



**ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERES LIBRE DE RIESGO EN CHILE:
ESTIMACIONES UTILIZANDO FILTRO DE KALMAN.**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN ANÁLISIS ECONÓMICO

Alumno: Santiago Etchepare Sierra

Profesor Guía: Mauricio Jara

Santiago, noviembre 2019

I. Introducción

La identificación adecuada de los instrumentos libres de riesgo que se transan en los mercados financieros ha atraído por muchos años la atención del mundo académico y profesional (Zuñiga (1999), Lefort & Walker (2000), Contreras *et al* (2007), entre otros). En Chile y el resto del mundo, los distintos agentes económicos participantes del mercado financiero utilizan distintos instrumentos emitidos por el Banco Central (y Tesorería General de la Republica) como proxy de instrumentos libre de riesgo con la finalidad de descontar flujos futuros, e identificar el nivel de riesgo, medido a través de un *spread*, para los distintos instrumentos de inversión que se ofrecen en el mercado.

En este sentido, la identificación de esta tasa libre de riesgo es esencial para el desarrollo de la economía en términos de asignaciones de capital en inversiones que cumplen con las condiciones necesarias de riesgo-retorno exigidas por los inversionistas (Duffe, 1998; Gertler & Lown, 1999; Min ,1999; Huang & Huang, 2012).

En consecuencia, existe una necesidad de entender y predecir una estructura de tasas de interés que permita valorar dichos instrumentos y otros activos para cada momento del tiempo. Esto representa un problema dado que los instrumentos financieros proxy de libre de riesgo no se encuentran disponibles para cada momento del tiempo (en el caso chileno, ver gráfico 1), por lo que no es evidente su valor al momento de descontar algún flujo o identificar el nivel de *spread* sobre la opción libre de riesgo. Más aun, este problema se intensifica cuando una parte de estos instrumentos no presentan la liquidez suficiente, reduciendo aún más el abanico de opciones a aquellos instrumentos financieros más transados.

Gráfico 1. BTU - BCU Disponibles al 28-06-2019

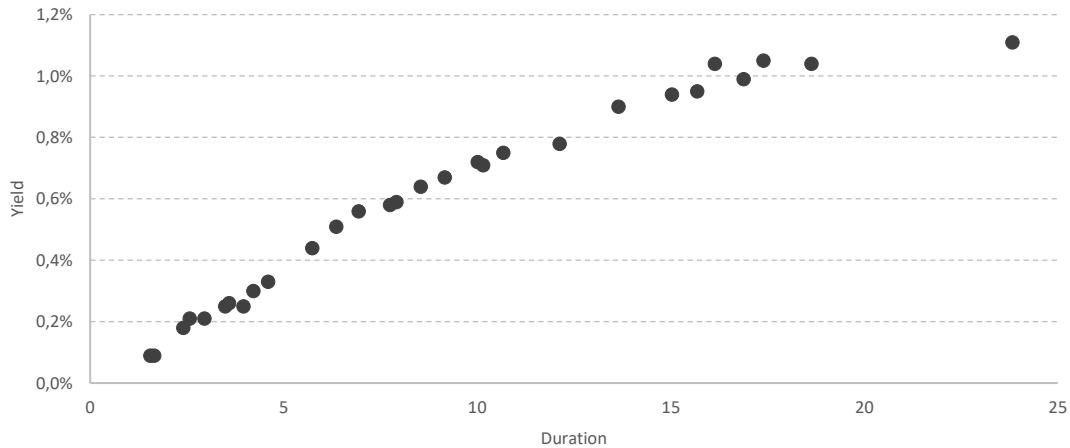
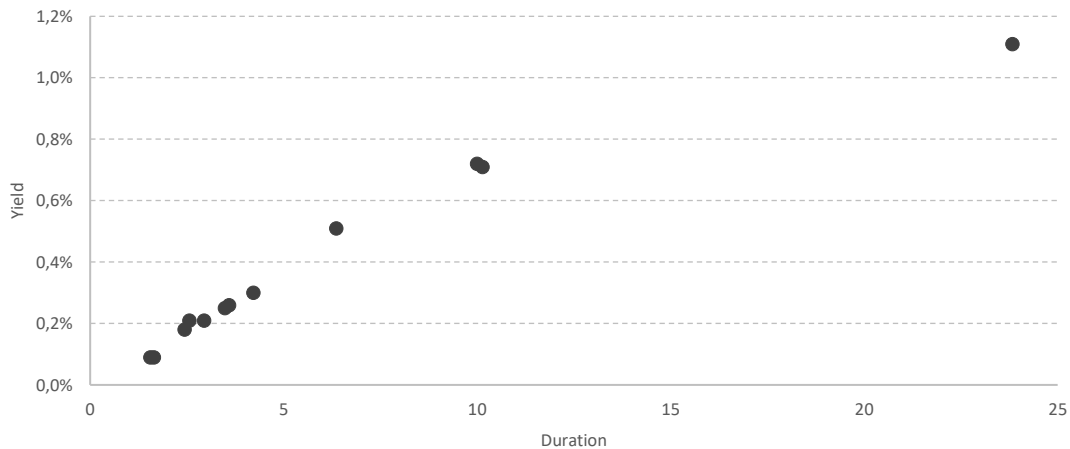


Gráfico 2. BTU - BCU Transados el 28-06-2019



La literatura financiera ha puesto su énfasis en la predicción de tasas de interés utilizando distintas metodologías que van desde enfoques geométricos que incluyen interpolaciones lineales, cúbicas y modelos *spline* (McCulloch, 1971; Schaefer & Schwartz, 1984; Steeley, 1991; Coleman, Fisher & Ibbotson, 1992), hasta modelos fundamentales (Nelson & Siegel, 1987; Svensson, 1994). Estos modelos, comúnmente utilizados en el mundo profesional, no logran capturar potenciales relaciones temporales que podrían presentar las curvas de tasas, poniendo de manifiesto la necesidad de encontrar modelos que incluyan consideraciones dinámicas.

Otros estudios han propuesto soluciones a dicha necesidad, definiendo la existencia de un *state-space formulation*, estableciendo relaciones dinámicas de las curvas de tasas para

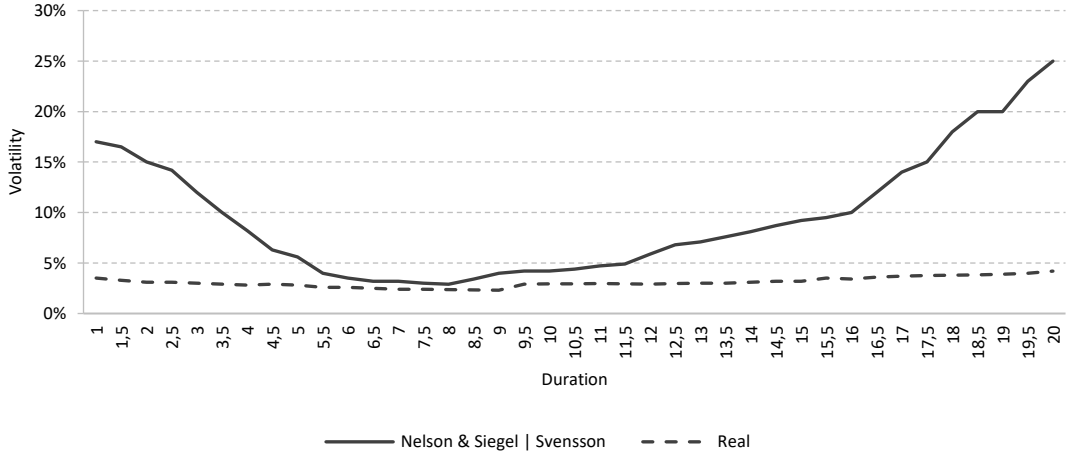
proceder a estimarlas mediante el uso de vectores autoregresivos (VAR), filtro de Kalman, entre otros. Por ejemplo, Diebold & Li (2006), Diebold, Li & Yue (2008), Koopman, Mallee & Van der Wel (2010), Diebold, Li & Rudebusch (2011) establecen su *state-space formulation* extendiendo el modelo de Nelson y Siegel (1987), entregando parámetros que permiten identificar la variación temporal y estimándolos, utilizando vectores autoregresivos (VAR). Adicionalmente, Ang & Piazzesi (2003) y Diebold, Rudebusch & Aruoba (2006) representan su *state-space formulation* en dos etapas utilizando un modelo ARIMA y VAR. Por su parte, otros autores, como Schawrtz (1979), Langetieg (1980), Cox et al (1985), Duffie & Kan (1996) y Babbs & Nowman (1999) desarrollaron modelos *affine term structure* que establecían las relaciones dinámicas de las curvas para luego estimarlas vía Filtro de Kalman. Más recientemente, algunos trabajos han agregado variaciones a los modelos mencionados utilizando herramientas computacionales para simular los distintos parámetros (Chen & Scott, 2003; Christensen & Rudebusch, 2014; Aguiar-Conraria, Martins & Soares, 2012; Bustreo, 2016; Imakubo, Kojima & Makajima, 2018).

