UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

SOBRE LA CONJETURA DE LAZER-MCKENNA EN EL CASO NO LOCAL CON POTENCIAL SUPERLINEAL BAJO CONDICIÓN DE SIMETRÍA PARCIAL EN EL DOMINIO: CASO CRÍTICO Y SUPERCRÍTICO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

YASSER NANJARÍ DÍAZ

PROFESOR GUÍA:
CLAUDIO MUÑOZ CERON

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ERWIN TOPP PAREDES
ALEXANDER QUAAS BERGER
JUAN PEYPOUQUET URBANEJA
MATTEO RIZZI

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Fondecyt regular 1180526, Fondecyt regular 1140311 y CMM Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2019

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: YASSER NANJARÍ DÍAZ
FECHA: MARZO 2019
PROF. GUÍA: SR. CLAUDIO MUÑOZ CERON

SOBRE LA CONJETURA DE LAZER-MCKENNA EN EL CASO NO LOCAL CON POTENCIAL SUPERLINEAL BAJO CONDICIÓN DE SIMETRÍA PARCIAL EN EL DOMINIO: CASO CRÍTICO Y SUPERCRÍTICO

En este trabajo de tesis se presenta un estudio sobre la veracidad de la conjetura no local de Lazer-Mckenna para un problema de tipo Ambrosetti-Prodi

$$\begin{cases} (-\Delta)^s = g(u) - \sigma\varphi_1 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ con frontera C^1, $s \in (0,1)$, φ_1 es la primera función propia del Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^s$ con condición de borde Dirichlet, σ es un parámetro real que tiende a infinito y $g(u) = |u|^p$, con $p \in (1, \frac{N-m+1+2s}{N-m+1-2s})$ para $m \in \mathbb{N}$ a definir más adelante y es super-crítico con respecto a N. Además Ω cumple una condición de simetría parcial que será expuesta más adelante.

Más en concreto, la conjetura de Lazer-McKenna predice la existencia de un número no acotado de soluciones a medida que σ crece a infinito. A pesar de que la conjetura fue planteada en 1981, solo hasta inicios del siglo XXI se produjeron resultados con la identificación del caso N-dimensional y subcrítico como un problema de límites singulares.

Este trabajo prueba la veracidad de la conjetura para (2). Se probó en este trabajo la existencia de una familia de soluciones indexada por un parámetro natural que presentan concentración en una esfera $m-1$ dimensional cerca de máximos locales de φ_1.

A fin de lograr este propuesto se usó el método Lyapunov-Schmidt, el cual consiste en buscar soluciones de la forma $U + v$, donde U es una función escogida adecuadamente para lograr las propiedades buscadas. Más en concreto U resulta ser una solución fundamental de (2) para el cual se conocen además su comportamiento asintótico. v por otro lado es un termino de corrección que por lo general se espera que tienda a cero cuando s crece al infinito. Esto va muy en concordancia con los trabajos de Dancer y Yan en [13, 14, 11] y los de Abdellaoui, Dieb y Mahmoudi en [1].

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: YASSER NANJARÍ DÍAZ
FECHA: MARZO 2019
PROF. GUÍA: SR. CLAUDIO MUÑOZ CERON

SOBRE LA CONJETURA DE LAZER-MCKENNA EN EL CASO NO LOCAL CON POTENCIAL SUPERLINEAL BAJO CONDICIÓN DE SIMETRÍA PARCIAL EN EL DOMINIO: CASO CRÍTICO Y SUPERCRÍTICO

In this thesis we study the veracity of the the non-local version of Lazer-McKenna's conjecture for an Ambrosetti-Prodi type problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^s = g(u) - \sigma\varphi_1 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where Ω is a subset of $\mathbb{R}^N$ with C^1 boundary, $s \in (0,1)$, φ_1 is the first eigfunction of the fractional Laplacian $(-\Delta)^s$ with Dirichlet boundaryl condition, σ is also a real number that goes to infinity and $g(u) = |u|^p$, with $p \in (1, \frac{N-m+1+2s}{N-m+1-2s})$ for $m \in \mathbb{N}$ to be defined later and is supercritial in dimension N. Ω is assumed to satisfy partial symmetry, see below for more details.

More precisely, the Lazer-McKenna's conjecture predicts the existence of an unbounded number of solutions when σ goes to infinity. Although the conjecture was formulated on 1981, the first results has been obtained at the beginning of the 2000's.

This work shows the validity of the conjecture for (2). We show the existence of a one parameter family of solutions concentrating at an $m-1$ dimensional sphere near local maxima of φ_1.

In order to achieve the main goal, the Lyapunov-Schmidt method was used. This consists on finding solutions of the form $U + v$, where U is properly chosen to obtain the desired properties. Particularly, U turns out to be a solution of (2) for which it's asymptotic behaviour is well known. The correction term v is sufficiently small when σ tends to infinity. This work is inspired by the works of Dancer & Yan in [13, 14, 11] and the one by Abdellaoui, Dieb & Mahmoudi in [1].

"Perdóname, por compararte con el Quijote, pero ello es causa de que aquel caballero andante me infunde el mayor de los respetos. Para mi representa, ajeno a su figura, el hombre que antepone sus ideales a su conveniencia, el hombre capaz de luchar con cualquier molino de viento, a objeto de que los ideales de la Orden se establecieran, en la humanidad esa es precisamente la digna imagen que has dejado en mi. Eres un ejemplo a seguir."-
Germán Morales

Dedicado a mi padre Orlando Nanjarí Ibacache.

Agradecimientos

No puedo sino, agradecer a todo quien ha sido parte de mi paso por esta universidad, sin embargo creo que las palabras siempre quedarán al debe a la hora de mostrar lo agradecido que estoy por haber tenido la oportunidad de haber conocido grandes personas y amigos.

Una de las cosas que siempre me mantuvo en pie fue mi familia, gracias. A mi hermano Anwar por siempre estar para mi, por escucharme, porque a pesar de ña distancia seguimos siendo igual de unidos, gracias por ser parte hoy de mi vida. A Aurora mi madre, por todo lo que diste y entregaste para que nosotros pudiésemos estudiar, por no rendirte nunca, por ser la mujer más fuerte que he conocido, por cada llamada, por cada te quiero, por cada detalle, te agradezco infinitamente por tu apoyo, por tus palabras de consuelo y por siempre estar ahí para mi. La vida es efímera para muchos y sin embargo tú, en el periodo que pude compartir contigo, me marcaste muchísimo, papá, te agradezco por todo lo que hiciste por mi, sin ti hoy no estaría acá, gracias por apoyarme, creo firmemente, que a pesar de tus defectos, yo no sería la persona que soy hoy si no fuera por ti, gracias a ti conocí muchas cosas que probablemente me terminaron por encaminar en este camino, así que gracias de nuevo. Los quiero mucho.

Quiero agradecer también a mis tíos Ramón y Norma, por recibirme en su casa por tantos años, por cuidar de mi y permitirme ser parte de su hogar. A mis padrinos Orlando y Verónica, porque a pesar de mi ausencia, siempre estaban ahí para mi con una visita, una llamada o quizá un mensaje. Partí en este camino acompañado de Martin y Ednar, de quienes estoy muy agradecido por haberme brindado su amistad, compañía y buenos ratos juntos.

Termine estudiando esta carrera y conocí mucha gente en ella, el DIM fue un desafío que, de no haber tenido su compañía, habría sido mucho más duro, haber compartido esta carrera con ustedes, amigos como Obed, Seba, o mis compañeros de oficina Catalina y Pancho, por todo lo que compartimos y lo que aprendí de ustedes. También Bob y Daniel que me apoyaron más de una vez con consejos, compañía o una simple tarde jugando juegos de mesa.

Por último, a quien más me acompañó en este trabajo, me aguantó y animó a seguir adelante, Dani, gracias por todo, cada palabra de aliento, cada escape de la rutina. Tu paciencia es corta, pero creo que conmigo fue infinita. Gracias por estar ahí para mi, te quiero.

Gracias a todos los asistente el día de mi defensa.

Tabla de Contenido

Introducción

El problema

Este trabajo de tesis tiene como objetivo estudiar la conjetura no local de Lazer-McKenna para problemas de tipo Ambrosetti-Prodi

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = g(u) - \sigma\varphi_1 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}. \tag{3}$$

donde Ω es un dominio suave de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ es un parámetro que define el operador no local $(-\Delta)^s$ conocido como Laplaciano fraccionario, φ_1 corresponde de hecho a la primera función propia de este operador con condición de bonde Dirichlet, σ es un parámetro que tiene a infinito. Finalmente $g(u)$ es una no linealidad superlineal que en esta caso es $g(u) = |u|^p$ donde $p \in (1, \frac{N-m+1+2s}{N-m+1-2s})$ y también es supercrítica para N. Supondremos además que g satisface

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} = \mu > \lambda_1 > \lim_{t\to-\infty} \frac{g(t)}{t} = \nu.$$

La conjetura de Lazer-McKenna (ver [23]) predice la existencia de un número no acotado de soluciones a medida que σ crece a infinito, $\mu = +\infty$, $\nu < \lambda_1$ y g no crece demasiado rápido.

Para poder trabajar con la no linealidad de este trabajo es que además se considerará la siguiente condición de simetría parcial para el dominio Ω.

Definición 0.1 *Diremos que el dominio Ω satisface la condición (Ω) si existe m, con $1 < m \leq N$ entero y $D \subset \mathbb{R}_+^{N-m+1}$ talque si $y = (y', y'') \in \Omega$, donde $y' \in \mathbb{R}^m, y'' \in \mathbb{R}^{N-m}$ si y solo si $(|y'|, y'') \in D$. Notemos que*

$$\mathbb{R}_+^{N-m+1} = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_{N-m+1}) : z_1 > 0\}.$$

El trabajo se hará utilizando el método de Lyapunov-Schmidt para reducir el problema a uno finito-dimensional. Además se buscará poder estudiar también el comportamiento asintótico de las soluciones encontras y su concentración.

Laplaciano fraccionario

Gran atención ha tenido recientemente el estudio de ecuaciones en derivadas parciales con características no locales. Es un área de investigación realmente activa y amplia. Los problemas no locales se encuentran presentes en muchas ramas de la ciencia, tales como Análisis, Geometría diferencial, Probabilidad, Dinámica de Fluidos, Dinámica Poblacional, Mecánica Cuántica, Biología, Teoría de Juegos y muchas otras.

En muchos de estos problemas el operador básico involucrado es el llamado ”Laplaciano fraccionario", el cual puede ser definido por $s \in (0,1)$ mediante

$$(-\Delta)^s u(x) := a_{N,s} \, \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} \, dy, \tag{4}$$

donde $a_{N,s}$ está definido explícitamente por

$$a_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1} = 2^{2s-1}\pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{|\Gamma(-s)|}, \tag{5}$$

y además ”V.P"se refiere al "valor principal"definido por

$$\text{V.P.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} \, dy = \lim_{e \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,e)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} \, dy.$$

La constate $a_{N,s}$ es tal que, se tiene las siguientes propiedades

$$(-\Delta)^s u \to -\Delta u \quad \text{as } s \to 1^- \quad \text{and} \quad (-\Delta)^s u \to u \quad \text{as } s \to 0^+ \ .$$

Ahora, dado $s \in (0,1)$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, definimos $H^s(\Omega)$ como sigue,

$$H^s(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, entonces usando transformada de Fourier existe una definición alternativa del espacio $H^s(\mathbb{R}^N)$. Es decir, podemos mostrar que

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ s.t. } |\xi|^s \mathcal{F}(u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

No es difícil mostrar que también para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \frac{a_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy, \tag{6}$$

donde $a_{N,s}$ es la constante definida en (5). También, mediante un argumento de densidad, podemos definir el operador $H^s(\mathbb{R}^N)$ definiendo

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} &:= \langle (-\Delta)^s u, v \rangle + (u,v) \\ &:= V.P. \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx. \end{aligned}$$

Llamamos $\| \cdot \|_{H^s_0(\Omega)}$ la norma inducida por el producto escalar. Es claro que:

$$2a_{N,s}^{-1} \langle (-\Delta)^s u, u \rangle = 2a_{N,s}^{-1} \| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \| |\xi|^s \mathcal{F} u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Trabajos previos

En el trabajo pionero [4], Ambrosetti y Prodi mostraron que si $0 < \nu < \lambda_1 < \mu < \lambda_2$ el segundo valor propio de $-\Delta$ en Ω con condición Dirichlet y $g(t)$ convexa, entonces (3) tiene exactamente dos soluciones para $\sigma > 0$ suficientemente grande. En el caso del problema general [2, 12, 27] probaron que, para s suficientemente grande, existen al menos dos soluciones de la ecuación.

Si $\lambda_2 < \mu < +\infty$ Hofer y Solimini [21, 29] probaron que si s es suficientemente grande, entonces (3) tiene al menos 4 soluciones. La conjetura fue probada verdadera en el caso unidimensinsional en [23] y por muchos otros autores posteriormente.

La conjetura de Lazer-McKenna [23] inicialmente planteó que cuando $\lambda_1 < \mu < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \nu < \lambda_{n+1}$ donde $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los valores propios de $-\Delta$ ordenados de forma creciente, entonces para s suficientemente grande (3) tiene al menos $2n$ soluciones. Extrapolando esto hacia el límite cuando s va a infinito actualmente la conjetura se entiende como sigue: (3) tiene un número no acotado de soluciones cuando $\sigma \to +\infty$, si $\mu = +\infty$ y $g(t)$ no crece demasiado rápido.

Los resultados en torno a la conjetura de Lazer-McKenna para mas de una dimensión, no fueron vistos si no hasta el año 2003 por Breuer, quien mostró que la ecuación (3) tiene al menos cuatro soluciones si $g(t) = t^2, \xi = 0$ y Ω es un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, mediante métodos numéricos.

Caso Subcrítico

Motivados por los resultados de Breuer [8] y uno de deFigueiredo en 1984 [15], Dancer y Yan consideraron el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^p - \sigma\phi_q(y) & \textit{en } \Omega \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \tag{7}$$

donde $p \in (1, (N+2)/(N-2))$ si $N \geq 3$, $p \in (1, +\infty)$ si $N = 1, 2$. Probando en este caso que, el número de soluciones tiende a infinito si $\sigma \to +\infty$. Esto fue probado mediante construcción de soluciones con peaks múltiples concentrándose cerca del máximo global de ϕ_1 en Ω. La no-linealidad de este caso cumple que $\mu = +\infty$ y $\nu = -\infty$, que es un caso extremo de la conjetura, motivados por esto ultimo, Dancer y Yan consideraron también un caso en que $-\infty < \nu < \mu = +\infty$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u_+^p + \lambda u - \sigma\phi_q(y) & \textit{en } \Omega \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \tag{8}$$

donde $u_+ = \max\{0, u\}$, $N \geq 3, p \in (1, (N+2)/(N-2))$. Para la cual probaron también que la conjetura es cierta bajo ciertas condiciones.

A continuación se enuncian los resultados obtenidos por Dancer y Yan para el caso subcrítico que pueden ser vistos en [13] y [14].

Teorema 0.2 *Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $\sigma_0 > 0$ tal que para $\sigma \geq \sigma_0$ (7) tiene al menos k soluciones distintas.*

El método utilizado consistió en una reducción que permitió construir soluciones cercanas al máximo de ϕ_1. Esto probó la existencia de muchas soluciones, pero también permitió dar con el perfil de estas soluciones. Claramente se puede utilizar técnicas variacionales para probar que (7) tienes solución (como el mínimo local del funcional de energía). Entonces, es claro que (7) tiene soluciones de tipo Paso a la Montaña. Sobre esto ultimo es que se tiene el siguiente resultado

Teorema 0.3 *Existe un $\sigma_0 > 0$ suficientemente grande, tal que, para todo $\sigma \geq s_0$, la solución de tipo Paso a la Montaña u_σ de (7) tiene la forma $u_\sigma = \underline{u}_\sigma + v_\sigma$ con*

(i) $\sigma^{-1/p}\underline{u}_\sigma \to -\phi_1^{1/p}$ *uniformemente en cualquier subconjunto compacto de* Ω.

(ii) $v_\sigma > 0$ *en* Ω *y* $\max_{y\in\Omega} v_\sigma(y)\sigma^{-2/(3p-1)} \to \bar{c} > 0$ *cuando* $\sigma \to +\infty$.

(iii) Para cualquier punto máximo de $x_\sigma \in \Omega$ de v_σ, salvo sub-sucesiones, cumple que $x_\sigma \to x_0 \in \partial\Omega$ con $-\frac{\partial\phi_1(x_0)}{\partial n} = \min_{z\in\partial\Omega}\left(-\frac{\partial\phi_1(z)}{\partial n}\right)$, donde n es la normal unitaria exterior de $\partial\Omega$ en z.

(iv) Para cualquier $\delta > 0$ pequeño, $v_\sigma(y)\sigma^{-2/(3p-1)} \to 0$, cuando $\sigma \to +\infty$ uniformemente para cualquier $y \in \Omega \setminus B_\delta(x_0)$.

Adicionalmente si la no linealidad no cumple con que $\mu = +\infty$ y $\nu = -\infty$, Dancer y Yan probaron que la no linealidad $g(t) = t_+^p$, para la cual $\mu = +\infty$ y $\nu > \infty$, cumple con la conjetura si se cumplen alguna de las siguientes condiciones:

Sean $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \lambda_i \leq \ldots$, los valores propios de $-\Delta$ en Ω, sujetos a una condición de tipo Dirichlet en el borde. Asumamos además que λ y s satisfacen una de estas condiciones:

(C_1) $\lambda < \lambda_1$ y $\sigma > 0$.

(C_2) $\lambda \in (\lambda_i, \lambda_{i+1})$ para algún $i \geq 1$ y $\sigma < 0$.

Teorema 0.4 *Asuma que o bien (C_1) o (C_2) se cumple. Entonces el número de soluciones de (8) tiende a infinito cuando $|\sigma| \to +\infty$ si $N \geq 3$.*

Caso Crítico y Supercrítico

Un tópico clásico del análisis no lineal es el estudio de la existencia y multiplicidad de soluciones de ecuaciones no lineales. Bajo este contexto es importante hacer la distinción entre problemas *subcríticos* y *crítico* (o *supercríticos*). En los problemas subcríticos el exponente de la no-linealidad es mas pequeño que el exponente de Sobolev y eso implica que cualquier cota razonable sobre las seminormas de Sobolev otorgan convergencia en los espacios L^p: por ejemplo, sucesiones minimizantes o de Palais-Smale, usualmente poseen cotas uniformes muy naturales en las seminormas de Sobolev y esto dota al problema subcrítico de propiedades adicionales de compacidad que pueden llevar muchas veces a resultados de existencia mediante métodos puramente analíticos.

Basados en su trabajo anterior Dancer y Yan estudiaron el problema (3) para casos en que p es crítico o supercrítico. Es casi imposible construir soluciones con puntos de concentración en este caso, sin embargo, en su trabajo Dancer y Yan buscaron otro tipo de soluciones, las cuales vienen de variedades de dimensión superior tales que p sea subcrítico en esa dimensión y bajo ciertos supuesto de simetría parcial en el dominio Ω lograron reproducir su resultado.

Diremos que Ω satisface la condición (Ω) si, existe un entero m, $1 < m \leq N$ tal que $y \in \Omega$ si y solo si $(|y'|, y'') \in D$ donde $y = (y', y''), y' \in \mathbb{R}^m, y'' \in \mathbb{R}^{N-m}, D$ es un dominio acotado de $\mathbb{R}_+^{N-m-1}$ y

$$\mathbb{R}_+^{N-m+1} := \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_{N-m+1}) : z_1 > 0\} .$$

El resultado principal del trabajo de Dancer y Yan, que puede ser visto en [11], es el siguiente:

Teorema 0.5 *Supongamos que Ω satisface la condición (Ω), $p \in (1, \frac{N-m+3}{N-m-1})$ si $1 < M \leq N-2$, $p \in (1, \infty)$ si $m = N_1, N$. Para cualquier entero positivo K, existes $s_k > 0$, tal que para $s > s_k$ el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^p - \sigma\phi(x), & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} . \tag{9}$$

tiene al menos k soluciones diferentes.

Otros Resultados

Otro resultado destacado sobre esta conjetura es el de M. del Pino y C. Muñoz. En su trabajo [17] probaron la conjetura para el caso 2-dimensional con no-linealidad exponencial, dando además propiedades asintóticas de las soluciones encontradas.

El principal resultado es el siguiente

Teorema 0.6 *Dado cualquier $m \geq 1$ entero y σ suficientemente grande, existe una solución u_s del problema (3), para $N = 2$ con $g(u) = -e^u$ tal que:*

$$\lim_{s \to +\infty} \int_\Omega e^{u_s} = 8\pi m.$$

Más precisamente, dado cualquier subconjunto Λ de Ω para el cual

$$\sup_{\partial\lambda} \phi_1 < \sup_\Lambda \phi_1$$

y una sucesión $s \to +\infty$, existe una subsucesión y m puntos $\xi_i \in \Lambda$ con

$$\phi_1(\xi_i) = \sup_\Lambda \phi_1$$

tal que cuando $s \to +\infty$

$$e^{u_s} \rightharpoonup 8\pi \sum_{i=1}^{m} \delta_{\xi_i}.$$

Contra-Parte no local

Una variación en el estudio de esta conjetura fue estudiar su contra parte no local, es decir la veracidad de la conjetura para el problema análogo en el caso del operador no local $(-\Delta)^s$ que se definirá mas adelante. En [1] B. Abdellaqui, A. Dieb y F. Mahmoudi probaron la conjetura para el problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = g(u) - \sigma\phi_1 & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\ . \\ u > 0 & en\ \Omega \end{cases} \tag{10}$$

donde $(-\Delta)^s$ es el operador laplaciano fraccionario, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un subconjunto abierto con borde Lipschitz, $\sigma > 0$, $p \in (1, 2_s^* - 1)$, con $2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$ y ϕ_1 es la primer función positiva del laplaciano fraccionario con condición Dirichlet en el borde.

Su principal resultado recae en la prueba de la conjetura para el problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = |u|^p - \sigma\phi_1 & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\ , \\ u > 0 & en\ \Omega \end{cases} \tag{11}$$

con $(-\Delta)^s$ el operador definido en (4) con la constante definida en (5).

Este trabajo de titulo tiene como objetivo demostrar la conjetura de Lazer-McKenna para el análogo no local del problema (3), como hicieron B. Abdellaqui, A. Dieb y F. Mahmoudi, pero para p supercríticos con respecto a N bajo condiciones de simetría parcial.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección enunciaremos algunas propiedades y definiciones que serán usadas en el trabajo de tesis presentado.

