



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

MODELAMIENTO DE DINÁMICA ORBITAL DE CUBESAT 3U PARA
DETERMINACIÓN DE COSTOS PROPULSIVOS, ENERGÉTICOS Y TEMPORALES
EN MANIOBRAS ORBITALES DE BAJO EMPUJE PREDETERMINADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

RICARDO JAVIER RAMOS YÁÑEZ

PROFESOR GUÍA:
MARCOS DÍAZ QUEZADA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
CÉSAR FUENTES GONZÁLEZ
ANDRÉS CABA RUTTE

SANTIAGO DE CHILE
2019

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO
POR: RICARDO JAVIER RAMOS YÁÑEZ
FECHA: 2019
PROF. GUÍA: MARCOS DÍAZ QUEZADA

MODELAMIENTO DE DINÁMICA ORBITAL DE CUBESAT 3U PARA DETERMINACIÓN DE COSTOS PROPULSIVOS, ENERGÉTICOS Y TEMPORALES EN MANIOBRAS ORBITALES DE BAJO EMPUJE PREDETERMINADAS

En el vuelo espacial, una maniobra orbital corresponde al uso de sistemas de propulsión para cambiar la órbita de un vehículo espacial. Es actualmente casi la única manera de desplazarse a través del espacio exterior y por lo tanto su aplicación resulta de gran importancia para el diseño físico como para el diseño de misiones de satélites.

En el caso particular de nanosatélites, los sistemas de propulsión presentan grandes restricciones tanto de capacidad como tamaño, por lo cual normalmente se hace necesario utilizar sistemas de propulsión eléctrica, los cuales poseen un nivel de empuje bajo, resultando comúnmente en tiempos de propulsión de larga duración, del orden de cientos de órbitas.

El presente trabajo pretende calcular los propulsivos, energéticos y temporales de llevar a cabo maniobras orbitales de bajo empuje predeterminadas. Es decir, la cantidad de prope-lente, potencia, energía y tiempo necesarios para ejecutar una maniobra sub-óptima definida manualmente en base a resultados de la literatura.

En la primera parte del presente trabajo se presenta el marco teórico donde se describen los conceptos necesarios para poder comprender y analizar el modelo realizado. Se mencionan principalmente conceptos relacionados con la astrodinámica, los principios de propulsión y la ejecución de maniobras orbitales.

Se construyó un modelo en python basado en las ecuaciones de variación de parámetros incorporando perturbaciones gravitacionales de la Tierra, el Sol, la Luna, el arrastre atmós-férico y la presión solar. Este modelo además incorporó la capacidad de perfilado del empuje a lo largo de su órbita y finalmente la fijación de órbitas objetivo basado en leyes de control derivadas analíticamente. Además se validó la dinámica básica y perturbada del modelo mediante comparaciones con el software comercial de simulación de satélites *Systems Tool-kit* STK. Una vez completado el modelo se procedió a realizar las simulaciones de interés, incluyendo desorbitación, mantenimiento orbital y movimiento relativo.

A partir de los escenarios estudiados se estima, en primer lugar, que el satélite SUCHAI tendrá un tiempo de desorbitación de 7 años, cayendo entre 2024 y 2025. Éste tiempo puede ser reducido entre un 20 % y 30 % utilizando propulsión basada en componentes comerciales. Las maniobras probadas, a nivel general, no poseen mayor problema energético. En el caso de mantenimiento orbital en órbita baja, la perturbación que genera mayor efecto es el arras-tre atmosférico, por lo cual sólo resulta conveniente modificar el semieje-mayor. Finalmente se observa para el escenario de movimiento relativo, que en ausencia de perturbaciones es imposible que un chipsat expulsado de un cubesat en órbita quede orbitándolo.

To Scott Manley, the rocket surgeon.

Agradecimientos

Agradecer en primer lugar a mis padres y hermanas, por estar siempre presentes para darme apoyo en la vida.

A Pablo y a Sergio, con quienes compartí la experiencia de pasar por este proceso. A mis compañeros del SPEL, Jose, Ignacio y Javier, por guiarme y tranquilizarme en los momentos de incertidumbre.

Agradecer también a Andrés y a Bernardita por ser las personas más jugadas por los alumnos del departamento, y al profesor Marcos Díaz por darme la oportunidad de trabajar en un tema interesante y poco usual.

A todos mis compañeros de carrera, con quienes he compartido los altibajos del viaje por la universidad.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Marco Conceptual y Estado del Arte	3
1.1. Problema de dos cuerpos y movimiento Kepleriano	3
1.1.1. Perturbaciones	4
Arrastre Atmosférico	4
Perturbaciones gravitacionales por armónico zonal J2	5
Radiación Solar	6
Gravedad Lunar y Solar	6
1.2. Sistemas de Propulsión	8
1.2.1. Conceptos de Propulsión	8
Δv (Delta-V)	8
Impulso Específico	8
Ecuación de Tsiolkovsky y Presupuesto Delta-V	9
1.2.2. Propulsión Eléctrica	10
Electroestáticos	10
Electrotermales	11
Electromagnéticos	11
1.2.3. Modelo de Energía/Potencia	11
1.3. Maniobras Orbitales	11
1.3.1. Maniobras Orbitales de Alto Empuje	12
1.3.2. Mantenimiento Orbital (<i>Station Keeping</i>)	12
1.3.3. De-orbiting	12
1.3.4. Elementos Equinociales Modificados [13]	12
1.3.5. Formulación y técnicas de perturbación	13
Técnicas de perturbación especial	13
Técnicas de perturbación general	14
Técnicas semianalíticas	15
1.3.6. Soluciones Históricas para problema de maniobras de bajo empuje	15
Métodos indirectos	15
Leyes de control	16
Optimización Directa	16
2. Creación Modelo	17
2.1. Base	18
2.2. Clase Maneuvers y ManeuversHistory	19

2.3.	Perturbaciones	20
2.4.	Propulsión	20
2.5.	Energía	21
2.5.1.	Paneles Solares	21
2.5.2.	Baterías	21
2.5.3.	Balance Energético	22
2.6.	Perfilado de empuje	23
2.7.	Fijación de Órbita Objetivo	26
2.8.	Validación perturbaciones	27
2.8.1.	Arrastre Atmosférico	28
2.8.2.	J2	28
2.8.3.	Presión Radiativa	29
2.8.4.	Gravedad Lunar	30
2.8.5.	Gravedad Solar	31
2.9.	Validación STK	32
3.	Simulaciones	33
3.1.	Desorbitación	33
3.1.1.	Comparación con datos históricos	33
3.1.2.	Comparación estrategias de deorbitación	36
3.2.	Mantenimiento Orbital	41
3.3.	Movimiento Relativo	43
3.3.1.	Perspectiva General	44
3.3.2.	Expulsión de chipsats	46
	Conclusiones	47
	Trabajo Futuro	50
	Anexos	51
	Bibliografía	59

Índice de Tablas

1.1. Algunos Impulsos Específicos Típicos. Fuente: [10, p.300]	9
2.1. Ángulos óptimos instantáneos α y β en función de la anomalía verdadera (ν). Fuente: [25]	24
2.2. Puntos de máximo cambio de parámetros orbitales. Fuente: [25].	25
3.1. Parámetros orbitales iniciales del satélite.	36
3.2. Parámetros físicos del satélite. Fuente: Autor.	37
3.3. Parámetros físicos del propulsor. Las masas de propelentes fueron elegidas basadas en el máximo posible indicado por el fabricante. Fuente: Autor.	37
3.4. Parámetros físicos de los paneles solares. Fuente: Autor.	37
3.5. Parámetros Físicos Baterías. Fuente: Autor.	37
3.6. Resumen de resultados de escenarios de deorbitación.	40
3.7. Parámetros orbitales iniciales del satélite. Fuente: Autor.	41
3.8. Escenarios a probar en el análisis generalizado de movimiento relativo. Los parámetros de referencia corresponden a la órbita del cuerpo donde se ubica el sistema de referencia.	44

Índice de Ilustraciones

1.1. Elementos Keplerianos. Fuente: [3]	4
1.2. Razón de masa versus velocidad calculada a partir de la ecuación de Tsiolkovsky. Fuente: [6]	10
2.1. Diagrama de base del algoritmo de propagación, integrando mediante la formulación de Cowell. Fuente: Autor.	18
2.2. Diagrama de base del algoritmo de propagación, integrando ambas formulaciones. Fuente: Autor.	19
2.3. Ciclo de carga de batería debido al uso de propulsor. Fuente: Autor.	23
2.4. Definición de los ángulos α y β en el sistema RSW (también llamado RCN). Fuente: [25]	24
2.5. Perfil de empuje óptimo instantáneo para modificación de semieje mayor. Fuente: Autor.	25
2.6. Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 2.5. Fuente: Autor.	26
2.7. Evolución de una trayectoria desde una órbita origen a una órbita objetivo. Azul representa la órbita inicial, naranja el período en que se ejecuta la maniobra y verde la órbita final. Fuente: Autor.	27
2.8. Comparación entre valores de apogeo y perigeo debido al arrastre atmosférico. Fuente: Autor.	28
2.9. Comparación entre variaciones de ascensión recta y argumento del perigeo debido a la perturbación J2. Fuente: Autor.	29
2.10. Comparación entre variaciones de excentricidad e inclinación debido a la perturbación J2. Fuente: Autor.	29
2.11. Comparación entre variaciones de momento angular, excentricidad, semieje mayor, ascensión recta, inclinación y argumento del perigeo debido a efectos de la presión radiativa. Fuente: Autor.	30
2.12. Comparación entre valores de Ascensión recta, inclinación y argumento del perigeo debido a la gravedad lunar. Fuente: Autor.	31
2.13. Comparación entre valores de Ascensión recta, inclinación y argumento del perigeo debido a la gravedad solar. Fuente: Autor.	31
2.14. Error relativo porcentual para los elementos orbitales simulados y los de STK. Fuente: Autor.	32
2.15. Error relativo porcentual para el uso de masa de propelente simulados y los de STK. Fuente: Autor.	32

3.1. Comparación entre el decaimiento atmosférico real de la Estación Espacial Tiangong-1 y el simulado mediante el modelo. Fuente: Autor.	34
3.2. Comparación de decaimiento de distintos cubesat 1U. Fuente: Autor.	34
3.3. Comparativa entre altitud real de SUCHAI desde su lanzamiento y el decaimiento simulado debido a tres modelos atmosféricos. Fuente: Autor.	35
3.4. Comparativa de estrategias de deorbitación utilizando el modelo atmosférico Harris-Priester. Fuente: Autor.	38
3.5. Comparativa de estrategias de deorbitación utilizando el modelo atmosférico USSA76. Fuente: Autor.	38
3.6. Comparativa en el uso de energía de las maniobras. Fuente: Autor.	39
3.7. Modificación de parámetros orbitales a través de un año para un órbita ecuatorial (3.1) y una polar (3.7), aplicando todas las perturbaciones descritas en 1.1.1.. Fuente: Autor.	42
3.8. Simulación de los tres casos de corrección de parámetros orbitales para el caso de uso de 50 g de propelente y 500 g de propelente. Fuente: Autor.	43
3.9. Órbitas de ambos cuerpos alrededor de la Tierra y movimiento relativo entre ellos para el Caso 1. Fuente: Autor.	44
3.10. Órbitas de ambos cuerpos alrededor de la Tierra y movimiento relativo entre ellos para el Caso 2. Fuente: Autor.	45
3.11. Órbitas de ambos cuerpos alrededor de la Tierra y movimiento relativo entre ellos para el Caso 3. Fuente: Autor.	45
3.12. Órbitas de ambos cuerpos alrededor de la Tierra y movimiento relativo entre ellos para el Caso 4. Fuente: Autor.	46
3.13. Trayectoria en movimiento relativo para expulsión de chipsat en tres direcciones. Fuente: Autor.	46
3.14. Densidades atmosféricas para información tabulada de distintos modelos atmosféricos. Fuente: Autor.	51
3.15. Perfil de empuje instantáneo óptimo para cambio de excentricidad. Fuente: Autor.	52
3.16. Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 3.15. Fuente: Autor.	53
3.17. Perfil de empuje instantáneo óptimo para cambio de inclinación. Fuente: Autor.	53
3.18. Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 3.17. Fuente: Autor.	54
3.19. Perfil de empuje instantáneo óptimo para cambio de ascensión recta. Fuente: Autor.	54
3.20. Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 3.19. Fuente: Autor.	55
3.21. Perfil de empuje instantáneo óptimo para cambio de argumento del perigeo. Fuente: Autor.	55
3.22. Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 3.21. Fuente: Autor.	56
3.23. Ejemplo de uso de energía considerando eclipse solar. Fuente: Autor.	57

Introducción

Motivación y antecedentes

Los Cubesats son una familia de satélites artificiales pequeños que, a diferencia de otros satélites pequeños, se conforman en base a criterios específicos que controlan factores como su tamaño, su forma y su peso, entre otros. Representan un esfuerzo colaborativo para proveer un acceso económico al espacio para las instituciones educativas, gubernamentales y científicas. Estas instituciones han reconocido que una plataforma pequeña y estandarizada puede ayudar a reducir los costos de los desarrollos en las investigaciones científicas. Esta reducción en la barrera de entrada ha incrementado de gran manera el acceso al espacio, llevando a un crecimiento exponencial de la popularidad de los CubeSats desde su concepción.

En la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, se ha realizado con éxito la construcción de un Cubesat de 1U (equivalente a un tamaño de 10cm x 10cm x 11cm), correspondiente al proyecto **SUCHAI 1**. Este satélite se encuentra actualmente en operación en órbita baja a una altitud de aproximadamente 500 km.

Si bien el proyecto SUCHAI ha sido de gran valor para generar conocimiento en la facultad como primer acercamiento, corresponde a un satélite que posee una cantidad limitada de sistemas para operarlo. Es por esta razón que se están desarrollando nuevos sistemas y experimentos para ser integrados en las próximas versiones del proyecto SUCHAI: SUCHAI 2 y SUCHAI 3, y posiblemente otros.

Uno de estos sistemas corresponde al de propulsión, el cual permite tanto el control de la orientación del satélite, como el cambio de órbita. Ambas son acciones necesarias a la hora de cumplir determinados objetivos en misiones al espacio.

Objetivos Generales

Crear un modelo que permita calcular la cantidad de propelente, potencia y tiempo necesarios al aplicar las estrategias propuestas en la literatura para maniobras orbitales de bajo empuje en órbitas LEO para un cubesat 3U.

Objetivos Específicos

- Construir un simulador que permita evaluar, de manera simple, escenarios de aplicación de maniobras orbitales considerando la dinámica orbital de un satélite.
- Proponer estrategias de desorbitación (*deorbiting*) a partir de una órbita LEO y calcular los costos asociados a ello en términos de propelente, potencia y tiempo necesarios.
- Proponer estrategias para manetenimiento orbital (*station-keeping*) en LEO y calcular, en caso de ser necesario, los costos asociados a ello en términos de propelente, potencia y tiempo necesarios para ser realizados.
- Proponer estrategias para el cambio individual de los parámetros orbitales semi-eje mayor, eccentricidad, inclinación y argumento del perigeo, en órbita LEO.

Metodología

Para realizar este trabajo se ha decidido proceder como sigue:

1. Estudiar las soluciones presentadas históricamente en la literatura.
2. Construir un modelo en python de la dinámica orbital del satélite que considere las perturbaciones en el vuelo de éste y permita introducir maniobras orbitales de bajo empuje. Además debe poder incluir modelos personalizados de componentes satelitales de manera modular (paneles, propulsores, baterías, etc).
3. Validar mediante el modelo las estrategias presentadas en la literatura.
4. Probar distintas estrategias de maniobras orbitales de bajo empuje para de-orbiting, station keeping y cambios en parámetros orbitales singulares.
5. Calcular la cantidad de propelente, potencia y tiempo asociados a cada estrategia.
6. Verificar algunos resultados mediante la herramienta STK.

Capítulo 1

Marco Conceptual y Estado del Arte

1.1. Problema de dos cuerpos y movimiento Kepleriano

El problema gravitacional de dos cuerpos se preocupa del movimiento de dos cuerpos puntuales que interactúan entre ellos únicamente debido a la gravedad. Esta fuerza de gravedad puede ser expresada [10, p.652] como

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{\mu m}{r^3}\mathbf{r} \quad (1.1)$$

donde r corresponde a la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra, G la constante de gravitación universal y μ el parámetro gravitacional.

Desde aquí la ecuación de movimiento del satélite se convierte [10, p.652] en:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = 0 \quad (1.2)$$

En lugar de utilizar elementos cartesianos regulares, puede resultar útil utilizar elementos orbitales para identificar una órbita específica. Tradicionalmente éstos elementos son los seis elementos orbitales clásicos ó keplerianos:

- Semieje mayor a : la suma de las distancias del perigeo y apogeo dividido por dos.
- Excentricidad e : la forma de la elipse, describiendo cuán elongada es en comparación con un círculo.
- Inclinación i : el ángulo de la elipse con respecto al plano de referencia, medido en el nodo ascendente.
- Ascensión recta del nodo ascendente Ω : orienta horizontalmente el nodo ascendente con respecto al punto vernal (Υ) del sistema de referencia.
- Argumento del perigeo ω : define la orientación de la elipse en el plano orbital, como un ángulo medido desde el nodo ascendente al perigeo.
- Verdadera Anomalía ν : define la posición del objeto orbitando el cuerpo primario a lo largo de la elipse en un tiempo específico. Se mide como el ángulo transcurrido con respecto al perigeo.

Los elementos pueden observarse más fácilmente en la siguiente figura:

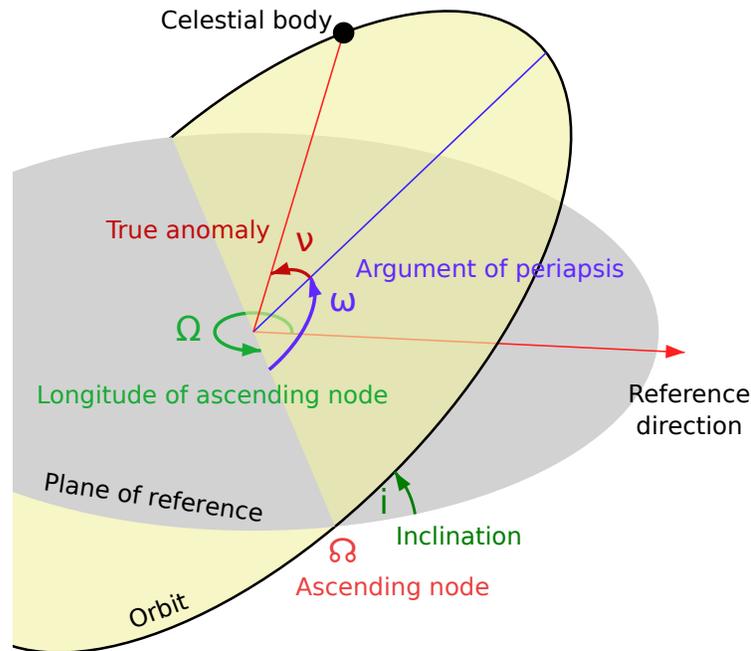


Figura 1.1: Elementos Keplerianos. Fuente: [3]

1.1.1. Perturbaciones

El campo gravitacional no es la única fuerza que afecta al satélite, por lo cual el movimiento kepleriano sólo puede dar una aproximación de la trayectoria. Para tener una aproximación más cercana a la realidad, se hace necesario incorporar las perturbaciones causadas por elementos externos. Estas perturbaciones son incorporadas de manera que la ecuación de movimiento cambia [10, p.652] a:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \sum_1^n \mathbf{p}_i \quad (1.3)$$

donde \mathbf{p}_i corresponde a la aceleración causada por la perturbación i .

Arrastre Atmosférico

Si bien el 99.9999% de la atmósfera terrestre está bajo 100 km, la densidad del aire sobre tal altitud es suficiente para ejercer arrastre e incluso causar calentamiento en los objetos moviéndose a velocidades orbitales. Existen muchos modelos que describen la variación de las propiedades atmosféricas con la altitud. Uno de ellos es USSA76, la *US Standard Atmosphere 1976*, la cual corresponde a una tabla de valores medidos desde el nivel del mar hasta 1000 km. Los valores intermedios pueden ser interpolados mediante funciones exponenciales: $\rho(z) =$

$\rho_i e^{-(z-z_i)/H_i}$ y $H_i = -\frac{z_{i+1}-z_i}{\ln(\rho_{i+1}/\rho_i)}$, donde i es el i -ésimo valor en la tabla, y $\rho(z)$ es la densidad atmosférica a la altura z , por lo cual $z_i < z < z_{i+1}$.

De acuerdo con USSA76, la atmósfera es una capa esféricamente simétrica de 1000 km de espesor alrededor de la Tierra. Se asume un estado estacionario y es consistente con un período de actividad solar moderada.

La fuerza de arrastre está definida [10, p.658] como:

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{2}\rho v_{rel}^2 C_D A \hat{\mathbf{v}}_{rel} \quad (1.4)$$

donde ρ es la densidad atmosférica, A es el área frontal del satélite, C_D es el coeficiente de arrastre y v_{rel} es la velocidad relativa del satélite respecto a la atmósfera rotatoria: $v_{rel} = v - v_{atm} = v - \omega_E \times r$. Si consideramos un satélite con masa m , entonces la aceleración perturbadora debido a la fuerza de arrastre [10, p.658] es:

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2}\rho v_{rel} \left(\frac{C_D A}{m} \right) \mathbf{v}_{rel} \quad (1.5)$$

Si bien el modelo atmosférico *USSA76* es uno de lo más comunes y utilizados en los campos científicos para propósito general, se han propuesto modelos mejores y más complejos que no consideran la atmósfera como estática en el tiempo, si no que varía principalmente debido a la actividad solar, la cual posee un ciclo de aproximadamente 11 años. En este trabajo se han utilizado otro modelos atmosférico que pueden ser consultados en el **Anexo 1**.

Perturbaciones gravitacionales por armónico zonal J2

La Tierra y otros elementos celestes no son esferas perfectas si no que se asemejan a esferoides achatadas. Debido al abultamiento ecuatorial causado por los efectos centrífugos de la rotación, el campo gravitacional varía con la latitud y con el radio. Este campo gravitacional está dominado por la contribución en forma de masa puntual, a la cual se le sobrepone la perturbación debido al achatamiento.