Para el caso chileno, autores como Zuñiga & Soria (1998), Zuñiga (1999a) y Zuñiga (1999b), Lefort & Walker (2000), Alfaro (2009), Alfaro, Becerra & Sagner (2011), Carrasco, Ceballos & Mena (2016) y Ceballos (2014), al igual que la gran mayoría de los estudios, utilizan el modelo de Nelson & Siegel (1987) o Svensson (1994) estático. Por su parte, Fernández (2001) y Ochoa (2006) utilizan modelos *affine term structure* para dar una interpretación económica a los factores que determinan los movimientos en la curva chilena. Cortázar *et al* (2007) es de los primeros autores en buscar una especificación que se acomode a la curva de interés local, sin embargo, su aporte se centra en identificar la plausibilidad de realizar estimaciones utilizando el Filtro de Kalman en presencia de mercados ilíquidos más que poner a competir múltiples especificaciones.

En el mundo profesional, una encuesta (tabla 1) realizada por el autor de este trabajo muestra que, para la determinación de los niveles de spread en sus activos en el caso chileno, un 58% de los participantes del mercado financiero utilizan enfoques estáticos basados en Nelson & Siegel (1987) o Svensson (1994), mientras que un 22% utiliza modelos fundamentales, y tan solo un 10% emplea modelos dinámicos. La muestra fue compuesta por 99 entidades financieras públicas entre las cuales tenemos el 100% de las AGF, 100% de las corredoras de bolsa, 100% de las securitizadoras y una AFP (detalles de la muestra en Apéndice).

En general, la evidencia empírica ha puesto de manifiesto que el uso de estos modelos presenta ciertos problemas para poder predecir con precisión los valores de la curva base. El gráfico 3 muestra que los resultados predichos por estos modelos son tres veces más volátiles que los realizados. Además, que las predicciones entre duraciones 1-5 y 13-20 podemos encontrar hasta 5 veces la volatilidad real.

Gráfico 3. Volatility Structure of Interest Rates (01/2003 - 06/2019)



En este ámbito, el objetivo del presente trabajo es proponer un modelo, basado en los trabajos realizados por Vasicek (1977) y Cox *et al* (1985), que permita identificar de mejor manera la dinámica de las tasas de interés, que aproximan las tasas libres de riesgo, en la curva de rendimientos, que permita entregar de mejor manera herramientas a los inversionistas para una valoración de activos más adecuada en un contexto de economías emergentes, como lo es el caso chileno. En consecuencia, se pretende demostrar empíricamente que el uso de los modelos de Nelson & Siegel (1987) y Svensson (1994) no son suficientes para predecir con precisión los valores de la curva base chilena. Al mismo tiempo, pondremos a competir algunos de los modelos con *affine term structure* más usados en la literatura para ver cuál de estos se ajusta de mejor manera a los datos chilenos.

Para este estudio se utilizó una muestra que contempla la transacción de instrumentos financieros emitidos por el Banco Central y Tesorería General de la Republica denominados en UF, en todas sus duraciones. La frecuencia de los datos es diaria pero incompleta (no todos los instrumentos se transan cada día), resultando así en un panel incompleto de 899,764 observaciones entre enero del 2003 y diciembre del 2018.

Dentro de nuestros resultados encontramos que Nelson & Siegel (1987) y Svensson (1994), ya sea con enfoque estático o dinámico, no resultan suficientes para estimar la estructura de tasas de interés libre de riesgo chilena. De manera más específica, encontramos que dichos modelos entregan proyecciones mucho más volátiles y erradas, en comparación con los modelos propuestos por Vasicek (1977) y Cox *et al* (1985). Más aun, podemos identificar que los modelos de 3 factores son los que alcanzan mejores estimaciones y menor RMSE. Los resultados son robustos y heterogéneos a distintas especificaciones, inclusive a datos simulados en condiciones cuyos parámetros son extremos. El presente trabajo tiene importantes implicancias en el mundo profesional y, en especial, en la estimación de curvas de rendimiento de los instrumentos libres de riesgo.

El trabajo se organizará de la siguiente forma. En la Sección II desarrollaremos teóricamente los *affine term structure models* en su forma generalizada, para luego adentrarnos en las formas específicas de *Vasicek* multifactorial y *CIR* multifactorial; en la Sección III veremos el Filtro de Kalman, mostrando la construcción del *state-space formulation* y su posterior implementación; en la Sección IV, se mostrarán los resultados de las estimaciones utilizando la data chilena; en la Sección V, con el objetivo de ver la consistencia de los modelos, se hará un análisis de sensibilidad de los parámetros mediante una simulación. Finalmente, en la Sección VI se harán las conclusiones

II. Modelo propuesto

General Affine Term Structure Model

Piazzesi (2010) comienza desarrollando los *Term Structure Models* como aquellos que determinan el precio de bonos en tiempo continuo bajo los supuestos de cero riesgos de *default*, cero cupón y normalizado a 1, es decir:

$$P(t, T)e^{(T-t)z(t, T)} = 1$$

$$\ln(P(t, T)e^{(T-t)z(t, T)}) = 0$$

$$\ln(e^{(T-t)z(t, T)}) = -\ln(P(t, T))$$

$$z(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}$$

En donde T es la fecha de maduración, t el tiempo actual y z la tasa de interés *spot*. Adicionalmente, define el concepto de tasa de interés instantánea libre de riesgo $r(t)$, calculada evaluando el límite de:

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{T \rightarrow t} z(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} \\ &= \lim_{T \rightarrow t} \left(-\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \right) \\ &= -\frac{\partial \ln P(t, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Si bien esta construcción es teórica, es un concepto útil ya que toma la estructura discreta de la tasa de interés y le da características continuas, condición necesaria para usar procesos estocásticos (con parámetros continuos) en nuestro desarrollo matemático.

Adicionalmente, Piazzesi (2010) da la característica *affine* al definir este modelo como uno libre de arbitrajes en el cual la tasa de interés de los bonos es una función lineal constante de un vector de estado x .

Formalmente, su forma funcional está definida por:

- *Tasa de Interés Corta affine*

$$r(t) = R(x) = \delta_0 + \delta_1^T x$$

Con

$$\delta_0 \in \mathbb{R}, \delta_1 \in \mathbb{R}^N \text{ y } x \in \mathbb{R}^N$$

Donde δ_0 y δ_1 son parámetros que dependen del número de factores en el modelo. Mientras que x es un proceso Markoviano homogéneo.

- *Difusión affine*

El proceso r es una difusión *affine* si es que resuelve,

$$dr(t) = f(r, t)dt + \rho(r, t)dW(t)$$

Con

$$f \triangleq k(\bar{\theta} - r) \text{ coeficiente de deriva}$$

$$\rho \triangleq \sigma \text{ coeficiente de difusión}$$

Donde k representa la velocidad de reversión a la media de largo plazo, $\bar{\theta}$. Por otro lado, $W(t)$ es un escalar estándar de un proceso de Wiener.

Vasicek Multifactor Model

Este modelo se escribe en su forma general:

$$P(t, T, y_1, \dots, y_n) = e^{A(t, T) - \sum_{i=1}^n B_i(t, T) y_i}$$

donde

- Tasa de Interés Corta *affine*

$$r = \sum_{i=1}^n y_i$$

en donde la tasa de interés está definida por una composición lineal de n variables de estado inter correlacionadas.

- Difusión *affine*

Se asume que las variables de estado están gobernadas por el set de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dy_1(t) = f_1(y_1, t)dt + \sum_{j=1}^n \rho_1(y_1, y_j, t)dW_1(t)$$

...

$$dy_n(t) = f_n(y_n, t)dt + \sum_{j=1}^n \rho_n(y_n, y_j, t)dW_n(t)$$

$f_i \triangleq k_i(\bar{\theta}_i - y_i)$ coeficiente de deriva del proceso i

$\rho_i \triangleq \sigma_{ij}$ coeficiente de difusión del proceso i

Por otro lado, $W_i(t)$ es un escalar estándar de un proceso de Wiener. Es importante notar que el coeficiente ρ_i captura la covarianza entre los distintos factores.

