



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

**EVALUACIÓN DE ALGORITMOS DE RUTEO EN NUEVO SISTEMA DE
FISCALIZACIÓN DE TRANSANTIAGO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

CRISTÓBAL BELTRÁN CHRISTINY

PROFESOR GUÍA

JOSÉ RAFAEL CORREA HAEUSSLER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN

ANDREAS WIESE

BASTIÁN MATÍAS BAHAMONDES PIZARRO

OMAR CERDA INOSTROZA

SANTIAGO DE CHILE

2018

**RESUMEN DEL BORRADOR PARA OPTAR
AL TÍTULO DE: INGENIERO INDUSTRIAL
POR: Cristóbal Beltrán Christiny
FECHA: 20/08/2018
PROFESOR GUÍA: José Rafael Correa**

EVALUACIÓN DE ALGORITMOS DE RUTEO EN NUEVO SISTEMA DE FISCALIZACIÓN DE TRANSANTIAGO

Todas las ciudades, a medida que se comienzan a extender y densificar, se ven enfrentadas al complejo fenómeno del sistema de transporte público, donde constantemente está en juego el desafío de lograr transportar una gran cantidad de gente de forma eficiente y efectiva.

Actualmente, el sistema de transporte público de Santiago se ve afectado por un problema importante: los usuarios evaden el pago del pasaje. Según cifras recientes del año 2017, el índice de evasión supera el 30%, manteniendo una tasa creciente en el tiempo, y es bajo esta preocupación que se propone el proyecto FONDEF “Desarrollo de tecnologías para el control de la evasión en el transporte público”. Este proyecto busca desarrollar algoritmos eficientes para la resolución de un modelo de fiscalización a gran escala con el fin de mejorar los índices de efectividad del sistema de fiscalización actual y es en este contexto que se desarrolla esta memoria de título.

Los modelos, considerados en el marco del proyecto, consisten en una estrategia mixta de fiscalización sobre el grafo de paraderos de Santiago, es decir, una densidad de probabilidad de fiscalización dentro del área de cobertura. Sin embargo, la implementación de estos resultados al sistema no es directa. Es por este motivo que este trabajo busca implementar un modelo de calendarización, que condense un estado probabilístico a una respuesta humanamente realizable, pero que a la vez sea eficiente en su ejecución.

En virtud de este objetivo, se implementan dos modelos de calendarización diferentes; uno estático, que mantiene el sistema actual de fiscalización por paraderos, y uno dinámico, que se ajusta a sistemas de fiscalización implementados en otros países y permite la fiscalización con los buses en movimiento. Esta segunda estrategia permite ampliar el abanico de oportunidades que tiene el área de fiscalización del DPTM para cumplir su tarea.

Dentro del arista estática, se generan dos propuestas: un sistema más directo, donde se genera una submuestra con su matching respectivo, y un segundo sistema más desarrollado, donde se genera una combinación de turnos a realizar. Generando una diferencia de hasta 92% en los costos de transporte entre estos modelos.

Con respecto al modelo dinámico, se mejora en un 42% la capacidad de ejecutar correctamente los resultados de fiscalización. Esta mejora corresponde a la comparación de un modelo aleatorio con respecto a un modelo de decisión dinámica glotón por tramos.

A modo de conclusión se propone la implementación del sistema estático en el corto plazo, mientras se trabaja en la formulación de modelos de decisión dinámicos más robustos a los utilizados actualmente junto con la generación de las herramientas necesarias para su correcta implementación.

Como trabajo futuro se propone estudiar la posible implementación de un modelo híbrido que mantenga características tanto estáticas como dinámicas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en esta memoria a:

Mi familia por estar ahí presente desde mis primeros días ayudándome en cada uno de mis errores.

A la Fran, por ser un pilar y una fuente de motivación constante en mis proyectos.

A mis profes que me ayudaron con esta memoria con su conocimiento y expertiz.

A mis siempre apañadores amigos con los que puedo contar en cada minuto.

A todos ustedes, muchas gracias!.

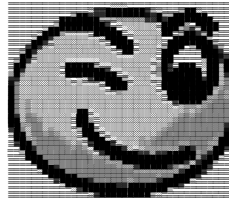


TABLA DE CONTENIDO

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes generales	1
1.1.1	Sistema de transporte Santiago	1
1.1.2	Problema de la evasión	2
1.1.3	Sistema de fiscalización en Transantiago	3
1.1.4	Sistemas de fiscalización en el mundo	5
1.2	Motivación	8
1.3	Contribución	9
1.4	Alcance	10
1.5	Justificación	11
2	Marco conceptual	14
2.1	Contexto del proyecto	14
2.2	El Proyecto	14
2.2.1	El modelo	15
2.3	Modelos por aplicar	16
2.3.1	Preliminares	16
2.3.2	Versión estática	17
2.3.3	Versión dinámica	18
3	Metodología	20
3.1	Levantamiento de datos	20
3.2	Búsqueda de modelos	20
3.3	Implementación de modelos	20
3.4	Análisis de resultados	21
3.5	Generación de propuesta TI	21
4	Scheduling estático	22

4.1	Generación de datos.....	23
4.2	Modelo versión muestreo.....	23
4.2.1	Muestreo	24
4.2.2	Modelo.....	26
4.2.3	Resultados.....	28
4.3	Modelo de descomposición por puntos extremos (MDPE)	32
4.3.1	Construcción de la solución no entera.....	32
4.3.2	Método de construcción de soluciones enteras.....	33
4.3.3	Resultados.....	39
4.3.4	Mejoras al modelo y su resolución	39
4.4	Comparaciones entre modelos	50
4.4.1	Costos.....	50
4.4.2	Comparación en marginales.....	51
4.4.3	Tiempos de ejecución	53
4.4.4	Predictibilidad.....	54
4.4.5	Conclusiones.....	58
5	Scheduling Dinámico.....	59
5.1	Generación del grafo y simulación	59
5.2	Ejecución de modelos dinámicos.....	61
5.2.1	Modelo aleatorio.....	61
5.2.2	Modelo miope glotón.....	64
5.2.3	Modelo miope glotón por tramos.....	65
5.2.4	Modelo miope glotón por zonas	68
5.2.5	Comparaciones entre modelos.....	70
5.3	Modelos dinámicos propuestos.....	70
5.4	Integración al sistema de transporte.....	71
6	Conclusiones generales	74
7	Bibliografía.....	75
8	ANEXOS.....	79

8.1	ANEXO: Tabla de colores de grafo.....	79
8.2	ANEXO: Grafos de visualización general del modelo dinámico.....	79
8.2.1	Diferencias positivas al cuadrado.....	80
8.2.2	Promedio de diferencias positivas.....	80
8.2.3	Máxima diferencia.....	81
8.2.4	Máxima diferencia mínima.....	81
8.2.5	Suma de diferencias.....	82
8.2.6	Suma de diferencias al cuadrado.....	82
8.2.7	Modelo glotón por zonas.....	83
8.2.8	Modelo por zonas glotón por tramos.....	83
8.3	ANEXO: Grafos de comparaciones máximas y mínimas entre modelo muestreo y modelo MDPE.....	83
8.3.1	Costos máximos entre modelos.....	84
8.3.2	Costos mínimos entre modelos.....	84

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Comparación de ajuste de modelo de predicción de nivel de evasión en diferentes países	12
Tabla 2: Comparación de kilómetros recorridos por fiscalizadores según sistema de coordinación	12
Tabla 3: ejemplo de eventos en método de muestreo	25
Tabla 4: Comparación de tamaños entre grafos podados y no podados	35
Tabla 5: Tiempo de resolución inicial	39
Tabla 6: Tiempos de resolución modelo versión 1	40
Tabla 7: Tiempo de resolución modelo versión 2.....	42
Tabla 8: Tiempo de resolución de modelo versión 3	44
Tabla 9: Tiempos de resolución modelo versión 4.....	46
Tabla 10: Desempeño de diferentes versiones del modelo versión 5	49
Tabla 11: Tiempos de resolución del modelo versión 5	49
Tabla 12: Nivel de certeza promedio con diferentes niveles de información.....	57
Tabla 13: Desempeño de modelo aleatorio uniforme.....	62
Tabla 14: Distribución del desempeño modelo aleatorio	62
Tabla 15:Desempeño del modelo aleatorio ponderado.....	63
Tabla 16:Distribución del desempeño modelo aleatorio ponderado	63
Tabla 17: Desempeño modelo glotón	64
Tabla 18: Distribución del desempeño modelo glotón	64
Tabla 19: Desempeño modelo glotón por tramos.....	66
Tabla 20: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos.....	66
Tabla 21: Comparación de desempeños de modelos glotón por tramos que muestra el porcentaje de mejora de cada método con respecto al modelo aleatorio uniforme original	68
Tabla 22: Desempeño modelos glotones por zona	69
Tabla 23: Comparación de desempeño entre modelos generales	70
Tabla 24: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, diferencias positivas .	80
Tabla 25: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, promedio de diferencias positivas	80
Tabla 26: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, máxima diferencia....	81
Tabla 27: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, diferencia mínima.....	81

Tabla 28: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, suma de diferencias ..	82
Tabla 29: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, diferencias al cuadrado	82
Tabla 30: Distribución del desempeño modelo glotón por zonas	83
Tabla 31: Distribución del desempeño modelo glotón por zonas y tramos	83

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Evolución histórica de la evasión en Transantiago [7].....	2
Ilustración 2: Mapa de calor de puntos fiscalizados entre 2016 y 2017	5
Ilustración 3: Visualización de impacto del nivel de fiscalización en el nivel de evasión en diferentes países.....	11
Ilustración 4: Visualización de la aplicación implementada por Tambe et al.	19
Ilustración 5: Diferencia entre estrategia mixta y estrategia pura de fiscalización	22
Ilustración 6: Diagrama de proceso de modelo versión muestreo.....	24
Ilustración 7: Ejemplo de generación de intervalos en método de sampleo.....	25
Ilustración 8: Ejemplo de ubicación de punto dentro de eventos en método de sampleo	25
Ilustración 9: Ejemplo de estructura de grafo versión muestreo	27
Ilustración 10: Ejemplo de visualización de resultado versión muestreo, donde cada punto representa un paradero fiscalizado y cada segmento representa el camino (en tiempo) que la cuadrilla deberá recorrer.....	31
Ilustración 11: Ejemplo de la estructura del grafo del modelo MDPE.....	32
Ilustración 12: Ilustración de estructura de grafo dinámico	60

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Tiempos de cálculo en muestras.....	29
Gráfico 2: Tiempo de cálculo en una iteración.....	29
Gráfico 3: Diferencias entre probabilidades finales y esperadas que consiste en la suma de las diferencias absolutas de sus componentes	30
Gráfico 4: Comparación desempeño versión 1 y versión 2	42
Gráfico 5: Comparación desempeño versión 2 y versión 3	44
Gráfico 6: Comparación de desempeño versión 2, versión 3, y versión 4	47
Gráfico 7: Comparación de desempeño entre modelo versión 4 y modelo versión 5	50
Gráfico 8: Comparación en costos entre modelo MDPE y modelo de muestreo	51
Gráfico 9: Mejora porcentual en costos entre modelo MDPE y modelo de muestreo	51
Gráfico 10: Diferencias entre probabilidades alcanzadas entre modelo MDPE y modelo muestreo.....	52
Gráfico 11: Tiempos de cálculo de muestras entre modelo muestreo y modelo MDPE ...	53
Gráfico 12: tiempo de cálculo de muestras reducidas entre modelo muestreo y modelo MDPE	54
Gráfico 13: Distribución de nivel de certeza para el modelo MDPE con muestra = 1.....	55
Gráfico 14: Distribución de nivel de certeza del modelo MDPE con muestra = Budget/256	
Gráfico 15: Distribución de nivel de certeza del modelo MDPE con información perfecta	56
Gráfico 16: Comparación entre costos máximos entre modelos	84
Gráfico 17: Comparación entre costos máximos entre modelos	84

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Ejemplo de posicionamiento en probabilidades para el primer intervalo	24
Figura 2: Diagrama de movimiento dentro del poliedro.....	37
Figura 3: Ilustración de cambio en grafo por capacidad = 1	41
Figura 4: Diagrama secuencial de toma de decisión en aplicación de fiscalización	72
Figura 5: Diagrama secuencias de actualización de estado en aplicación de fiscalización	72
Figura 6: Ilustración 2 de visualización de plataforma.....	73
Figura 7: Ilustración 1 de visualización de plataforma.....	73

2 Introducción

2.1 Antecedentes generales

Un sistema de transporte público es un fenómeno complejo al que se ven enfrentadas todas las ciudades una vez que se comienzan a extender y densificar. Lograr transportar a una gran cantidad de gente de forma eficiente y efectiva es el desafío que está constantemente en juego.

A lo largo del mundo se han puesto a prueba diversas formas de acceso a los sistemas de transporte, para facilitar su uso, como también para fomentarlo. Tal es el caso de Alemania donde el ingreso al sistema de trenes es libre de barreras físicas [1], esta implementación consiste en liberar las barreras físicas de la entrada de usuarios, permitiendo un flujo libre, donde cada pasajero deberá pagar su pasaje en los costados de las estaciones, facilitando así el movimiento de los usuarios y disminuyendo sus costos de tiempo. Otro ejemplo es el de Tallin, capital de Estonia, donde en 2013 implementó un sistema de transporte público gratuito para toda la ciudad [2], generando así un impacto importante tanto en las decisiones de transporte de la gente como en la dinámica de transporte de la ciudad misma. Estos ejemplos, diametralmente diferentes demuestran que no existe una solución perfecta para todas las sociedades.

2.1.1 Sistema de transporte Santiago

El sistema de transporte dentro de la ciudad de Santiago ha vivido diversos cambios desde sus orígenes en 1910, pero el cambio más relevante para esta memoria es el que se comenzó a gestar en 2005, la creación del nuevo sistema de transporte llamado Transantiago, cambio que comenzó con la incorporación de buses articulados al sistema y la licitación de los administradores financieros de estos buses (empresas gestoras del correcto funcionamiento de los recorridos y buses). Luego, en el año 2007, se inauguró oficialmente el método de pago electrónico denominado tarjeta *Bip!*, donde se integraron física y tarifariamente todos los buses de Transantiago junto con el Metro de Santiago. Esto se logró a través del área de coordinación de Transantiago del Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones de Chile [3].

Actualmente la cobertura del sistema de transporte público de Santiago (buses integrados a trenes y metro) alcanza a 6.2 millones de personas, distribuidas en 34 comunas diferentes, en un área de 680 km cuadrados. En un día laboral transporta en promedio a 3.8 millones de personas [4], las que realizan 18 millones viajes al día, todo esto alimentado por más de 6.500 buses.

Actualmente los cerca de 6.500 buses de Transantiago recorren 1.2 millones de kilómetros al día y todo esto debe ser coordinado por un solo ente gubernamental, que es el Directorio de Transporte Público Metropolitano. (DTPM), encargado de controlar y supervisar todo el sistema de transporte público de Santiago, desde fiscalización de estados de taxis y colectivos, pasando por el rediseño de nuevos contratos del sistema de buses hasta la aplicación de multas por uso de vías exclusivas para transporte público o evasión del pago del pasaje en el sistema de buses y metro.

Dentro del DPTM se encuentra la Unidad de Coordinación Contra la Evasión, cuya misión es la siguiente:

“Encargada de coordinar y monitorear todo el trabajo que se desarrolla al interior del Directorio con relación a la evasión, como también aquellas acciones que se realizan en terreno, por el equipo de fiscalización del Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones. [5]”

Esta unidad, tal como su misión lo indica está enfocada en generar y coordinar los procesos de control de la evasión dentro del DPTM, particularmente se encarga de la coordinación tanto operativa como táctica de las brigadas de fiscalización de pasajeros dentro del sistema de transporte de Santiago. Actualmente cuenta con una capacidad potencial¹ de hasta 50 brigadas a su disposición, habilitadas para ejecutar controles de identidad y cursar multas por evasión.

2.1.2 Problema de la evasión

Uno de los principales problemas al que se ve enfrentado el sistema es el no pago del pasaje por el uso de buses o metro, llamado evasión.

La evasión en el sistema de transporte público de Santiago ha tenido un sostenido crecimiento desde su creación, como se muestra en el siguiente gráfico.



Ilustración 1: Evolución histórica de la evasión en Transantiago [7]

¹ La capacidad real de fiscalización por parte de la unidad se reduce de forma variable debido a externalidades y decisiones dentro de otras instituciones relacionadas.

Obteniendo en 2016 a una cifra récord de 30.2% [6], superado nuevamente en 2017 por un nuevo aumento en la evasión, llegando así a 34% [7], el problema ha crecido en parte por la formulación de los contratos, de una mala gestión al momento de generar la fiscalización a los pasajeros, una falta de recursos destinados a este trabajo y a un fenómeno social y complejo explicado en un estudio de Libertad y Desarrollo [8].

El fenómeno de la evasión no es un problema nuevo dentro de los sistemas de transporte, pero al incorporar tecnología y disminuir tanto las barreras físicas como sociales al evadir, se transforma en un asunto mucho más complejo, al que la ciudad no se había enfrentado anteriormente.

Antes de la puesta en marcha del sistema Transantiago, a los choferes de los buses se le pagaba un sueldo directamente proporcional a la cantidad de pasajeros transportados [9]. Esta situación generaba un costo social bastante alto al subirse a la micro sin pagar el pasaje ya que el chofer podía no dejar subir al pasajero o no iniciar la marcha hasta que pagara el pasaje entre algunas de las medidas utilizadas.

Otra barrera era el pagar el pasaje con dinero en efectivo. Esta forma de pago generaba que la validación del pasaje fuera individual, generando un gran costo a alguien que no deseaba pagar, ya que no “pasaba desapercibido”.

Las barreras antes mencionadas fueron algunos de los cambios con la incorporación del nuevo sistema de transporte, disminuyendo así los costos sociales de la evasión, manteniendo como única herramienta disuasiva la fiscalización de pasajeros.

Pese a esta eliminación de barreras, el sistema de transporte utilizado en Transantiago puede funcionar con buenos resultados, ya que existe evidencia internacional donde se opera con este mismo sistema de pago del pasaje, como es el caso del control de trenes en Alemania, que utiliza un sistema de control aleatorio en el que los fiscalizadores se suben a un tren de modo incognito y comienzan a fiscalizar mientras este avanza por las estaciones, sistema que le ha reportado buenos resultados [10], llegando a una evasión de un 4% en promedio [8].

2.1.3 Sistema de fiscalización en Transantiago²

El sistema de fiscalización de Santiago opera de forma centralizada organizada por el área de fiscalización de la unidad de control de la evasión de la DPTM. Este consiste en la formulación de cuadrillas conformadas inspectores y carabineros que fiscalizarán durante su jornada los puntos asignados en los horarios establecidos por la unidad.

La determinación de los puntos a fiscalizar funciona actualmente a través de un método completamente manual, que comienza por la recopilación de la información capturada por inspectores incógnitos a bordo de los buses, donde miden la cantidad de gente que sube a un bus y luego los separan en la cantidad de pasajeros que pagan su pasaje y aquellos que evaden.

² Información obtenida a partir de reuniones con integrantes del área de fiscalización.

Una vez obtenidos estos datos, se genera una proyección de la muestra al resto del sistema ponderados por los niveles de congestión obtenidos por las validaciones de los tótems bip a bordo de los buses. Junto con esto se recopilan los reportes del rendimiento histórico de las cuadrillas fiscalizadoras.

Con los datos de evasión por recorrido y los niveles de evasión medidos por los fiscalizadores, se identifican los puntos importantes, paraderos o recorridos de alta concentración de evasores en ciertas horas. Luego se discuten las estrategias de fiscalización a corto plazo, como las posiciones de los puntos a fiscalizar a partir de los puntos identificados previamente y a mediano plazo, donde se discute si priorizar cantidad de evasores multados o el nivel de presencia y exposición de los fiscalizadores a una mayor cantidad de pasajeros.

Una vez determinada la estrategia a mediano y corto plazo, se reúne el área con los inspectores y se entregan los puntos a fiscalizar por cada cuadrilla.

Al mismo tiempo se coordina con el cuerpo de carabineros para determinar la cantidad de uniformados que se requerirán ese día. Luego se organizan las cuadrillas según el personal a disposición.

En el día de la fiscalización, los fiscalizadores se reúnen en el centro de despacho, luego van a buscar a los carabineros correspondientes a esa cuadrilla en la comisaria de Santiago respectiva, para finalmente dirigirse a la primera parada de fiscalización. Luego del cumplimiento del tiempo previamente establecido de fiscalización en ese lugar, las cuadrillas tienen un descanso de 45 minutos, para continuar en el mismo punto por otro periodo más o movilizarse a un segundo lugar, dependiendo de la estrategia que se haya implementado el día anterior.

Dentro del punto de fiscalización, el modo de operación de la cuadrilla consta de 5 fases. Primero, determinan un bus a fiscalizar. Luego lo detienen e ingresan por todas las puertas fiscalizando a todos los pasajeros dentro de esta. Dentro de este identifican a todos los evasores que no validaron su tarjeta en el tótem respectivo o que simplemente no portan una tarjeta validadora, los hacen descender y dejan avanzar la micro por su recorrido.

Una vez abajo, los carabineros de la cuadrilla realizan el procedimiento de control de identidad para cada evasor, en caso de que se identifique a un evasor que no quiere entregar su identidad, se activa un procedimiento para detenerlo en caso necesario.

Finalmente, con el control de identidad realizado, los fiscalizadores le solicitan la dirección al evasor y cursan la multa correspondiente. Luego de este procedimiento se liberan a los multados y se repite el proceso.

Una vez que se termina el horario laboral de la cuadrilla, los fiscalizadores dejan a los carabineros en la comisaria correspondiente y se dirigen al centro de despacho para entregar el vehículo en el que se movilizan.

En el transcurso de 3 años de fiscalizaciones registradas en la base de datos del DPTM³, se realizaron controles a 4.127.976 personas, lo que equivale a un control de 1.375.992 personas por año (representando solo un 0.1% de los pasajeros del sistema)⁴. De este total de personas correctamente

³ Registro obtenido de los datos entregados por la DPTM donde se encuentran los registros de las fiscalizaciones realizadas entre 2015 y 2017.

⁴ Considerando los 3.8 millones de pasajeros diarios del sistema.

controladas, sólo 128.930 recibieron una citación al juzgado (para luego comparecer y pagar la multa respectiva), lo que representa solo un 9.37% de los pasajeros fiscalizados.

A partir de las heurísticas que utiliza la unidad de control de la evasión para determinar las posiciones de las cuadrillas y debido a que solo consideran los puntos de mayor evasión, éstos se tienden a repetir con el pasar de los días, generando una recurrencia de los puntos de fiscalización concentrándose en los principales ejes de la ciudad, fenómeno que se puede apreciar en la siguiente imagen que captura los 11.000 puntos fiscalizados entre 2016 y 2017⁵.

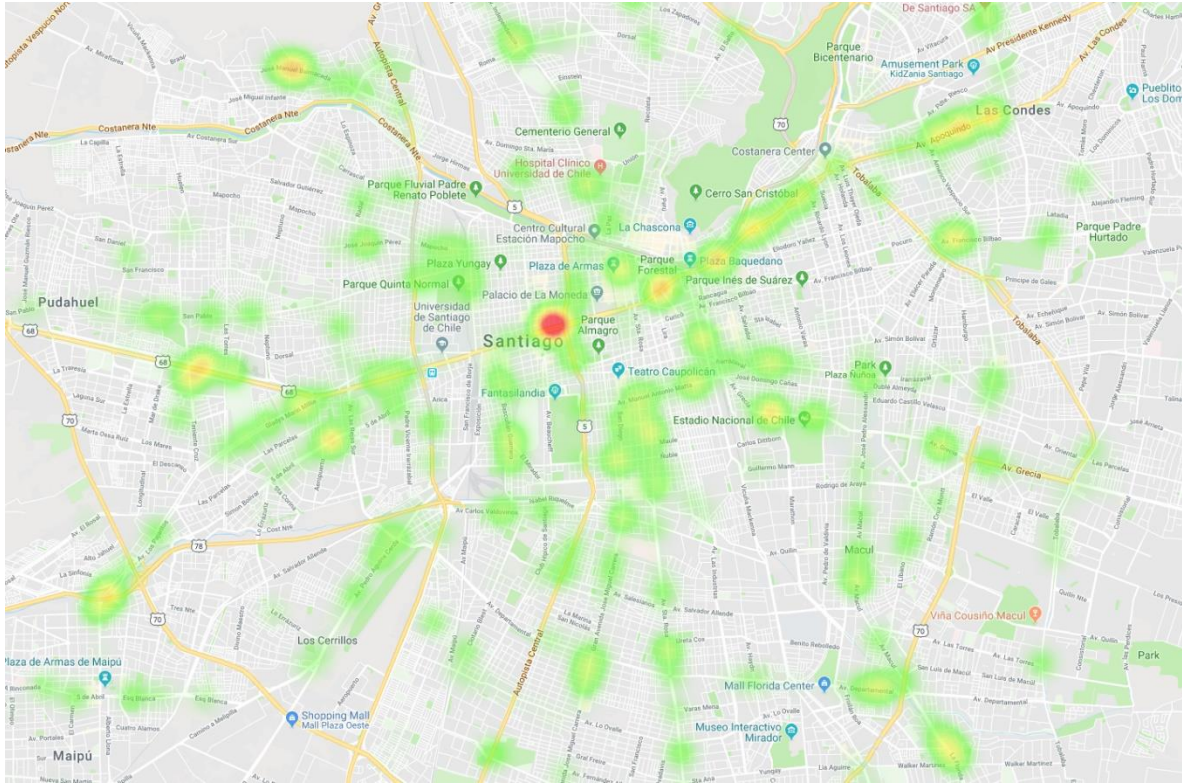


Ilustración 2: Mapa de calor de puntos fiscalizados entre 2016 y 2017

2.1.4 Sistemas de fiscalización en el mundo

A continuación, se exponen cinco sistemas de transporte implementados en diferentes países similares en diferentes aspectos al sistema de transporte de la ciudad de Santiago. Estos países son Colombia, Argentina, Australia, Alemania e Inglaterra.

⁵ La cantidad de cuadrillas activas varía diariamente, siendo 17 el valor promedio en la cantidad de cuadrillas utilizadas.

Colombia, desde el año 2000, implementó un sistema de transporte público masivo en su capital. En este sistema existe una barrera física al evadir que consiste en buses con puertas de un metro de altura, permitiendo el ingreso de pasajeros solo en paraderos especialmente diseñados. A partir de esto, la fiscalización dentro de este sistema solo ocurre dentro de los paraderos. Por otro lado, las multas por evasión del pasaje son desde \$26.000 pesos chilenos, resultando en una evasión cercana al 10% [11].

Argentina, específicamente Mendoza, mantiene un sistema de pago magnético, similar al de Transantiago en el sentido de la eliminación de barreras físicas para el pasajero a la hora de pagar su pasaje. Por otro lado, bajo la regulación federal de Mendoza, los evasores del sistema arriesgan hasta 30 días de presidio. A diferencia de Bogotá, en Mendoza sí existe fiscalización a bordo de los buses, ocasionando finalmente que la evasión dentro de este sistema bordee el 4% según cifras internas [11].

En Melbourne, Australia, el sistema de fiscalización difiere del de Mendoza en cuanto al modelo de organización ya que en esta ciudad los fiscalizadores, ocultos entre la población dentro del transporte, pueden realizar controles de los pasajes de cualquier usuario tanto dentro del bus como en el paradero, donde la gente sorprendida utilizando un medio de transporte que no es válido para su ticket, puede recibir una multa de entre \$75 y \$233 dólares australianos, provocando que el promedio de evasión dentro de la ciudad no supere el 4%.

Alemania en 1960 comenzó con un sistema de transporte basado en el honor: quitaron todas las barreras físicas de entrada tanto a buses como a trenes (de superficie y subterráneos), e instalaron máquinas de tickets en los costados de las entradas de una estación, para agilizar los procesos de ingreso a estos sistemas de transporte [10]. Junto con esto desarrollaron un sistema de fiscalización en el que los fiscalizadores están de incognito dentro de los trenes (se les paga una comisión por cada evasor que identifican, por lo que tienen un incentivo a buscar y rondar los puntos de mayor evasión).

Una vez que están dentro de un tren e identifican a un posible evasor. Estos fiscalizadores cuentan con las facultades legales para solicitar el ticket del pasajero, realizar un control de identidad y finalmente cursar la multa en ese mismo instante, cuyo precio va actualmente entre los 60 y 70 euros. Este sistema ha tenido muy buenos resultados, manteniendo un índice de evasión que ronda entre 3%-8% [1] según localidad, demostrando que con un sistema de control bien organizado y planificado se puede mantener un método basado en el honor dentro del transporte público generando buenas tasas de eficiencia en el largo plazo.

En Londres, instalaron un sistema similar al de Transantiago. Como medio de pago utilizan tarjetas de tipo "Contactless", que pueden ser del tipo débito (cargas tu tarjeta y luego el saldo se descuenta), crédito (se genera un saldo negativo con cierto tope que luego se cargará a una cuenta) o de auto pago (luego de utilizar la tarjeta, se descuenta el viaje de la cuenta corriente del usuario y se resetea el saldo [12]).

La fiscalización del sistema de Londres es similar a la de Alemania, descrita anteriormente. Los fiscalizadores, que se suben a los buses de incógnito y luego de encontrar a un posible evasor, le piden su tarjeta. En caso de no tenerla, o demostrar que evadió, el inspector genera la citación respectiva y el inspector le cobra una multa de 50 libras o de 25 libras si las paga en los primeros 21 días, pero en caso de que sea reincidente, se le deriva a un juicio en el que puede ser sentenciado con cárcel dependiendo del grado de reincidencia [13]. No solo con esto, el sistema de transportes de Londres genera publicidad para aumentar el grado de miedo a los fiscalizadores y así disminuir el nivel de evasión, utilizando algunos slogans como "la segunda vez que seas atrapado evadiendo, irás a juicio" o "podrías ser sentenciado a pagar una multa de 1000 libras si no pagas tu pasaje de solo 1.2 libras" [14]. Todo esto

junto con otras medidas implementadas dentro de su sistema logran mantener una tasa de evasión de solo 1.3% [15] para agosto del 2013.

2.2 Motivación

La principal motivación de este trabajo recae en la dificultad de implementar una distribución de probabilidades en un grafo como una estrategia de fiscalización concreta y poco predecible dentro de un sistema de transporte. Particularmente luego de la ejecución de un algoritmo que se basa en teoría de juegos donde considera las posibles acciones tanto de evasores como de fiscalizadores.

Al no poder obtener de manera directa el conjunto de actividades a realizar desde esta distribución de probabilidad antes mencionada, es necesario la implementación de un modelo de calendarización (scheduling), que condense un estado probabilístico a una respuesta humanamente realizable, pero que a la vez sea eficiente en su ejecución.