El potencial de la perturbación está dado por la serie infinita [10, p.662]:

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k(\cos\phi) \quad (1.6)$$

donde J_K son los *armónicos zonales* del planeta, R es el radio ecuatorial y P_k son los Polinomios de Legendre. Los armónicos zonales son números sin dimensión que no son derivados matemáticamente si no que inferidos desde observaciones del movimiento de satélites alrededor del planeta. En la serie domina el segundo término con $J_2 = 0,00108263$, siendo los siguientes términos J_3 - J_7 1000 veces menores. Es por ello que normalmente se considera sólo la perturbación aportada por el armónico zonal J_2 , en cuyo caso la aceleración gravitacional perturbadora \mathbf{p} debido a J_2 es expresada [10, p.664] como:

$$\mathbf{p} = \frac{3}{2} \frac{J_2 \mu R^2}{r^4} \left[\frac{x}{r} \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{r} \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{r} \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 3 \right) \hat{\mathbf{k}} \right] \quad (1.7)$$

Donde $\mathbf{r} = [x, y, z]$ corresponde al vector de posición del satélite con respecto al sistema ECI.

Radiación Solar

Los fotones emitidos por el Sol, a pesar de no poseer masa, poseen energía y momentum. Esta energía es traspasada a los objetos con los que impactan en forma de presión. La aceleración perturbadora debido a la radiación solar se define [10, p.696] como:

$$\mathbf{p} = -\nu \frac{S C_R A_S}{c m} \hat{\mathbf{u}} \quad (1.8)$$

donde ν es la *función de sombra*, la cual tiene valor 0 si el satélite está en la sombra de la tierra y 1 en caso contrario. C_R es el coeficiente de presión de radiación, el cual se encuentra entre 1 y 2. C_R equivale a 1 si la superficie del cuerpo actúa como un cuerpo negro absorbiendo toda la energía del fotón incidente. Cuando C_R equivale a 2, la radiación incidente es reflejada y por lo tanto el momentum del fotón incidente es revertido en dirección, duplicando la fuerza en el satélite. El factor A_s corresponde a el área de exposición del satélite que corresponde a πR^2 para el modelo de *bala de cañón*. $\hat{\mathbf{u}}$ corresponde al vector unitario apuntando desde el Sol a la Tierra, el cual se utiliza en lugar de aquel apuntando al satélite debido a la poca diferencia entre las distancias. Este factor considera sólo el movimiento relativo del Sol alrededor de la Tierra y no incluye el movimiento del satélite alrededor de la Tierra. El factor S es la intensidad de radiación a 1 UA del Sol, conocido como constante solar equivalente a 1367 W/m^2 , c corresponde a la velocidad de la luz y m a la masa del satélite.

Para determinar cuándo un satélite se encuentra en la sombra de la Tierra calculamos el ángulo entre el vector de posición del satélite y el del Sol encontrado mediante producto punto [10, p.701]:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{r}_{sol} \cdot \mathbf{r}_{sat}}{r_{sol} r_{sat}} \right) \quad (1.9)$$

Además se calculan los ángulos entre los vectores de posición y los puntos tangente:

$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{R}{r_{sat}} \quad (1.10a)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \frac{R}{r_{sol}} \quad (1.10b)$$

Si $\theta_1 + \theta_2 < \theta$, la suma de los ángulos entre los vectores de posición y los puntos tangentes a la Tierra es menor a el ángulo entre el satélite y el Sol y por lo tanto la línea de visión entre ambos atraviesa la Tierra, quedando por ende el satélite a la sombra: $\nu = 0$, en caso contrario $\nu = 1$.

Gravedad Lunar y Solar

El campo gravitacional del Sol y la Luna actúan como fuerzas perturbadoras en los satélites siendo la Luna la que produce los mayores efectos. La perturbación de la luna [10, p.706] corresponde a:

$$\mathbf{p} = \mu_m \left(\frac{\mathbf{r}_{m/s}}{r_{m/s}^3} - \frac{\mathbf{r}_m}{r_m^3} \right) \quad (1.11)$$

donde μ_m es el parámetro gravitacional de la Luna, $\mathbf{r}_{m/s}$ es el vector de posición de la Luna respecto al satélite y \mathbf{r}_m es el vector de posición de la Luna respecto a la Tierra.

En el caso del Sol, la perturbación se deriva de manera similar [10, p.712] resultando:

$$\mathbf{p} = \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{r}_{\odot/s}}{r_{\odot/s}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\odot}}{r_{\odot}^3} \right) = \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot/s}^3} \left[\mathbf{r}_{\odot} \left(1 - \frac{r_{\odot/s}^3}{r_{\odot}^3} \right) - \mathbf{r} \right] \quad (1.12)$$

Sin embargo, es posible que para términos computacionales el vector $\mathbf{r}_{\odot/s}$ sea muy parecido al vector \mathbf{r}_{\odot} , por lo cual es posible el término $(1 - c^3/b^3)$ termine anulándose o perdiendo precisión numérica.

Por ello se utiliza un método numérico [10, p.737] para computar la diferencia entre números cercanamente iguales. Si definimos:

$$q = 1 - \frac{c^2}{b^2} \quad (1.13)$$

Sigue que:

$$F = 1 - \left(\frac{c^2}{b^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 1 - (1 - q)^{\frac{3}{2}} = [1 - (1 - q)^{\frac{3}{2}}] \frac{1 + (1 - q)^{\frac{3}{2}}}{1 + (1 - q)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - (1 - q)^3}{1 + (\sqrt{1 - q})^3} \quad (1.14)$$

es decir:

$$F(q) = \frac{q^2 - 3q + 3}{1 + (1 - q)^{\frac{3}{2}}} q \quad (1.15)$$

Utilizar ésta fórmula para computar F no requiere encontrar la diferencia entre números cercanamente iguales como en el término $(1 - c^3/b^3)$. Sin embargo el problema persiste cuando usamos la ec. 1.13 para calcular q . Podemos evitar esto observando que:

$$q = \frac{b^2 - c^2}{b^2} = \frac{(b - c) \cdot (b + c)}{b^2}$$

como $c = b - a$,

$$q = \frac{a \cdot (2b - a)}{b^2} \quad (1.16)$$

y por lo tanto, la ecuación 1.12 queda como:

$$\mathbf{p} = \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot/s}^3} \left[F(q) \mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r} \right] \quad (1.17)$$

donde:

$$q = \frac{\mathbf{r} \cdot (2\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r})}{r_{\odot}^2} \quad (1.18)$$

1.2. Sistemas de Propulsión

Un sistema de propulsión es cualquier método utilizado para acelerar vehículos espaciales y satélites. Existen muchos métodos, cada uno con sus ventajas y desventajas. Casi todos los métodos funcionan mediante reacción, es decir, aprovechan la fuerza de reacción producida por las partículas expelidas a alta velocidad desde una apertura. Estas partículas pueden ser sólidas, líquidas o gaseosas y la capacidad de un motor para producir empuje sólo durará lo que dure la disponibilidad de partículas. La expulsión de material es la esencia de la producción de empuje y sin ello no se producirá ningún empuje, independiente de cuánta energía haya disponible. La forma de energía utilizada para acelerar estas partículas varía y puede ser química, eléctrica o nuclear.

1.2.1. Conceptos de Propulsión

Δv (Delta-V)

La órbita de un satélite queda definida por su posición y velocidad respecto a la Tierra para un determinado instante de tiempo. Ésto significa que si se desea cambiar la forma de la órbita de un satélite, éste debe experimentar cambios en el parámetro de posición o velocidad. Sin embargo, resulta imposible en la realidad cambiar la posición sin cambiar la velocidad, es por ello que la única forma conocida de cambiar la órbita de un satélite en vuelo es mediante la modificación de velocidad.

Tal cambio de velocidad es conocido como Δv y ha sido utilizado hasta la actualidad en astrodinámica como una métrica para la cantidad de esfuerzo necesario para llevar a cabo una maniobra orbital, es decir, el cambio desde una órbita hasta otra.

Un cambio de órbita puede tener diferentes estrategias y restricciones que resultan en distintos costos de Δv . Sin embargo, el cambio de velocidad que puede realizar un vehículo espacial es limitado por sus capacidades propulsivas, por lo cual se busca siempre minimizar el Δv necesario para realizar una maniobra orbital.

Impulso Específico

El Impulso Específico I_{sp} es una medida de cuán efectivamente un sistema de propulsión a reacción utiliza su combustible/propelente. Por definición es el impulso total entregado por cada unidad de propelente consumido [10, p.300].

$$I_{sp} = \frac{F_{empuje}}{\dot{m}} \quad (1.19)$$

Ésto implica que un sistema de propulsión con un impulso específico más alto utiliza la masa de propelente más eficientemente para generar empuje lo cual implica una cantidad menor de propelente será utilizado para generar un mismo Δv .

El I_{sp} expresado en términos de masa posee unidades de distancia por unidad de tiempo, lo cual corresponde a la velocidad de escape (*exhaust*) de la masa expelida por el vehículo. Por razones históricas, sin embargo, el I_{sp} ha sido expresado en términos de peso, por lo cual sus unidades quedan expresadas en segundos. Se ha acordado en la comunidad aeroespacial el continuar utilizando Esta notación aun si no posee un sentido físico tan claro como el caso de las unidades de velocidad. Es posible, sin embargo, pasar de una expresión a otra mediante la utilización de g_0 , la constante de aceleración de gravedad en la superficie terrestre[5]:

$$I_{sp} = \frac{v_e}{g_0} \quad (1.20)$$

donde:

- v_e es la velocidad de escape efectiva, con la que es expelida la masa de propelente.
- g_0 es la constante de aceleración de gravedad en la superficie terrestre, $9.80665 \frac{m}{s^2}$.

Dependiendo del sistema de propulsión a utilizar se pueden obtener distintos valores de empuje e I_{sp} . Idealmente lo que se desea es obtener la mayor cantidad de empuje y la mayor cantidad de I_{sp} , sin embargo, Estas variables suelen ser usualmente opuestas, por lo cual la tendencia es hacia sistemas de bajo empuje y alto I_{sp} .

Tabla 1.1: Algunos Impulsos Específicos Típicos. Fuente: [10, p.300]

Propelente	v_e [m/s]	I_{sp} [s]
Gas Frío	5,09	50
Hidrazina Monopropelente	23,45	230
Propelente Sólido	29.57	290
Ácido Nítrico/monometilhidrazina	31.61	310
Oxígeno Líquido/Hidrógeno Líquido	46.39	455
Propulsión Iónica	305.91	>3000

Ecuación de Tsiolkovsky y Presupuesto Delta-V

La ecuación de Tsiolkovsky describe el movimiento de vehículos que siguen el principio básico de un cohete: un vehículo que puede aplicar aceleración sobre sí mismo utilizando fuerza de empuje (*thrust*), expulsando una parte de su masa a gran velocidad y por lo tanto moverse debido al principio de conservación del momentum.

La ecuación relaciona el máximo cambio de velocidad que es posible, en condiciones ideales, dado una masa inicial y final del vehículo y la velocidad de escape efectiva del propelente, es decir, la velocidad con que la masa de propelente/combustible es expelida [6]:

$$\Delta v = v_e \ln \frac{m_0}{m_f} = g_0 I_{sp} \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (1.21)$$

donde:

- Δv o delta-v es el máximo cambio de velocidad posible para el vehículo.

- m_0 es la masa inicial total del vehículo, incluido el propelente. También conocida como la masa húmeda.
- m_f es la masa total final sin propelente. También conocida como masa seca.
- v_e es la velocidad de escape efectiva del propelente.

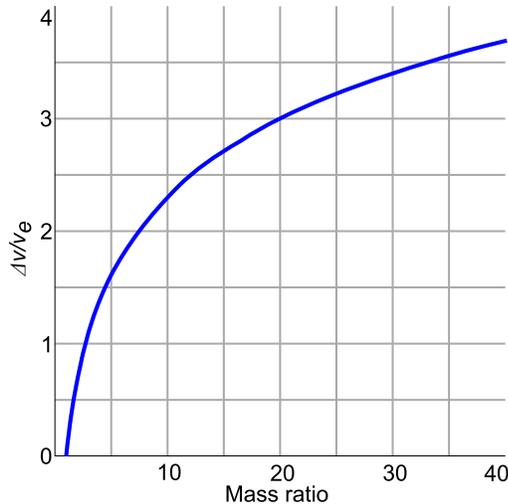


Figura 1.2: Razón de masa versus velocidad calculada a partir de la ecuación de Tsiolkovsky. Fuente: [6]

1.2.2. Propulsión Eléctrica

Un sistema de propulsión eléctrica se diferencia de uno tradicional en que utiliza la energía eléctrica para acelerar propelente en lugar de energía química. Los propulsores eléctricos típicamente utilizan mucho menos propelente que un propulsor químico tradicional pues tienen mayores velocidades de expulsión de propelente y por lo tanto mayor I_{sp} . Sin embargo, debido a que la potencia eléctrica es limitada en un satélite, el empuje es mucho menor pero se pueden proveer por mayores tiempos. Existen varios tipos de propulsores eléctricos que se pueden agrupar en tres familias [2]:

Electroestáticos

Si la aceleración de las partículas es causadas principalmente por la fuerza de Coulomb, es decir, la aplicación de un campo eléctrico estático en la dirección de aceleración. Algunos ejemplos son:

- Iónico cuadrulado
- Efecto Hall
- Ion Coloide
- Emisión de Campo (FEED)

Electrotermales

Este tipo de propulsores utiliza la energía eléctrica para generar calor en forma resistiva o plasma para impartir energía térmica en un propelente gaseoso que es luego convertido en energía cinética mediante una tobera. Algunos ejemplos son:

- Arcjet
- Arcjet microondas
- Resistojet

Electromagnéticos

Los iones son acelerados mediante la fuerza de Lorentz o por el efecto de campos electromagnéticos donde el campo eléctrico no está en la dirección de la aceleración. Algunos ejemplos son:

- Plasma Pulsado (PPT)
- Inducción Pulsada

1.2.3. Modelo de Energía/Potencia

El empuje disponible es una función de la potencia disponible en el sistema de propulsión. Un número de modelos de potencia han sido implementados. El más simple asume una cantidad de potencia suficiente para proveer un empuje constante a un valor máximo $T_a = T_{max}$. De otro modo, el empuje disponible es determinado por un valor de porcentaje de aceleración (*throttle*) D , una eficiencia energética η y una potencia disponible P_a [7, p.18].

$$T_a = \frac{2D\eta P_a}{I_{sp}g_0} \quad (1.22)$$

La potencia disponible mediante los paneles solares se obtiene mediante un modelo de potencia solar de inversa al cuadrado. En este modelo la potencia decae con el cuadrado de la distancia heliocéntrica.

$$P_a = \frac{AU^2}{r_{sc/\odot}^2} P_0 \quad (1.23)$$

donde P_0 es la potencia de referencia a una AU y $r_{sc/\odot}$ es la posición del satélite respecto al Sol.

1.3. Maniobras Orbitales

Una maniobra orbital corresponde al uso de sistemas de propulsión para cambiar la órbita de un vehículo espacial.

1.3.1. Maniobras Orbitales de Alto Empuje

Las maniobras impulsivas son un modo de modelar una maniobra, en la cual el tiempo de propulsión es muy pequeño comparado con el período de la órbita. En este escenario las maniobras son consideradas instantáneas, es decir, durante la ejecución de la maniobra se considera que el vehículo espacial está quieto en un punto del espacio y sólo la velocidad cambia. Una maniobra impulsiva es una idealización mediante la cual se evita tener que resolver las ecuaciones de movimiento incluyendo la fuerza de empuje del propulsor.

1.3.2. Mantenimiento Orbital (*Station Keeping*)

Como se vió anteriormente en la parte de perturbaciones, existen fuerzas no keplerianas que causan que un cuerpo orbitando alrededor de otro no sea capaz de mantener una órbita estática, por lo cual en muchos casos se hace necesario corregirla cada cierto tiempo. *Station Keeping* corresponde a la operación necesaria para mantener un vehículo espacial en su órbita asignada. Esta operación se realiza mediante una o varias maniobras orbitales ejecutadas mediante el uso de propulsores.

1.3.3. De-orbiting

El incremento en los escombros presenta un riesgo cada vez mayor en el futuro del vuelo espacial. Para solucionar este problema de manera efectiva, se ha convertido en un requerimiento clave que las misiones futuras posean medios para la eliminación de desechos al término de la vida útil de un satélite. El principal medio propuesto para ello es mediante la de-orbitación del satélite al término de su vida útil. Ésto se realiza mediante una maniobra orbital que cause la disminución de la velocidad orbital ya sea de forma activa o pasiva.

1.3.4. Elementos Equinociales Modificados [13]

Los elementos orbitales clásicos o keplerianos no son siempre los más adecuados para modelar maniobras orbitales pues sufren de dos singularidades. La primera es cuando la órbita es circular, es decir, cuando la excentricidad es cero ($e = 0$). En este caso el perigeo y apogeo se indefinen y por lo tanto también lo hace el argumento de perigeo ω . La segunda ocurre cuando la órbita es ecuatorial, es decir, cuando la inclinación es cero ($i = 0$). En este caso el nodo ascendente está indefinido y también la ascensión recta del nodo ascendente Ω . Para sobrepasar éstos obstáculos se han definido elementos especiales llamados elementos equinociales, los cuales ayudan a evitar los problemas numéricos asociados a la utilización de elementos keplerianos. Éstos parámetros son p , el semi-parámetro, f y g que describen la excentricidad de la órbita, h y k que describen la inclinación y L que es la verdadera longitud.

Se pueden relacionar a los elementos keplerianos mediante las ecuaciones:

$$p = a(1 - e^2) \quad (1.24a)$$

$$f = e \cos(\omega + \Omega) \quad (1.24b)$$

$$g = e \sin(\omega + \Omega) \quad (1.24c)$$

$$h = \tan\left(\frac{i}{2}\right) \cos(\omega) \quad (1.24d)$$

$$k = \tan\left(\frac{i}{2}\right) \sin(\omega) \quad (1.24e)$$

$$L = \omega + \Omega + \nu \quad (1.24f)$$

La conversión a elementos cartesianos se realiza mediante las siguientes ecuaciones:

$$\alpha^2 = h^2 - k^2 \quad (1.25a)$$

$$s^2 = 1 + h^2 + k^2 \quad (1.25b)$$

$$w = 1 + f \cos(L) + g \sin(L) \quad (1.25c)$$

$$r = \frac{p}{w} \quad (1.25d)$$

$$x = \frac{r}{s^2} (\cos(L) + \alpha^2 \cos(L) + 2hk \sin(L)) \quad (1.25e)$$

$$y = \frac{r}{s^2} (\sin(L) - \alpha^2 \sin(L) + 2hk \cos(L)) \quad (1.25f)$$

$$z = \frac{r}{s^2} (h \sin(L) - k \cos(L)) \quad (1.25g)$$

1.3.5. Formulaciones y técnicas de perturbación

Existen tres técnicas diferentes para examinar los efectos de las perturbaciones: técnicas de perturbación especial, técnicas de perturbación general y técnicas semianalíticas [21]. A continuación se presentan las características de cada una:

Técnicas de perturbación especial

Estas técnicas integran numéricamente las ecuaciones de movimiento incluyendo todas las perturbaciones necesarias. El término "perturbación especial" viene del hecho que, como involucra integración numérica, la solución sólo es válida para las condiciones iniciales y parámetros utilizados como entradas del problema. La técnica de propagación mejor conocida que cae bajo la categoría de perturbaciones especiales es el **Método de Cowell**. Esta formulación utiliza la posición y velocidad de manera que [10, p.659]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Técnicas de perturbacion general

Las técnicas de perturbación general reemplazan las ecuaciones de movimiento originales con una aproximación analítica que captura el carácter esencial del movimiento sobre un tiempo limitado que permite también la integración analítica.

Este método aplica a una variedad de ecuaciones de movimiento con perturbaciones, en particular las ecuaciones de **variación de parámetros (VOP)**. Las ecuaciones de variación de parámetros son un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la variación de los elementos orbitales en el tiempo (ya sean clásicos o equinocciales). Esta técnica fue desarrollada tanto por Gauss como Lagrange para analizar perturbaciones. **La formulación de Gauss**, en lugar de integrar los parámetros cartesianos, utiliza los elementos keplerianos y separa las perturbaciones en un sistema coordenado RSW [10, p.681].

$$\frac{dh}{dt} = rp_s \quad (1.27a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{h}{\mu} \sin \nu p_r + \frac{1}{\mu h} [(h^2 + \mu r) \cos \nu + \mu e r] p_s \quad (1.27b)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{h} \cos(\omega + \nu) p_w \quad (1.27c)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{h \sin i} \sin(\omega + \nu) p_w \quad (1.27d)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{eh} \left[\frac{h^2}{\mu} \cos \nu p_r - \left(r + \frac{h^2}{\mu} \right) \sin \nu p_s \right] - \frac{r \sin(\omega + \nu)}{h \tan i} p_w \quad (1.27e)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{1}{eh} \left[\frac{h^2}{\mu} \cos \nu p_r - \left(r + \frac{h^2}{\mu} \right) \sin \nu p_s \right] \quad (1.27f)$$

donde la perturbación $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_r \\ p_s \\ p_w \end{bmatrix}$ en el sistema RSW y $r = \frac{h^2}{\mu(1+e \cos \nu)}$.

Esta formulación, que es la utilizada en este trabajo, puede **expresarse en términos de elementos equinocciales**, en este caso expresado de manera matricial. Las ecuaciones de movimiento luego se definen como [7]:

$$\dot{x} = A(x)\Delta + b$$

donde:

$$x = [p \quad f \quad g \quad h \quad k \quad L]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2p}{q} \sqrt{\frac{p}{\mu}} & 0 & & & \\ \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin L & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{q} [(q+1) \cos L + f] & -\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{g}{q} (h \sin L - k \cos L) & & & \\ -\sqrt{\frac{p}{\mu}} \cos L & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{q} [(q+1) \sin L + g] & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{f}{q} (h \sin L - k \cos L) & & & \\ 0 & 0 & & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2 \cos L}{2q} & & \\ 0 & 0 & & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2 \sin L}{2q} & & \\ 0 & 0 & & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{q} (h \sin L - k \cos L) & & \end{bmatrix}$$

$$b = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2 \right]^T$$

y Δ , las perturbaciones en el sistema de referencia RSW (*radial-traverse-normal*) del satélite.