Luego, siguiendo la notación utilizada en Karatzas & Shreve (1998), aplicamos el teorema de Itô para diferenciar el precio de nuestro bono cero cupón:

$$dP = P_t dt + \sum_{i=1}^n P_{y_i} dy_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=i}^n \sum_{j=1}^n P_{y_i y_j} d\langle y_i y_j \rangle(t)$$

$$dP = P_t dt + \sum_{i=1}^n P_{y_i} \left[f_i(y_i, t) dt + \sum_{j=1}^n \rho(y_i, y_j, t) dW_i(t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=i}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_i, y_j, t) P_{y_i y_j} dt$$

$$dP = \left[P_t + \sum_{i=1}^n f_i(y_i, t) P_{y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=i}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_i, y_j, t) P_{y_i y_j} \right] dt + \sum_{i=i}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_i, y_j, t) P_{y_i} dW_i(t)$$

Para todo $i, j, k = 1 \dots n$

Para deshacernos del componente aleatorio de la ecuación, utilizamos una de las herramientas que desarrollan Black & Scholes (1973) para establecer su fórmula de valorización de opciones. Los autores construyen un portafolio autofinanciado compuesto por una posición larga y n posiciones cortas, con fechas de maduración s_0, s_1, \dots, s_n tal que $s_0 \neq s_1 \neq \dots \neq s_n$, con el objetivo de elegir la combinación de posiciones que permita eliminar las n fuentes de incertidumbre. Formalmente, denotamos el retorno de este portafolio V como:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dP(t, s_0)}{P(t, s_0)} - \sum_{k=1}^n u_k \frac{dP(t, s_k)}{P(t, s_k)}$$

Reemplazando los valores obtenidos anteriormente obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} \mu_s &= \left[\mu(s_0)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(s_0)dW_i(t) \right] - \sum_{k=1}^n u_k \left[\mu(s_k)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(s_k)dW_i(t) \right] \\ \frac{dV}{V} \mu_s &= \left[\mu(s_0)dt - \sum_{k=1}^n u_k \mu(s_k) \right] dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(s_0)dW_i(t) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n u_k \sigma_i(s_k)dW_i(t) \\ \frac{dV}{V} \mu_s &= \left[\mu(s_0)dt - \sum_{k=1}^n u_k \mu(s_k) \right] dt + \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i(s_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n u_k \sigma_i(s_k) \right] dW_i(t) \\ \frac{dV}{V} \mu_s &= \left[\mu(s_0)dt - \sum_{k=1}^n u_k \mu(s_k) \right] dt + \sum_{i=1}^n \left[\sigma_i(s_0) - \sum_{k=1}^n u_k \sigma_i(s_k) \right] dW_i(t) \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \mu(s_m) &= \frac{1}{P(t, m)} \left[P_{m,t} + \sum_{i=1}^n f_i(y_i, t) P_{m,y_i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_k, y_j, t) P_{m,y_k y_j} \right] \\ \sigma_i(s_m) &= \frac{1}{P(t, m)} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_k, y_j, t) P_{m,y_i} \right] \end{aligned}$$

Para todo $i, j, k = 1, \dots, n$ y $m = 0, \dots, n$

De esta forma, para eliminar las fuentes de incertidumbre, debemos cumplir que:

$$\sum_{k=1}^n u_k \sigma_i(s_k) = \sigma_i(s_0)$$

Para todo $i = 1, \dots, n$

O, de la misma forma, lo representamos en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(s_1) & \dots & \sigma_1(s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n(s_1) & \dots & \sigma_n(s_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1(s_0) \\ \vdots \\ \sigma_n(s_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1(s_1) & \dots & \sigma_1(s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n(s_1) & \dots & \sigma_n(s_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1(s_0) \\ \vdots \\ \sigma_n(s_0) \end{bmatrix}$$

Luego, al reemplazar esta composición en la ecuación que teníamos anteriormente obtenemos:

$$\frac{dV}{V} = \left[\mu(s_0) - \sum_{k=1}^n u_k \mu(s_k) \right] dt$$

Debido a que este portafolio no presenta incertidumbre, debemos igual su retorno a la tasa de interés libre de riesgo $r(t)$ mencionada anteriormente:

$$\left[\mu(s_0) - \sum_{k=1}^n u_k \mu(s_k) \right] dt = r dt$$

$$\mu(s_0) - \sum_{k=1}^n u_k \mu(s_k) = r$$

$$\sum_{k=1}^n u_k \mu(s_k) = \mu(s_0) - r$$

$$[u_1 \quad \dots \quad u_n] \begin{bmatrix} \mu(s_1) \\ \vdots \\ \mu(s_n) \end{bmatrix} = \mu(s_0) - r$$

Con un poco de algebra, derivamos el llamado *market price of risk*, que representa el exceso de retorno estandarizado de cada factor de riesgo sobre la opción libre de riesgo.

$$\mu(s_0) - r = [\mu(s_1) \quad \dots \quad \mu(s_n)] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$\mu(s_0) - r = [\mu(s_1) \quad \dots \quad \mu(s_n)] \begin{bmatrix} \sigma_1(s_1) & \dots & \sigma_1(s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n(s_1) & \dots & \sigma_n(s_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1(s_0) \\ \vdots \\ \sigma_n(s_0) \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n] = [\mu(s_1) \quad \dots \quad \mu(s_n)] \begin{bmatrix} \sigma_1(s_1) & \dots & \sigma_1(s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n(s_1) & \dots & \sigma_n(s_n) \end{bmatrix}^{-1}$$

Como podemos ver, para cada λ_i , los términos μ_i y σ_i son independientes de la selección de s_i . Como consecuencia, cada λ_i también es independiente de s_i . Así, podemos reescribir nuestra ecuación como la siguiente relación determinística:

$$\mu(t) - r = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n] \begin{bmatrix} \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_n(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i(t)$$

Así, reemplazando estos valores en nuestras expresiones iniciales de $\mu(t)$ y $\sigma_i(t)$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial para cualquier madurez t :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P(t,T)} \left[P_t + \sum_i^n f_i(y_i, t) P_{y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_i, y_j, t) P_{y_i y_j} \right] - r \\ & = \frac{1}{P(t,T)} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \rho(y_k, y_j, t) P_{y_i} \right] \end{aligned}$$

$$P_t + \sum_i^n f_i(y_i, t) P_{y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_i, y_j, t) P_{y_i y_j} - rP(t,T) - \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \rho(y_k, y_j, t) P_{y_i} \right] = 0$$

$$P_t + \sum_{i=1}^n \left[f_i(y_i, t) - \lambda_i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_i, y_j, t) \right] P_{y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho(y_i, y_j, t) P_{y_i y_j} - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) P(t,T) = 0$$

$$P_t + \sum_{i=1}^n k_i (\bar{\theta}_i - y_i) P_{y_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} P_{y_i y_j} - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) P(t,T) = 0$$

Antes de seguir realizaremos la siguiente variación en nuestras variables temporales $\tau = T - t$. Con esto, nuestro modelo general visto anteriormente queda:

$$P(\tau, y_1, \dots, y_n) = e^{A(\tau) - \sum_{i=1}^n B_i(\tau) y_i}$$

Al desarrollar las derivadas parciales (en apéndice) de la ecuación recientemente encontrada, obtenemos los valores para $A(\tau)$ y $B_i(\tau)$:

$$B_i(\tau) = \frac{1}{k_i} (1 - e^{-k_i \tau})$$

$$\begin{aligned} A(\tau) = & \sum_{i=1}^n \left[\frac{\gamma_i (B_i(\tau) - \tau)}{k_i^2} - \frac{\sigma_i^2 B_i^2(\tau)}{4k_i} \right] \\ & + \sum_{\{i,j:i \neq j\}} \frac{\sigma_{ij}}{2k_i k_j} \left[\tau - B_i(\tau) - B_j(\tau) + \frac{1}{k_i + k_j} (1 - e^{-(k_i + k_j)\tau}) \right] \end{aligned}$$

$$\gamma_i = k_i^2 \left(\bar{\theta}_i - \frac{\sigma_i \lambda_i}{\kappa_i} \right) - \frac{\sigma_i^2}{2}$$

Cox, Ingersoll & Ross (CIR) Multifactor Model

Este modelo se escribe en su forma general:

$$P(t, T, y_1, \dots, y_n) = e^{\sum_{i=1}^n (A_i(T-t) - B_i(T-t)y_i)}$$

Si bien la tasa de interés corta *affine* es exactamente la misma que la vista para el modelo Vasicek, su proceso de difusión está dado por:

- Difusión *affine*

Se asume que las variables de estado están gobernadas por el set de ecuaciones diferenciales estocásticas,

$$dy_1(t) = k_1(\bar{\theta}_1 - y_1)dt + \sigma_1\sqrt{y_1(t)}dW_1(t)$$

...

$$dy_n(t) = k_n(\bar{\theta}_n - y_n)dt + \sigma_n\sqrt{y_n(t)}dW_n(t)$$

Realizando el mismo cambio en nuestras variables temporales obtenemos:

$$P(\tau, y_1, \dots, y_n) = e^{\sum_{i=1}^n (A_i(\tau) - B_i(\tau)y_i)}$$

Por último, realizamos el mismo desarrollo de las ecuaciones parciales (en apéndice) visto anteriormente en el modelo de Vasicek pero ahora considerando un proceso de difusión distinto.

$$B_i(\tau) = \frac{2(e^{\gamma_i \tau} - 1)}{[(\gamma_i + k_i + \lambda_i)(e^{\gamma_i \tau} - 1) + 2\gamma_i]}$$

$$A_i(\tau) = \ln \left\{ \frac{2\gamma_i e^{\frac{(\gamma_i + k_i + \lambda_i)\tau}{2}}}{[(\gamma_i + k_i + \lambda_i)(e^{\gamma_i\tau} - 1) + 2\gamma_i]} \right\}^{\frac{2k_i\theta_i}{\sigma_i^2}}$$

$$\gamma_i = \sqrt{(k_i + \lambda_i)^2 + 2\sigma_i^2}$$

III. Aplicando el Filtro de Kalman

State-Space Formulation

Primero se define el **sistema de medición**, el cual representa la relación entre las tasas de interés de mercado y las variables de estado. Luego, se define el **sistema de transición**, el cual establece las dinámicas de estas variables de estado. En conjunto, ambos sistemas representan el llamado *state-space model*. El Filtro de Kalman utiliza esta modelación para, recursivamente, hacer inferencias de las variables de estado no observables que rigen el modelo.