1.1. El Laplaciano fraccionario

Para una función relativamente "buena", es decir, u en la clase de Schwartz de funciones suaves y rápidamente decrecientes, la potencia s del laplaciano, para $s \in (0,1)$, puede ser definida fácilmente mediante el espacio de frecuencias de Fourier. Tomando transformada de Fourier

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

y usando la formula de la anti-transformada

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

recordando que la derivada (por ejemplo, en la k-esima dirección) en la variable original corresponde a la multiplicación por $2\pi i \xi_k$ en la variable de frecuencia, es decir

$$\partial_k u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi i \xi_k \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(2\pi i \xi_k \hat{u})$$

ahora, como el operador $(-\Delta) = -\sum_{k=1}^{n} \partial_k^2$ corresponde a la multiplicación por $(2\pi|\xi|)^2$ en la variable de frecuencia, esto es

$$-\Delta u(x)) \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi|\xi|)^2 \hat{u}(\xi) 2^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}((2\pi|\xi|)^2 \hat{u})$$

Bajo esta misma idea, no es sorprendente definir la potencia s del operador $(-\Delta)$ como la multiplicación por $(2\pi|\xi|)^{2s}$ en la variable de frecuencia, de sto se desprende una primera definición para el laplaciano fraccionario

$$(-\Delta)^s u(x) := \mathcal{F}^{-1}((2\pi|\xi|)^{2s} \hat{u}). \tag{1.1}$$

Otra forma de definir el Laplaciano fraccionario viene de la teoría de semigrupos y el cálculo fraccionario. Para $\lambda > 0$ usando el cambio de variable $\tau = \lambda t$ e integración por partes, se puede notar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}-1}{t^{s+1}}dt = \Gamma(-s)\lambda^s$$

donde Γ es la función Gamma de Euler. Una ves más no es sorprendente poder definir la potencia s del Laplaciano reemplazando λ por el operador positivo $(-\Delta)$, concluyendo que

$$(-\Delta)^s := \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{e^{\Delta t}-1}{t^{1+s}}dt$$

lo que nos lleva a definir nuevamente el laplaciano fraccionario como

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{e^{\Delta t}u(x)-u(x)}{t^{1+s}}dt. \tag{1.2}$$

Aquí, la función $U(x,t) = e^{\Delta t}u(x)$ es la solución de la ecuación del calor $\partial_t U = \Delta U$ con dato inicial $U|_{t=0} = u$.

La equivalencia entre las dos definiciones anteriores puede ser probada mediante cálculo elemental, ver [1].

Las dos definiciones anteriores son ambas de gran utilidad por sus diferentes propiedades y la información que entregan. A pesar de esto consideraremos también otra definición equivalente a las anteriores (al menos para funciones "buenas") que es más flexible para nuestro propósito. Definamos

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{n,s} VP \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy \tag{1.3}$$

$$:= c_{n,s} \lim_{r\to 0} \int -\mathbb{R}^n \setminus B_r(x) \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy, \tag{1.4}$$

donde

$$c_{n,s} := \frac{2^{2s}s\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{\pi^{n/2}\Gamma(1-s)}.$$

Nuevamente la equivalencia entre (1), (2) y (3) puede ser revisada en [1].

1.2. Espacios fraccionarios de Sobolev

Sea Ω un abierto no necesariamente suave de $\mathbb{R}^n$ y sea $p \in [1,+\infty)$. Para cualquier $s > 0$, definimos el espacio fraccionario de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ (también llamados espacios de Aronszajn, Gagliardo o Slobodeckij).

Si $s \geq 1$ es un entero, denotamos $W^{s,p}(\Omega)$ como el espacio clásico de Sobolev dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \sum_{0\leq|\alpha|\leq s} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{s,p}(\Omega)$, donde $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ denota la norma usual en $L^p(\Omega)$ y D^α corresponde a la α-derivada. Esta sección esta dedicada a la definición de espacios de Sobolev fraccionarios, es decir, cuando $s \notin \mathbb{N}$.

Para $s \in (0,1)$ fijo, el espacio de Sobolev $W^{s,p}$ puede ser definido como sigue:

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+sp}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

El cual es dotado de la norma natural

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p + \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{1/p}$$

donde el término

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right)^{1/p}$$

es la seminorma de Gagliardo de u. Cuando $s > 1$ y $s \notin \mathbb{N}$, podemos reescribir $s = m + \sigma$, donde $m \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in (0,1)$. De esta forma podemos definimos $W^{s,p}(\Omega)$ como:

$$W^{s,p}(\Omega) := \{ u \in W^{m,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \ \forall \alpha \ \texttt{tal que} \ |\alpha| = m \}.$$

En este caso, dotamos al espacio de la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{1/p}$$

para todo $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Cabe destacar que el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ está bien definido y es también un espacio de Banach para todo $s > 0$.

Como en el caso clásico (i.e. $s \in \mathbb{N}$), cualquier función en el espacio de Sobolev fraccionario $W^{s,p}(\Omega)$ puede ser aproximada por una secuencia de funciones suaves a soporte compacto. En este caso también, si $s > 0$

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}} = W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

En general, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ no es denso en $W^{s,p}(\Omega)$, sin embargo denotamos $W_0^{s,p}(\Omega)$ a la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ con respecto de la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$, es decir,

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}}.$$

Con esta definición, podemos también construir $W^{s,p}(\Omega)$ cuando $s < 0$. De hecho, para $s < 0$ y $p \in (1, +\infty)$, definimos:

$$W^{s,p}(\Omega) := (W_0 - s, q(\Omega))'$$

es decir, $W^{s,p}(\Omega)$ es el espacio dual de $W_0 - s, q(\Omega)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.2.1. Propiedades de embedding

Proposición 1.1 *Sea $p \in [1, +\infty)$ y Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces las siguientes proposiciones son ciertas:*

1. *Si $0 < s \le s' < 1$, entonces el embedding*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

es continuo. En otras palabras, existe una constante $C_1(n,s,p) \ge 1$ tal que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \le C_1(n,s,p)\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}$$

para cualquier $u \in W^{s',p}(\Omega)$.

2. *Si $0 < s < 1$, Ω es de clase $C^{0,1}$ (i.e. con borde Lipschitz) y borde acotado $\partial\Omega$, entonces el embedding*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

es continuo. Es decir, existe una constante $C-2(n,s,p) \ge 1$ tal que:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \le C_2(n,s,p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

para cualquier $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

3. *Si $s' \ge s > 1$ y Ω es de clase $C^{0,1}$ entonces el embedding*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

es continuo.

Definición 1.2 *Para cualquier $s \in (0,1)$ y $p \in [1,\infty)$, un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un* ***dominio extendido*** *para $W^{s,p}(\Omega)$ si existe una constante $C := C(n,s,p,\Omega)$ tal que para toda función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ existe $\mathcal{E}_u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{E}_u(x) = u(x)$ para todo $x \in \Omega$ y*

$$\|\mathcal{E}_u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Cabe destacar que cualquier subconjunto abierto de clase $C^{0,1}$ con frontera acotada es un dominio extendido de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.3 *Sea Ω un abierto de$\mathbb{R}^n$, y sea $u \in W^{s,p}(\Omega)$ con $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$. Si existe $\mathcal{K} \subset \Omega$ compacto tal que $u = 0$ en $\Omega \setminus \mathcal{K}$, entonces la extensión $\mathcal{E}_u$ definida como*

$$\mathcal{E}_u(x) := \begin{cases} u(x) & \textbf{\textit{si}} \;\; x \in \Omega \\ 0 & \textbf{\textit{si}} \;\; x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

pertenece a $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\mathcal{E}_u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

donde C es una constante positiva dependiente de $n, p, s, \mathcal{K}$ yΩ.

Ahora estamos listos para introducir las propiedades de embedding de $W^{s,p}$. Para esto, haremos la distinción en tres diferentes caso, estos son $sp < N, sp = n$ y $sp > n$.

Caso 1: $sp < n$

Teorema 1.4 *Sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$ tales que $sp < n$. Entonces existe una constante positiva $C := C(n,p,s)$ tal que, para cualquier $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|u\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy$$

donde las constate

$$p_s^* := \frac{pn}{n-sp}$$

es conocido como el exponente crítico fraccionario. Una consecuencia directa de este resultado es que, el espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente inmersionado en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $q \in [p, p_s^*]$. Más aún, el embedding $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es compacto para todo $q \in [p, p_s^*)$.

En dominios extendidos Ω, se cumplen las siguientes propiedades de embedding.

Teorema 1.5 *Sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$ tal que $sp < n$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio extendido para $w^{s,p}$. Entonces existe una constante positiva $C := C(n,p,s,\Omega)$ tal que, para cualquier $u \in W^{s,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

para cualquier $q \in [p, p_s^*]$, en otras palabras, el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ está continuously embedded en $L^q(\Omega)$ para $q \in [p, p_s^*]$. Si, adicionalmente, Ω es acotado, entonces el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ está compactly embedded en $L^q(\Omega)$ para cualquier $q \in [1, p_s^*)$.

Caso 2: $sp = n$

Teorema 1.6 *Sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$ tales que $sp = n$. Entonces existe una constante positiva $C := C(n,p,s)$ tal que, para cualquier $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{Ws,p(\mathbb{R}^n)}$$

para cualquier $q \in [p,+\infty)$, es decir, el espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está coninuously embedded en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $q \in [p,+\infty)$.

Para dominios extendidos Ω, existe el siguiente resultado.

Teorema 1.7 *Sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$ tal que $sp = n$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio extendido de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante positiva $C := C(n,p,s,\Omega)$ tal que, para cualquier $u \in W^{s,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

para cualquier $q \in [p,+\infty)$, en otras palabras, el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ está continuously embedded en $L^q(\Omega)$ para $q \in [p,+\infty)$. Si, adicionalmente, Ω es acotado, entonces el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ está compactly embedded en $L^q(\Omega)$ para cualquier $q \in [1,+\infty)$.

Caso 3: $sp > n$

Aquí $C^{0,\alpha}(\Omega)$ denota el espacio de funciones Hölder continuas dotadas de la norma estándar

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Teorema 1.8 *Sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1, +\infty)$ tal que $sp > n$. Sea Ω un espacio $C^{0,1}$ de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante positiva $C := C(n,p,s,\Omega)$ tal que, para cualquiera u$\in W^{s,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq |\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

con $\alpha := (sp-n)/p$, es decir, el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ está continuously embedded en $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

La siguiente propiedad de regularidad es valido para funciones en $W^{s,p}$ cuando $sp > n$ y Ω es un dominio extendido para $W^{s,p}$ sin *singularidades* externas. Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.9 *sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1, +\infty)$ tal que $sp > n$. Sea Ω un dominio $C^{0,1}$ acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces el embedding*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$$

es compacto para todo $\beta < \alpha$ con $\alpha := (sp-n)/p$.

1.2.2. El espacio $H^s(\Omega)$

En este apartado, nos concentraremos en el caso Hilbert $p = 2$, para analizar sus relación con el Laplaciano fraccionario. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y denotemos

$$H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$$

para cualquier $s \in (0,1)$. Este caso es importante porque el espacio de Sobolev fraccionario pasa a ser un espacio de Hilbert. Es decir, el producto interno sobre $H^s(\Omega)$ definido por:

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy$$

para cualquier $u, v \in H^s(\Omega)$, induce la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ cuando $p = 2$. Claramente, para todo $s \in (0,1)$, se tiene

$$H^s(\mathbb{R}^n) := W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : [u]_{W^{s,2}(\Omega)} < +\infty\right\}$$

para $[\cdot]_{W^{s,2}(\Omega)}$ la seminorma definida anteriormente.

El espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ puede ser definido de forma alternativa mediante una transformada de Fourier. Precisamente, definamos

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s})|\mathcal{F}u(\xi)|^2 dx < +\infty\right\}$$

para cualquier $s > 0$ y

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}' : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}u(\xi)|^2 dx < +\infty \right\}$$

para cualquier $s < 0$. Es posible probar la equivalencia entre ambos espacios (el definido por la norma de Gagliardo) y este.

1.2.3. Una generalización de $(-\Delta)^s$.

En esta sección introduciremos una noción mas generalizada de operador integrodiferencial de tipo no local que generaliza $(-\Delta)^s$. Para cualquier $s \in (0, 1)$ fijo, el operador $\mathcal{L}_K$ dado por

$$\mathcal{L}_K u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (u(x + y) + u)x - y) - 2u(x))K(y)dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde el núcleo $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ es una función que tiene las siguientes propiedades

$$mK \in L^1(\mathbb{R}^n), \ \texttt{donde} \ \ m(x) := \text{mín}\{|x|^2, 1\} \tag{1.5}$$

y existe $\theta > 0$ tal que $K(x) \geq \theta |x|^{-(n+2s)}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Es claro que, para ejemplificar, podemos tomar K como

$$K(x) = |x|^{-(n+2s)} \ \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

En cuyo caso, tenemos la igualdad $\mathcal{L}_k = -(-\Delta)^s$, salvo normalización.

1.2.4. Otros espacios tipo Sobolev fraccionario

En este trabajo de tesis, uno de los principales intereses sera el estudio de problemas no locales a partir de $(-\Delta)^s$ con condiciones Dirichlet en la frontera mediante métodos variacionales. Para este propósito, necesitaremos trabajar en un espacio de Solbolev fraccionario adecuado: por eso, consideraremos una configuración de análisis funcional que está inspirada por (pero no equivalente) los espacios de Sobolev fraccionarios para poder explicitar el dato inicial Dirichlet en la frontera mediante la formulación variacional.

Sea $s \in (0, 1)$ fijo, Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $n > 2s$ y definamos el conjunto $\mathcal{Q}$ como

$$\mathcal{Q} := (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega),$$

donde $\mathcal{C}\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Más aún, sea $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ una función que cumple (1.5).

El espacio $X^s(\Omega)$, es el espacio vectorial de las funciones Lebesgue-medibles de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ tales que la restricción a Ω de cualquier función en $X^s(\Omega)$ pertenece a $L^s(\Omega)$ y el mapeo

$$(x, y) \mapsto (u(x) - u(y))\sqrt{K(x - y)} \ \texttt{está en} \ L^2(Q, dx, dy)$$

.

La norma en $X^s(\Omega)$ puede ser definida como:

$$\|u\|_{X^s(\Omega)} := \|u\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\mathcal{Q}} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)dxdy\right)^{1/2}. \tag{1.6}$$

Es fácil chequear que $\|\cdot\|_{X^s(\Omega)}$ es una norma en $X^s(\Omega)$. Notemos además que esta norma no es igual a la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ porque $\Omega\times\Omega$ está estrictamente contenido en $\mathcal{Q}$.

También definimos

$$X_0^s(\Omega) := \{u \in X^s(\Omega) : u = 0 \ \ \texttt{c.t.p en } \mathcal{C}\Omega\}. \tag{1.7}$$

Si, como antes, $K = |x|^{(-n+2s)}$, entonces los espacios tipo Sobolev fraccionarios $X^s(\Omega)$ y $X_0^s(\Omega)$ serán denotados por $\mathbb{H}^s(\Omega)$ y $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$ respectivamente.

A continuación se enuncian algunas propiedades de estos espacios y su relación con los espacios $H^s(\Omega)$.

Lema 1.10 *Sea $s \in (0,1)$ y $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,+\infty)$ que satisface (1.5). Entonces las siguientes aseveraciones son verdaderas:*

1. *Si $u \in X^s(\Omega)$, entonces $u \in H^s(\Omega)$. Más aún,*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \le c(\theta)\|u\|_{X^s(\Omega)}$$

   donde $c(\theta) := \max\{1, 1/\sqrt{\theta}\}$;
2. *Si $u \in X_0^s(\Omega)$, entonces $u \in H^s(\Omega)$. Más aún,*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \le \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le c(\theta)\|u\|_{X^s(\Omega)},$$

   donde $c(\theta)$ es la constante dada en a); y
3. *Sea $K(x) = |x|^{-(n+2s)}$. Entonces*

$$X_0^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : u = 0 \ \ \textit{c.t.p en } \mathcal{C}\Omega\}.$$

En los espacios $X^s(\Omega)$ y $X_0^s(\Omega)$, se tiene la siguiente propiedad de convergencia:

Lema 1.11 *Sea $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X^s(\Omega)$ tal que $u_j \to u_\infty$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ cuando $j \to +\infty$ y*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|_{X^s(\Omega)} < +\infty.$$

Entonces u_∞. Si, adicionalmente, $u_j \in X_0^s(\Omega)$, para todo $J \in \mathbb{N}$, entonces $u_\infty \in X_0^s(\Omega)$.

1.3. Teorema Paso de la Montaña

Muchos problemas en análisis matemático tienen que ver con la construcción de soluciones adecuadas. La palabra ”construcción” es a menudo entendida en un sentido débil, no sólo porque las soluciones encontradas son tomadas en un sentido distribucional, sino, porque la prueba de existencia es, de alguna manera, no constructivas ,a pesar de las propiedades cuantitativas o cualitativas que pueden encontradas adicionalmente.

En algunos casos el problema posee una estructura variacional, esto permite generalmente que cualquier método cuyo propósito sea probar que el funcional asociado posee un punto crítico.

En muchos casos, las soluciones minimales no satisfacen la complejidad del problema por si mismas. De hecho, estas soluciones suelen ser triviales. O,en algunos casos, pueden existir otras soluciones diferentes de las minimales, las cueles pueden presentar propiedades interesantes.

Detectar soluciones no-minimales es por supuesto, en principio, mas difícil que encontrar minimales, dado que los métodos directos liderados por el Teorema de Weierstras (básicamente reduciendo a compacidad y algún tipo de continuidad) en general no son suficientes.

Uno de las más importantes herramientas para encontrar puntos críticos de tipo no minimal es el llamado Teorema del Paso de la Montaña. Este resultado puede ser imaginado como pensar en el funcional de energía simplemente como la elevación $\mathbb{E}$ de cierto punto con respecto a la tierra.

La versión estándar del teorema de Paso a la Montaña

Teorema 1.12 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{E} \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$. Supongamos que existen $u_0, u_1 \in \mathcal{H}$ y $r > 0$ tal qué*

$$\inf_{\|u-u_0\|=r} \mathcal{E}(u) > \mathcal{E}(u_0),$$

$$\|u_1 - u_0\| > r \ y \ \mathcal{E}(u_1) \leq \mathcal{E}(u_0)$$

. Supongamos también que la condición de Palais-Smale se cumple a nivel c, con

$$c :== \int_\Gamma \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{E}(g(t)),$$

donde Γ es la colección de todos los posibles caminos g tales que $g(0) = u_0$ y $g(1) = u_1$.

Entonces $\mathcal{E}$ tiene un punto crítico de nivel c.

1.4. Desigualdades útiles

En lo que sigue se enumeran algunas desigualdades que podrían ser de utilidad.

Teorema 1.13 *(Desigualdad de Córdoba-Córdoba). Sea $g \in C^2(R^n)$ convexa. Asumamos además que u y $\phi(u)$ son tales que $(-\Delta)^s u$ y $(-\Delta)^s g(u)$ existen. Entonces se cumple lo siguiente*

$$(-\Delta)^s g(u) \leq g'(u)(-\Delta)^s u. \tag{1.8}$$

La siguiente desigualdad es consecuencia de la desigualdad anterior.

Teorema 1.14 *(Desigualdad de Kato). La siguiente desigualdad se cumple en el sentido de las distribuciones*

$$(-\Delta)^s |u| \leq sgn(u)(-\Delta)^s u. \tag{1.9}$$

Para mas detalles revisar [10].

Ahora enunciaremos la desigualdad de Picone, que será útil para demostrar algunos lemas técnicos.

Lema 1.15 *(Desigualdad de Picone) Sea $w \in H_0^s(\Omega)$ tal que $w > 0$ in Ω y $w \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$. Asumiendo que $(-\Delta)^s w = \vartheta$ con $\vartheta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tenemos que*

$$\frac{a_{n,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \geq \int \Omega \frac{(-\Delta)^s w}{w} \varphi^2 dx.$$

Ver [24] para una demostración completa.

Las siguientes desigualdades algebraicas serán de utilidad para el desarrollo de este trabajo de tesis. Para demostraciones completas de estos resultados se puede revisar [5] y [19].

Lema 1.16 *Sea $\alpha > 0$, entonces existe una constante $C = C(\alpha) > 0$, tal que para cualquier $a, b \in \mathbb{R}_+$,*

$$|(a+b)^\alpha - a^\alpha - \alpha a^{\alpha-1} b| \leq C(b^2 + a^{\alpha-2} \operatorname{ínf}(a^2, b^2)),$$
$$|a^\alpha - b^\alpha| \leq |a-b|^{\operatorname{mín}(\alpha,1)}.$$

De forma más general, se tiene que

Lema 1.17 *Existe una constate positiva C, tal que para cualquier $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^N$,*

$$\left| |\sum_{j=1}^n a_i|^\alpha - \sum_{j=1}^n |a_i|^\alpha \right| \leq C \left(\sum_{i \neq j} |a_i|^{\alpha-1} \operatorname{ínf}(|a_i|, |a_j|) \right).$$

1.5. Otras propiedades

La siguiente es una propiedad que caracteriza el Laplaciano fraccionario del producto de funciones, ver [7].

Proposición 1.18 *Sean u y v tales que $(-\Delta)^s u$ y $(-\Delta)^s v$ existen y*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))|}{|x-y|^{N+2s}} dy < \infty.$$

Entonces $(-\Delta)^s(uv)$ existe y está dado por

$$(-\Delta)^s(uv) = u(-\Delta)^s v + v(-\Delta)^s u - I_s(u,v),$$

donde

$$I_s(u,v) \coloneqq C_{N,s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dy, \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Capítulo 2

Reducción del problema

2.1. Existencia de soluciones y comportamiento asintótico

Un primer paso necesario para aplicar el método de Lyapunov-Schmidt es encontrar una solución base(w_ε), esto se hará usando el método de sub y super solución. Además de eso, estudiaremos el comportamiento de w_ε pues será útil durante el desarrollo de este trabajo de tesis.

Recordemos que en este trabajo se busca probar la conjetura de Lazer-McKenna para el problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = |u|^p - \sigma\varphi_1 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}. \tag{2.1}$$

Notemos en primer lugar que (2.1) es equivalente a que w_ε resuelva

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s w_\varepsilon = |w_\varepsilon|^p - \varphi_1 & \text{en } \Omega \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $w_\varepsilon(x) = \sigma^{-\frac{1}{p}} u(x)$ y $\varepsilon^{2s} = \sigma^{\frac{1-p}{p}}$.

Un primer resultado de existencia es el siguiente.

Teorema 2.1 *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (1, \frac{N-m+1+2s}{N-m+1-2s})$ el problema (2.2) tiene una única solución w_ε que satisface $0 > w_\varepsilon > -\varphi_1^{\frac{1}{p}}$. Más aún, w_ε es creciente con respecto al parámetro ε. Esto es, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $w_{\varepsilon_1} < w_{\varepsilon_2}$.*

Demostración. Sea $u = -w_\varepsilon$. Entonces, u es solución de

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u = \varphi_1 - |u|^p & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Definamos además

$$h(y,t)=\begin{cases}0, & t\geq \varphi_1^{1/p}(y)\\ \varphi_1(y)-t^p, & 0\leq t<\varphi_1^{1/p}(y)\\ \varphi_1(y), & t<0.\end{cases}.$$

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases}\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u=h(y,u) & \text{en } \Omega\\ u=0 & \text{sobre } \mathbb{R}^n\setminus\Omega\end{cases}. \tag{2.4}$$

Es fácil chequear que cualquier solución de la ecuación es positiva (pues la función cero es subsolución). Mediante cálculo sencillo se puede probar que $\phi_1^{1/p}(y)>0$ es supersolución de (2.4). Usando la desigualdad de Córdoba-Córdoba (ver **Teorema 1.13**) notando que $g(x)=x^{1/p}$ es una función cóncava pues $p>1$. Entonces

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s\varphi_1^{1/p}&=(-\Delta)^s g(\varphi_1)\\ &\geq g'(\varphi_1)(-\Delta)^s\varphi_1\\ &=\frac{\varphi_1^{1/p-1}}{p}\lambda_1\varphi_1>0\end{aligned}$$

Lo que significa que $\phi_1^{1/p}$ es supersolución pues $h(y,\phi_1^{1/p})=0$. Como resultado obtenemos entonces que la solución u de (2.4) satisface

$$0<u<\varphi_1^{1/p}.$$

Pero esto significa que $h(y,w_\varepsilon)=\varphi_1(y)-w_\varepsilon(y)^p=\varphi_1(y)-|u(y)|^p$. Por lo tanto w_ε es solución de (2.3). Por otro lado la unicidad viene gracias a que $\frac{\partial h(y,t)}{\partial t}\leq 0$ para cualquier $y\in\Omega$ y $t\in(0,\varphi_1^{1/p}(y))$.