Técnicas semianalíticas

Existe una compensación entre velocidad computacional y precisión dependiendo de si se utiliza el método de perturbaciones general o especial. Las técnicas semianalíticas intentan combinar lo mejor de ambos mundos. El enfoque básico en los métodos semianalíticos es separar las perturbaciones periódicas de corto tiempo de los efectos que son de largo período o seculares, de modo que el promedio de la variación de los elementos pueda ser integrado.

1.3.6. Soluciones Históricas para problema de maniobras de bajo empuje

Métodos indirectos

Los enfoques clásicos a optimización de trayectoria de bajo empuje emplean control óptimo y son llamados métodos indirectos o métodos de multiplicadores de Lagrange. Uno de los primeros resultados es aquel postulado por Edelbaum para transferencia entre órbitas circulares de diferentes semi-ejes mayores e inclinaciones. Edelbaum desarrolló una solución analítica para maximizar el cambio de inclinación Δi al mismo tiempo que se lograba un cambio en el semi-eje mayor Δa indicado entre órbitas circulares [12]. Edelbaum asumió que la órbita se mantenía circular a través de toda la transferencia, con un ángulo de empuje constante entre cada revolución, un empuje constante y considerando una dinámica de dos cuerpos. Este modelo, sin embargo, no toma en cuenta el consumo de propelente y no permite tener períodos sin aceleración (*coasting*). Kéchichian reformuló la transferencia de Edelbaum como un problema de mínimo tiempo y encontró una expresión analítica para el ángulo variante en el tiempo para obtener el Δa y Δi deseados [19].

Edelbaum luego extendió su análisis para obtener solución para pequeños cambios en cualquiera de los elementos orbitales para órbitas elípticas, considerando nuevamente aceleración constante y un modelo de dinámica de dos cuerpos [11]. Kéchichian obtuvo las ecuaciones de movimiento para el problema de minimización de tiempo para encuentro espacial (*rendezvous*) utilizando elementos equinociales y presentó una solución numérica utilizando una iteración de Newton-Raphson [18]. Sugirió una técnica de promediado para extender este resultado a rendezvous de larga duración y mejoró la transferencia de Edelbaum para incluir cambios en la ascensión recta del nodo ascendente $\Delta \Omega$ y la perturbación J_2 de la Tierra en el modelo dinámico [17].

Leyes de control

De manera similar al enfoque indirecto, las leyes de control utilizan sólo unos pocos parámetros para determinar una regla para maniobrar durante una transferencia. Si bien las soluciones indirectas son leyes de control óptimas determinadas por multiplicadores de Lagrange, las leyes de control subóptimas siguen una heurística que puede ser particularmente útiles en el diseño de una misión e incluso acercarse a las soluciones óptimas. Las leyes de control pueden definir por ejemplo la dirección y magnitud del empuje en función del tiempo o la posición angular. Las ecuaciones de movimiento son luego evaluadas con el empuje previamente definido en la ley de control hasta que la órbita deseada se alcance. Las leyes de control heurísticas en general dan resultados subóptimos pero siguen una política que puede ser aceptable en el diseño de una misión. Pueden ser también muy útiles para obtener una adivinanza inicial para una optimización posterior.

Optimización Directa

En el método de optimización directa, un vector de decisión es formado por variables de control, de estado y otros parámetros que describen una trayectoria completa. Luego se aplica un procedimiento de optimización [9] que actualiza el vector de decisión iterativamente hasta que el criterio de convergencia se alcance. Este método normalmente se utiliza para el diseño de misiones específicas [8][7] y requiere de experiencia en métodos de optimización para reconocer el tipo de problema de optimización, qué *solver* utilizar y cómo ajustar sus parámetros.

Por Esta razón este método no será el enfoque de este trabajo, si no la utilización y evaluación de leyes de control predeterminadas.

Capítulo 2

Creación Modelo

El código ha sido distribuido en 5 archivos:

- **constants.py:** en este código se definen todas las constantes a ser usadas en el resto del código como las constantes gravitacionales estándares de la Tierra, el Sol y la Luna, el radio de la Tierra, la constante de gravedad y las masas de la Tierra, la Luna y el Sol, entre otras.
- **coordinates.py:** en este código se definen funciones que son de ayuda para transformar las coordenadas de keplerianas a cartesianas, de cartesianas a keplerianas, de keplerianas a equinocciales, de equinocciales a keplerianas, de cartesianas a equinocciales y de equinocciales a cartesianas.
- **models.py:** en este código se definen clases y funciones que conforman los modelos físicos a utilizar, como por ejemplo el modelo de densidad atmosférica, el modelo de posición lunar y solar, y finalmente los modelos utilizados en el satélite, como los modelos de propulsores, los modelos de paneles solares, baterías, energía y los modelos de satélite en sí (incorporando cosas como masa, coeficiente balístico, etc).
- **maneuvers.py:** en este código se encuentran las funciones que realizan el trabajo de calcular la dinámica orbital, y las funciones con las que interactúa el usuario para poder añadir las perturbaciones que desee y propagar el movimiento por el tiempo que se desee.
- **auxiliary.py:** en este código se definen funciones auxiliares o misceláneas que tienen como propósito facilitar la interacción del usuario. En este momento sólo se tiene un extractor de elementos a partir de un TLE y una función para facilitar la mantención del aspect ratio al graficar en 3D.

Estos archivos pueden ser encontrados en el repositorio de GitHub:

<https://github.com/MrPapasFritas/orbital-mechanics> junto con una multitud de archivos de Jupyter con demostraciones de cómo utilizar la librería, además de los estudios explorados en este trabajo.

2.1. Base

La función más relevante de la librería es `propagate()`, localizada en `maneuvers.py`

En primer lugar se implementó la dinámica utilizando la formulación de Cowell. Como se decidió que el programa aceptara como condición inicial los parámetros orbitales keplerianos, se implementó una función de transformación de coordenadas kepleranas a cartesianas para poder utilizar la posición y velocidad.

El vector de entrada se definió en el orden `a`, `e`, `i`, `omega`, `Omega`, `nu`, donde `a` es el semieje-mayor, `e` la excentricidad, `i` la inclinación, `omega` el argumento del perigeo, `Omega` el RAAN, y `nu` la anomalía verdadera.

Para integrar la ecuación diferencial se utilizó la función `odeint`, de la librería `integrate` de `scipy`. Dicha función utiliza el solver *LSODA* de la librería `odepack` de FORTRAN. Este solver es de paso adaptativo, es decir, va variando su paso de integración a lo largo del tiempo dependiendo de la pendiente en la que esté. La función `odeint`, además, toma como argumentos la función que se desea integrar, las condiciones iniciales de dicha función y un vector de tiempo sobre el cual será integrada la función.

Dentro de la función a integrar es necesario definir las ecuaciones diferenciales pertinentes para la integración. Lo que debe devolver esta función es el diferencial, el cual es integrado por la función `odeint`. Es importante que la función devuelva un vector del mismo tamaño que las condiciones iniciales (y con los diferenciales correspondiente a cada variable del vector de entrada).

En este caso la función a integrar se nombró `cowell()`.

El esquema de funcionamiento, por lo tanto, se visualiza como sigue:

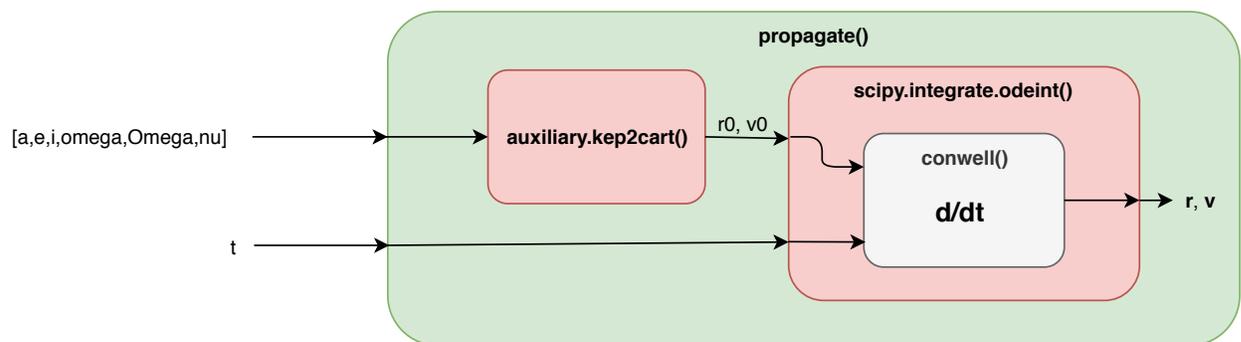


Figura 2.1: Diagrama de base del algoritmo de propagación, integrando mediante la formulación de Cowell. Fuente: Autor.

Luego de realizar algunas pruebas se pudo comprobar que integrar la posición y velocidad mediante la formulación de Cowell no era lo más adecuado, pues se iba acumulando un error en el tiempo y la energía iba cambiando lentamente, aún cuando sólo se integraba la órbita osculante.

Por esta razón se decidió agregar una segunda opción para la función de integración, utilizando la formulación de variación de parametros mediante utilización de elementos equinocciales.

Para evitar conflictos en el escenario en que cualquiera de los dos métodos sea usado, se decidió que todos los outputs fueron transformados a elementos keplerianos, cartesianos y equinocciales al terminar la integración.

De modo que su funcionamiento quedó como sigue:

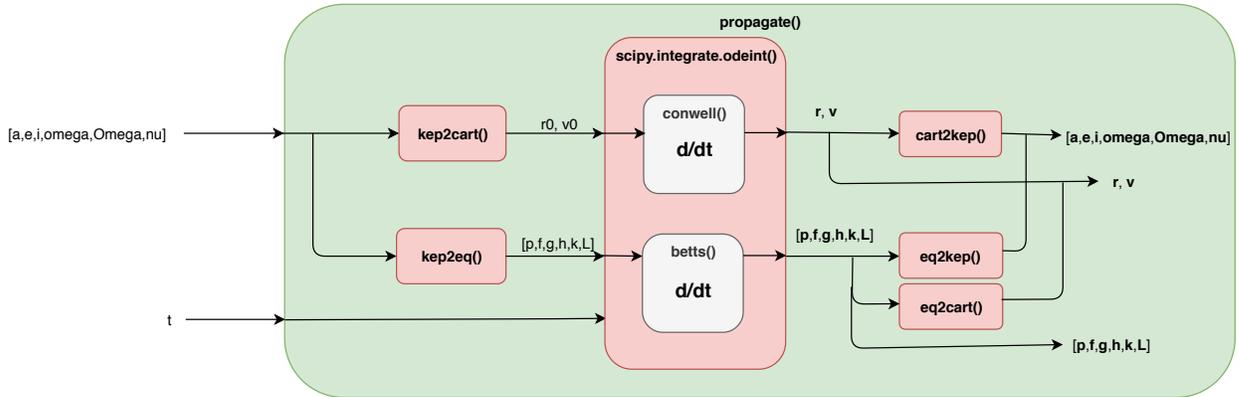


Figura 2.2: Diagrama de base del algoritmo de propagación, integrando ambas formulaciones. Fuente: Autor.

2.2. Clase Maneuvers y ManeuversHistory

Para ordenar el código se implementó una clase `Maneuvers`, de modo que la información quedara almacenada dentro del objeto y la función `propagate()` quedara como un método de la clase.

Además se definió la clase `ManeuversHistory`, la cual es usada de manera interna por `Maneuvers` para almacenar la serie de tiempo de los datos resultantes de la propagación, así se definen los campos:

- `Maneuvers.ManeuversHistory.r`: Vectores de distancia del centro de la Tierra al vehículo espacial en el sistema ECI.
- `Maneuvers.ManeuversHistory.v`: Vectores de velocidad del vehículo espacial en el sistema ECI.
- `Maneuvers.ManeuversHistory.coe`: Elementos orbitales clásicos ($a, e, i, \omega, \Omega, \nu$).
- `Maneuvers.ManeuversHistory.mee`: Elementos Equinocciales Modificados (p, f, g, h, k, L).
- `Maneuvers.ManeuversHistory.propMass`: Masa de propelente remanente.
- `Maneuvers.ManeuversHistory.t`: Tiempo transcurrido desde $t = 0$.
- `Maneuvers.ManeuversHistory.datetime`: Timestamps tipo `datetime` de la fecha de simulación para cada paso de tiempo.

2.3. Perturbaciones

Para implementar las perturbaciones que afectan la dinámica del satélite se definieron en `Maneuvers` los métodos `addPerturbation()` y `removePerturbation()`, dichos métodos se encargan de activar y desactivar *flags* dentro de `Maneuvers`, dependiendo del argumento que sea pasado a las funciones. Éstos *flags* son luego utilizados a la hora de calcular el valor de las perturbaciones en el método `calculatePerturbations()`. Las perturbaciones que han sido implementadas son:

- `atmosphere`: correspondiente al efecto del arrastre atmosférico sobre el satélite.
- `J2`: correspondiente al efecto de los armónicos gravitacionales causados por la forma achatada de la Tierra.
- `solar_pressure`: corresponde a la presión solar causada sobre el satélite por la radiación del Sol.
- `moon_gravity`: corresponde al efecto gravitacional de la Luna sobre el satélite.
- `sun_gravity`: corresponde al efecto gravitacional del Sol sobre el satélite.

2.4. Propulsión

El efecto de la propulsión del satélite puede ser modelado como una perturbación adicional y por lo tanto es activada también llamando al método `addPerturbation()`. Para definir una propulsión ha sido necesario implementar previamente dos clases adicionales:

En primer lugar, la clase `Spacecraft`, que define atributos como:

- `dryMass`: la *masa seca* del satélite, que corresponde a la masa del satélite en ausencia de combustible/propelente.
- `wetMass`: la *masa húmeda* del satélite, que corresponde a la masa total del satélite considerando el propelente.
- `area`: que corresponde al área de ataque del satélite para efectos de cálculo del arrastre atmosférico.
- `Cd`: el coeficiente de arrastre atmosférico.
- `Cr`: el coeficiente de reflexividad, para efectos de presión de radiación solar.

Además, se ha implementado una función denominada `BC()`, que corresponde al coeficiente balístico.

En segundo lugar se ha implementado una clase `Thruster` que modela el comportamiento de un propulsor. En esta clase se definen atributos como:

- `thrust`: el empuje entregado por el propulsor, normalmente en el rango de μN y mN para el caso de propulsión de bajo empuje.
- `isp`: el impulso específico característico del propulsor, usualmente en el rango de 600 a 5000 en el caso de propulsión de bajo empuje.

- **eta**: la eficiencia del propulsor.
- **massFlowRate**: el flujo másico del propulsor, el cual depende de **thrust** e **isp** y es utilizado para el cálculo de la cantidad de propelente utilizado y por ende su duración.
- **power**: La potencia nominal utilizada por el propulsor cuando se encuentra operando con empuje nominal.

Una vez definido un propulsor es posible integrarlo a un objeto tipo **Spacecraft**.

Como este tipo de perturbación tiene más sentido definirla en el sistema de referencia del satélite (RSW), es necesario a veces que sea transformado al sistema ECI (*Earth Centered Inertial*).

2.5. Energía

Para poder analizar los gastos energéticos en términos de Potencia y Energía se han implementado, también, modelos de Paneles Solares y Baterías.

2.5.1. Paneles Solares

La clase **solarPanels** modela la captación de energía del Sol por parte de paneles solares. En esta clase se definen atributos como:

- **n**: La cantidad de paneles instalados.
- **area**: El área de cada panel.
- **efficiency**: La eficiencia de cada panel.
- **nominalPower**: La potencia nominal entregada por el panel cuando está sometido a condiciones nominales, considerando especialmente una radiación nominal de 1367 W/m^2 .

La potencia entregada por el panel es ajustada de acuerdo a la distancia que se encuentre del Sol (a mayor distancia menor radiación y por ende menor potencia), y a los períodos de eclipse cuando la Tierra se encuentra tapando el Sol y por ende la Potencia Entregada se convierte en 0.

2.5.2. Baterías

La clase **Battery** modela el almacenamiento de la energía por medio de baterías. En esta clase se definen atributos como:

- **P**: El número de celdas en paralelo.
- **S**: El número de celdas en serie.

- **voltage**: El voltaje de las baterías, equivalente al voltaje de una celda por la cantidad de celdas en serie.
- **capacity**: La capacidad de carga de las baterías en mAh, correspondiente a la capacidad de una celda por la cantidad de celdas en paralelo.
- **energy**: La capacidad energética de la batería, en términos de Wh, correspondiente al voltaje de la batería por su capacidad.
- **chargePower** y **dischargePower**: La potencia de carga y descarga nominales, respectivamente, que es capaz de manejar la batería.

2.5.3. Balance Energético

En cada paso de tiempo de la integración se realiza un balance energético simple entre los paneles solares, el propulsor y las baterías. En primer lugar se determina la cantidad de potencia y energía disponible para ser utilizada por el propulsor:

$$P_{Avail} = P_{SP} + P_{Batt}^{Discharge} - P_{Other} \quad (2.1)$$

donde P_{Batt} corresponde a la potencia entregada por las baterías, la cual será cero si no hay energía disponible en las baterías; P_{SP} corresponde a la potencia entregada por los paneles solares, la cual será cero si es que se encuentra eclipsado por la Tierra; y P_{Other} , corresponde a la potencia que consume el resto de los sistemas del satélite, la cual se ha elegido arbitrariamente como un porcentaje de la potencia entregada por los paneles solares.

La potencia disponible es evaluada por el propulsor para determinar el grado de propulsión que podrá dar. En el caso que exista suficiente potencia disponible, el propulsor utilizará su potencia máxima nominal para máximo empuje, o bien la potencia acorde al nivel de empuje configurado. En caso que las baterías se hayan agotado, el propulsor sólo podrá utilizar la potencia que estén entregando los paneles solares y por lo tanto el empuje resultante será menor.

La potencia efectiva utilizada por el propulsor es finalmente utilizada para determinar el balance energético final en la batería:

$$\frac{dE_{Batt}}{dt} = P_{Batt} = P_{SP} - P_{Other} - P_{Thruster} \quad (2.2)$$

Un ejemplo del uso de energía por parte del propulsor puede ser observado en la fig 2.3.

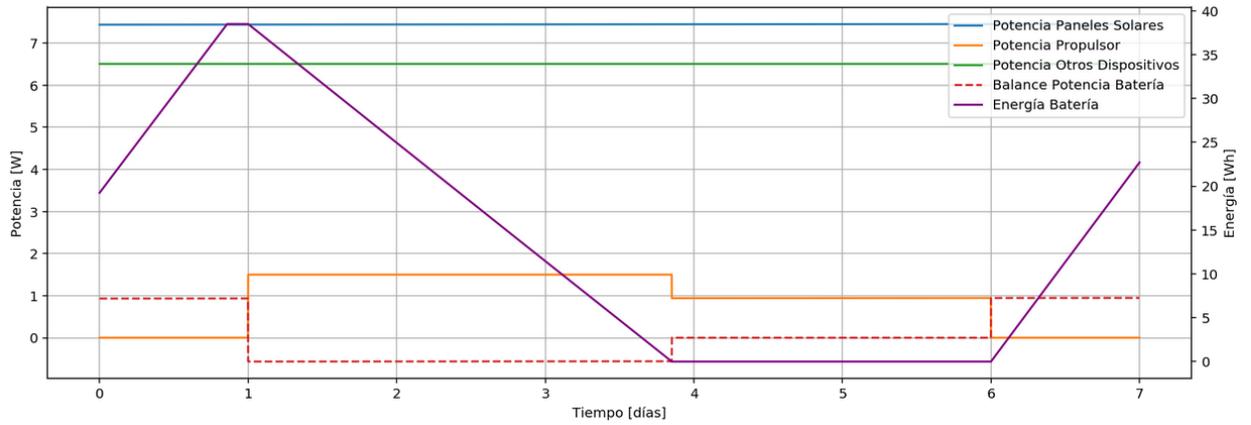


Figura 2.3: Ciclo de carga de batería debido al uso de propulsor. Fuente: Autor.

En la figura anterior se observa la batería cargándose inicialmente hasta alcanzar una carga máxima de 36.5 Wh, luego comienza a funcionar el propulsor con una potencia que no alcanza a ser cubierta por los paneles solares, por lo cual la energía se extrae de la batería hasta descargarla completamente. Cuando se descarga la batería, el propulsor sólo puede utilizar la potencia remanente del panel solar, por lo cual adapta su punto de operación (empuje) para consumir un nivel de potencia equivalente a éste. Una vez que se apaga el propulsor, la batería vuelve a cargarse.

Otro ejemplo de ciclo de carga de batería incluyendo el fenómeno de eclipse en los paneles solares puede ser consultado en el **Anexo 3**

2.6. Perfilado de empuje

Se ha implementado también la capacidad de incluir un perfil de empuje para el satélite a partir de los elementos orbitales, de manera que la dirección de empuje no esté restringida a una dirección única durante toda la integración.

De esta manera se definen los ángulos α y β como se observa en la figura 2.4

Así, se implementa el atributo `Maneuvers.thrustProfile`, que corresponde a una tupla que guarda los *callbacks* de las funciones que calculan los ángulos α y β a partir de los elementos orbitales keplerianos de la órbita osculante. Esta tupla es luego utilizada para calcular la dirección del empuje a lo largo de la integración.