Para construir el sistema de medición en el modelo multifactorial de Vasicek necesitamos m tasas de interés z_1, z_2, \dots, z_m con sus respectivos tiempos de maduración $t_{z_1}, t_{z_2}, \dots, t_{z_m}$. Luego, recordando la relación entre las tasas y su precio vista anteriormente:

$$z(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} = -A(t, T) \frac{\sum_{i=1}^n (B_i(t, T) y_{i,t})}{T - t}$$

Debemos discretizar la dimensión de tiempo para poder ajustar nuestras observaciones. Siguiendo Smith (1985) subdividimos el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos con $t_i = \frac{iT}{N}$ para todo $i = 1, \dots, \tilde{n}$. Resultando así en el siguiente **sistema de medición**:

$$\begin{bmatrix} z(t_i, t_{z_1}) \\ \vdots \\ z(t_i, t_{z_m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A(t_i, t_{z_1})}{t_{z_1} - t_i} \\ \vdots \\ -\frac{A(t_i, t_{z_m})}{t_{z_m} - t_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B_1(t_i, t_{z_1})}{t_{z_1} - t_i} & \dots & \frac{B_n(t_i, t_{z_1})}{t_{z_1} - t_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B_1(t_i, t_{z_m})}{t_{z_m} - t_i} & \dots & \frac{B_n(t_i, t_{z_m})}{t_{z_m} - t_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ \vdots \\ y_m(t_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t_i) \\ \vdots \\ v_m(t_i) \end{bmatrix}$$

$$z_{t_i} = A + Hy_i + v_{t_i}$$

Con

$$v_t \sim N(0, R)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & r_m^2 \end{bmatrix}$$

Mientras que el **sistema de transición** es:

$$\begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ \vdots \\ y_n(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(1 - e^{-k_1\Delta t}) \\ \vdots \\ \bar{\theta}_n(1 - e^{-k_n\Delta t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-k_1\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-k_n\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1(t_{i-1}) \\ \vdots \\ y_n(t_{i-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(t_i) \\ \vdots \\ e_n(t_i) \end{bmatrix}$$

$$y_{t_i} = C + Fy_{t_{i-1}} + e_{t_i}$$

Con

$$e_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}} \sim N(0, Q)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2(1 - e^{2k_1\Delta t})}{2k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_n^2(1 - e^{2k_n\Delta t})}{2k_n} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, el modelo CIR multifactorial tiene como **sistema de medición**:

$$z(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} = \frac{\sum_{i=1}^n (-A_i(t, T) + B_i(t, T)y_{i,t})}{T - t}$$

$$\begin{bmatrix} z(t_i, t_{z_1}) \\ \vdots \\ z(t_i, t_{z_m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n -\frac{A(t_i, t_{z_1})}{t_{z_1} - t_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n -\frac{A(t_i, t_{z_m})}{t_{z_m} - t_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B_1(t_i, t_{z_1})}{t_{z_1} - t_i} & \dots & \frac{B_n(t_i, t_{z_1})}{t_{z_1} - t_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B_1(t_i, t_{z_m})}{t_{z_m} - t_i} & \dots & \frac{B_n(t_i, t_{z_m})}{t_{z_m} - t_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ \vdots \\ y_m(t_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t_i) \\ \vdots \\ v_m(t_i) \end{bmatrix}$$

$$z_{t_i} = A + Hy_i + v_{t_i}$$

Con

$$v_t \sim N(0, R)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & r_m^2 \end{bmatrix}$$

Mientras que el **sistema de transición** se define como:

$$\begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ \vdots \\ y_n(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(1 - e^{-k_1 \Delta t}) \\ \vdots \\ \bar{\theta}_n(1 - e^{-k_n \Delta t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-k_1 \Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-k_n \Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1(t_{i-1}) \\ \vdots \\ y_n(t_{i-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(t_i) \\ \vdots \\ e_n(t_i) \end{bmatrix}$$

$$y_{t_i} = C + Fy_{t_{i-1}} + e_{t_i}$$

Con

$$e_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}} \sim N(0, Q_{t_i})$$

$$Q_{t_i} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_n \end{bmatrix}$$

$$\varphi_i = \frac{\bar{\theta}_i \sigma_i^2}{2k_i} (1 - e^{-k_i \Delta t})^2 + \frac{\sigma_i^2}{k_i} (e^{-k_i \Delta t} - e^{-2k_i \Delta t}) y_i(t_{i-1})$$

Implementación

El Filtro de Kalman es una herramienta muy utilizada para estimar variables de estado no observadas pertenecientes a paneles de dato ruidosos. Este consiste en estimar recursivamente los parámetros de un modelo utilizando métodos de máxima verosimilitud. Antes que nada, definimos \mathcal{F}_{t_i} como el generador del filtro de información. Luego, podemos separar el proceso de filtración en 5 etapas:

- 1) Primero se necesita definir un set de variables iniciales. La literatura ha consensuado en utilizar la media incondicional y varianza de nuestro sistema de transición:

$$E(y_1) = E(y_1 | \mathcal{F}_0) = [\bar{\theta}_1 \quad \dots \quad \bar{\theta}_n]'$$

Para Vasicek

$$Var(y_1) = Var(y_1 | \mathcal{F}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_n^2}{2k_n} \end{bmatrix}$$

Para CIR

$$Var(y_1) = Var(y_1 | \mathcal{F}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2k_1} \bar{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_n^2}{2k_n} \bar{\theta}_n \end{bmatrix}$$

- 2) Luego predecimos el sistema de medición encontrando su esperanza condicionada al set de información disponible un periodo atrás:

$$E(z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}) = A + HE(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})$$

$$Var(z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}) = HVar(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})H' + R$$

- 3) Tercero, teniendo los valores verdaderos de nuestro sistema de medida, utilizamos el error en nuestra predicción condicionada para actualizar la inferencia de nuestro sistema de transición:

$$\zeta_{t_i} = z_{t_i} - E(z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})$$

$$E(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}) = E(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}) + K_{t_i} \zeta_{t_i}$$

Donde

$$K_{t_i} = Var(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})H'Var(z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})^{-1}$$

K recibe el nombre de "Matriz de ganancia de Kalman", esta determina la ponderación de la nueva información. También podemos actualizar la varianza condicional de nuestro sistema:

$$Var(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}) = (I - K_{t_i}H)Var(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})$$

- 4) Con la información que hemos ganado gracias a la actualización de nuestro sistema, ya podemos comenzar la predicción:

$$E(y_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}) = C + FE(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i})$$

$$Var(y_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}) = Var(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}) - FVar(y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i})F' + Q$$

- 5) Finalmente, iteramos estos 4 pasos para cada t_i . Bajo el supuesto que los errores predichos de nuestro sistema de medición son Gaussianos, construimos la función *log-likelihood* para luego encontrar los parámetros que la maximicen.

$$l = \sum_{i=1}^N \ln \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det \{ \text{Var} (y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}) \}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \zeta_{t_i}^T \text{Var} (y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})^{-1} \zeta_{t_i}} \right]$$

$$l = -\frac{nN \ln(2\pi)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \det \{ \text{Var} (y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}) \} + \zeta_{t_i}^T \text{Var} (y_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})^{-1} \zeta_{t_i}$$

Filtro de Kalman en Paneles Incompletos

Un problema que podríamos encontrar al hacer nuestras estimaciones en un país como Chile es la infrecuencia con la que se transan estos papeles. En el gráfico 2 podemos ver que, para cierto día, solo se transa una pequeña parte del universo invertible (gráfico 1). De esta forma, se puede dar la situación que z_{t_i} no tenga las mismas dimensiones para cada t_i .

Cortazar *et al* (2007) explican que el Filtro de Kalman sigue siendo útil ya que para la estimación de variables de estado $E(y_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i})$ y covarianza $\text{Var}(y_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i})$ solo se utilizan las propiedades dinámicas, las que no dependen del número de observaciones de la variable z_{t_i} .

