  return  $(G, \mathcal{L}_f)$ 
20: end procedure

```

---

**Proposición 4.42** Para toda  $L \in \mathcal{L}_f$ , paletas retornadas del algoritmo, se cumple que para todo  $v \in V(G)$ ,  $|L(v)| \leq 2$ .

DEMOSTRACIÓN. El resultado es consecuencia directa de los lemas siguientes.

**Lema 4.43** Para todo  $L \in \mathcal{L}_f$  y para todo  $y \in Y^*$ ,  $|L(y)| \leq 2$ .

**Lema 4.44** Para todo  $L \in \mathcal{L}_f$  y para todo  $y \in Y \setminus Y^*$ ,  $|L(y)| \leq 2$ .

Esto debido a que es directo que los nodos en  $V(G) \setminus Y$  tienen listas de tamaño menor estricto que tres, ya que el ciclo  $C_{2d+3}$  está pintado y le quita al menos un color a todos los nodos adyacentes a él.

Ambos lemas serán probados posteriormente. □

Gracias a la Proposición 4.42, podemos utilizar el Teorema 2.3 para resolver el problema

de *2-lista-coloreo* para cada paleta  $L \in \mathcal{L}_f$ . Si es que logramos encontrar un *2-lista-coloreo* factible para alguna de ellas, dicho coloreo será también un *3-coloreo*, por lo que el grafo será *3-coloreable* y tendremos el coloreo factible. En caso de que todas las paletas sean infactibles para el *2-lista-coloreo*, entonces concluimos que el grafo no era *3-coloreable* en primer lugar.

### **Demostración del Lema 4.43**

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\hat{L} \in \mathcal{L}_f$  e  $y \in Y^*$ , supongamos que  $|\hat{L}(y)| = 3$ . Por el Lema 4.37, sabemos que existe  $i \in [2d + 2]$  tal que  $y \in N(T'_i) \cap N(T'_{i+2})$ .

Sea  $L \in \mathcal{L}_f$ , podemos utilizar el Lema 4.12 directamente, tenemos que  $y$  será completo a  $T'_i$ , en particular, será adyacente al nodo  $t_i \in \bar{T}$  que fue pintado en el *T-coloreo*. Esto significa que  $y$  debió haber perdido un color en el update posterior, lo cual es una contradicción.  $\square$

### **Demostración del Lema 4.44**

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la del Lema 3.47.  $\square$



### 4.2.2. Existencia de un $C_{2d+1}$ , libre de $C_{2d+3}$ y prohibición de $C_8$ .

Sea  $(G, L)$  la tupla de entrada de nuestro algoritmo, donde  $G$  es un grafo  $(P_{2d+3}, C_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free donde existe un ciclo  $C_{2d+1}$  inducido y  $L$  es una subpaleta ideal de una paleta  $L_i$ ,  $i \in I$ . Una vez encontrado el  $C_{2d+1}$  inducido, también identificaremos los conjuntos de la Proposición 4.22.

A continuación veremos algunos lemas para entender como se ve una paleta ideal  $L$  en la estructura del grafo  $G$ .

**Lema 4.45** Sean  $L$  una paleta ideal e  $y \in Y^*$ . Si  $|L(y)| = 3$ , entonces existe  $i \in [2d]$  tal que  $y \in Y_i^B \cup Y_i^C \cup \overline{Y}_i^C$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe  $\hat{y} \in Y^*$  tal que  $|L(\hat{y})| = 3$ .

- (a) Si  $\hat{y}$  es un nodo de tipo B. Si existe un único  $i \in [2d]$  tal que  $\hat{y} \in N(D_i)$ , notamos que al conjunto  $D_i$  le faltará un color en su lista, que es el color que tiene el nodo  $c_i$ , digamos  $j$ . Luego,  $j \in L(\hat{y}_1)$  pero

$$j \notin \bigcup_{v \in N(\hat{y})} L(v),$$

lo que es una contradicción ya que  $L$  es paleta ideal.

Luego, por el Lema 4.28, si  $\hat{y}$  es adyacente a conjuntos  $D_i$  y  $D_j$ ,  $j \neq i$ , entonces existe  $i^* \in [2d]$  tal que  $\hat{y} \in N(D_{i^*}) \cap N(D_{i^*+4})$ , es decir,  $\hat{y} \in Y_{i^*}^B$ .

- (b) Si  $\hat{y}$  es un nodo de tipo C. Supongamos que existe  $i \in [2d]$  tal que  $\hat{y} \in N(T_i)$ . Como  $|L(\hat{y})| = 3$ , sabemos que  $T_i$  ve un único color en el ciclo  $C_{2d+1}$ , llamemos a este color  $j$ . Si  $\hat{y} \in N(T_i) \cap N(D_i)$  y a la vez  $\hat{y} \notin N((T \cup D) \setminus (T_i \cup D_i))$ , entonces  $j \in L(\hat{y})$  y

$$j \notin \bigcup_{v \in N(\hat{y})} L(v),$$

lo que es una contradicción con que  $L$  es paleta ideal.