Las transformaciones de vector a empuje se dan como sigue:

$$\alpha = \arctan \frac{T_r}{T_s} \quad (2.3a)$$

$$\beta = \arcsin \frac{T_n}{\|\mathbf{T}\|} \quad (2.3b)$$

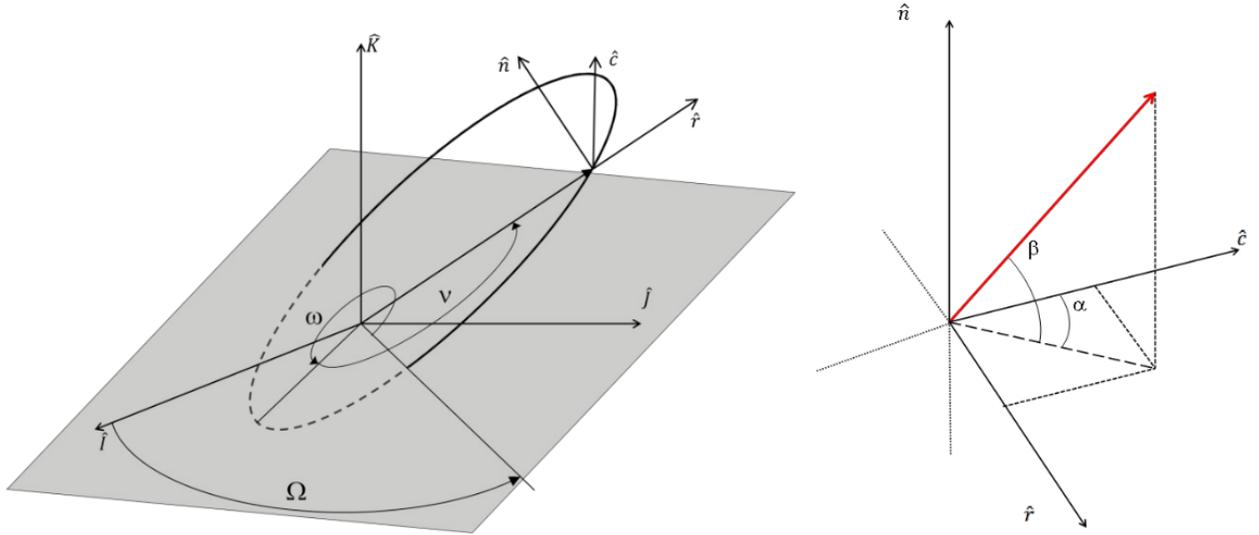


Figura 2.4: Definición de los ángulos α y β en el sistema RSW (también llamado RCN). Fuente: [25]

$$\mathbf{T} = \|\mathbf{T}\| \begin{bmatrix} \cos \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

De acuerdo a [25], al tomar las ecuaciones de variación de parámetros de Gauss, reemplazando las componentes de las perturbaciones por la forma definida en 2.4 y derivando con respecto a α y a β , se obtienen los ángulos instantáneos óptimos para la modificación máxima de todos los parámetros orbitales, los cuales pueden ser resumidos como sigue:

	Ángulos de propulsión	
	α	β
Semi-eje mayor (a)	$\tan^{-1}\left(\frac{e \sin(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}\right)$	0
Excentricidad (e)	$\tan^{-1}\left(\frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu) + \cos(E)}$	0
Inclinación (i)	0	$\text{sgn}(\cos(\omega + \nu)) \cdot \frac{\pi}{2}$
RAAN (Ω)	0	$\text{sgn}(\sin(\omega + \nu)) \cdot \frac{\pi}{2}$
Argumento del perigeo (ω)	$\tan^{-1}\left(\frac{1 + e \cos(\nu)}{2 + e \cos(\nu)} \cot(\nu)\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{e \cot(i) \sin(\omega + \nu)}{\sin(\alpha - \nu)(1 + e \cos(\nu)) - \cos(\alpha) \sin(\nu)}\right)$

Tabla 2.1: Ángulos óptimos instantáneos α y β en función de la anomalía verdadera (ν). Fuente: [25]

Vale mencionar que al ser estos ángulos el óptimo instantáneo, no es posible asegurar que su aplicación incurrirá en un óptimo total en la trayectoria de una maniobra orbital.

Por otro lado, mencionar que si bien la tabla anterior da una definición de los ángulos óptimos instantáneos para todos los puntos de la órbita, es posible determinar los puntos óptimos de la órbita donde el efecto en el cambio de los parámetros orbitales se maximiza. Dichos puntos se pueden resumir en la siguiente tabla:

	Anomalía Verdadera (ν)
Semi-eje mayor (a)	0
Excentricidad (e)	π
Inclinación (i)	$\sin(\nu_i + \omega) = -e \sin \omega$
RAAN (Ω)	$\cos(\nu_\Omega + \omega) = -e \cos \omega$

Tabla 2.2: Puntos de máximo cambio de parámetros orbitales. Fuente: [25].

Así, en el caso que apliquemos, por ejemplo, el perfil de la figura 2.5, se obtiene el resultado de la figura 2.6. En esta figura se puede observar que el semieje mayor efectivamente es el que aumenta. Este tipo de estrategias si bien cambian de manera mayoritaria el elemento orbital para el cual están diseñados, no aseguran que ningún otro elemento orbital sea modificado.

Se ha simulado de igual manera el perfil de empuje para la modificación del resto de los elementos orbitales, utilizando los perfiles indicados en la Tabla 2.1. Los resultados de éstos pueden ser vistos en el **Anexo 2**.

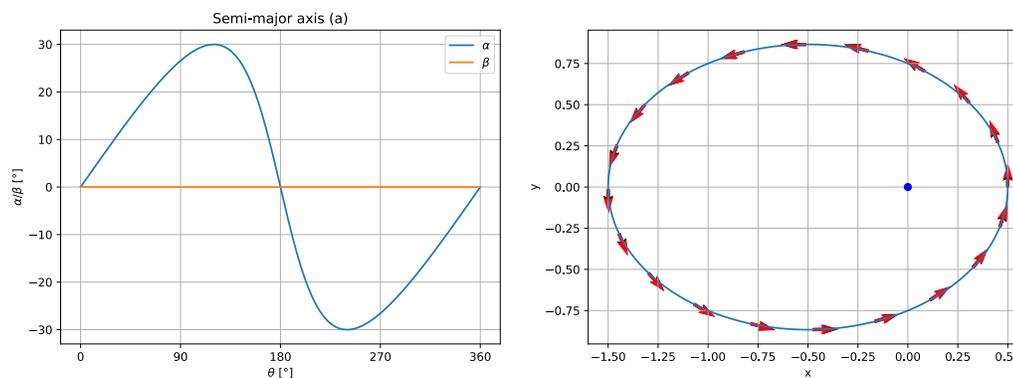


Figura 2.5: Perfil de empuje óptimo instantáneo para modificación de semieje mayor. Fuente: Autor.

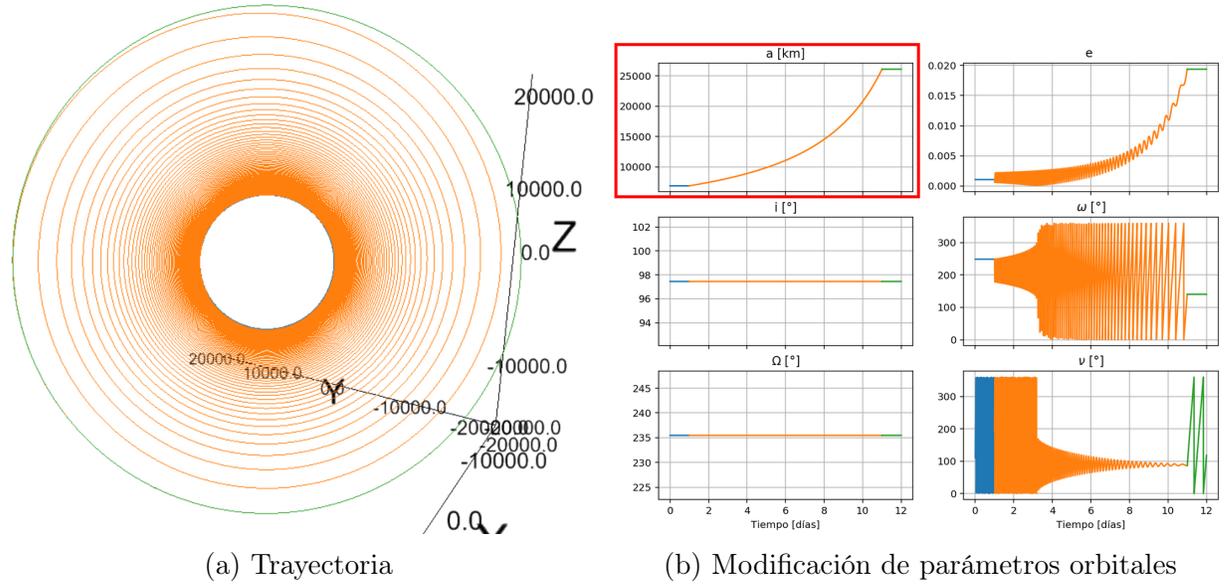


Figura 2.6: Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 2.5. Fuente: Autor.

2.7. Fijación de Órbita Objetivo

Si bien es posible modificar uno de los elementos orbitales utilizando los perfiles de empuje definidos en la Tabla 2.1 a veces lo que se desea es que varios elementos se modifiquen al mismo tiempo a modo de poder llegar un set de parámetros orbitales objetivo (*Targeting*).

Como estos parámetros son modificados de manera desigual para un mismo empuje y cantidad de tiempo, es muy probable que algunos elementos orbitales alcancen antes su objetivo. Es por ello que se utiliza la estrategia de utilizar *pesos* sobre los vectores correspondientes a cada parámetro basados en el grado de progreso que lleva tal parámetro para alcanzar el objetivo. Así, los vectores de empuje de los parámetros que lleven un menor progreso hacia su objetivo recibirán un peso mayor y por ende comenzarán a cambiar más rápido que aquellos que se encuentren avanzados. Ésto se puede expresar como:

$$\mathbf{T} = \sum_{COE} \frac{COE_1 - COE}{COE_1 - COE_0} \mathbf{T}_{COE} \quad (2.5)$$

donde COE , COE_1 y COE_0 representan respectivamente el valor osculante, objetivo e inicial de un elemento orbital específico, \mathbf{T} es el vector resultante de todos los vectores óptimos y \mathbf{T}_{COE} el empuje instantáneo óptimo para la modificación del parámetro COE .

Ésto también puede ser representado de manera matricial como:

$$w_{COE} = \frac{COE_1 - COE_0}{COE_1 - COE_0} \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{T}_a & \mathbf{T}_e & \mathbf{T}_i & \mathbf{T}_\omega & \mathbf{T}_\Omega \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_a \\ w_e \\ w_i \\ w_\omega \\ w_\Omega \end{bmatrix} \quad (2.6b)$$

De esta manera, si se define una órbita origen y una órbita objetivo a través de sus parámetros orbitales keplerianos, por ejemplo de $a_0 = 6879,84 \text{ km}$, $e_0 = 0,001054$, $i_0 = 1^\circ$; a $a_f = 13000 \text{ km}$, $e_f = 0,5$, $i_f = 45^\circ$, el sistema encuentra el ángulo óptimo para cambiar varios parámetros a la vez y de esta manera que todos los elementos lleguen a su objetivo al mismo tiempo. La evolución de este escenario puede observarse en la figura 2.7.

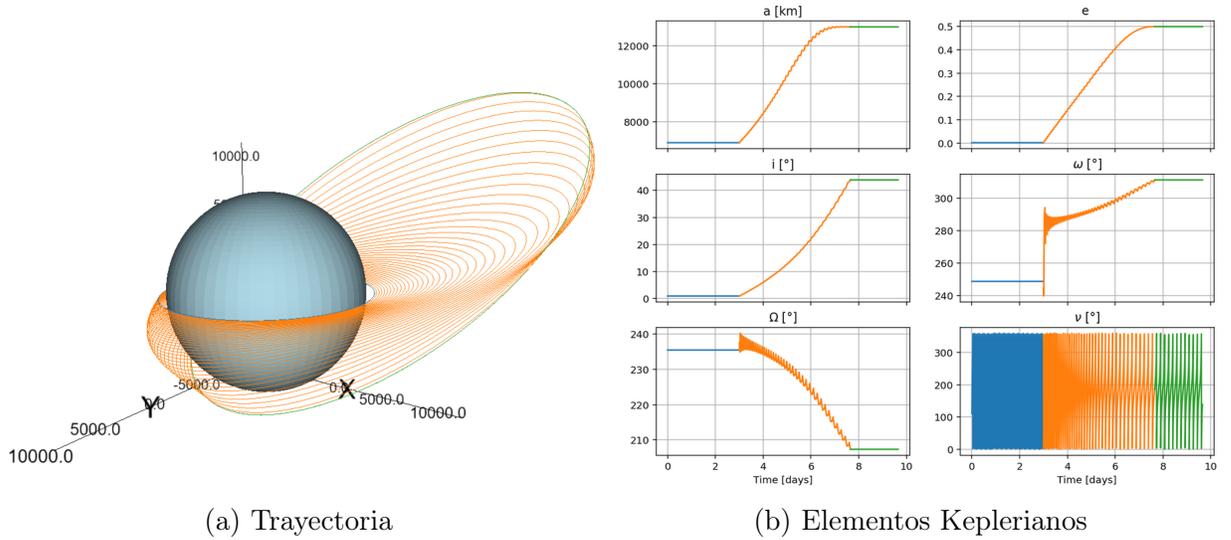


Figura 2.7: Evolución de una trayectoria desde una órbita origen a una órbita objetivo. Azul representa la órbita inicial, naranja el período en que se ejecuta la maniobra y verde la órbita final. Fuente: Autor.

2.8. Validación perturbaciones

Para verificar que las perturbaciones estuviesen modeladas de forma correcta, se procedió a ser comparadas con ejemplos de [10]. Como la mayoría de los ejemplos presentan una figura/imagen de los resultados de simulación, no es posible comparar el error directamente mediante datos. Sin embargo se ha hecho un esfuerzo por replicar las figuras de la manera más parecida posible utilizando las mismas divisiones y límites.

2.8.1. Arrastre Atmosférico

Esta perturbación fue verificada mediante el ejemplo presente en *p.659, Ejemplo 12.1*. En este ejemplo se utiliza un satélite esférico de 1 m de diámetro y 100 kg de masa. Las condiciones iniciales de la órbita pueden ser consultadas en el ejemplo. Es importante recalcar que este ejemplo utiliza el modelo atmosférico USSA76 (*US Standard Atmosphere 1976*). La comparación puede observarse en la fig 2.8.

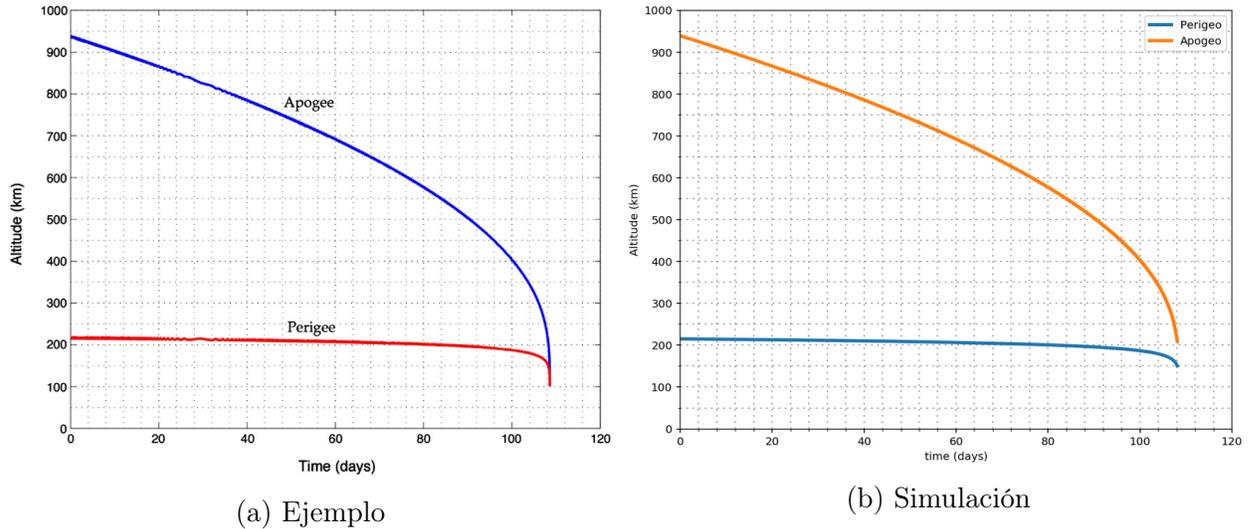
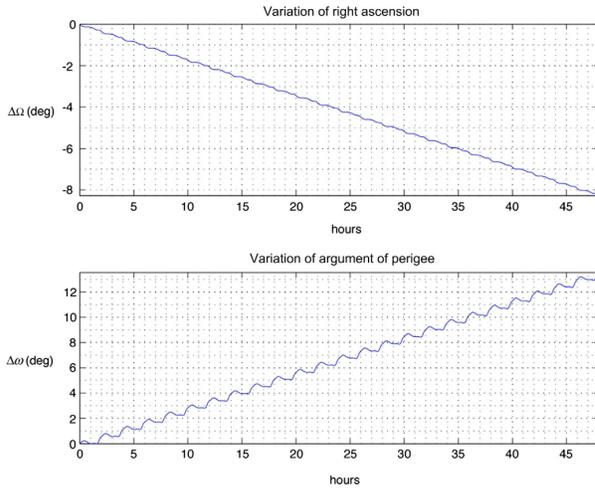


Figura 2.8: Comparación entre valores de apogeo y perigeo debido al arrastre atmosférico. Fuente: Autor.

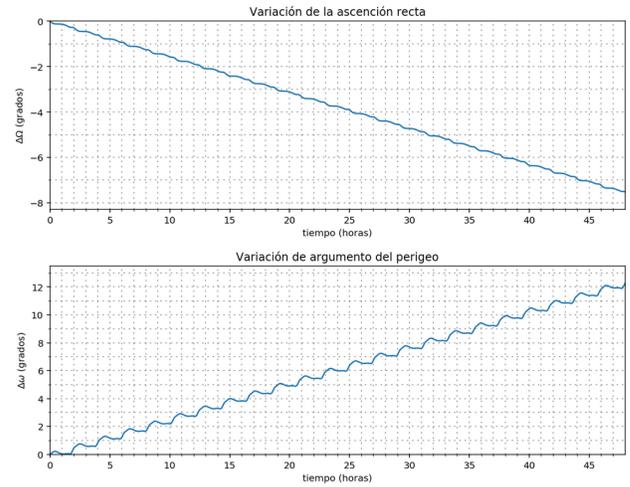
Se puede observar que ambas curvas son prácticamente iguales, por lo cual se asume que el modelo está funcionando correctamente.

2.8.2. J2

Esta perturbación fue verificada mediante el ejemplo presente en *p.665, Ejemplo 12.2..* Como esta perturbación no depende de la masa o el área de ataque, sólo se definen los parámetros orbitales iniciales (los cuales pueden ser consultados en el ejemplo). El efecto de esta perturbación es calculado para un período de 48 horas. La comparación puede observarse en la fig 2.9 y 2.10.

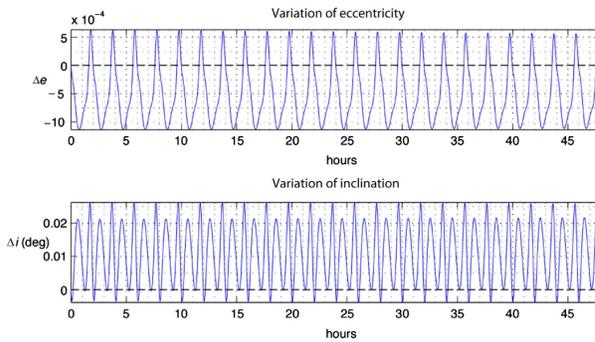


(a) Ejemplo

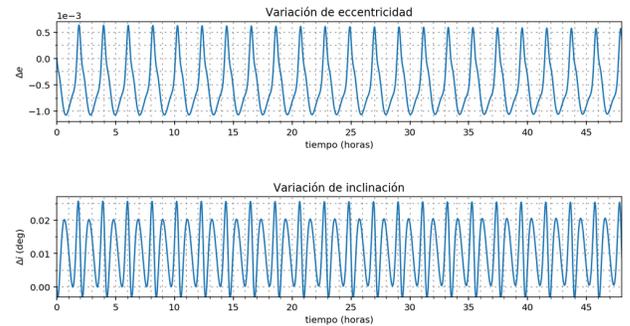


(b) Simulación

Figura 2.9: Comparación entre variaciones de ascensión recta y argumento del perigeo debido a la perturbación J2. Fuente: Autor.



(a) Ejemplo



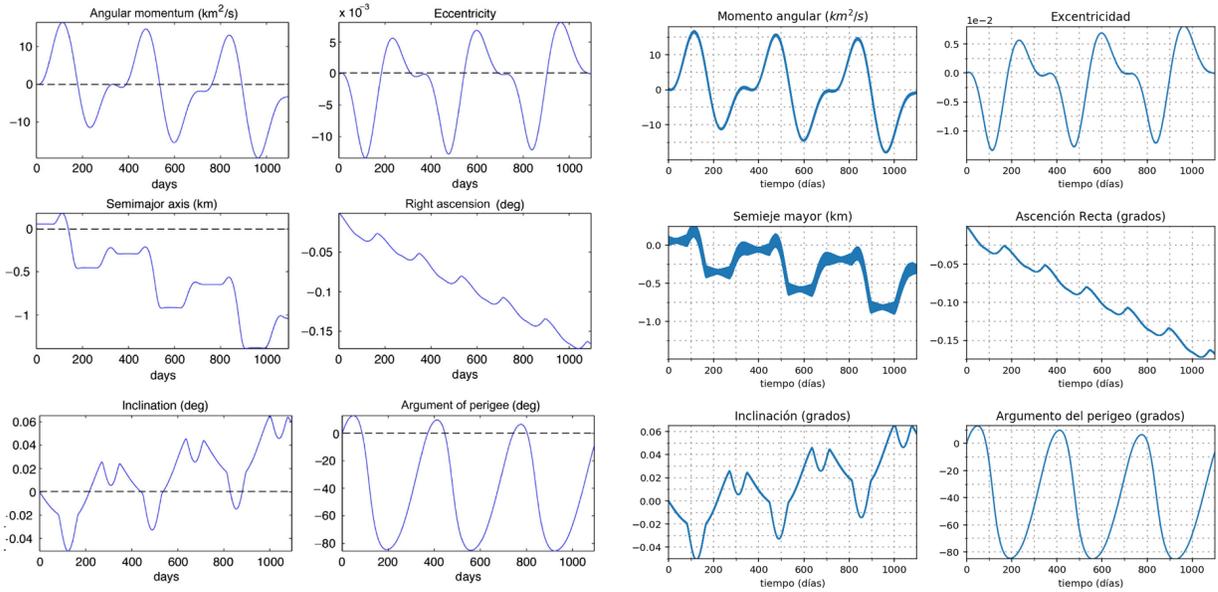
(b) Simulado

Figura 2.10: Comparación entre variaciones de excentricidad inclinación debido a la perturbación J2. Fuente: Autor.