IV. Muestra, variables y resultados

Descripción de Datos

Para nuestro estudio utilizamos instrumentos emitidos por el Banco Central y Tesorería General de la Republica Chilena, ajustados a la inflación, con duración entre 1 y 20 años. La literatura chilena se ha basado principalmente en instrumentos ajustados a la inflación ya que estos son mucho más líquidos que los nominales (tanto en stock como en veces

transadas) y son un mejor mecanismo para valorizar flujos futuros debido a que, evidentemente, incluyen las expectativas de inflación.

Concretamente, la base consiste en todas las transacciones diarias que se realizaron en la Bolsa de Comercio de Santiago entre enero del 2003 y diciembre del 2018. Se utiliza información diaria y no semanal o mensual debido a que, en Chile, el proveedor oficial (Riskamerica) de precios de los instrumentos de intermediación financiera y renta fija actualiza diariamente sus modelos para entregar las valorizaciones correspondientes.

Adicionalmente, se decide utilizar el conjunto de BCU y BTU en la misma muestra. Si bien reconocemos que existe una diferencia fundamental entre estos, tanto en tasa como stock, estimaciones previas arrojan que no existen mayores diferencias al realizar nuestra metodología ocupando muestras diferenciadas (ver tablas 14 y 15)

La tabla 3 muestra el número de observaciones, frecuencia de transacciones, tasa promedio y desviación estándar de las tasas.

Resultados

La tabla 4 muestra los resultados de los modelos *Vasicek* y *CIR* de 3 factores (especificación elegida como la mejor entre las posibilidades según criterios de RMSE, para ver las especificaciones de 1 y 2 factores, y sus respectivos RMSE, ver tablas 5a, 5b, 6a y 6b). Se puede observar que todos los parámetros fueron significativos y presentaron los signos esperados para una curva de base que históricamente ha tenido pendiente positiva y baja volatilidad.

Al igual que en Cortazar *et al* (2007), encontramos que el parámetro de reversión a la media κ_1 es significativo pero muy pequeño por lo que este proceso se podría parecer más a un ruido blanco. Sin embargo, los otros muestran magnitudes cercanas a 1.8 años de duración para retornar a la media. Por otro lado, las medias de largo plazo θ_i se encuentran levemente mas bajas que las encontradas en la literatura, este resultado era esperado ya que la gran mayoría de los datos utilizados anteriormente van desde los años 90 hasta el 2006, contexto económico que presentaba tasas mucho más altas que en los últimos 10 años. Los parámetros σ_i y λ_i resultaron ser bastante similares al resto de la literatura, esto

también era esperable ya que los fundamentales detrás de la curva chilena nunca han cambiado significativamente (volatilidad constante y pendiente positiva).

En la tabla 7 podemos comprar la raíz del error cuadrático medio de algunos de los modelos más usados en la industria chilena para compararlos con las especificaciones de *Vasicek* y *CIR* recién encontradas. Los resultados mostrados por el modelo de Nelson & Siegel corresponden al promedio (en cada duración) entre las proyecciones realizadas para cada día en que se tienen datos. Por otro lado, los otros 3 modelos incorporan la información de toda la muestra.

Es evidente que el uso de modelos dinámicos es tremendamente superior a los estáticos, especialmente en duraciones en las que encontramos menos observaciones, siendo el *Vasicek* el que mejor se ajusta a la información disponible.

Por último, en la tabla 8 podemos ver que nuestros resultados apuntan a lo mismo cuando observamos la raíz del error cuadrático medio de estos modelos tratando de predecir valores fuera de muestra. Las especificaciones de *Vasicek* y *CIR* reflejan casi los mismos resultados obtenidos dentro de muestra, lo que indica bastante consistencia por parte de estos, historia que no se repite ni en lo más mínimo en las otras especificaciones.

V. Análisis de Robustez.

Simulación

Si bien nuestro modelo elegido se adapta bastante bien a la data real, es necesario sensibilizar sus parámetros para ver si tiene la capacidad de ajustarse a distintas estructuras que no necesariamente se han visto a lo largo de los últimos 16 años en la curva de base chilena.

Para esto, se realizó un Monte Carlo en donde se sensibilizó el modelo a 3 especificaciones distintas, se utilizaron 900.000 observaciones y se corrió la simulación 250 veces.

El primer set de datos está construido con la especificación encontrada en la tabla 9a. Está caracterizada por tener una volatilidad alta en el proceso de difusión y una tasa de largo plazo media, países como Brasil, Colombia y Perú han tenido históricamente estas

propiedades. La raíz de los errores cuadráticos medios los encontramos en la tabla 9b, se puede apreciar que son similares a los encontrados con los datos reales.

El segundo set de datos está construido con la especificación de la tabla 10a. Podemos apreciar que tiene los parámetros λ positivos y una tasa de largo plazo bastante elevada. Países como Turquía y Argentina han tenido esta curva con pendiente negativa ya que han vivido graves problemas de inflación y alta probabilidad de *default* en sus papeles soberanos. La raíz de los errores cuadráticos medios los encontramos en la tabla 10b, se puede apreciar que son algo más elevados que los encontrados con la data real.

El tercer set de datos está construido con la especificación encontrada en la tabla 11a. Observamos una curva construida por ratios de convergencia bajos y volatilidad en el proceso de difusión elevada. Países como México, Italia y España han presenciado estas características debido a políticas monetarias poco consistentes a lo largo del tiempo. La raíz de los errores cuadráticos medios los encontramos en la tabla 11b, se puede observar que son bastante similares a los vistos en la data real.

Cortes Muestrales

Adicionalmente, se cortó la muestra en dos partes para observar la consistencia de los resultados.

La primera, compuesta por datos desde enero del 2003 a diciembre del 2010, obtuvo los resultados que encontramos en las tablas 12a y 12b. Como podemos apreciar, todos los valores son bastante similares a los encontrados en la muestra completa, solo algunas diferencias como un mayor coeficiente de volatilidad y mayor tasa de largo plazo. Ambos cambios eran esperados ya que efectivamente existieron mayores tasas en esos años, mientras que la volatilidad fue bastante grande debido a la crisis en el 2008.

Por otro lado, la segunda parte, compuesta por datos desde enero del 2011 a diciembre del 2018 arrojó resultados casi idénticos a los encontrados en la muestra completa. Esto lo podemos apreciar en las tablas 13a y 13b.

VI. Conclusiones.

En este trabajo presentamos un problema latente en gran parte del sistema financiero chileno actual. Tanto en el mundo académico como profesional, las metodologías utilizadas, para poder estimar y predecir las curvas de rendimiento de los instrumentos libres de riesgo en Chile, son reacionadas a modelos estáticos basados en Nelson & Siegel (1987) o Svensson (1994) y modelos fundamentales, los cuales presentan ciertos problemas de precisión de los valores estimados.

El presente trabajo contribuye al mundo profesional y académico vía analizar, a través de un modelo dinámico basado en Vasicek (1977) y Cox *et al* (1985), una predicción más adecuada de las tasas de interés que aproximan las tasas libres de riesgo y su curva de rendimiento.

Usando una muestra de instrumentos financieros emitidos por el banco central, nuestros resultados muestran que Nelson & Siegel (1987) y Svensson (1994), ya sea con enfoque estático o dinámico, no resultan suficientes para estimar la estructura de tasas de interés libre de riesgo chilena, y sus proyecciones son muchos más volátiles y erradas, en comparación con los modelos propuestos por Vasicek (1977) y Cox *et al* (1985). Los resultados son robustos y heterogéneos a distintas muestras y a condiciones extremas.

Referencias

Aguiar-Conraria, L., Martins, M. M., & Soares, M. J. (2012). The yield curve and the macro-economy across time and frequencies. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(12), 1950-1970.

Alfaro, R. (2009). La curva de rendimiento bajo Nelson-Siegel. *Documentos de Trabajo (Banco Central de Chile)*, (531), 1.

Alfaro, R. A., Becerra, S. C., & Sagner, A. T. (2011). Estimación de la estructura de tasas nominales de Chile: aplicación del modelo dinámico Nelson-Siegel. *Economía Chilena*, 14(3), 57.

Ang, A., & Piazzesi, M. (2003). A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. *Journal of Monetary Economics*, 50(4), 745-787.

Babbs, S. H., & Nowman, K. B. (1999). Kalman filtering of generalized Vasicek term structure models. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(1), 115-130. *Banking & Finance*, 3(2), 133-155.

Barrios, S., Iversen, P., Lewandowska, M., & Setzer, R. (2009). Determinants of intra-euro area government bond spreads during the financial crisis (No. 388). Directorate General Economic and Financial Affairs (DG ECFIN), European Commission.

Beetsma, R., Giuliodori, M., De Jong, F., & Widijanto, D. (2013). Spread the news: The impact of news on the European sovereign bond markets during the crisis. *Journal of International Money and Finance*, 34, 83-101.

Bergstrom, A. R. (1984). Continuous time stochastic models and issues of aggregation over time. *Handbook of econometrics*, 2, 1145-1212.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637-654.