Notamos que el caso cuando  $\hat{y} \in N(T_i) \cap N(D_{i+2})$  e  $\hat{y} \notin N((T \cup D) \setminus (T_i \cup D_{i+2}))$  es simétrico al anterior, y no pueden ocurrir al mismo tiempo por el Lema 4.28.

Esto nos deja como los únicos casos posibles, si es que  $\hat{y}$  es nodo de tipo C, que exista  $i \in [2d]$  tal que  $\hat{y} \in Y_i^C$  o  $\hat{y} \in \overline{Y}_i^C$ .

- (c) Si  $\hat{y}$  es un nodo de tipo A. Supongamos que existe un único  $i \in [2d]$  tal que  $\hat{y} \in N(T_i)$ . Como  $|L(\hat{y})| = 3$ , el conjunto  $T_i$  debe ver un solo color en el ciclo  $C_{2d+1}$ , digamos  $j$ . Luego,  $j \in L(\hat{y})$  y

$$j \notin \bigcup_{v \in N(\hat{y})} L(v),$$

lo que es una contradicción ya que  $L$  es paleta ideal.

En caso de que sea adyacente a conjuntos  $T_i$  y  $T_j$ , con  $j \neq i$ , por el Lema 4.26 tenemos que existe  $i^* \in [2d]$  tal que  $\hat{y} \in N(T_{i^*}) \cap N(T_{i^*+2})$ .

Sabemos que tanto  $T_i$  como  $T_{i+2}$  deben ver solo un color en el  $C_{2d+1}$ , y como ambos comparten a  $c_{i+2}$  como vecino, el color que ven debe ser el mismo, digamos  $j$ . Luego,  $j \in L(\hat{y})$  y

$$j \notin \bigcup_{v \in N(\hat{y})} L(v),$$

lo que es una contradicción ya que  $L$  es paleta ideal, por lo que  $\hat{y}$  no puede ser un nodo tipo A. □

A continuación, tenemos resultados para nodos  $y \in Y \setminus Y^*$ .

**Lema 4.46** Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus Y^*$  nodos de tipo A, donde  $y_1 y_2 \in E(G)$ , y sea  $L$  paleta ideal. Entonces no puede ocurrir que  $|L(y_1)| = 3$  y  $|L(y_2)| = 3$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $|L(y_1)| = 3$  y  $|L(y_2)| = 3$ . Como  $y_1$  tiene lista de tamaño 3, los nodos en  $N(y_1) \setminus Y$  no pueden estar pintados, por lo que cada uno debe mirar un solo color en el ciclo  $C_{2d+1}$ . Lo mismo ocurre con el nodo  $y_2$ .

Sabiendo lo anterior, y haciendo uso del Corolario 4.27, tenemos que el color que mira cada uno de los distintos conjuntos adyacentes a  $y_1$  debe ser el mismo, ya que todo par de nodos en  $N(y_1)$  debe tener un vecino común en el ciclo  $C_{2d+1}$ , llamemos a dicho color  $j$ . Análogamente para  $y_2$ , llamemos a dicho color  $k$ .

Finalmente, haciendo uso del Corolario 4.31, concluimos que  $j \neq k$ , por lo que

$$j \notin \bigcup_{v \in N(y_1) \setminus Y} L(v), \quad k \notin \bigcup_{v \in N(y_2) \setminus Y} L(v),$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que  $L$  es una paleta ideal. □

**Lema 4.47** Sean  $y_1, y_2 \in Y \setminus Y^*$  nodos de tipo A, donde  $y_1, y_2 \in E(G)$ , y sea  $L$  paleta ideal. Si  $y_1 \in N(T_i)$ , para algún  $i \in [2d]$ , e  $y_2 \notin N(T_{i+3}) \cup N(T_{i+2d-2})$ , entonces no puede ocurrir que  $|L(y_1)| = 3$  y  $|L(y_2)| = 2$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la del Lema 3.50. □

## Algoritmo de $\beta$ -coloreo y prohibición del ciclo $C_8$ .

En la presente subsección, se prohibirá adicionalmente el ciclo  $C_8$  para lograr elaborar un algoritmo que logre encontrar un  $\beta$ -coloreo factible (o concluir que no existe) en tiempo polinomial. La razón detrás de esto es porque no fue posible desarrollar una manera de que los nodos  $y \in Y^B$  cumplan que  $|L(y)| < 3$ .