Denotemos

$$J_\varepsilon(u)=\frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\int_{D\Omega}\frac{|u(y)-u(z)|^2}{|y-z|^{N+2s}}dz-\int_\Omega H(y,u),$$

donde $H(y,t)=\int_0^1 h(y,\tau)d\tau$ y $D\Omega=(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)\setminus(\Omega^c\times\Omega^c)$.

Sea w_ε tal que

$$\text{mín}\left\{J_\varepsilon(u):u\in H_0^1(\Omega)\right\}=J_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Entonces w_ε es solución de (2.4). Por otro lado, $J_\varepsilon(u)$ tiene también un minimizador en H^s. Basta entonces probar unicidad para el problema para concluir el resultado. Si no fuera así, existen entonces dos soluciones w_1 y w_2 negativas, en consecuencia w_1-w_2 es solución de

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s(w_1-w_2)+(-1)^p\left[w_1^p-w_2^p\right]=0, w_1-w_2\in H_0^s(\Omega).$$

Testeando la ecuación con $(w_1-w_2)_+$ se puede concluir que $(w_1-w_2)_+=0$ y de igual forma que $(w_2-w_1)_+=0$ también, lo que concluye la unicidad del problema. Para terminar, sean $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, por la definición de $\varepsilon^{2s}=\sigma^{\frac{1-p}{p}}$ se ve que entonces w_1 es supersolución de (2.2) para $\varepsilon=\varepsilon_2$ luego por construcción se tiene que $w_{\varepsilon_2}\leq w_{\varepsilon_1}$. $\square$

El siguiente resultado nos da el comportamiento asintótico de w_ε. Más precisamente se tiene lo siguiente

Teorema 2.2 *Sea w_ε la solución de (2.2) que se obtiene del teorema anterior, entonces tenemos que*

$$w_\varepsilon \to -\varphi_1^{\frac{1}{p}} \text{ as } \varepsilon \to 0 \tag{2.5}$$

uniformemente en cualquier subconjunto compacto de Ω y

$$w_\varepsilon = -\varphi_1^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{2s}\frac{(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}}{\varphi_1^{\frac{p-1}{p}}} + o(\varepsilon^{2s}) \tag{2.6}$$

donde $\varepsilon^{-2s}o(\varepsilon^{2s}) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ uniformemente sobre cualquier compacto de Ω.

Demostración. Dado que $0 > w_\varepsilon > -\varphi_1^{\frac{1}{p}}$, y sabiendo que la sucesión $\{w_\varepsilon\}_\varepsilon$ es creciente por el resultado anterior, podemos demostrar que $w_\varepsilon \to -\varphi_1^{\frac{1}{p}}$ cuando $\varepsilon \searrow 0$ fuertemente en $L^q(\Omega)$ para todo $q < \infty$. Dado que $\|w_\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ para alguna constante positiva C independiente de ε, entonces siguiendo los argumentos expuestos en [25] podemos probar $w_\varepsilon \to -\varphi_1^{\frac{1}{p}}$ cuando $\varepsilon \to 0$, uniformemente en cualquier compacto de Ω.

Ahora, fijando $x_0 \in \Omega$ y tomando δ suficientemente pequeño para que $B_\delta(x_0) \subset\subset \Omega$. Sea $\tilde{w} \in H_0^s(\Omega)$ tal que $\tilde{w} - w_\varepsilon \in H_0^s(B_\delta(x_0))$, entonces $\tilde{w} = w_\varepsilon$ en $\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(x_0)$. Como w_ε es mínimo global de J_ε, entonces $J_\varepsilon(w_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\tilde{w})$, es decir

$$\begin{array}{l} \dfrac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\displaystyle\iint_{D_\Omega}\frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x,w_\varepsilon)dx \\ \leq \dfrac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\displaystyle\iint_{D_\Omega}\frac{|\tilde{w}(x)-\tilde{w}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x,\tilde{w})dx \end{array}. \tag{2.7}$$

Notando ahora que podemos separar D_Ω como sigue

$$D_\Omega = D_{B_\delta(x_0)} \cup A \cup B \cup C,$$

con

$$A = \Omega \setminus B_\delta(x_0) \times \Omega \setminus B_\delta(x_0),\ B = \Omega \setminus B_\delta(x_0) \times \Omega^c$$

y

$$C = \Omega^c \times \Omega \setminus B_\delta(x_0).$$

Por lo tanto

$$\iint_{D_\Omega} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = \iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$$
$$+ \iint_{D_\Omega \setminus D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$$
$$= \iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$$
$$+ \iint_{D_\Omega \setminus D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|\tilde{w}(x)-\tilde{w}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$$

Lo anterior nos permite concluir entonces que

$$\iint_{D_\Omega \setminus D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = \iint_{D_\Omega \setminus D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|\tilde{w}(x)-\tilde{w}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.$$

Usando (2.7), podemos concluir que

$$\begin{array}{l} \dfrac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2} \displaystyle\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x,w_\varepsilon)dx \\ \leq \dfrac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2} \displaystyle\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|\tilde{w}(x)-\tilde{w}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x,\tilde{w})dx \end{array}. \tag{2.8}$$

Ahora, definiendo $v_\varepsilon = w_\varepsilon + \varphi_1^{\frac{1}{p}}$ y $w = \tilde{w} + \varphi_1^{\frac{1}{p}}$, entonces $v_\varepsilon = w$ en $\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(x_0)$. Reemplazando esto en (2.8) obtenemos

$$\begin{array}{l} \dfrac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2} \displaystyle\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ -\varepsilon^{2s}a_{N,s} \displaystyle\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\varphi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x,v_\varepsilon-\varphi_1^{\frac{1}{p}})dx \\ \leq \dfrac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2} \displaystyle\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ -\varepsilon^{2s}a_{N,s} \displaystyle\iint_{D_{B_\delta(x_0)}} \frac{(w(x)-w(y))(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\varphi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \int_{B_\delta(x_0)} H(x,w-\varphi_1^{\frac{1}{p}})dx \end{array}. \tag{2.9}$$

Como

$$
\begin{aligned}
&a_{N,s}\iint_{D_{B_{\delta(x_0)}}}\frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\varphi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&=a_{N,s}\iint_{D_\Omega}\frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\varphi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&-a_{N,s}\iint_{D_\Omega\setminus D_{B_{\delta(x_0)}}}\frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\varphi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&=\int_\Omega v_\varepsilon(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}dx-a_{N,s}\iint_{D_\Omega\setminus D_{B_{\delta(x_0)}}}\frac{(w(x)-w(y))(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(x)-\varphi_1^{\frac{1}{p}}(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy
\end{aligned},
$$

luego, usando (2.9) y notando que por la definición de v_ε y w se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega v_\varepsilon(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}dx&=\int_{\Omega\setminus B_\delta(x_0)}v_\varepsilon(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}dx+\int_{B_\delta(x_0)}v_\varepsilon(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}dx\\
&=\int_{\Omega\setminus B_\delta(x_0)}w(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}dx+\int_{B_\delta(x_0)}v_\varepsilon(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}dx,
\end{aligned}
$$

podemos concluir

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_{\delta(x_0)}}}\frac{|v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy-\int_{B_\delta(x_0)}\left(H(x,v_\varepsilon-\varphi_1^{\frac{1}{p}})+\varepsilon^{2s}v_\varepsilon(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}\right)dx\\
&\leq\frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_{\delta(x_0)}}}\frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy-\int_{B_\delta(x_0)}\left(H(x,w-\varphi_1^{\frac{1}{p}})+\varepsilon^{2s}w(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}\right)dx
\end{aligned},
\tag{2.10}
$$

es decir, v_ε es un mínimo del funcional de energía

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}_\varepsilon(w)=&\frac{\varepsilon^{2s}a_{N,s}}{2}\iint_{D_{B_{\delta]}(x_0)}}\frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&-\int_{B_\delta(x_0)}\left(H(x,w-\varphi_1^{\frac{1}{p}})+\varepsilon^{2s}w(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}\right)dx
\end{aligned}
$$

en el conjunto $\left\{w\in H_0^s(\Omega)\ con\ w-v_\varepsilon\in H_0^s(B_\delta(x_0))\right\}$.

Para terminar, definamos $h_1(x,t)=h(x,t-\varphi_1^{\frac{1}{p}})+\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}$, entonces, como en [25], h_1 tiene un cero descendente t_ε con

$$
t_\varepsilon=\left(\varphi_1+\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}+\varphi_1^{\frac{1}{p}}=\varepsilon^{2s}\left(\frac{(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}}{\varphi_1^{\frac{p-1}{p}}}+o(1)\right),
$$

donde, que t_ε sea cero descendente de una función $f(\cdot)$ significa que $f(t_\varepsilon)=0$ y que la derivada por la izquierda de f en t_ε es negativa. Concluimos finalmente que

$$
v_\varepsilon=\varepsilon^{2s}\left(\frac{(-\Delta)^s\varphi_1^{\frac{1}{p}}}{\varphi_1^{\frac{p-1}{p}}}+o(1)\right)
$$

y se concluye el resultado. $\square$

2.2. Problema linealizado y definición de proyecciones

Un segundo paso en la aplicación del método de Lyapunov-Schmidt es obtener el operador linealizado con respecto a la solución w_ε y luego encontrar soluciones al problema lineal, en la literatura estas son por lo general llamadas proyecciones. Sea w_ε la única solución de (2.2) dada por el **Teorema 2.1**. Buscaremos una solución u de (2.2) de la forma $u = v + w_\varepsilon$, entonces v debe satisfacer

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s v + p|w_\varepsilon|^{p-1}v = f_\varepsilon(x,v) & \textit{en } \Omega \\ v = 0 & \textit{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}. \tag{2.11}$$

donde

$$f_\varepsilon(x,t) = |t + w_\varepsilon|^p - |w_\varepsilon|^p + p|w_\varepsilon|^{p-1}t. \tag{2.12}$$

El problema (2.11) tiene una estructura variacional, el funcional de energia asociado es

$$I_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{2s}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v|^2 + p|w_\varepsilon|^{p-1}v^2 dx - \int_\Omega F_\varepsilon(x,v)dx, \tag{2.13}$$

con

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x,t) &:= \int_0^t f_\varepsilon(x,r)dr \\ &= \frac{1}{p+1}|t+w_\varepsilon|^p(t+w_\varepsilon) + \frac{1}{p+1}|w_\varepsilon|^{p+1} - |w_\varepsilon|^p t + \frac{p}{2}|w_\varepsilon|^{p-1}t^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

En lo que sigue, asumiremos que $\max\limits_{z\in\Omega} \varphi_1(z) = 1$ y definiremos $S = \{x \in \Omega : \varphi_1(x) = 1\}$.

Ahora, mediante un cambio de variable definimos $V(x) = v(\varepsilon x + z^*)$, $z^* \in S$, entonces (2.11) se transforma en

$$\begin{cases} (-\Delta)^s V = |V + w_\varepsilon|^p - |w_\varepsilon|^p & \textit{sobre } \Omega_\varepsilon \\ V = 0 & \textit{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega_\varepsilon \end{cases}. \tag{2.15}$$

donde $\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon x + z^* : \ x \in \Omega\}$. Antes de pasar al límite definamos el siguiente subespacio

$$H_{sim} = \left\{u \in H_0^s(\Omega) : u(y) = u(|y'|, y''), \quad \text{con} \quad y' \in \mathbb{R}^m, y'' \in \mathbb{R}^N\right\},$$

él cual nos permitirá concluir el resultado. Notemos además que $\varphi_1 \in H_{sim}$ (ver demostración en el apéndice sección A), es decir, existe $\bar{\varphi_1}$ tal que $\varphi_1(y) = \bar{\varphi_1}(|y'|, y'')$ que por simplicidad seguiremos llamando φ_1.

Consideremos el siguiente problema límite

$$\begin{cases} (-\Delta)^s U &= |U+1|^p - 1, \ U > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{N-m+1}, \\ U(0) &= \max\limits_{\tilde{y}\in\mathbb{R}^{N-m+1}} U(\tilde{y}), \\ U &\in H^s(\mathbb{R}^{N-m+1}). \end{cases} \tag{2.16}$$

En el siguiente capítulo enunciaremos que el problema (2.16) tiene única solución (salvo translaciones) U. Además de propiedades del perfil límite y la no degenerancia del operador linealizado.

Lema 2.3 *Sea* $\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(y) = U(\frac{\tilde{y}-\bar{x}}{\varepsilon})$ *donde* U *es la solución definida en (2.16) y cualquier* $\bar{x} \in D$. *Entonces* $\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}$ *satisface*

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}} = \left|\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}} + 1\right|^p - 1 + \frac{\varepsilon^{2s}}{\Gamma(-s)}\int_{\mathbb{R}_+^{N-m+1}} \frac{U(\sigma\frac{|y'|}{\varepsilon}, \frac{\bar{z}}{\varepsilon})}{(4\pi)^{\frac{N-m+1}{2}}}\int_0^\infty D(t)dt, \tag{2.17}$$

donde

$$D(t) = \frac{e^{-\frac{|\bar{z}''-y''|}{4t}}}{t^{1+s+\frac{N-m+1}{2}}}\left[\frac{\sigma^{m-1}|y'|^m k_t(|y'|,\sigma)}{(4\pi t)^{\frac{m-1}{2}}} - 2|y'|e^{\frac{|y'|^2(1-\sigma)^2}{4t}}\right]$$

con $k_t(r,\lambda) = \int_{S^{m-1}} e^{-\frac{r^2}{4t}(\lambda\hat{z}'-\hat{y}')}d\hat{z}'$.

Demostración. Recordemos que $\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(y) = U(\frac{|\tilde{y}-\bar{x}|}{\varepsilon})$, usando (1.2) podemos escribir $(-\Delta)^s w(y)$ como

$$(-\Delta)^s\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(y) = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{W(y,t)-W(y,0)}{t^{1+s}}dt,$$

donde W es solución de la ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t W - \Delta W = 0 & en\ (0,\infty[\times\Omega \\ W = \overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}} & en\ \{0\}\times\Omega \end{cases}.$$

De igual forma calculemos $(-\Delta)^s u$, con $u(\tilde{y}) = U(\frac{|\tilde{y}-\bar{x}|}{\varepsilon})$ (Notemos que, las funciones $\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}$ y u están definidas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{N-m+1}$ respectivamente)

$$(-\Delta)^s u(\tilde{y}) = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{\tilde{u}(\tilde{y},t)-\tilde{u}(\tilde{y},0)}{t^{1+s}}dt,$$

donde u es solución de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & en\ (0,\infty[\times D \\ u(\tilde{y},0) = U(\frac{|\tilde{y}-\bar{x}|}{\varepsilon}) & en\ \{0\}\times D \end{cases}.$$

Notemos ahora que, $W(y,0) = U(\frac{|\tilde{y}-\bar{x}|}{\varepsilon}) = \tilde{u}(\tilde{y},0)$. Entonces

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(y) &= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{W(y,t)-W(y,0)}{t^{1+s}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{W(y,t)-\tilde{u}(\tilde{y},0)}{t^{1+s}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{W(y,t)-\tilde{u}(y,t)}{t^{1+s}} + \frac{\tilde{u}(\tilde{y},t)-\tilde{u}(\tilde{y},0)}{t^{1+s}}dt \\
&\frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{W(y,t)-\tilde{u}(y,t)}{t^{1+s}}dt + (-\Delta)^s U(\frac{|\tilde{y}-\bar{x}|}{\varepsilon}) \\
&= H(y) + |\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}} + 1|^p - 1.
\end{aligned}$$

En lo que queda, veremos que forma tiene $H(y)$. Para esto, dado que W y $\tilde{u}$ son soluciones de la ecuación de calor respectiva, podemos saber que forma tienen explícitamente

$$\tilde{u}(\tilde{y},t)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N-m+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}}\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(z)e^{-\frac{|z-y|^2}{4t}}dz \tag{2.18}$$

y

$$W(y,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(z)e^{-\frac{|z-y|^2}{4t}}dz. \tag{2.19}$$

En el caso de (2.19) podemos transformarlo en (notando $u(y)=U(\frac{|\tilde{y}-\bar{x}|}{\varepsilon})$)

$$\begin{aligned}
W(y,t)&=\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}u(z)e^{-\frac{|z-y|^2}{4t}}dz\\
&=\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}u(z)e^{\frac{-|z'-y'|^2-|z''-y''|^2}{4t}}dz\\
&=\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^{N-m}}e^{-\frac{|z''-y''|^2}{4t}}\int_{\mathbb{R}^m}e^{-\frac{|z'-y'|^2}{4t}}u(z',z'')dz'dz'',
\end{aligned}$$

recordando que $U\in H_{sim}$. Tenemos que $U(z',z'')=U(|z'|,z'')$ y por lo tanto pasando a coordenadas radiales

$$\begin{aligned}
W(y,t)&=\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^{N-m}}e^{-\frac{|z''-y''|^2}{4t}}\int_0^\infty\int_{S^{m-1}}\rho^{m-1}u(\rho,z'')e^{-\frac{|\rho\hat{z'}-|y'|\hat{y'}|^2}{4t}}d\hat{z'}d\rho dz''\\
&=\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^{N-m}}e^{-\frac{|z''-y''|^2}{4t}}\int_0^\infty u(\sigma|y'|,z'')\sigma^{m-1}|y'|^m\underbrace{\int_{S^{m-1}}e^{-\frac{|y'|^2}{4t}(\sigma\hat{z'}-\hat{y'})}d\hat{z'}}_{:=k_t(|y'|,\sigma)}d\sigma dz''\\
&=\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}_+^{N-m+1}}e^{-\frac{|z''-y''|^2}{4t}}u(\sigma|y'|,z'')\sigma^{m-1}|y'|^m k_t(|y'|,\sigma)d\sigma dz''
\end{aligned}$$

con $\sigma=\rho/|y'|$. De igual forma tenemos que

$$\tilde{u}(\tilde{y},t)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N-m+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}}e^{-\frac{|z''-y''|^2}{4t}}u(\sigma|y'|,z'')e^{-\frac{|y'|^2}{4t}(1-\sigma)^2}|y'|d\sigma dz''. \tag{2.20}$$

Computando entonces $H(y)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty\frac{W(y,t)-\tilde{u}(y,t)}{t^{1+s}}dt$ usando las formulas exactas de W

y $\tilde{u}$

$$
\begin{aligned}
H(y) &= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{W(y,t)-\tilde{u}(\tilde{y},t)}{t^{1+s}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{1}{t^{1+s}}\left[\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}_+^{N-m+1}} e^{-\frac{|z''-y''|^2}{4t}}u(\sigma|y'|,z'')\sigma^{m-1}|y'|^m k_t(|y'|,\sigma)d\sigma dz''\right. \\
&\left. -\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N-m+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} e^{-\frac{|z''-y''|^2}{4t}}u(\sigma|y'|,z'')e^{-\frac{|y'|^2}{4t}(1-\sigma)^2}|y'|d\sigma dz''\right]dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty \frac{1}{t^{1+s}}\int_{\mathbb{R}_+^{N-m+1}} \frac{e^{-\frac{|z''-y''|^2}{4t}}u(\sigma|y'|,z'')}{(4\pi t)^{\frac{N-m+1}{2}}}\left[\frac{\sigma^{m-1}|y'|^m k_t(|y'|,\sigma)}{(4\pi t)^{m-1}} - e^{-\frac{|y'|^2}{4t}(1-\sigma)^2}|y'|\right]d\sigma dz'' dt.
\end{aligned}
$$

□

Ahora, dado que la función del lado derecho de (2.17) podría tener singularidades, necesitamos modificar $\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}$. Sea $\delta>0$ sufiecientemente pequeño. Sea $\eta(t)\geq 0$ una función suave tal que $\eta(t)=0$ si $t\leq\delta, \eta(t)=1$ si $t\geq 2\delta$. Definamos

$$W_{\varepsilon,\bar{x}}(y)=\eta(|y'|)\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(y).$$

Entonces $W_{\varepsilon,\bar{x}}$ satisface

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s W_{\varepsilon,\bar{x}}=\eta(|y'|)\left(|\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}-1|^p-1\right)+\bar{f}_{\varepsilon,\bar{x}}(y),\ \ en\ \Omega, \tag{2.21}$$

donde

$$\bar{f}_{\varepsilon.\bar{x}}=\eta\varepsilon^s H(y)-2\varepsilon^s\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(\eta(|y'|)-\eta(|z'|))\left(\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(y)-\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(z)\right)}{|y-z|^{N+2s}}dz+\varepsilon^{2s}\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}(y)(-\Delta)^s\eta.$$

Ya que $\eta=0$ para $|y'|\leq\delta$, no es complicado ver que $\bar{f}_{\varepsilon,\bar{x}}$ es suave con respecto a $\bar{x}$ e y, además satisface

$$|\bar{f}_{\varepsilon,\bar{x}}|\leq Ce^s\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}.$$

Para cualquier $\bar{x}\in D$, sea $P_{\varepsilon,\Omega}W_{\varepsilon,\bar{x}}$ solución de

$$
\begin{cases}
\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s v+p|w_\varepsilon|^{(p-1)/p}v & \\
=\eta(|y'|)\left(|\overline{W}_{\varepsilon,\bar{x}}-1|^p-1\right)+p|w_\varepsilon|^{(p-1)/p}W_{\varepsilon,\bar{x}}+\bar{f}_{\varepsilon,\bar{x}}(y), & en\ \Omega \\
v=0 & en\ \mathbb{R}^n\setminus\Omega.
\end{cases}
\tag{2.22}
$$

Es fácil ver que $P_{\varepsilon,\Omega}W_{\varepsilon,\bar{x}}\in H_{sim}$. También, usando principio del máximo y el decaimiento polinomial de U que

$$|P_{\varepsilon,\Omega}W_{\varepsilon,\bar{x}}-W_{\varepsilon,\bar{x}}|\leq Ce^{N-m+1+2s},$$

resultado que será probado en **Lema 3.7**. De esta forma podemos definir $V_{\varepsilon,\bar{x}}$ como solución de

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s V_{\varepsilon,\bar{x}} + pV_{\varepsilon,\bar{x}} & \\ = \bar{f}(W_{\varepsilon,\bar{x}}) + O\bigg((\varepsilon^s + |\eta - 1|)W_{\varepsilon,\bar{x}}\bigg), & en\ \Omega \\ V_{\varepsilon,\bar{x}} = 0, & en\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.23}$$

donde $\bar{f}(t) = |t+1|^p - 1 + pt$.

Usando el **Teorema** (2.2) obtenemos también el siguiente resultado.