Bolder, D. J. (2001). Affine term-structure models: Theory and implementation. *Available at SSRN 1082826*.

Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1979). A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking & Finance*, 3(2), 133-155.

Bustreo, R. (2016). Value-at-Risk for fixed-income portfolios: A Kalman filtering approach. *IMA Journal of Management Mathematics*, 27(4), 557-573.

Carrasco, S., Ceballos, L., & Mena, J. (2016). Estimación de la estructura de tasas de interés en Chile. *Economía Chilena*, 19(1), 58.

Ceballos, L. (2014). The yield curve factors and economic surprises in the Chilean bond market. *Revista de Análisis Económico–Economic Analysis Review*, 29(2), 3-24.

- Chen, R. R., & Scott, L. (2003). Multi-factor Cox-Ingersoll-Ross models of the term structure: Estimates and tests from a Kalman filter model. *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 27(2), 143-172.
- Christensen, J. H., & Rudebusch, G. D. (2014). Estimating shadow-rate term structure models with near-zero yields. *Journal of Financial Econometrics*, 13(2), 226-259.
- Christensen, J. H., Diebold, F. X., & Rudebusch, G. D. (2011). The affine arbitrage-free class of Nelson–Siegel term structure models. *Journal of Econometrics*, 164(1), 4-20.
- Coleman, T. S., Fisher, L., & Ibbotson, R. G. (1992). Estimating the term structure of interest rates from data that include the prices of coupon bonds. *The Journal of Fixed Income*, 2(2), 85-116.
- Cortázar, G., Schwartz, E. S., & Naranjo, L. F. (2007). Term-structure estimation in markets with infrequent trading. *International Journal of Finance & Economics*, 12(4), 353-369.
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. In *Econometrica* 53 (pp. 385-407).
- Csonto, M. B., & Ivaschenko, M. I. V. (2013). Determinants of sovereign bond spreads in emerging markets: Local fundamentals and global factors vs. ever-changing misalignments (No. 13-164). International Monetary Fund.
- Diebold, F. X., & Li, C. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, 130(2), 337-364.
- Diebold, F. X., Li, C., & Yue, V. Z. (2008). Global yield curve dynamics and interactions: a dynamic Nelson–Siegel approach. *Journal of Econometrics*, 146(2), 351-363.
- Diebold, F. X., Rudebusch, G. D., & Aruoba, S. B. (2006). The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of econometrics*, 131(1-2), 309-338.
- Duffee, G. R. (1998). The relation between treasury yields and corporate bond yield spreads. *The Journal of Finance*, 53(6), 2225-2241.
- Duffie, D., & Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rates. *Mathematical finance*, 6(4), 379-406.
- Fernandez, V. (2001). A nonparametric approach to model the term structure of interest rates: The case of Chile. *International Review of Financial Analysis*, 10(2), 99-122.
- Gertler, M., & Lown, C. S. (1999). The information in the high-yield bond spread for the business cycle: evidence and some implications. *Oxford Review of Economic Policy*, 15(3), 132-150.
- Huang, J. Z., & Huang, M. (2012). How much of the corporate-treasury yield spread is due to credit risk?. *The Review of Asset Pricing Studies*, 2(2), 153-202.
- Imakubo, K., Kojima, H., & Nakajima, J. (2018). The natural yield curve: its concept and measurement. *Empirical Economics*, 55(2), 551-572.

- Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1998). Brownian motion. In *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (pp. 47-127). Springer, New York, NY.
- Kodres, M. L. E., Hartelius, K., & Kashiwase, K. (2008). Emerging market spread compression: is it real or is it liquidity? (No. 8-10). International Monetary Fund.
- Koopman, S. J., Mallee, M. I., & Van der Wel, M. (2010). Analyzing the term structure of interest rates using the dynamic Nelson–Siegel model with time-varying parameters. *Journal of Business & Economic Statistics*, 28(3), 329-343.
- Langtieg, T. C. (1980). A multivariate model of the term structure. *The Journal of Finance*, 35(1), 71-97.
- Laurent, R. D. (1989). Testing the spread. Federal Reserve Bank of Chicago Economic Perspectives, 13(4), 22-34.
- Lefort, F., & Walker, E. (2000). Caracterización de la estructura de tasas de interés reales en Chile. *Economía Chilena*, 3(2), 31-52.
- Lund, J. (1999). A model for studying the effect of EMU on European yield curves. *Review of Finance*, 2(3), 321-363.
- McCulloch, J. H. (1971). Measuring the term structure of interest rates. *The Journal of Business*, 44(1), 19-31.
- Min, H. G. (1999). *Determinants of emerging market bond spread: do economic fundamentals matter?*. The World Bank.
- Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, 473-489.
- Ochoa, M. (2006). Interpreting an Affine Term Structure Model for Chile. *Documentos de Trabajo (Banco Central de Chile)*, (380), 1.
- Piazzesi, M. (2010). Affine term structure models. *Handbook of financial econometrics*, 1, 691-766.
- Schaefer, S. M., & Schwartz, E. S. (1984). A two-factor model of the term structure: An approximate analytical solution. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 19(4), 413-424.
- Smith, G. D. (1985). *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press.
- Steeley, J. M. (1991). Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals. *Journal of Business Finance & Accounting*, 18(4), 513-529.
- Svensson, L. E. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994* (No. w4871). National Bureau of Economic Research.

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2), 177-188.

Von Hagen, J., Schuknecht, L., & Wolswijk, G. (2011). Government bond risk premiums in the EU revisited: The impact of the financial crisis. *European Journal of Political Economy*, 27(1), 36-43.

Zuñiga, S. (1999). Estimando un modelo de 2 factores del tipo 'exponential-affine' para la tasa de interés chilena. *Análisis Económico*, 14, 117-133.

Zúñiga, S. (1999). Modelos de tasas de interés en Chile: Una revisión. *Cuadernos de economía*, 875-893.

Zúñiga, S., & Soria, K. (2000). Estimación de la Estructura Temporal de Tasas de Interés en Chile 1994-1997.