El algoritmo presentado a continuación recibirá de input una tupla  $(G, L_{i^*})$ , donde  $G$  es un grafo de la clase  $(P_{2d+3}, C_{2d+3}, C_{\leq 2d-1}, C_8)$ -free, conexo y minimal, y  $L_{i^*}$  es una paleta ideal perteneciente a la familia  $\{L_i\}_{i \in I}$ .

---

### Algorithm 4 Coloreo $(P_{2d+3}, C_{2d+3}, C_{\leq 2d-1}, C_8)$ -free

---

```

1: procedure  $ALG_{C_{2d+1}}(G, L_{i^*})$ 
2:    $\mathcal{L}_f \leftarrow \emptyset$ 
3:    $C \leftarrow$  ciclo  $C_{2d+1}$ 
4:   for  $i \in [2d]$  do
5:      $\bar{A} \leftarrow t_i$  y  $t_{i+3}$  del Lema 4.33
6:      $\bar{C}_1 \leftarrow t_i$  y  $d_{i+4}$  del Lema 4.36
7:      $\bar{C}_2 \leftarrow t_i$  y  $d_{i+5}$  del Lema 4.36
8:   end for
9:   Pintamos los nodos en  $\bar{A}$  ( $A$ -coloreo),  $\bar{C}_1$  y  $\bar{C}_2$  ( $C$ -coloreo) de todas las maneras posibles, esto genera la familia de paletas  $\mathcal{L}$ , subpaletas de  $L_{i^*}$ .
10:  for  $L \in \mathcal{L}$  do
11:     $L \leftarrow update(L)$ 
12:    if  $L$  es factible then
13:       $\mathcal{L}_f \leftarrow \mathcal{L}_f \cup L$ 
14:    end if
15:  end for
16:  return  $(G, \mathcal{L}_f)$ 
17: end procedure

```

---

**Proposición 4.48** Para toda  $L \in \mathcal{L}_f$ , subpaletas retornadas del algoritmo, se cumple que para todo  $v \in V(G)$ ,  $|L(y)| \leq 2$ .

DEMOSTRACIÓN. Es directo que los nodos en  $V(G) \setminus Y$  tienen listas de tamaño menor estricto que 3, ya que el ciclo  $C_{2d+1}$  fue pintado, y le quita al menos un color a los nodos que son adyacentes a él. Gracias a los Lemas 4.45, 4.46 y 4.47 sabemos que los únicos nodos en  $Y$  que pueden tener listas de tamaño tres son los que pertenecen a  $Y_i^A \cup Y_i^B \cup Y_i^C \cup \bar{Y}_i^C$  para algún  $i \in [2d]$ . El conjunto  $Y^B$  es vacío debido a la que no pueden haber ciclos  $C_8$  inducidos.

Para los casos faltantes tenemos el siguiente lema.

**Lema 4.49** Sea  $i \in [2d]$  y sean  $y \in Y_i^A \cup Y_i^C \cup \bar{Y}_i^C$  y  $L \in \mathcal{L}_f$ . Entonces  $|L(y)| \leq 2$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue directamente de los Lemas 4.33 y 4.36, y de los procesos de  $A$ -coloreo y  $C$ -coloreo en el algoritmo.  $\square$

□

Gracias a la Proposición 4.48 podemos utilizar el Teorema 2.3 para resolver el problema de *2-lista-coloreo* para cada paleta  $L \in \mathcal{L}_f$ . Si es que logramos encontrar un *2-lista-coloreo* factible para alguna de ellas, dicho coloreo será también un *3-coloreo*, por lo que el grafo será *3-coloreable* y tendremos el coloreo factible. En caso de que todas las paletas sean infactibles para el *2-lista-coloreo*, entonces concluimos que el grafo no era *3-coloreable* en primer lugar, esto debido a que nuestra familia  $\mathcal{L}_f$  contiene como subpaletas a cualquier coloreo factible.

# Capítulo 5

## Complejidad

En el presente capítulo analizaremos la complejidad de los algoritmos presentados en este trabajo. Sea  $d \in \mathbb{N}$  tal que  $d \geq 3$ .

Chequear si un grafo es bipartito puede hacerse en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$ . Eliminar nodos en el proceso de *reducción* se puede hacer en  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ .

Sea  $k \in \mathbb{N}$  fijo, para encontrar un ciclo de largo  $k$  existe la técnica de *Color-Coding* de Alon, Yuster y Zwick [1], que puede encontrar el ciclo en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^\omega \log(|V(G)|))$ , donde  $\omega < 2,376$  es el exponente de la multiplicación de matrices.