Lema 2.4

$$\left|\bar{f}(W_{\varepsilon,\bar{x}}(y)) - f_\varepsilon(x, W_{\varepsilon,\bar{x}}(y))\right| \leq CW_{\varepsilon,\bar{x}}(y). \tag{2.24}$$

Demostración. La demostración de este lema es una consecuencia no muy difícil del **Lema 1.16**. □

2.3. Teorema principal

Enunciaremos en esta sección el principal resultado obtenido en este trabajo de tesis. Recapitulando, hasta el momento encontramos una solución del problema (2.1) para la cual conocemos además el comportamiento asintótico, junto a esto encontramos el problema linealizado (2.23) para el cual caracterizamos las soluciones (usualmente llamadas proyecciones). Nos queda entonces enunciar el teorema principal que será demostrado en el capítulo 4.

En lo que sigue definiremos algunos espacios y herramientas a utilizar. Usando un argumento de densidad es posible definir $(-\Delta)^s u$ en $H^s(\mathbb{R}^N)$ definiendo

$$\langle u, v\rangle_\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon^{2s}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v + \int_\Omega p|w_\varepsilon|^{(p-1)/p}uv.$$

Definiendo además la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ inducida por el producto escalar. Podemos asumir $\max_{z\in\Omega} \varphi_1(z) = 1$ y definir así el conjunto $S = \{\bar{x} \in D : \varphi_1(\bar{x}) = 1\}$. Por simplicidad definamos

$$V_{\varepsilon,\bar{x}} = P_{\varepsilon,\Omega}W_{\varepsilon,\bar{x}}. \tag{2.25}$$

Sea también

$$D_{k,\varepsilon} = \left\{\xi \in D^k : |\varphi_1(\xi_j) - 1| \leq \varepsilon^{1-\tau}\ \forall j = 1,\ldots,k, U\left(\frac{\xi_i - \xi_j}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon^{1-\tau},\ i \neq j\right\}, \tag{2.26}$$

donde $\tau > 0$ es una constante pequeña. El conjunto $D_{k,\varepsilon}$ no está vacío porque si tomamos $\xi_j \in D$ tal que

$$|\xi_j - x_0| = L\varepsilon\,|\ln\varepsilon|,\ |\xi_i - \xi_j| \geq \frac{2\pi L}{k}\varepsilon|\ln\varepsilon|,\ i \neq j, i, j = 1,\ldots,k,$$

con $x_0 \in S$ y $L > 0$ suficientemente grande, entonces $(x_1, \ldots, x_k) \in D_{k,\varepsilon}$.

Sea H la completación del espacio $C_0^\infty(\Omega) \cap H_{sim}$ y sea

$$E_{\varepsilon,x,k} = \left\{ w \in H : \left\langle w, \frac{\partial V_{\varepsilon,x_j}}{\partial x_{jl}} \right\rangle_\varepsilon = 0, l = 1, \ldots, N-m+1, j = 1, \ldots, k \right\}.$$

El siguiente resultado permite reducir el problema a un problema finito dimensional.

Teorema 2.5 *Sea $k > 0$ un entero. Entonces existe $\varepsilon_k > 0$, tal que para cualquier $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k]$ (2.11) tiene una solución de la forma*

$$\bar{u}_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_{\varepsilon,j}} + w_{\varepsilon,\xi} \tag{2.27}$$

donde $\xi_{\varepsilon,j} \in D_{k,\varepsilon}$, $w_{\varepsilon,\xi} \in E_{\varepsilon,\xi,k}$ y satisface

$$\|w_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{2s}[(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_{\varepsilon,\xi}]^2 + p|w_\varepsilon|^{p-1} w_{\varepsilon,\xi}(x)^2 dx = o(\varepsilon^{N-m+1})$$

En el siguiente capítulo se demostrará el teorema anterior.

Capítulo 3

Desarrollo previo

Para poder abordar de forma sencilla y ordenada la demostración del **Teorema 2.5** la siguiente sección enuncia algunos resultados previos, como son algunas propiedades de la solución fundamental y de las proyecciones, también estudiaremos el operador linealizado, el operador de segundo orden y el resto de la formulación variacional.

En la primera sección se estudiaran las antes mencionadas propiedades de la solución fundamental (U_s) como son su comportamiento asintótico de la función y su derivada. La segunda sección relaciona las propiedades de U_s con las proyecciones $V_{\varepsilon,\bar{x}}$ soluciones de (2.23). Finalmente la sección tres estudiará los operadores $L_{\varepsilon,\xi}, Q_{\varepsilon,\xi}$ y R_ε (a definir más adelante) que serán útiles a la hora de desarrollar el argumento de punto fijo.

3.1. Propiedades del perfil límite

En esta sección se darán algunas propiedades sobre la solución del problema límite (2.16). Para esto primero debemos definir la noción de solución fundamental.

Definición 3.1 *Diremos que $0 \lneqq U_s \in H^s(\mathbb{R}^{N-m+1})$ es una solución fundamental del problema (2.16) si U_s resuelve (2.16) y el operador linealizado sobre U_s, $L := (-\Delta)^s - p|U_s - 1|^{p-2}(U_s - 1)$ tiene indice de Morse exactamente igual a 1; es decir L tiene solo un valor propio estrictamente negativo(contando multiplicidad).*

El siguiente teorema nos da existencia, unicidad (salvo traslaciones) y no-degenerancia de las soluciones del problema (2.16).

Teorema 3.2 *Si $1 < p < \frac{N-m+1+2s}{N-m+1-2s}$,entonces el problema (2.16) tiene una única solución fundamental positiva que es radial y estrictamente decreciente en $|x|$. Más aún, U pertenece a $H^s(\mathbb{R}^{N-m+1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-m+1}) \cap C^{2,\gamma}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ para algún $\gamma \in (0,1)$ y satisface*

$$|U(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{N-m+1+2s}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^{N-m+1}. \tag{3.1}$$

Además, U es no degenerado en el sentido de que el operador lineal definido por

$$L := (-\Delta)^s - p|U-1|^{p-2}(U-1) \tag{3.2}$$

satisface

$$kerL \cap L^2(\mathbb{R}^{N-m+1}) = Span\left\{\frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_{N-m+1}}\right\}.$$

La demostración de este resultado se incluyó en el Apéndice. La idea general es un desarrollo similar al de [1, 20].

Antes se definió $W_{\varepsilon,x}(y)$, $x \in \mathbb{R}^{N-m+1}$ e $y \in \mathbb{R}^N$. En lo que sigue se darán algunas propiedades sobre $W_{\varepsilon,x}$. Fijando $\xi \in D^k$ definimos para todo $i = 1, \ldots, N-m+1$ y $j = 1, \ldots, k$ las funciones

$$Z_{ji} = \frac{\partial W_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}.$$

Probamos el siguiente lema.

Lema 3.3 *Existe una constante C tal que, para $i = 1, \ldots, N-m+1$ y $j = 1, \ldots, k$*

$$|Z_{ji}| \leq C\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\tilde{y}-\xi_j}{\varepsilon}\right|^{\nu_1} \quad \textit{para cualquier} \quad \left|\frac{\tilde{y}-\xi_j}{\varepsilon}\right| \geq 1 \tag{3.3}$$

donde $\nu_1 = \text{mín}(N-m+2s+2, p(N-m+1+2s))$.

Demostración. Definamos $W_{\xi_j}(x) = W(x-\xi)$, entonces

$$W_{\varepsilon,\xi_j}(x) = W_{\frac{\xi_j}{\varepsilon}}(\frac{x}{\varepsilon})$$

y

$$Z_{ji}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial W_{\frac{\xi_j}{\varepsilon}}}{\partial \xi_{ji}}(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Siguiendo el desarrollo de [19] en el lema 5.2, en nuestro caso, para la función $\frac{\partial W_{\frac{\xi_j}{\varepsilon}}}{\partial \xi_{ji}}(\frac{x}{\varepsilon})$, obtenemos que

$$\left|\frac{\partial U_{\frac{\xi_j}{\varepsilon}}}{\partial \xi_{ji}}(\frac{x}{\varepsilon})\right| \leq C\left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right|^{-\nu_1}.$$

De esta última igualdad sigue el resultado. □

Ahora siguiendo la demostración del lema 5.3 en [19], obtenemos el siguiente lema.

Lema 3.4 *Existe una constante C positiva tal que, para todo $i = 1, \ldots, N-m+1$ y $j = 1, \ldots, k$*

$$|\nabla Z_{ji}| \leq C\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right|^{\nu_2} \quad \textit{para todo} \quad \left|\frac{x-\xi_j}{\varepsilon}\right| \geq 1 \tag{3.4}$$

donde $\nu_2 = \text{mín}(N-m+2s+3, p(N-m+1+2s))$.

La demostración de este resultado es similar a la del lema anterior.

Notemos ahora que, dado que U es una función radial, entonces se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} Z_{ji}^2 dx = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} Z_{j,l}^2 \ \forall i, l = 1, \ldots, N-m+1.$$

Además, para $\xi \in D^k$ fijo, podemos definir

$$\alpha_j := \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} Z_{j1}^2 dx, \ \forall j = 1, \ldots, k.$$

Es fácil probar, mediante un simple cambio de variable que en realidad

$$\alpha := \alpha_j = \alpha_1, \ \forall j = 1, \ldots, k.$$

El siguiente es un resultado de ortogonalidad para las funciones Z_{ji}.

Lema 3.5 *Para todo $i, n = 1, \ldots, N-m+1$ y $j, l = 1, \ldots, k$, las funciones Z_{ji} satisfacen,*

$$\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} Z_{ji} Z_{ln} = \varepsilon^{N-m-1} \alpha \delta_{jl} \delta_{in}, \tag{3.5}$$

donde α es el definido anteriormente, el cual no depende del valor de ε.

Como consecuencia de resultado anterior, tenemos la siguiente afirmación.

Corolario 3.6 *Para todo $i, n = 1, \ldots, N-m+1$ y $j, l = 1, \ldots, k$, las funciones Z_{ji} satisfacen,*

$$\int_D Z_{ji} Z_{ln} = \varepsilon^{N-m-1} \alpha \delta_{jl} \delta_{in} + O(\varepsilon^{\nu_3}) \tag{3.6}$$

*donde $\nu_3 = 2\nu_1$ con ν_1 el definido en el **Lema 3.3**.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_D Z_{ji} Z_{ln} &= \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} Z_{ji} Z_{ln} \\ &= \varepsilon^{N-m-1} \alpha \delta_{jl} \delta_{ln} - \int_{\mathbb{R}^{N-m+1} \setminus D} Z_{ji} Z_{lm}.\end{aligned}$$

Entonces, usando (3.3), podemos estimar la ultima integral como sigue

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^{N-m+1} \setminus D} Z_{ji} Z_{ln} \right| &\leq C \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^{N-m+1} \setminus D} \left| \frac{x - \xi_j}{\varepsilon} \right|^{\nu_1} \left| \frac{x - \xi_l}{\varepsilon} \right|^{\nu_1} \\ &\leq C \varepsilon^{2\nu_1}.\end{aligned}$$

Concluyendo el resultado esperado. □

3.2. Solución aproximada

Sea U la única solución radial (salvo traslaciones) del problema límite (2.16). Al igual que antes definiremos $W_{\varepsilon,\xi}(y) = U_{\varepsilon,\xi}(\tilde{y}) = U(\frac{\tilde{y}-\xi}{\varepsilon})$ y $V_{\varepsilon,\xi}$ solución de (2.22), es necesario notar que, en este caso las funciones tienen como dominio $\mathbb{R}^N$.

La presente sección busca estudiar el comportamiento de la proyección $V_{\varepsilon,\xi}$ con respecto a la solución original del problema límite $U_{\varepsilon,\xi}$, esto será mucha utilidad cuando se reduzca el problema usando el método de Liapunov-Schmidt. Comenzaremos probando la siguiente proposición

Lema 3.7 *Dado el decaimiento polinomial de U, tenemos que*

$$|P_{\varepsilon,\Omega}W_{\varepsilon,\bar{x}} - W_{\varepsilon,\bar{x}}| \leq C\varepsilon^{N-m+1+2s} \tag{3.7}$$

Demostración. Definamos $v = W_{\varepsilon,\bar{x}} - P_{\varepsilon,\Omega}W_{\varepsilon,\bar{x}}$, entonces v es solución de:

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s v + p|w_\varepsilon|^{(p-1)/p} v = 0 & en\ \Omega \\ v = W_{\varepsilon,\bar{x}} & en\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}.$$

Ahora como $v = W_{\varepsilon,\bar{x}}$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ por principio del máximo y el **Teorema** 3.2 tenemos que:

$$\begin{aligned} |v| &= |W_{\varepsilon,\bar{x}} - P_{\varepsilon,\Omega}W_{\varepsilon,\bar{x}}| \\ &\leq |W_{\varepsilon,\bar{x}}| \\ &= \left| U(\frac{|\tilde{y}-\bar{x}|}{\varepsilon}) \right| \\ &\leq C\varepsilon^{N-m+1+2s} \end{aligned}$$

□

Volviendo al contexto del la reducción de Liapunov-Schmidt, la solución que buscamos será compuesta por proyecciones del problema original linealizado con respecto a la solución w_ε. Sea $\xi \in D^k$, para simplificar la notación, definamos ahora

$$z_{ji} = \frac{\partial V_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}}. \tag{3.8}$$

Buscaremos entender el comportamiento de las funciones V_{ε,ξ_j}, por lo que entender el comportamiento de sus derivadas direccionales es fundamental, esto nos lleva al siguiente resultado.

Lema 3.8 *La siguiente cota se cumple. Para todo $x \in D$*

$$|Z_{ji} - z_{ji}| \leq C\varepsilon^{\nu_1} \tag{3.9}$$

*para alguna constante positiva C, donde ν_1 es el definido en **Lema 3.3**.*

Demostración. Aprovechandonos de lo probado anteriormente, sabemos que $v = W_{\varepsilon,\xi_j} - V_{\varepsilon,\xi_j}$ cumple la ecuación

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s v + p|w_\varepsilon|^{(p-1)/p} v = 0 & en\ \Omega \\ v = W_{\varepsilon,\xi_j} & en\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}.$$

Por lo tanto $\frac{\partial v}{\partial \xi_{ji}}$ resuelve la ecuación

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s \frac{\partial v}{\partial \xi_{ji}} + p|w_\varepsilon|^{(p-1)/p} \frac{\partial v}{\partial \xi_{ji}} = 0 & en\ \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \xi_{ji}} = \frac{\partial W_{\varepsilon,\xi_j}}{\partial \xi_{ji}} & en\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Repitiendo el argumento usado en el lema anterior, por principio del máximo concluimos el resultado usando el **Lema 3.3**. □

Corolario 3.9

$$\langle z_{ji}, z_{ln} \rangle_\varepsilon = \varepsilon^{N-m-1} C \delta_{jl} \delta_{in} + O(\varepsilon^{\nu_3}) \tag{3.10}$$

*donde $\nu_3 = 2\nu_1$ el mismo del **Corolario 3.5**.*

Demostración. Aprovechando que V_{ε,ξ_j} resuelve (2.23) podemos notar que entonces z_{ji} debe ser solución de

$$\begin{cases} \varepsilon^{2s}(-\Delta)^s z_{ji} + p z_{ji} = p|1 - W_{\varepsilon,\xi_j}|^{p-1} Z_{ji} + p Z_{ji} & en\ \Omega \\ z_{ji} = 0 & en\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}.$$

Testeando con z_{ln} como el resultado anterior se obtiene

$$\langle z_{ji}, z_{ln} \rangle_\varepsilon = \int_\Omega \left(p|1 - W_{\varepsilon,\xi_j}|^{p-1} Z_{ji} z_{ln} + p Z_{ji} z_{ln} \right) dx$$

usando (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle z_{ji}, z_{ln} \rangle_\varepsilon = & \int_\Omega p|1 - W_{\varepsilon,\xi_j}|^{p-1} Z_{ji} Z_{ln} + p Z_{ji} Z_{ln} dx \\ & + Cp \int_\Omega (|1 - W_{\varepsilon,\xi_j}|^{p-1} + 1) Z_{ji} \varepsilon^{\nu_1} dx. \end{aligned}$$

Finalmente usando (3.6)

$$\langle z_{ji}, z_{ln} \rangle_\varepsilon = C \varepsilon^{N-2} \delta_{jl} \delta_{in} + O(\varepsilon^{\nu_3})$$

que es el resultado buscado. □

Lema 3.10 *Dado $i = 1, \ldots, N$ y $j = 1, \ldots, k$, la siguiente desigualdad se cumple. Para todo $x \in D$*

$$|\nabla Z_{ji}(x) - \nabla z_{ji}(x)| \le C \varepsilon^{\nu_2} \tag{3.11}$$

*para C una constante positiva y ν_2 es el definido en **Lema 3.4**.*

Como consecuencia del lema anterior, tenemos el siguiente corolario

Corolario 3.11 *Dados $i, n = 1, \ldots, N-m+1$ y $j = 1, \ldots, k$ tenemos que*

$$\left\| \frac{\partial z_{ji}}{\partial \xi_{jn}} \right\| = O(\varepsilon^{\text{mín}\{N-m-3, \nu_2\}}) \tag{3.12}$$

Ver [1] para una demostración completa de este resultado en el caso N-dimensional. El desarrollo es igual en este caso.

3.3. Algunos lemas técnicos

En esta sección probaremos lemas previos al resultado general, los cuales harán más fácil el desarrollo del resultado. El primer resultado nos será útil a la hora de probar la existencia de soluciones con peaks interiores.

Lema 3.12 *Sea w_ε única solución negativa de* (2.2) *y definamos el siguiente problema de valores propios*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v + p|w_\varepsilon|^{p-1} v &= \lambda v \qquad \text{en } \Omega \\ v &= 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

Entonces, definiendo

$$\lambda_1 = \inf_{\varphi \in H_0^s(\Omega)} \frac{\varepsilon^{2s} \|\varphi\|^2_{H_0^s(\Omega)} + p \int_\Omega |w_\varepsilon|^{p-1} \varphi^2 dx}{\int_\Omega \varphi^2 dx},$$

tenemos que $\lambda_1 \geq C(p) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

Demostración. Como se hizo antes sabemos que $w_\varepsilon = -\sigma^{-\frac{1}{p}} u$ resuelve el problema (2.2) con $w_\varepsilon^p \leq \varphi_1$ y $w_\varepsilon \to \varphi_1^{\frac{1}{p}}$ cuando $\varepsilon \to 0$ uniformemente en cualquier compacto de Ω. Es decir

$$\lambda_1 = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\varepsilon^{2s} \|\varphi\|^2_{H_0^s(\Omega)} + p \int_\Omega |w_\varepsilon|^{p-1} \varphi^2 dx}{\int_\Omega \varphi^2 dx}.$$

Dado, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, usando el hecho de que $|w_\varepsilon| > 0$ y la desigualdad de Picone enunciada en el **Lema** (1.15), obtenemos

$$\varepsilon^{2s} \frac{a_{N,s}}{2} \iint_{D_\Omega} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \geq \int_\Omega \frac{\varepsilon^{2s} (-\Delta)^s |w_\varepsilon|}{|w_\varepsilon|} \varphi^2 dx.$$

Entonces

$$\varepsilon^{2s} \frac{a_{N,s}}{2} \iint_{D_\Omega} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_\Omega |w_\varepsilon|^{p-1} \varphi^2 dx \geq \int_\Omega \frac{\varphi_1}{|w_\varepsilon|} \varphi^2 dx,$$

lo que implica que

$$\varepsilon^{2s}\frac{a_{N,s}}{2}\iint_{D_\Omega}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+p\int_\Omega |w_\varepsilon|^{p-1}\varphi^2dx \geq (p-1)\int_\Omega |w_\varepsilon|^{p-1}\varphi^2dx+\int_\Omega \frac{\varphi_1}{|w_\varepsilon|}\varphi^2dx$$

$$\geq \int_\Omega\left((p-1)|w_\varepsilon|^{p-1}+\frac{1}{|w_\varepsilon|^{\frac{p-1}{p}}}\right)\varphi^2dx.$$

Si tomamos ahora

$$C(p)=\min_{\lambda>0}\left\{(p-1)\lambda^{p-1}+\frac{1}{\lambda^{\frac{p-1}{p}}}\right\}>0,$$

es directo que

$$\varepsilon^{2s}\frac{a_{N,s}}{2}\iint_{D_\Omega}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+p\int_\Omega |w_\varepsilon|^{p-1}\varphi^2dx\geq C(p)\int_\Omega \varphi^2dx.$$

Es decir, $\lambda_1 \geq C(p)$ y se tiene el resultado pedido. $\square$

Observación Una consecuencia del resultado anterior es

$$\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\varepsilon,\ \forall\varphi\in L^2(\Omega),$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual de L^2 y $\|\cdot\|_\varepsilon$ es la norma definida por el producto interno que fue dada anteriormente.