Por otro lado, el resultado probabilístico antes mencionado podría permitir la implementación de un sistema dinámico en que la fiscalización se realice en movimiento a través del grafo, pero manteniendo una estrategia eficiente de cara al evasor. Las ventajas de la implementación de un modelo así están en la evidencia internacional del rendimiento en cuanto a evasión de países en que se realiza de esta manera.

Finalmente, la implementación de un método de calendarización podría facilitar la medición de rendimientos del sistema de fiscalización al generar una métrica de cumplimiento de tareas concretas para los fiscalizadores (tareas realizadas).

Desde un punto de vista general, la implementación y comparación de diversos sistemas de scheduling podrán facilitar la toma de decisiones a la hora de definir un cambio de estrategia en la ejecución de un sistema de fiscalización basado en teoría de juegos.

2.3 Contribución

Las contribuciones que presenta esta memoria se destacan en cuatro ámbitos. En primera instancia, se logra implementar un conjunto de herramientas que permiten transformar una estrategia de fiscalización abstracta (estrategia mixta), en una estrategia concreta y medible (conjunto de estrategias puras), logrando facilitar la implementación de algoritmos basados en teoría de juegos.

En segunda instancia los resultados de esta memoria muestran las dificultades y los problemas que se deben solucionar para poder realizar una fiscalización dinámica dentro del sistema, de manera que genere resultados similares a los obtenidos luego de la resolución de los juegos de Stackelberg. Además de esto, esta memoria muestra los riesgos y costos de la implementación de diversos métodos de scheduling estático, actual método utilizado en Transantiago.

A partir de estas dificultades, esta memoria logra generar métricas y comparaciones para lograr evidenciar los beneficios, costos y riesgos de cada método utilizado, de modo de facilitar la elección de un modelo en específico y tomando en consideración de los problemas que se están asumiendo.

Finalmente, esta memoria propone un método de scheduling híbrido que consiste en generar cuadrillas fiscalizadoras a bordo de los buses y fijas en los paraderos, que podría aumentar las ventajas individuales de cada método implementado (scheduling dinámico y estático), logrando disminuir en conjunto desventajas individuales. Cabe destacar que este sistema aún debe ser implementado y testeado para lograr comprobar la hipótesis planteada.

El impacto del trabajo realizado más allá del contexto en el que se desenvuelve esta memoria se destaca la comparación realizada entre diferentes formas de recorrer un grafo con flujos no enteros, que puede facilitar la elección de algoritmos a la hora de implementar soluciones similares a esta, ya sea en ámbitos de fiscalización, patrullaje, elaboración de líneas de suministro entre otras.

2.4 Alcance

El alcance de esta memoria considera la búsqueda y elaboración de modelos de scheduling a partir de los resultados de un modelo de fiscalización basado en teoría de juegos. Debido a restricciones de tiempo y de responsabilidades en el proyecto en el que se enmarca esta memoria, no se consideraran los siguientes puntos:

No se considera la implementación de estos algoritmos dentro del sistema de fiscalización actual debido a restricciones de tiempo en la elaboración de esta memoria, pese a esto, se entregan herramientas para facilitar esta.

No se consideran recomendaciones al modelo de teoría de juegos cuyo resultado es el punto de partida de los algoritmos aquí expuestos, ya que la adaptación de puntos y arcos del grafo utilizado, junto con la estructuración de los parámetros entregados para resolverlo, escapan de las responsabilidades otorgadas en el proyecto para la realización de esta memoria.

Por razones de alcances del mismo proyecto, no se consideran recomendaciones tanto de estructura organizacional, manejo de recursos humanos dentro del departamento de control de la evasión ni el rediseño de procesos de fiscalización actuales, ya que estos cambios deben ser promovidos por el mismo directorio (DPTM)

2.5 Justificación

Para poder medir el nivel de impacto que la implementación de esta memoria tendría en el sistema, se considerará únicamente el beneficio de mantener una coordinación de cuadrillas utilizando algoritmos de matching y su impacto en el nivel de fiscalización⁶, comparándolo con el sistema actual llevado de forma manual.

Para poder determinar el impacto que provoca la modificación del nivel de fiscalización en la evasión, se elaboró una tabla comparativa entre 8 ciudades diferentes comparando el nivel de fiscalización con el nivel de evasión.

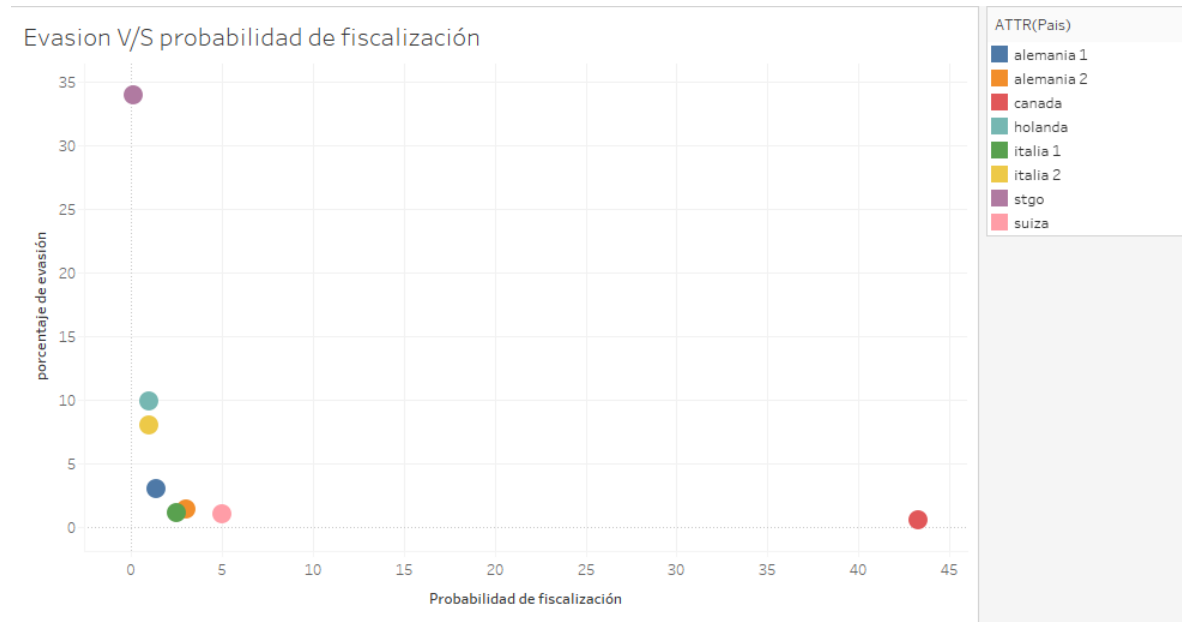


Ilustración 3: Visualización de impacto del nivel de fiscalización en el nivel de evasión en diferentes países

A partir del gráfico anterior se puede ver que la evasión y el porcentaje de fiscalización están relacionados de forma inversamente proporcional, donde esta relación se ve maximizada cuando se aplica una transformación constante tanto al porcentaje de evasión como de fiscalización de 0.393 y 0.0.034 respectivamente.

Luego se realizó una simulación con la metodología indicada en el párrafo anterior de como cambiaría la evasión dentro del sistema Transantiago al mantener una tasa de fiscalización como la de otros países.

⁶ Cantidad de usuarios fiscalizados

CIUDAD	FISCALIZACIÓN REALIZADA (%)	EVASION REAL (%)	EVASIÓN SIMULADA (%)	DESVIACIÓN (%)	PORCENTAJE DE DESVIACIÓN (%)
SUIZA	5	1	0.9	0.1	10%
ALEMANIA 1	1.4	3	2.24	0.76	25%
ITALIA1	2.5	1.1	1.41	0.31	28%
HOLANDA	1	9.9	3	6.9	70%
ITALIA 2	1	8	3	5	63%
ALEMANIA 2	3	1.4	1.2	0.2	14%
CANADÁ	43.3	0.5	0.45	0.05	10%

Tabla 1: Comparación de ajuste de modelo de predicción de nivel de evasión en diferentes países

A partir de los resultados se puede apreciar que el modelo ajusta bien exceptuando los casos de Holanda e Italia donde mantiene un gran porcentaje de desvío.

Considerando la limitante de la cantidad de datos en la elaboración de este estudio, se considera que el modelo ajusta suficientemente bien, por lo que se utilizará este para el cálculo del beneficio potencial de la implementación de esta memoria en el sistema de coordinación de cuadrillas actual.

Para poder saber en cuanto podría mejorar el sistema con la implementación de un modelo de calendarización, se realizó una simulación de puntos a fiscalizar dentro de Santiago y luego se asignó estos puntos de forma aleatoria a cada cuadrilla, simulando el estado actual del sistema, luego se calcularon los mismos puntos a fiscalizar, pero esta vez, se asignaron los puntos a las cuadrillas de forma óptima, simulando como sería el nuevo sistema, los resultados se encuentran en la siguiente tabla.

SIMULACIONES	KILÓMETROS RECORRIDOS NUEVO SISTEMA	KILÓMETROS RECORRIDOS SISTEMA ALEATORIO	MEJORA (%)
200	34.668	22.357	35.50%

Tabla 2: Comparación de kilómetros recorridos por fiscalizadores según sistema de coordinación

Como se puede apreciar en la tabla anterior, luego de realizar 200 simulaciones, en promedio el nuevo sistema reduce la movilización de los fiscalizadores en un 35.5%.

Ahora se analizará cuanto tiempo del horario laboral utilizan los fiscalizadores en movilizarse desde el primer punto hasta el segundo punto.

Actualmente las cuadrillas mantienen una restricción de no desplazarse por más de 15 minutos en auto desde el primer hasta el segundo punto de fiscalización, por lo que asumiendo un desplazamiento aleatorio con distribución uniforme entre el primer punto y el siguiente (supuesto utilizado para el cálculo anterior), las cuadrillas tendrían un movimiento en auto de 7.5 minutos en promedio. Por otro lado, en el caso que se implemente el nuevo sistema, las cuadrillas se trasladarían solo 4.83 minutos (35% menos tiempo en promedio), dejando así 2.66 minutos por día libres que utilizarán para fiscalizar en vez de para desplazarse, por lo que llevado a tiempos de fiscalización y considerando un horario laboral completo en las cuadrillas (8 horas), significaría un aumento de 0.5% de tiempo fiscalizado dentro de Transantiago.

Utilizando el modelo generado previamente que relaciona el porcentaje de fiscalización con el nivel de evasión y considerando tanto el nivel de fiscalización como de evasión actual en Santiago, 0.11%⁷ [11] y 34% respectivamente. El mejorar en 0.5% la fiscalización, podrá aumentar la tasa de fiscalización a 0.11055%, lo que bajaría la evasión a 33.7555%, es decir una reducción de 0.244% en la evasión del sistema, lo que generaría ingresos previamente no percibidos de \$1.945.768.712⁸ al año.

En conclusión, la implementación de este modelo de scheduling dentro del sistema de Transantiago, podría reducir la evasión en 0.244%, lo que equivaldría a aumentar los ingresos del sistema de transporte en \$2.993.490 dólares⁹.

⁷ Porcentaje de pasajeros fiscalizados con respecto a la cantidad de pasajeros totales.

⁸ Asumiendo un costo del pasaje de \$760 y 1.047.400.913 viajes anuales dentro de Transantiago.

⁹ Cambio de pesos a dólares de 650 pesos.

3 Marco conceptual

En este capítulo se detallará el contexto del proyecto en el que se desenvuelve esta memoria, por otro lado, se detalla el contexto teórico sobre el que se basa la realización de este trabajo, separando las definiciones para el desarrollo estático como dinámico.

3.1 Contexto del proyecto

En cuanto al contexto, se distinguen dos temas principales. En primer lugar, se encuentra el proyecto en sí, donde una de sus etapas incluye los resultados de esta memoria y, por otro lado, el modelo utilizado, cuyo resultado es utilizado como base para esta memoria.

3.2 El Proyecto

El proyecto en el que se enmarca esta memoria se titula “Desarrollo de tecnologías para el control de la evasión en el transporte público”. Sus objetivos consisten por un lado en desarrollar algoritmos eficientes para la resolución de un modelo de fiscalización a gran escala, permitiendo su implementación en la ciudad de Santiago, y por otro lado, desarrollar métricas para generar estudios de impacto en la variación de parámetros de las características de la fiscalización en sí, tales como la variación del presupuesto de fiscalización y su impacto en la cantidad de evasores multados o el impacto disuasorio de la implementación de diferentes mecanismos de multas. Para la realización de estos objetivos, el proyecto se divide en cuatro fases fundamentales.

En primera instancia, se realiza un levantamiento de datos necesarios para la implementación del modelo de fiscalización. Esta información consiste en el mapa de Santiago con los diferentes recorridos de los buses, sus horarios y velocidades a diferentes horas del día, la estructura de este mapa, como ubicación de paraderos y recorridos que tienen paradas en estos. Por otro lado, es necesaria la información del comportamiento de los usuarios tanto pagadores como evasores. Luego, esta información debe ser pre-procesada, consolidada y automatizada de manera de permitir un desarrollo sostenible del resto del proyecto.

En segunda instancia, se realiza el desarrollo del modelo matemático de fiscalización. Esta etapa consiste en la formulación del modelo matemático que utiliza los datos obtenidos y pre-procesados previamente. Este se basa en el modelo hallado por José Correa et al. [16], que luego es estudiado y modificado para adaptarlo al modelo de transporte, fiscalización y uso del sistema de transporte en Santiago. Luego, junto con las modificaciones en la dimensión de adaptabilidad al sistema, se realizan modificaciones para reducir los tiempos de resolución con el fin de generar una implementación efectiva dentro del sistema de fiscalización de Santiago. Por otro lado, se desarrolla un algoritmo que transforma las probabilidades de inspección que entrega el modelo y estrategias concretas de fiscalización, desarrollo que es el tema principal de esta memoria.

En tercera instancia se implementa y resuelve el modelo propuesto a través de la programación de software implementado en un lenguaje de programación eficiente, tal como Java, C++ o C, junto con la implementación en una herramienta de optimización especializada para este tipo de modelo.

Finalmente, y en última instancia, se desarrollará una aplicación web que incorpora herramientas tanto operativas como estratégicas, que permitirá coordinar el desplazamiento de las cuadrillas de fiscalizadores de forma automática, derivando la información obtenida del modelo directamente a la unidad de control de tránsito.

3.2.1 El modelo

El modelo que se implementa en el proyecto antes mencionado se basa en la de teoría de juegos y la interdicción de grafos. La interdicción consiste en la interrupción de arcos de un grafo, con el fin de cumplir un objetivo en contra de un “adversario”. Esta interrupción generalmente está sujeta a una restricción de presupuesto, por lo que se debe generar una modificación al grafo de manera de generar el mayor beneficio posible manteniendo un nivel acotado de cambios.

Este tipo de modelo se comenzó a utilizar durante la guerra de Vietnam, específicamente en 1970 (McMasters et al.) [17], y en 1971 (Ghare et al.) [18], en los que fueron utilizados para romper las líneas de suministros de los adversarios. Luego, este tipo de modelo continuó su desarrollo, para aumentar la eficiencia en su resolución y su versatilidad a la hora de implementarlos, como es el caso de Wood et al. [19] e Isreali et al. [20], en los que se desarrolla un modelo de programación entera y entera mixta respectivamente.

Por otro lado, una implementación de modelos de la teoría juegos es el juego de Stackelberg. Este consiste en simular las acciones de un líder y un seguidor, en las que primero el líder decide como actuará y luego los seguidores, al analizar las acciones del primer jugador, generan una respuesta en que maximizan sus utilidades, luego estas interacciones se repiten con el fin de maximizar la utilidad del líder anticipando las acciones de los seguidores. Implementaciones de este tipo de modelos se puede ver en los trabajos de Brown [21], Paruchuri, [22] [23], Tsai [24] y Borndörfer [25].

Es justamente este último trabajo el que utiliza, Fare evasion in transit networks [16] (modelo principal del proyecto actual) para la formulación del modelo, en este caso, el líder es el coordinador de fiscalización del sistema de transporte y los seguidores son evasores que desean minimizar sus costos de transporte (considerando tiempos de traslado, costo de pasaje, probabilidad de fiscalización en la ruta y multa de evasión). Con el fin de maximizar el costo esperado de los evasores, el líder entrega probabilidades de fiscalización en los arcos del grafo que los seguidores deberán recorrer.

Para la elaboración de ese estudio, se consideran dos variaciones al modelo. En una de ellas se considera la adaptabilidad del evasor, donde el evasor puede cambiar su comportamiento una vez generada la multa, ya que ahora no tiene que preocuparse el resto de su viaje por la probabilidad de evasión, y en otro nivel, se estudian dos tipos de tarificación, una variable por un lado y fija por otro, obteniendo resultados interesantes al momento de elegir qué tipo de modelo implementar, tales como que el valor óptimo de la versión con un evasor adaptativo versus el valor óptimo de la versión con un evasor no adaptativo, solo varía en una razón de 4/3. Finalmente se implementan algoritmos de búsqueda

local, relajaciones y linealizaciones al modelo que permiten una ejecución mucho más eficiente, manteniendo un gap de solo $\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ para el caso de un evasor adaptativo.

Luego de la realización de este estudio. Bahamondes [26] generaliza el modelo, donde permite al evasor obtener información sobre los fiscalizadores a medida que recorre el grafo, modificando su decisión.

Estos modelos, tanto en su versión con evasores adaptativos, no adaptativos o de conocimiento variable, entregan un resultado óptimo donde se maximiza el beneficio del líder, ya sea maximizando el ingreso por multas obtenido o maximizando el costo mínimo del evasor. Este resultado incluye la estrategia óptima del líder en cada caso, estrategia que consiste en una densidad de probabilidad de fiscalización en todos los arcos del grafo sujeta a límites de presupuesto previamente fijados.

Esta densidad de probabilidad de la estrategia del líder es utilizada en esta memoria como la información de entrada para la ejecución de los modelos tanto estáticos como dinámicos, en los que se ejecutan estas estrategias, pero desde una dimensión más abordable para la organización fiscalizadora.

3.3 Modelos por aplicar

El marco en el que se sustenta este trabajo es el área de investigación de operaciones. En primer lugar, está el modelamiento estático, para resolver los problemas en que los fiscalizadores estarán fijos en un paradero en un turno específico. En segundo lugar, están los modelamientos dinámicos que permiten encontrar estrategias donde los fiscalizadores puedan moverse en el sistema, que se suban a los buses en movimiento, similar al modelo alemán (2.1.4).

3.3.1 Preliminares

Antes de describir los modelos a aplicar, se definirán conceptos importantes para poder comprender la forma en que se generan estos.

Definiremos un grafo $G=(V, E)$ como un par ordenado de nodos (V) y arcos (E) que unen nodos, cuando todos los arcos de este grafo tiene dirección, le diremos que es un grafo dirigido, este se define como un conjunto de nodos y arcos tales que $V \neq \emptyset$ y $E \subseteq \{(a, b) \in V \times V : a \neq b\}$, conjunto de pares ordenados de elementos de V , donde a es el nodo de inicio y b es el nodo de término. Cuando existe una partición de nodos (W, X), tal que cada arista del grafo mantiene un vértice en W y otro en X , se le denominará grafo bipartito, donde a cada uno de los conjuntos de nodos (W y X) se les denominará capa.

Se definirá $p \in \mathbb{R}^{|V|}$ como un conjunto de probabilidades de presupuesto B al conjunto que cumpla la siguiente condición, $0 \leq P_i \leq 1 \quad \forall i \in V \wedge \sum_{i=0}^V P_i = B$. Este conjunto de probabilidades mantiene la particularidad de que cada realización del conjunto se conforma por B eventos simultáneos.

Un matching, consistirá en la selección de arcos de un grafo bipartito de manera que estos arcos seleccionados no compartan ningún nodo en común. Se denominará como matching perfecto, cuando se

cumpla la condición de que todos los nodos son asignados a una pareja al momento de hacer un matching. Notar que esto solo puede pasar cuando ambos conjuntos mantienen la misma cantidad de nodos.

Un flujo en red será definido por un grafo $G = (V, E)$, donde se aplica una función capacidad ($c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_\infty$) y se agregan dos nodos llamados fuente (s) y salida (t), formando así la red de flujo (G, c, s, t) , se le llamará como flujo f a la cantidad de unidades que se enviarán de un nodo u a un nodo v (utilizando el arco dirigido (u, v)), determinado como $f(u, v)$, este será siempre menor o igual que su capacidad $c(u, v)$. Se denominará flujo factible al flujo tal que $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$ flujo de entrada (v) = flujo de salida (v).

Un problema de flujo a costo mínimo será un problema de flujo donde cada arco tiene asociado un costo $k(u, v)$ de enviar una unidad por el arco (u, v) , además este problema puede mantener cotas inferiores y superiores, $l(u, v)$ y $c(u, v)$ respectivamente, indicando que $l(u, v) \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ el fin de este problema es enviar cierta cantidad de flujo desde el nodo de fuente (s) hacia el nodo de salida (t), manteniendo el mínimo costo dentro del grafo.

Es importante notar que en caso de existir un óptimo definido en un problema de flujo a costo mínimo cuando el grafo $G(V, E)$ es bipartito $V = X \cup W$, el nodo de fuente (s) está conectado a todos los nodos de X , el nodo de salida (t) está conectado a todos los nodos de W , manteniendo todas las cotas superiores $c(u, v) = 1$ y enviando un flujo de $|X|$ por el nodo fuente, se generará un resultado que será el mismo que para un problema de matching a costo mínimo en el mismo grafo G .

3.3.2 Versión estática

El contexto en el que se desenvuelve la modelación estática es la modelación de flujo en grafos¹⁰. Este tipo de modelos se comenzó a trabajar en la década de 1930, donde Tolstoi [27] propone varios métodos para solucionar el problema de reducir el kilometraje en una red de transporte de carga por tren de la Unión Soviética. Finalmente, en este mismo artículo, Tolstoi resuelve un problema real en el que encuentra una heurística para un problema de 10 fuentes y 68 puntos de demanda. Luego en 1950, Ford et al. [28] propone un algoritmo de flujo máximo, utilizando el método de camino de aumento de flujo. Por otro lado, Ross et al. [29], intentando buscar el “cuello de botella” de la misma red utilizada por Tolstoi, encuentra que este tiene la misma capacidad que el óptimo original, dando como resultado la dualidad de max-flow/min-cut en un problema de flujo, donde el valor del flujo máximo de una red será el mismo que la capacidad del mínimo corte a este.

Existen trabajos más recientes como el de Goldberg et al. [30], donde implementa un método de escala para resolver el problema de costo mínimo de forma eficiente. En este método, se utiliza el trabajo realizado previamente por el mismo autor [31], en el que se utilizan técnicas de aproximación por subproblemas de escala de costos del grafo para encontrar el óptimo global, a través de la medición de la cantidad de restricciones de flujo que no son respetadas, resultando finalmente en un algoritmo de orden $O(n^3 \log(n \cdot c))$, donde solo es capaz de procesar costos enteros en arcos y flujo en unidades enteras.

Por otro lado, dentro de la literatura se encuentra un método de descomposición de puntos interiores, que permite descomponer una solución no entera en una combinación convexa de soluciones

¹⁰ [49]

enteras. Para el contexto de esta memoria es relevante ya que permite la realización de un algoritmo que podría mejorar los resultados de los modelos expuestos anteriormente. Este método, fue postulado por Grötschel et al. [32], donde detalla cómo poder generar un conjunto de puntos en la envoltura convexa de un poliedro a partir de un punto interior. Este se basa en el teorema de Carathéodory y en el método elipsoidal de A. Schrijver et al. [33] para postular su algoritmo, que consiste en encontrar un punto extremo cercano al punto original, luego buscar la proyección de estos puntos en el poliedro y reducir una dimensión de este, hasta encontrar los puntos necesarios según el teorema de Carathéodory.

3.3.3 Versión dinámica

Para la implementación de un sistema de optimización dinámico que se basa en el hecho que los inspectores fiscalizaran moviéndose al interior de los buses, se utilizan cadenas de Markov, estas permiten describir un proceso mediante transiciones aleatorias entre estados, transiciones que pueden ser realizadas ya sea por decisión determinista o por acción aleatoria. El nivel de generalización que este tipo de modelos propuesto por Bellman et al. [34] presenta permite generar una gran variedad de comportamientos.

La versatilidad de este modelo se comprueba al existir estudios con implementaciones de estas características en áreas, tales como estudios del comportamiento bursátil [35] , implementación en biología [36] , o utilización para proyección de GPS a una ruta [37].

Una implementación de estas cadenas de Markov en problemas de fiscalización es realizada por Leyton-Brown et al. [38]. En este caso, se utiliza una red de trenes e inspectores del sistema para modelar cadenas de Markov que luego son resueltas a través de modelos de Stackelberg. Una vez resuelto este problema, se obtiene una estrategia mixta de los patrulladores, que, para la implementación de su estrategia, se deben muestrear los estados y luego generar un conjunto de estrategias puras a utilizar. Finalmente, en este trabajo, se propone la implementación de un sistema donde se simulará cómo los fiscalizadores podrían recorrer el grafo diseñado.

Por otro lado, Xin [39] presenta un modelo de patrullaje que incluye elementos inciertos (como emergencias o retrasos), utilizando una arquitectura de modelos de Markov para su implementación.

El modelo implementado consiste en fijar a cada fiscalizador en un punto o estado definido por su dimensión de espacio y tiempo, luego desde este punto los fiscalizadores pueden tomar una decisión con respecto a un conjunto de posibles decisiones en ese punto. Una vez tomada la decisión, existe una posibilidad de que ocurra un imprevisto donde el fiscalizador deba movilizarse hacia otro lugar o esperar en el punto cierta cantidad de tiempo.

Para su modelación, utiliza juegos de Stackelberg, que luego resuelve encontrando equilibrios bayesianos, a partir de los cuales obtiene el resultado óptimo que transforma nuevamente a cadenas de Markov óptimas, de manera de facilitar su implementación.

Una vez obtenido el resultado, para su implementación, los fiscalizadores solo deben seguir el camino impuesto por su cadena establecida, facilitando así una implementación real, ya que las cadenas completas se podrían instalar en un dispositivo de cada fiscalizador donde no requiere mayor capacidad de cómputo y podrían funcionar sin conexión.

Un problema importante al que se enfrentan en la realización de un modelo de fiscalización es su implementación, ya que se debe coordinar a una gran cantidad de gente para una realización de un patrullaje eficiente en un ambiente donde existen problemas impredecibles de naturaleza aleatoria. Para solucionar esto, Tambe et al. [40], se basa en el resultado generado por Xin [39], donde construye una cadena de Markov para la generación de la decisión de cada fiscalizador y para implementar este modelo, se utiliza una aplicación dentro de un celular de cada fiscalizador.

Según el trabajo realizado, esta aplicación facilita la realización de la fiscalización en tres principales puntos.

- Permite obtener a los fiscalizadores indicaciones en tiempo real del modelo.
- Permite obtener indicaciones en tiempo real a los fiscalizadores en caso de algún imprevisto.
- Genera y almacena datos de patrullaje en tiempo real.

Esta aplicación, funciona de manera online, donde el coordinador central envía las tareas inmediatas a realizar para cada fiscalizador, con el fin de completar las metas de patrullaje a largo plazo, todo esto basado en la información en tiempo real del estado de cada fiscalizador.

A continuación, se muestra una imagen de esta aplicación.

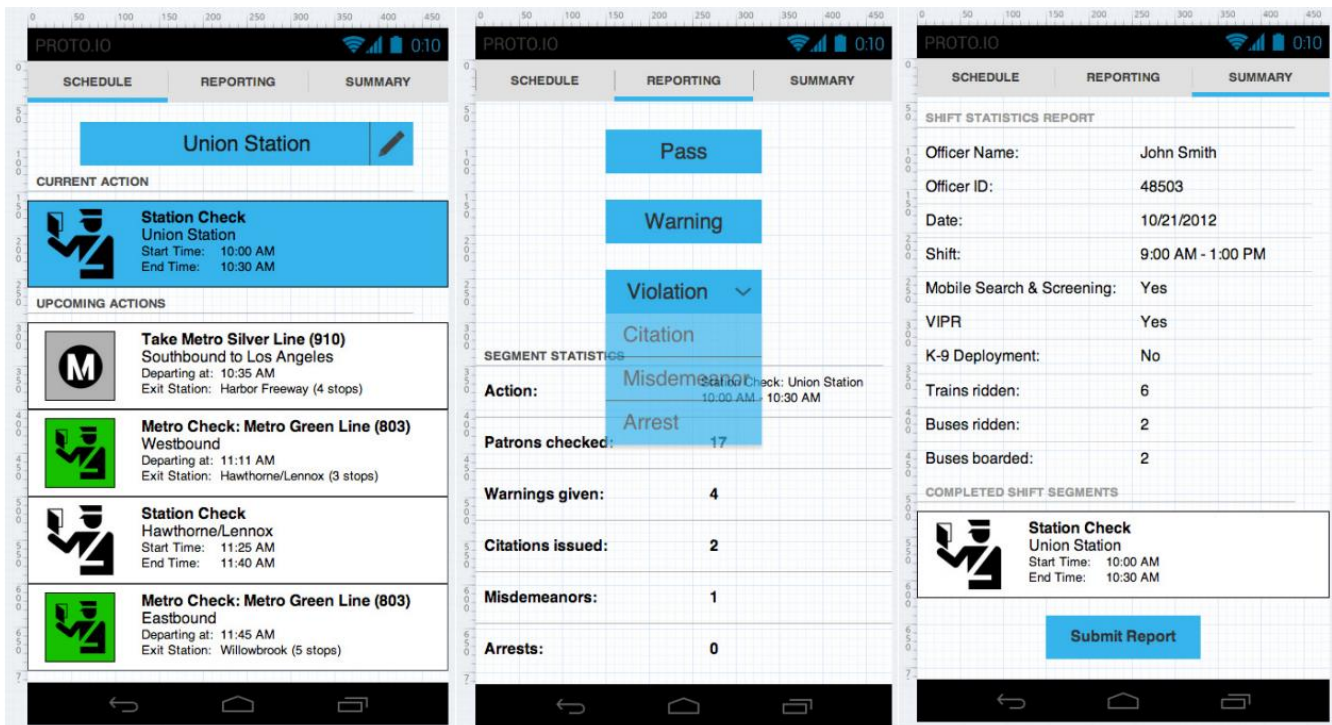


Ilustración 4: Visualización de la aplicación implementada por Tambe et al.

4 Metodología

La metodología utilizada para la elaboración de esta memoria, se basa en cinco sub-procesos, comenzando por el levantamiento de datos, la búsqueda de modelos, la implementación de estos, el análisis de los resultados y la elaboración de herramientas TI para apoyar la implementación.

4.1 Levantamiento de datos

Para la correcta elaboración de la memoria, es necesario en primera instancia la búsqueda de información relevante para poder conocer el funcionamiento actual del proceso de fiscalización, con el fin de poder generar soluciones que no provoquen un alto impacto en el desarrollo de la fiscalización misma. Por lo que se coordina la entrega de datos con el departamento de control de la evasión y la Universidad de Chile.