Se puede observar que en el caso de la excentricidad y la inclinación las figuras son prácticamente idénticas. Sin embargo en el caso de la ascensión recta y el argumento del perigeo se acumula un error de aproximadamente 1° pasadas las 48 horas.

2.8.3. Presión Radiativa

Esta perturbación fue verificada mediante el ejemplo presente en *p. 703, Ejemplo 12.9*. En este ejemplo se tiene un satélite esférico con una razón área-masa de $2 \text{ m}^2/\text{kg}$. Los parámetros orbitales iniciales pueden ser consultados en el ejemplo. En la fig 2.11 se puede apreciar una comparación entre los valores del ejemplo y los simulados.



(a) Ejemplo

(b) Simulación

Figura 2.11: Comparación entre variaciones de momento angular, excentricidad, semieje mayor, ascensión recta, inclinación y argumento del perigeo debido a efectos de la presión radiativa. Fuente: Autor.

A partir de la figura anterior se observa que todas las figuras, a excepción del semieje mayor son prácticamente iguales. El error en el caso del semieje mayor es de aproximadamente 0.5° tras 1000 días. Este error es considerado aceptable para estudios de no más de 10 años.

2.8.4. Gravedad Lunar

Esta perturbación fue verificada mediante el ejemplo presente en *p.710, Ejemplo 12.11.* En este ejemplo se definen tres tipos de órbita: LEO (*Low Earth Orbit*), HEO (*Highly Elliptical Orbit*) y GEO (*Geosynchronous Earth Orbit*). En todos los casos se analiza un período de 60 días. En la figura 2.12 se puede observar una comparación entre los valores del ejemplo y los simulados.

Como se puede ver, ambas figuras son prácticamente idénticas. Vale mencionar que las curvas en las figuras proporcionadas por el libro han sido suavizadas para omitir las variaciones periódicas.

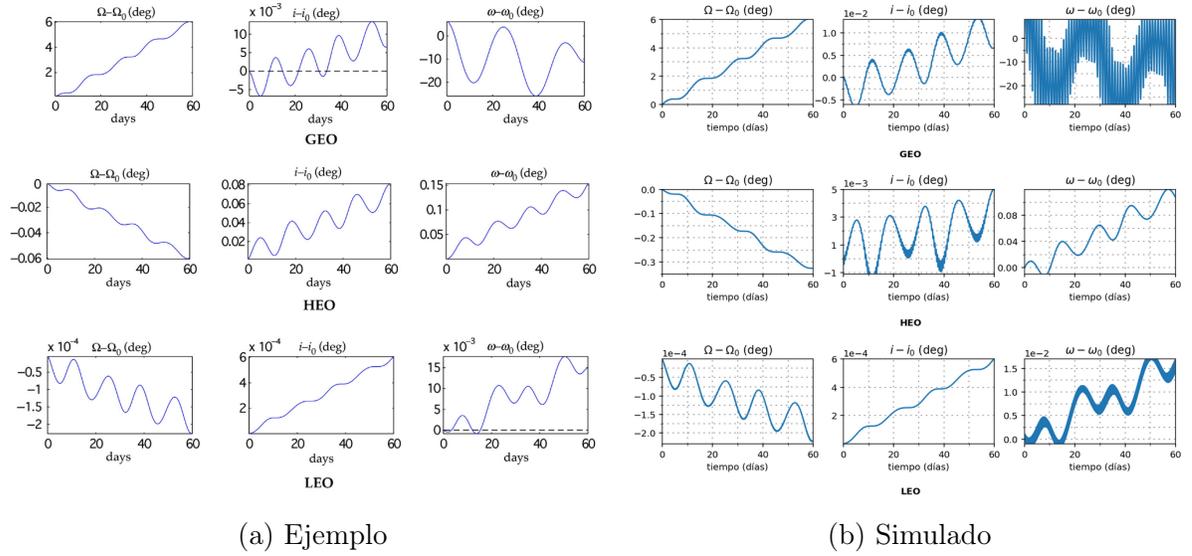


Figura 2.12: Comparación entre valores de Ascensión recta, inclinación y argumento del perigeo debido a la gravedad lunar. Fuente: Autor.

2.8.5. Gravedad Solar

Esta perturbación fue verificada mediante el ejemplo presente en *p.713, Ejemplo 12.12.*. Al igual que en el ejemplo anterior se definen tres tipos de órbita: LEO (*Low Earth Orbit*), HEO (*Highly Elliptical Orbit*) y GEO (*Geosynchronous Earth Orbit*), todas con los mismos parámetros orbitales que en el ejemplo anterior. En este caso se analiza un período de 1100 días. En la fig 2.13 se puede observar una comparación entre los valores del ejemplo y los simulados.

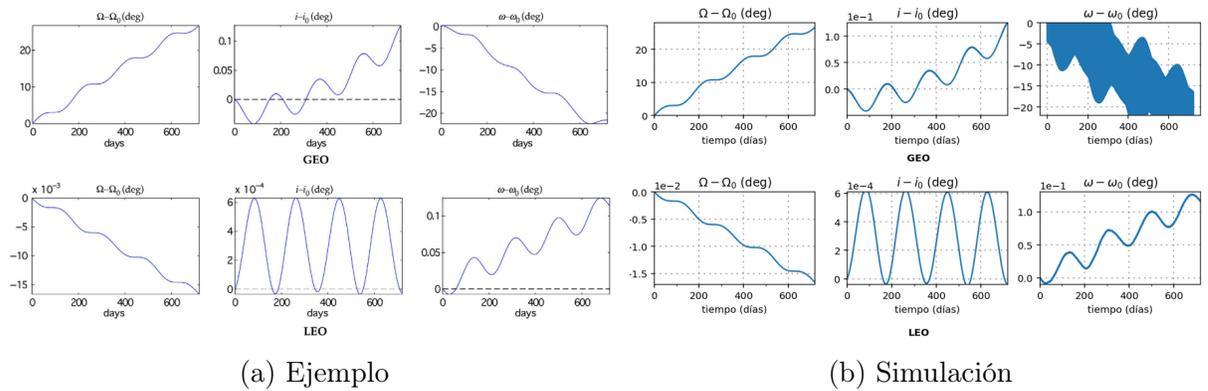


Figura 2.13: Comparación entre valores de Ascensión recta, inclinación y argumento del perigeo debido a la gravedad solar. Fuente: Autor.

2.9. Validación STK

Para verificar que tanto la dinámica orbital de satélite como la aplicación de propulsión en maniobras orbitales estén modeladas de forma correcta, se procedió a comparar los resultados de simulación con los resultantes del software comercial STK (*Systems Toolkit*). Para ello se aplicó en primer lugar un empuje en el sentido de la velocidad (aumentando principalmente el semieje mayor) y luego un empuje en el sentido de la normal de la órbita (modificando mayoritariamente la inclinación).

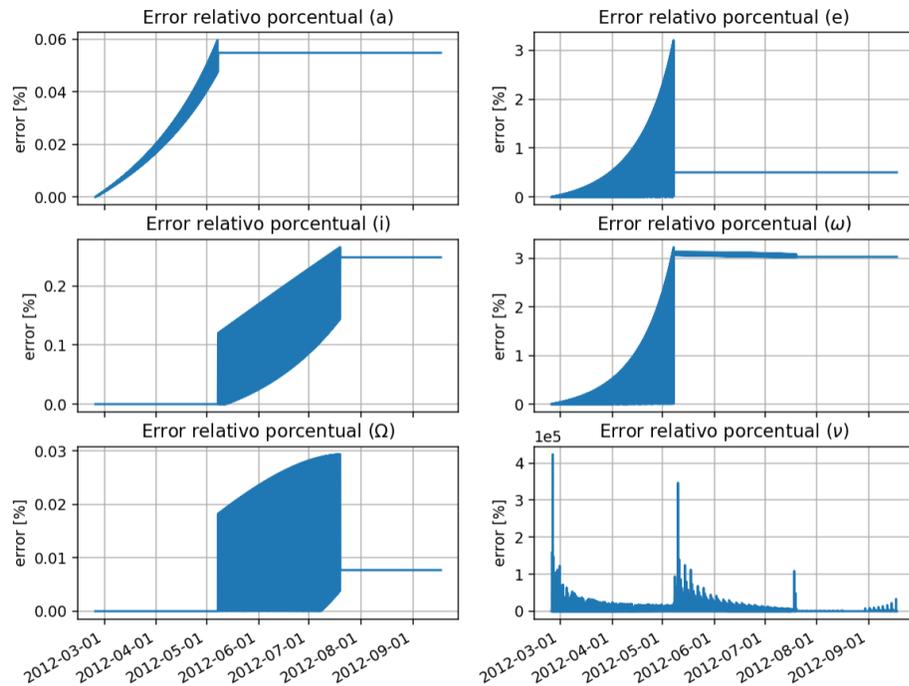


Figura 2.14: Error relativo porcentual para los elementos orbitales simulados y los de STK. Fuente: Autor.

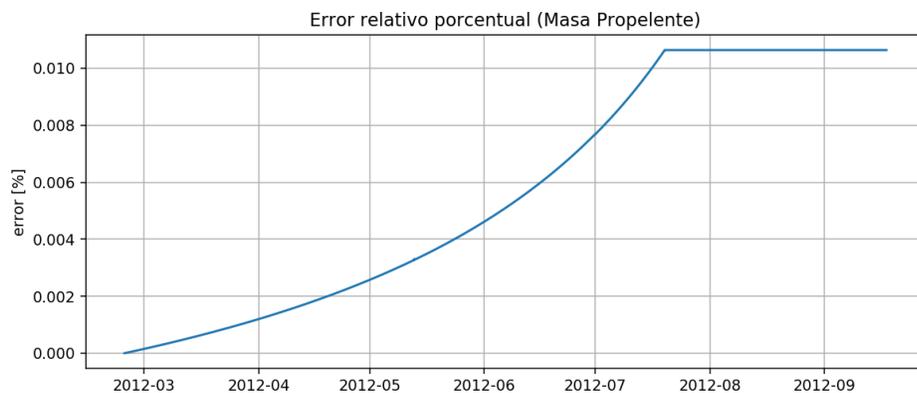


Figura 2.15: Error relativo porcentual para el uso de masa de propelente simulados y los de STK. Fuente: Autor.

Capítulo 3

Simulaciones

Si bien el trabajo realizado en el capítulo anterior constituye la construcción de una herramienta que permite la simulación de una multitud de escenarios, se ha elegido para este trabajo la exploración de tres de ellos: Desorbitación, Mantenimiento Orbital y Movimiento Relativo.

3.1. Desorbitación

Cada año, el número de lanzamientos de CubeSats aumenta respecto del anterior. Generalmente lanzados en una órbita baja, estos objetos pueden durar hasta muchos años antes de caer a la Tierra, por lo que existe una creciente preocupación por la saturación del espacio cercano a la tierra con la llamada Basura Espacial. Estos escombros presentan un peligro de colisión para las misiones siguientes, cuya probabilidad aumenta con cada nuevo objeto.

Este escenario evalúa la posibilidad de predecir el tiempo de decaimiento de un satélite orbitando a 500 km y analizar cuánto es posible disminuir este tiempo mediante la utilización de propulsión de bajo empuje.

3.1.1. Comparación con datos históricos

En primer lugar se pretende analizar si el modelo se adapta a los datos históricos de deorbitación. La información ha sido obtenida a través de los sitios Celestrak[1], SpaceTrack[4] y nanosats.eu[20]. Estos datos se encuentran principalmente como fomato TLE, por lo cual informan de variados parámetros orbitales.

En primer lugar se optó por analizar el reciente decaimiento orbital de la Estación Espacial China Tiangong-1. En Septiembre de 2017, las autoridades Chinas declararon la pérdida de control de la estación, especulando que la estación efectuaría la re-entrada y desintegración en la atmósfera a finales de 2017. La Estación comenzó oficialmente su re-entrada el 2 de

Abril de 2018.

Para la simulación se ha elegido como condiciones iniciales aquellas pertenecientes al punto más antiguo. La masa aproximada de la estación fue consultada en línea.

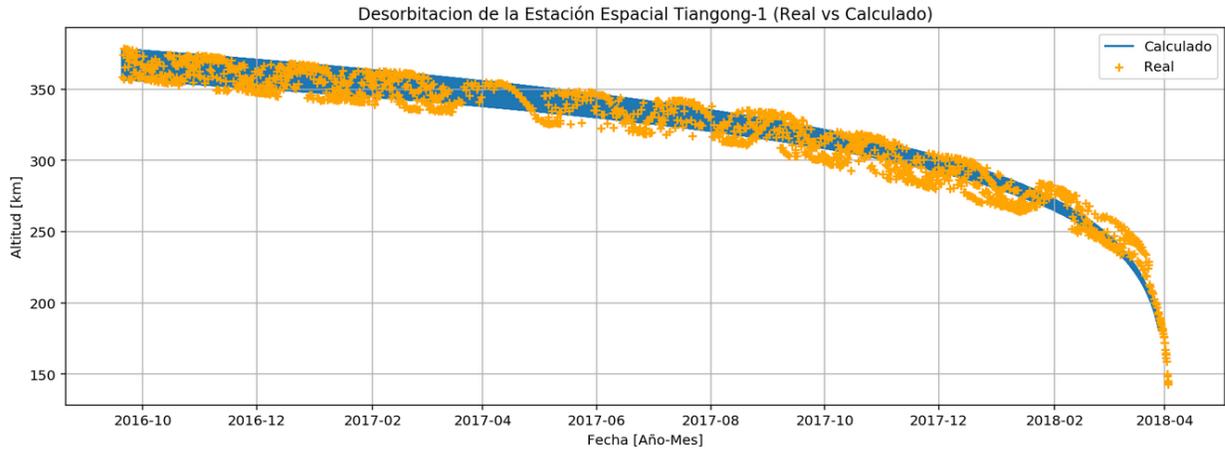


Figura 3.1: Comparación entre el decaimiento atmosférico real de la Estación Espacial Tiangong-1 y el simulado mediante el modelo. Fuente: Autor.

En el ejemplo anterior se ha elegido el modelo atmosférico MSISE90, aplicado a un período de actividad solar media, pues los años en que sucedió la caída coinciden con un período de actividad solar media. Se puede observar que el modelo se ajusta de buena manera a los datos. En caso de elegir otro modelo atmosférico, es evidente que el tiempo de caída aumentará o disminuirá.

Para continuar con el estudio, se analizaron los tiempos de caída de cubesats de una unidad, los cuales se pueden observar en la fig. 3.2

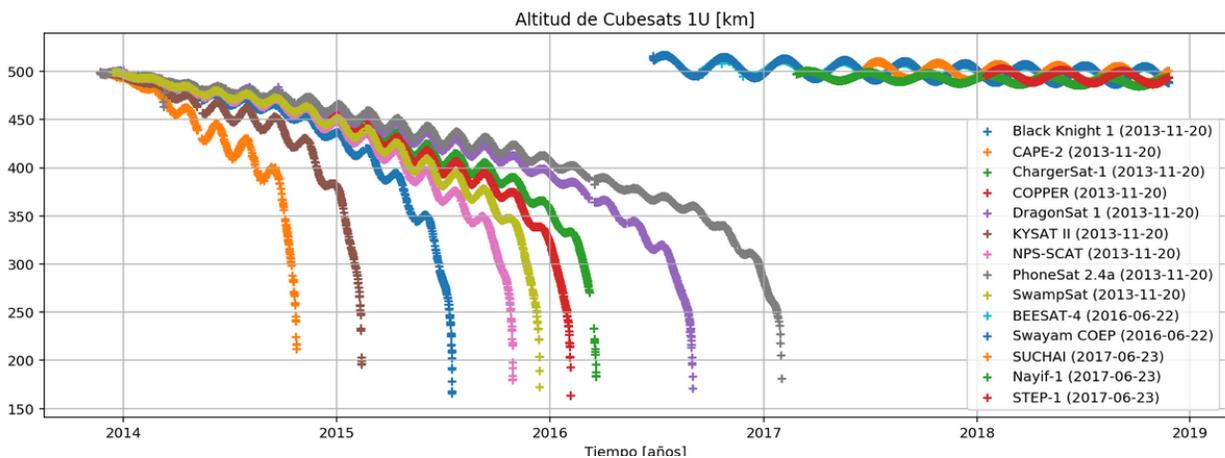


Figura 3.2: Comparación de decaimiento de distintos cubesat 1U. Fuente: Autor.

En la figura anterior se presenta la información para la altitud de 14 cubesats de una unidad. En ella se pueden reconocer dos grupos distintivos:

1. El primero corresponde a cubesats 1U lanzados por el cohete Minotaur-1 el 20 Nov 2013. Todos estos satélites fueron colocados en la misma órbita circular de 500 km de altitud con una inclinación de 40.5° [20].
2. El segundo corresponde a satélites de una unidad lanzados entre 2016 y 2017. Todos en una órbita sincrónica con el sol, circular, de 500 km de altitud y 97.5° de inclinación.[20].

Se puede observar que incluso cuando todos los satélites del primer grupo han sido colocados en la misma órbita en aproximadamente el mismo tiempo, los tiempos de decaimiento varían considerablemente, alcanzando diferencias de más de dos años.

Otra observación relevante es que el tiempo que demoran en caer los del primer grupo desde los 500 km es casi el mismo que ha transcurrido desde que se lanzaron los del segundo grupo, habiendo éstos últimos decaído a la fecha tan sólo una decena de kilómetros. Ésto es muy probable que se deba a la diferencia de actividad solar que hubo entre 2014-2015 y 2017-2018.

Finalmente, para realizar una predicción del tiempo de caída del satélite SUCHAI, se probaron dos modelos atmosféricos: el primero corresponde al modelo *Harris Priester* en su período de alta actividad solar y el segundo correspondiente al modelo *MSISE90* en el período de alta actividad solar.

Al probar estos dos modelos se pudo observar que el primero se ajusta mejor a los datos reales de la trayectoria del satélite, mientras que el segundo se ajusta de mejor manera a los tiempos de decaimiento presentados en la fig 3.2.

Como se estima que para el año 2025 habrá otro ciclo de alta actividad solar [26], se prueba mezclar los dos modelos basado en la actividad solar. De este modo se privilegia el modelo que se ajusta a los datos en los períodos de baja actividad solar, mientras que en los períodos de actividad solar alta se privilegia el modelo que se ajusta a los datos de la fig 3.2. Las tres curvas pueden ser observadas en la fig 3.3

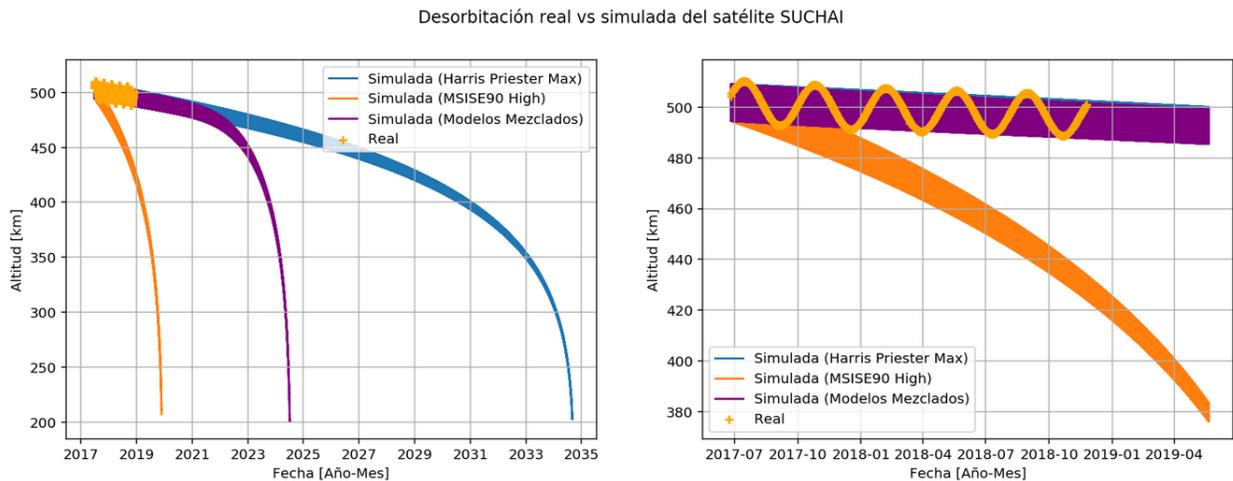


Figura 3.3: Comparativa entre altitud real de SUCHAI desde su lanzamiento y el decaimiento simulado debido a tres modelos atmosféricos. Fuente: Autor.

3.1.2. Comparación estrategias de deorbitación

Para continuar este estudio se busca comparar las distintas estrategias de empuje a ser analizadas con distintas configuraciones de propulsión. En todos los escenarios sólo se ha añadido la perturbación a causa del arrastre atmosférico, debido a que es la que mayor influencia tiene a una altura de 500 km. Para ello se prueban 4 escenarios:

1. **Caída Libre:** Este escenario es simulado añadiendo la perturbación de arrastre gravitacional y propagando el movimiento hasta que la altitud del satélite sea menor a 200 km.
2. **Descenso espiral:** Este escenario es similar al anterior, con la diferencia que el satélite se empuja de manera continua en la dirección contraria a la velocidad. Este escenario, además, busca probar las diferencias entre el uso de los propulsores descritos en la Tabla 3.3, donde *NanoProp CGP3* corresponde a un propulsor comercial desarrollado por GOMSpace e *I.M Electrospray* corresponde al propulsor teórico propuesto por Ignacio Maldonado [22].
3. **Descenso mediante maniobras estilo Hohmann:** En este caso, en lugar de mantener un empuje continuo a lo largo de la órbita, el satélite es propulsado sólo por 30 segundos en torno al apogeo y al perigeo, que corresponden a los puntos de mayor eficiencia para la modificación del semieje mayor. Este escenario, además, busca probar las diferencias entre el uso de los propulsores descritos en la tabla 3.3.
4. **Decenso mediante modificación de excentricidad:** Este escenario busca desorbitar el satélite implementando el perfil de empuje que varía la excentricidad de la órbita (ver **Anexo 2**), efectivamente bajando el perigeo y subiendo el apogeo. La ventaja de esta estrategia, a diferencia de las anteriores es que no se requiere la modificación de la orientación del satélite pues el empuje es en la misma dirección a lo largo de la órbita completa. Ésto puede incurrir en ahorros de energía utilizada por los sistemas de control de orientación. La desventaja es que requiere una cantidad mayor de propelente, por lo cual se ajusta para un uso de 0.15 kg de propelente. Además se decide simular sólo el caso de uso del propulsor *NanoProp CGP3*.