Lema 3.13 *Sea*

$$L_{\varepsilon,\xi}(w):=\sum_{j=1}^k\langle V_{\varepsilon,\xi_j},w\rangle_\varepsilon-\int_\Omega f_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})wdx$$

Entonces $L_{\varepsilon,\xi}$ es un operador lineal acotado de $E_{\varepsilon,\xi,k}$ en $\mathbb{R}$. Más aún

$$\|L_{\varepsilon,\xi_j}\|_\varepsilon=\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}O\left(\sum_{j=1}^k\xi_j^{m-1}\left(\varphi_1(\xi_j)-1\right)^q+\sum_{j\neq i}U^q\left(\frac{|\xi_i-\xi_j|}{\varepsilon}\right)\right)$$

donde $q=\min(1,p-1)$. En particular existe, $l_{\varepsilon,\xi}\in E_{\varepsilon,\xi,k}$ tal que

$$L_{\varepsilon,\xi}(w)=\langle l_{\varepsilon,\xi},w\rangle_\varepsilon,\ \forall w\in E_{\varepsilon,\xi,k}.$$

Demostración. Desarrollando la definición de $L_{\varepsilon,\xi}(w)$ podemos llegar a que

$$L_{\varepsilon,\xi}(w)=\sum_{j=1}^k\int_\Omega \varepsilon^{2s}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}V_{\varepsilon,\xi_j}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}w+p|w_\varepsilon|^{p-1}V_{\varepsilon,\xi_j}w-\int_\Omega f_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})w$$

$$=\sum_{j=1}^k\int_\Omega \varepsilon^{2s}w(-\Delta)^sV_{\varepsilon,\xi_j}+p|w_\varepsilon|^{p-1}V_{\varepsilon,\xi_j}w-\int_\Omega f_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})w$$

$$=\sum_{j=1}^k\int_\Omega \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})w+O((\varepsilon^s+|\eta-1|)W_{\varepsilon,\xi_j})w+p(|w_\varepsilon|^{p-1}-1)V_{\varepsilon,\xi_j}w-\int_\Omega f_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})w$$

Donde se usó el hecho de que V_{ε,ξ_j} sea solución de (2.23) e integración por partes. Podemos separar el cálculo en acotar 3 integrales

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon,\xi}(w) &= p\sum_{j=1}^{k}\int_\Omega (|w_\varepsilon|^{p-1}-1)V_{\varepsilon,\xi_j}w + \int_\Omega \sum_{j=1}^{k}(\bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j}) - f_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}))w \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}\int_\Omega O((\varepsilon^s + |\eta-1|)W_{\varepsilon,\xi_j})w \\
&\quad := L^1_{\varepsilon,\xi}(w) + L^2_{\varepsilon,\xi}(w) + L^3_{\varepsilon,\xi}(w).
\end{aligned}$$

Usando el **Teorema** (2.2) y luego el **Lema** (3.7), además de algunas desigualdades tipo Hölder podemos concluir

$$\begin{aligned}
L^1_{\varepsilon,(\xi}(w) &\le p\sum_{j=1}^{K}\int_\Omega (\varphi_1^{\frac{p-1}{p}}-1)V_{\varepsilon,\xi_j}w + C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+s}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le p\sum_{j=1}^{k}\int_\Omega (\varphi_1^{\frac{p-1}{p}}-1)(W_{\varepsilon,\xi_j} + Ce^{N-m+1})w + C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+s}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= p\sum_{j=1}^{k}\left[\int_\Omega (\varphi_1^{\frac{p-1}{p}}-1)^2 W^2_{\varepsilon,\xi_j}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}O(\varepsilon^s)\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le p\sum_{j=1}^{k}\left[\int_\Omega (\varphi_1^{\frac{1}{p}}-1)^{2\min(p-1,1)} W^2_{\varepsilon,\xi_j}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}O(\varepsilon^s)\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

Ahora gracias al **Lema** (1.16) y al **Teorema** (3.2), junto con un cambio de variable radial $x' = r\hat{x}'$ y $z = \left(\frac{r-\xi_{j1}}{\varepsilon}, \frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}\right)$ llegamos a que

$$\begin{aligned}
& p\sum_{j=1}^{k}\left[\int_\Omega (\varphi_1^{\frac{1}{p}}-1)^{2\min(p-1,1)} W^2_{\varepsilon,\xi_j}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= p\textstyle\sum_{j=1}^{k}\left[\int_\Omega \left(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(x',x'')-1\right)^{2q} W^2_{\varepsilon,\xi_j}(x',x'')\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= p\sum_{j=1}^{k}\left[\int_\Omega \left(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(r,x'')-1\right)^{2q} U\left(\frac{r-\xi_{j1}}{\varepsilon}, \frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}\right)^2 r^{m-1}drd\hat{x}'dx''\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= p\sum_{j=1}^{k}\left[V_{m-1}\int_{D_{\varepsilon,\xi_j}} \varepsilon^{N-m+1}\left(\varphi_1(\varepsilon z+\xi_j)^{\frac{1}{p}}-1\right)^{2q} U(\varepsilon z+\xi_j)^2(\varepsilon z+\xi_j)^{m-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le pC\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}\sum_{j=1}^{k}\xi_j^{m-1}\left(\varphi_1(\xi_j)-1\right)^q\left[\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U^2(z)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}})\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_j^{m-1}\left(\varphi_1(\xi_j)-1\right)+1\right)\|w\|_2
\end{aligned}$$

donde V_{m-1} corresponde al volumen de la bola $m-1$-dimensional. Ahora estimamos $L^2_{\varepsilon,\xi}(w)$,

$$
\begin{aligned}
L^2_{\varepsilon,\xi}(w) &= \int_\Omega \sum_{j=1}^k \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})w - f_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})w \\
&\leq \int_\Omega \sum_{j=1}^k \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})w - f_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j})w + C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O(\varepsilon^s) \left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

luego, usando (1.16), el polinomio de Taylor y Hölder podemos obtener que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{j=1}^k \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})w - f_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j})w \\
&= \int_\Omega \left[|\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j} + w_\varepsilon|^p - |w_\varepsilon|^p + p|w_\varepsilon|^{p-1} \sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j} \right] w \\
&- \int_\Omega \sum_{j=1}^k \left[|w-1|^p - 1 + pW_{\varepsilon,\xi_j} \right] w \\
&= \int_\Omega |\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j}|^p w - \sum_{j=1}^k \int_\Omega |W_{\varepsilon,\xi_j}|^p w \\
&+ p\int_\Omega |w_\varepsilon|^{p-1} \left(\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j} \right) w - p\sum_{j=1}^k \int_\Omega W_{\varepsilon,\xi_j} w + \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O(\varepsilon^s) \|w\|_2 \\
&\leq \sum_{l=1}^k \left[\left(\frac{\int_\Omega |\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j}|^{2p}}{k} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_\Omega |W_{\varepsilon,\xi_l}|^{2p} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|w\|_2 \\
&+ C\sum_{l=1}^k \left[\left(\frac{\int_\Omega (\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j})^2}{k} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_\Omega W^2_{\varepsilon\xi_l} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|w\|_2 + \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O(\varepsilon^s) \|w\|_2 \\
&\leq \sum_{l=1}^k \left[\int_\Omega \frac{|\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j}|^{2p}}{k} - |W_{\varepsilon,\xi_l}|^{2p} \right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 \\
&+ C\sum_{l=1}^k \left[\int_\Omega \frac{(\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j})^2}{k} - W^2_{\varepsilon\xi_l} \right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 + \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O(\varepsilon^s) \|w\|_2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{j=1}^{k} \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})w - f_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j})w \\
&\leq \sum_{l=1}^{k} \left[\int_\Omega \frac{|\sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j}|^p}{k} - |W_{\varepsilon,\xi_l}|^p \right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 \\
&+ C \sum_{l=1}^{k} \left[\int_\Omega \frac{(\sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j})^2}{k} - W_{\varepsilon\xi_l}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 + \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O(\varepsilon^s)\|w\|_2 \\
&\leq C \left[\int_\Omega |\sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j}|^p - \sum_{l=1}^{k} |W_{\varepsilon,\xi_l}|^p \right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 \\
&+ C \left[\int_\Omega (\sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j})^2 - \sum_{l=1}^{k} W_{\varepsilon\xi_l}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 + \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O(\varepsilon^s)\|w\|_2 \\
&\leq C \left[\int_\Omega |\sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j}|^p - \sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j}^p + (\sum_{j=1}^{k} W_{\xi,\xi_j})^2 - \sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_2 \\
&+ \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O(\varepsilon^s)\|w\|_2
\end{aligned}
$$

para terminar esta parte, acotemos el último término usando (1.17) para la suma con potencia p y 2 quedando lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\left[\int_\Omega |\sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j}|^p - \sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j}^p + (\sum_{j=1}^{k} W_{\xi,\xi_j})^2 - \sum_{j=1}^{k} W_{\varepsilon,\xi_j}^2 \right]^{\frac{1}{2}} &\leq C \left[\sum_{j\neq i} \int_\Omega \Big((W_{\varepsilon,\xi_j}^{p-1} + W_{\varepsilon,\xi_j}) \operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_j}, W_{\varepsilon,\xi_i}) \Big) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \sum_{j\neq i} \left[\int_\Omega W_{\varepsilon,\xi_j}^{\operatorname{mín}(p-1,1)} W_{\varepsilon,\xi_i} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} \sum_{j\neq i} U\left(\frac{|\xi_i - \xi_j|}{\varepsilon} \right)
\end{aligned}
$$

Con respecto al último sumando que queda arriba. Para terminar, estimaremos $L^3_{\varepsilon,\xi}(w)$,

$$\begin{aligned}
L^3_{\varepsilon,\xi}(w) &= \sum_{j=1}^{k}\int_\Omega \left((\varepsilon^s+|\eta-1|)W_{\varepsilon,\xi_j}\right)w \\
&\le \sum_{j=1}^{k}\int_\Omega C\varepsilon^s W_{\varepsilon,\xi_j}w + C|\eta-1|W_{\varepsilon,\xi_j}w \\
&\le C\left(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^s\left[\int_\Omega W^2_{\varepsilon,\xi_j}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{k}\left[\int_\Omega W^2_{\varepsilon,\xi_j}]\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\le C\left(\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+3s}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+2s}\left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}O(\varepsilon^{2s})\|w\|_2
\end{aligned}$$

Juntando todas las estimaciones concluimos que

$$\|L_{\varepsilon,\xi_j}\|_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}O\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_j^{m-1}\left(\varphi_1(\xi_j)-1\right)^q + \sum_{j\neq i}U^q\left(\frac{|\xi_i-\xi_j|}{\varepsilon}\right)\right)$$

y la existencia de l_{ε,ξ_j} se tiene por el teorema de Riesz. □

Lema 3.14 *Definamos*

$$Q_{\varepsilon,\xi}(w,\upsilon) := \langle w,\upsilon\rangle_\varepsilon - \int_\Omega f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j})w\upsilon dx. \tag{3.14}$$

donde $f'_\varepsilon(x,t)$ *denota la derivada en* t *de* f_ε. *Entonces se tiene que*

$$|Q_{\varepsilon,\xi}(w,\upsilon)| \le C\|w\|_\varepsilon\|\upsilon\|_\varepsilon.$$

En particular existe un operador lineal acotado $A_{\varepsilon,\xi}$ *de* $E_{\varepsilon,\xi,k}$ *en* $E_{\varepsilon,\xi,k}$ *tal que*

$$Q_{\varepsilon,\xi}(w,\upsilon) = \langle A_{\varepsilon,\xi}w,\upsilon\rangle,\ \forall w,\upsilon\in E_{\varepsilon,\xi,k}$$

.

Demostración. Primeramente es claro que

$$|\langle w,\upsilon\rangle_\varepsilon| \le \|w\|_\varepsilon\|\upsilon\|_\varepsilon,$$

por lo que falta demostrar una cota del mismo estilo para $\int_\Omega f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j})w\upsilon dx$.

Por simple cálculo se ve que

$$f'_\varepsilon(x,t) = p|t+w_\varepsilon|^{p-1} + p|w_\varepsilon|^{p-1},$$

luego

$$\int_\Omega f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})w\upsilon dx \leq \left[\int_\Omega f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega w^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega \upsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\int_\Omega f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_2\|\upsilon\|_2$$

$$\leq \left[\int_\Omega f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \|w\|_\varepsilon\|\upsilon\|_\varepsilon,$$

donde se usó el **Lema 3.12**. Ahora veamos como acotar $f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})$

$$\begin{aligned}
f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}) &= p\left|\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j} + w_\varepsilon\right|^{p-1} + p|w_\varepsilon|^{p-1} \\
&\leq p\left(\left|\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}\right|^{p-1} + 2|w_\varepsilon|^{p-1}\right) \\
&\leq p\left(\left|\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j}\right|^{p-1} + C\varepsilon^{\frac{N-m+1+2s}{2}} + 2|w_\varepsilon|^{p-1}\right) \\
&\leq p\left(\sum_{j=1}^k \frac{C}{1+\frac{|\tilde{x}-\xi_j|}{\varepsilon}}^{N-m+1+2s} + Ce^{\frac{N-m+1+2s}{2s}} + 2|w_\varepsilon|^{p-1}\right) \\
&\leq \tilde{C}
\end{aligned}$$

puesto que como se notó anteriormente $-\varphi_1^{\frac{1}{p}} \leq w_\varepsilon < 0$. Entonces se concluye el resultado puesto que

$$\int_\Omega f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j})^2 dx \leq C$$

al ser Ω acotado. Finalmente la existencia de $A_{\varepsilon,x}$ viene dada por el teorema de representación de Riesz. □

Será necesario más adelante que el operador $A_{\varepsilon,\xi}$ sea invertible, por lo que a continuación probaremos un resultado de coercividad que nos dará la invertibilidad buscada.

Lema 3.15 *Existe una constante C independiente de ε y $\xi \in \Lambda_{\varepsilon,k}$ tal que*

$$\|A_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon \geq \|w\|_\varepsilon,\ \forall w \in W_{\varepsilon,\xi,k}, \xi \in \Lambda_{\varepsilon,k}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por contradicción, supongamos que existen $\varepsilon_n \to 0$, $x_n \in D_{k,\varepsilon}$ con $x_j, n \to x_j \in S$ para todo $j = 1, \ldots, k$ y $w_n \in E_{\varepsilon_n, x_n, k}$ tales que

$$\|w_n\| = \varepsilon_n^{\frac{N-m+1}{2}}$$

y

$$\|Q_{\varepsilon_n, x_n} w_n\|_{\varepsilon_n} = o(\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}).$$

Demostraremos primero qué

$$\int_{B^*_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} |w_n|^2 = o(\varepsilon^{N-m+1}). \tag{3.15}$$

Dado que $w_n \in E_{\varepsilon_n, x_n, k}$, $\forall n$ entonces $w_n \in H_{sim}$, $\forall n$. Luego se puede re definir w_n como su análogo en $\mathbb{R}_+^{N-m+1}$ y entonces definir $\tilde{w}_{j,n}(z) = w_n(\varepsilon_n z + x_{j,n})$, además sea $D_n = \{z : \varepsilon_n z + x_{j,n} \in D\}$ entonces podemos asumir que existe $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{N-m+1})$, tal que

$$D\tilde{w}_{j,n} \rightharpoonup Dw_j, \; \text{ en } L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})$$

y

$$\tilde{w}_{j,n} \to w_j, \; \text{ en } L^2_{loc}(\mathbb{R}^{N-m+1}),$$

cuando $n \to +\infty$.

Probemos ahora que

$$(-\Delta)^s w_j - p|U-1|^{p-2}(U-1)w_j = 0 \; \text{ en } \mathbb{R}^{N-m+1}, \tag{3.16}$$

lo cual es equivalente a resolver

$$\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} (-\Delta)^s w_j \upsilon - p \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} |U-1|^{p-2}(U-1)w_j \upsilon = 0, \; \forall \upsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N-m+1}). \tag{3.17}$$

Notemos que derivando (2.23), con respecto a la h-esima coordenada de $x_{j,n}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}}, w_n \right\rangle_{\varepsilon_n} \\
&= \int_\Omega (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w_n + p|w_{\varepsilon_n}|^{p-1} \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} w_n \\
&= \int_\Omega (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w_n + p \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} w_n + p(|w_{\varepsilon_n}|^{p-1} - 1) \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} w_n \\
&= \int_\Omega \bar{f}'(W_{\varepsilon_n, x_{j,n}}) \frac{\partial W_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} w_n + p(|w_{\varepsilon_n}|^{p-1} - 1) \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} w_n + \int_\Omega O\left(\frac{\partial W_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} \right) w_n \\
&= \int_\Omega \bar{f}'(W_{\varepsilon_n, x_{j,n}}) \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} w_n + p(|w_{\varepsilon_n}|^{p-1} - 1) \frac{\partial V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} w_n + \int_\Omega O\left(\frac{\partial W_{\varepsilon_n, x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} + \varepsilon_n^{\nu_1} \right) w_n \\
&= \varepsilon^{N-m} \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} p\left(|U-1|^{p-2}(U-1) + 1 \right) \frac{\partial U}{\partial z_h} \tilde{w}_{j,n} + O(\varepsilon^{N-m+1})
\end{aligned}$$

Ahora como, $w_n \in E_{\varepsilon_n,x_n,k}$, por definición sabemos que

$$\left\langle w_n, \frac{\partial V_{\varepsilon_n,x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} \right\rangle_{\varepsilon_n} = 0 \to \left\langle w_j, \frac{\partial V_{\varepsilon_n,x_{j,n}}}{\partial x_{j,n,h}} \right\rangle_{\varepsilon_n} = 0,$$

todo esto nos permite concluir entonces que necesariamente, se debe cumplir (3.17), lo cual implica entonces que w_j está en el kernel de L por lo que gracias al **Teorema 3.2**

$$w_j = \sum_{h=1}^{N-m+1} b_h \frac{\partial U}{\partial x_h}. \tag{3.18}$$

Juntando (3.17) y (3.18) se puede llegar a que w_j debe ser cero necesariamente. Esto último nos deja concluir (3.15) puesto que

$$\int_{B^*_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} |w_n|^2 dx = \varepsilon^{N-m+1} \int_{B^*_{\varepsilon_n R}(0)} |\tilde{w}_{j,n}|^2 dx$$

y basta tomar limite en $n \to \infty$ para concluir, recordando que $\varepsilon_n \to 0$ y $x_{j,n} \to x_j \in S$.

Notemos ahora que

$$\begin{aligned}
o(\varepsilon^{N-m+1}) &\geq \|A_{\varepsilon_n,x_n} w_n\|_{\varepsilon_n} \|w_n\|_{\varepsilon_n} \\
&\geq \langle A_{\varepsilon_n,x_n} w_n, w_n \rangle_{\varepsilon_n} \\
&= \|w_n\|^2_{\varepsilon_n} - \int_\Omega f'_{\varepsilon_n}(x, \sum_{j=1}^k V_{\varepsilon_n,x_{j,n}}) dx \\
&= \|w_n\|^2_{\varepsilon_n} - \int_{\cup_{j=1}^k B^*_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} f'_{\varepsilon_n}(x, \sum_{j=1}^k V_{\varepsilon_n,x_{j,n}}) dx - \int_{\Omega \setminus \cup_{j=1}^k B^*_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} f'_{\varepsilon_n}(x, \sum_{j=1}^k V_{\varepsilon_n,x_{j,n}}) dx \\
&= \|w_n\|^2_{\varepsilon_n} - I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Estimaremos primero I_1, usando la **Proposición 3.7**

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\cup_{j=1}^k B^*_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} f'_{\varepsilon_n}(x, \sum_{j=1}^k W_{\varepsilon_n,x_{j,n}}) w_n^2 dx + O(\varepsilon_n^{N-m+1+2s}) \\
&= \sum_{j=1}^k \int_{B^*_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} f'_{\varepsilon_n}(x, \sum_{j=1}^k W_{\varepsilon_n,x_{j,n}}) w_n^2 dx + O(\varepsilon_n^{N-m+1+2s}) \\
&= \sum_{j=1}^k \int_{B^*_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} f'_{\varepsilon_n}(x, W_{\varepsilon_n,x_{j,n}} + \sum_{i \neq j}^k W_{\varepsilon_n,x_{i,n}}) w_n^2 dx + O(\varepsilon_n^{N-m+1+2s}) \\
&= \varepsilon_n^{N-m+1} \sum_{j=1}^k \int_{B^*_{\varepsilon_n R}(0)} f'_{\varepsilon_n}(x, U(y) + \sum_{i \neq j} U(y + \frac{x_j - x_j}{\varepsilon_n})) w_n^2 dy + O(\varepsilon_n^{N-m+1+2s}) \\
&= o(\varepsilon_n^{N-m+1}).
\end{aligned}$$

Para I_2 es mucho más sencillo, notemos que el dominio de integración es $\Omega \setminus \cup_{j=1}^k B_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})$ para el cual podemos estimar el valor de $V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}$ para todo $j = 1, \ldots, k$, esto viene de que si $y \in \Omega \setminus \cup_{j=1}^k B_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})$, entonces

$$y \in \Omega \wedge \|\tilde{y} - x_{j,n}\| > \varepsilon_n R.$$

De esto último podemos concluir además que

$$\frac{C}{1 + (\frac{\|\tilde{y}-x_{j,n}\|}{\varepsilon_n})^{N-m+1+2s}} \leq \frac{C}{1 + R^{N-m+1+2s}} = o_R(1).$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega \setminus \cup_{j=1}^k B_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} f'_{\varepsilon_n}(x, \sum_{j=1}^k V_{\varepsilon_n, x_{j,n}}) w_n dx \\ &= \int_{\Omega \setminus \cup_{j=1}^k B_{\varepsilon_n R}(x_{j,n})} f'_{\varepsilon_n}(x, \sum_{j=1}^k W_{\varepsilon_n, x_{j,n}}) w_n dx + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}) \\ &= \varepsilon_n^{N-m+1} o_R(1) \end{aligned}$$

donde $o_R(1) \to 0$ cuando $R \to +\infty$. Juntando las dos estimaciones deI_1 e I_2 con la desigualdad anterior llegamos a que

$$o(\varepsilon_n^{N-m+1}) \geq \|w_n\| - o(\varepsilon_n^{N-m+1}) - \varepsilon_n^{N-m+1} o_R(1)$$

que es una contradicción. □

Proposición 3.16 *Para $\varepsilon > 0$ pequeño, existe un único $w_{\varepsilon,\xi} \in E_{\varepsilon,\xi,k}$ tal qué $I'_\varepsilon(\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi}) \in E^\perp_{\varepsilon,\xi,k}$, es decir:*

$$\left\langle I'_\varepsilon(\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi}), \eta \right\rangle = 0, \ \forall \eta \in E_{\varepsilon,\xi,k}, \tag{3.19}$$

donde I_ε está definido en (2.13). *Más aún, tenemos que*

$$\|w_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}} O(\varepsilon^s), \ \forall \xi \in D_{\varepsilon,k}, \tag{3.20}$$

y el mapeo $w : \xi \in D_{\varepsilon,k} \to w_{\varepsilon,\xi}$ es C^1 con respecto a ξ.

Demostración. Definamos

$$\mathcal{J}(\xi, w) = I_\varepsilon(\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j} + w), \ \xi \in D_{\varepsilon,k}, w \in E_{\varepsilon,\xi,k}$$

. Podemos expandir $\mathcal{J}$ cerda de $w=0$, y obtener

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\xi,w) &= \mathcal{J}(\xi,0)+\mathcal{J}'(\xi,0)w+\frac{1}{2}\mathcal{J}''(\xi,0)w^2+\frac{1}{6}\mathcal{J}^{(3)}(\xi,eta)w^3\\ &= I_\varepsilon(\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j})+L_{\varepsilon,\xi}(w)+\frac{1}{2}Q_{\varepsilon,\xi}(w,w)+R_\varepsilon(w)\\ &= I_\varepsilon(\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j})+\langle l_{\varepsilon,\xi},w\rangle+\frac{1}{2}\langle A_{\varepsilon,\xi}w,w\rangle+R_\varepsilon(w)m,\end{aligned}$$

donde $\mathcal{J}'$ y otras derivadas representan la derivada con respecto a la segunda variable y

$$R_\varepsilon(w)=-\int_\Omega\left[F_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}+w)-F_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j})-f_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j})w-\frac{1}{2}f'_\varepsilon(x,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j})w^2\right]dx.$$

Demostrar (3.19) equivale a encontrar un punto crítico de $\mathcal{J}$, además los puntos críticos de $\mathcal{J}$ son aquellos que satisfacen

$$0=l_{\varepsilon,\xi}+A_{\varepsilon,\xi}w+R'_\varepsilon(w).$$

Gracias a la **Proposición 3.15** sabemos que $A_{\varepsilon,\xi}$ es invertible y por lo tanto la igualdad anterior podemos reescribirla como

$$w=A^{-1}_{\varepsilon,\xi}(l_{\varepsilon,\xi}+R'_\varepsilon(w)).$$

Entonces una solución a esta igualdad corresponde a un punto fijo del funcional

$$G(w)=A^{-1}_{\varepsilon,\xi}(l_{\varepsilon,\xi}+R'_\varepsilon(w)),\ \xi\in D_{\varepsilon,\xi},w\in E_{\varepsilon,\xi,k}$$

además de una bola adecuada que asegure la compacidad y las propiedades que buscamos en la solución.