Por otro lado, es necesario recopilar información sobre el estado actual del sistema de transporte público, tanto en su operación misma como en su desempeño, ya que esto permite la elaboración de instancias cercanas a la realidad que se podrán ejecutar con los modelos y así obtener resultados coherentes. Para esto se gestiona la obtención de datos con el instituto de sistemas complejos de ingeniería (ISCI), del ministerio de transportes y del Proyecto en el que se desenvuelve esta memoria.

Finalmente para un correcto levantamiento de datos se realiza un análisis general de la estructura de la información obtenida para corroborar la calidad de los datos y la consistencia entre diferentes fuentes utilizadas, para esto se utilizan herramientas de visualización como Tableau y herramientas de manejo de información como Excel y Python.

4.2 Búsqueda de modelos

Luego del levantamiento de datos, se estudian posibles modelos de fiscalización estática a implementar, evaluando y comparando sus niveles de factibilidad y desempeño, con el fin de poder identificar aquellos que puedan entregar mejores resultados en estas dimensiones.

Por otro lado se estudian posibles implementaciones de modelos de fiscalización dinámica a partir de la información obtenida de diversos estados de fiscalización en sistemas de transporte en diferentes países. A partir de esto se determina el sistema de fiscalización dinámica que podría generar un mayor beneficio al sistema chileno.

4.3 Implementación de modelos

Una vez determinados los modelos a implementar, se generan los algoritmos necesarios para la ejecución de estos con los datos adquiridos en el levantamiento de datos. Para esto se utilizan las herramientas computacionales Python y Guroby. Una vez implementados los modelos se ajustan los parámetros utilizados y se realizan ajustes a cada uno con el fin de generar resultados eficientes y coherentes con la realidad actual.

4.4 Análisis de resultados

Una vez implementados y ajustados los modelos, se genera un estudio del desempeño de cada uno utilizando métricas tanto en la eficiencia de su ejecución como en el desempeño de sus objetivos respectivos. Junto con esto, se generan herramientas de visualización de resultados con el fin de facilitar su comparación y mejorar su comprensión.

4.5 Generación de propuesta TI

Una vez implementados y comparados los modelos de fiscalización tanto estática como dinámica, se diseñan propuestas de implementación en el área de TI del modelo de fiscalización dinámica con el fin de facilitar su posible utilización en el sistema actual de transporte, para esto se utilizan herramientas como UML y diagramas de secuencia.

5 Scheduling estático

El scheduling estático implementado en esta memoria consiste en transformar una estrategia de fiscalización mixta a un conjunto de estrategias puras, es decir, recibe como entrada un grafo donde cada nodo tiene una probabilidad de ser visitado, y luego genera un conjunto de actividades de fiscalización donde los nodos son visitados de manera tal que la realización tanto del conjunto de actividades forme en su conjunto el mismo resultado que la distribución de probabilidad de visita a cada nodo original. La demostración de que este cambio de estrategias es válido, se muestra a continuación.

- Sea V un conjunto de puntos a visitar y p_v la probabilidad de visitar el punto v , entonces $\sum_{v \in V} p_v = 1$, $0 \leq p_v \leq 1 \quad \forall v \in V$
- Se generan $(\bar{p}_{v,i})_{v \in V, i \in T}$ tal que:
 - o $\forall i \in T, v \in V \quad \bar{p}_{v,i} \in \{0, 1\}$
 - o $\forall i \in T \quad \sum_{v \in V} \bar{p}_{v,i} = 1$
- Entonces $\lim_{|T| \rightarrow \infty} \frac{1}{|T|} \sum_{i=1}^{|T|} \bar{p}_{v,i} = p_v$

Este resultado se utilizaría para poder coordinar con mayor facilidad las cuadrillas fiscalizadoras del sistema de transporte, ya que el entregar una actividad que debe ser completada en su totalidad es más fácil de medir y entender, que el comunicar una estrategia donde se deben cumplir los estados de probabilidad en el largo plazo.

A continuación, se muestra un ejemplo sobre las diferencias entre estas estrategias.

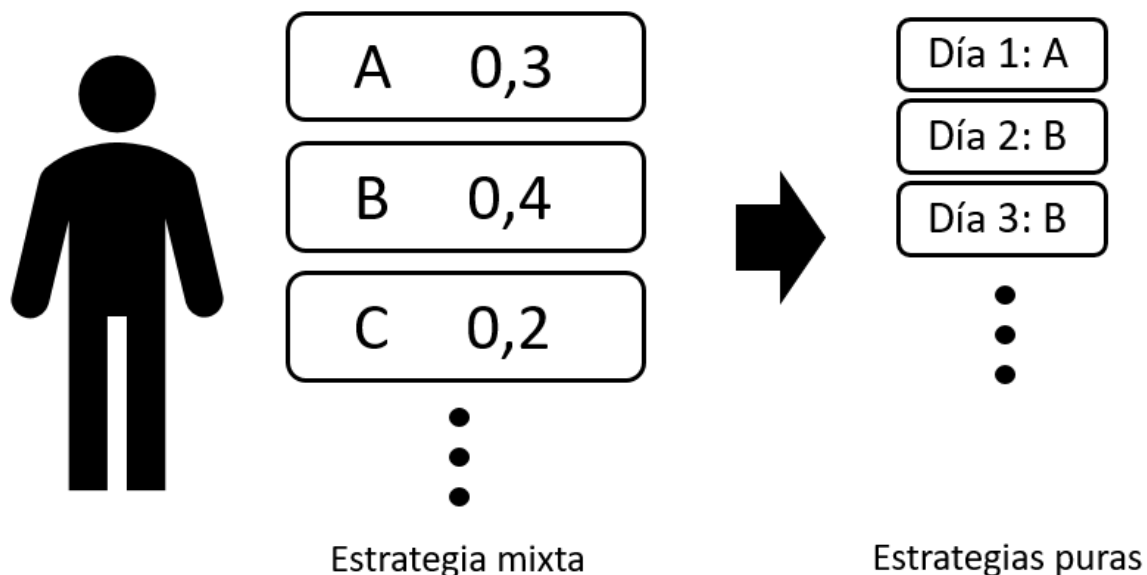


Ilustración 5: Diferencia entre estrategia mixta y estrategia pura de fiscalización

Como se puede ver en la imagen anterior, en el lado izquierdo se encuentran las estrategias mixtas que el fiscalizador debe cumplir: estar un 40% del tiempo en “B”, un 20% del tiempo en “C”, un 30%

del tiempo en “A”, etc. , pero como este fiscalizador solo puede estar en un estado al mismo tiempo, debe ejecutar un conjunto de acciones concretas de manera de poder generar esta estrategia mixta en el largo plazo, como se muestra en el lado derecho de la imagen.

Este problema genera que las acciones tomadas por el fiscalizador podrían ser costosas y predecibles en el largo plazo, ya que este tomará la decisión del estado al que se dirigirá intentando solucionar el problema de corto plazo, sin considerar todas las posibles soluciones a las que se podría enfrentar, lo que podría generar patrones o malas soluciones en caso de que las realizaciones de ciertos estados sean complicadas, por ejemplo determinar el mejor par de estados en los que estar durante el día, considerando las distancias entre estos.

Bajo el contexto de esta tesis, estos posibles estados son el fiscalizar en un turno un paradero en específico. Para esto, se utilizarán dos modelos diferentes: por un lado, se utilizará una técnica de muestreo de nodos y matching, y por otro, se utilizará un método de generación de una combinación convexa de puntos enteros.

5.1 Generación de datos

Para poder realizar un estudio comparativo de los rendimientos entre los modelos propuestos, es necesario tener la capacidad de generar grafos de diferentes tamaños, por lo que para el cálculo de resultados se utilizan grafos generados de forma aleatoria, donde cada nodo es ubicado de forma uniforme dentro de un cuadrado formado por la diagonal cuyos extremos son $(-33.49, -70.72)$, $(-33.39, -70.56)$ ¹¹ (vértices extremos del cuadrado). Luego la cantidad de nodos por turno son determinados según la simulación respectiva. La probabilidad de fiscalización en cada nodo es determinada de forma aleatoria entre todos los nodos. Luego se ponderan las probabilidades generadas en cada capa¹², de manera de generar un vector de probabilidad de fiscalización de magnitud igual a la cantidad de cuadrillas dentro de cada capa.

5.2 Modelo versión muestreo

El modelo con muestreo consiste en realizar una muestra de los nodos del grafo original a partir de las probabilidades de fiscalización de cada uno. Luego se calcula la solución de un problema de flujo a costo mínimo¹³, para así obtener la combinación de puntos que minimice el tiempo de traslado en este subgrafo, este modelo se puede utilizar para la realización de un flujo de dos turnos como se utiliza

¹¹ Puntos referencian latitudes y longitudes en formato de grados.

¹² Una capa consiste en el conjunto de nodos (paraderos) que pertenecen al espacio estudiado, luego por cada turno que se desea generar, se agrega una nueva capa que mantiene las mismas posiciones en los nodos que las capas anteriores.

¹³ Ya que el resultado del modelo de flujo a costo mínimo es idéntico al de un modelo de matching a costo mínimo.

actualmente en el sistema de fiscalización de Transantiago, o generalizarlo para una mayor cantidad de turnos.

Para su utilización, será necesario que cada vez que se quiera planificar las ubicaciones de las cuadrillas, se deberá ejecutar el programa completo, esto incluye el muestreo y la resolución del flujo a costo mínimo. A continuación, se muestra un diagrama de cómo funciona el modelo.

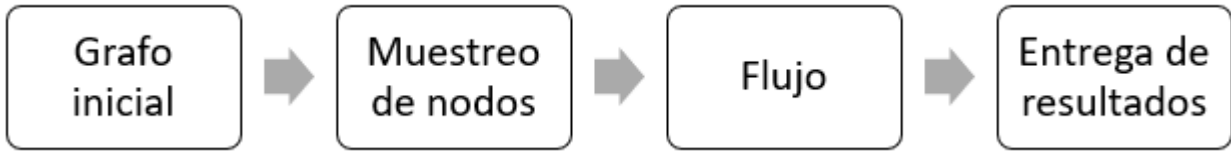


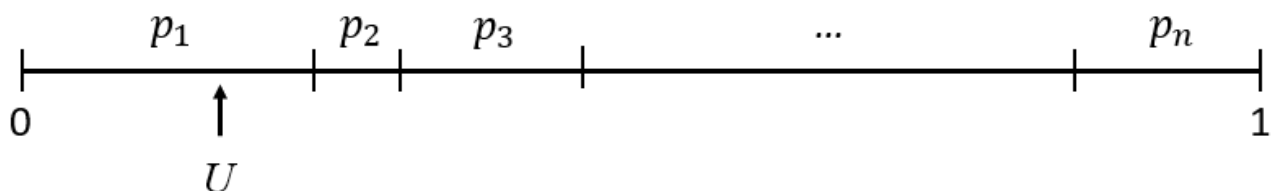
Ilustración 6: Diagrama de proceso de modelo versión muestreo

5.2.1 Muestreo

Para poder generar un subgrafo que sea factible dada la restricción de cuadrillas fiscalizadoras y que a la vez mantenga la estructura inicial del grafo, se utiliza un método de muestreo diferenciado por capas. Este método se caracteriza por su capacidad de generar una muestra de nodos (paraderos) de tamaño fijo manteniendo las proporciones de las probabilidades dentro de su ejecución. El algoritmo que lo compone se describe a continuación.

- **Escoger un orden sobre los nodos con $p_v > 0$: v_1, v_2, \dots, v_n**
- **Situar en una recta de números reales las cantidades (siendo B la cantidad de cuadrillas disponibles y N la cantidad de nodos): $\sum_{i=1}^k p_{v_i}$, $k = 1, 2, \dots, N$**
- **Generar un conjunto de nodos a seleccionar vacío: $V_c = \emptyset$**
- **Generar una realización de una variable uniforme (0,1): $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$**
- **Por cada b entre 0 y B-1:**
 - o **Considerar el intervalo $[b, b+1]$**
 - o **Seleccionar el mínimo k tal que: $\sum_{i=1}^k p_i \leq U + b \wedge \sum_{i=1}^{k+1} p_i > U + b$**
 - o **Agregar este elemento al conjunto: $V_c \leftarrow V_c \cup \{k\}$**
- **El resultado del muestreo será V_c**

Figura 1: Ejemplo de posicionamiento en probabilidades para el primer intervalo



A continuación, se ejemplificará el método recientemente expuesto con seis eventos, sus probabilidades son las siguientes:

EVENTO	A	B	C	D	E	F
PROBABILIDAD	0.5	0.5	0.9	0.2	0.5	0.4

Tabla 3: ejemplo de eventos en método de muestreo

¹⁴Como la suma de estas probabilidades es tres, entonces se generan tres intervalos de tamaño uno, como se muestra a continuación.

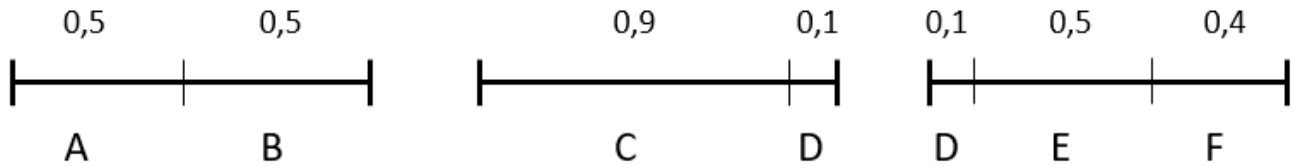


Ilustración 7: Ejemplo de generación de intervalos en método de muestreo

Se genera un número aleatorio uniforme entre 0 y 1, en este ejemplo, este es 0.65, a continuación, se muestra el punto en el que intercepta este número a cada intervalo.

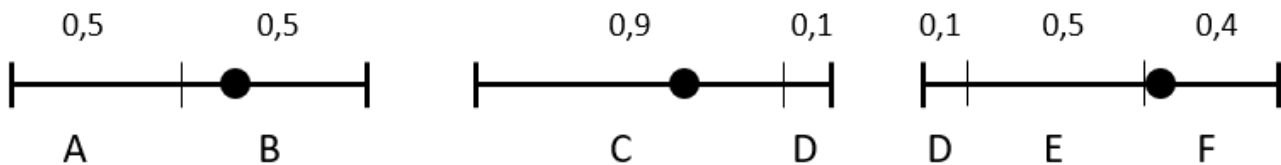


Ilustración 8: Ejemplo de ubicación de punto dentro de eventos en método de muestreo

Una vez localizado el punto, se seleccionan los eventos respectivos, en este caso serán el evento “B”, “C” y “F”.

Una vez realizado este proceso se obtiene una muestra que mantiene las probabilidades originales. La explicación se muestra a continuación¹⁵.

Entonces, la probabilidad de que la realización U de una uniforme $[0,1]$ genere un muestreo V_c , donde el evento v_k esté incluido será igual a la probabilidad de ese evento, como se muestra a continuación.

¹⁴ Cabe destacar que para la ubicación del evento “D”, es necesario dividirlo para poder completar los intervalos, esta división no afecta el correcto desempeño del método.

¹⁵ Demostración realizada por Voss [48].

$$\begin{aligned}
P(v_k \in V_c) &= P(\exists b / \sum_{i=1}^k p_i \leq U + b \wedge \sum_{i=1}^{k+1} p_i > U + b) = P(\exists b / \sum_{i=1}^k p_i - b \leq U \wedge \sum_{i=1}^{k+1} p_i - b \\
&> U) = P(U \in [\sum_{i=1}^k p_i - b, \sum_{i=1}^{k+1} p_i - b)) = P_k
\end{aligned}$$

Ecuación 1: Demostración sobre cumplimiento de probabilidades finales

Es importante destacar que la ejecución de este método de muestreo genera probabilidades idénticas al largo plazo, pero existen soluciones que nunca podrán ser realizadas, debido a la construcción propia del método, ya que dos eventos que pertenezcan al mismo intervalo nunca serán muestreados, ya que solo se escoge un evento de cada intervalo. Por lo que para liberar esta restricción se propone que cada cierta cantidad de iteraciones, se reorganice el orden de eventos, de manera de poder combinar eventos que previamente pertenecían al mismo intervalo, este reorden no afectará en las probabilidades resultantes, sino que solo modificará los posibles resultados obtenidos.

Para poder mantener la estructura del grafo, se realiza este método diferenciado por capa (por cada turno de fiscalización), de manera de mantener la misma cantidad de nodos en cada capa, una vez realizado el muestreo de los nodos, se filtran los arcos que corresponden a nodos inexistentes, de manera de obtener un subgrafo coherente donde la cantidad de nodos por capa es la misma que la cantidad de cuadrillas fiscalizadoras. Luego se procede a ejecutar el modelo.

5.2.2 Modelo

La estructura del grafo de entrada consiste en una estructura dirigida de flujo, con nodos de entrada de flujo y nodos de salida de flujo, esta estructura permite encontrar un flujo, cuyo resultado será análogo al resultado del matching a costo mínimo de cada capa, como se muestra en el siguiente diagrama.

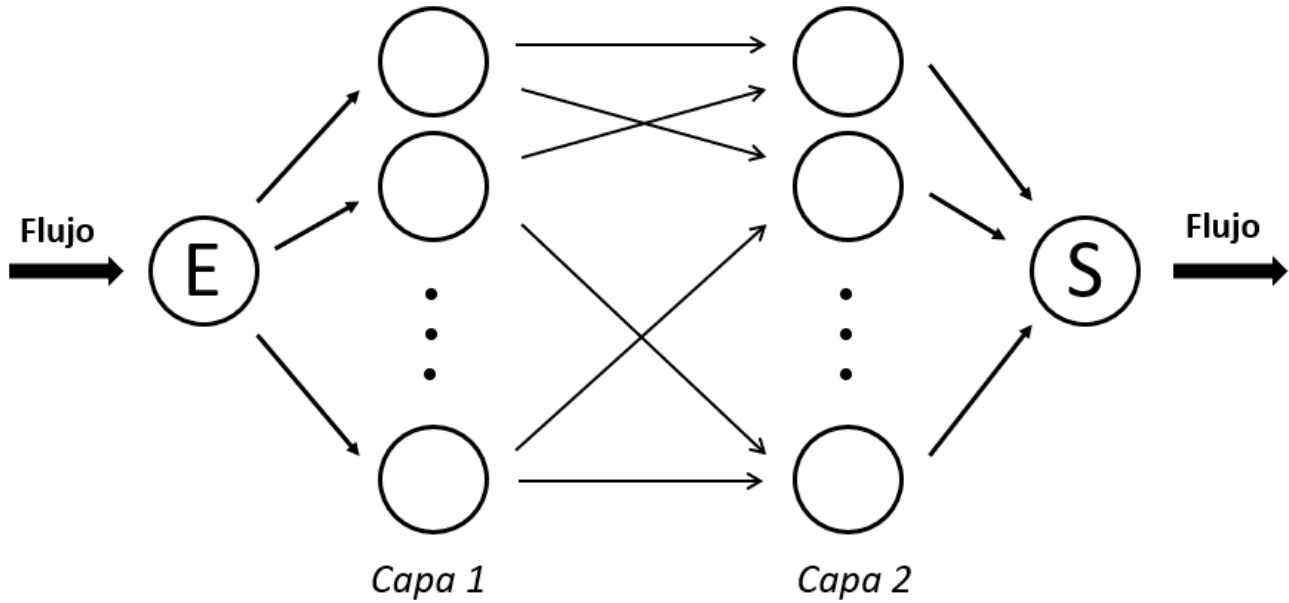


Ilustración 9: Ejemplo de estructura de grafo versión muestreo

Dentro de este grafo, cada nodo (con excepción de nodo inicial y final) representa un estado de fiscalización, es decir, un turno donde los fiscalizadores están en un paradero en específico y cada arco representa la ruta a tomar para dirigirse del nodo de partida al nodo final. Para la generación de los costos de cada arco, se consideró que el costo de los arcos entre la primera capa de nodos con el nodo de entrada y la última capa de nodos con el nodo de salida, serían con costo 0, ya que su existencia no incide en el resultado final. Para los costos de los arcos entre las capas intermedias, se utilizó la fórmula de Haversine para determinar la distancia entre estos puntos¹⁶.

Se consideraron solo los arcos intermedios que estuvieran entre 10 y 12.000 metros de distancia, para simular que las cuadrillas cambien de ubicación en cada turno y también no viajen más de 15 minutos aproximadamente entre su cambio de turno (restricción impuesta por el DPTM).

Se consideró distancia entre los puntos en vez de tiempo de traslado debido a que la implementación del algoritmo de cálculo de caminos mínimos dentro del grafo de Santiago está fuera de los alcances de esta tesis y la generación de datos utilizando herramientas de distancias online como las entregadas por Google mantienen cuotas de consultas muy restrictivas para la cantidad de datos que se deben generar.

¹⁶ La fórmula de Haversine es: $d = 2r \sin^{-1} \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin^2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right)} \right)$, donde

ϕ_2, ϕ_1 y λ_2, λ_1 se refieren a la latitud y longitud expresadas en radianes de los puntos 1 y 2, r representa el radio terrestre y d es la distancia entre estos puntos

Una vez que el grafo está correctamente generado, se implementa el siguiente modelo ¹⁷:

Modelo 1: Modelo versión muestreo PL_{MMM}

Variables $X_{i,j} = \#$ flujo que va desde i a $j \in \mathfrak{R}^+$

$$\begin{aligned} \min_f \quad & \sum_{i,j} c_{i,j} * X_{i,j} \\ \text{s.t.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modelo} \quad & \sum_i X_{i,j} = \sum_k X_{j,k} \quad \forall j \in V - (e, s) \\ & \sum_j X_{e,j} = BUDGET \\ & X_{i,j} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E \\ & X_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E \end{aligned}$$

Una vez ejecutado este modelo, entrega los arcos y nodos que utilizará cada cuadrilla en esta ocasión, identificadas por todas las variables cuyo valor sea igual a 1.

Un problema que se puede presentar con un método de muestreo y matching como este es que, en algunas iteraciones, el resultado del modelo sea infactible, debido a los límites de distancias impuestos, podría pasar que no existan suficientes conexiones entre capas para poder enviar el flujo necesario, por lo que esta instancia se eliminaría y se vuelve a iniciar un muestreo nuevo.

El desechar muestras donde los modelos sean infactibles, podría generar sesgos en el largo plazo, ya que, pese a que el muestreo en sí sea insesgado, hay ciertas combinaciones de nodos que no podrán generarse, por lo que es posible que este modelo tarde más de lo esperado en acercarse a las probabilidades iniciales de cada nodo.

5.2.3 Resultados

Existen dos principales dimensiones a evaluar en este tipo de modelo. Por un lado, están los tiempos de ejecución, y por otro, el nivel de cercanía con las probabilidades originales.

¹⁷ Es importante destacar que BUDGET en este modelo representa la cantidad de cuadrillas que fiscalizarán en esta instancia.

5.2.3.1 *Tempos de ejecución*

En cuanto a los tiempos de ejecución, a continuación, se muestran los tiempos de ejecución para 1, 25, 50, 100, 250, 500 y 1000 muestreos.

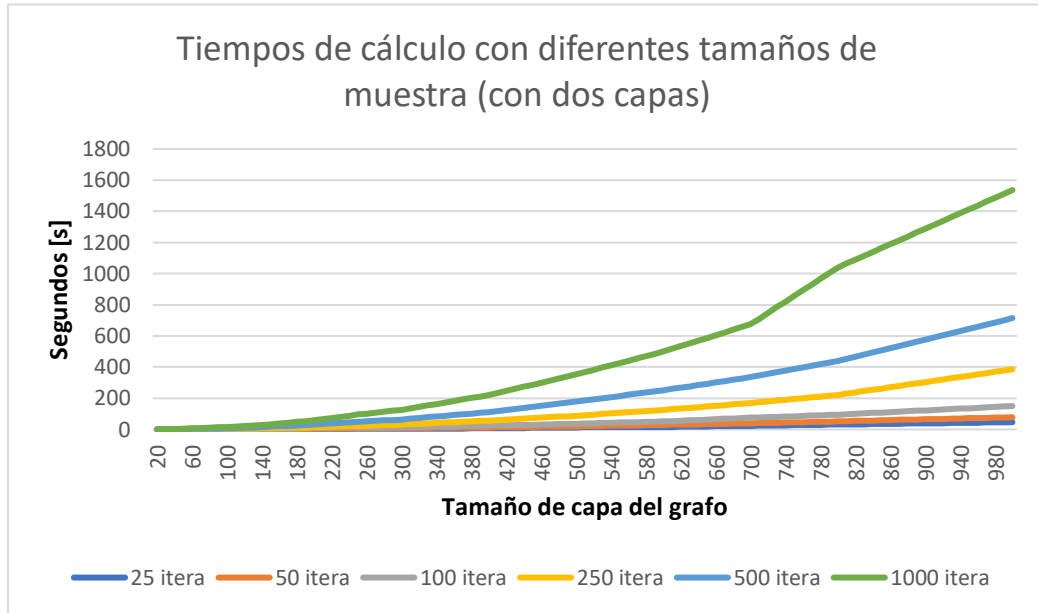


Gráfico 1: *Tiempos de cálculo en muestras*

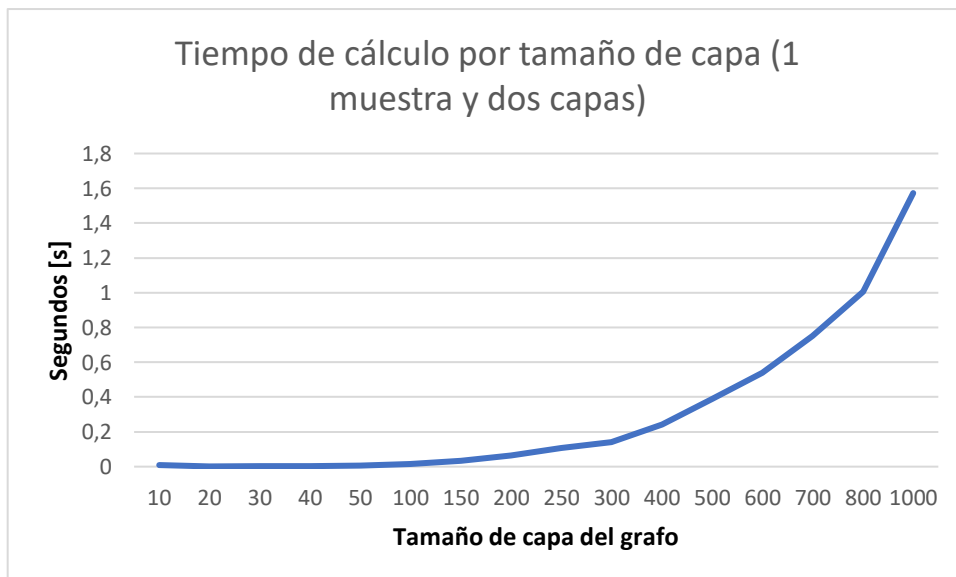


Gráfico 2: *Tiempo de cálculo en una iteración*

A partir de los resultados expuestos recientemente, se puede ver que el tiempo de cálculo mantiene un crecimiento polinomial considerando sólo la variación en la cantidad de nodos por capa.

Por otro lado, el tiempo de ejecución para una iteración muestra ser efectivo para el sistema de transportes en el que se utilizará (Considerando que se utilizarán 1000 nodos por capa en el grafo real) calendarización diaria no retrase el sistema de fiscalización en cuanto a tiempos de ejecución.

5.2.3.2 Cercanía con probabilidades originales

Antes de realizar los estudios correspondientes a esta área, hay una consideración importante a destacar.

La existencia de muestreos infactibles debido a la falta de arcos suficientes entre capas a partir de la restricción de distancia impuesta¹⁸ puede afectar los resultados de las probabilidades totales alcanzadas en el largo plazo, ya que no existe igualdad de condiciones para determinar factibilidad en cada punto, por lo que puntos en el borde del mapa a muestrear tienen mayor probabilidad de resultar infactibles que puntos más centrales que ellos. Esto sucede porque la densidad de puntos céntricos es mayor que la densidad de puntos del borde (pese a mantener el mismo radio de factibilidad), por lo que, en el largo plazo, podría resultar que los puntos centrales del mapa sean sobrerrepresentados y los puntos de borde subrepresentados.

A partir de este problema queda propuesto generar una herramienta de nivelación de la probabilidad de infactibilidad para todos los puntos del grafo. Esta herramienta consistiría en un sistema de determinación de radios factibles dependiendo de la ubicación del punto.

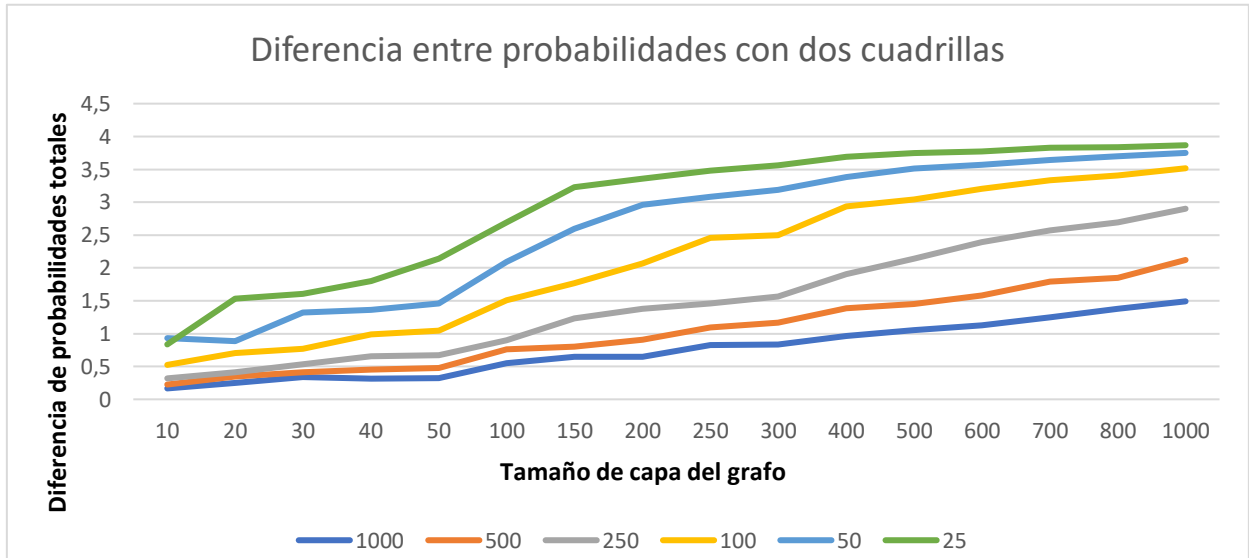


Gráfico 3: Diferencias entre probabilidades finales y esperadas que consiste en la suma de las diferencias absolutas de sus componentes

¹⁸ O restricción de tiempo según sea el caso.

El gráfico anterior muestra el nivel de cercanía entre las probabilidades de los nodos visitados, para esto, se determinó la diferencia absoluta entre las probabilidades de fiscalización originales en cada nodo (resultado directo del juego de Stackelberg) con respecto a las probabilidades resultantes luego de realizar el nivel de muestra respectivo.