Una vez encontrado el ciclo base  $C$ , se pueden encontrar los conjuntos  $T, T', S, Y$  (en el caso que  $C_{2d+3}$ ) o  $T, D, Y$  (en el caso que  $C_{2d+1}$ ) en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$ . El proceso de reducción puede llevarse a cabo en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$  debido a que sabemos que cada componente conexa de  $G[Y]$  que no sea un nodo aislado cumple con las hipótesis de esta transformación.

El proceso de *update* de una paleta  $L$  puede ser realizado en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$ , mientras que el chequeo de factibilidad de la paleta puede hacerse en  $\mathcal{O}(|V(G)|)$ . El coloreo del ciclo base  $C$  se puede hacer en tiempo constante debido a que es un ciclo de largo fijo.

Encontrar una subpaleta ideal  $L'$  de  $L$  puede realizarse en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^2)$ .

En los Lemas 3.20, 3.31, 3.33 y 3.35 (y en los lemas 4.21, 4.33 y 4.36 que son sus similares) se debe encontrar vecindades minimales, lo cual puede hacerse en  $\mathcal{O}(|V(G)|^2)$ . Finalmente la aplicación del Teorema 2.3 se puede hacer en  $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$ .

Es directo que los procesos descritos terminan, y pueden realizarse en tiempo  $\mathcal{O}(|V(G)|^4)$ , donde el proceso de *reducción* es el que afecta la complejidad total.

# Conclusión

En el presente capítulo profundizaremos netamente el por qué se prohibió un ciclo adicional  $C_8$  en el Capítulo 4.

La razón de la prohibición fue específicamente para evitar el conjunto  $Y^B$  para  $d \geq 4$ . Donde no se pudo encontrar un método que pudiera englobar todas las posibles configuraciones que implicaba esta estructura. Sin embargo, es posible ser menos restrictivos y prohibir estructuras más específicas para evitar las complicaciones, pero se decidió por prohibir el ciclo para que la clase donde vale el resultado sea más fácil de describir.

Notamos que en el caso de un grafo  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free, el conjunto  $Y_i^B$  se define como los nodos en  $Y$  adyacentes a conjuntos  $D_i$  y  $D_{i+4}$ , para algun  $i \in [2d]$ , sin embargo, cuando  $d = 3$ , ocurre la particularidad de que al ser el ciclo base pequeño, el conjunto  $Y_i^B$  puede verse también como los nodos en  $Y$  adyacentes a conjuntos  $D_i$  y  $D_{i+3}$ ,  $i \in [6]$ , esto debido a que  $d_{\min}(D_i, D_{i+4}) = 2$  y  $d_{\max}(D_i, D_{i+4}) = 3$  en el  $C_7$ , para todo  $i \in [6]$ .

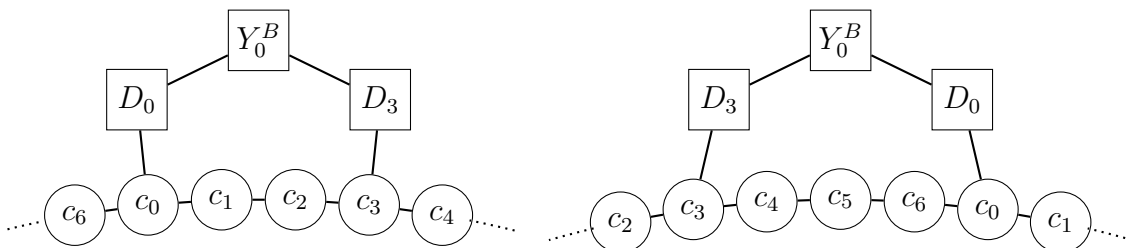


Figura 5.1: Ejemplo del conjunto  $Y_0^B$  visto adyacente a conjuntos de la forma  $D_i$  y  $D_{i+3}$ , para  $i = 0$ , como también conjuntos de la forma  $D_i$  y  $D_{i+4}$ , para  $i = 3$ .

Esto es importante, debido a que para quitar un color de los nodos del conjunto  $Y_i^B$  en el caso  $(P_9, C_5, C_3)$ -free, necesitamos armar el camino de largo 9 de la Figura 5.2, donde  $y_1, y_2 \in Y_i^B$ ,  $d_1 \in N_{D_i}(y_1) \setminus N_{D_i}(y_2)$ ,  $d_2 \in N_{D_i}(y_2) \setminus N_{D_i}(y_1)$  y  $d_3 \in N_{D_{i+3}}(y_2)$ .

Notamos que este camino logra el largo necesario debido a que  $d_{\max}(D_i, D_{i+4}) = 3$ .