Notemos que si $y\in\Omega\setminus\cup_{j=1}^{k}B^*_\delta(x_j)$ entonces

$$\frac{1}{1+\left(\frac{|\tilde{y}-x_j|}{\varepsilon}\right)^{N-m+1+2s}}\leq\frac{\varepsilon^{N-m+1+2s}}{1+\delta^{N-m+1+2s}}=\varepsilon^{N-m+1+2s}C(\delta) \tag{3.21}$$

si ε es suficientemente pequeño. Además es fácil verificar, de la misma definición de R_ε que

$$|R_\varepsilon(w)|\leq C\int_\Omega|w|^{\bar{p}},$$

donde $\bar{p}=\text{mín}(3,p+1)$. Luego para cualquier $w\in E_{\varepsilon,\xi,k}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\cup_{j=1}^{k}B^*_\delta(x_j)}|w|^{\bar{p}} &= \int_{\Omega\setminus\cup_{j=1}^{k}B^*_\delta(x_j)}|w|^{\bar{p}-2}|w|^2\\ &\leq C(\delta)\varepsilon^{(N-m+1+2s)(\bar{p}-2)}\int_{\Omega\setminus\cup_{j=1}^{k}B^*_\delta(x_j)}|w|^2\\ &\leq C(\delta)\varepsilon^{(N-m+1+2s)(\bar{p}-2)}\|w\|_\varepsilon\end{aligned} \tag{3.22}$$

De igual forma

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)} |w|^{\bar{p}-1}|\eta| &= \int_{\Omega\setminus\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)} |w|^{\bar{p}-2}|w||\eta| \\ &\leq C(\delta)\varepsilon^{(N-m+1+2s)(\bar{p}-2)}\int_{\Omega\setminus\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)} |w||\eta| \\ &\leq C(\delta)\varepsilon^{(N-m+1+2s)(\bar{p}-2)}\|w\|_\varepsilon\|\eta\|_\varepsilon\end{aligned} \tag{3.23}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)} |w|^{\bar{p}-2}|\eta_1||\eta_2| &\leq C(\delta)\varepsilon^{(N-m+1+2s)(\bar{p}-2)}\int_{\Omega\setminus\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)} |\eta_1||\eta_2| \\ &\leq C(\delta)\varepsilon^{(N-m+1+2s)(\bar{p}-2)}\|\eta_1\|_\varepsilon\|\eta_2\|_\varepsilon\end{aligned}. \tag{3.24}$$

Dado que $|w_\varepsilon| \geq c_0 > 0$ y $|y'| \geq c_0 > 0$ en $\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)$, es fácil verificar que

$$\int_{\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)} |w|^{\bar{p}} = \varepsilon^{(N-m+1)/2}O(\varepsilon^{-\bar{p}(N-m+1)/2}\|w\|_\varepsilon^{\bar{p}}),$$

$$\int_{\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)} |w|^{\bar{p}-1}\eta = \varepsilon^{(N-m+1)/2}O(\varepsilon^{-(\bar{p}-1)(N-m+1)/2}\|w\|_\varepsilon^{\bar{p}-1})\|\eta\|_\varepsilon$$

y

$$\int_{\cup_{j=1}^k B_\delta^*(x_j)} |w|^{\bar{p}-2}\eta_1\eta_2 = O(\varepsilon^{-(\bar{p}-2)(N-m+1)/2}\|w\|_\varepsilon^{\bar{p}-2})\|\eta_1\|_\varepsilon\|\eta\|_\varepsilon.$$

Entonces obtenemos que

$$R_\varepsilon(w) = e^{N-m+1}O(e^{\bar{p}(N-m+1)/2}\|w\|_\varepsilon^{\bar{p}}), \tag{3.25}$$

$$\langle R_\varepsilon'(w), \eta\rangle_\varepsilon = e^{(N-m+1)/2}O(e^{-(N-m+1)(\bar{p}-1)/2}\|w\|_\varepsilon^{\bar{p}-1})\|\eta\|_\varepsilon, \tag{3.26}$$

$$R_\varepsilon''(w)(\eta_1,\eta_2) = O(\varepsilon^{-(N-m+1)(\bar{p}-2)/2}\|w\|_\varepsilon^{\bar{p}-2})\|\eta_1\|_\varepsilon\|\eta_2\|_\varepsilon. \tag{3.27}$$

Para $w_1, w_2 \in E_{\varepsilon,\xi,k}$ tales que $\|w_1\|_\varepsilon, \|w_2\|_\varepsilon \leq e^{\frac{N-m+1}{2}+1}$, entonces usando (3.27) obtenemos

$$\begin{aligned}\|G(w_1)-G(w_2)\|_\varepsilon &= \|A_{\varepsilon,\xi}^{-1}\left(R_\varepsilon'(w_1)-R_\varepsilon'(w_2)\right)\|_\varepsilon \\ &\leq C\left\|\int_0^1 R_\varepsilon''(tw_1+(1-t)w_2)(w_1-w_2)dt\right\|_\varepsilon \\ &\leq C\max_{0\leq t\leq 1}\|R_\varepsilon''(tw_1+(1-t)w_2)\|_\varepsilon\|w_1-w_2\|_\varepsilon \\ &\leq C\varepsilon^{-(N-m+1)(\bar{p}-2)/2}\max_{0\leq t\leq 1}\|tw_1+(1-t)w_2\|_\varepsilon^{\bar{p}-2}\|w_1-w_2\|_\varepsilon \\ &\leq C\varepsilon^{-(N-m+1)(\bar{p}-2)/2}\varepsilon^{((N-m+1)/2+1)(\bar{p}-2)}\|w_1-w_2\|_\varepsilon \\ &\leq C\varepsilon^{\bar{p}-2}\|w_1-w_2\|_\varepsilon \\ &\leq C\varepsilon^{\min(p-1,1)}\|w_1-w_2\|_\varepsilon.\end{aligned}$$

Ahora como $\text{mín}(p-1,1)>0$ pues $p>1$, podemos encontrar $\gamma>0$ suficientemente pequeño tal que

$$\|G(w_1)-G(w_2)\|_\varepsilon \leq Ce^{\gamma}\|w_1-w_2\|_\varepsilon \tag{3.28}$$

sea una contracción. Ahora, para cualquier $w\in E_{\varepsilon,\xi,k}$ con $\|w\|_\varepsilon \leq \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|G(w)\|_\varepsilon &\leq C\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + C\|R'_\varepsilon(w)\|_\varepsilon \\
&\leq C\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}\varepsilon^{\frac{-(N-m+1)}{2}(\bar{p}-1)}\|w\|_\varepsilon^{\bar{p}-1} \\
&\leq C\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}\varepsilon^{\frac{-(N-m+1)}{2}(\bar{p}-1)}\varepsilon^{(\frac{N-m+1}{2}+1)(\bar{p}-1)} \\
&\leq C\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+\bar{p}-1}
\end{aligned}$$

Con respecto a $\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon$, recordemos que $\xi\in D_{\varepsilon,k}$ luego cumple que

$$1-\varphi(\xi_j)\leq \varepsilon^{1-\tau}\ \forall j=1,\ldots,k$$

y además

$$V_{\varepsilon,\xi_i}(\xi_j)\leq \varepsilon^{1-\tau},\ \forall j\neq i.$$

Entonces usando el **Lema 3.13** se tiene que

$$\begin{aligned}
\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon &\leq C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{k}(1-\varphi^{\frac{1}{p}}(\xi_j))^q + \sum_{j\neq i}U^q\left(\frac{|\xi_i-\xi_j|}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^s\right) \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{k}(1-\varphi^{\frac{1}{p}}(\xi_j))^q + \sum_{j\neq i}V_{\varepsilon,\xi_i}(\xi_j)+\varepsilon^s\right) \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}\varepsilon^{(1-\tau)q},
\end{aligned}$$

con $q=\text{mín}(1,p-1)$, lo que nos lleva a concluir que

$$\begin{aligned}
\|G(w)\|_\varepsilon &\leq C\|l_{\varepsilon,\xi}\| + C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+\bar{p}-1} \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}\left(\varepsilon^{(1-\tau)q}+\varepsilon^{\bar{p}-1}\right) \\
&= C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}}\left(\varepsilon^{(1-\tau)q}+\varepsilon^{q+1}\right),
\end{aligned}$$

finalmente notando que $(1-\tau)q\leq 1$ y $q+1>1$ se tiene que

$$\|G(w)\|_\varepsilon \leq C\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+1}, \tag{3.29}$$

para ε suficientemente pequeño.

Juntando (3.28) y (3.29) vemos que G es una contracción desde $E_{\varepsilon,\xi,k}\cap B(0,\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+1})$ en él mismo. Con un argumento de punto fijo se obtiene que existe $w_{\varepsilon,\xi}\in E_{\varepsilon,\xi,k}\cap B(0,\varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+1})$, tal que:

$$G(w_{\varepsilon,\xi})=w_{\varepsilon,\xi}.$$

Notemos que en este caso $\|w_{\varepsilon,\xi}\|_{\varepsilon} \leq \varepsilon^{\frac{N-m+1}{2}+1}$.

Nos queda demostrar que $\xi \to w_{\varepsilon,\xi}$ es C^1. Para esto definamos

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}(\xi, w) = w - G(w),\ w \in E_{\varepsilon,\xi,k}.$$

Por lo probado antes, sabemos que $\mathcal{H}_{\varepsilon}(\xi, w) = 0$. Y por otro lado

$$\partial_w \mathcal{H}(\xi, w_{\varepsilon,\xi})(\eta) = \eta - A_{\varepsilon,\xi}^{-1}(R_{\varepsilon}''(w_{\varepsilon,\xi})\eta).$$

Usando el **Lema 3.15 y 3.27** podemos concluir que, para ε suficientemente pequeño, $\partial_w \mathcal{H}_{\varepsilon}$ es invertible como pequeña perturbación de la identidad. Entonces el resultado viene dado por el teorema de la función implícita. $\square$

Capítulo 4

Conjetura de Lazer-McKenna caso no-local bajo condición de simetría parcial en el dominio

4.1. Reducción variacional

Recordemos que estamos buscando una solución de la forma

$$u_\xi = \sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi}.$$

Definamos entonces el funcional $J_\varepsilon : \Lambda_{\varepsilon,k} \to \mathbb{R}$ como

$$J_\varepsilon(\xi) = I_\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi} \right), \ \textit{para todo } \xi \in \Lambda_{\varepsilon,k},$$

donde $w_{\varepsilon,\xi}$ viene dado por (3.16).

Para simplificar parte del trabajo a realizar, primero algunos resultados preliminares. Primero un resultado que nos permite caracterizar los puntos críticos de J_ε y I_ε. Luego un resultado que nos permite descomponer $I_\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j} \right)$ en terminos que harán más sencillo el cálculo.

Lema 4.1 *Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, entonces ξ^* es un punto crítico de J_ε si y solo si u_{ξ^*} es un punto crítico de I_ε.*

Ver [1] para ver una demostración del lema.

Proposición 4.2 *Para cualquier entero $k \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$\begin{aligned} I_\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j}\right) &= C\varepsilon^{N-m+1} A \sum_{j=1}^{k} \xi_{j1}^{m-1} \\ &+ C\varepsilon^{N-m+1} \textstyle\sum_{i\neq j} \xi_{i1}^{m-1} \left(B + (\varepsilon^s + 1)\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U + o(1)\right) W_{\varepsilon,\xi_j}(\xi_i) \ , \\ &+ C\varepsilon^{N-m+1} \sum_{i\neq j} \xi_{i1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U^2 + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde c' es una constante, $q = \text{mín}(p-1, 1)$,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} \bar{f}(U)U - \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} F(U) > 0$$

y

$$\mathcal{B} = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} \left(|U-1|^p - 1 + pU\right) > 0.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} I_\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j}\right) &= \int_\Omega \varepsilon^{2s}\left((-\Delta)^{\frac{s}{2}}\sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j}\right)^2 + p|w_\varepsilon|^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j}\right)^2 - \int_\Omega F_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j})dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \left\|V_{\varepsilon,\xi_j}\right\|_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k} \langle V_{\varepsilon,\xi_j}, V_{\varepsilon,\xi_i}\rangle_\varepsilon - \int_\Omega F_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j})dx \\ &= \sum_{j=1}^{k} I_\varepsilon(V_{\varepsilon,\xi_j}) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k} \langle V_{\varepsilon,\xi_j}, V_{\varepsilon,\xi_i}\rangle_\varepsilon - \int_\Omega\left(F_\varepsilon(x, \sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j}) - \sum_{j=1}^{k} F_\varepsilon(x, V_{\varepsilon,\xi_j})\right) \end{aligned}$$

Calcularemos primero $I_\varepsilon(V_{\varepsilon,\xi_j})$

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon(V_{\varepsilon,\xi_j}) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon^{2s}\left((-\Delta)^{\frac{s}{2}}V_{\varepsilon,\xi_j}\right)^2 + p|w_\varepsilon|^{p-1}V_{\varepsilon,\xi_j}^2 - \int_\Omega F_\varepsilon(x,V_{\varepsilon,\xi_j}) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j}) + O\left((\varepsilon^s+|\eta-1|)W_{\varepsilon,\xi_j}\right)\right]V_{\varepsilon,\xi_j} \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega p\left(|w_\varepsilon|^{p-1}-1\right)V_{\varepsilon,\xi_j}^2 - \int_\Omega F_\varepsilon(x,V_\varepsilon,\xi_j) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})V_{\varepsilon,\xi_j} - \int_\Omega F_\varepsilon(x,V_{\varepsilon,\xi_j}) \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega p\left(|w_\varepsilon|^{p-1}-1\right)W_{\varepsilon,\xi_j}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega O\left((\varepsilon^s+|\eta-1|)W_{\varepsilon,\xi_j}\right)W_{\varepsilon,\xi_j} + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})V_{\varepsilon,\xi_j} - \int_\Omega F_\varepsilon(x,V_{\varepsilon,\xi_j}) + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}) \\
&= \frac{1}{2}I_1 - I_2 + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}),
\end{aligned}
$$

donde se usó que Ω es acotado, que $(|w_\varepsilon|^{p-1}-1)$ y $e^s+|\eta-1|$ también lo son para ε suficientemente pequeño.

Para calcular I_1 usando (3.7) podemos obtener que

$$
I_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})W_{\varepsilon,\xi_j} + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}).
$$

Luego, usando el cambio de variable $x' = r\hat{x'}$ obtenemos y después $z_1 = \frac{r-\xi_j}{\varepsilon}$ y $z'' = \frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_j})W_{\varepsilon,\xi_j} &= \int_\Omega \bar{f}\left(U\left(\frac{\tilde{x}-\xi_j}{\varepsilon}\right)\right)U\left(\frac{\tilde{x}-\xi_j}{\varepsilon}\right)dx'dx'' \\
&= \int_\Omega \bar{f}\left(U\left(\frac{|x|-\xi_{j1}}{\varepsilon},\frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}\right)\right)U\left(\frac{|x|-\xi_{j1}}{\varepsilon},\frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}\right)dx'dx'' \\
&= \int_\Omega \bar{f}\left(U\left(\frac{r-\xi_{j1}}{\varepsilon},\frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}\right)\right)U\left(\frac{r-\xi_{j1}}{\varepsilon},\frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}\right)r^{m-1}drd\hat{x'}dx'' \\
&= \varepsilon^{N-m+1}V_{m-1}\int_{D_{\varepsilon,\xi_j}}(\varepsilon z_1+\xi_{j1})^{m-1}\bar{f}(U)Udz \\
&= \varepsilon^{N-m+1}V_{m-1}\xi_{j1}^{m-1}\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}}\bar{f}(U)Udz + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}),
\end{aligned}
$$

donde V_{m-1} corresponde al volumen de la bola en m-dimensional.

Para estimar I_2 notemos primero que por la definición de F_ε y F, aprovechando (2.4) obtenemos y el decaimiento polinomial de W_{ε,ξ_j}

$$\int_\Omega F_\varepsilon(x, W_{\varepsilon,\xi_j}) = \int_\Omega F(W_{\varepsilon,\xi_j}) + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}).$$

Entonces usando los mismos cambios de variable que antes

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(W_{\varepsilon,\xi_j}) &= \int_\Omega F\left(U\left(\frac{\tilde{x}-\xi_j}{\varepsilon}\right)\right) \\
&= \int_\Omega F\left(U\left(\frac{|x'|-\xi_{j1}}{\varepsilon}, \frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}\right)\right) dx'dx'' \\
&= \int_\Omega F\left(U\left(\frac{r-\xi_{j1}}{\varepsilon}, \frac{x''-\xi_j''}{\varepsilon}\right)\right) r^{m-1} d\hat{x}' dx'' \\
&= \varepsilon^{N-m+1} V_{m-1} \int_{D_{\varepsilon,\xi_j}} (\varepsilon z_1 + \xi_{j1})^{m-1} F(U) dz \\
&= \varepsilon^{N-m+1} V_{m-1} \xi_{j1}^{m-1} \int_{R^{N-m+1}} F(U) + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}).
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(V_{\varepsilon,\xi_j}) &= \frac{1}{2} I_1 - I_2 + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{N-m+1} V_{m-1}\xi_{j1} m-1 \left(\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} \bar{f}(U)U - F(U)\right) + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}) \\
&= \varepsilon^{N-m+1} V_{m-1}\xi_{j1}^{m-1} A + O(\varepsilon^{N-m+1+2s})
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ahora veamos como estimar $\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k} \langle V_{\varepsilon,\xi_j}, V_{\varepsilon,\xi_i}\rangle_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k} \langle V_{\varepsilon,\xi_i}, V_{\varepsilon,\xi_j}\rangle_\varepsilon \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k} \int_\Omega \varepsilon^{2s}(-\Delta)^{\frac{s}{2}} V_{\varepsilon,\xi_i}(-\Delta)^{\frac{s}{2}} V_{\varepsilon,\xi_j} + p|w_\varepsilon|^{p-1} V_{\varepsilon,\xi_i} V_{\varepsilon,\xi_j} dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k} \int_\Omega \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_i}) V_{\varepsilon,\xi_j} + p(|w_\varepsilon|^{p-1}-1) V_{\varepsilon,\xi_i} V_{\varepsilon,\xi_j} + O\left((\varepsilon^s + |\eta-1|) W_{\varepsilon,\xi_i}\right) V_{\varepsilon,\xi_j} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k} \int_\Omega \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_i}) W_{\varepsilon,\xi_j} + p(|w_\varepsilon|^{p-1}-1) V_{\varepsilon,\xi_i} V_{\varepsilon,\xi_j} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k} \int_\Omega O\left((\varepsilon^s + |\eta-1|) W_{\varepsilon,\xi_i}\right) V_{\varepsilon,\xi_j} + O(\varepsilon^{N-m+1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k}\langle V_{\varepsilon,\xi_i},V_{\varepsilon,\xi_j}\rangle_\varepsilon\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k}\int_\Omega \bar f(W_{\varepsilon,\xi_i})W_{\varepsilon,\xi_j}+p(|w_\varepsilon|^{p-1}-1)(W_{\varepsilon,\xi_i}^2+W_{\varepsilon,\xi_j}^2)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k}\int_\Omega O\left((\varepsilon^s+|\eta-1|)W_{\varepsilon,\xi_i}\right)W_{\varepsilon,\xi_j}+O(\varepsilon^{N-m+1+2s})\\
&\leq \frac{V_{m-1}\varepsilon^{N-m+1}}{2}\sum_{i\neq j}^{k}\int_{D_{\varepsilon,\xi_i}}\bar f\left(U(z)\right)U\left(z+\frac{\xi_i-\xi_j}{\varepsilon}\right)(\varepsilon z+\xi_{i1})^{m-1}+O(\varepsilon^{N-m+1+2s})\\
&+\frac{C}{2}\sum_{i\neq j}^{k}\int_\Omega\left(\varphi_1^{\frac{1}{p}}-1\right)\left(W_{\varepsilon,\xi_i}^2+W_{\varepsilon,\xi_j}^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{k}\int_\Omega O((\varepsilon^s+|\eta-1|)W_{\varepsilon,\xi_i})W_{\varepsilon,\xi_j}\quad.\\
&\leq \frac{\varepsilon^{N-m+1}V_{m-1}}{2}\sum_{i\neq j}^{k}\xi_{i1}^{m-1}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}}\bar f(U)+o(1)\right)U\left(\frac{\xi_i-\xi_j}{\varepsilon}\right)\\
&+\frac{\varepsilon^{N-m+1}V_{m-1}}{2}\sum_{i\neq j}U^2\left(\frac{\xi_i-\xi_j}{\varepsilon}\right)\left(\xi_{i1}^{m-1}(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_i)-1)+\xi_{j1}^{m-1}(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1)\right)\\
&+\frac{V_{m-1}\varepsilon^{N-m+1}}{2}\sum_{i\neq j}^{k}(\varepsilon^s+1)\xi_{i1}^{m-1}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}}U+o(1)\right)U\left(\frac{\xi_i-\xi_j}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon^{N-m+1+2s})\\
&=C\varepsilon^{N-m+1}\sum_{i\neq j}\xi_{i1}^{m-1}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}}\bar f(U)+(\varepsilon^s+1)U+o(1)\right)W_{\varepsilon,\xi_j}(\xi_i)\\
&+C\varepsilon^{N-m+1}\sum_{i\neq j}\left(U^2\left(\frac{\xi_i-\xi_j}{\varepsilon}\right)\left(\xi_{i1}^{m-1}(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_i)-1)+\xi_{j1}^{m-1}(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j)-1)\right)\right)+O(\varepsilon^{N-m+1+2s})
\end{aligned}
$$

Luego, nos queda estimar $\int_\Omega\left(F_\varepsilon(y,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j})-\sum_{j=1}^{k}F_\varepsilon(y,V_{\varepsilon,\xi_j})\right)$, para esto mediante la definición de F_ε

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega F_\varepsilon\left(y,\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}\right)-\sum_{j=1}^{k}F_\varepsilon\left(y,V_{\varepsilon,\xi_j}\right)&=\int_\Omega\frac{1}{p+1}\left|\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}+w_\varepsilon\right|\left(\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}+w_\varepsilon\right)+\frac{1}{p+1}|w_\varepsilon|^{p-1}\\
&-\int_\Omega|w_\varepsilon|^p\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}+\frac{p}{2}\int_\Omega|w_\varepsilon|^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}\right)^2\\
&-\int_\Omega\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p+1}\left|V_{\varepsilon,\xi_j}+w_\varepsilon\right|^p\left(V_{\varepsilon,\xi_j}+w_\varepsilon\right)-\frac{1}{p+1}\int_\Omega|w_\varepsilon|^{p-1}\\
&+\int_\Omega|w_\varepsilon|^p\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}-\frac{p}{2}\int_\Omega|w_\varepsilon|^{p-1}\sum_{j=1}^{k}V_{\varepsilon,\xi_j}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega F_\varepsilon\left(y,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}\right)-\sum_{j=1}^k F_\varepsilon\left(y,V_{\varepsilon,\xi_j}\right) &= \frac{1}{p+1}\int_\Omega\left|\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}+w_\varepsilon\right|^p\left(\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}+w_\varepsilon\right)\\
&-\frac{1}{p+1}\int_\Omega\sum_{j=1}^k\left|V_{\varepsilon,x\text{ß}_j}+w_\varepsilon\right|^p\left(V_{\varepsilon,\xi_j}+w_\varepsilon\right)\\
&+\frac{p}{2}\int_\Omega|w_\varepsilon|^{p-1}\left(\left|\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}\right|^2-\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}^2\right)\\
&\leq C\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}\right)^{p+1}-\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}^{p+1}+\left(\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}\right)^2-\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}^2\\
&\leq C\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j}\right)^{p+1}-\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j}^{p+1}+\left(\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j}\right)^2-\sum_{j=1}^k W_{\varepsilon,\xi_j}^2\\
&+O(\varepsilon^{\frac{N-m+1+2s}{2}})-\sum_{i\neq j}\int_\Omega f_\varepsilon(W_{\varepsilon,\xi_i})W_{\varepsilon,\xi_j}+\sum_{i\neq j}\int_\Omega f_\varepsilon\left(W_{\varepsilon,\xi_i}\right)W_{\varepsilon,\xi_j}
\end{aligned}
$$