Todos los escenarios anteriores han sido configurados para utilizar los valores de las tablas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5.

Parámetro	Valor
Semieje Mayor (a)	6868 km
Excentricidad (e)	0.00075
Inclinación (i)	0°
Argumento del Perigeo (ω)	0°
RAAN (Ω)	0°
Anomalía Verdadera (ν)	90°

Tabla 3.1: Parámetros orbitales iniciales del satélite.

Parámetro	Valor
Masa Húmeda	3.9 kg
Coefficiente de Presión de Radiación (Cr)	2
Coefficiente de Arrastre (Cd)	2.2
Área de arrastre	0.1 x 0.1 m ²
Coefficiente Balístico	177.27 kg/m ²

Tabla 3.2: Parámetros físicos del satélite. Fuente: Autor.

Parámetro	NanoProp CGP3	I.M Electropray
Empuje	1 μ N	4.565 μ N
Isp	100 s	6.8249 s
Potencia	1.5 W	1.179 W
Masa Propelente	0.05 kg	0.45 kg

Tabla 3.3: Parámetros físicos del propulsor. Las masas de propelentes fueron elegidas basadas en el máximo posible indicado por el fabricante. Fuente: Autor.

Parámetro	DHV CS 10
Área	8.25 x 9.8 cm ²
Eficiencia	30 %
Potencia Nominal	3 x 2.41 W

Tabla 3.4: Parámetros físicos de los paneles solares. Fuente: Autor.

Parámetro	NanoPower BP4
Configuración	2P-2S
Voltaje	2 x 3.7 V
Capacidad	2 x 2600 mAh
Capacidad Energética	38.48 Wh
Corriente de Descarga Celda	1000 mA
Corriente de Carga Celda	1000 mA
Potencia de Descarga	14.8 W
Potencia de Carga	14.8 W

Tabla 3.5: Parámetros Físicos Baterías. Fuente: Autor.

A partir de la figura 3.4 es posible observar que en el caso de usar el modelo de Harris Priester, el tiempo de decaimiento de un cubesat 3U en caída libre es de 7.47 años, mientras que utilizando el resto de las maniobras se reduce en promedio a 5.9 años. En la tabla 3.6 se puede ver el detalle de las distintas maniobras.

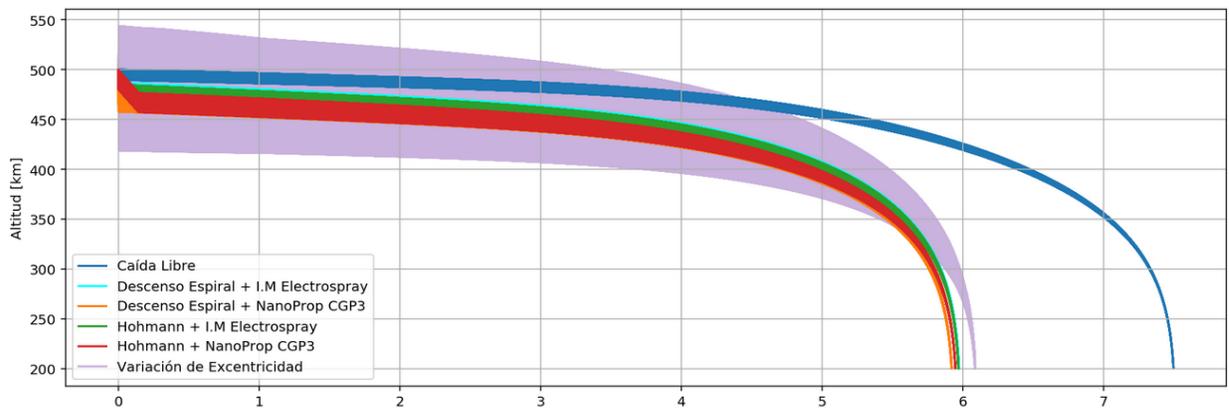


Figura 3.4: Comparativa de estrategias de deorbitación utilizando el modelo atmosférico Harris-Priester. Fuente: Autor.

Para el caso de uso del modelo atmosférico USSA76, se incurre en una sobre-estimación de los tiempos de decaimiento, sin embargo la diferencia de tiempo generado entre caída libre y utilización de maniobras propulsivas es similar al caso anterior. El detalle de esta comparación se puede observar en la tabla 3.6

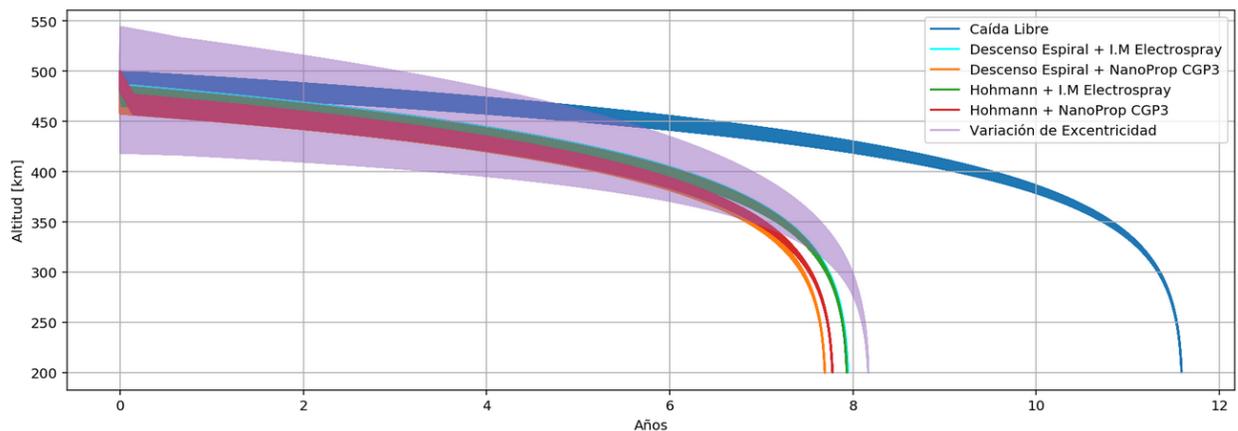


Figura 3.5: Comparativa de estrategias de deorbitación utilizando el modelo atmosférico USSA76. Fuente: Autor.

Al observar el uso energético, se puede ver que la energía almacenada en baterías para realizar las maniobras es suficiente en todos los casos exceptuando el de variación de excentricidad. En la figura 3.6, se ha graficado el uso de potencia y energía desde el momento que comienza la maniobra hasta el momento que el propelente es usado completamente y por lo tanto el propulsor debe apagarse. Se observa que la potencia entregada por el panel oscila debido a los períodos de eclipse y por ende la batería se carga cuando hay sol y se descarga cuando no hay. En el último caso se puede apreciar que la energía en baterías se agota antes de lograr completar la maniobra, por lo cual el propulsor comienza a oscilar entre un estado encendido y apagado, imitando un ciclo de trabajo debido a los paneles solares. Ésto continúa hasta acabar el propelente.

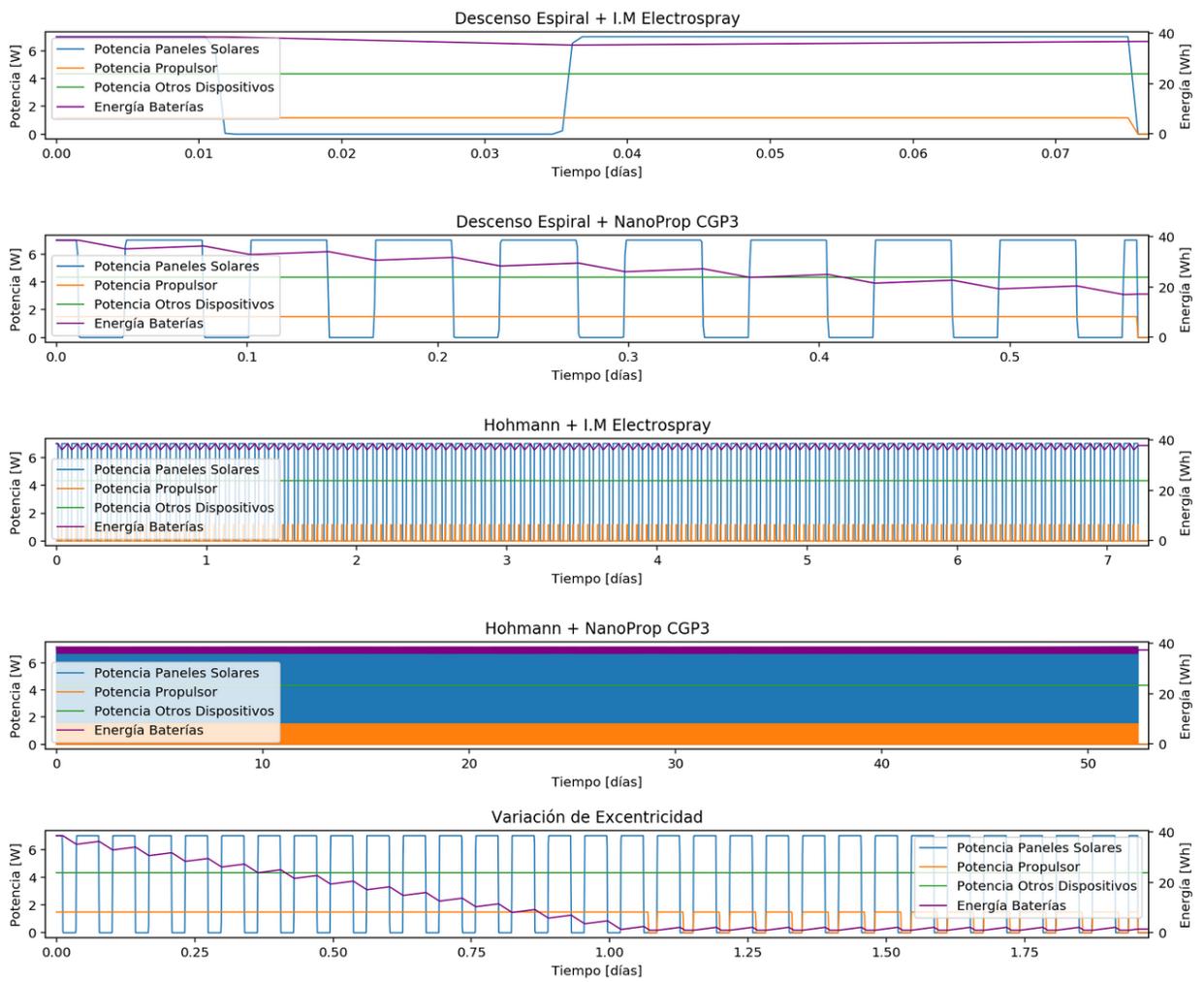


Figura 3.6: Comparativa en el uso de energía de las maniobras. Fuente: Autor.

	Tiempo de decaimiento (Harris Priester) [años]	Tiempo de decaimiento (USSA76) [años]	Tiempo de maniobra [horas]	Propelente Utilizado [g]	Energía utilizada propulsor [Wh]
Caída Libre	7.471	11.583	-	-	-
Decenso Espiral + I.M Electropray	5.956 (-20.27 %)	7.942 (-31.43 %)	1.98	450	2.14
Decenso Espiral + NanoProp CGP3	5.912 (-20.86 %)	7.690 (-33.60 %)	13.77	50	20.41
Hohmann + I.M Electropray	5.969 (-20.10 %)	7.928 (-31.55 %)	173.06	450	2.16
Hohmann + NanoProp CGP3	5.939 (-20.50 %)	7.767 (-32.94 %)	1257.96	50	20.02
Variación de Excentricidad (NanoProp CGP3)	6.087 (-18.52 %)	8.128 (-29.82 %)	47.05	150	61.2

Tabla 3.6: Resumen de resultados de escenarios de deorbitación.

3.2. Mantenimiento Orbital

Existen fuerzas no keplerianas que causan que un cuerpo orbitando alrededor de otro no sea capaz de mantener una órbita osculante. La operación necesaria para corregir y mantener un vehículo espacial en su órbita asignada denomina Mantenimiento Orbital (*Station Keeping*).

En este escenario se pretende analizar si es que es posible corregir de manera significativa alguno de los elementos orbitales afectados por las perturbaciones, utilizando propulsores como los descritos en la tabla 3.3.

En primer lugar se pretende observar el efecto de aplicar **todas** las perturbaciones descritas en la sección 1.1.1 sobre un Cubesat con una órbita circular ecuatorial (Tabla 3.1) y otra quasi circular polar (Tabla 3.7).

Parámetro	Valor
Semieje Mayor (a)	6879.844 km
Excentricidad (e)	0.00105
Inclinación (i)	97.448°
Argumento del Perigeo (ω)	248.581°
RAAN (Ω)	235.461°
Anomalía Verdadera (ν)	110.956°

Tabla 3.7: Parámetros orbitales iniciales del satélite. Fuente: Autor.

En la fig 3.7 se puede observar que todos los elementos poseen variaciones periódicas y seculares. Si se observa la variación secular en ambos casos, el semieje mayor es disminuido en aproximadamente 15 km, mientras que la inclinación varía en 0.0025° en el caso de la órbita ecuatorial y 0.055° en el caso de la órbita polar. La ascensión recta del nodo ascendente (Ω) en el caso de la órbita polar da una vuelta completa en un año y la variación secular en la excentricidad es negligible. En el caso del argumento del perigeo, la variación pierde relevancia pues resulta indefinido al ser una órbita casi circular.

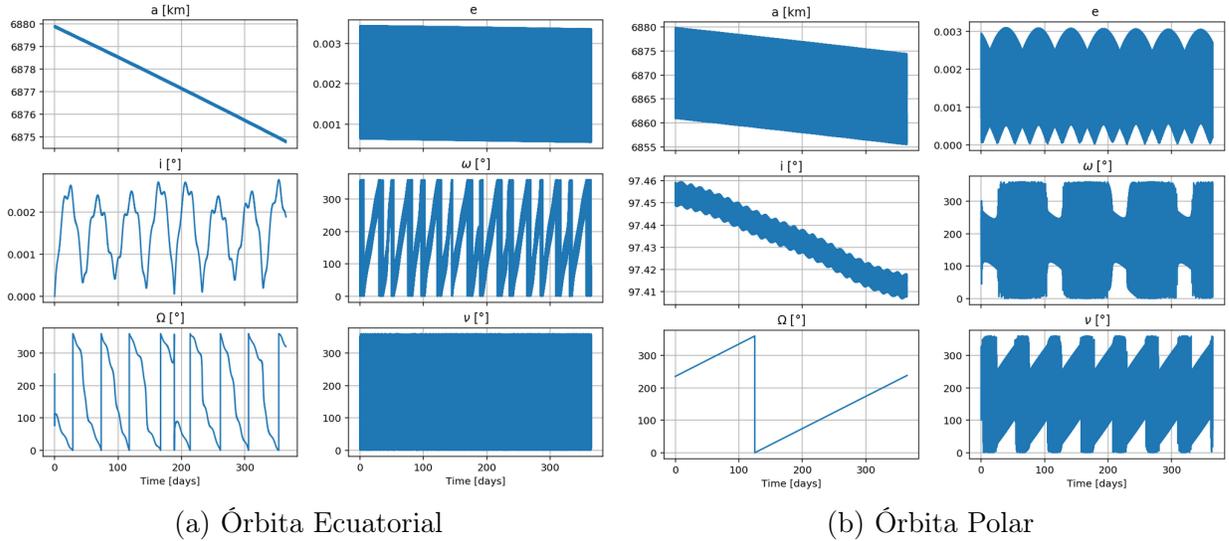


Figura 3.7: Modificación de parámetros orbitales a través de un año para un órbita ecuatorial (3.1) y una polar (3.7), aplicando todas las perturbaciones descritas en 1.1.1.. Fuente: Autor.

Por lo tanto, **en una órbita baja**, los valores más deseables a corregir corresponden al semieje mayor, la inclinación y la ascensión recta del nodo ascendente. Por ello se simulan varios escenarios de corrección de parámetros orbitales, utilizando los parámetros indicados en la tabla 3.7, 3.2 y 3.3.

Para los primeros tres casos se simula la corrección de la inclinación, la ascensión recta del nodo ascendente y el semieje mayor utilizando el propulsor *NanoProp CGP3* y una masa de propelente equivalente a 50 g. Para los siguientes tres casos se vuelve a simular los mismos elementos orbitales, pero utilizando una masa de propelente equivalente a 500 g. La simulación se prolonga hasta el evento que se acabe el propelente.

Los resultados de estas simulaciones se presentan en la figura 3.8. Se observa que en el caso de uso de 50 g de propelente, la variación máxima que es posible lograr corresponde a aproximadamente 0.07° , mientras que en el caso de 500 g corresponde a $0,7^\circ$. En el caso de la ascensión recta del nodo ascendente, la máxima variación que es posible lograr es de 0.06° en el caso de 50 g y 0.6° en el caso de 500 g.

Estas pequeñas variaciones se explican debido a la relación entre el tamaño de la órbita y la facilidad que existe para cambiar su plano (ya sea a través de la inclinación o el RAAN). Ésto quiere decir que mientras más pequeña es la órbita, más difícil es rotar su plano ya que se requiere impulso mayor a causa de una velocidad orbital mayor que en el caso que la órbita sea muy amplia (semieje mayor grande).

El caso más relevante, donde el cambio es mayor, es el de variación del semieje mayor. En este caso se puede observar que para el uso de 50 g se logra una variación de 25 km, mientras que para el caso de 500 g se logra una variación de 240 km.

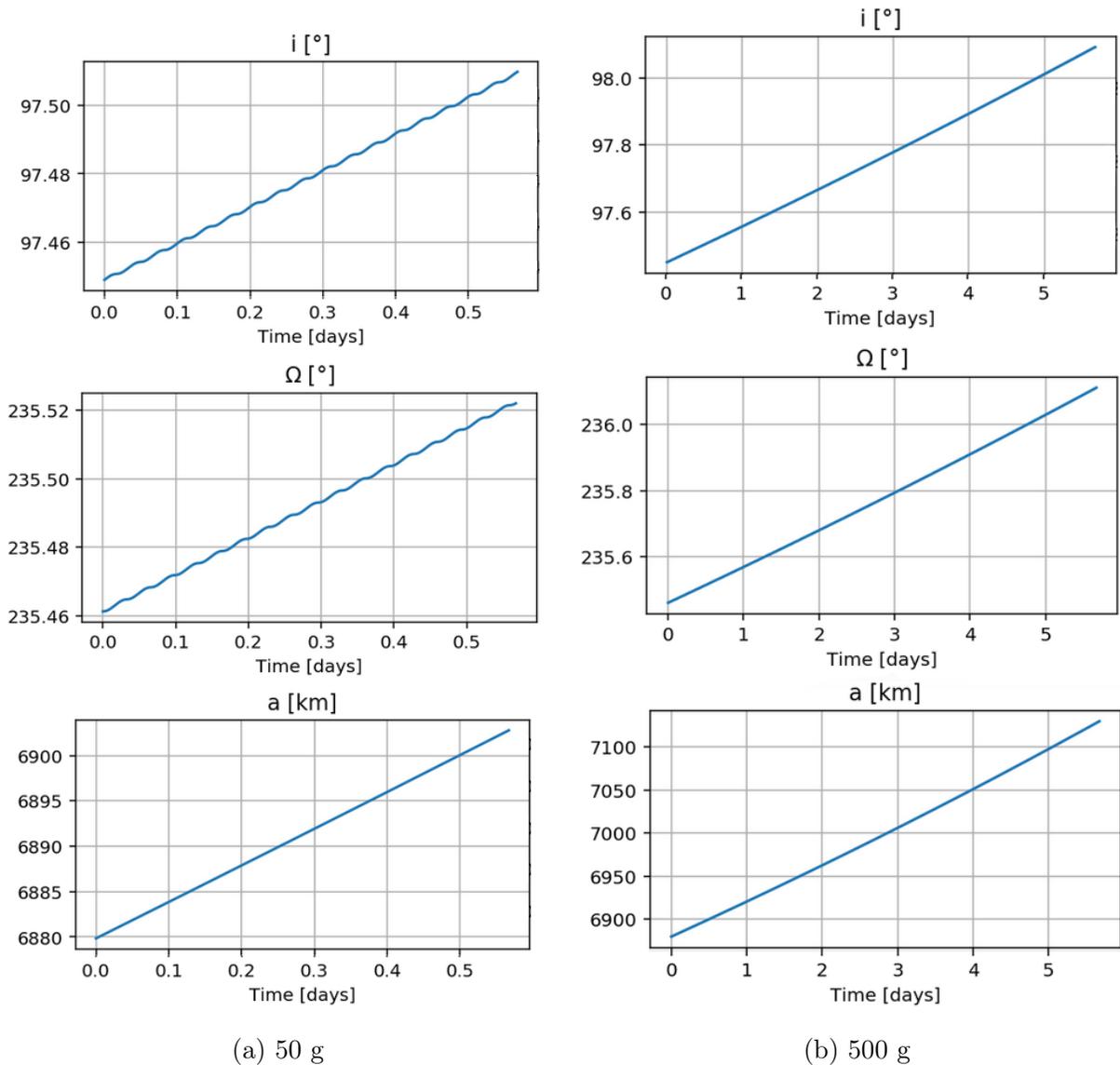


Figura 3.8: Simulación de los tres casos de corrección de parámetros orbitales para el caso de uso de 50 g de propelente y 500 g de propelente. Fuente: Autor.

3.3. Movimiento Relativo

Satélites pequeños lanzados desde el espacio son utilizados para un número de tareas. Sin embargo, existe una categoría aún más pequeña de femtosatélites comúnmente llamados *Chipsats* o *Sprites*. Estos satélites integran equipo de energía, computación, sensores y comunicaciones en una tarjeta de 3.5 cm^2 . Estos satélites pueden ser lanzados desde un cubesat y tienen la posibilidad de orbitar alrededor de su lanzador.