Anexos

Gráficos

Gráfico 1. BTU - BCU Disponibles al 28-06-2019

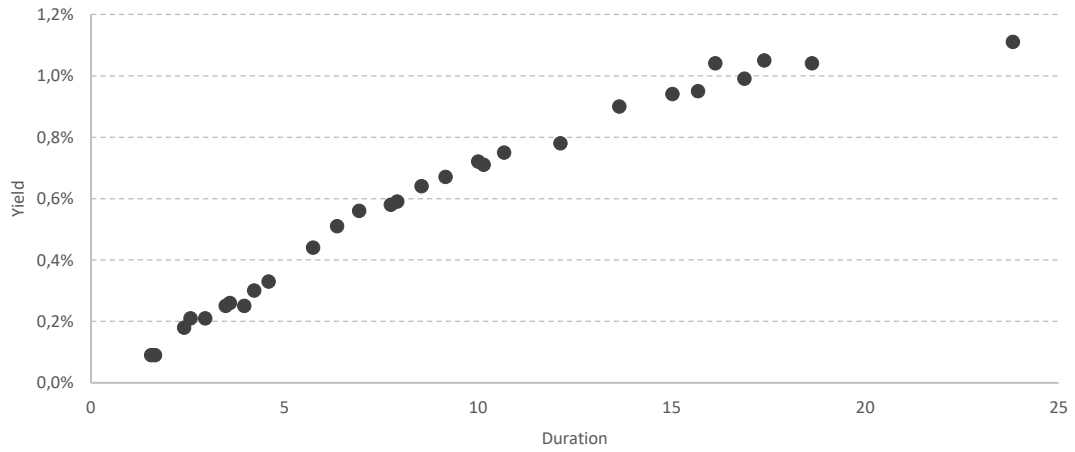


Gráfico 2. BTU - BCU Transados el 28-06-2019

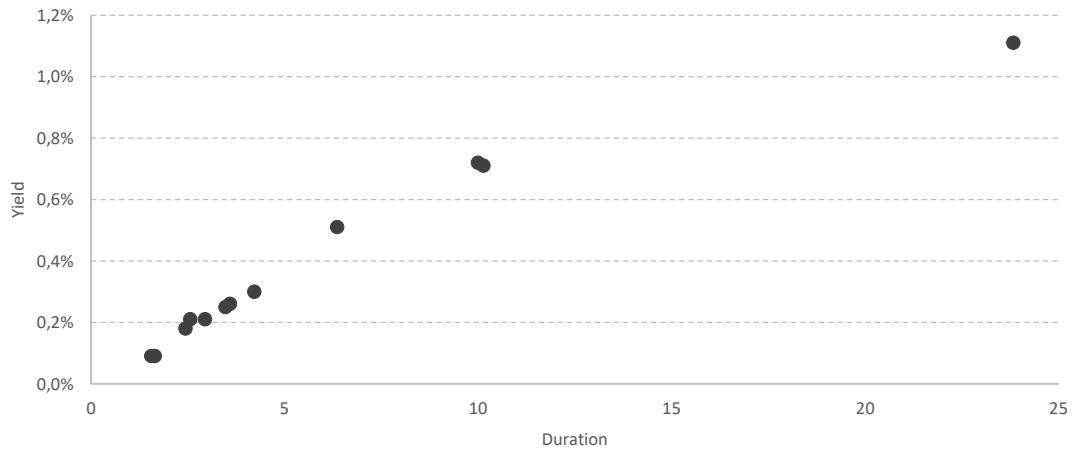
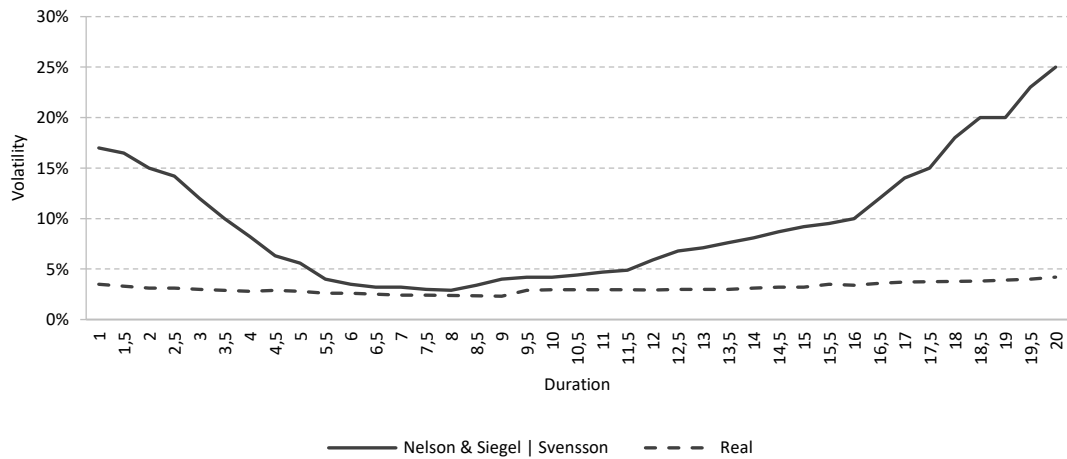


Gráfico 3. Volatility Structure of Interest Rates (01/2003 - 06/2019)



Tablas

Tabla 1. Respuesta	%
Bono de Gobierno Más Cercano	8%
Nelson & Siegel Svensson	57%
Interpolación Lineal	13%
Nelso & Siegel Dinamico	6%
Otro modelo Dinámico	5%
Otro	6%
No contesta	5%

Nota: Encuesta realizada por Qualtrics

Tabla 2a. Corredora de Bolsa	
96571220-8	BANCHILE CORREDORES DE BOLSA S.A.
96564330-3	BANCOESTADO S.A. CORREDORES DE BOLSA
96535720-3	BBVA CORREDORES DE BOLSA LIMITADA
96519800-8	BCI CORREDOR DE BOLSA S.A.
79532990-0	BICE INVERSIONES CORREDORES DE BOLSA S.A.
84177300-4	BTG PACTUAL CHILE S.A. CORREDORES DE BOLSA
96502820-K	CHILE MARKET CORREDORES DE BOLSA SPA
96772490-4	CONSORCIO CORREDORES DE BOLSA S.A.
76011193-7	CORREDORES DE BOLSA SURA S.A.
96489000-5	CREDICORP CAPITAL S.A. CORREDORES DE BOLSA
96541320-0	DUPOL S.A. CORREDORES DE BOLSA
76441949-9	EFG CORREDORES DE BOLSA SPA
96535530-8	ETCHEGARAY S.A. CORREDORES DE BOLSA
96899230-9	EUROAMERICA CORREDORES DE BOLSA S.A.
95319000-1	FINANZAS Y NEGOCIOS S.A. CORREDORES DE BOLSA
96665450-3	ITAU CORPBANCA CORREDORES DE BOLSA S.A.
76109764-4	J.P. MORGAN CORREDORES DE BOLSA SPA
84360700-4	JAIME LARRAIN Y COMPAÑIA CORREDORES DE BOLSA LTDA
80537000-9	LARRAIN VIAL S.A. CORREDORA DE BOLSA
96921130-0	MBI CORREDORES DE BOLSA S.A.
89420200-9	MCC S.A. CORREDORES DE BOLSA
80993900-6	MERRILL LYNCH CORREDORES DE BOLSA SPA
76615490-5	MONEDA CORREDORES DE BOLSA LIMITADA
96586750-3	NEVASA S.A., CORREDORES DE BOLSA
76326741-5	PLUSKAPITAL CORREDORES DE BOLSA SPA
76529250-6	RENTA 4 CORREDORES DE BOLSA S.A.
96683200-2	SANTANDER CORREDORES DE BOLSA LIMITADA

96568550-2 SCOTIA CORREDORA DE BOLSA CHILE S.A.
76245069-0 STF CORREDORES DE BOLSA SPA
80962600-8 TANNER CORREDORES DE BOLSA S.A.
96515580-5 VALORES SECURITY S.A., CORREDORES DE BOLSA
76547150-8 VANTRUST CAPITAL CORREDORES DE BOLSA S.A.
76513680-6 VECTOR CAPITAL CORREDORES DE BOLSA S.A.

Tabla 2b. Administradora General de Fondos

96639280-0	ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS SECURITY S.A.
76036521-1	ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS SURA S.A.
76336511-5	ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS VISION ADVISORS S.A.
76429904-3	ALTAMAR S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
76551925-K	ALTIS S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
76503273-3	AMERIS CAPITAL ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76172904-7	ASSET ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96767630-6	BANCHILE ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76930984-5	BANCO INTERNACIONAL ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96836390-5	BANCOESTADO S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
96530900-4	BCI ASSET MANAGEMENT ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96514410-2	BICE INVERSIONES ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96966250-7	BTG PACTUAL CHILE S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
76435792-2	CAPITAL ADVISORS ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96601710-4	CIMENTA S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
96690790-8	CMB-PRIME ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96804330-7	COMPASS GROUP CHILE S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
99549940-1	CREDICORP CAPITAL ASSET MANAGEMENT S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
96993150-8	ECONSULT ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96960970-3	ECUS ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76507811-3	FALCOM ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76810627-4	FINTUAL ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76543031-3	FRONTAL TRUST ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76071197-7	FYNSA ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96753330-0	INDEPENDENCIA ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76800115-4	INDEPENDENCIA INTERNACIONAL ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96939000-0	INVERLINK ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96980650-9	ITAU ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76081215-3	LARRAIN VIAL ACTIVOS S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
96955500-K	LARRAINVIAL ASSET MANAGEMENT ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76963034-1	LINK CAPITAL PARTNERS ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
99543100-9	MBI ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96684990-8	MONEDA S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS

76122579-0 NEORENTAS S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
76034728-0 NEVASA HMC S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
96632170-9 PENTA LAS AMERICAS ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76202136-6 PICTON ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
91999000-7 PRINCIPAL ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76798260-7 QUEST ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96667040-1 SANTANDER ASSET MANAGEMENT S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
76576607-9 SARTOR ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96634320-6 SCOTIA ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS CHILE S.A.
96815680-2 SCOTIA AZUL ASSET MANAGEMENT ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76173632-9 SENSOR CAPITAL S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
76917333-1 SINGULAR ASSET MANAGEMENT ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76945436-5 SRM ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76620928-9 TANNER ASSET MANAGEMENT ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
96576660-k TOESCA S.A. ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS
76930595-5 VANTRUST CAPITAL ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76493189-0 VOLCOMCAPITAL ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76503272-5 WEG ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
76579033-6 XLC ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
99580930-3 ZURICH ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.
77750920-9 ZURICH CHILE ASSET MANAGEMENT ADMINISTRADORA GENERAL DE FONDOS S.A.

Tabla 2c. Securitizadoras

96932010-K	BANCHILE SECURITIZADORA S.A.
96948880-9	BCI SECURITIZADORA S.A.
96971830-8	EF SECURITIZADORA S.A.
79558200-2	FINTESA SECURITIZADORA S.A.
96785590-1	SANTANDER S.A. SOCIEDAD SECURITIZADORA
96819300-7	SECURITIZADORA BICE S.A.
96847360-3	SECURITIZADORA SECURITY S.A.
96972780-3	SECURITIZADORA SUDAMERICANA S.A.
96765170-2	TRANSA SECURITIZADORA S.A.
76965774-6	VOLCOM SECURITIZADORA S.A.