Considerando que la cantidad de cuadrillas en el gráfico anterior es dos, se puede visualizar que cuando la diferencia es 4, hay una completa discordancia con la realidad (resultado de los juegos de Stackelberg) y, por otro lado, cuando es 0, hay una total concordancia con la realidad. En este caso se puede apreciar el aumento de concordancia en la medida que aumenta la cantidad de muestras, por lo que podemos concluir que para mantener un nivel de concordancia estable (25% de diferencia), será necesario generar un nivel de muestreo de dos veces la cantidad de nodos por capa.

A continuación, se muestra un ejemplo del resultado del matching, simulado en ubicaciones reales.

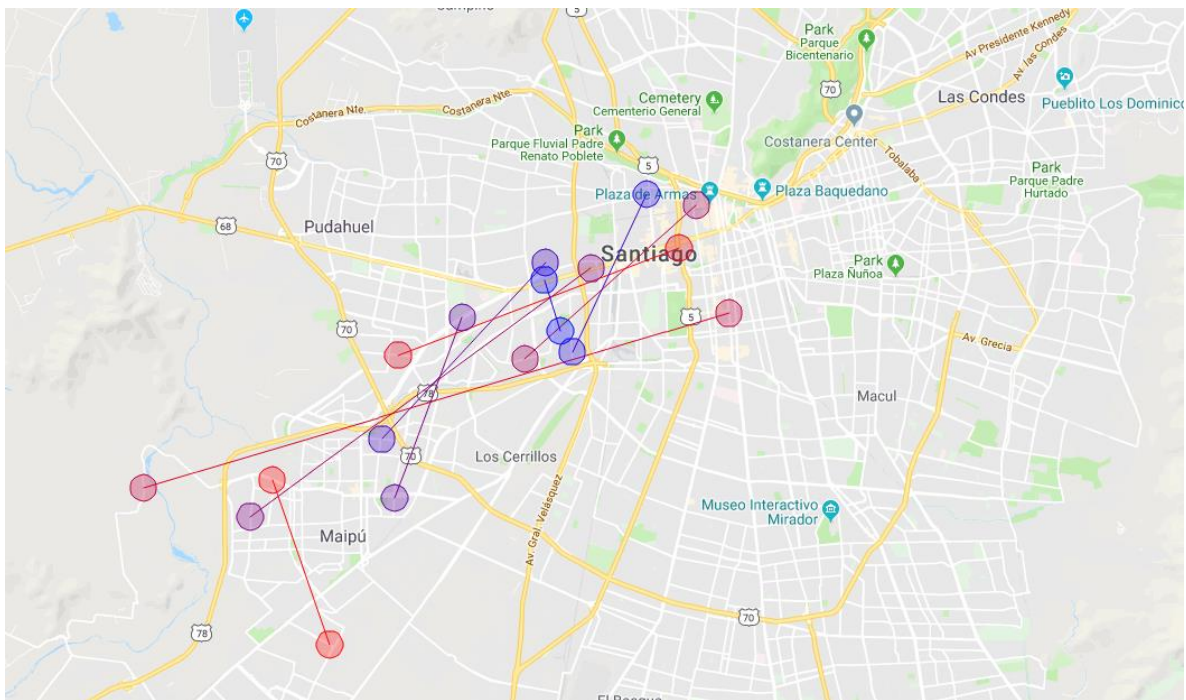


Ilustración 10: Ejemplo de visualización de resultado versión muestreo, donde cada punto representa un paradero fiscalizado y cada segmento representa el camino (en tiempo) que la cuadrilla deberá recorrer

Cabe destacar la gran cantidad de cruces de arcos que se presentan dentro de este grafo, cruces que no debieran presentarse, ya que indican que existe una pareja del cruce que puede permutarse y así reducir las distancias, pero al representar distancias en tiempo, estos cruces no representan distancias euclidianas en la imagen, por lo que un segmento extenso en distancia puede ser menor en tiempo que uno corto, debido a que utilizan diferentes tipos de vías. Permitiendo finalmente la existencia de cruces en la solución óptima de este matching.

5.3 Modelo de descomposición por puntos extremos (MDPE)

El modelo MDPE consiste en describir la solución del problema de flujo a costo mínimo utilizando los resultados de probabilidad de fiscalización del juego de Stackelberg, a partir de una combinación convexa de puntos del problema expuesto en (5.2.2), estos puntos mantienen la característica de que su combinación mantiene los mismos valores que el expuesto en (5.3.1), pero siendo solución entera cada uno de estos puntos por sí solo. Característica descubierta por Schrijver et al. [32].

Para su utilización, se deberá muestrear cada solución (punto extremo) encontrada con su ponderador respectivo, donde el resultado será la calendarización respectiva del día.

5.3.1 Construcción de la solución no entera

La solución no entera del modelo MDPE, es la base sobre la cual se buscarán las soluciones enteras que puedan describirla. Consiste en un modelo de flujo, con la misma estructura que el modelo presentado en el capítulo de modelo versión muestreo (5.2.2), pero con dos diferencias: en primer lugar, se fija que el flujo que pasa por cada nodo (descontando los nodos de entrada y salida) debe ser igual a la probabilidad de fiscalización del nodo respectivo. Por otro lado, se liberan las restricciones de integralidad de los arcos, ya que, si no se relajan estas restricciones, el resultado sería infactible (salvo en casos excepcionales).

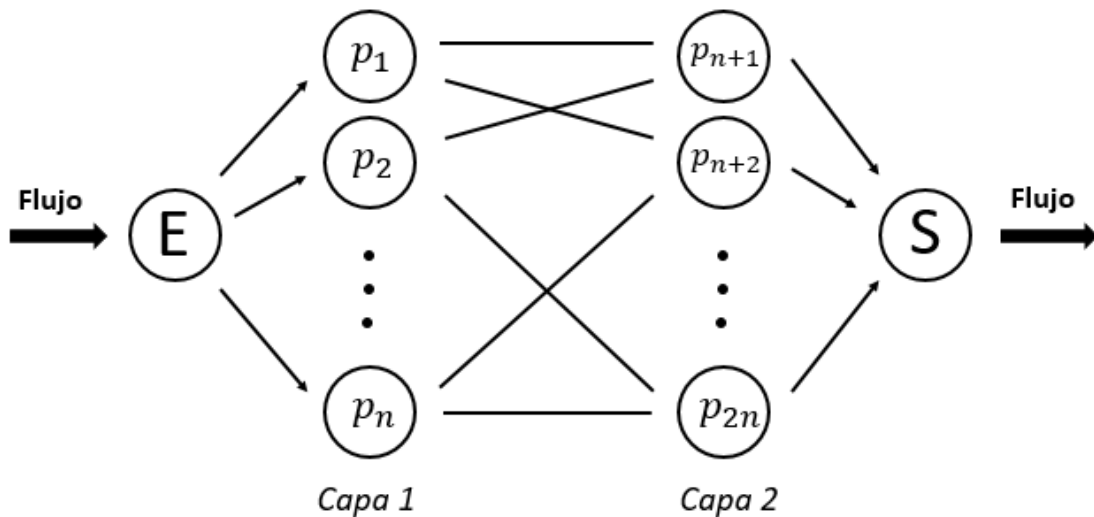


Ilustración 11: Ejemplo de la estructura del grafo del modelo MDPE

Para la creación de este grafo, al igual que en el modelo versión muestreo, se consideraron solo los arcos que estuvieran entre 10 y 12.000 metros de distancia.

Una vez que el grafo está correctamente generado, se implementa el siguiente modelo:

Modelo2: Modelo PL_{MDPE}

Variables $X_{i,j} = \#$ flujo que va desde i a $j \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \min_f \quad & \sum_{i,j} c_{i,j} * X_{i,j} \\ \text{s.t.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modelo} \quad & \sum_i X_{i,j} = \sum_k X_{j,k} \quad \forall j \in V - (e, s) \\ & \sum_j X_{e,j} = BUDGET \\ & \sum_j X_{i,j} = P_i \quad \forall i \in V - (e, s) \\ & X_{i,j} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E \\ & X_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E \end{aligned}$$

5.3.2 Método de construcción de soluciones enteras

Como se comentó en la sección (3.3.2), a partir del teorema de Carathéodory [41], si un punto se encuentra dentro de la envoltura convexa de una región en \mathbb{R}^d , entonces, este punto podrá ser descrito por a lo más $d+1$ puntos de esta región. En particular, este teorema se cumple para un poliedro donde los puntos que componen la combinación convexa del punto original son puntos extremos del poliedro.

Para poder encontrar los puntos extremos que descomponen al punto encontrado en la sección anterior (5.3.1), se utiliza el método propuesto por Martin Grottschel [42] para encontrar estos puntos de forma efectiva. La implementación de este algoritmo se divide en dos fases, en primer lugar, se generan las instancias iniciales y luego se avanza a una fase iterativa.

En la fase inicial, se busca el punto óptimo de la solución del modelo PL_{MDPE}, luego se seleccionan las variables cuyo valor sea entero y se fijan sus valores (eliminando aquellas variables cuyos valores sean 0).

En la fase iterativa, se busca el punto óptimo para el modelo PL_{MMM} considerando solo las variables no enteras del punto no extremo actual. Una vez encontrado este punto, se busca la proyección a la cara opuesta del poliedro considerando el factor de distancia entre estos tres puntos se genera un ponderador correspondiente al punto extremo encontrado con PL_{MMM}. La proyección encontrada corresponde a el punto no extremo base para la iteración siguiente. Esta fase se mantiene hasta que el punto proyectado dentro del poliedro corresponde a un punto extremo del poliedro de PL_{MMM}, o hasta que ya no quedan variables libres en este modelo.

A continuación, se describirá en profundidad cómo funcionan los tres procesos fundamentales para una eficiente implementación, estos son, el podado del grafo, búsqueda de puntos extremos,

búsqueda de proyección de los puntos extremos. Finalmente se explica con mayor detalle el funcionamiento general del algoritmo.

5.3.2.1 Podado del grafo

Para poder generar un algoritmo eficiente donde el tiempo de cómputo sea el menor posible, es necesario reducir la dimensión del poliedro original, de manera de excluir variables que claramente no influirán en el resultado final del algoritmo.

Es importante destacar que los valores del flujo que cada arco del grafo puede tomar están en el intervalo $[0,1]$, por lo que cuando en la solución no entera (5.3.1) el flujo sobre un arco tiene un valor entero (0 o 1), todos los valores para ese arco de los puntos que lo descomponen, deberán tener el mismo valor, como se muestra a continuación para el caso en que este valor sea 0 (análogo a cuando es de valor 1).

Ecuación 2: Demostración para podado de grafo

Consideremos $X^* = (X_{i,j})_{(i,j) \in E}$ como la solución óptima al modelo
Donde su descomposición será:

$$X^* = \sum_{k=1}^{|E|+1} \lambda_k * X^k \text{ con } \sum_{k=1}^{|E|+1} \lambda_k = 1 \text{ y } \lambda_k \geq 0$$

Proposición:

$$\text{si } X_{i,j}^* = 0 \Rightarrow X_{i,j}^k = 0 \forall k = 1, \dots, |E| + 1$$

Demostración:

$$\text{Supongamos que } \exists \bar{k} = 1, \dots, |E| + 1 / X_{i,j}^{\bar{k}} > 0$$

$$\text{Sea } (i,j) / X_{i,j}^* = 0 = \sum_k \lambda_k * X_{i,j}^k$$

$$0 = \lambda_{\bar{k}} * X_{i,j}^{\bar{k}} + \sum_{k \neq \bar{k}} \lambda_k * X_{i,j}^k$$

$$\geq 0 \qquad \qquad \qquad \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{\bar{k}} * X_{i,j}^{\bar{k}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{\bar{k}} = 0$$

*Por lo que $X^{\bar{k}}$ no forma parte de la descomposición de X^**

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, se pueden eliminar todas las variables en que la solución no entera sea igual a 0 y fijar como restricción activa ($x_{i,j}=1$) para los casos en que la solución no entera sea igual a 1.

El impacto en reducción de dimensiones no es despreciable por lo que este es un paso importante dentro del desarrollo eficiente del algoritmo. A continuación, se muestra el porcentaje de arcos podados comparados con la cantidad de arcos originales para simulaciones con grafos de diferentes tamaños.

NODOS	ARCOS ORIGINALES	ARCOS NO PODADOS	PORCENTAJE PODADOS
10	110	39	65%
20	416	79	81%
30	906	119	87%
40	1,585	160	90%
50	2,433	199	92%
100	9,731	399	96%
150	20,866	600	97%
200	37,665	802	98%
250	58,956	999	98.3%
300	83,998	1,200	98.6%
400	149,469	1,602	98.9%
500	231,321	2,003	99.1%
600	335,010	2,412	99.3%
700	453,501	2,811	99.38%
800	597,971	3,207	99.46%
1000	932,462	4,015	99.57%
1500	2,074,255	6,039	99.71%

Tabla 4: Comparación de tamaños entre grafos podados y no podados

Una vez podado el grafo, se eliminan las restricciones de flujo en los nodos (tercera restricción en el modelo previamente expuesto).

5.3.2.2 Determinación de cada punto extremo

Un punto extremo es un vértice dentro de un poliedro y se caracteriza en el hecho de que en caso de que exista un óptimo definido dentro de un poliedro valorizado por una función lineal, este valor siempre se encontrará en un punto extremo, por lo que, para encontrar el punto extremo más cercano,

buscaremos el punto óptimo del problema. El modelo por utilizar es el mismo modelo utilizado en (5.2.2), ya que los puntos extremos que encontraremos serán los vectores que formarán la descomposición del vector encontrado en (5.3.1) (vector que llamaremos vector original), por lo que es necesario que estos puntos sean enteros.

5.3.2.3 Determinación del nuevo punto no extremo

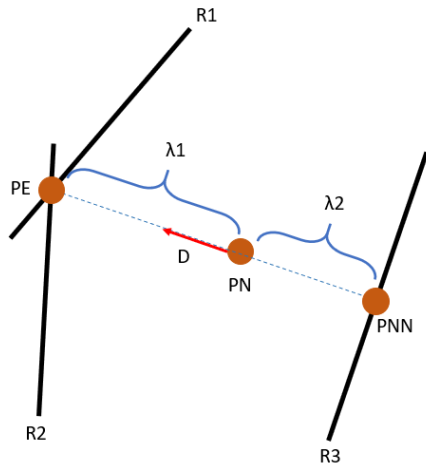
Para determinar la cara del poliedro que intercepta con la de la proyección entre el punto original y el punto extremo actual, primero hay que determinar la dirección de movimiento que utilizaremos. Para esto se genera el vector de movimiento $d^i = (X^* - X^i)$, siendo X^* el punto original, y X^i el punto extremo actual (Solución óptima de MVE). Una vez que se tiene la dirección de movimiento, A. Skoda [43] propone un método fuertemente polinomial de orden n^9 basado en el método utilizado por W. H. Cunningham [44] para encontrar el punto de intersección entre un vector y un poliedro, pero para este caso y dada la estructura del poliedro, se utiliza otro método, que se explica a continuación.

Dentro del poliedro actual todas las restricciones son activas, con excepción de las restricciones de flujo en los arcos y las restricciones de positividad de esta misma variable, por lo que la intersección entre el vector de dirección con el poliedro será en el punto $P(X^i) = X^* + \theta * d^i$, mientras θ cumpla la siguiente condición:

$$\theta = \min_j \left(\frac{(1 - X_j^* - X_j^i)}{d_j^i} \right)$$

Cumpliendo esta condición se encontrará el primer punto del poliedro de X^* donde se activa una restricción de flujo en arcos, sea esta 0 o 1.

Una vez encontrado el nuevo punto, se calculan el ponderador λ_i , definido a partir de $\lambda_1: \|X^* - X^i\|_2$ y $\lambda_2: \|X^* - P(X^*)\|_2$, Entonces $\lambda_i = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1}$. Esto significa que mientras más grande sea la distancia relativa entre el punto no extremo original y el nuevo punto no extremo con respecto al punto extremo, más grande será el ponderador λ_i . Este ponderador representa el nivel de cercanía de la nueva solución encontrada con respecto a las soluciones anteriores. A continuación, se muestra un diagrama del método recientemente descrito.



Leyenda	Significado
R1, R2, R3	Restricción del modelo
λ_1	Distancia entre PN y PE
λ_2	Distancia entre PN y R3
D	Dirección hacia PE
PE	Punto extremo
PN	Punto no extremo
PNN	Punto no extremo nuevo

Figura 2: Diagrama de movimiento dentro del poliedro

Una vez encontrado el ponderador λ_i y el punto no extremo nuevo, se fija la restricción en que se encuentra este punto (punto no extremo nuevo), de manera de reducir una dimensión del poliedro y poder sentar las bases para encontrar nuevamente otro punto extremo distinto al anterior.

5.3.2.4 Método de iteración

Para poder ejecutar el algoritmo de forma consistente, se detalla a continuación un pseudo código que detalla la ejecución total del algoritmo de descomposición por puntos extremos discutido anteriormente.

- 1) $X^* \leftarrow \text{sol. óptima de } PL_{MDPE}$
- 2) $E_{int} \leftarrow \{e \in E : X_e^* \in \{0, 1\}\}$
 $E_{frac} \leftarrow \{e \in E : 0 < X_e^* < 1\}$
- 3) $X_{int}^* \leftarrow X_{E_{int}}$
 $X_{frac}^* \leftarrow X_{E_{frac}}$
- 4) $\varphi \leftarrow \emptyset, \Lambda \leftarrow \emptyset$
- 5) $i \leftarrow 0$
- 6) **While** $E_{frac} \neq \emptyset \wedge i \leq |E| + 1$
 - a. **Sea** $PL_{MMM}^* \leftarrow$ *con las restricciones adicionales* $X_e = X_e^* \forall e \in E_{int}$
 - b. **Sea** $X^i \leftarrow$ *punto extremo óptimo de* PL_{MMM}^*
 - c. $d \leftarrow X^* - X^i$
 - d. $\theta \leftarrow \min_{e \in E: d_e \neq 0} \left(\frac{(1 - X_e^i - X_e^*)}{d_e} \right)$
 - e. $P(X^i) \leftarrow X^* + \theta d$
 - f. $\lambda_i \leftarrow \frac{\|X^* - p(X^i)\|_2}{\|X^* - X^i\|_2 + \|X^* - p(X^i)\|_2}$
 - g. $\varphi \leftarrow \varphi \cup \{X^i\}, \Lambda \leftarrow \Lambda \cup \{\lambda_i\}$
 - h. $X^* \leftarrow P(X^i)$
 - i. $E_{int} \leftarrow \{e \in E : X_e^* \in \{0, 1\}\}$
 $E_{frac} \leftarrow \{e \in E : 0 < X_e^* < 1\}$
 - j. $i \leftarrow i + 1$
- 7) $\Lambda^F \leftarrow \emptyset$
- 8) **For each** $i = 1, \text{ to } |\Lambda|$ **do**:
 - a. $\lambda_i^F \leftarrow \lambda_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \lambda_j)$
 - b. $\Lambda^F \leftarrow \Lambda^F \cup \{\lambda_i^F\}$
- 9) **Return** $\varphi \wedge \Lambda^F$
- 10)*/**Este resultado mantiene las siguientes características**
 - a. $\sum_{i=1}^{|\Lambda^F|} \lambda_i^F x^i = x^*$
 - b. $\sum_{i=1}^{|\Lambda^F|} \lambda_i^F = 1, \lambda_i^F \geq 0 \forall i = 1, \dots, |\Lambda^F|$
 - c. $X_e^i \in \{0, 1\} \forall i = 1, \dots, |X|, \forall e \in E$

5.3.3 Resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos del modelo descrito previamente, junto a una recapitulación de diferentes variaciones a la resolución con el fin de obtener un algoritmo eficiente en cuanto a tiempos de ejecución.

5.3.4 Mejoras al modelo y su resolución

NODOS POR CAPA [CANTIDAD]	10	20	30	40	50	100	150	300
TIEMPO DE RESOLUCIÓN [SEGUNDOS]	0.097	0.57	1.91	4.22	8.53	74.48	267.7	2,554.3

Tabla 5: Tiempo de resolución inicial

A partir de los resultados expuestos previamente, se puede ver que los tiempos de cálculo incrementan de manera explosiva con cada aumento de nodos en el grafo, llegando a alcanzar 43 minutos para el cálculo de 300 nodos. Considerando que, para la implementación de este algoritmo dentro del sistema de transporte, se requiere de un tiempo de ejecución razonable para al menos 1000 nodos por capa, por lo que es necesario modificar la implementación del algoritmo de manera de aprovechar la estructura del problema y así reducir los tiempos de ejecución.

5.3.4.1 Implementación de algoritmos de resolución de flujos

Para poder entender mejor cuáles son los “cuellos de botella” del modelo actual, debemos poder visualizar y desglosar en tiempos de ejecución cada una de las fases del modelo planteado, para así poder mejorar aquellos puntos críticos que tengan mayor capacidad de reducción de los tiempos de ejecución. El desglose para el modelo actual se muestra a continuación.

NODOS POR CAPA	TIEMPO PL NO ENTERO ¹⁹ [S]	TIEMPO PL ENTERO ²⁰ [S]	TIEMPO PUNTO NO EXTREMO ²¹ [S]	TIEMPO TOTAL ²² [S]
10	0.005	0.085	0.004	0.097
20	0.01	0.52	0.028	0.57
30	0.026	1.75	0.1	1.91
40	0.031	3.88	0.247	4.22
50	0.056	7.93	0.44	8.53
100	0.255	69.23	3.89	74.48
150	0.59	248.38	15.17	267.7

Tabla 6: Tiempos de resolución modelo versión 1

A partir de esta tabla, podemos ver que el punto de mayor conflicto se encuentra en la ejecución del cálculo de los puntos extremos del poliedro en la fase iterativa (columna PL entero de la tabla), por lo que el mejorar su rendimiento podría generar un alto impacto en la resolución eficiente del problema.

Al ser los puntos extremos encontrados soluciones enteras, entonces se pueden utilizar algoritmos combinatoriales para problemas de flujo en redes que entregarán soluciones enteras, como los algoritmos propuestos por Ford Fulkerson, [45]. Para esta memoria se utiliza, la herramienta de “min cost Flow” de OR-tools, herramientas de optimización open source mantenidas por Google.

En este caso, OR-tools utiliza el método de “cost-scaling push-relabel algorithm”, un algoritmo originalmente propuesto por Goldberg et al. [46], donde luego fue implementado de forma más eficiente por el mismo autor [47], este método se basa en crear un punto de partida, donde luego identifica los nodos cuya demanda u oferta no sea satisfecha, luego calcula el costo reducido de cada arco del grafo y aumenta el flujo que se envía por algún arco cuyo costo reducido sea negativo y no esté actualmente saturado. La complejidad de este algoritmo es de orden $O(n^2 * m * \log(n * C))$ donde C es igual al valor del costo más alto de los arcos del grafo, n es la cantidad de nodos y m la cantidad de arcos.

¹⁹ Tiempo utilizado para la búsqueda del punto no extremo utilizando el MVN (5.3.1).

²⁰ Tiempo utilizado para la búsqueda del punto extremo MVE (5.2.2).

²¹ Tiempo utilizado para la búsqueda del punto de proyección al poliedro (5.3.2.3).

²² Tiempo utilizado para la ejecución del algoritmo en su totalidad.

Un problema del algoritmo implementado por OR-tools, es que no es capaz de incorporar una cota inferior para el flujo a través de un arco por lo que es necesario realizar una modificación a la estructura del grafo para su correcta implementación.

La implementación de una cota inferior en el arco es importante para este modelo, ya que en la medida que se ejecuta el algoritmo, se van activando nuevas restricciones, específicamente, se activan las restricciones de capacidad de los arcos, fijando su flujo ya sea en 1 o en 0. Para cuando el flujo se fija en 0, solo es necesario borrar ese arco del grafo, pero al fijar la restricción en 1, es necesario fijar dentro del modelo la cota inferior en 1.

Para poder implementar una cota inferior ficticia, lo que se hace es, crear una demanda ficticia en el nodo cola del arco y una oferta ficticia en el nodo de cabeza, luego se fija la capacidad del arco en 0 y se ejecuta el modelo, una vez obtenido el nuevo óptimo, se agregan los costos del arco original y la variable que se omitió. El método se muestra en el siguiente diagrama.

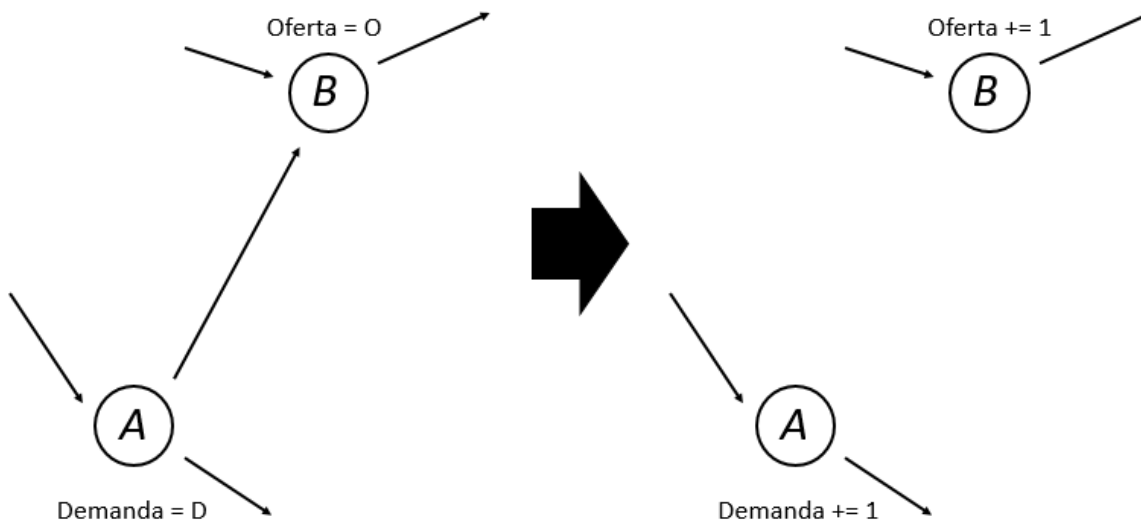


Figura 3: Ilustración de cambio en grafo por capacidad = 1

Con este sistema, se omite la existencia de este arco, pero considerando sus efectos en el flujo.

Una vez implementado este nuevo algoritmo de búsqueda de nuevos puntos extremos, se obtienen los siguientes resultados.

NODOS	TIEMPO PL NO ENTERO [S]	TIEMPO PL ENTERO [S]	TIEMPO PUNTO NO EXTREMO [S]	TIEMPO TOTAL [S]
10	0.008	0.006	0.01	0.028
20	0.014	0.028	0.032	0.082
30	0.028	0.047	0.068	0.164
40	0.057	0.382	0.157	0.642
50	0.056	0.214	0.26	0.608
100	0.22	1.897	2.12	4.95
150	0.633	5.457	7.04	15.33
200	1.07	14.48	17.365	39.27
250	2.226	29.39	36.92	81.96
300	3.5	48.52	61.36	138.24

Tabla 7: Tiempo de resolución modelo versión 2

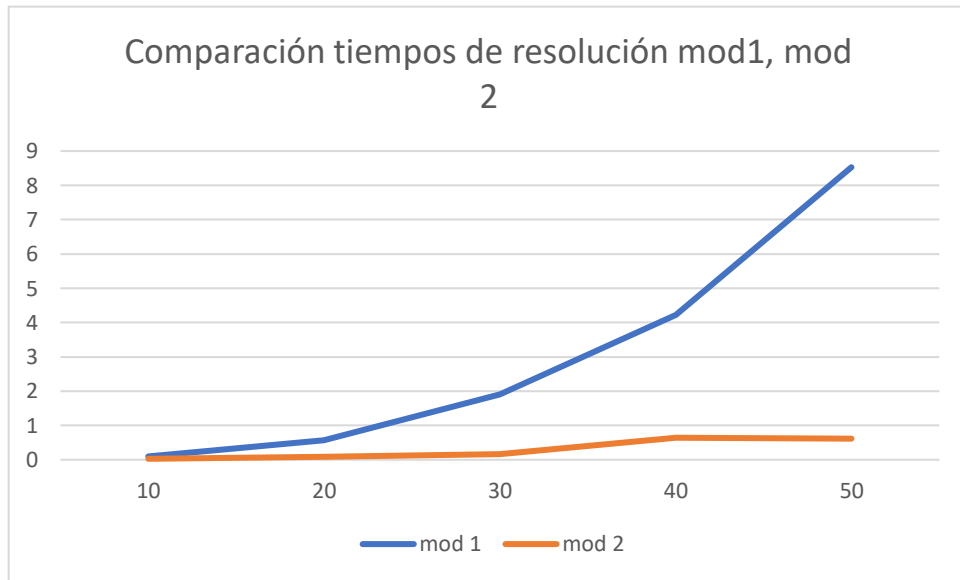


Gráfico 4: Comparación desempeño versión 1 y versión 2

A partir de los resultados anteriores se puede apreciar una reducción en promedio de un 87% del tiempo total de ejecución, lo que permite al modelo ejecutarse en tiempos razonables para una mayor cantidad de nodos por capa.

5.3.4.2 Implementación de resolución tipo glotón

Pese a haber reducido en gran medida el tiempo de resolución del modelo, aun no es posible computar una instancia del tamaño que es requerido para el proyecto, por lo que es necesario buscar una nueva forma de reducir los tiempos de cálculo. Al analizar la estructura de tiempos de cómputo obtenidas en la implementación anterior (5.3.4.1) se ve que hay dos parámetros que impactan de igual medida. Por un lado, se encuentra el cálculo del nuevo punto no extremo y por otro la búsqueda del punto extremo. Por ello se decide buscar una nueva forma para encontrar un punto extremo de manera más eficiente.

Para mejorar los tiempos de cálculo, se decide generar un método de búsqueda glotón, en que se activarán los arcos de menor costo, es decir se impondrá un flujo de valor 1 en los arcos partiendo desde el de menor costo de transporte, luego, en la medida que se vayan completando las “rutas”²³, una vez que se completan las rutas suficientes como para transportar un flujo total igual al Budget²⁴, se descartan (se impone un flujo de 0) a los arcos que no pudieron completar una “ruta”, de manera de obtener un resultado entero de rutas donde se respetan todas las restricciones. En el caso en que no se logre una solución factible, se utiliza el método anterior (5.3.4.1). Los resultados de esta implementación se muestran a continuación.

²³ Una “ruta corresponde a un conjunto de arcos con flujo igual a 1 donde la restricción de flujo sobre los nodos por lo que pasan se respeta a lo largo de su recorrido.

²⁴ El Budget es la cantidad de unidades de flujo que se enviarán a través del grafo, se interpreta como la cantidad de cuadrillas que fiscalizarán simultáneamente en la ciudad.