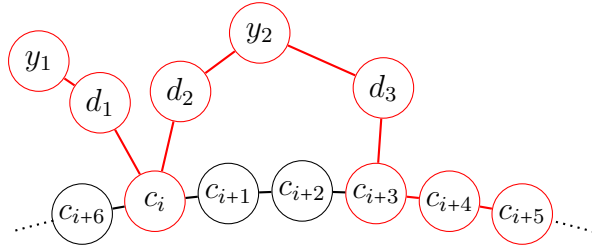


Figura 5.2

Si queremos armar un camino similar en el caso  $(P_{2d+3}, C_{\leq 2d-1})$ -free, con  $d \geq 4$ , como la estructura del conjunto se mantiene, necesitamos que el largo adicional del camino nos lo proporcione el ciclo base. Sin embargo, tomando como ejemplo el caso  $d = 4$ , podemos notar que no es posible armar el camino de largo 11. Esto es debido a que  $d_{\max}(D_i, D_{i+4}) = 4$  en el  $C_9$ , para todo  $i \in [8]$ , pero necesitamos que sea al menos 5 para llegar al largo prohibido.

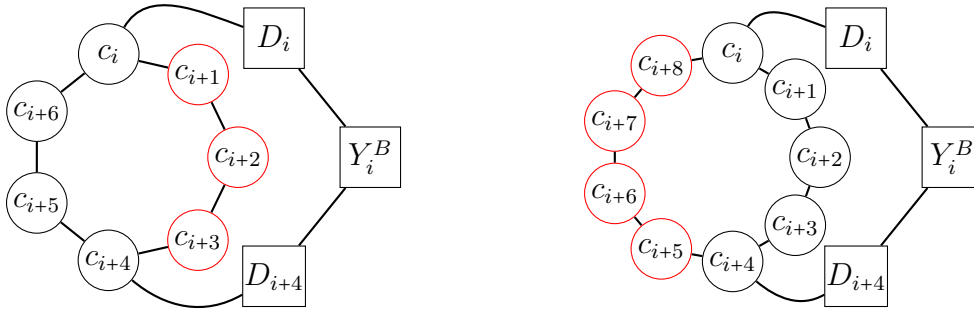


Figura 5.3: En rojo el camino que define el valor  $d_{\max}(D_i, D_{i+4})$  para los casos  $d = 3$  (a la izquierda) y  $d = 4$  (a la derecha).

El problema continua para los casos  $d \geq 4$ , debido a que  $d_{\max}(D_i, D_{i+4}) = 4 + 2(d - 4)$ , y para armar el camino necesitamos al menos  $4 + 2(d - 4) + 1$  nodos.

Debido a esto, se intentó armar caminos diferentes para llegar a las mismas conclusiones, pero sin éxito. Recordemos que no podemos simplemente pintar el conjunto  $Y^B$  de todas las maneras posibles, ya que a priori el tamaño del conjunto es de orden  $\mathcal{O}(|V(G)|)$ , por lo que se generarían una cantidad exponencial de casos de 2-lista-coloreo.

Una posible solución puede ser colorear cada conjunto  $Y_i^B$  de un color en particular, de esa manera solo hay tres casos posibles para cada uno, sin embargo, hay que tomar en cuenta que realizando esto estamos dejando afuera todos los coloreos posibles donde existan dos nodos en un conjunto  $Y_i^B$  pintados de distinto color, por lo que podríamos estar dejando fuera de las posibilidades al coloreo factible que queremos encontrar.

Para arreglar el problema de eliminar coloreos factibles, una opción es asegurar que el precoloreo que estamos realizando no va a interferir con la corolabilidad del grafo. Un ejemplo de esto, es lo que se hace con la idealización de las paletas, donde pintamos un nodo  $v \in V(G)$  del color que falte en las listas de sus vecinos, de este modo, no acotamos las opciones de coloreo para los demás nodos.

El principio ocupado en la idealización de paletas puede verse de manera más general.

**Definición 5.1** Sea un grafo  $G = (V, E)$ , una paleta  $L$  y un subconjunto  $V' \subset V$ . Llamamos  $L|_{V'}$  a la paleta sobre el grafo  $G[V']$  que cumple  $L(w) = L|_{V'}(w)$ , para todo  $w \in V'$ .

**Lema 5.2** Sea un grafo  $G = (V, E)$ , y sea  $V' \subset V$  tal que  $G[V']$  es un subgrafo inducido conexo de  $G$  y  $L$  una paleta sobre  $G$ . Sea además un coloreo factible  $c_1$  de  $G[V']$ , subpaleta de  $L|_{V'}$ . Definimos la paleta  $\bar{L}$  como

$$\bar{L}(v) = \begin{cases} c_1(v) & \text{si } v \in V' \\ L(v) & \text{si } v \in V \setminus V'. \end{cases}$$

Decimos que se cumple la condición (CD) si para toda arista  $vw \in E$  donde  $v \in V'$  y  $w \in V \setminus V'$  tenemos que  $\bar{L}(v) \cap L(w) = \emptyset$ . Si se cumple (CD) entonces

Existe un coloreo factible  $c$  subpaleta de  $L \iff$  Existe un coloreo factible  $c'$  subpaleta de  $\bar{L}$ .