Este estudio pretende explorar de manera superficial la posibilidad de dejar *chipsats* en órbita alrededor de un cubesat desde el cual fueron eyectados.

3.3.1. Perspectiva General

Para ello se ha decidido comenzar haciendo un análisis generalizado de cómo varían las trayectorias relativas al variar parámetros orbitales. Es por ello que se han probado 4 casos, presentados en la tabla 3.8

	Ref.	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Semi-eje mayor	7000 km	7050 km	7050 km	7000 km	7000 km
Excentricidad	0.01	0.03	0.03	0.06	0.01
Inclinación	0°	0°	10°	10°	10°
Argumento del perigeo	0°	0°	0°	0°	0°
Ascensión Recta	0°	0°	0°	0°	0°
Anomalía Verdadera	0°	0°	0°	0°	0°

Tabla 3.8: Escenarios a probar en el análisis generalizado de movimiento relativo. Los parámetros de referencia corresponden a la órbita del cuerpo donde se ubica el sistema de referencia.

En primer lugar se prueba variando el semieje mayor y la excentricidad. Se observa que con esta configuración, el cuerpo que orbita al de referencia se va alejando lentamente en forma de espiral. El radio de la espiral está directamente relacionada con la diferencia de excentricidad y el largo de la espiral está relacionado con la diferencia en los semiejes mayores. Ésto último se explica por la diferencia en los períodos orbitales que causa una diferencia en los semiejes mayores, lo cual causa que un cuerpo orbite más rápido que el otro y por ende uno observa que el otro se aleja.

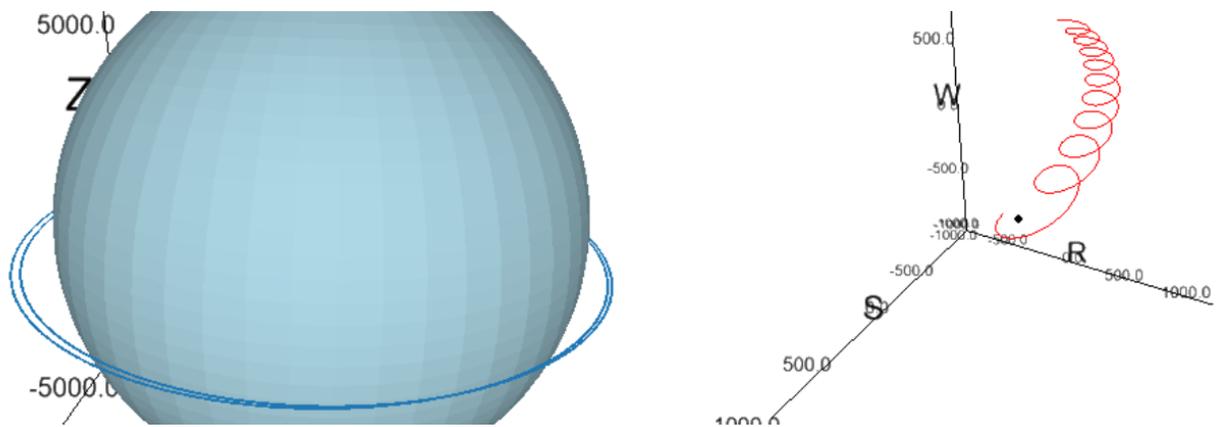


Figura 3.9: Órbitas de ambos cuerpos alrededor de la Tierra y movimiento relativo entre ellos para el Caso 1. Fuente: Autor.

A variar la inclinación se puede observar un escenario similar al primer caso, pero esta vez la espiral es tridimensional en lugar de plana.

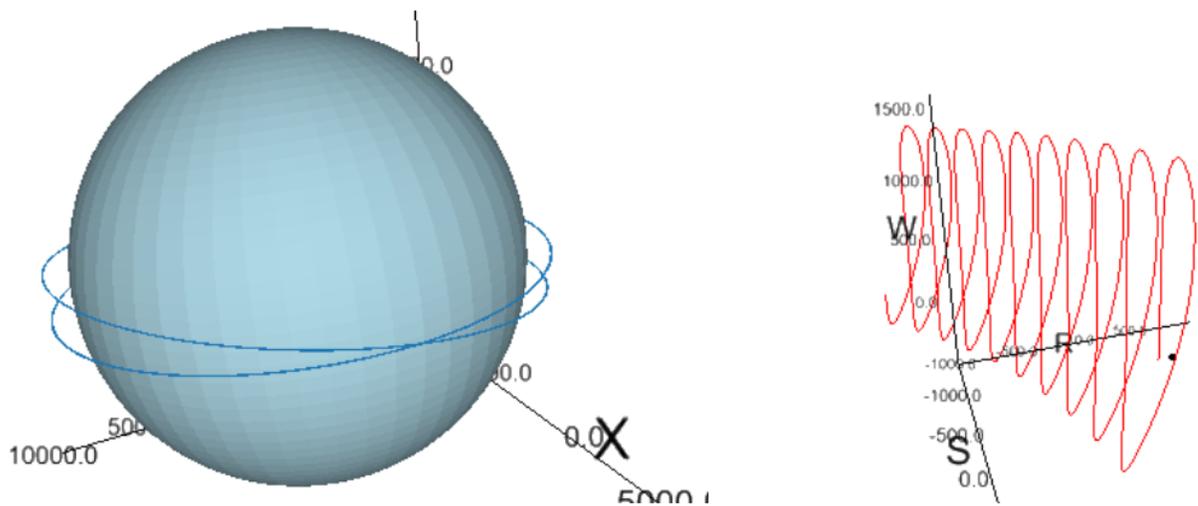


Figura 3.10: Órbitas de ambos cuerpos alrededor de la Tierra y movimiento relativo entre ellos para el Caso 2. Fuente: Autor.

Al colocar los semiejes mayores iguales, se puede observar que se forma una órbita estable alrededor del cuerpo de referencia, sin que el cuerpo que orbita al de referencia se aleje de él. Éste es una condición conocida ($\Delta a = 0$) para el caso sin perturbaciones, sin embargo existen estudios que sugieren que es posible omitir esta condición incorporando la perturbación J_2 [15]. Se puede observar, al igual que en el caso anterior, que la órbita no es plana, sino que está deformada. A medida que se incrementa la diferencia de inclinación, la órbita será más alargada y más deformada.

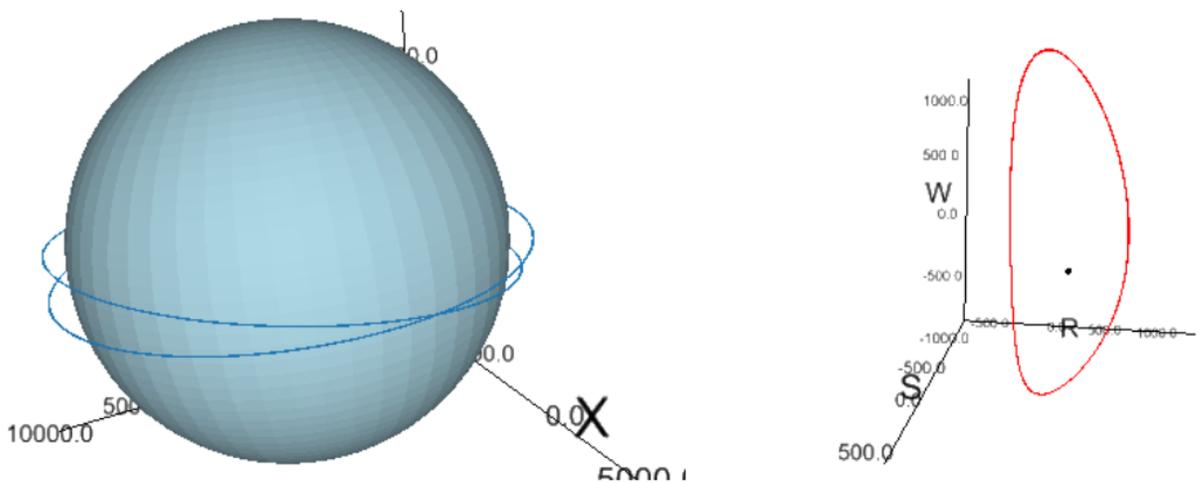


Figura 3.11: Órbitas de ambos cuerpos alrededor de la Tierra y movimiento relativo entre ellos para el Caso 3. Fuente: Autor.

Si variamos la excentricidad en el caso anterior, podemos observar que la órbita se hace más ovalada o más circular. En el caso que las excentricidades sean iguales, la órbita se convierte en una forma de ocho e interseca con el cuerpo de referencia. Ésto implica que en un escenario como éste el cuerpo en órbita colisionaría con el cuerpo de referencia.

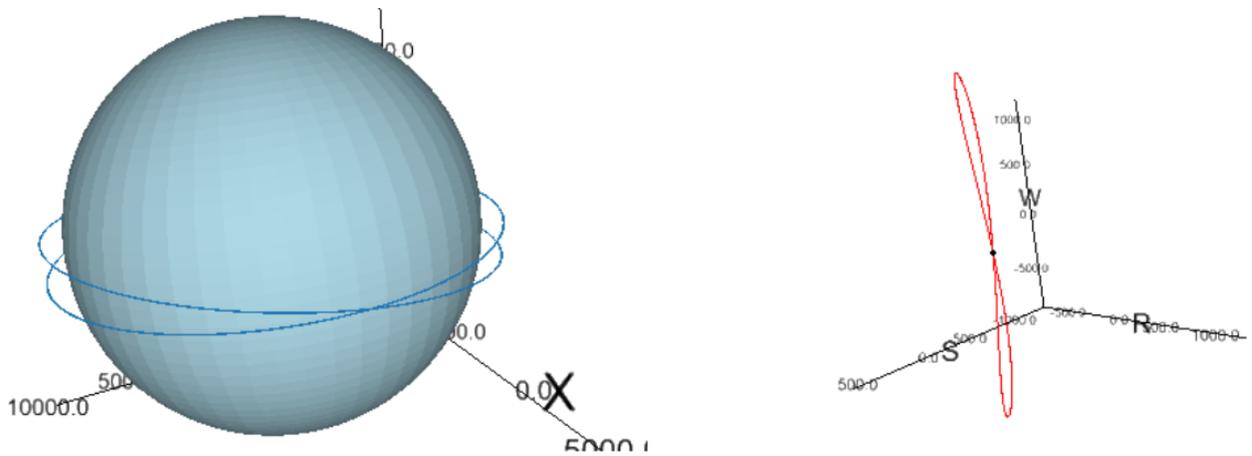


Figura 3.12: Órbitas de ambos cuerpos alrededor de la Tierra y movimiento relativo entre ellos para el Caso 4. Fuente: Autor.

3.3.2. Expulsión de chipsats

Para continuar el estudio se exploró la posibilidad de que un *chipsat* quede orbitando un cubesat tras ser expulsado en cualquiera de las direcciones: radial, tangencial y normal. La eyección es modelada como un cambio instantáneo de la velocidad de 10 m/s en cualquiera de las direcciones.

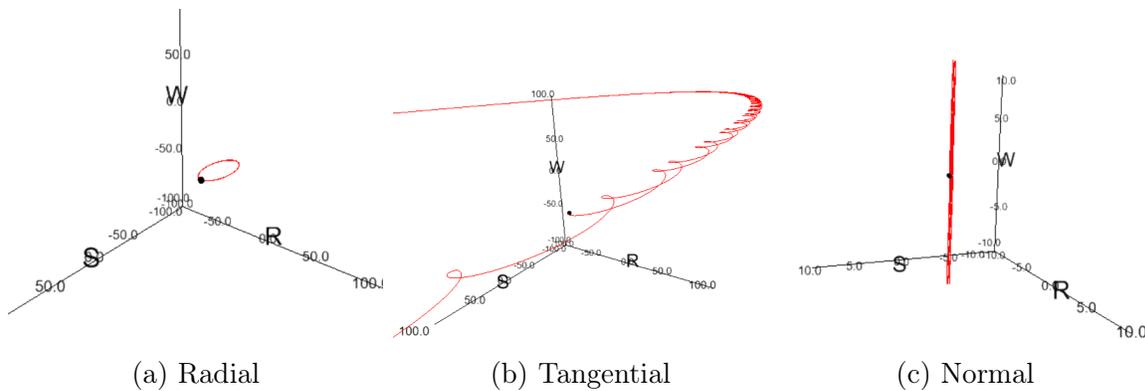


Figura 3.13: Trayectoria en movimiento relativo para expulsión de chipsat en tres direcciones. Fuente: Autor.

A partir de la figura anterior se pueden realizar las siguientes observaciones:

- Caso Radial: el chipsat da una vuelta en el plano SR y luego vuelve a impactar al cubesat tras 1.56 horas. La distancia máxima que alcanza a alejarse es de aproximadamente 36 km.
- Caso Tangencial: como el cambio de velocidad es en en la dirección de la velocidad, tanto el semieje mayor como la excentricidad de la órbita del chipsat aumentan y por ende el período del chipsat es mayor que el del cubesat. Ésto causa que se forme la

espiral descrita en la fig 3.9, en donde el chipsat se va atrasando con respecto al cubesat (recordemos que S apunta hacia la dirección de movimiento). El chipsat eventualmente vuelve a encontrarse con el cubesat desde la otra dirección tras 16.5 días. Si bien no habrá necesariamente colisión, existe una alta probabilidad de que eventualmente suceda. La distancia máxima que alcanza a alejarse es de unos 14000 km (cuando se encuentra al otro lado de la Tierra).

- Caso Normal: En este caso se modifica principalmente la inclinación de la órbita del chipsat, por lo cual el cubesat observa que éste oscila en la dirección de W. En este caso también existe colisión tras 43 min. La distancia máxima que alcanza a alejarse el chipsat es de 9 km.

Conclusiones

Ha sido posible construir un modelo que permite simular la dinámica orbital de cualquier tipo de cuerpo en el espacio, incluyendo la capacidad de realizar maniobras orbitales tanto de alto empuje como bajo empuje. Además se ha logrado modelar ciclos energéticos de carga de batería para integrar el uso de energía en la propulsión. A partir de los datos y las simulaciones mediante el modelo ha sido posible descubrir información nueva:

1. El tiempo de deorbitación de cubesats es muy variado al punto de haber diferencias de años entre satélites que han sido colocados en una misma órbita al mismo tiempo.
2. El tiempo de desorbitación estimado para el cubesat SUCHAI se estima en aproximadamente 7 años, cayendo entre el año 2024 y 2025.
3. El tiempo de desorbitación puede ser reducido entre un 20 % y un 30 % utilizando propulsión basada en componentes comerciales. El propelente utilizado en el caso del propulsor comercial es de 50g, mientras que el prototipo utilizó 450g. La cantidad de energía utilizada por el propulsor comercial tanto para la maniobra de Hohmann como la de espiral es de 20.25 Wh aproximadamente, mientras que en el caso del prototipo es de 2.15 Wh.
4. Dadas las características de los componentes utilizados, no existen mayores problemas de energía para realizar las maniobras descritas en la sección 3.1.2, a excepción de la maniobra de modificación de excentricidad, la cual consume aproximadamente dos veces más propelente.
5. Dadas las características de una órbita baja circular de 500 km de altitud, la perturbación más relevante y que genera un mayor efecto es la del arrastre atmosférico, mientras que el resto modifica en muy pequeña medida la inclinación y la ascensión recta del nodo ascendente. Es por ello que, considerando las características de los propulsores utilizados, sólo resulta conveniente intentar realizar mantenimiento orbital modificando el semieje mayor y no el resto de las variables.
6. En ausencia de perturbaciones, se deducen dos condiciones fundamentales para lograr que un objeto orbite otro desde una perspectiva de movimiento relativo: En primer lugar los semiejes mayores deben ser iguales ($\Delta a = 0$), lo cual indica que los períodos deben ser iguales para evitar que un objeto comience a *adelantar* al otro en la órbita. En segundo lugar, las excentricidades deben ser distintas ($\Delta e \neq 0$), lo cual deriva en que un objeto será más lento durante la mitad del período orbital, mientras que durante la otra mitad será más rápido, logrando así el efecto de orbitación. En caso contrario, los objetos colisionarán.
7. En ausencia de perturbaciones, es imposible que un objeto expulsado de un satélite, ya

sea en la dirección radial, transversal o normal, termine orbitándolo.

En cualquiera de los tres casos, no se cumplirán las condiciones del punto anterior y el objeto terminará colisionando con el satélite.

Trabajo Futuro

En base a éstos resultados se propone como trabajo futuro implementar mejores modelos que permitan llegar a resultados más precisos. Por ejemplo, utilizar los modelos atmosféricos verdaderos a partir de los *papers* donde fueron descritos por sus autores originales. Además mejorar los modelos de componentes como paneles solares, baterías y propulsores.

Por otro lado, se propone implementar la capacidad de propagar la integración hasta alcanzar cierta condición como por ejemplo alcanzar el perigeo o apogeo, alcanzar cierto nivel de energía orbital o cierta fecha, etc. Ésto permite programar las maniobras orbitales de manera más cómoda en lugar de calcular todo en base al tiempo.

En cuanto a las simulaciones, se recomienda repetir el escenario de movimiento relativo pero evaluando la orbitación de los chipsats considerando las perturbaciones, que podrían ser beneficiosas para ello.

Anexos

Anexo 1. Especificación de modelos atmosféricos

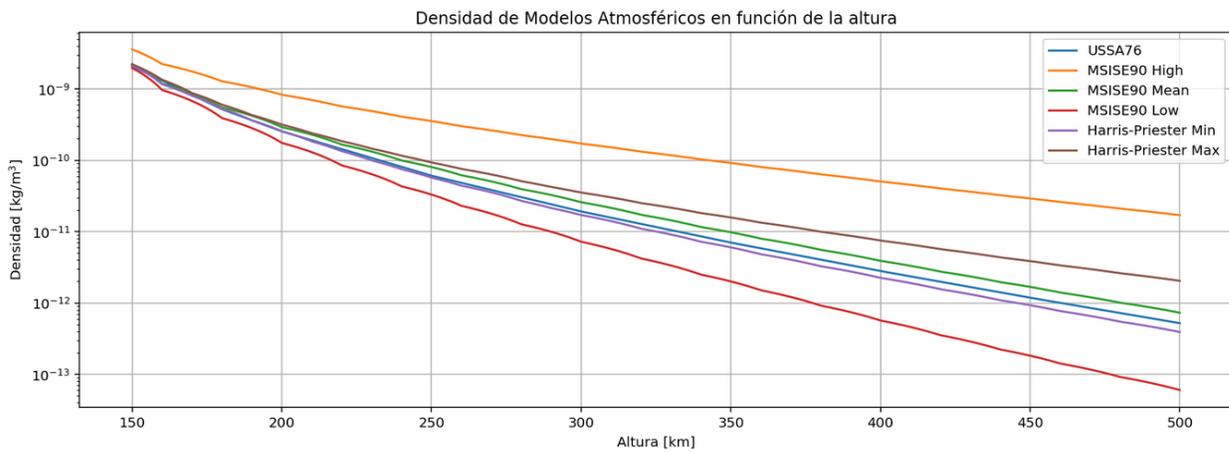


Figura 3.14: Densidades atmosféricas para información tabulada de distintos modelos atmosféricos. Fuente: Autor.

Para simular el decaimiento atmosférico se han definido tres modelos atmosféricos:

1. **USSA76:** US Standard Atmosphere 1976, correspondiente a un modelo estático de atmósfera estándar definido en 1976, en el cual la presión, temperatura y viscosidad de la atmósfera Terrestre cambia sobre un amplio rango de altitudes. Es consistente en metodología con la Atmósfera Estándar Internacional. Su definición por lo tanto consiste en una tabulación de una serie de valores a varias altitudes, en conjunto con formulas por las cuales esos valores fueron derivados. La documentación de la USSA76 es extensa y es posible encontrar información en éste enlace. Para éste caso se aplicó una interpolación exponencial entre los valores tabulados.
2. **MSISE90:** Mass Spectrometer - Incoherent Scatter 1990, correspondiente a un modelo empírico de la atmósfera Terrestre desde el suelo hasta el espacio. Modela las temperaturas y densidades de los componentes atmosféricos. Su principal uso es ayudar en las predicciones del decaimiento satelital debido al arrastre atmosférico. En este caso, se utiliza información encontrada a partir de un sitio web de manera tabulada para tres casos de actividad solar: Baja, Promedio y Extremadamente Alta. La interpolación entre los datos se realiza de manera lineal.

3. **Harris-Priester:** Este modelo está basado en soluciones a la ecuación de conducción del calor bajo condiciones de equilibrio hidrostático. El modelo asume dos fuentes de calor: calentamiento ultravioleta solar Extremo (EUV) y una fuente artificial de calor que produce la variación diurna, deducida de cálculos de arrastre satelital. En este caso se utiliza una versión tabulada para los casos de alta y baja actividad solar, encontrados en el libro: *David A Vallado - Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. La interpolación entre los datos se realiza de manera lineal.

La figura anterior muestra las curvas de densidad atmosférica en función de la altura, generadas a partir de la información tabulada encontrada.

Es claro que en el caso de los modelos MSISE90 y Harris-Priester, el modelo no tendrá los mismos resultados que si se utiliza el modelo verdadero no tabulado. Sin embargo se ha aproximado los ciclos solares utilizando funciones sinusoidales que pesan los casos de alta actividad solar y baja actividad solar de manera alternada a lo largo del tiempo.

Anexo 2: Ejemplos adicionales de perfilado para modificación de cada parámetro orbital

Como que se vió en la sección 2.6. El empuje puede ser perfilado para que el vector instantáneo sea el óptimo para el cambio de un parámetro orbital singular. A continuación se presentan los casos correspondientes al cambio de excentricidad, inclinación, ascensión recta del nodo ascendente y argumento del perigeo.