NODOS	TIEMPO PL NO ENTERO [S]	TIEMPO PL ENTERO [S]	TIEMPO PUNTO NO EXTREMO [S]	TIEMPO TOTAL [S]
10	0.005	0.001	0.0079	0.016
20	0.19	0.005	0.038	0.076
30	0.03	0.026	0.088	0.201
040	0.12	0.046	0.178	0.44
50	0.1	0.105	0.38	0.83
100	0.225	0.71	2.018	5.57
150	0.671	2.62	6.74	26.43
200	1.14	5.989	17.628	91.74
250	2.07	12.13	34.55	252.07
300	3.44	24.39	58.42	518.98

Tabla 8: Tiempo de resolución de modelo versión 3

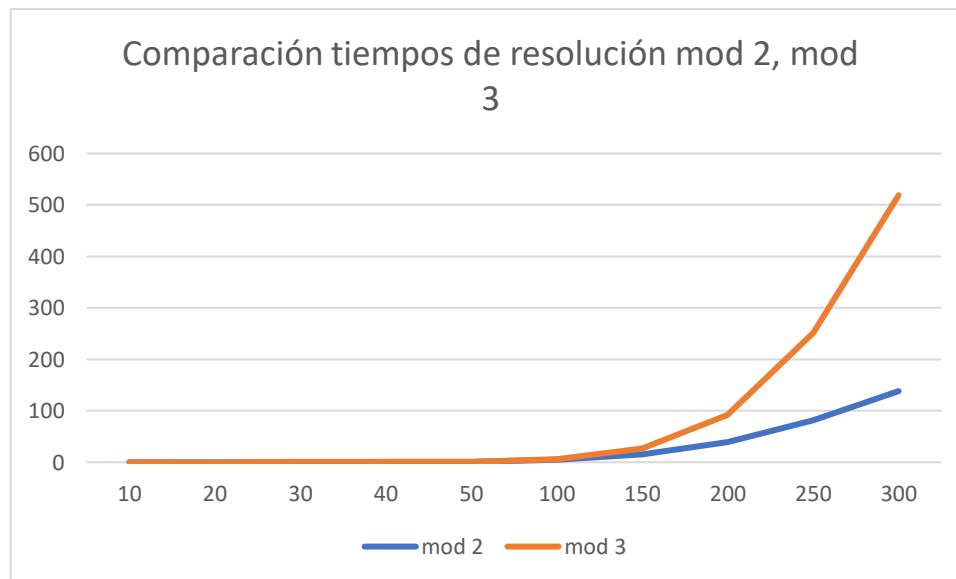


Gráfico 5: Comparación desempeño versión 2 y versión 3

A partir de los resultados anteriores se puede apreciar un aumento en promedio de un 119% del tiempo total de ejecución total, por lo que se descarta este método como un posible remplazo al método actual.

5.3.4.3 Implementación de resolución no ordenada

Pese a haber reducido los tiempos de cálculo del modelo, la implementación anterior tiene un peor rendimiento, principalmente por las variables no consideradas dentro de la separación de tareas. Dentro de estas se destaca la inicialización de los parámetros.

Un factor importante dentro de la formulación anterior está en ordenar todos los arcos a partir de su costo, para luego utilizarlos de forma ordenada, pero para la implementación de este método, solo es necesario encontrar puntos extremos, indiferente a si estos son óptimos o no, al hacer la combinación convexa, el resultado final será el mismo.

A partir de esto, se decide utilizar un método de búsqueda no ordenada, cuyo fin sea encontrar soluciones enteras factibles, independiente de su costo. Esta nueva metodología, permite utilizar estructuras no ordenadas para la inicialización, que son más eficientes en su uso comparado con estructuras más ordenadas. Los resultados de esta implementación se muestran a continuación.

NODOS	TIEMPO PL NO ENTERO [S]	TIEMPO PL ENTERO [S]	TIEMPO PUNTO NO EXTREMO [S]	TIEMPO TOTAL [S]
10	0.005	0.004	0	0.012
20	0.022	0.021	0.003	0.054
30	0.037	0.036	0.004	0.082
40	0.075	0.067	0.017	0.17
50	0.061	0.076	0.02	0.173
100	0.27	0.3	0.082	0.69
150	0.6	0.83	0.24	1.79
200	1.36	1.24	0.34	3.1
250	2.21	1.84	0.53	4.82
300	2.88	2.88	0.83	6.94
400	4.74	5.48	1.58	12.45
500	7.09	9.2	2.7	19.95
600	11.24	12.32	3.42	28.35
700	15.45	17.42	5.43	40.23
800	19.69	23.64	7.03	53.46
1000	36.36	38.87	12.18	91.63

Tabla 9: Tiempos de resolución modelo versión 4

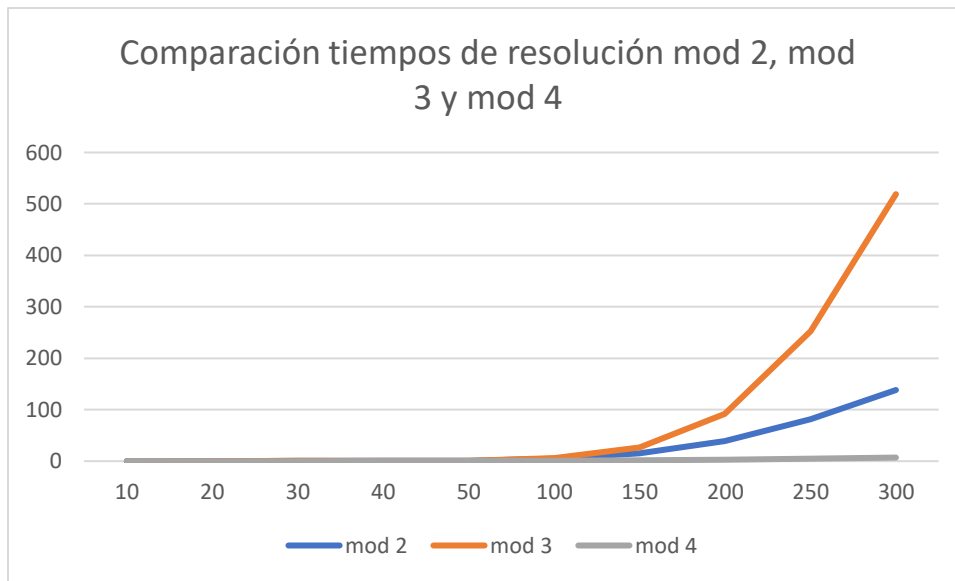


Gráfico 6: Comparación de desempeño versión 2, versión 3, y versión 4

A partir de los resultados anteriores se puede apreciar una reducción en promedio de un 73% con respecto al modelo anterior y un 66% con respecto al modelo 2, lo que permite al modelo actual ejecutarse en instancias de mayor tamaño.

5.3.4.4 Implementación de resolución de primera iteración con algoritmos de flujo

Pese a haber reducido de forma considerable los tiempos de ejecución del modelo actual, existe un cuello de botella que permitirá reducir los tiempos de ejecución aún más. Luego de analizar la tabla de tiempos de ejecución de la implementación anterior, se puede ver que el tiempo de cálculo del modelo no entero representa un 30% del tiempo de ejecución total, por lo que si se utiliza una formulación diferente a la actual se podrían reducir de forma importante estos tiempos de ejecución.

Para poder reducir los tiempos de ejecución de este modelo, se reemplaza el modelo lineal implementado utilizando el solver Guroby, por el algoritmo de resolución de flujo a costo mínimo implementado en Google OR-tools. Pero antes de poder realizar el cambio se deben solucionar dos limitantes del algoritmo antes mencionado. Estas son:

- **El flujo de cada arco debe ser entero.**
- **El costo de cada arco debe ser entero.**

Para solucionar estos problemas, se proponen dos soluciones que deben ser implementadas de forma simultánea.

Para solucionar los problemas de capacidades enteras tanto de arcos como de nodos, se propone realizar un incremento de todos los valores antes mencionados por un ponderador común y luego convertir los valores ponderados a su valor entero más cercano.

Es necesario considerar que pese a tener un ponderador lo suficientemente grande para no desvirtuar de gran manera el resultado final, cada vez que se transforma un decimal a entero, se descuenta marginalmente el tamaño de ese valor. Este efecto toma especial relevancia al truncar las probabilidades de un nodo, ya que, para poder generar un grafo de flujo factible, la suma de las probabilidades debe ser igual a la cantidad de cuadrillas que recorrerán el grafo, por lo que se mantiene el valor de probabilidad del último nodo libre, para suplir las diferencias marginales acumuladas y garantizar la factibilidad del modelo. Una vez solucionados estos problemas, se puede implementar el nuevo método.

Con el fin de no perturbar la solución final, es necesario determinar el mínimo ponderador tal que el resultado final (probabilidad esperada de fiscalización en cada punto del grafo) no diverja en más de un orden de magnitud comparado con el inicial, para esto se realiza un estudio de tres posibles ponderadores (10^9 , 10^{12} y 10^{15}). A continuación, se detalla una tabla que muestra la suma de las diferencias absolutas entre la probabilidad de cada nodo según el modelo de Stackelberg y la probabilidad según el modelo MDPE respectivo.

NODOS	DIFERENCIA CON GUROBI	DIFERENCIA CON 10^{15}	DIFERENCIA CON 10^{12}	DIFERENCIA CON 10^9
10	8.70E-13	1.19E-12	5.73E-12	5.62E-09
20	0.05108813	6.00E-14	1.12E-11	1.12E-08
30	7.86E-13	1.15E-12	2.08E-11	1.91E-08
40	5.01E-13	5.01E-13	2.65E-11	2.58E-08
50	1.05E-12	1.07E-12	3.02E-11	3.03E-08
100	8.20E-13	9.52E-13	5.43E-11	5.23E-08
150	4.03E-13	2.84E-13	7.88E-11	8.00E-08
200	3.76E-13	3.03E-13	1.02E-10	9.83E-08
250	4.83E-13	4.28E-13	1.29E-10	1.27E-07
300	5.79E-13	4.20E-13	1.59E-10	1.52E-07
400	7.15E-13	6.03E-13	2.20E-10	2.07E-07
500	8.97E-13	7.60E-13	2.55E-10	2.64E-07
600	1.05E-12	1.58E-03	3.16E-10	3.18E-07

700	8.84E-13	7.83E-13	1.60E-04	3.62E-07
800	1.05E-12	8.69E-13	4.04E-10	4.40E-07
1000	1.84E-06	6.16E-13	5.03E-10	5.26E-07

Tabla 10: Desempeño de diferentes versiones del modelo versión 5

A partir de la tabla anterior se puede ver que el ponderador que debiera ocuparse para disminuir el efecto de truncar las probabilidades es 10^{15} . Una vez determinado el ponderador, es necesario analizar los beneficios en los tiempos de resolución del nuevo método.

NODOS	TIEMPO PL NO ENTERO [S]	TIEMPO PL ENTERO [S]	TIEMPO PUNTO NO EXTREMO [S]	TIEMPO TOTAL [S]
20	0.007	0.022	0.001	0.034
30	0.008	0.031	0.005	0.05
40	0.023	0.05	0.017	0.098
50	0.074	0.08	0.02	0.18
100	0.073	0.29	0.074	0.47
150	0.17	0.66	0.16	1.05
200	0.48	1.3	0.37	2.28
250	0.73	2.23	0.61	3.81
300	0.82	3.06	0.78	4.98
400	1.46	6.04	1.62	9.68
500	2.3	8.1	2.13	13.39
600	3.46	12.47	3.24	20.38
700	4.61	17.93	4.9	29.1
800	6.56	22.8	5.57	37.17
1000	12.11	35.92	8.51	60.32
1500	31.68	96.5	23.9	162.6

Tabla 11: Tiempos de resolución del modelo versión 5

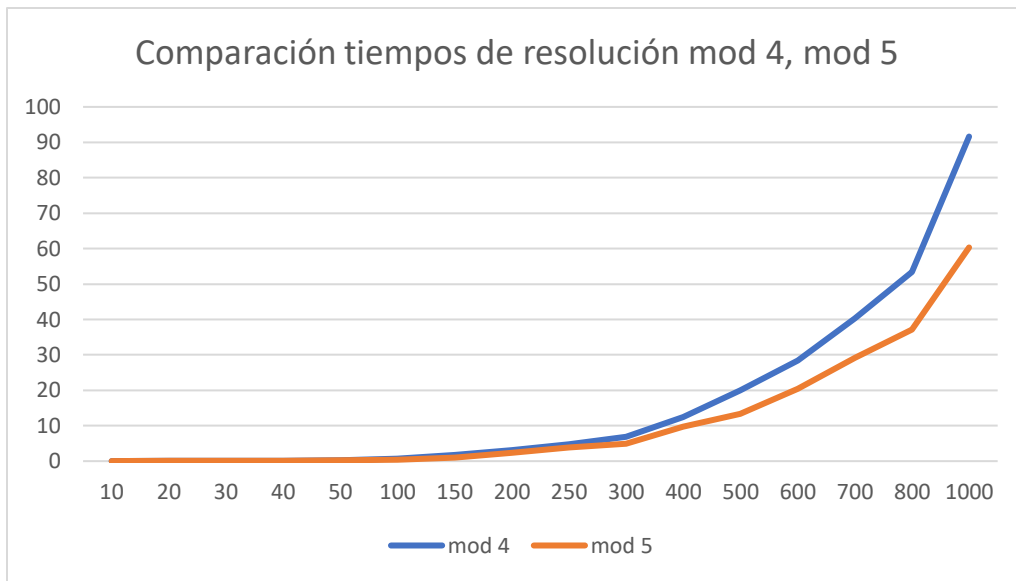


Gráfico 7: Comparación de desempeño entre modelo versión 4 y modelo versión 5

A partir de los resultados anteriores se puede apreciar una reducción en promedio de un 29% con respecto al modelo anterior, permitiendo una ejecución en tiempos razonables de instancias reales para el sistema de transportes de Santiago.

5.4 Comparaciones entre modelos

Pese a las diferencias entre los métodos utilizados para resolver el problema estático tanto versión muestreo como el MDPE, estos dos tienen en común el mismo objetivo. El poder generar una lista de tareas concretas para poder entregárselas a los fiscalizadores del sistema y que, manteniendo cierto nivel de eficiencia en sus rutas, puedan cumplir las probabilidades a largo plazo de fiscalización originales entregadas por la ejecución del modelo de Stackelberg. Por esto se hace necesario realizar una comparación en el desempeño de cada método.

Las dimensiones por comparar se centran en desempeño en costos de transporte de los equipos de fiscalización, tiempos de ejecución, concordancia con las probabilidades del modelo de Stackelberg y diferencias en cuanto a capacidad predictiva.

5.4.1 Costos

Para calcular la diferencia entre los costos de transporte de cada método, se realiza un promedio de los costos de una muestra de 1000 casos para la metodología de muestreo, es decir se simula mil veces un muestreo y matching, mientras que para la metodología de MDPE, se realiza un promedio ponderado de cada solución de la combinación convexa encontrada, que por definición es igual al resultado no

²⁵entero del primer modelo. Los resultados que se muestran a continuación se generaron con un Budget de cinco cuadrillas.

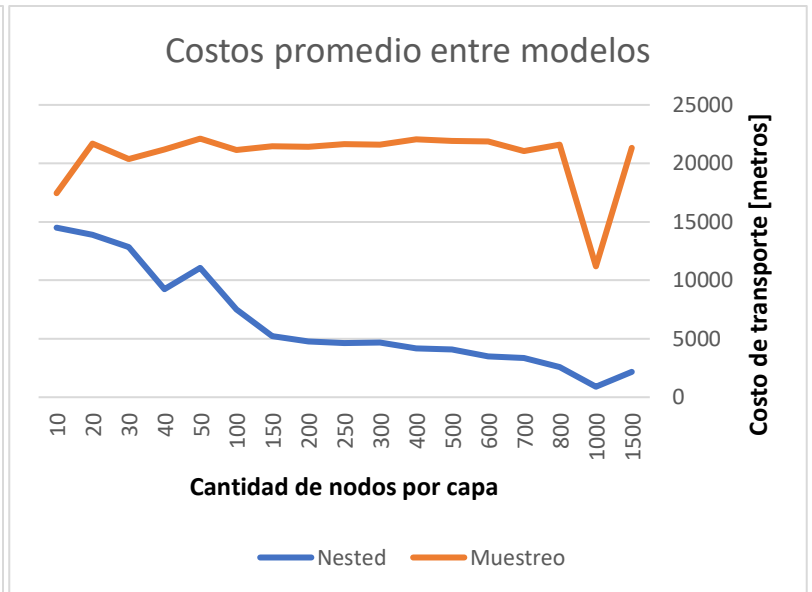
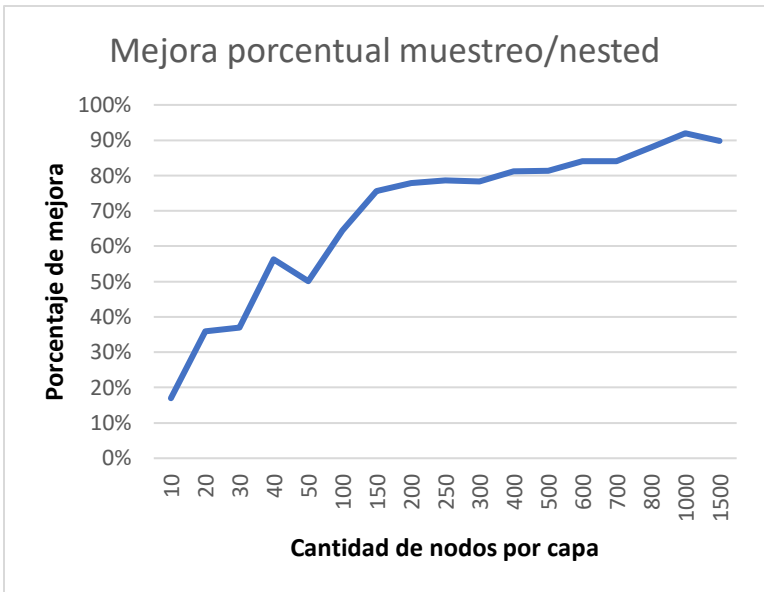


Gráfico 9: Mejora porcentual en costos entre modelo MDPE y modelo de muestreo

Gráfico 8: Comparación en costos entre modelo MDPE y modelo de muestreo

Como se puede ver en los gráficos anteriores, los costos del modelo MDPE son consistentemente menores comparado con los costos de la versión de muestreo, diferencia que se ve acentuada en la medida que el grafo adquiere mayor tamaño, llegando a generar una reducción de costos de un 92% para el caso de 1000 nodos por capa. Esta reducción de costos se mantiene consistente dentro de las cotas máximas y mínimas de costos de cada modelo, que se pueden ver en los anexos 2.1 y 2.2.

La principal razón de por qué el modelo MDPE es menor en costos, es debido a que, en este modelo, se realiza una optimización de flujo a costo mínimo del grafo completo, que luego se reconstruye a partir de puntos enteros, lo que entrega mayor libertad para encontrar mejores rutas comparado con el modelo de muestreo, que solo es capaz de optimizar un sub-grafo en cada instancia, por lo que las soluciones debieran ser igual o peor en cuanto a costos.

5.4.2 Comparación en marginales

La comparación en la dimensión de similitud con las probabilidades originales, no es directa, ya que por un lado se entregan soluciones con una distribución de probabilidad específica (modelo MDPE) y por el otro, se entregan con una distribución de probabilidad uniforme (modelo muestreo), por lo que

²⁵ Ecuación para obtener la mejora porcentual $\frac{\text{Costo muestreo} - \text{Costo nested}}{\text{Costo muestreo}} * 100$

para poder generar una instancia comparable entre estos dos métodos, se realiza un muestreo del resultado del modelo MDPE del mismo tamaño que la instancia del modelo versión muestreo utilizando la distribución de probabilidad del modelo respectivo. Generando así una simulación de ejecución de la misma cantidad de días para ambos modelos. Los resultados que se muestran a continuación son los resultados de la diferencia porcentual entre las diferencias de las probabilidades obtenidas con el modelo MDPE y muestreo en comparación con las probabilidades originales (resultados del modelo de Stackelberg).

Para calcular esta diferencia, primero se calcula la diferencia absoluta entre el vector de probabilidades de fiscalización originales versus cada modelo de muestreo (diferenciado por la cantidad de muestras), por otro lado, se calculó la diferencia absoluta entre las probabilidades originales y el modelo MDPE, finalmente se realiza una diferencia porcentual entre los resultados de las diferencias de muestreo y MDPE²⁶.

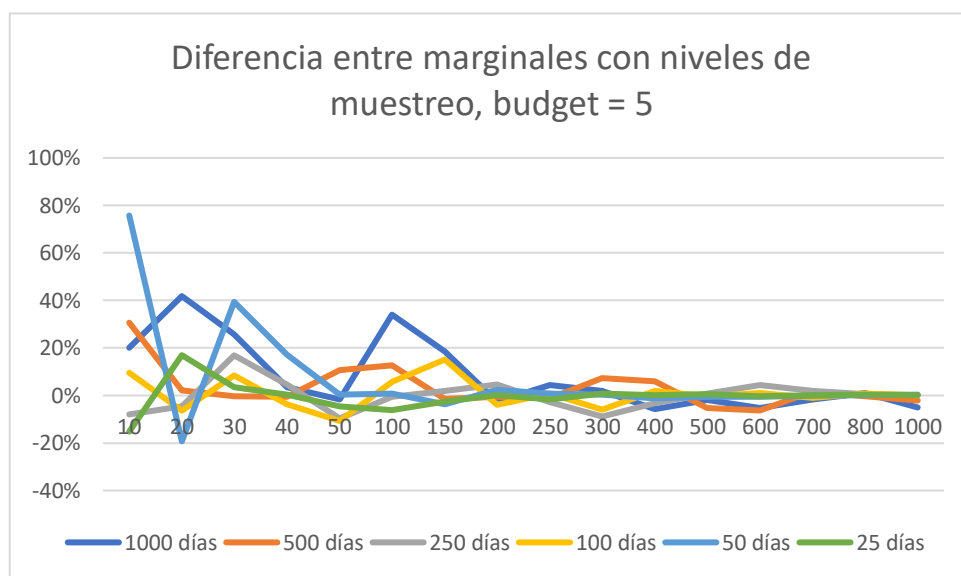


Gráfico 10: Diferencias entre probabilidades alcanzadas entre modelo MDPE y modelo muestreo

A partir del gráfico anterior, se puede ver que el modelo MDPE es más cercano a la realidad (aunque de manera inconsistente) comparado con el modelo versión muestreo, diferencia que se reduce a medida que aumenta el tamaño del grafo. Se aprecia que, a partir de los 200 nodos por capa, la diferencia es prácticamente nula (en promedio, es menor que un 0.1%), por lo que se puede concluir que en la medida que el tamaño del grafo sea lo suficientemente grande, los desempeños de ambos métodos en esta dimensión serán similares.

²⁶ Esta diferencia consiste en la siguiente formula $\frac{\text{Diferencia muestreo} - \text{diferencia nested}}{\text{Diferencia muestreo}} * 100$.

5.4.3 Tiempos de ejecución

Por otro lado, para comparar los tiempos de ejecución de cada instancia, se realiza un cálculo de tiempos de ejecución de diferentes tamaños de muestra para el caso de matching con muestreo y se compara con el tiempo de ejecución del algoritmo más eficiente en el modelo MDPE²⁷. A continuación, se presentan los resultados.

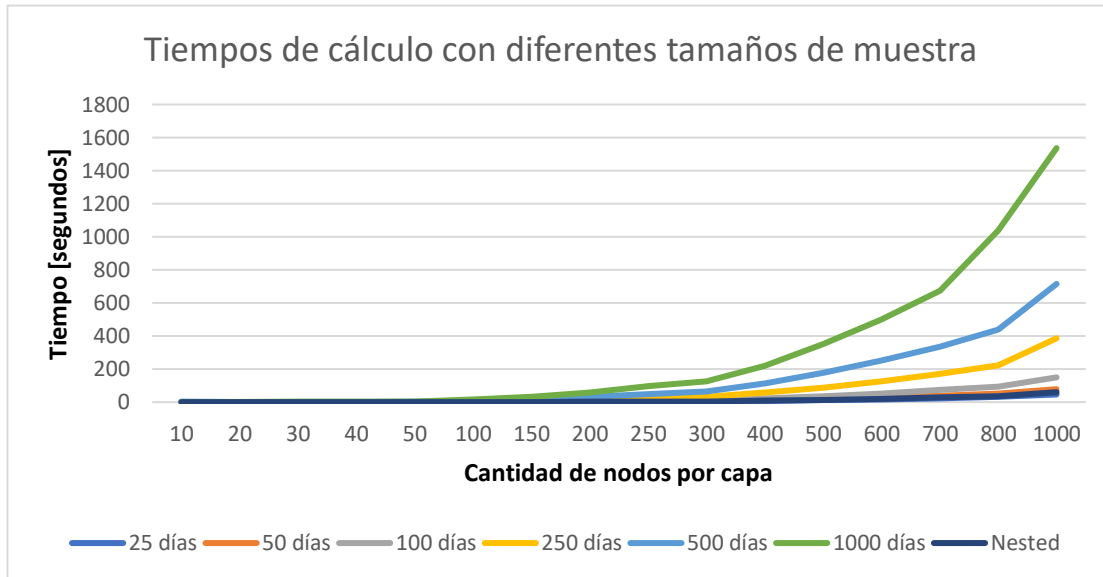


Gráfico 11: Tiempos de cálculo de muestras entre modelo muestreo y modelo MDPE

Como se puede ver en el gráfico, los tiempos de ejecución del modelo MDPE, son claramente menores a los tiempos de muestreos cuando estos son mayores a 100 muestras. Para mayor detalle se muestran los casos menores o iguales a 100 muestras.

²⁷ No se considera el tiempo de muestreo del resultado del modelo nested, ya que este representa menos del 1% del tiempo de ejecución de este, considerando un muestreo de 1000 instancias.

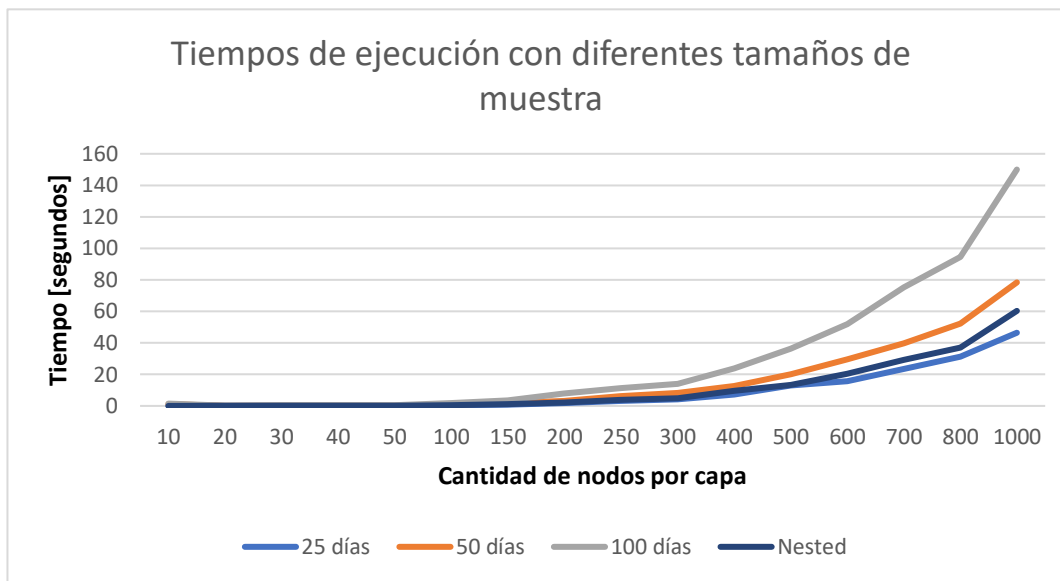


Gráfico 12: tiempo de cálculo de muestras reducidas entre modelo muestreo y modelo MDPE

Como se puede ver en el gráfico anterior, los tiempos de ejecución del modelo MDPE (nested) para diferentes tamaños de grafo, son consistentemente menores a un muestreo de 50 iteraciones del modelo de muestreo (50 días), por lo que considerando si el sistema de scheduling de fiscalizadores es estable por al menos dos meses, es decir solo se recalcula la solución del modelo MDPE cada dos meses o más, el método de matching MDPE es más eficiente en términos de tiempo de ejecución que el modelo de muestreo.

5.4.4 Predictibilidad

La última dimensión por evaluar entre estas dos metodologías es el nivel de predictibilidad de los resultados de cada metodología. Por un lado, el nivel de predictibilidad del modelo versión muestreo, dada su naturaleza de muestreo, es completamente impredecible, es decir, conociendo el estado del primer turno, no se puede predecir cuáles serán los estados del turno siguiente, salvo por la restricción de distancia en tiempo de los fiscalizadores (que se asume conocida por los evasores), limitando la ubicación del paradero a fiscalizar a una distancia de no más de 15 minutos o 12 kilómetros según sea el caso. Por lo que manteniendo un conocimiento perfecto de la estrategia del sistema de transportes²⁸, considerando un radio promedio de la ciudad de Santiago de 14.3 kilómetros y una distribución uniforme de paraderos, al conocer la ubicación de un nodo, el evasor tendrá en promedio una probabilidad de 0.19% de averiguar el paradero del turno siguiente ya que en promedio existen 526 paraderos a una distancia de 12 kilómetros de cada paradero.

Por otro lado, el modelo MDPE, presenta mayores restricciones al momento de generar una solución aleatoria, debido a que solo puede utilizar una calendarización que haya sido considerada dentro

²⁸ Considerando que en promedio existen 1000 nodos posibles a fiscalizar dentro de la ciudad

de la combinación convexa de la solución no entera, por lo que su nivel de posibles combinaciones es altamente limitado en comparación con el modelo versión muestreo.

A continuación, se puede ver los niveles de certeza que genera un conocimiento perfecto de los puntos a fiscalizar dentro del modelo, es decir, cuando el evasor pudo simular a la perfección el conjunto de soluciones del modelo MDPE. Para la realización de esta muestra se considera un grafo de 1000 nodos por capa.

Se hace la distinción en tres posibles casos de información, en primer lugar, las consecuencias de cuando un evasor conoce solo un punto de fiscalización en el primer turno, cuando el Budget²⁹ es 1, 5, 10, 15 y 20. Luego se muestran las consecuencias cuando un evasor conoce la mitad de los puntos fiscalizados en un turno para los mismos segmentos de Budget y por último cuando un evasor conoce todos los puntos fiscalizados en un turno para los mismos segmentos. Es importante destacar que no se incluye el segmento de Budget igual a 1 para la primera instancia debido a que el resultado es igual tras dos instancias siguientes.