**Observación** Es importante notar que si los nodos en el conjunto  $N(V') \setminus V'$  poseen listas de tamaño uno, y la paleta  $L$  es igual a su update, entonces cualquier paleta factible de  $V'$  que respete  $L|_{V'}$  va a definir una paleta  $\bar{L}(v)$  que cumpla (CD).

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $\bar{L}$  es subpaleta de  $L$ , por lo que si existe coloreo  $c'$  subpaleta de  $\bar{L}$ , es directo que  $c'$  también es subpaleta de  $L$ .

En caso de que exista  $c$  coloreo factible, subpaleta de  $L$ , entonces definimos

$$c'(v) = \begin{cases} c_1(v) & \text{si } v \in V' \\ c(v) & \text{si } v \in V \setminus V' \end{cases}$$

Es directo que  $c'$  es subpaleta de  $\bar{L}$ , y es claro que cualquier arista con ambos extremos en  $V'$  o  $V \setminus V'$  cumple factibilidad. Para el caso de las aristas  $vw \in E$  donde  $v \in V'$  y  $w \in V \setminus V'$ , como  $\bar{L}(v) \cap L(w) = \emptyset$ , en particular,  $c'(v) \neq c(w)$ , con lo que concluimos.  $\square$

Lo que hacemos en el proceso de idealización, es definir el coloreo sobre el nodo  $y$  como  $c_1$ . Gracias al Lema 5.2, podemos reemplazar la paleta  $L$  por  $\bar{L}$  sin perder la propiedad de colorabilidad de  $G$ .

Visto de otra manera, lo que hacemos en el Lema 5.2, es separar el problema de coloreo del grafo  $G$  inicial en dos problemas de coloreo independientes, uno donde intentamos encontrar un coloreo factible para  $G[V']$  que respete  $L|_{V'}$  (el coloreo que definimos como  $c_1$ ) y otro donde buscamos un coloreo factible para  $G[V \setminus V']$  que respete  $L|_{V \setminus V'}$ .



Para el caso de los nodos  $Y^B$ , se pensó en realizar algo similar. Si suponemos que los nodos en  $N(Y_i^B) \cap D_i$  y en  $N(Y_i^B) \cap D_{i+4}$  no poseen vecinos fuera del conjunto  $Y_i^B \cup C_{2d+1}$ , entonces el conjunto  $V' = Y_i^B \cup N(Y_i^B)$  cumple con que cualquier nodo en  $N(V') \setminus V'$  posee lista de tamaño uno, por lo que basta con que encontremos un coloreo factible para definir la paleta  $\bar{L}$ . Abusaremos de notación y llamaremos  $D_i = N(Y_i^B) \cap D_i$  y  $D_{i+4} = N(Y_i^B) \cap D_{i+4}$

Para esto, particionamos el conjunto  $Y_i^B$  en los conjuntos  $Y^1$ ,  $Y^2$  e  $Y^3$ , donde un nodo  $y$  pertenece al conjunto  $Y^k$  si  $|L(y)| = k$ , para  $k \in \{1, 2, 3\}$ , y hacemos lo mismo para los conjuntos  $D_i$  y  $D_{i+4}$ , particionandolos respectivamente en  $D_i^1$ ,  $D_i^2$  y  $D_{i+4}^1$ ,  $D_{i+4}^2$ . Además, el conjunto  $Y^2$  lo particionaremos en  $Y_i^2$ ,  $Y_j^2$  y  $Y_k^2$ , donde  $y$  pertenece a  $Y_i^2$  si  $i \in L(y)$  (análogamente para los demás conjuntos).

Los conjuntos  $D_i^1$  y  $D_{i+4}^1$ , pueden o no ser vacíos, y en caso de que no lo sean, son adyacentes a  $Y_1^2$ ,  $Y_2^2$  o  $Y_3^2$  (y debido a eso estos conjuntos pierden un color de sus listas). Los conjuntos  $Y_i^2$ , para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , pueden o no ser adyacentes a los conjuntos  $D_i^2$  o  $D_{i+4}^2$ , sin embargo, los supondremos adyacentes para situarnos en el peor caso posible.

Notamos que el conjunto  $V' \setminus (Y^1 \cup D_i^1 \cup D_{i+4}^1)$  sigue cumpliendo con que sus vecinos poseen listas de tamaño uno, por lo que podemos redefinir  $V'$  y aún así mantener sus propiedades. El conjunto  $V'$  se ve entonces como se muestra en la Figura 5.4.