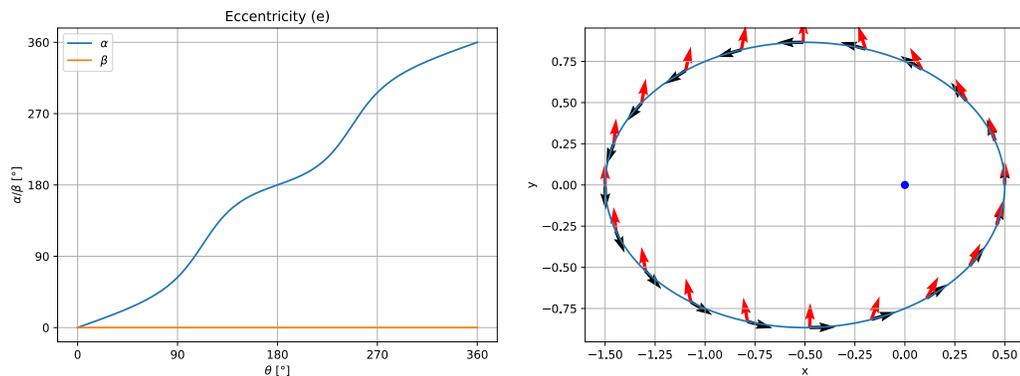


Figura 3.15: Perfil de empuje instantáneo óptimo para cambio de excentricidad. Fuente: Autor.

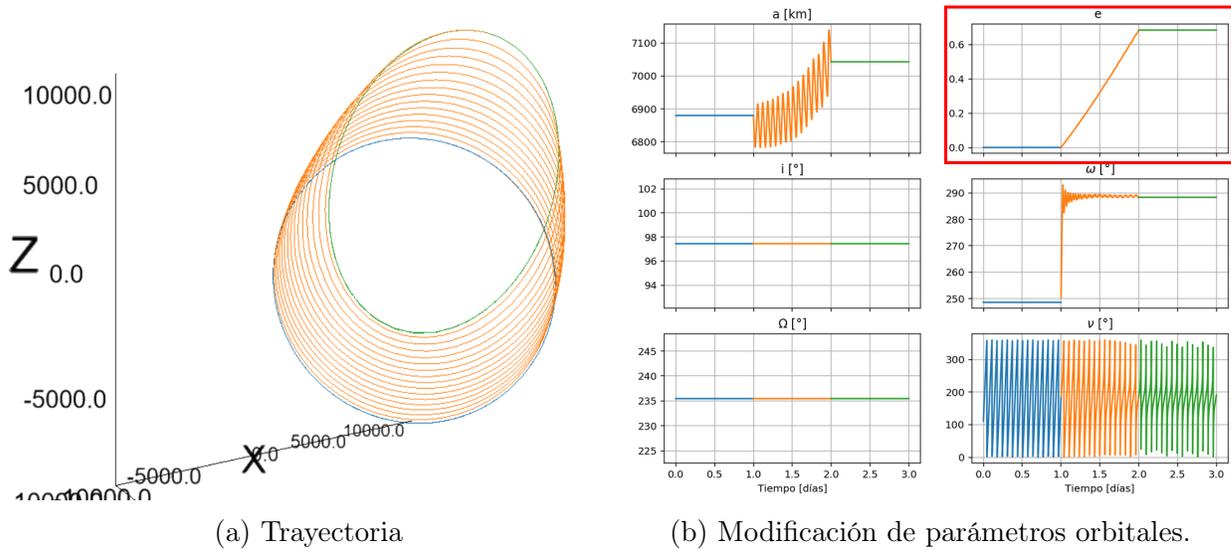


Figura 3.16: Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 3.15. Fuente: Autor.

Se puede observar en la figura anterior que al aplicar el resultado de aplicar el perfil es efectivamente el cambio de excentricidad. Al ser la Tierra un foco de la elipse, lo que se observa que ocurre al cambiar la excentricidad es que el perigeo disminuye y el apogeo aumenta y el centro de la órbita se desplaza.

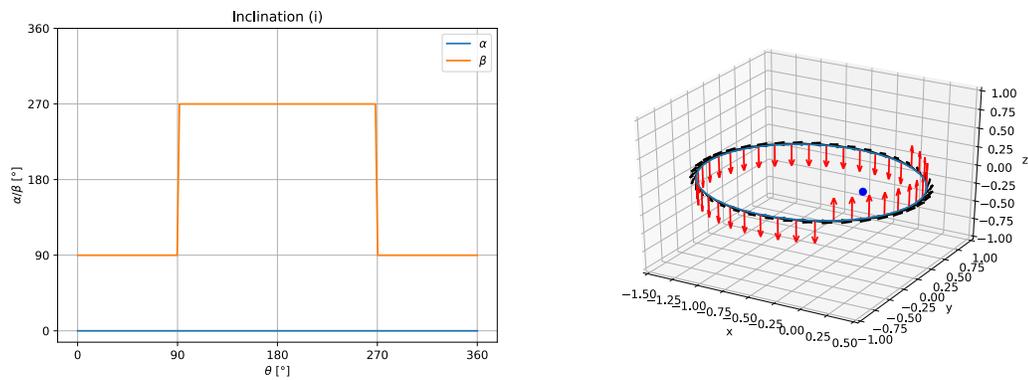
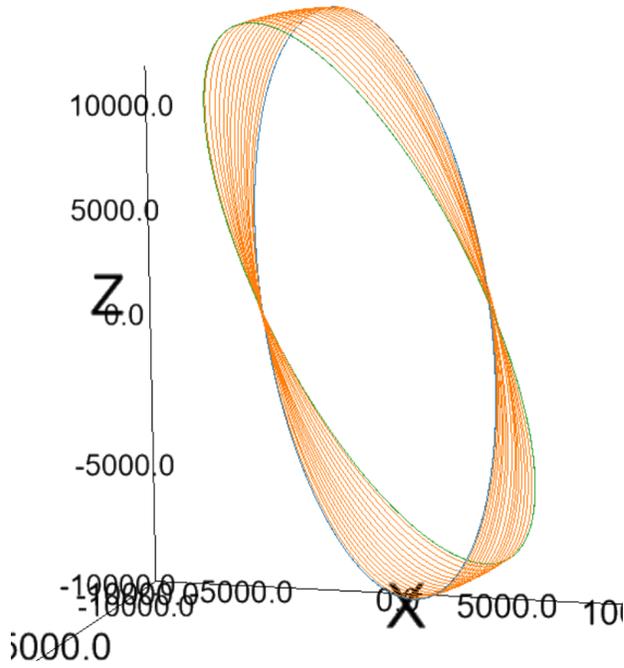
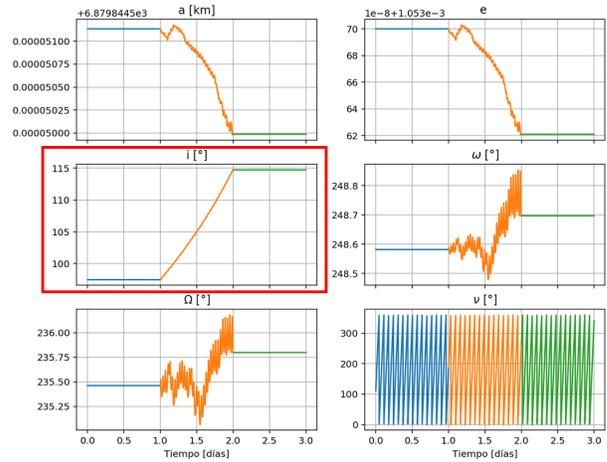


Figura 3.17: Perfil de empuje instantáneo óptimo para cambio de inclinación. Fuente: Autor.



(a) Trayectoria



(b) Modificación de parámetros orbitales

Figura 3.18: Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 3.17. Fuente: Autor.

En el caso de modificación de la inclinación se observa que efectivamente cambia el ángulo de la órbita con respecto al plano de la eclíptica (recordemos que la trayectoria se encuentra en el sistema de referencia ECI, en el cual el plano de la eclíptica se encuentra definido por los ejes X e Y).

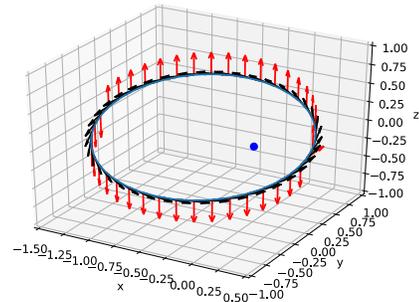
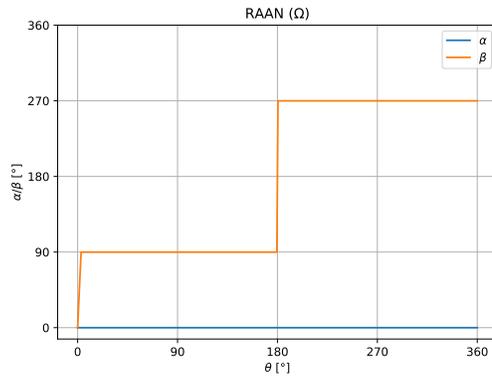
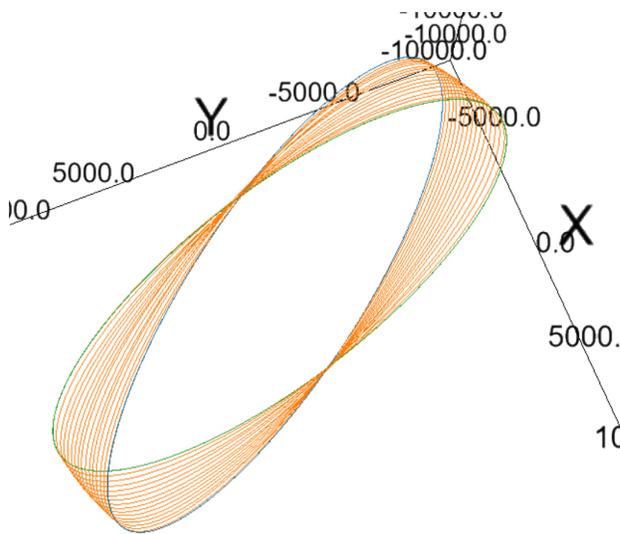
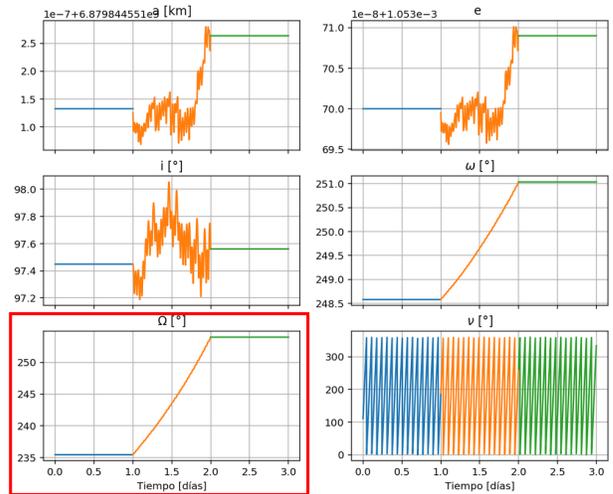


Figura 3.19: Perfil de empuje instantáneo óptimo para cambio de ascensión recta. Fuente: Autor.



(a) Trayectoria



(b) Modificación de parámetros orbitales

Figura 3.20: Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 3.19. Fuente: Autor.

El caso de la modificación de la ascensión recta es similar al caso de la modificación de la inclinación, pero en éste caso la órbita rota con respecto al eje Z.

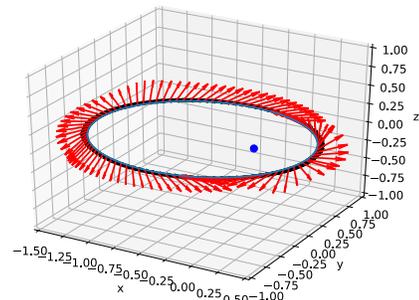
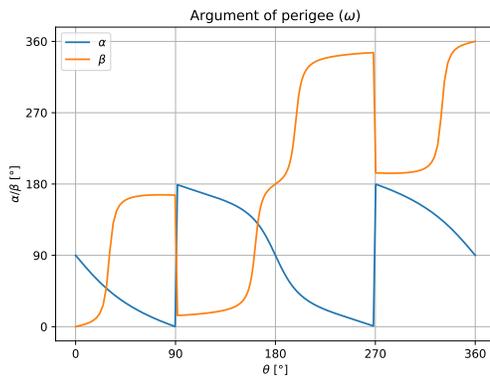


Figura 3.21: Perfil de empuje instantáneo óptimo para cambio de argumento del perigeo. Fuente: Autor.

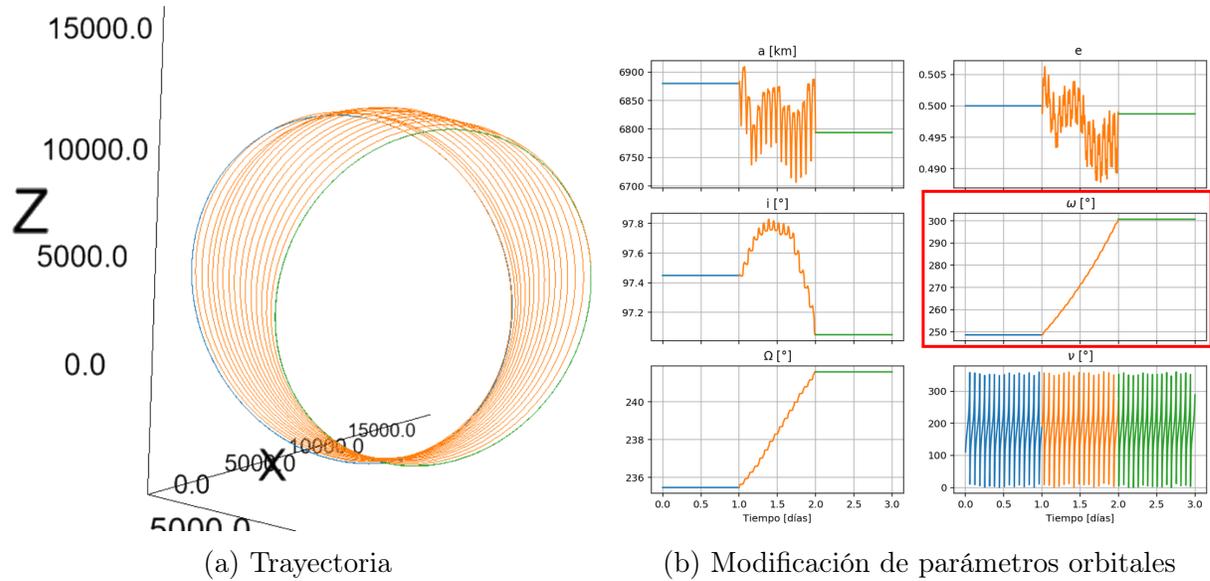


Figura 3.22: Resultado tras aplicar el perfil de empuje de la figura 3.21. Fuente: Autor.

Finalmente, en el caso de la modificación del argumento del perigeo, se puede observar que la elipse rota sobre el foco de manera planar.

Anexo 3: Energía considerando eclipse solar

A continuación se puede observar otro ejemplo de uso energético por parte de los propulsores. En éste caso la potencia del propulsor se aumenta para sobrepasar el límite del panel solar.

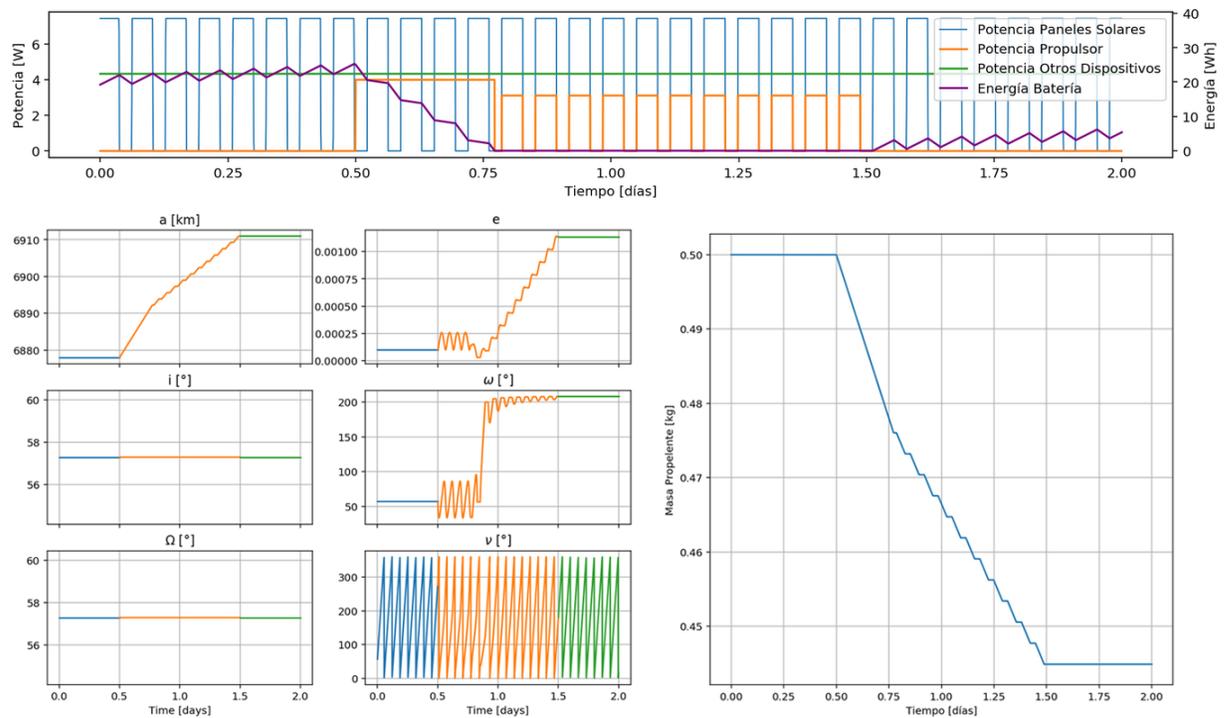


Figura 3.23: Ejemplo de uso de energía considerando eclipse solar. Fuente: Autor.

Se observa que cuando el panel es cubierto debido al eclipse, la potencia que entrega cae a cero y por ende la batería se carga más lento. Cuando el propulsor se enciende la batería es drenada rápidamente hasta quedar sin carga, con lo cual el propulsor no tiene más energía disponible y se apaga. Luego de ello el propulsor sólo se activa en los períodos que el panel no está eclipsado y con una potencia menor que la que tenía anteriormente debido a que la potencia que puede entregar el panel no es suficiente para repartir entre los otros dispositivos y el propulsor (se prioriza el uso de otros dispositivos). En los gráficos inferiores de la figura se observa cómo se disminuye la velocidad de modificación de parámetros y el flujo másico del propelente debido a la menor potencia consumida por el propulsor.

Bibliografía

- [1] CelesTrak. <http://celestrak.com/>.
- [2] Electrically powered spacecraft propulsion. https://en.wikipedia.org/wiki/Electrically_powered_sp
- [3] Orbital Elements. https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements.
- [4] Space-Track. <https://www.space-track.org>.
- [5] Specific Impulse. https://en.wikipedia.org/wiki/Specific_impulse.
- [6] Tsiolkovsky Rocket Equation. https://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky_rocket_equation.
- [7] Jonathan David Aziz. Low-Thrust Many-Revolution Trajectory Optimization by. 2018.
- [8] John T Betts and S O Erb. Optimal low-thrust trajectories to the moon. *SIAM Journal Applied on Dyanamical Systems*, 2(144):144–170, 2003.
- [9] Romain Boyer. Study and Industrialization of Optimization Methods for Low- Thrust Orbital Maneuvers. 2016.
- [10] Howard D Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students, third edition*. 2013.
- [11] T N EDELBAUM. Optimum low-thrust rendezvous and station keeping. *AIAA Journal*, 2(7):1196–1201, 1964.
- [12] Theodore N Edelbaum. Propulsion Requirements for Controllable Satellites. *ARS Journal*, 31(8):1079–1089, 1961.
- [13] Modified Equinoctial and Orbital Elements. Modified equinoctial orbital elements. pages 1–8.
- [14] Christopher D Hall and Victor Collazo Perez. Minimum-time orbital phasing maneuvers. *Advances in the Astronautical Sciences*, 114(SUPPL.):261–278, 2003.
- [15] Xi Yun Hou, Yu Hui Zhao, and Lin Liu. Formation flying in elliptic orbits with the J 2 perturbation. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 12(11):1563–1575, 2012.
- [16] J.E. Pollard. Simplified Analysis of Low Thrust Orbital Maneuvers, 2000.

- [17] Jean A. Kéchichian. Optimal low-thrust transfer in general circular orbit using analytic averaging of the system dynamics. *Journal of the Astronautical Sciences*, 57(1-2):369–392, 2009.
- [18] Jean Albert Kechichian. Optimal low-thrust rendezvous using equinoctial orbit elements. *Acta Astronautica*, 38(1):1–14, 1996.
- [19] Jean Albert Kechichian. Reformulation of Edelbaum’s Low-Thrust Transfer Problem Using Optimal Control Theory. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20(5):988–994, 1997.
- [20] Erik Kulu. nanosats.eu - Airtable. <https://airtable.com/shrafcwXODMMKeRgU>.
- [21] Damiana Losa. High vs Low Thrust Station Keeping Maneuver Damiana Losa To cite this version : HAL Id : tel-00173537 High vs Low Thrust Station Keeping Maneuver Planning for Geostationary Satellites. 2007.
- [22] Ignacio Maldonado. Evaluación de un propulsor electrospray para misiones de cubesats de tres unidades. page 50, 2018.
- [23] Manuel Martínez-Sánchez and Paulo Lozano. Session 6: Analytical Approximations for Low Thrust Maneuvers. *MIT OpenCourseWare 16.522 Space Propulsion*, (6), 2015.
- [24] F P J Rimrott and W L Cleghorn. Orbit Transfer by Means of a Ward Spiral. 2(August):283–290, 2002.
- [25] A. Ruggiero, P. Pergola, S. Marcuccio, and M. Andrenucci. Low-Thrust Maneuvers for the Efficient Correction of Orbital Elements. *32nd International Electric Propulsion Conference*, pages 1–13, 2011.
- [26] V. Sarp, A. Kilcik, V. Yurchyshyn, J. P. Rozelot, and A. Ozguc. Prediction of solar cycle 25: A non-linear approach. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 481(3):2981–2985, 2018.
- [27] Massimiliano Vasile, O Schütze, and O Junge. Spiral trajectories in global optimisation of interplanetary and orbital transfers. *Ariadna Study Report . . .*, 31(0):0–45, 2006.