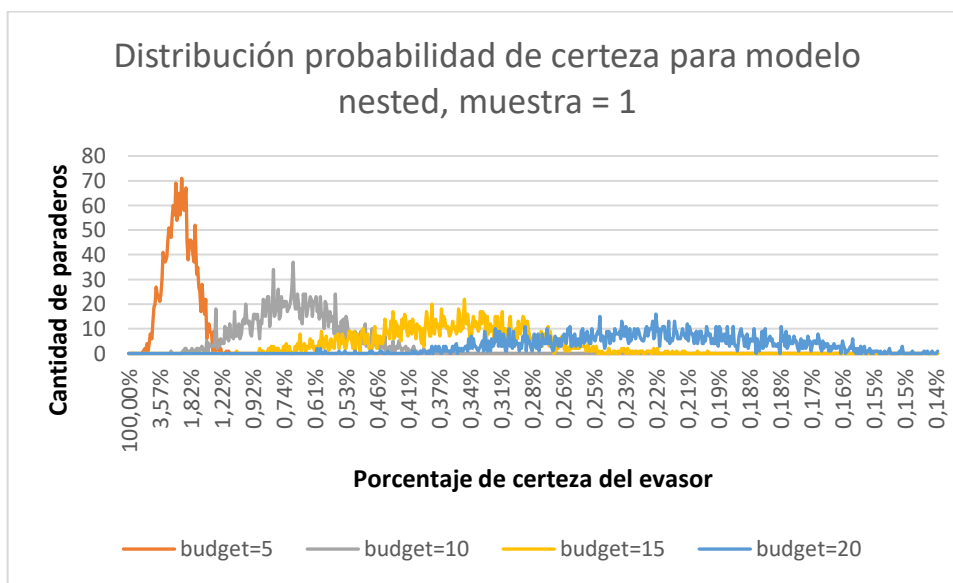


Gráfico 13: Distribución de nivel de certeza para el modelo MDPE con muestra = 1

²⁹ Cantidad de cuadrillas que están fiscalizando simultáneamente

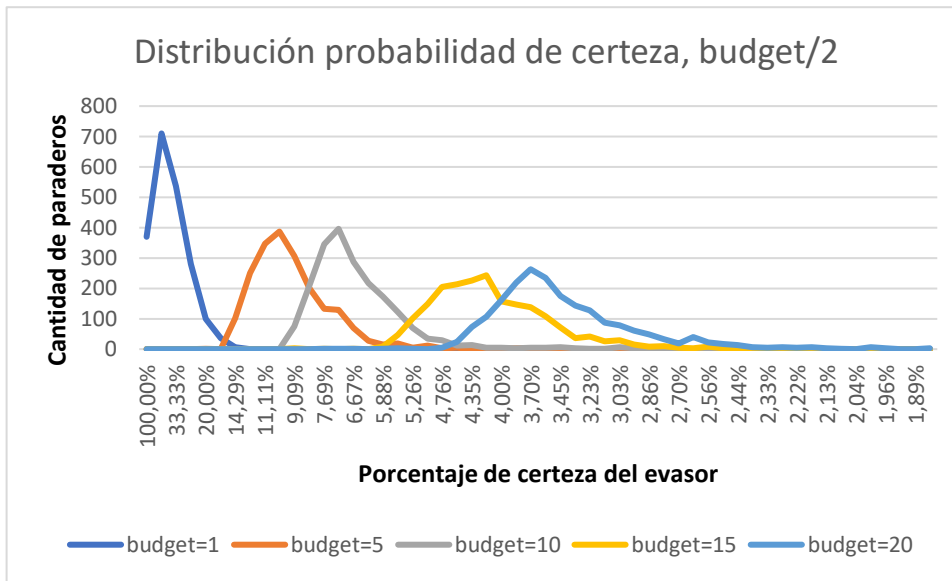


Gráfico 14: Distribución de nivel de certeza del modelo MDPE con muestra = Budget/2

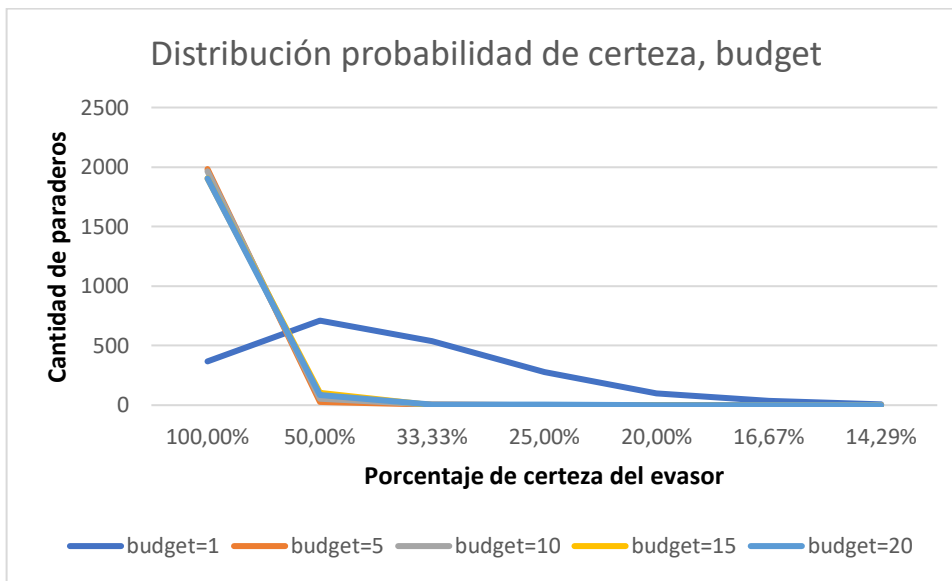


Gráfico 15: Distribución de nivel de certeza del modelo MDPE con información perfecta

Como se puede apreciar en los gráficos anteriores, los niveles de certeza de un evasor son altamente sensibles a la información recopilada en el primer turno, pasando de una certeza que no supera

el 3%³⁰ cuando el conocimiento es de solo una cuadrilla, llegando al extremo de mantener una certeza de prácticamente 100% para cuando se conocen todos los puntos fiscalizados en el primer turno (con excepción de la categoría de Budget igual a 1).

A continuación, se muestra una tabla que condensa las distribuciones de certeza en su promedio.

MUESTREO	1					BUDGET/2					BUDGET				
BUDGET	1	5	10	15	20	1	5	10	15	20	1	5	10	15	20
% CERTEZA	39%	2.2%	0.68%	0.36%	0.22%	39%	9.3%	6.6%	4.1%	3.4%	39%	98%	97%	95%	95%

Tabla 12: Nivel de certeza promedio con diferentes niveles de información

A partir de la tabla anterior se puede apreciar el cambio drástico del nivel de certeza al aumentar el nivel de información que recibe el evasor, partiendo de un nivel similar de incerteza para cuando solo conoce un punto de fiscalización, a un nivel de certeza plena cuando conoce todos los puntos de fiscalización en un turno.

Es importante destacar que estos estudios se realizaron considerando que el evasor conoce el resultado del modelo MDPE, ya que en caso de que no lo supiera, no sabría cuáles son los horarios que deben cumplir los fiscalizadores, obligándolo a mantener un nivel de certeza igual que en el del modelo de muestreo.

A partir de este resultado se puede ver que dentro de este modelo es importante un nivel de incerteza en la búsqueda de puntos extremos que conformen la combinación convexa del punto no entero original, ya que, de ser un problema determinista, los riesgos de predictibilidad son altos. Para poder aumentar los niveles de incerteza de resultados, se podrían incluir perturbaciones aleatorias en los costos de arcos al momento de buscar un punto extremo, como también incluir algoritmos que no necesariamente encuentren el punto óptimo dentro del grafo.

Por otro lado, en el caso de que un evasor no conozca la metodología en específico utilizada para la búsqueda de puntos enteros, este podría conocer la estrategia mixta original y a partir de observaciones de las realizaciones de los horarios de los fiscalizadores, podrá reconstruir los puntos enteros que conforman la solución actual. Utilizando este sistema de ingeniería inversa, podría determinar un resultado similar al original y volver a la situación de evasor con información perfecta.

Debido a las complicaciones de predictibilidad discutida previamente, en cuanto a la dimensión de predictibilidad, el modelo versión muestreo es más eficiente, ya que representa una cota máxima en niveles de predictibilidad del modelo MDPE, donde este último, si se presentan las condiciones suficientes, podría llegar a tener un nivel de predictibilidad cercano al 100%.

³⁰ Es decir que el evasor al conocer un paradero fiscalizado en el primer turno, en el mejor de los casos solo tendrá 33 posibles paraderos donde posiblemente fiscalizarán en el siguiente turno, adivinando así el comportamiento de los fiscalizadores un 3% de las veces.

5.4.5 Conclusiones

A partir de las comparaciones previamente realizadas, se puede concluir que el modelo MDPE presenta claras ventajas en términos de tiempos de ejecución y costos de transporte comparado con el modelo de muestreo (MVE). En otra dimensión, el modelo MDPE facilita la implementación de sus resultados, ya que solo es necesario generar un muestreo de sus calendarizaciones preestablecidas, comparado con la ejecución de un muestreo y matching que ejecuta el modelo de muestreo. Pese a esto, el modelo MDPE presenta riesgos de predictibilidad comparado con el modelo de versión muestreo, por lo que implementar este modelo con una estructura de aleatoriedad en su formulación es fundamental para mantener un desempeño óptimo en sus resultados.

Finalmente, el modelo MDPE mantiene mejores rendimientos que el modelo de muestreo, siempre que se consideren sus riesgos de predictibilidad y se ejecuten sus resultados cada uno o dos años (dependiendo del tamaño del grafo) para así limitar el aprendizaje por parte de los evasores.

6 Scheduling Dinámico

La base del funcionamiento del scheduling dinámico contrasta con la utilizada en el estático, ya que, en este caso, las cuadrillas fiscalizadoras, deberán subirse a los buses y una vez arriba y con los buses en movimiento continuar con el proceso de fiscalización. Este sistema es utilizado en varias ciudades con un sistema de transporte público similar al que se utiliza en Santiago. La implementación de un sistema con estas características dotaría de importantes avances en materia de disminución de la evasión, ya que la capacidad de predictibilidad de los evasores es prácticamente nula durante todo el transcurso de los turnos de fiscalización, pues no tendrían efecto herramientas de información on-line sobre la ubicación de cuadrillas³¹ y se toma ventaja de la variabilidad de las velocidades de los buses para aumentar la impredecibilidad del sistema.

Por otro lado, la implementación de un sistema con estas características tiene importantes complicaciones debido a su naturaleza aleatoria, ya que generar un plan a largo plazo que cumpla con las probabilidades globales impuestas en un principio es difícil de garantizar, ya que entran en juego características aleatorias en cuanto a velocidades de los buses y tiempos de fiscalización de las cuadrillas o eventualidades durante el turno, entre otros. Por lo tanto, generar un sistema dinámico de coordinación de cuadrillas es la solución más apropiada.

Para poder generar un primer acercamiento a este sistema de fiscalización con coordinación centralizada, se realiza un estudio comparativo de tres posibles métodos de fiscalización dinámica diferentes, un modelo aleatorio, un modelo miope y un modelo miope por zonas.

6.1 Generación del grafo y simulación

El grafo que utiliza se construye a partir de los paraderos dentro de la ciudad de Santiago. Estos paraderos están unidos por los recorridos que los utilizan, diferenciando con arcos distintos a cada recorrido, como se muestra en el siguiente diagrama.

³¹ Como aplicaciones de celulares utilizadas actualmente por evasores del sistema en Santiago.

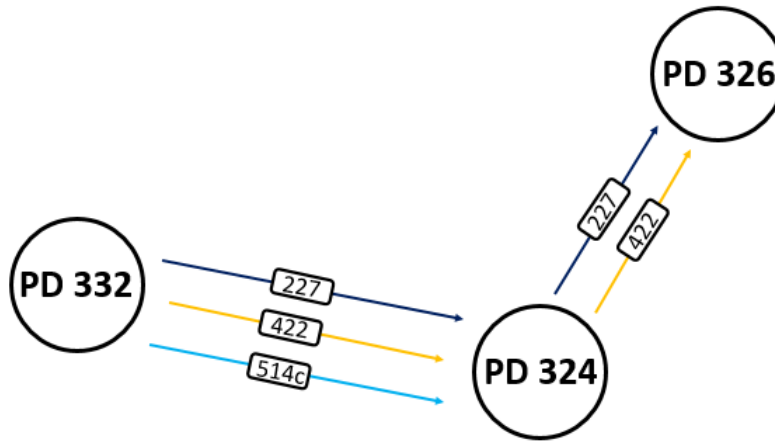


Ilustración 12: Ilustración de estructura de grafo dinámico

Por lo tanto, cada nodo del grafo es definido por el par (paradero, servicio) y dos nodos del grafo estarán conectados si y solo si el servicio de dos nodos es el mismo y este se detiene consecutivamente en los dos paraderos.

Una vez creado el grafo, se filtran las variantes de los recorridos, ya que estas funcionan solo en ciertos horarios del día y su implementación escapa de los alcances generales de las simulaciones.

Para la generación de las probabilidades iniciales en los arcos del grafo, al no contar con las probabilidades generadas por la implementación del algoritmo de juegos de Stackelberg, se utilizarán las rutas de evasores obtenidas luego del cálculo de shortest paths para los pares O.D. de la matriz de evasión generada previamente en el proyecto en el que se desenvuelve esta memoria. Para esto se consideró imponer de manera proporcional una probabilidad de fiscalización mayor a los puntos de mayor tránsito

de evasores ($p_{\epsilon} = \frac{\sum_{i \in k, \lambda \in p_e} d_{i,e}}{\sum_{i \in k} d_{i,e}}$), generando así una densidad de probabilidad de fiscalización en los arcos del grafo considerando solo las decisiones actuales de los evasores.

Una vez obtenidas las probabilidades, para mantener una métrica medible del desempeño en tiempo real del algoritmo y facilitar el cálculo de las decisiones, se transforman las probabilidades a frecuencias “meta” en cada segmento. Para esto se calcula la cantidad de arcos promedio que cada cuadrilla puede fiscalizar por hora, para luego ponderar cada probabilidad por la cantidad de horas y cuadrillas que contempla la simulación, de manera que al generar la simulación el resultado ideal sería de frecuencias iguales a las frecuencias “meta” salvo un error intrínseco de la generación de estas frecuencias³².

Por ejemplo, se simularán 100 días en los que una cuadrilla recorrerá el grafo, dada la velocidad promedio de los buses y el tiempo promedio que una cuadrilla se demora en fiscalizar, en promedio, las cuadrillas recorrerán 15 arcos por fiscalización, se considera que cada cuadrilla trabaja 8 horas efectivas, por lo que, para un arco con probabilidad de fiscalización de 0.002, su frecuencia “meta será de 24 veces. La ecuación se muestra a continuación.

³² Ya que se utiliza la “eficiencia” promedio de cada cuadrilla para realizar el cálculo.

Frecuencia "meta" = Prob. arco * prom. arcos visitados * horas por día * días simulados

Por último, una decisión importante antes de iniciar el día de fiscalización es escoger el punto en el que se comenzará a fiscalizar, ya que este determinará la zona en la que se recorrerá el grafo. Para esto, se ordenan las zonas del sistema de transporte según su diferencia neta, es decir se calculan las diferencias entre frecuencias "meta" y frecuencias actuales de cada arco de una zona y se suman solo aquellas diferencias que sean positivas. Luego se asigna en orden decreciente una cuadrilla a cada zona hasta cumplir el Budget, con el fin de generar una mejor distribución del personal de fiscalización en la ciudad.

Una vez determinada la zona en la que se asignará una cuadrilla, se inicializa esta cuadrilla en el punto de mayor diferencia de frecuencia de la zona escogida.

Esta simulación se realiza considerando un día laboral de 9 horas (con un descanso de una hora en el medio), luego simula las decisiones y movimientos de las cuadrillas por 320 días.

Por último, las variables para medir el desempeño de cada modelo serán las siguientes³³:

- **Distancia máxima entre la frecuencia meta y la frecuencia actual** ($\max_{v \in V} \{f_{m,v} - f_{a,v}\}$)
- **Distancia mínima entre la frecuencia meta y la frecuencia actual** ($\min_{v \in V} \{f_{m,v} - f_{a,v}\}$)
- **Promedio de distancias absolutas de frecuencias** ($\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} |f_{m,v} - f_{a,v}|$)
- **Promedio de distancias positivas de frecuencias** ($\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} (f_{m,v} - f_{a,v})_+$)
- **Promedio de distancias absolutas al cuadrado** ($\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} (f_{m,v} - f_{a,v})^2$)
- **Promedio de distancias positivas al cuadrado** ($\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} (f_{m,v} - f_{a,v})_+^2$)

6.2 Ejecución de modelos dinámicos

6.2.1 Modelo aleatorio

6.2.1.1 Modelo aleatorio uniforme

Se implementa un modelo de decisión aleatoria con el fin de generar un benchmarking imparcial para probar los rendimientos del resto de modelos. El modo de funcionamiento consiste en que a partir de un punto (estado espacial de la cuadrilla), se selecciona uniformemente un nodo entre los vecinos que estén a no más de 200 metros de distancia.

³³ En las ecuaciones siguientes, $f_{m,v}$ representa la frecuencia meta del arco v y $f_{a,v}$ representa la frecuencia actual del arco v .

Los resultados son los siguientes.

	DISTANCIA MAX.	DISTANCIA MIN.	PROMEDIO (ABS)	PROMEDIO (POSIT)	PROMEDIO (ABS^2)	PROMEDIO (POSIT^2)
INICIO ($F_{a,v} = 0 \quad \forall v \in V$)	122.30	0	4.58	4.58	98.84	98.84
ALEATORIO UNIFORME³⁴	122.30	-82	5.93	2.65	113.90	66.24

Tabla 13: Desempeño de modelo aleatorio uniforme

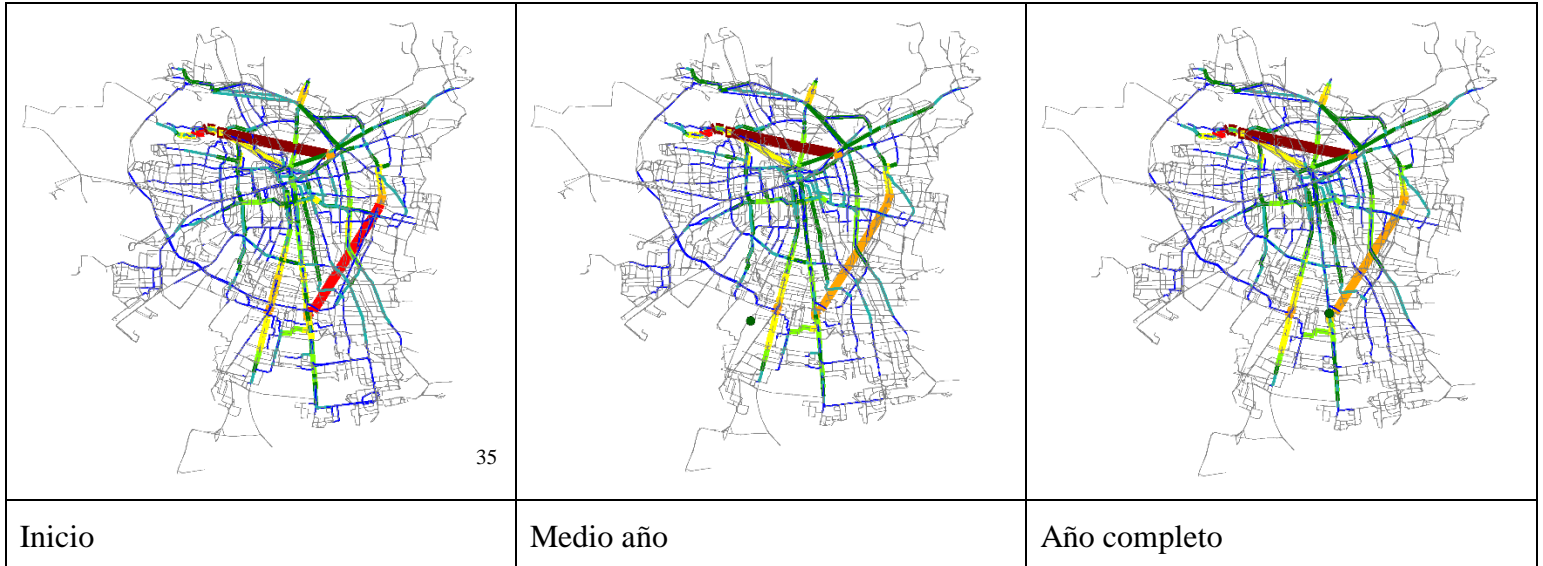


Tabla 14: Distribución del desempeño modelo aleatorio

Como se puede ver en la tabla y las imágenes anteriores, el rendimiento de este algoritmo, pese a bajar el promedio positivo (ya que utiliza el grafo para movilizarse), las distancias absolutas aumentan, lo que quiere decir que, bajo este método, las cuadrillas utilizan con mayor regularidad arcos en los que las “frecuencias meta” ya están cumplidas. Por otro lado se puede observar en las imágenes el bajo desempeño de este modelo al mostrar casi nulas diferencias en la distribución de frecuencias residuales en el grafo a medida que avanza el tiempo.

³⁴ Es importante destacar que las cantidades mostradas en las tablas de desempeño de esta sección corresponden a diferencias de frecuencias de fiscalización, por lo que son cantidades a dimensionales.

³⁵ Para calcular que color de cada arco, se realiza una discretización en 10 intervalos entre 0 y la frecuencia mayor a recorrer en el grafo, luego se colorea según el intervalo que pertenezca la diferencia entre frecuencia meta y frecuencia actual al momento de la “foto”, dejando el color gris para cuando haya una diferencia ≤ 0 , el ancho el arco es proporcional al decil al que pertenezca, dentro del anexo 7.1, se encuentra la tabla de colores utilizada.

6.2.1.2 Modelo aleatorio ponderado

Una vez implementado el modelo base (6.2.1.1), se implementa un modelo aleatorio ponderado, es decir, a partir de un punto, se analizan las probabilidades de cada uno de los puntos de su vecindad correspondiente y luego se elige un punto de forma aleatoria tomando en consideración el “peso” de cada uno de los puntos a elegir, podría considerarse que sería un método de movimiento markoviano donde se utilizan las probabilidades “meta” como distribución estacionaria.

Los resultados son los siguientes³⁶

	DISTANCIA MAX.	DISTANCIA MIN.	PROMEDIO (ABS)	PROMEDIO (POSIT)	PROMEDIO (ABS^2)	PROMEDIO (POSIT^2)
ALEATORIO UNIFORME³⁷	122.30	-82	5.93	2.65	113.90	66.24
ALEATORIO-PONDERADO	111.36	-118.69	4.52	2.21	96.86	38.87

Tabla 15: Desempeño del modelo aleatorio ponderado

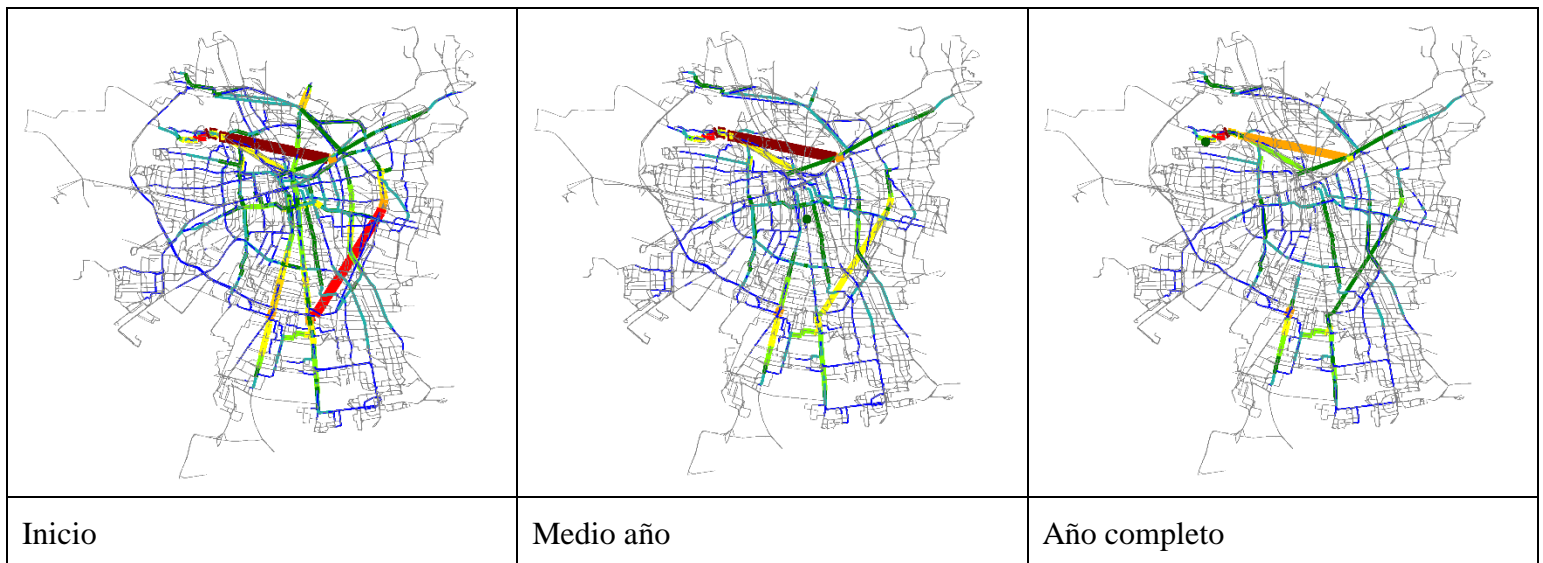


Tabla 16: Distribución del desempeño modelo aleatorio ponderado

Se puede ver una mejora el rendimiento en todos los aspectos en comparación con el modelo aleatorio simple, exceptuando la dimensión de distancia mínima, en la que empeora en un 44%. Por lo

³⁶ Es importante destacar que los desempeños de los modelos siguientes serán en porcentajes relativos al modelo aleatorio uniforme, modelo utilizado como base para facilitar comparaciones, se utiliza diferencia porcentual para las mediciones $\frac{\text{desempeño aleatorio uniforme} - \text{desempeño del modelo comparado}}{\text{desempeño aleatorio uniforme}} * 100$.

³⁷ Es importante destacar que las cantidades mostradas en las tablas de desempeño de esta sección corresponden a diferencias de frecuencias de fiscalización, por lo que son cantidades a dimensionales.

que representa una mejora sustancial al modelo, pese a que el estado del grafo inicial no se actualiza en ningún momento.

6.2.2 Modelo miope glotón

El modelo miope glotón, consiste en decidir la mejor opción posible en el siguiente periodo de tiempo, es decir a partir de un punto en el que se deba tomar una decisión, busca dentro de la vecindad del punto el arco que tenga la mayor diferencia entre su “frecuencia meta” y su frecuencia actual. Luego de esto, elige ese arco para continuar la ruta. Es decir, el nodo que elegirá cuando esté en el nodo “ v ” será el que cumpla la siguiente condición: $\underset{i}{\operatorname{argmax}} (f_{m,i} - f_{a,i}) \forall i \in N(v)$.

Los resultados son los siguientes:

	DISTANCIA MAX.	DISTANCIA MIN.	PROMEDIO (ABS)	PROMEDIO (POSIT)	PROMEDIO (ABS^2)	PROMEDIO (POSIT^2)
ALEATORIO UNIFORME³⁸	122.30	-82	5.93	2.65	113.90	66.24
MIOPE GLOTÓN	104.36	-106	4.67	2.35	82.82	36.08

Tabla 17: Desempeño modelo glotón

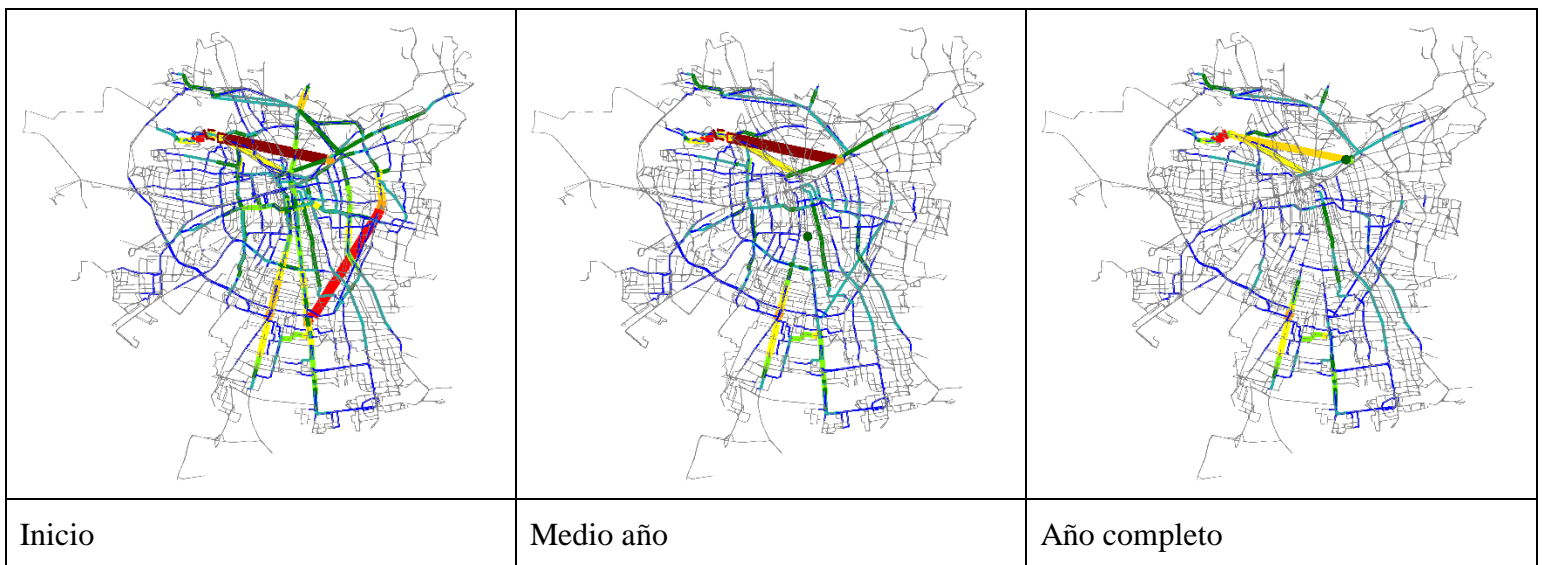


Tabla 18: Distribución del desempeño modelo glotón

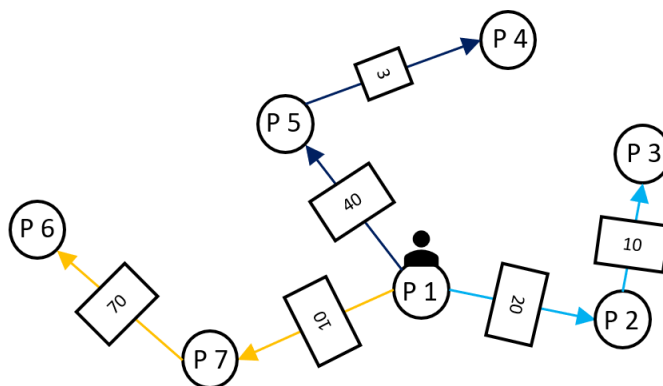
³⁸ Es importante destacar que las cantidades mostradas en las tablas de desempeño de esta sección corresponden a diferencias de frecuencias de fiscalización, por lo que son cantidades a dimensionales.