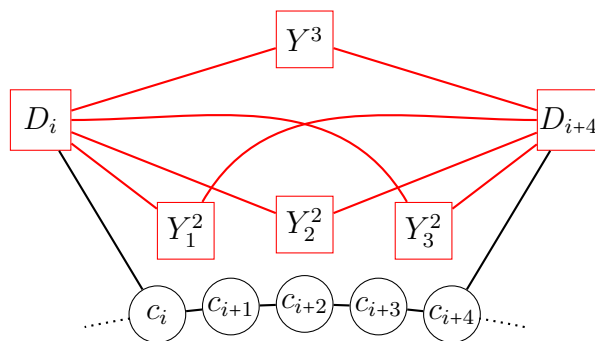


Figura 5.4: En rojo el conjunto  $V'$ .

El problema ahora es encontrar un coloreo  $c_1$ , subpaleta de  $L|_{V'}$ .

Si los nodos  $c_i, c_{i+4} \in C_{2d+1}$  estuvieran pintados del mismo color, entonces el conjunto  $Y^3$  hubiera sido pintado al momento de idealizar la paleta  $L$ , por lo que supondremos que  $c_i$  y  $c_{i+4}$  están pintados de colores distintos,  $i$  y  $j$  respectivamente.

En la Figura 5.5, podemos ver las listas asociadas a cada conjunto.

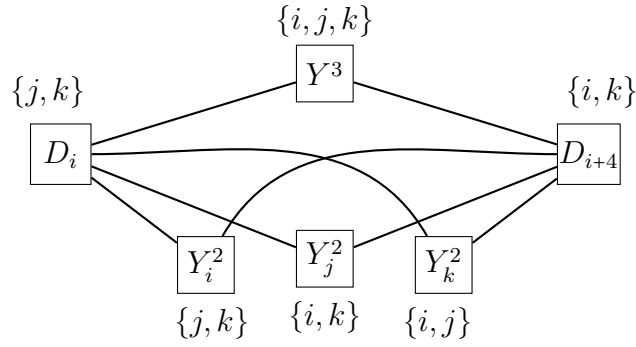


Figura 5.5

Lo que haremos será pintar  $Y^3$  del color faltante en la lista del conjunto  $D_{i+4}$ , lo cual modificará todas las listas del conjunto  $V'$  mediante el update. En la Figura 5.6 podemos ver las listas resultantes.

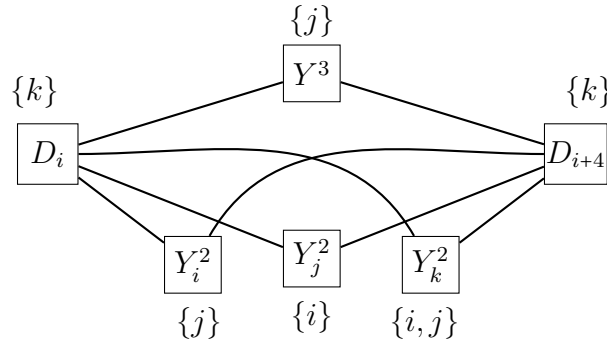


Figura 5.6

Por último, nos basta con pintar  $Y_k^2$  de color  $i$  o  $j$ , para obtener el coloreo  $c_1$  de nuestro conjunto  $V'$ .

Como ninguna lista es vacía, entonces el coloreo  $c_1$  definido por estas listas es factible, y claramente es subpaleta de  $L|_{V'}$ . Es fácil ver que si alguno de los conjuntos  $Y_i^2$ ,  $Y_j^2$  o  $Y_k^2$  no fuera adyacente a  $D_i$  o  $D_{i+4}$ , podría no haber perdido un color de su lista, pero eso no es problema ya que  $c_1$  seguiría siendo un coloreo factible subpaleta de  $L|_{V'}$ .

Este proceso colorea satisfactoriamente el conjunto  $Y_i^B$ , sin embargo, nuestra suposición inicial fue que tanto  $N(Y_i^B) \cap D_i$  como  $N(Y_i^B) \cap D_{i+4}$  no poseían vecinos fuera del conjunto  $Y_i^B \cup C_{2d+1}$ . En los casos que posean vecinos fuera, entonces nuestro grafo  $G[V']$  cambiará acorde a eso.

Por cada configuración distinta se generará un grafo  $G[V']$  distinto, donde el problema es que no se pudo pensar en soluciones para cada caso, por lo que una manera de encargarse de ello es prohibir los subgrafos inducidos que no posean respuesta, y es por esto que es posible prohibir subgrafos específicos y no necesariamente el  $C_8$ .