Usando (1.17) en tanto el término de orden $p+1$ como 2 obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega F_\varepsilon\left(y,\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}\right)-\sum_{j=1}^k F_\varepsilon\left(y,V_{\varepsilon,\xi_j}\right)\\
&\leq C\sum_{i\neq j}\int_\Omega W_{\varepsilon,\xi_i}^p\operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i},W_{\varepsilon,\xi_j})+W_{\varepsilon,\xi_i}\operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i},W_{\varepsilon,\xi_j})-W_{\varepsilon,\xi_i}^pW_{\varepsilon,\xi_j}-W_{\varepsilon,\xi_i}W_{\varepsilon,\xi_j}\\
&+\sum_{i\neq j}\int_\Omega\bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_i})W_{\varepsilon,\xi_j}+O(\varepsilon^{\frac{N-m+1+2s}{2}})\\
&\leq C\sum_{i\neq j}\int_{B_\varepsilon(\xi_i)\cup B_\varepsilon(\xi_j)}W_{\varepsilon,\xi_i}^p\operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i},W_{\varepsilon,\xi_j})+W_{\varepsilon,\xi_i}\operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i},W_{\varepsilon,\xi_j})-W_{\varepsilon,\xi_i}^pW_{\varepsilon,\xi_j}-W_{\varepsilon,\xi_i}W_{\varepsilon,\xi_j}\\
&+C\sum_{i\neq j}\int_{\Omega\setminus(B_\varepsilon(\xi_i)\cup B_\varepsilon(\xi_j))}W_{\varepsilon,\xi_i}^p\operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i},W_{\varepsilon,\xi_j})+W_{\varepsilon,\xi_i}\operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i},W_{\varepsilon,\xi_j})-W_{\varepsilon,\xi_i}^pW_{\varepsilon,\xi_j}-W_{\varepsilon,\xi_i}W_{\varepsilon,\xi_j}\\
&+\sum_{i\neq j}\int_\Omega\bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_i})W_{\varepsilon,\xi_j}+O(\varepsilon^{\frac{N-m+1+2s}{2}})
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Dado el comportamiento polinomial de las funciones W_{ε,ξ_i} la integral de dominio $\Omega\setminus(B_\varepsilon(\xi_i)\cup B_\varepsilon(\xi_j))$ se puede acotar, para ε suficientemente pequeño, como

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j}\int_{\Omega\setminus(B_\varepsilon(\xi_i)\cup B_\varepsilon(\xi_j))}\left(W_{\varepsilon,\xi_i}^p\operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i},W_{\varepsilon,\xi_j})+W_{\varepsilon,\xi_i}\operatorname{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i},W_{\varepsilon,\xi_j})-W_{\varepsilon,\xi_i}^pW_{\varepsilon,\xi_j}-W_{\varepsilon,\xi_i}W_{\varepsilon,\xi_j}\right)\\
&\leq C\varepsilon^{N-m+1+2s}.
\end{aligned}
$$

En el caso de $B_\varepsilon(\xi_i) \cup B_\varepsilon(\xi_j)$ notemos que para ε suficientemente chico las bolas serán disjuntas, por lo que podemos separar la integral en una suma, además por la definición misma de las funciones W_{ε,ξ_i} estas concentran en los puntos ξ_i por lo que se tiene que

$$\text{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i}, W_{\varepsilon,\xi_j}) = W_{\varepsilon,\xi_j}, \quad en\ B_\varepsilon(\xi_i),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
&W^p_{\varepsilon,\xi_i} \text{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i}, W_{\varepsilon,\xi_j}) + W_{\varepsilon,\xi_i} \text{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i}, W_{\varepsilon,\xi_j}) - W^p_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} - W_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} \\
&= W^p_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} + W_{\varepsilon,\xi_i} W_{e,\xi_j} - W^p_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} - W_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Igual que antes,

$$\text{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i}, W_{\varepsilon,\xi_j}) = W_{\varepsilon,\xi_i}, \quad en\ B_\varepsilon(\xi_j),$$

en cuyo caso se tiene que en la bola $B_\varepsilon(\xi_j)$

$$\begin{aligned}
&W^p_{\varepsilon,\xi_i} \text{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i}, W_{\varepsilon,\xi_j}) + W_{\varepsilon,\xi_i} \text{ínf}(W_{\varepsilon,\xi_i}, W_{\varepsilon,\xi_j}) - W^p_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} - W^2_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} \\
&= W^{p+1}_{\varepsilon,\xi_i} + W^2_{\varepsilon,\xi_i} - W^p_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} - W_{\varepsilon,\xi_i} W_{\varepsilon,\xi_j} \\
&= W^p_{\varepsilon,\xi_i} \left(W_{\varepsilon,\xi_i} - W_{\varepsilon,\xi_j}\right) + W_{\varepsilon,\xi_i} \left(W_{\varepsilon,\xi_i} - W_{\varepsilon,\xi_j}\right) \\
&= \left(W^p_{\varepsilon,\xi_i} + W_{\varepsilon,\xi_i}\right) \left(W_{\varepsilon,\xi_i} - W_{\varepsilon,\xi_j}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente Concluimos juntando lo anterior con (4.3) que

$$\int_\Omega F_\varepsilon\left(y, \sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}\right) - \sum_{j=1}^k F_\varepsilon\left(y, V_{\varepsilon,\xi_j}\right) \le C \sum_{i\neq j} \int_\Omega \bar{f}(W_{\varepsilon,\xi_i}) W_{\varepsilon,\xi_j} + \varepsilon^{N-m+1} O(\varepsilon^{2s})$$

El término $\displaystyle\int_\Omega \bar{f}\left(W_{\varepsilon,\xi_i}\right) W_{\varepsilon,\xi_j}$ ya fue acotado y entonces nos queda que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F_\varepsilon\left(y, \sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j}\right) - \sum_{j=1}^k F_\varepsilon\left(y, V_{\varepsilon,\xi_j}\right) &\le C\varepsilon^{N-m+1} \sum_{i\neq j} \xi_{i1}^{m-1} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} \bar{f}(U) dz + o(1)\right) W_{\varepsilon,\xi_j}(\xi_i) \\
&\quad + \varepsilon^{N-m+1} O(\varepsilon^{2s}).
\end{aligned}$$

Para termina, luego de juntar todas las estimaciones obtenemos el resultado. $\square$

Con todas las herramientas ya estudiadas podemos demostrar el **Teorema 2.5**.

DEMOSTRACIÓN. Primero probaremos que el problema

$$\max_{\xi \in D_{\varepsilon,k}} J_\varepsilon(\xi), \tag{4.4}$$

con $J_\varepsilon(\xi) = I_\varepsilon(\sum_{j=1}^k V_{\varepsilon,\xi_j} + w_{\varepsilon,\xi})$ y $w_{\varepsilon,\xi}$ la función obtenida por la **Proposicion 3.16**, admite una solución $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_k^*)$ en el interior de $D_{\varepsilon,k}$. Notemos en primer lugar que, por continuidad de J_ε existe un maximizador $\xi^* \in \overline{D}_{\varepsilon,k}$. Gracias a la **Proposición 4.1** y los **Lemas 3.13 y 3.14**

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(\xi) &= I_\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j}\right) + O\left(\|l_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon \|w_{\varepsilon,\xi}\|_\varepsilon + \|w_{\varepsilon,\xi}\|^2 + R_\varepsilon(w_{\varepsilon,\xi})\right) \\
&= I_\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{k} V_{\varepsilon,\xi_j}\right) + \varepsilon^{N-m+1} O(\varepsilon^{2s}) \\
&= C\varepsilon^{N-m+1} A \sum_{j=1}^{k} \xi_{j1}^{m-1} + C\varepsilon^{N-m+1} \sum_{i\neq j} \xi_{i1}^{m-1}\left(B + (\varepsilon^s + 1)\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U + o(1)\right) W_{\varepsilon,\xi_j}(\xi_i) \\
&+ C\varepsilon^{N-m+1} \sum_{i\neq j} U^2\left(\frac{\xi_i - \xi_j}{\varepsilon}\right)\left(\xi_{i1}^{m-1}(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_i) - 1) + \xi_{j1}^{m-1}(\varphi_1^{\frac{1}{p}}(\xi_j) - 1)\right) + \varepsilon^{N-m+1} O(\varepsilon^{2s}).
\end{aligned}$$

Sea $\bar{\xi} \in D_{\varepsilon,k}$ tal que

$$d(\bar{\xi}, S) = e^{\beta s},\ |\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_j| \geq \varepsilon^{\beta s},$$

donde $\beta = \frac{q}{2k}$. Usando la **Proposición 3.16** y **Proposición 4.1** llegamos a que

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(\bar{\xi}) = C\varepsilon^{N-m+1} A \sum_{j=1}^{k} \bar{\xi}_{j1}^{m-1} + C\varepsilon^{N-m+1} \sum_{i\neq j} \bar{\xi}_{i1}^{m-1}\varepsilon^\tau \left(B + (\varepsilon^s + 1)\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U + o(1)\right) \\
+ C\varepsilon^{N-m+1} \sum_{i\neq j} \varepsilon^{2\tau}\left(\bar{\xi}_{i1}^{m-1}\varepsilon^\tau + \bar{\xi}_{j1}^{m-1}\varepsilon^\tau\right) + \varepsilon^{N-m+1} O(\varepsilon^{2s}).
\end{aligned}$$

Ahora, podemos pedir además que $\xi_{j1} \leq 1$ para todo $j = 1, \ldots, k$ si ε es suficientemente pequeño. De donde obtenemos que

$$J_\varepsilon(\bar{\xi}) = C\varepsilon^{N-m+1} A + C\varepsilon^{N-m+1+\tau}\left(B + \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U + o(1)\right) + C\varepsilon^{N-m+1+3\tau} + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}). \tag{4.5}$$

Finalmente como τ es suficientemente pequeño, se concluye que

$$J_\varepsilon(\bar{\xi}) = C\varepsilon^{N-m+1} A + O(\varepsilon^{N-m+1+2s}). \tag{4.6}$$

Como consecuencia, $\bar{\xi}$ es un punto interior de $D_{\varepsilon,k}$. Ahora, gracias al **Lema** (4.1) podemos concluir que $w_{\varepsilon,\bar{\xi}}$ es punto crítico de I_ε y por lo tanto solución de (2.23). Esto concluye la demostración del **Teorema 2.5**. □

Conclusión

Conclusiones

Los problemas de tipo Ambrosetti-Prodi han supuesto una gran cantidad de estudios sobre la existencia y multiplicidad de soluciones,

$$\begin{cases} (-\Delta)u = g(u) - s\varphi_1 + h(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

La conjetura de Lazer-McKenna, problema que ha sido estudiado desde 1981, y supuso casi nulos avances, salvo en el caso radial y el unidimensional, sino hasta principios de siglo XX con la identificación del caso N-dimensional y subcrítico hecha por Dancer y Yan (2006). Se han visto muchos avances en este tema, desde los trabajos de Dancer y Yan en [13, 14, 11] sobre la conjetura para el caso de un potencial superlineal tanto en caso subcrítico, crítico y supercrítico. O el trabajo de del Pino-Muñoz, [17], sobre la conjetura en el caso 2-dimensional para una no-linealidad exponencial.

El objetivo principal de este trabajo fue resuelto a cabalidad, **la conjetura de Lazer-McKenna es cierta** para una función g superlineal con exponente super-crítico y bajo condiciones de simetría parcial en el dominio. Esto es que dado cierto número entero k cualquiera, entonces existe ε_0 tal que para cualquier $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ el problema (2.2) tiene una solución. Más aún, estas soluciones pueden ser encontradas de forma constructiva, pues resolver el problema de las proyecciones corresponde a un problema lineal, dicha solución además muestra concentración a través de una esfera m-1 dimensional.

Parece adecuado mencionar las principales herramientas que dieron lugar a los resultados expuestos a lo largo de esta tesis. Más allá de las herramientas básicas del análisis no local, fueron el método de Lyapunov-Schmidt y las tantas caracterizaciones del laplaciano fraccionario. Así mismo es necesario mencionar la importancia que tiene el hecho de que la primera función propia del laplaciano fraccionario posea una representante en el espacio de funciones simétricas bajo (Ω) pues la construcción de soluciones se hizo con respecto a una solución fundamental que se comporta asintóticamente muy similar a φ_1. Sobre esto mismo, el resultado que nos permitió concluir fue el de [6] lo cual es sumamente destacable, pues el resultado no fue publicado hasta el 2018.

Apéndice A

Apéndice

El objetivo principal de esta sección es probar el **Teorema 3.2**. Seguiremos de cerca los argumentos de [20] tomando en consideración la perdida de homogeneidad en este caso.

Primero, enunciaremos una proposición que será de utilidad en la demostración.

Proposición A.1 *Sea* $0 < \lambda < N - m + 1, q \leq p < l < \infty$ *tales que* $\frac{1}{l} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N-m+1}$. *Para* $h \in L^p(\mathbb{R}^{N-m+1})$*, definimos*

$$J_\lambda(h)(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} \frac{h(y)}{|x-y|^\lambda} dy.$$

1. J_λ *está bien definido en el sentido en que la integral es absolutamente convergente para casi todo* $x \in \mathbb{R}^{N-m+1}$
2. *Si* $p > 1$*, entonces* $\|J_\lambda(h)\|_l \leq c_{p,q}\|h\|_p$.
3. *Si* $p = 1$*, entonces* $|\{x \in \mathbb{R}^{N-m+1} : J_\lambda(h)(x) > \sigma\}| \leq \left(\frac{A\|h\|_1}{\sigma}\right)^l$.

Para una demostración de este resultado ver [30].

Demostración del Teorema 3.2

La demostración se hará por pasos, el primer paso analizará la existencia de la solución radial fundamental (U_s) mediante un argumento de tipo Paso a la Montaña probando primero la existencia de soluciones radiales y finalmente mostraremos la cota (3.1) que nos permite entender el comportamiento asintótico de la solución fundamental. El segundo paso probará que U_S es no-degenerada para el operador L en otras palabras una solución con índice de morse distinto de cero. El tercer paso demostrará estimaciones necesarias para poder concluir el paso cuatro que mediante un argumento de continuación similar al usado en [20] concluirá que el resultado es cierto para cualquier $s \in (0, 1)$.

Primer paso: existencia de solución fundamental radial

Tomando en consideración la estructura de la ecuación probaremos la existencia de soluciones radiales. Es claro que si U es solución del problema límite (2.16), entonces resuelve

$$\begin{cases} (-\Delta)^s U + pU = |U-1|^p + p(U-1) + p - 1, \ U > 0 \ \mathit{en} \ \mathbb{R}^{N-m+1} \\ U(0) = \max_{y \in \mathbb{R}^{N-m+1}} U(y) \\ U \in H^s(\mathbb{R}^{N-m+1}). \end{cases} \tag{A.1}$$

Definimos $f(\sigma) = |\sigma - 1|^p + p(\sigma - 1) + p - 1$, entonces $f(\sigma) \geq 0$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$. Consideremos $f_1(\sigma) = f(\sigma_+)$, entonces

$$f_1(\sigma) = \begin{cases} 0 & \mathit{si} \ \sigma < 0, \\ (1-\sigma)^p - (1 - p\sigma) & \mathit{si} \ 0 \leq \sigma \leq 1, \\ (\sigma - 1)^p + (p\sigma - 1) \ \mathit{si} \ \sigma > 1. \end{cases}$$

Si U es una solución no trivial del problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s U + pU = f_1(U) \ \mathit{en} \ \mathbb{R}^{N-m+1} \\ U \in H^s(\mathbb{R}^{N-m+1}), \end{cases} \tag{A.2}$$

usando U_- como función test en (A.2), podemos notar que $\|U_-\|_{H^s(\mathbb{R}^{N-m+1})} = 0$, es decir $U \geq 0$. Por el principio del máximo se tiene que $U > 0$ en $\mathbb{R}^{N-m+1}$ y entonces resuelve (A.1). Entonces para obtener el resultado que buscamos probaremos que (A.2) tiene una solución radial decreciente.

Definamos el espacio

$$H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1}) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^{N.m+1}) : u \text{ es radial } \},$$

entonces gracias a [16], se tiene que, para todo $u \in H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})$, tenemos que

$$|u(x)| \leq C|x|^{-\frac{N-m+1-2s}{2}} \|u\|_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})} \tag{A.3}$$

con $C = C(N, m, s)$ es una constante positiva dependiente solo de N, m y s.

Es claro que la solución del problema (A.2) es un punto crítico del funcional J definido por

$$J(u) = \frac{a_{N-m+1,s}}{2} \iint_{\mathbb{R}^{N-m+1} \times \mathbb{R}^{N-m+1}} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N-m+1+2s}} dxdy$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} u^2(x) dx - \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} F_1(u) dx,$$

donde $F_1(\sigma) = \displaystyle\int_0^\sigma f_1(t)dt$ está dado por;

$$F_1(\sigma) = \begin{cases} 0 & si\ \sigma < 0 \\ \frac{1}{p+1}[1-(1-\sigma)^{p+1}] + \frac{p}{2}\sigma^2 - \sigma & si\ 0 \le \sigma \le 1 \\ \frac{1}{p+1}(\sigma-1)^{p+1} + \frac{p}{2}\sigma^2 - \sigma + \frac{1}{p+1} & si\ \sigma > 1. \end{cases}$$

Probaremos ahora que J tiene geometría de paso de montaña.

Proposición A.2 *El funcional J tiene geommetría de paso de montaña.*

Demostración. Tenemos que $J(0) = 0$. Más aún, dado que $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \dfrac{F_1(\sigma)}{\sigma^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$, tenemos la existencia de $u_1 \in H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ tal que

$$\|u_1\|_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})} \gg 1 \quad y \quad J(u_1) \ll 0.$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{\sigma\to 0^+} \frac{F_1(\sigma)}{\sigma^2} = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una constante $C(\varepsilon)$ tal que

$$F_1(\sigma) \le \varepsilon\sigma^2 + C(\varepsilon)|\sigma|^{p+1}.$$

Por lo tanto

$$J(u) \ge \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})} - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})} - C(\varepsilon)\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^{N-m+1})}.$$

Para ε suficientemente pequeño, tenemos qué

$$J(u) \ge C_1(\varepsilon)\|u\|^2_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})} - C(\varepsilon)\|u\|^{p+1}_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})}.$$

Dado que $2 < p+1 < 2^*_s$, entonces se tiene que

$$\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^{N-m+1})} \le C_2\|u\|^{p+1}_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})}.$$

Por lo tanto concluimos que

$$J(u) \ge C_1(\varepsilon)\|u\|^2_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})} - \bar{C}(\varepsilon)\|u\|^{p+1}_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})}.$$

Entonces tenemos la existencia de $0 < \rho < 1$ y $\alpha(\rho) > 0$ tal que si

$$\|u\|_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})} = \rho,$$

entonces

$$J(u) \ge \alpha(\rho).$$

Por lo tanto J satisface la geometría del Paso a la Montaña y la proposición es cierta.

$\square$

Definamos ahora un nivel de paso

$$C = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1] J(\gamma(t))}$$

donde

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in \mathcal{C}([0,1],\, H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})) \quad \text{tal que } \gamma(0)=0, \gamma(1)=u_1 \right\}.$$

Es claro que $C > 0$. Mediante el clásico teorema del Paso de la Montaña, tenemos la existencia de una secuencia $\{u_n\}_n \subset H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ tal que

$$J(u_n) \to C, \quad y \quad \|J'(u_n)\|_{(H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1}))'} \to 0, \quad cuando \quad n \to \infty. \tag{A.4}$$

Probaremos que $\{u_n\}_n$ es acotado en $H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})$. Antes de probar esto, probaremos una proposición auxiliar

Proposición A.3 *Existe $\theta \in (2, \theta^*)$, con*

$$\theta^* = \min\left\{ 2 + \frac{1}{2(p-1)}, 2 + \frac{2}{p}, \frac{p+3}{2} \right\}, \tag{A.5}$$

tal que

$$l(\sigma) = \frac{1}{\theta}\sigma f_1(\sigma) - F_1(\sigma) \geq 0 \textit{ para todo } \sigma \in \mathbb{R}, \tag{A.6}$$

que corresponde a la condición de Ambrosetti-Rabinowitz.

Demostración. Es claro que (A.6) se cumple para $\sigma \leq 0$. Probaremos el resto de forma separa analizando los casos en que $\sigma \geq 1$ y $\sigma < 1$.

Partiendo por el caso $\sigma \geq 1$. Es claro que

$$l(\sigma) = \frac{p+1-\theta}{\theta(p+1)}(\sigma-1)^{p+1} + \frac{1}{\theta}(\sigma-1)^p - \frac{p(\theta-2)}{2\theta}\sigma^2 + \frac{\theta-1}{\theta}\sigma - \frac{1}{p+1}$$

y

$$\begin{aligned} \theta l'(\sigma) &= (p+1-\theta)(\sigma-1)^p + p(\sigma-1)^{p-1} - p(\sigma-2)\sigma + (\theta-1) \\ &= (p+1-\theta)(\sigma-1)^p + p(\sigma-1)^{p-1} - p(\theta-2)(\sigma-1) + (\theta-1) - p(\theta-2). \end{aligned}$$

Para $\theta > 2$, usando la desigualdad de Young, se tiene que

$$p(\theta-2)(\sigma-1) \leq (\theta-2)(\sigma-1)^p + (\theta-2)(p-1).$$

Ahora, escogiendo $\theta \in (2, \theta^*)$, tenemos que $(\theta-2)(p-1) \leq (\theta-1) - p(\theta-2)$ y $(\theta-2) \leq p+1-\theta)$. En consecuencia $l'(\sigma) \geq 0$ para todo $\sigma \in (1, +\infty)$. Considerando ahora que $l(1) = \frac{p-1}{\theta}(1 - \frac{p\theta}{2(p+1)}) > 0$ si $\theta \in (0, \theta^*)$, concluimos que $l(\sigma) \geq 0$ para todo $\sigma \geq 1$.

Analizaremos ahora el caso más problemático, $\sigma \in (0,1)$. En este caso, usando la definición de f_1 y F_1, se tiene que:

$$l(\sigma)) = -\frac{p+1-\theta}{\theta(p+1)}(1-\sigma)^{p+1} + \frac{1}{\sigma}(1-\sigma)^p + \frac{\theta-1}{\theta}\sigma - \frac{p(\theta-2)}{2\theta}\sigma^2 - \frac{1}{p+1},$$

por lo tanto

$$\theta l'(\sigma) = (p+1-\theta)(1-\sigma)^p + p(\theta-2)(1-\sigma) + ((\theta-1) - p(\theta-2)) - p(\theta-2)(1-\sigma).$$

Recordando que $\theta \in (2, \theta^*)$, entonces así como en el primer caso, usando la desigualdad de Young tenemos que

$$p(\theta-2)(1-\sigma) \geq (\theta-2)(1-\sigma)^p + (\theta-2)(p-1).$$

Así

$$\begin{aligned}\theta l'(\sigma) &\geq (p+1-\theta)(1-\sigma)^p + p(\theta-2)(1-\sigma) + ((\theta-1) - p(\theta-2)) \\ &\quad - (\theta-2)(1-\sigma)^p - (\theta-2)(p-1) \\ &\geq (p+3-2\theta)(1-\sigma)^p + p(\theta-2)(1-\sigma) + 2(2p-1-\theta(p-1)).\end{aligned}$$

Como $\theta \leq \theta^*$, obtenemos que

$$p+3-2\theta > 0, \quad y \;\; 2p-1-\theta(p-1) > 0.$$

Por lo tanto, concluimos que $l'(\sigma) > 0$ para todo $\sigma \in (0,1)$. Usando ahora el hecho que $l(0) = 0$, tenemos que $l(\sigma) \geq 0$ para todo $\sigma \in (0,1)$.