Se puede ver una mejora del rendimiento en todos los aspectos en comparación con el modelo aleatorio, exceptuando la dimensión de distancia mínima, en la que empeora en un 29% con respecto al modelo aleatorio simple. Junto con esto, se ve que mantiene un rendimiento uniforme en el grafo, por lo que se considera un buen punto de partida como modelo de decisión.

6.2.3 Modelo miope glotón por tramos

El modelo miope glotón por tramos consiste en calcular la mejor decisión inmediata, pero manteniendo una visión menos miope que el modelo anterior. Esto es simulando los arcos que recorrerá en promedio la cuadrilla y a partir de esto para poder decidir qué camino tomar, suma todas las diferencias positivas entre la “frecuencia meta” y la frecuencia actual de cada arco. Finalmente toma la decisión la ruta que maximice esta suma de diferencias, a continuación, se muestra un ejemplo de cómo calcula su decisión comparándolo con un modelo glotón simple.



Consideremos la siguiente instancia a la que se enfrenta el fiscalizador ubicado en el paradero 1, donde la velocidad promedio de cada bus y su tiempo de fiscalización promedio indica que se podrá mover dos paraderos antes de tener que bajarse.



Las valorizaciones de cada arco corresponden a la diferencia neta entre la frecuencia “meta” y la frecuencia actual.

La decisión que tomaría según cada modelo son las siguientes:

	Glotón avaro	Glotón avaro por tramos												
Valorización	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>10</td> </tr> <tr> <td></td> <td>20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>40</td> </tr> </table>		10		20		40	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>80</td> </tr> <tr> <td></td> <td>30</td> </tr> <tr> <td></td> <td>43</td> </tr> </table>		80		30		43
	10													
	20													
	40													
	80													
	30													
	43													

Decisión		
----------	---	---

Como se puede ver en el ejemplo anterior, el modelo simple solo valoriza el arco más próximo, por otro lado, el glotón por tramos valoriza los arcos por los que pasará una vez tomada la decisión, resultando en este caso en un mayor valor final en el caso que se demore dos paraderos en fiscalizar.

Los resultados de la implementación del modelo glotón por tramos son los siguientes:

	DISTANCIA MAX.	DISTANCIA MIN.	PROMEDIO (ABS)	PROMEDIO (POSIT)	PROMEDIO (ABS^2)	PROMEDIO (POSIT^2)
ALEATORIO UNIFORME³⁹	122.30	-82	5.93	2.65	113.90	66.24
MIOPE GLOTÓN POR TRAMO	93.33	-190	3.33	1.67	48.58	21.18

Tabla 19: Desempeño modelo glotón por tramos

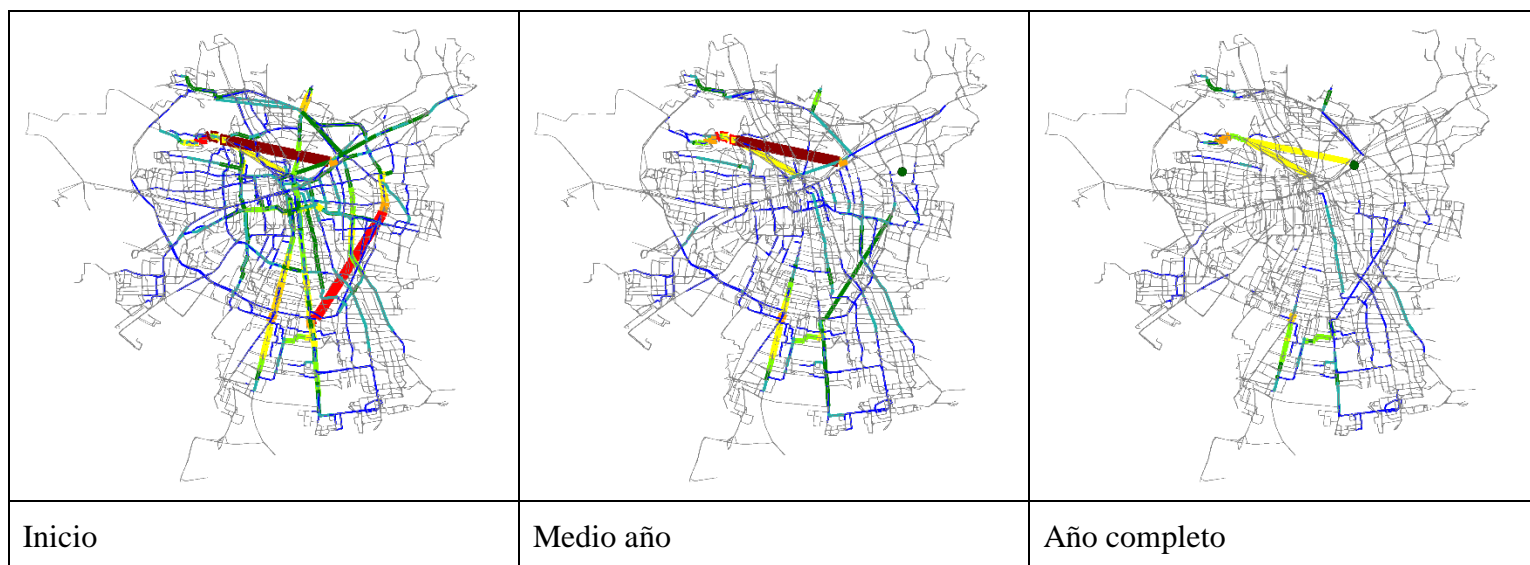


Tabla 20: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos

A partir de los resultados anteriores, se puede ver que este modelo presenta considerables ventajas en todas las dimensiones exceptuando distancia mínima, repitiendo el mismo patrón encontrado en el modelo anterior. Junto con esto, se observa un rendimiento estable en el grafo a nivel global.

³⁹ Es importante destacar que las cantidades mostradas en las tablas de desempeño de esta sección corresponden a diferencias de frecuencias de fiscalización, por lo que son cantidades a dimensionales.

Un punto importante de este modelo es la valorización de cada tramo, ya que no es directo que la suma de diferencias positivas sea la mejor función para valorizar el beneficio de la decisión a tomar, por lo que se generan estudios variando la función de valorización de decisiones, función que opera a partir de la diferencia entre frecuencia “meta” y frecuencia actual de cada arco que el fiscalizador recorrerá en caso de tomar una decisión, donde luego entrega un valor del tramo a recorrer, en el que luego el fiscalizador tomara la decisión en que se maximice este valor.

6.2.3.1 Variaciones del modelo miope glotón por tramos

Para determinar las funciones de valorización que se analizarán, se toma en consideración todas las variables de desempeño generales utilizadas anteriormente y se genera una simulación con cada una de ellas. Estas funciones son las siguientes⁴⁰:

Diferencias positivas al cuadrado (Beneficio = $\sum_{v \in C} (f_{m,v} - f_{a,v})_+^2$)

- **Consiste en valorizar solo la diferencia entre frecuencias positivas y luego sumar sus valores al cuadrado.**

Promedio de diferencias positivas (Beneficio = $\frac{1}{|C|} \sum_{v \in C} (f_{m,v} - f_{a,v})_+$)

- **Consiste en valorizar solo la diferencia positiva entre frecuencias, luego sumarlas y dividir el total por la cantidad de arcos recorridos.**

Máxima diferencia (Beneficio = $\max_{v \in C} \{f_{m,v} - f_{a,v}\}$)

- **Consiste en valorizar la máxima diferencia entre frecuencias de los arcos evaluados.**

Máxima diferencia mínima (Beneficio = $\min_{v \in C} \{f_{m,v} - f_{a,v}\}$)

- **Consiste en valorizar cada tramo por la diferencia mínima entre frecuencias que tiene, para luego valorizar la máxima de estas diferencias.**

Suma de diferencias (Beneficio = $\sum_{v \in C} (f_{m,v} - f_{a,v})$)

- **Consiste en sumar todas las diferencias de frecuencias de cada tramo.**

Suma de diferencias al cuadrado (Beneficio = $\sum_{v \in C} (f_{m,v} - f_{a,v})^2$)

- **Consiste en sumar todas las diferencias de frecuencias al cuadrado de cada tramo.**

⁴⁰ Se considera como “C” al recorrido que se simulará donde el fiscalizador inicia y termina la fiscalización de un bus.

A partir de estos modelos se obtienen los siguientes resultados⁴¹:

	DISTANCIA MAX.	DISTANCIA MIN.	PROMEDIO (ABS)	PROMEDIO (POSIT)	PROMEDIO (ABS^2)	PROMEDIO (POSIT^2)
ALEATORIO UNIFORME	122.30	-82	5.93	2.65	113.90	66.24
DIFERENCIAS POSITIVAS AL CUADRADO	100.36	-234.81	3.57	1.84	57.60	22.84
PROMEDIO DE DIFERENCIAS POSITIVAS	99.36	-174	3.46	1.807	52.48	22.54
MÁXIMA DIFERENCIA	96.69	-74.36	3.95	2.03	59.71	24.16
MÁXIMA DIFERENCIA MÍNIMA	101.36	-42	3.30	1.66	36.10	25.57
SUMA DE DIFERENCIAS	102.36	-185.37	3.02	1.85	45.15	24.87
SUMA DE DIFERENCIAS AL CUADRADO	95.36	-71.97	3.32	1.814	36.17	23.30

Tabla 21: Comparación de desempeños de modelos glotón por tramos que muestra el porcentaje de mejora de cada método con respecto al modelo aleatorio uniforme original

Las imágenes que muestran el desempeño de cada método dentro del grafo se pueden encontrar en los anexos 1.1 a 1.6.

A partir de los resultados anteriores, se puede ver que existen dos métodos que destacan por sobre los demás, estos son la “máxima diferencia mínima” y “suma de diferencias al cuadrado”, siendo la primera la que mantiene mayores beneficios en la mayoría de las dimensiones evaluadas, por lo que se considera como la opción más favorable de valorización de beneficio al tomar una decisión.

6.2.4 Modelo miope glotón por zonas

Otra forma de ampliar la visión miope de las cuadrillas es utilizar una valorización zonal y considerar esta opción para determinar la ruta a tomar. Para esto, al momento de elegir el recorrido a abordar, se realiza una valorización del estado de cada zona, sumando las distancias de frecuencias de cada arco que pertenece a la zona. Luego de esto se ordenan de mayor a menor por distancia total de

⁴¹ El color azul representa el de mejor desempeño de la columna, el color verde el segundo mejor y el color amarillo el tercero mejor, dejando el resto sin colorear.

frecuencias. A partir de esto se evalúa si la cuadrilla se encuentra dentro de las primeras⁴² zonas más “calientes”⁴³, en caso de que si se encuentre en una de estas, se utiliza un método de búsqueda local estudiado en la sección anterior, en caso contrario, se elige la zona dentro de las primeras más “calientes” que esté más cerca del punto actual de la cuadrilla y se elige el recorrido que en promedio acercará más a la cuadrilla a la zona seleccionada.

A partir de esta estructura de decisión se simulan dos modelos diferentes, uno de valorización zonal que en su búsqueda local utiliza el modelo miope glotón y otro de valorización zonal que en su búsqueda local utiliza el modelo miope glotón por tramos, los resultados de estos modelos se encuentran a continuación.

	DISTANCIA MAX.	DISTANCIA MIN.	PROMEDIO (ABS)	PROMEDIO (POSIT)	PROMEDIO (ABS^2)	PROMEDIO (POSIT^2)
ALEATORIO UNIFORME⁴⁴	122.30	-82	5.93	2.65	113.90	66.24
MIOPE GLOTÓN ZONA	111.36	-2149.29	5.69	3.55	551.31	65.15
MIOPE GLOTÓN ZONA POR TRAMOS	111.36	-2878	5.57	3.47	737.41	61.10

Tabla 22: Desempeño modelos glotones por zona

Las imágenes que muestran el desempeño de cada método dentro del grafo se pueden encontrar en los anexos 1.7 a 1.8.

A partir de los resultados anteriores, se puede apreciar una leve mejora en algunas dimensiones (promedio abs. y distancia máx..) y un importante deterioro en el resto de las dimensiones. Este mal desempeño puede ser explicado porque las cuadrillas pueden estar gastando gran parte de su tiempo en permanecer dentro de una zona “caliente” y para generar las movilizaciones de una zona a otra utilizan arcos que entregan un bajo beneficio en comparación con el resto de las posibles decisiones. Esto se puede ver en el gran aumento de la distancia mínima de estos modelos comparados con el modelo aleatorio. Lo cual puede mostrar que las cuadrillas tienden a utilizar los mismos caminos regularmente para moverse de una zona a otra.

⁴² Las primeras zonas son la cantidad de zonas más altas en el ranking igual a la cantidad de cuadrillas recorriendo el grafo.

⁴³ Las zonas más “calientes” corresponden a las zonas que mantengan mayor diferencia total de frecuencias según el ranking de zonas generado.

⁴⁴ Es importante destacar que las cantidades mostradas en las tablas de desempeño de esta sección corresponden a diferencias de frecuencias de fiscalización, por lo que son cantidades dimensionales.

6.2.5 Comparaciones entre modelos

A partir de los modelos vistos previamente, se conforma una tabla comparativa en cuanto a los rendimientos de los modelos seleccionados de cada sección.

	DISTANCIA MAX.	DISTANCIA MIN.	PROMEDIO (ABS)	PROMEDIO (POSIT)	PROMEDIO (ABS^2)	PROMEDIO (POSIT^2)
ALEATORIO UNIFORME	122.30	-82	5.93	2.65	113.90	66.24
ALEATORIO-PONDERADO	111.36	-118.69	4.52	2.21	96.86	38.87
MIOPE GLOTÓN	104.36	-106	4.67	2.35	82.82	36.08
MIOPE GLOTÓN TRAMO	93.33	-190	3.33	1.67	48.58	21.18
MÁXIMA DIFERENCIA MÍNIMA ⁴⁵	101.36	-42	3.30	1.66	36.10	25.57
MIOPE GLOTÓN ZONA	111.36	-2149.29	5.69	3.55	551.31	65.15

Tabla 23: Comparación de desempeño entre modelos generales

Como se puede ver en los resultados anteriores, los mayores rendimientos se encuentran en los modelos “glotón por tramos” y “máxima diferencia mínima”, siendo el segundo mejor en la mayoría de las dimensiones, destacando en la dimensión de distancia mínima ya que es el único con una mejora positiva en comparación con el modelo aleatorio.

6.3 Modelos dinámicos propuestos

Dados los alcances de esta tesis hay modelos que no fueron implementados, pero considerando los resultados obtenidos hasta el momento, podrían generar mejores rendimientos en las dimensiones previamente evaluadas.

En primera instancia, se podría utilizar la evaluación miope por tramos adversa al riesgo. A partir de las distribuciones de los tiempos de fiscalización y la velocidad de los buses, se podría implementar una métrica de evaluación utilizando el CVAR o VAR de estas distribuciones para tomar decisiones maximizando el beneficio en el peor caso de cada elección.

⁴⁵ Modelo miope glotón avaro por tramos con función de valorización de máxima diferencia mínima.

Otro modelo por implementar es un modelo miope por tramos combinado con una simulación del tipo OSLA⁴⁶, en la que se simularía el comportamiento de una decisión y luego se evaluaría el mayor beneficio miope por tramos desde el punto de bajada de esta decisión. Luego se repetiría este evento un número de veces razonable como para mantener cierta estabilidad en el resultado, pero al mismo tiempo sin aumentar de forma considerable el tiempo de cálculo utilizado.

A partir de esto, se considera el beneficio promedio de esta simulación como el beneficio potencial de esta elección, resultando así en un modelo semi-miope, que mantiene un rango de visión más amplio pese a la naturaleza aleatoria del sistema. Esta metodología se podría ampliar a una visión cada vez más grande (en pasos simulados), pero recurriendo cada vez en un aumento considerable en tiempos de cómputo.

En este mismo sentido, se podría evaluar un sistema de movimiento discretizado, es decir, limitar la libertad de movimiento de las cuadrillas, dando ventanas horarias o espaciales en las que pueden realizar la fiscalización, imponiendo por ejemplo que una cuadrilla debe subirse en un paradero *A* y luego bajarse en un paradero *B* independiente si logró terminar el proceso de fiscalización del bus o si ya lo terminó hace un tiempo. Esto reduciría considerablemente el nivel de incertidumbre del modelo y podría permitir generar cálculos de más largo plazo sin tener que recurrir a un uso excesivo de tiempo de cálculo, con la esperanza de obtener un mejor rendimiento en las métricas de evaluación general.

Por último, otro modelo a implementar sería un modelo miope por zonas que considere el desplazamiento zonal solo en los casos en que se encuentre en una “mala”⁴⁷ zona, reduciendo así los viajes innecesarios de cambio de zona y utilizándolos solo en el caso de que su beneficio potencial de la zona sea muy bajo comparado con zonas cercanas.

6.4 Integración al sistema de transporte

Para poder implementar un modelo de fiscalización dinámico, es necesario mantener comunicación constante entre el modelo a ejecutar y las cuadrillas fiscalizadoras, por lo que la implementación de un servidor web junto con una aplicación para el móvil de la cuadrilla es fundamental. A continuación, se detallan los dos procesos críticos para el correcto funcionamiento del modelo, estos son, la generación de la decisión a tomar y la actualización del estado del grafo.

⁴⁶ One Step Look Ahead.

⁴⁷ Una zona con baja diferencia de frecuencias en su totalidad.

Para esto se realiza un diagrama de secuencia de cada uno de estos procesos.

Decisión en la app de fiscalización

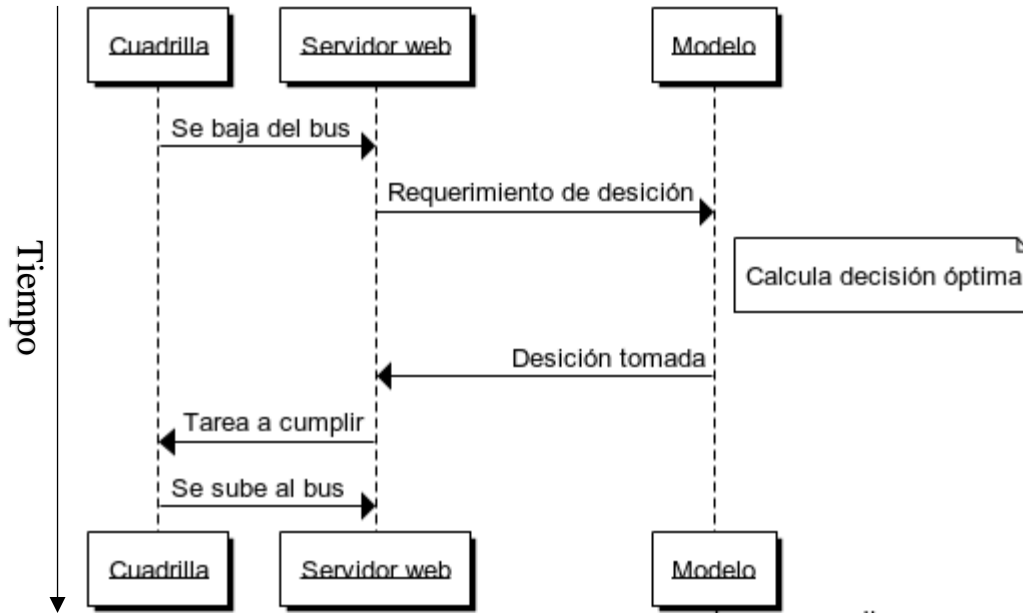


Figura 4: Diagrama secuencial de toma de decisión en aplicación de fiscalización

Actualización de estado en la app de fiscalización

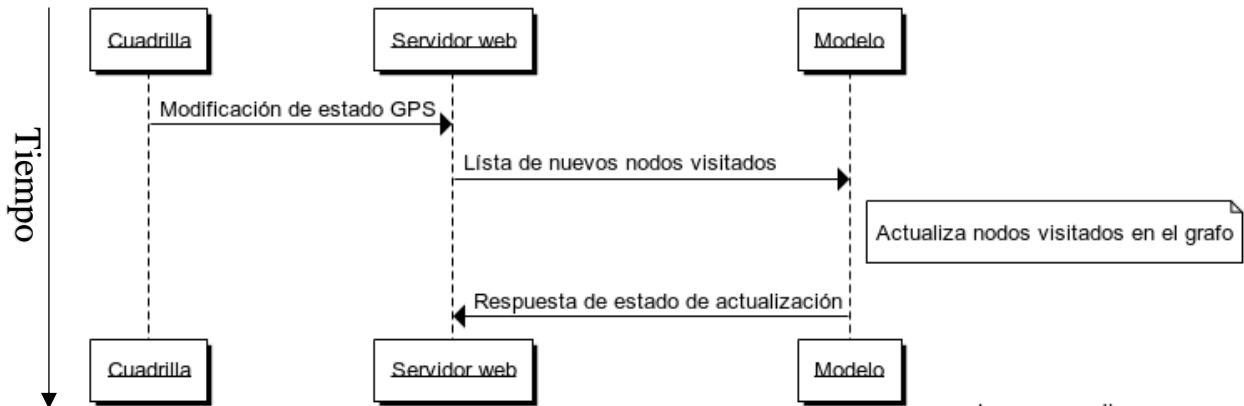


Figura 5: Diagrama secuencias de actualización de estado en aplicación de fiscalización

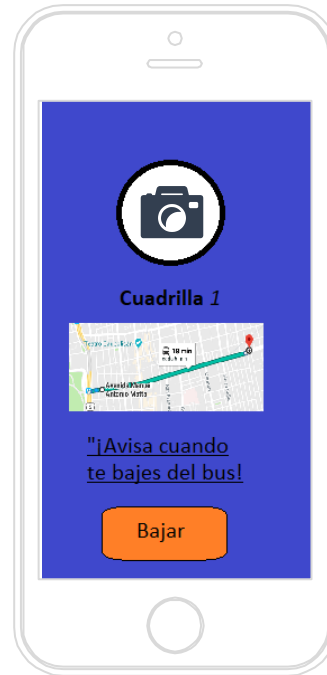
Junto con la implementación de los procesos fundamentales, será necesario generar herramientas dentro de la aplicación para el correcto funcionamiento de la cuadrilla en su horario de trabajo. Estas son

un mapa de la zona y las instrucciones a realizar. A continuación, se muestran ejemplos de cómo debieran utilizarse estas herramientas.

Figura 7: Ilustración 1 de visualización de plataforma



Figura 6: Ilustración 2 de visualización de plataforma



7 Conclusiones generales

En esta memoria se presenta la implementación de dos modelos que utilizan paradigmas opuestos para lograr un fin común, el generar una estrategia mixta óptima de fiscalización del pago del pasaje en el sistema de transporte público de Santiago. Dado el estado actual del sistema, el modelo estático, podrá implementarse en el corto plazo ya que las cuadrillas podrán continuar fiscalizando en paraderos tal como lo hacen actualmente. Sin embargo, es importante considerar al momento de decidir cuál modelo estático implementar las desventajas que conlleva cada uno de estos, el riesgo de predictibilidad asociado por un lado (en caso de un modelo MDPE) y el alto costo de transporte y tiempo ocioso por otro (en el modelo de muestreo).

Por otro lado, el modelo dinámico soluciona los problemas planteados anteriormente, ya que las cuadrillas se movilizan fiscalizando constantemente y su índice de predictibilidad es prácticamente nulo. Una dificultad consiste en que su implementación requiere cambios tanto de forma como de fondo dentro del sistema de fiscalización, ya que dentro de los buses se realizará la fiscalización de forma completa, por lo que, será necesario modificar el proceso de fiscalización para adecuarse a los espacios y movimientos dentro del bus, generando cuadrillas de mayor tamaño entre algunas de las medidas.

Por otra parte, las simulaciones y resultados generados en esta memoria sugieren que para postular un modelo efectivo de fiscalización dinámico se profundice en la complejidad del modelo para permitir soluciones más robustas a la aleatoriedad del sistema, para así generar una solución con un mayor grado de efectividad que pueda competir sin problemas con el rendimiento de un sistema estático.

Finalmente, se propone la implementación del sistema estático utilizando el MDPE en el corto plazo (Siempre que se mantengan las medidas paliativas para su fragilidad de predictibilidad propuestas en esta memoria), debido a sus altos rendimientos en costos de transporte y tiempos de ejecución, mientras se trabaja en la formulación de un modelo de decisión dinámico más robusto al utilizado en esta memoria, y de forma paralela se gestiona la obtención de las herramientas necesarias para la correcta implementación de un sistema dinámico de fiscalización, que permitirá obtener los beneficios previamente planteados, pero a la vez mantener las ventajas del modelo actual.

Mientras se trabaja en la implementación del sistema dinámico se podrá estudiar las ventajas de la realización de un sistema híbrido, que podrá solucionar los problemas de ambos métodos, recorriendo de forma estática puntos de alta probabilidad concentrada donde el sistema dinámico es poco efectivo en cumplir, mientras se concentra una importante fuerza de trabajo en recorrer el grafo de forma dinámica, manteniendo un índice de certeza considerablemente bajo por parte del evasor.

8 Bibliografía

- [1] T. guardian, «German fare dodgers public transport,» 2 2 2012. [En línea]. Available: <https://www.theguardian.com/world/2012/feb/02/german-fare-dodgers-public-transport>. [Último acceso: 25 10 2017].
- [2] T. Guardian, «Tallinn experiment estonia public transport free cities,» 11 10 2016. [En línea]. Available: <https://www.theguardian.com/cities/2016/oct/11/tallinn-experiment-estonia-public-transport-free-cities>. [Último acceso: 19 5 2018].
- [3] M. chilena, «Sistemas de transporte en Santiago,» 2016. [En línea]. Available: <http://www.memoriachilena.cl/602/w3-article-3706.html>. [Último acceso: 29 6 2018].
- [4] Transantiago, «Flujo de transantiago,» 2017. [En línea]. Available: <http://www.transantiago.cl/acerca-de-transantiago/informacion-del-sistema>. [Último acceso: 22 10 2017].
- [5] DPTM, «Misión DPTM,» 24 2 2013. [En línea]. Available: <https://www.dtpm.cl/index.php/2013-04-22-15-20-06/2013-04-24-21-10-35>. [Último acceso: 22 10 2017].
- [6] P. n. d. fiscalización, «Fiscalización,» 16 6 2016. [En línea]. Available: <http://www.fiscalizacion.cl/wp-content/uploads/2016/10/Indice-Evasion-Abr-Jun16.pdf>. [Último acceso: 23 10 2017].
- [7] P. n. d. fiscalización, «Índice de evasión de Transantiago,» 5 4 2017. [En línea]. Available: <http://www.fiscalizacion.cl/wp-content/uploads/2018/04/Indice-Evasion-Abr-Jun17.pdf>. [Último acceso: 06 08 2018].
- [8] L. y. desarrollo, «Análisis de evasión en transantiago,» 9 2016. [En línea]. Available: <http://lyd.org/wp-content/uploads/2017/01/SIE-260-Evasion-en-Transantiago-un-analisis-de-cointegracion-Septiembre2016.pdf>. [Último acceso: 24 10 2017].
- [9] E. Desconcierto, «De las micros amarillas al Transantiago,» 9 2 2017. [En línea]. Available: <http://www.eldesconcierto.cl/2017/02/09/de-las-micros-amarillas-al-transantiago-la-peculiar-mirada-de-un-cambio-historico-tras-el-volante/>. [Último acceso: 25 5 2018].
- [10] G. post, «Historias de pri,» 11 2 2014. [En línea]. Available: <https://www.pri.org/stories/2014-02-11/germanys-undercover-operatives-will-check-your-subway-fare>. [Último acceso: 25 10 2017].
- [11] C. d. diputados, «Estudio del sistema de fiscalización en otros países,» 2017. [En línea]. Available: <https://www.camara.cl/pdf.aspx?prmTIPO=DOCUMENTOCOMUNICACIONCUENTA&prmID=15696>. [Último acceso: 11 4 2018].












- [12] C. lab, «Lecciones del sistema de transporte de Londres,» 2014. [En línea]. Available: <https://www.citylab.com/solutions/2014/06/5-lessons-us-transit-systems-should-learn-from-london/373667/>. [Último acceso: 24 11 2017].
- [13] TFL, «Penas y pasos de una multa de evasión,» 2017. [En línea]. Available: <https://tfl.gov.uk/fares-and-payments/penalties-and-enforcement#on-this-page-1>. [Último acceso: 24 11 2017].
- [14] TFL, «Estudio del impacto de propaganda anti evasión,» 2017. [En línea]. Available: <http://content.tfl.gov.uk/bus-fare-evasion-communications-development-presentation.pdf>. [Último acceso: 24 11 2017].
- [15] TFL, «Nivel de evasión en el sistema de transporte de Londres,» 2013. [En línea]. Available: <http://content.tfl.gov.uk/STP-20131022-Open-Item07-Fare-Evasion-on-London-Buses.pdf>. [Último acceso: 25 11 2017].
- [16] T. H. V. K. J. M. J.R. Correa, «Fare evasion in transit networks,» *Operations research*, pp. 165-183, 2017.
- [17] T. M. A.W. McMasters, «Optimal interdiction of a supply network,» *Naval research logistics quarterly*, pp. 261-268, 1970.
- [18] D. M. T. T. P.M. Ghare, «Optimal interdiction policy for a flow network,» *Naval Research Logistics Quarterly*, pp. 37-45, 1971.
- [19] R. Wood, «Deterministic network interdiction,» *Matematical and computer modeling*, pp. 1-18, 1993.
- [20] R. W. E. Israeli, «Shortest path network interdiction,» *Networks*, pp. 97-111, 2002.
- [21] M. C. J. S. K. W. G. Brown, «Defending critical infrastructure,» *Interfaces*, pp. 530-544, 2006.
- [22] J. P. M. T. F. O. S. K. P. Paruchuri, «An efficient heuristic approach for security against multiple adversaries,» *AAMAS*, 2007.
- [23] J. P. J. M. M. T. F. O. S. K. P. Paruchuri, «Playing games with security: An efficient exact algorithm for Bayesian Stackelberg games,» *AAMAS*, 2008.
- [24] S. R. C. K. F. O. M. T. J. Tsai, «A tool for strategic security allocation in transportation networks,» *AMAAS*, 2009.
- [25] J. B. G. S. E. S. R. Borndörfer, «Optimizing toll enforcement in transportation networks a game theoretic approach,» *Electronic notes in discrete mathematics*, pp. 253-260, 2013.