No se ahondará más en el tema de las configuraciones debido al gran número de ellas, sin embargo, creemos que es posible quitarle un color de las listas al conjunto  $Y^B$ , y así no tener que restringir un subgrafo inducido adicional al  $P_{2d+3}$  o a los  $C_{\leq 2d-1}$ , para  $d \geq 4$ .

# Bibliografía

- [1] N. Alon, R. Yuster, and U. Zwick. Color-coding. *Journal of the ACM (JACM)*, 42(4):844–856, 1995.
- [2] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. *Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), no. 5, pages 711–712, 1976.
- [3] B. Aspvall, M.F. Plass, and R.E. Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Information Processing Letters*, 8(3):121–123, 1979.
- [4] F. Bonomo, M. Chudnovsky, P. Maceli, O. Schaudt, M. Stein, and M. Zhong. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices. *Combinatorica*, 38(4):779, 2018.
- [5] F. Bonomo, O. Schaudt, and M. Stein. 3-colouring graphs without triangles or induced paths on seven vertices. *arXiv:1410.0040*, 2014.
- [6] A. Brandstädt, T. Klemmt, and S. Mahfud.  $P_6$ - and triangle-free graphs revisited: structure and bounded clique-width. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 8:173–188, 2006.
- [7] H.J. Broersma, P.A. Golovach, D. Paulusma, and J. Song. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest. *Theoretical Computer Science*, 414:9–19, 2012.
- [8] M. Chudnovsky, P. Maceli, J. Stacho, and M. Zhong. 4-coloring  $P_6$ -free graphs with no induced 5-cycles. *Journal of Graph Theory*, 84, Issue 3:262–285, 2017.
- [9] M. Chudnovsky, S. Spirkl, and M. Zhong. Four-coloring  $P_6$ -free graphs. ii. finding an excellent precoloring. *arXiv:1802.02283*, 2018.
- [10] D. Corneil, Y. Perl, and L. Stewart. Cographs: recognition, applications and algorithms. *Congressus Numerantium*, 43:249–258, 1984.
- [11] K. Edwards. The complexity of colouring problems on dense graphs. *Theoretical Computer Science*, 43:337–343, 1986.
- [12] P. Erdős, A. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. *Congressus Numerantium*,

26:125–157, 1979.

- [13] Z. Galil and D. Leven. NP-completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *Journal of Algorithms*, 4:35–44, 1983.
- [14] S. Gaspers, S. Huang, and D. Paulusma. Colouring square-free graphs without long induced paths. *arXiv:1805.08270v1*, 2018.
- [15] P. Golovach, D. Paulusma, and J. Song. Closing complexity gaps for coloring problems on H-free graphs. *Information and Computation*, 237:204–214, 2014.
- [16] P. Golovach, D. Paulusma, and J. Song. Coloring graphs without short cycles and long induced paths. *Discrete Applied Mathematics*, 167:107–120, 2014.
- [17] I. Holyer. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, 10:718–720, 1981.
- [18] C.T. Hoàng, M. Kamiński, V.V. Lozin, J Sawada, and X. Shu. Deciding k-colorability of  $P_5$ -free graphs in polynomial time. *Algorithmica*, 57:74–81, 2010.
- [19] S. Huang. Improved complexity results on k-coloring  $P_t$ -free graphs. In *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science 2013*, 7551 of Lecture Notes in Computer Science:551–558, 2013.
- [20] S. Huang, M. Johnson, and D. Paulusma. Narrowing the complexity gap for colouring  $(C_s, P_t)$ -free graphs. *The Computer Journal*, 58:3074–3088, 2015.
- [21] M. Kamiński and V.V. Lozin. Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles. *Contributions to Discrete Math*, 2:61–66, 2007.
- [22] R. Karp. *Reducibility among combinatorial problems*. Masson., 1 edition, 1983.
- [23] D. Král, J. Kratochvíl, Zs. Tuza, and G.J. Woeginger. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs. *Proc. WG 2001, LNCS*, 2204:254–262, 2001.
- [24] D. Král, J. Kratochvíl, Zs. Tuza, and G.J. Woeginger. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest. *Theoretical Computer Science*, 414:9–19, 2012.
- [25] S. Mellin. Polynomielle farbungsalgorithmen für  $P_k$ -freie graphen. *Diplomarbeit am Institut für Informatik, Universität zu Köln*, 2002.
- [26] B. Randerath and I. Schiermeyer.  $3$ -colorability  $\in P$  for  $P_6$ -free graphs. *Discrete Appl. Math.*, 136:299–313, 2004.
- [27] L. Stockmeyer. Planar 3-colorability is polynomial complete. *ACM SIGACT News*, 5(3):19–25, 1973.
- [28] V. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Metody Diskretnogo Analiza*, 29:3–10, 1976.