Con todo esto, demostramos que $l(\sigma) \geq 0$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$. $\square$

Volviendo a (A.4), gracias a la proposición anterior, se tiene que

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle \leq \overline{C} + o(1)\|u_n\|_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})}.$$

Así

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u\|^2_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})} \leq \overline{C} + o(1)\|u_n\|_{H^2_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})}.$$

Probamos entonces que $\|u_n\|_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})} \leq C$,lo cual prueba que $\{u_n\}_n$ está acotado en $H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ lo que implicará la existencia de una solución $\bar{u}$ a la cual u_n converge débilmente.

Por lo tanto tenemos la existencia de $\bar{u} \in H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ tal que, salvo sub-sucesiones, $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ débilmente en $H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})$, $u_n \to \bar{u}$ fuertemente en $L^\alpha_{loc}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ para todo $\alpha < 2^*_s$ y $u_n \to \bar{u}$ c.t.p en $\mathbb{R}^{N-m+1}$. Es claro que $\bar{u}$ es solución débil de (A.2). Para terminar nos queda demostrar que $u > 0$. Tomando en consideración (A.3) y usando el lema de Vitali, podemos probar $u_n \to \overline{u}$ fuertemente en $L^\alpha(\mathbb{R}^{N-m+1})$ para todo $2 < \alpha < 2^*_s$. En particular $u_n \to \overline{u}$ fuertemente en $L^{p+1}(\mathbb{R}^{N-m+1})$.

Como $\displaystyle\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{\sigma f_1(\sigma)}{\sigma^3} = 0$ y $\displaystyle\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\sigma f_1(\sigma)}{\sigma^{p+1}} = 1$, obtenemos la existencia de $2 < \beta < \max\{3, 2^*_s\}$ tal que:

$$\sigma f(\sigma) \leq c_1 \sigma_+^\beta + c_2 \sigma_+^{p+1}.$$

Por lo tanto, usando el teorma de convergencia dominada, tenemos que

$$u_n f(u_n) \to \bar{u} f(\bar{u}), \text{ fuertemente en } L^1(\mathbb{R}^{N-m+1}).$$

Consecuentemente como $\|J'(u_n)\|_{(H^2_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1}))'} \to 0$ cuando $n \to \infty$, obtenemos luego de cálculo no muy complicado que

$$u_n \to \bar{u} \text{ fuertemente en } H^s_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1}).$$

Por lo tanto $J(\bar{u}) = C > 0$ y la existencia se tiene. Tomando en consideración la estructura radial de la solución y usando la estimación (A.3) podemos concluir que $U \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-m+1}) \cap H^{2s+1}(\mathbb{R}^{N-m+1})$.

Ahora, como $f \in C^{1,\gamma}(\mathbb{R})$ y usando un argumento de planos móviles como en [26], (también en [18] se encuentra un ejemplo del argumento para un problema con potencial singular), podemos probar que cualquier solución positiva del problema (A.2) es simétrica con respecto a algún punto $x_0 \in \mathbb{R}^{N-m+1}$.

Mostraremos ahora la cota (3.1). Para esto, primero notemos que U resuelve el siguiente problema

$$(-\Delta)^s U - \frac{pU + |U-1|^p - 1}{U} = -pU, U > 0 \ en \ \mathbb{R}^{N-m+1}.$$

Entonces, definiendo $V(x) = \frac{-pU+|U-1|^p-1}{U}$ y usado las propiedades de U se puede probar que $V \in L^\infty$ y que $V \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Por lo tanto usando el **Lema C2** de [20] podemos llegar a que

$$|U(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{N-m+1+2s}}, \forall x \in \mathbb{R}^{N-m+1}.$$

Para obtener la regularidad de U usamos la **Proposición B1** en [20] por lo tanto $U \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ para algún $\alpha \in (0,1)$. Usando ahora que $f \in C^{1,\gamma}(\mathbb{R})$ y el **Lema 4.4** de [9] sigue que $U \in C^{2,\beta}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ para algún $\beta \in (0,1)$.

Para concluir este paso, nos queda mostrar que el índice de Morse de la solución encontrada (U) es uno. Recordando que el operador linealizado L está dado por

$$L = (-\Delta)^s - p|U-1|^{p-2}(U-1),$$

podemos obtener mediante cálculo directo que

$$L(U) = -\big((p-1)|U-1|^p p|U-1|^{p-2}(u-1) + 1|\big) < 0.$$

Notemos también que la solución obtenida es de tipo Paso a la Montaña, por lo tanto por [22] (ver también [3] Remark 2.2), se tiene que el indice de Morse de U es a lo mas 1. Como $L(U) < 0$ se concluye el resultado.

Segundo paso: la no-degenerancia

Probaremos que si U es una solución fundamental radial y positiva de (A.1), entonces U es no-degenerado.

El operador linealizado $L = (-\Delta)^s + V$ con $V = -p|U-1|^{p-2}(U-1)$, argumentando como se hizo en [20] y dado que el potencial V satisface la misma condición de [20], entonces para mostrar la no-degenerancia nos queda probar que

$$kerL \cap L^2_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1}) = \{0\}.$$

Argumentando por contradicción. Asumiremos la existencia de $v \in kerL \cap L^2_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1})$ con $v \neq 0$, entonces 0 es el segundo valor propio del operador linealizado L. Como en [20], se tiene que v cambia una vez de signo. Por lo tanto obtenemos la existencia de $r^* > 0$ tal qué $v > 0$ en $[0, r^*)$ y $v < 0$ en $(r^*, +\infty)$.

Notemos que de un cálculo no muy difícil, obtenemos que:

$$L(U) = -\left((p-1)|U-1|^p + p|U-1|^{p-2}(U-1) + 1\right)$$

y

$$L(rU') = 2s\left(|U-1|^p - 1\right)$$

donde $U' = \frac{dU}{dr}$. Por lo tanto

$$L(rU' + \frac{2s}{p-1}U) = -2s\left(|U-1|^{p-2}(U-1) + 1\right).$$

Definiendo ahora

$$V_1 = (p-1)|U-1|^p + p|U-1|^{p-2}(U-1) + 1 \ y \ V_2 = |U-1|^{p-2}(U-1) + 1,$$

entonces $V_1, V_2 \in Im(L)$ y $V_1(r), V_2(r) > 0$ para todo $r \in [0, \infty)$. Así $v \perp (V_1 - \mu V_2)$ para todo $\mu \in \mathbb{R}$.

Escogemos ahora $\mu^* = \frac{V_1(r^*)}{V_2(r^*)}$ y definimos $D(r) = V_1(r) - \mu^* V_2(r)$. Es claro que $D(r^*) = 0$.

Probaremos que $D > 0$ en $(0, r^*)$ y $D < 0$ en (r^*, ∞). Para esto mostraremos que $\frac{V_1(r)}{V_2(r)}$ es estrictamente decreciente.

Tenemos que

$$\left(\frac{V_1(r)}{V_2(r)}\right)' = U'(r)\frac{(p-1)|U-1|^{p-2}\left(|U-1|^p + p(U-1) + p - 1\right)}{V_2^2(r)}.$$

Recordando que $U > 0$ en $\mathbb{R}^{N-m+1}$, entonces usando la desigualdad de Young, se tiene que $|U-1|^p + p(U-1) + p - 1 > 0$. Dado que $U' < 0$, entonces la proposición se cumple. Por lo tanto concluimos que $v(r)(V_1(r) - \mu^* V_2(r)) \geq 0$ para todo $r \in (0, \infty)$ y entonces llegamos a una contradicción con la ortoganalidad. Es decir $KerL \cap L^2_{rad}(\mathbb{R}^{N-m+1}) = \{0\}$.

Ahora probar la condición de no-degenerancia sigue los argumentos de la demostración del **Teorema 3.3** de [20].

Tercer paso: estimaciones apriori

Definición A.4 *Diremos que para dos constantes positivas a, b, la notación $a \sim b$ quiere decir que*

$$a \leq C_1(N, s_0, U_{s_0})b \;\; y \;\; b \leq C_2(N, s_0, U_{s_0})a$$

donde C_1 y C_2 son independientes de a y b.

Proposición A.5 *Las constantes (que dependen de s)*

$$M_s = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} U_s|^2, \; T_s = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U_s^2, \; K_s = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U_s^{p+1}$$

cumplen que $M_s \sim T_s \sim K_s \geq C$

Demostración. Fijemos $s_0 \in (0,1)$ y consideremos $s \in [s_0, 1)$, si U_s es una solución del problema (A.1), entonces usando la identidad de Pohozaev como en [28], concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} U_s|^2 + p \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U_s^2 = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} f(U_s) U_s dx$$

y

$$\frac{N-m+1-2s}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} U_s|^2 + \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U_s^2 = (N-m+1) \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} F(U_s) dx.$$

Tomando en consideración que para todo $\varepsilon > 0$, existen $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon)$ tales que para todo $\sigma \geq 0$,

$$f(\sigma)\sigma \leq \varepsilon\sigma^2 + C_1(\varepsilon)\sigma^{p+1},$$
$$f(\sigma)\sigma \geq C_2(\varepsilon)\sigma^{p+1} - \varepsilon\sigma^2,$$

que $F(\sigma) \leq \frac{1}{\theta}\sigma f(\sigma)$ y usando el hecho de que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} U_s|^2 + \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U_s^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} U_s^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq S(p,s) = \inf_{w \in H^s(\mathbb{R}^{N-m+1}) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w|^2 + \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} w^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} |w|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}},$$

se cumple que $M_s \sim T_s \sim K_s \geq C$. □

Recordando que $f(\sigma) = |\sigma - 1|^p + p(\sigma - 1) + p - 1$, sea $0 < t < s_0$ que será escogido mas adelante, entonces

$$\left\|(-\Delta)^t f(U_s)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})}^2 = \left\|\frac{(-\Delta)^t}{(-\Delta)^s + p} f(U_s)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})}^2 \leq \left\|(-\Delta)^{t-s} f(U_s)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})}^2.$$

Como $t < s$, entonces el operador $(-\Delta)^{t-s}$ viene dado por la convolución con el peso $|x|^{-(N-m+1)-2(s-t)}$.

Considerando ahora que $0 \leq f(\sigma) \leq \varepsilon|\sigma|^\gamma$, para todo $\gamma \in (1,2)$, se tiene que

$$\left\|(-\Delta)^{t-s} f(U_s)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})}^2 \leq C_1 \left\|(-\Delta)^{t-s} U_s^\gamma\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})}^2 + C_2 \left\|(-\Delta)^{t-s} U_s^p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})}^2.$$

donde C_1 y C_2 son independientes de U_s.

Definiendo ahora $h_1 = ((-\Delta)^{t-s}U_s^\gamma)$ y $h_2 = ((-\Delta)^{t-s}U_s^{p+1})$, escogiendo $t = s - \frac{(p-1)(N-m+1)}{2(p+1)}$, gracias a la **Proposición** (A.1) llegamos a que

$$\left\|(-\Delta)^t U_s\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})} \leq C_1 \leq \|U_s^p\|^2_{L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^{N-m+1})} + C_2 \left\|U_s^2\right\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^{N-m+1})}.$$

Escogiendo ahora $\gamma = \frac{2p}{p+1}$, concluimos que

$$\left\|(-\Delta)^t U_s\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})} \leq C_1 \|U_s\|^{2p}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^{N-m+1})} + C_2 \|U_s\|^{\frac{4p}{p+1}}_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})} \leq C_1 K_s^{\frac{2p}{p+1}} + T_s^{\frac{2p}{p+1}}.$$

Considerando también que $K_s \sim T_s$, se tiene que

$$\left\|(-\Delta)^t U_s\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{N-m+1})} \leq C_3 K_s^{\frac{2p}{p+1}},\ t = s - \frac{(p-1)(N-m+1)}{2(p+1)}. \tag{A.7}$$

Para concluir este paso, mostraremos que $K_s \leq C$ para todo $s \in [s_0, 1)$. Para la demostración adaptaremos el argumento usando en [20] a nuestro caso.

Recordando que

$$L(U_s) = f(U_s) - f'(U_s)U_s = -g(U_s)$$

donde

$$g(\sigma) = (p-1)|\sigma - 1|^p + p|\sigma - 1|^{p-2}(\sigma - 1) + 1.$$

Sea $G(\sigma) = \int_0^\sigma g(t)dt$ y $Y_s = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} G(U_s)dx$, entonces

$$\frac{dY_s}{ds} = \int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} g(U_s)\frac{dU_s}{ds}dx = -\left\langle L(U_s), \frac{dU_s}{ds}\right\rangle = -\left\langle L\left(\frac{dU_s}{ds}\right), U_s\right\rangle.$$

Dado que $L\left(\frac{dU_s}{ds}\right) = -(-\Delta)^s \log(-\Delta)(U_s)$, se tiene que

$$\frac{dY_s}{ds} = \left\langle (-\Delta)^s \log(-\Delta)(U_s), \frac{dU_s}{ds}\right\rangle.$$

Como en [20], para $t = s - \frac{(p-1)(N-m+1)}{2(p+1)}$ definido en (A.7), se tiene que, para todo $R > 0$,

$$\left\langle (-\Delta)^s \log(-\Delta)(U_s), \frac{dU_s}{ds}, \right\rangle \leq 2(\log R)M_s + 2R^{2s-4t}\log(R)\int_{\mathbb{R}^{N-m+1}} |\xi|^{4t}|\hat{U_s}|^2 d\xi.$$

Volviendo a (A.7), considerando que $M_s \sim K_s$ y escogiendo

$$R^{4t-2s} = CK_s^{\frac{2p}{p+1}-1} > r^{\frac{1}{4t-2s}},$$

concluimos que

$$\frac{dY_s}{ds} = \left\langle (-\Delta)^s \log(-\Delta)(U_s), \frac{dU_s}{ds}\right\rangle \leq C(1 + (\log K_s))K_s.$$

Ahora dado que para todo $\varepsilon > 0$, $|\sigma\|^{p+1} \leq \varepsilon|\sigma|^2 + C(\varepsilon)G(\sigma)$, podemos concluir que $K_s \sim Y_s$. Así

$$\frac{dY_s}{ds} \leq C(1 + (\log(Y_s))Y_s.$$

Integrando la desigualdad diferencial para $s \in (s_0, 1)$, obtenemos que $Y_s \leq C$ para todo $s \in [s_0, 1)$. Y el resultado buscado se tiene.

Cuarto paso: Unicidad de la solución radial

Mostraremos que el argumento de continuación elaborado en [20] puede ser aplicado en este contexto. Notemos también que para $s = 1$, la unicidad es un resultado conocido en la literatura.

Definamos el conjunto

$$E = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^{N-m+1}) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^{N-m+1}) : u \text{ es radial}\right\}.$$

Fijando $s_0 \in (0, 1)$, entonces para $s \in [s_0, 1)$, denotamos por $U_s \in E$ a una solución no negativa del problema (A.2) en el sentido débil. Es claro que $U_s \in H^{2s+1} \cap \mathcal{C}^{2,\gamma}(\mathbb{R}^{N-m+1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-m+1})$ y U_s es radial y decreciente.

Usando la condición de no-degenerancia obtenida en el paso dos y en virtud del teorema de la función implicita, podemos mostrar que si U_{s_0} es una solución fundamental no degenerada del problema (A.2), entonces existe $\delta > 0$ y el mapeo $T \in \mathcal{C}^1([s_0, s_0 + \delta), E)$ tal que

(1) Si $s \in [s_0, s_0 + \delta)$, entonces $T(s) = U_s$ es una solución del problema (A.2).

(2) Existe $\varepsilon > 0$ tal que en el conjunto $\{u \in E : \|u - U_{s_0}\| < \varepsilon\}$, el problema (A.2) tiene una única solución U_s para todo $s \in [s_0, s_0 + \delta)$.

Definamos

$$s^* = \sup\left\{\bar{s} \in [s_0, 1) : \text{ las propiedades (1) y (2) se cumplen en el conjunto } [s_0, \bar{s})\right\}.$$

La idea general es mostrar que si U_{s_0} es una solución fundamental positiva del problema (A.2), entonces $s^* = 1$.

Notemos que gracias al **Lema 8.3** en [20], podemos deducir que si $U_{s_0} > 0$, entonces $U_s > 0$ en $\mathbb{R}^{N-m+1}$ para todo $s \in [s_0, s^*)$.

Ahora tomando en consideración los estimadores obtenidos en el paso tres y siguiendo el argumento de continuación usado en [20], podemos mostrar que si U_{s_0} y $\tilde{U}_{s_0}$ son dos soluciones fundamentales de (A.2) distintas, entonces $s^* = \tilde{s}^* = 1$. Donde $\tilde{s}^*$ es definido como s^* reemplazando U_s por $\tilde{U}_s$. Usando el resultado de no-degenerancia para $s = 1$ y como en [20] llegamos a una contradicción. Por lo tanto el resultado de unicidad se tiene.

Pertenencia de la primera función propia al espacio simétrico

Proposición A.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regular acotado y sea $1 < m \leq N$. Para $y \in \Omega$, definimos $y = (y', y'')$ donde $y' \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que Ω es simétrico en la dirección de y'. Consideramos entonces la primera función propia φ_1 que resuelve*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s\varphi & = \lambda_1\varphi \quad & en\ \Omega \\ \varphi & > 0 & in\ \Omega \\ \phi & = 0 & en\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

entonces φ_1 es simétrica en la dirección y', i.e. $\varphi(y', y'') = \varphi_1(|y'|, y'')$.

Demostración. Para demostrar este resultado, notemos $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$, entonces si mostramos que φ_1 es simétrica en la dirección y'_i para todo $i = 1, \ldots, m$ concluiremos el resultado.

Si definimos $f(x, t) = \lambda_1 t$ es claro que f satisface todas las hipotesis del **Teorema 1** en [6]. Así, usando el método de planos móviles se tiene que φ_1 es simétrica en la dirección. y'_i. Como i es cualquiera, entonces φ_1 solo depende de $(|y'|, y'')$. $\square$

Bibliografía

[1] B Abdellaoui, A Dieb, and F Mahmoudi. On the fractional Lazer-McKenna conjecture with superlinear potential. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 58(1):7, 2019.

[2] Herbert Amann and Peter Hess. A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 84(1-2):145–151, 1979.

[3] Antonio Ambrosetti and Andrea Malchiodi. *Perturbation methods and semilinear elliptic problems on R ˆ n*, volume 240. Springer Science & Business Media, 2006.

[4] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi. On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 93(1):231–246, 1972.

[5] A Bahri. Critical points at infinity in the variational calculus. In *Partial Differential Equations*, pages 1–29. Springer, 1988.

[6] Begona Barrios, Luigi Montoro, and Berardino Sciunzi. On the moving plane method for nonlocal problems in bounded domains. *Journal d'Analyse Mathématique*, 135(1):37–57, 2018.

[7] Umberto Biccari, Mahamadi Warma, and Enrique Zuazua. Local elliptic regularity for the dirichlet fractional laplacian. *Advanced Nonlinear Studies*, 17(2):387–409, 2017.

[8] B Breuer, P Joseph McKenna, and Michael Plum. Multiple solutions for a semilinear boundary value problem: a computational multiplicity proof. *Journal of Differential Equations*, 195(1):243–269, 2003.

[9] Xavier Cabré and Yannick Sire. Nonlinear equations for fractional Laplacians, i: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 31, pages 23–53. Elsevier, 2014.

[10] Luis A. Caffarelli and Yannick Sire. On some pointwise inequalities involving nonlocal operators. In *Harmonic analysis, partial differential equations and applications*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 1–18. Birkhäuser/Springer, Cham, 2017.

[11] Edward N Dancer and Shusen Yan. On the Lazer-McKenna conjecture involving critical

and super-critical exponents. *Methods and Applications of Analysis*, 15(1):97–120, 2008.

[12] EN Dancer. Ranges of certain weakly non-linear elliptic partial-differential equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 57(4):351–366, 1978.

[13] EN Dancer and Shusen Yan. On the superlinear Lazer-McKenna conjecture. *Journal of Differential Equations*, 210(2):317–351, 2005.

[14] EN Dancer and Shusen Yan. On the superlinear Lazer-McKenna conjecture: part ii. *Communications in Partial Differential Equations*, 30(9):1331–1358, 2005.

[15] DG De Figueiredo, PN Shrikanth, and S Santra. Pde solutions for a superlinear ambrosetti–prodi type problem in a ball. *preprint.*

[16] Pablo L De Nápoli and Irene Drelichman. Elementary proofs of embedding theorems for potential spaces of radial functions. In *Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory*, pages 115–138. Springer, 2016.

[17] Manuel del Pino and Claudio Muñoz. The two-dimensional Lazer-McKenna conjecture for an exponential nonlinearity. *Journal of Differential equations*, 231(1):108–134, 2006.

[18] Serena Dipierro, Luigi Montoro, Ireneo Peral, and Berardino Sciunzi. Qualitative properties of positive solutions to nonlocal critical problems involving the Hardy-Leray potential. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 55(4):99, 2016.

[19] Juan Dávila, Manuel del Pino, Serena Dipierro, and Enrico Valdinoci. Concentration phenomena for the nonlocal Schrödinger equation with Dirichlet datum. *Analysis & PDE*, 8(5):1165–1235, 7 2015.

[20] Rupert L Frank, Enno Lenzmann, and Luis Silvestre. Uniqueness of radial solutions for the fractional Laplacian. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 69(9):1671–1726, 2016.

[21] Helmut Hofer. Variational and topological methods in partially ordered hilbert spaces. *Mathematische Annalen*, 261(4):493–514, 1982.

[22] Helmut Hofer. A note on the topological degree at a critical point of mountainpass-type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 90(2):309–315, 1984.

[23] AC Lazer and PJ McKenna. On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 95(3-4):275–283, 1983.

[24] Tommaso Leonori, Ireneo Peral, Ana Primo, and Fernando Soria. Basic estimates for solution of elliptic and parabolic equations for a class of nonlocal operators. *preprint*, 2015.

[25] Gongbao Li, Jianfu Yang, and Shusen Yan. Solutions with boundary layer and positive peak for an elliptic Dirichlet problem. 134:515 – 536, 06 2004.

[26] Li Ma and Lin Zhao. Classification of positive solitary solutions of the nonlinear Choquard equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 195(2):455, 2010.

[27] Adele Manes. Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellitici del secondo ordine. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 7:285–301, 1973.

[28] Xavier Ros-Oton and Joaquim Serra. The Pohozaev identity for the fractional Laplacian. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 213(2):587–628, 2014.

[29] Sergio Solimini. Some remarks on the number of solutions of some nonlinear elliptic problems. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 2, pages 143–156. Elsevier, 1985.

[30] Elias M Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions (PMS-30)*, volume 30. Princeton university press, 2016.