- [26] B. Bahamondes, «Estudio de un modelo de evasión en el transporte público,» 2016. [En línea]. Available: <http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/138899>.
- [27] A. Tolstoi, «Methods of finding the minimal total kilometrage in cargo-transportation planning in space,» *National commissariat of transportation of the soviet union*, 1930.
- [28] F. Ford, «Computation of maximal flows in networks,» *Naval research logistics quarterly*, 1955.
- [29] H. Ross, «Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities,» *Armed services technical information agency*, 1955.
- [30] A. VGoldberg, «An Efficient Implementation of a Scaling Minimum-Cost Flow Algorithm,» *Journal of Algorithms*, pp. 1-29, 1997.
- [31] R. T. A.V. Goldberg, «Finding minimum cost circulations by successive aproximation,» *Math. of oper. research*, pp. 430-466, 1990.
- [32] L. L. A. S. M. Grötschel, *Geometric algorithms and combinatorial optimization vol 2*, Berlin: Springer, 1988.
- [33] L. L. A. S. M. GROTSCHHEL, «The elipsoid method and its consequences,» *Combinatorica 1(2)*, pp. 169-197, 1981.
- [34] R. Bellman, «A markovian desicion process,» *Journal of mathematics and mechanics*, 1957.
- [35] M. Schaäl, «Markov decision process in finance an dynamic options,» *Inst. Angew math.*, 2000.
- [36] M. Vidyasagar, «Hidden markov processes: theory and aplications to biology,» *Princeton university press*, 2014.
- [37] S. C. B. X. A. Luo, «Enhanced map-matching algorithm with a hidden markov model for mobile phone positioning,» *International journal of geo-information*, 2014.
- [38] C. K. T. S. K. Leyton-Brown, «Towards optimal patrol strategies for fare inspection in transit systems,» *Game theory for security, sustainability and health*, 2012.
- [39] Z. Y. A. Xin, «Game-theoretic randomization for security patrolling with dynamic execution uncertanty,» *AAMAS*, 2013.
- [40] S. Y. Z. F. F. J. A. T. M. & S. J. Microsoft, «Game-theoretic Patrol Strategies for Transit Systems : the TRUSTS System and its Mobile App (Demonstration).,» *AMAAS*, 2013.
- [41] C. Carathéodory, «"Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen,» *Mathematische Annalen*, vol. 64, n° 1, pp. 95-115, 1907.

- [42] L. L. A. S. Martin Grötschel, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [43] J. F. a. A. Skoda, «Strongly Polynomial Algorithm for the Intersection,» *Research Trends in Combinatorial Optimization*, pp. 69-85, 2009.
- [44] W. H. Cunningham, «Testing membership in matroid polyhedra,» *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, pp. 161-188, 1981.
- [45] S. S. L. B. P. Srijan Biswas, «A Review on Ford Fulkerson Graph Algorithm for,» *International Journal of Scientific & Engineering Research*, pp. 109 - 112, 2017.
- [46] A. G. a. R. Tarjan, «Finding Minimum-Cost Circulations by Successive Approximation,» *Mathematics of Operations Research*, pp. 430-466, 1990.
- [47] A. Goldberg, «An Efficient Implementation of a Scaling Minimum-Cost Flow Algorithm,» *Journal of Algorithms*, pp. 1-29, 1997.
- [48] J. Voss, «An Introduction to Statistical Computing: A Simulation-based Approach,» de *An Introduction to Statistical Computing: A Simulation-based Approach*, Chichester, John Wiley & Sons , Ltd, 2014, p. Sección 1.2.
- [49] A. Schrijver, «On the history of the transportation and maximum flow problems,» *A. Math. Program*, 2002.

9 ANEXOS

9.1 ANEXO: Tabla de colores de grafo

Decil 0	
Decil 1	
Decil 2	
Decil 3	
Decil 4	
Decil 5	
Decil 6	
Decil 7	
Decil 8	
Decil 9	
No hay diferencia positiva	

9.2 ANEXO: Grafos de visualización general del modelo dinámico

9.2.1 Diferencias positivas al cuadrado

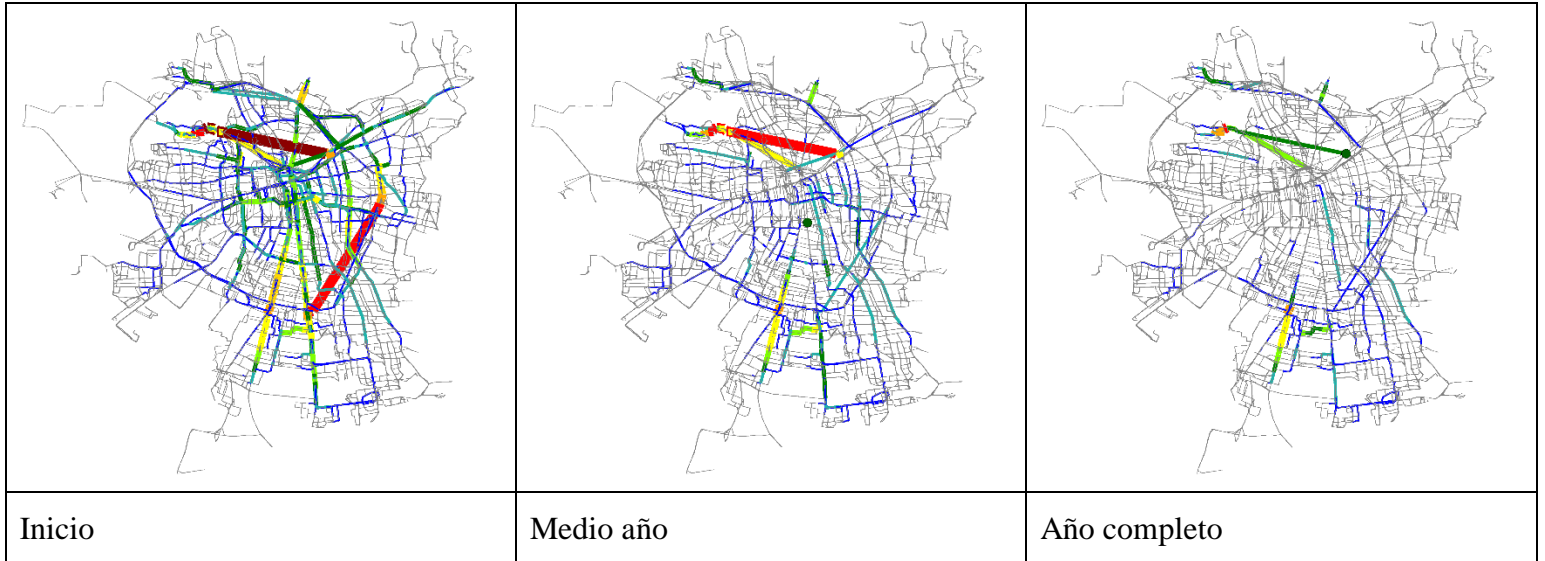


Tabla 24: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, diferencias positivas

9.2.2 Promedio de diferencias positivas

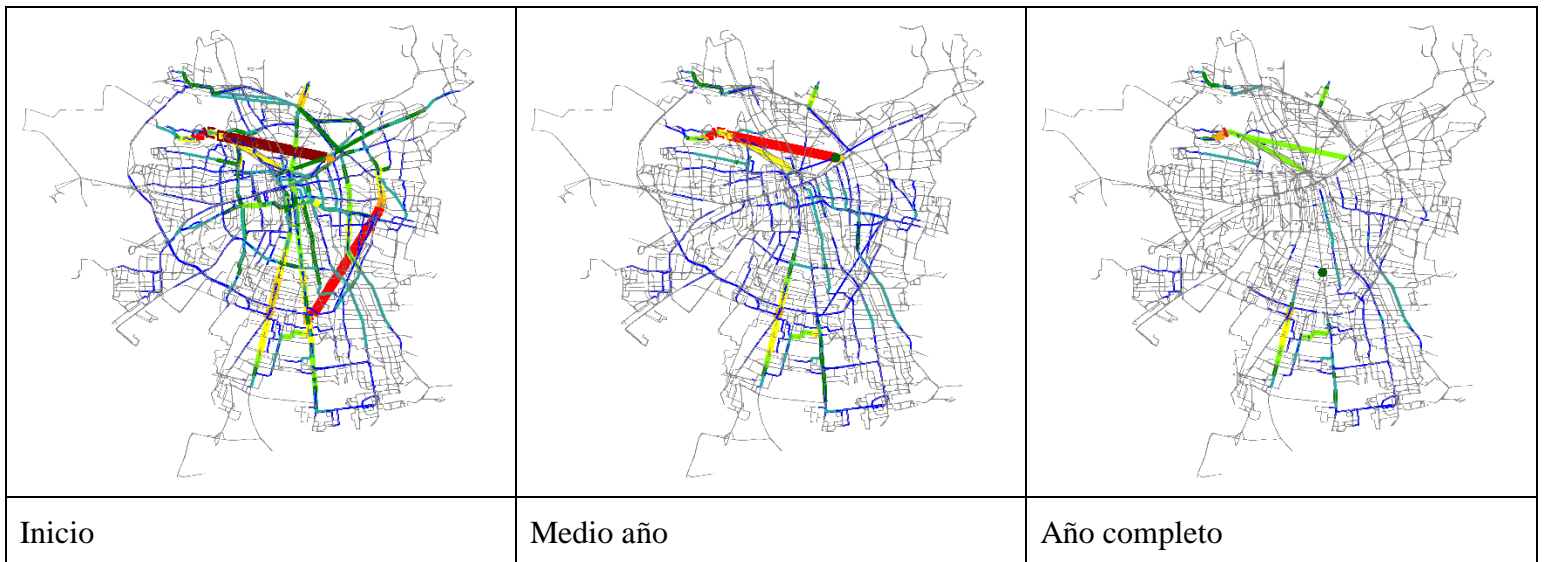


Tabla 25: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, promedio de diferencias positivas

9.2.3 Máxima diferencia

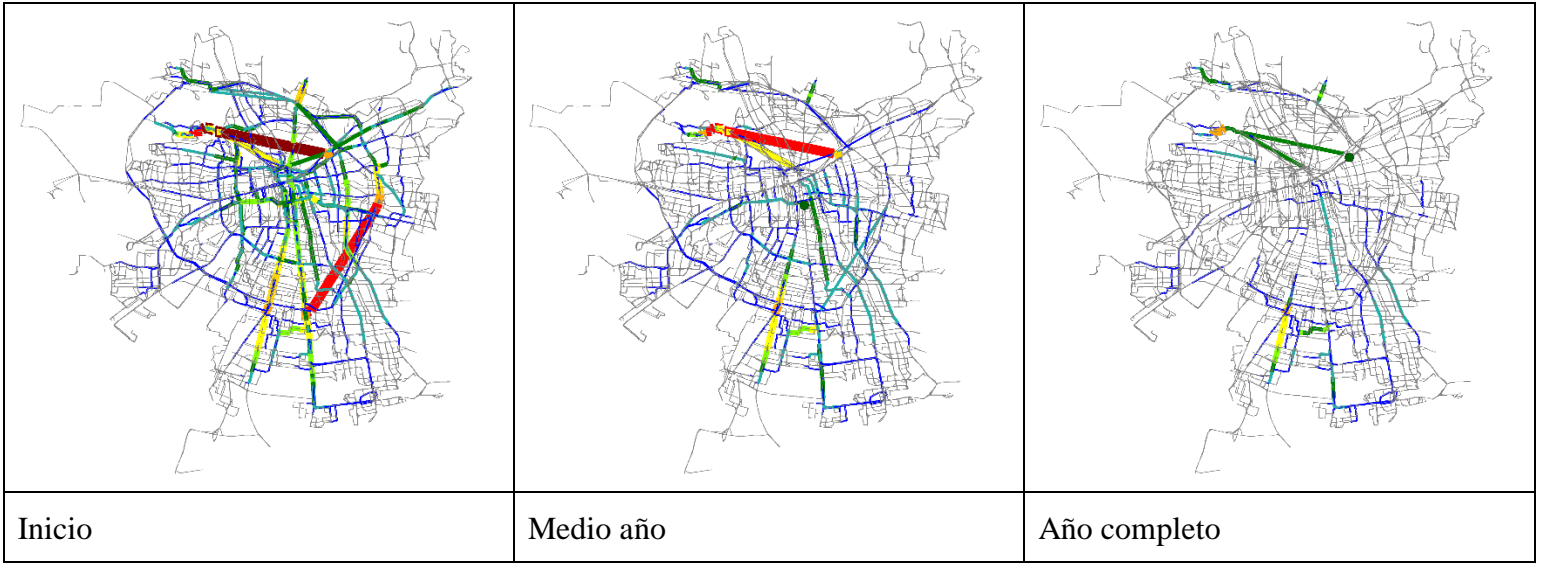


Tabla 26: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, máxima diferencia

9.2.4 Máxima diferencia mínima

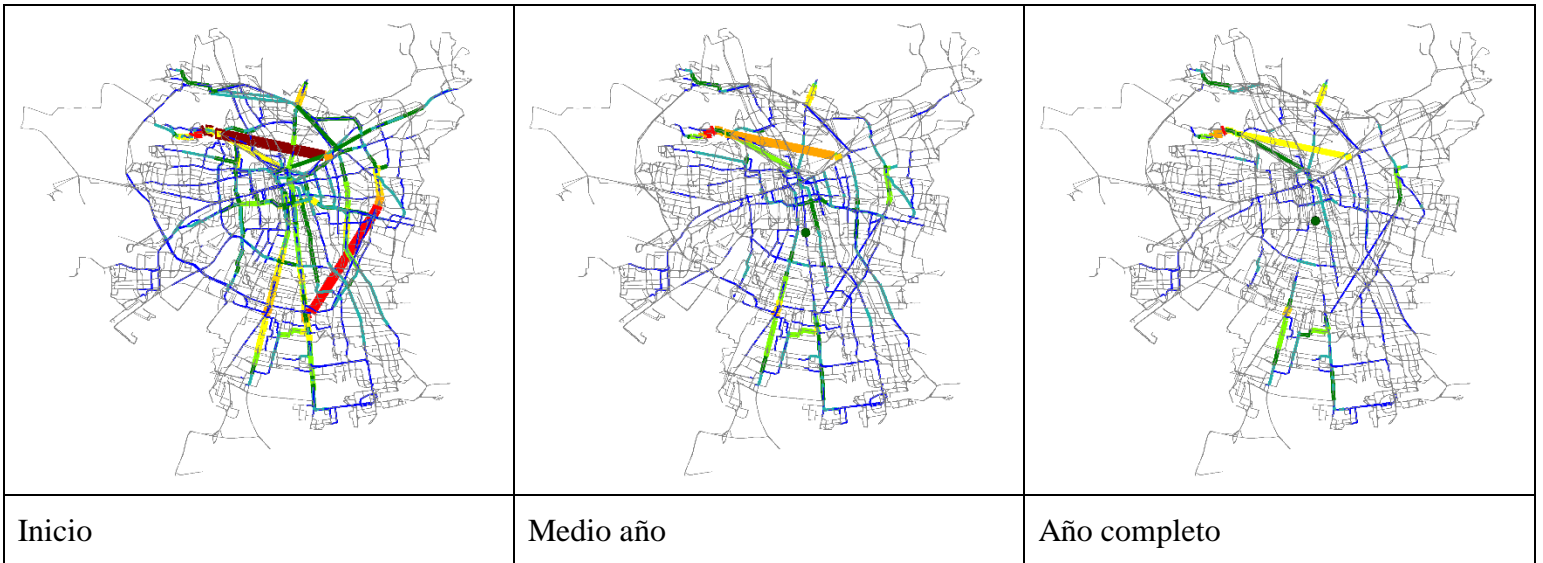


Tabla 27: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, diferencia mínima

9.2.5 Suma de diferencias

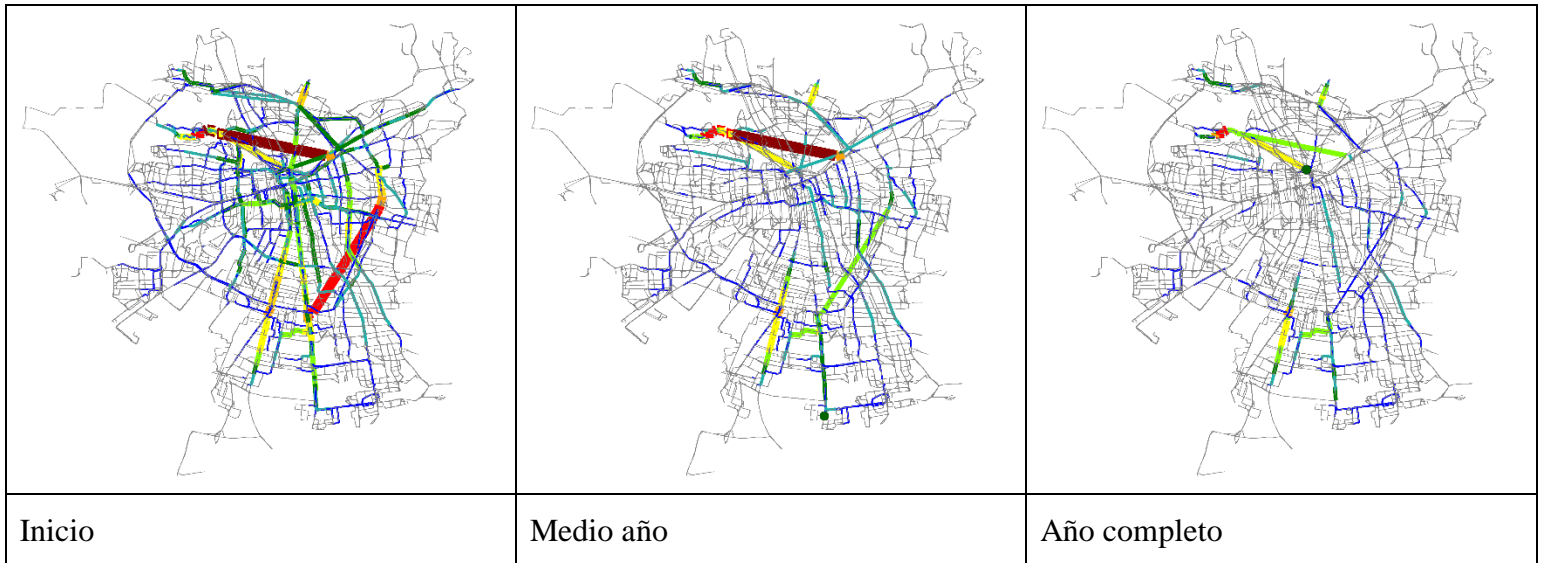


Tabla 28: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, suma de diferencias

9.2.6 Suma de diferencias al cuadrado

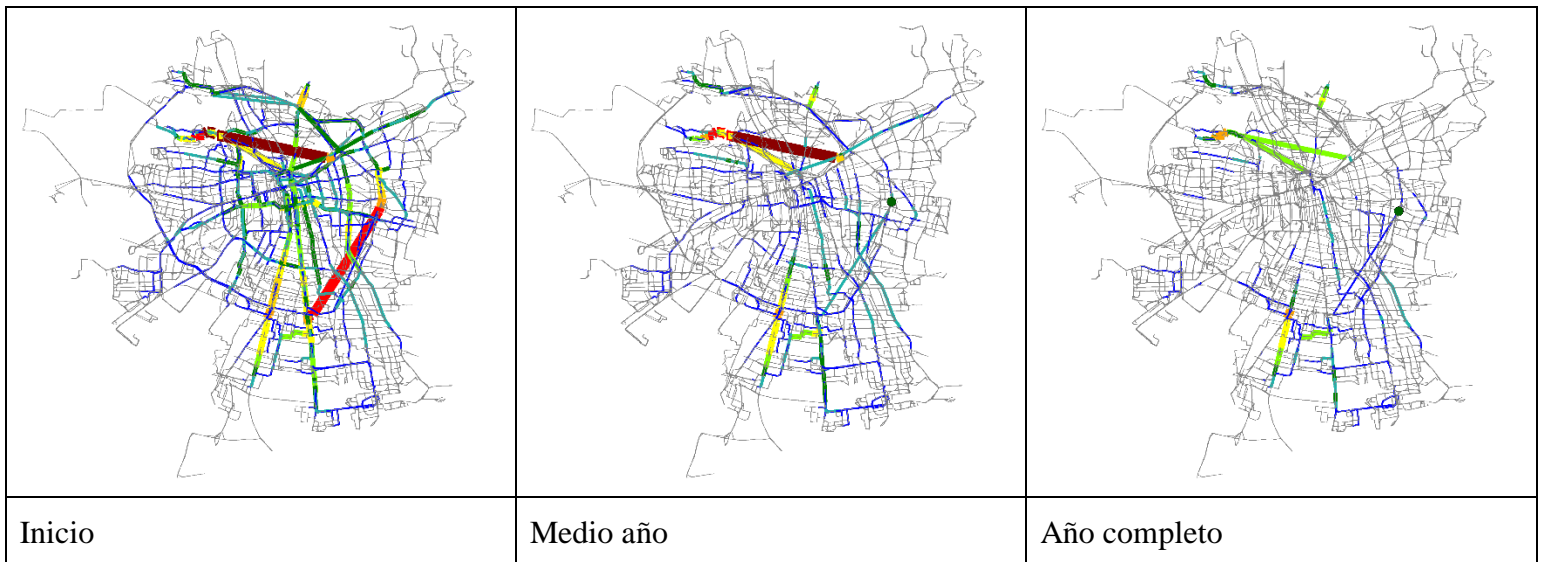


Tabla 29: Distribución del desempeño modelo glotón por tramos, diferencias al cuadrado

9.2.7 Modelo glotón por zonas

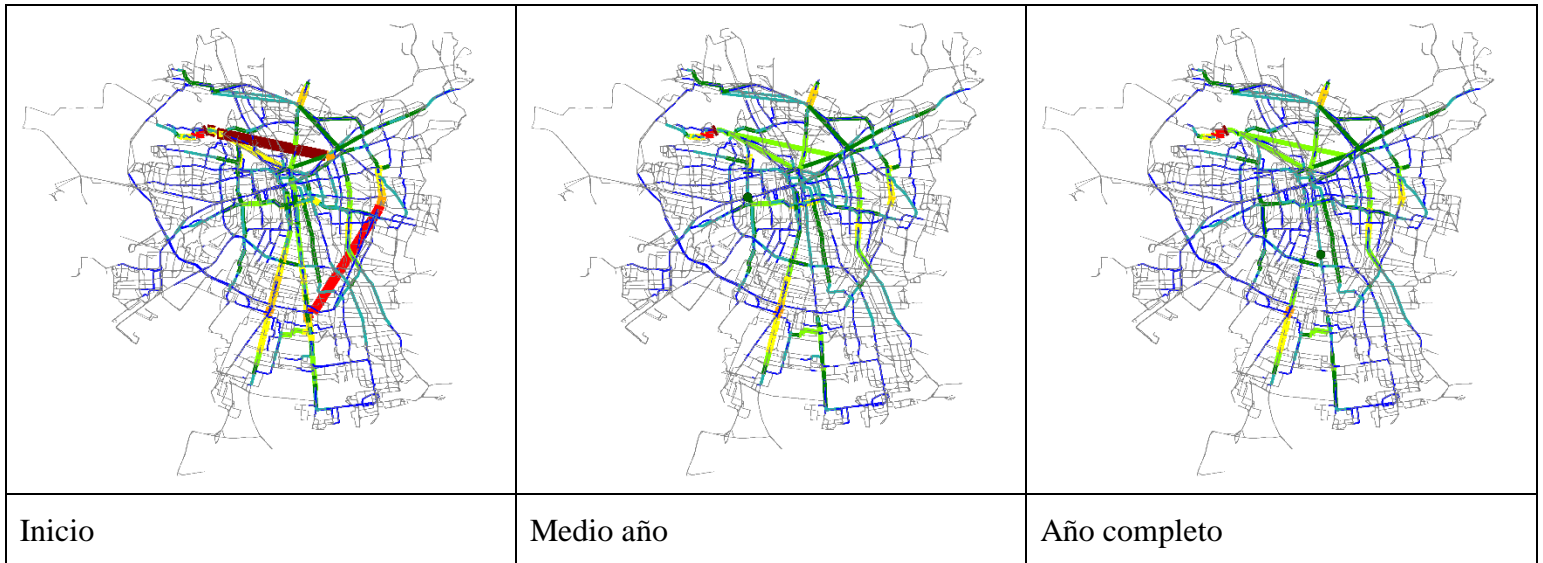


Tabla 30: Distribución del desempeño modelo glotón por zonas

9.2.8 Modelo por zonas glotón por tramos

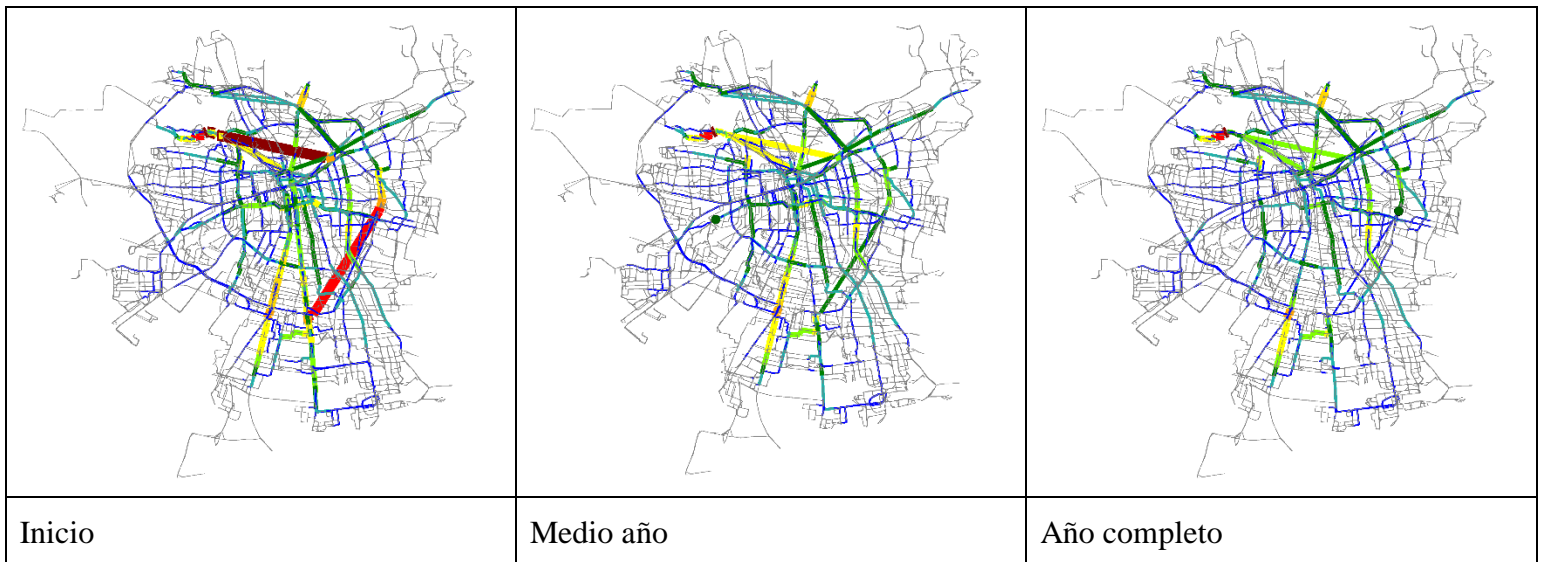


Tabla 31: Distribución del desempeño modelo glotón por zonas y tramos

9.3 ANEXO: Grafos de comparaciones máximas y mínimas entre modelo muestreo y modelo MDPE

9.3.1 Costos máximos entre modelos

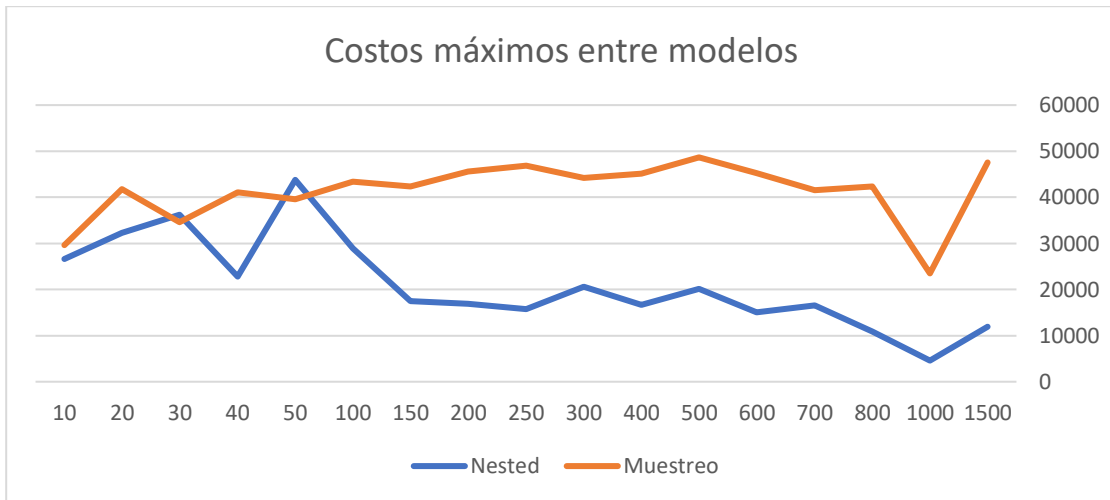


Gráfico 16: Comparación entre costos máximos entre modelos

9.3.2 Costos mínimos entre modelos

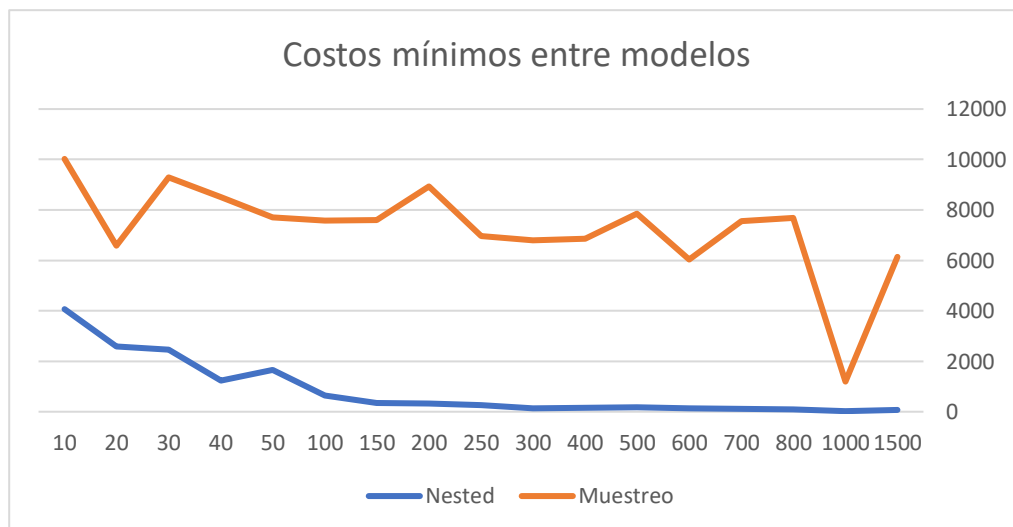


Gráfico 17: Comparación entre costos máximos entre modelos