Tabla 3

Maturity	Observations	Average trading frequency (%)	Average yield (%)	Yield standard deviation (%)
1-1.5	36.596	34,32	2,22	1,67
1.5-2.5	41.353	38,89	2,16	1,32
2.5-3.5	43.003	40,04	2,13	1,06
3.5-4.5	62.320	58,34	2,11	1,16
4.5-5.5	50.381	46,90	2,18	1,02
5.5-6.5	53.390	50,33	2,18	0,79
6.5-7.5	74.357	69,78	2,17	0,83
7.5-8.5	89.404	84,65	2,13	0,74
8.5-9.5	43.780	41,18	2,16	0,63
9.5-10.5	56.690	52,62	2,16	0,59
10.5-11.5	26.015	24,02	2,16	0,64
11.5-12.5	44.459	41,18	2,13	0,61
12.5-13.5	25.433	24,02	2,31	0,58
13.5-14.5	49.216	45,75	2,29	0,55
14.5-15.5	26.112	24,02	2,27	0,65
15.5-16.5	30.190	28,60	2,29	0,56
16.5-17.5	26.112	24,02	2,30	0,55
17.5-18.5	29.995	27,45	2,36	0,49
18.5-19.5	39.217	36,60	2,36	0,48
19.5-20	51.740	48,04	2,33	0,55
Total	899.764			

Nota: La frecuencia de *trading* se calcula dividiendo la cantidad de días que se transó cada papel, por la cantidad de días hábiles que pudo haber sido transado.

Tabla 4

Parameter	Vasicek	CIR
κ_1	0.0013***	0.0007**
κ_2	1.4523**	1.749**
κ_3	2.2092***	2.3612**
$\bar{\theta}_1$	0.0158**	0.0244***
$\bar{\theta}_2$	0.0235**	0.0213*
$\bar{\theta}_3$	0.0137**	0.0183**
σ_1	0.0159***	0.0129*
σ_2	0.2010***	0.1552*
σ_3	0.2511***	0.2318**
λ_1	(0.0022)*	(0.0034)*
λ_2	(0.0281)**	(0.0292)***
λ_3	(0.0013)**	(0.0118)**

Nota: Modelo de 3 Factores

Tabla 5a

Parameter	Vasicek	CIR
κ_1	0.0871***	0.0057**
κ_2	2.6843***	2.0155**
$\bar{\theta}_1$	0.0271**	0.0282***
$\bar{\theta}_2$	0.0269**	0.0326*
σ_1	0.1861***	0.0181*
σ_2	0.2635***	0.1959*
λ_1	(0.0072)**	(0.0263)*
λ_2	(0.0305)**	(0.0331)***

Nota: Modelo de 2 Factores

Tabla 5b

Maturity	Vasicek	CIR
1-1.5	0,25	0,30
1.5-2.5	0,26	0,28
2.5-3.5	0,19	0,25
3.5-4.5	0,29	0,19
4.5-5.5	0,18	0,20
5.5-6.5	0,13	0,19
6.5-7.5	0,13	0,11
7.5-8.5	0,05	0,10
8.5-9.5	0,08	0,14
9.5-10.5	0,06	0,11
10.5-11.5	0,05	0,06
11.5-12.5	0,10	0,06
12.5-13.5	0,12	0,07
13.5-14.5	0,06	0,04
14.5-15.5	0,04	0,06
15.5-16.5	0,07	0,08
16.5-17.5	0,08	0,07
17.5-18.5	0,05	0,10
18.5-19.5	0,03	0,04
19.5-20	0,04	0,05
Total	0,11	0,12

Tabla 6a

Parameter	Vasicek	CIR
κ_1	1.5527***	1.8741**
$\bar{\theta}_1$	0.0517***	0.0429***
σ_1	0.4816***	0.0224*
λ_1	(0.0401)***	(0.0159)*

Nota: Modelo de 1 Factor

Tabla 6b

Maturity	Vasicek	CIR
1–1.5	0,25	0,30
1.5–2.5	0,26	0,28
2.5–3.5	0,19	0,25
3.5–4.5	0,29	0,19
4.5–5.5	0,18	0,20
5.5–6.5	0,13	0,19
6.5–7.5	0,13	0,11
7.5–8.5	0,05	0,10
8.5–9.5	0,08	0,14
9.5–10.5	0,06	0,11
10.5–11.5	0,05	0,06
11.5–12.5	0,10	0,06
12.5–13.5	0,12	0,07
13.5–14.5	0,06	0,04
14.5–15.5	0,04	0,06
15.5–16.5	0,07	0,08
16.5–17.5	0,08	0,07
17.5–18.5	0,05	0,10
18.5–19.5	0,03	0,04
19.5–20	0,04	0,05
Total	0,11	0,12

Tabla 7. RMSE of Models in Sample

Maturity	Nelson & Siegel	Dynamic Nelson & Siegel	Vasicek	CIR
1-1.5	0,40	0,35	0,20	0,24
1.5-2.5	0,43	0,38	0,21	0,22
2.5-3.5	0,43	0,35	0,15	0,20
3.5-4.5	0,36	0,34	0,23	0,15
4.5-5.5	0,30	0,27	0,14	0,16
5.5-6.5	0,25	0,23	0,10	0,15
6.5-7.5	0,28	0,22	0,10	0,09
7.5-8.5	0,24	0,16	0,04	0,08
8.5-9.5	0,20	0,15	0,07	0,12
9.5-10.5	0,23	0,20	0,05	0,09
10.5-11.5	0,21	0,18	0,04	0,05
11.5-12.5	0,20	0,14	0,08	0,05
12.5-13.5	0,25	0,23	0,10	0,06
13.5-14.5	0,26	0,16	0,05	0,03
14.5-15.5	0,30	0,20	0,03	0,05
15.5-16.5	0,33	0,24	0,05	0,06
16.5-17.5	0,37	0,19	0,06	0,05
17.5-18.5	0,40	0,22	0,04	0,08
18.5-19.5	0,42	0,20	0,02	0,03
19.5-20	0,45	0,17	0,03	0,04
Total	0,32	0,23	0,09	0,10

Los modelos *Vasicek* y *CIR* corresponden a sus versiones de 3

Nota: factores, cuyos RMSE fueron los mejores dentro de su comparación "interna". Datos desde 01/2003 - 12/2018.

Tabla 8. RMSE of Models out of Sample

Maturity	Nelson & Siegel	Dynamic Nelson & Siegel	Vasicek	CIR
1–1.5	0,50	0,36	0,21	0,28
1.5–2.5	0,56	0,40	0,22	0,27
2.5–3.5	0,48	0,34	0,13	0,20
3.5–4.5	0,42	0,36	0,22	0,18
4.5–5.5	0,37	0,25	0,14	0,16
5.5–6.5	0,30	0,27	0,11	0,21
6.5–7.5	0,37	0,25	0,11	0,09
7.5–8.5	0,36	0,20	0,06	0,10
8.5–9.5	0,29	0,18	0,06	0,13
9.5–10.5	0,30	0,23	0,07	0,13
10.5–11.5	0,31	0,17	0,07	0,08
11.5–12.5	0,35	0,18	0,09	0,04
12.5–13.5	0,32	0,26	0,11	0,05
13.5–14.5	0,29	0,15	0,08	0,03
14.5–15.5	0,35	0,18	0,02	0,05
15.5–16.5	0,43	0,28	0,06	0,07
16.5–17.5	0,48	0,24	0,07	0,04
17.5–18.5	0,50	0,26	0,08	0,09
18.5–19.5	0,52	0,24	0,01	0,06
19.5–20	0,57	0,26	0,02	0,06
Total	0,40	0,25	0,10	0,12

Nota: Los modelos *Vasicek* y *CIR* corresponden a sus versiones de 3 factores, cuyos RMSE fueron los mejores dentro de su comparación "interna". Datos desde 12/2018 a 06/2019 .

Tabla 9a

Parameter	Real Value	Estimated Value
κ_1	2,1418	2.3001**
κ_2	1,3729	1.4744***
κ_3	2,1011	2.2564**
$\bar{\theta}_1$	0,0229	0.0248*
$\bar{\theta}_2$	0,0210	0.0228***
$\bar{\theta}_3$	0,0289	0.0313**
σ_1	0,0025	0.0027**
σ_2	0,0016	0.0017***
σ_3	0,0011	0.0012**
λ_1	(0,0010)	(0.0011)*
λ_2	(0,0342)	(0.0374)**
λ_3	(0,0017)	(0.0019)**

Tabla 9b. RMSE of Model in Simulation

Maturity	Vasicek
1–1.5	0,22
1.5–2.5	0,23
2.5–3.5	0,16
3.5–4.5	0,25
4.5–5.5	0,16
5.5–6.5	0,11
6.5–7.5	0,11
7.5–8.5	0,04
8.5–9.5	0,08
9.5–10.5	0,05
10.5–11.5	0,04
11.5–12.5	0,09
12.5–13.5	0,11
13.5–14.5	0,05
14.5–15.5	0,03
15.5–16.5	0,05
16.5–17.5	0,07
17.5–18.5	0,04
18.5–19.5	0,02
19.5–20	0,03
Total	0,10

Tabla 10a

Parameter	Real Value	Estimated Value
κ_1	1,9004	2.0409*
κ_2	2,1328	2.2904*
κ_3	1,7166	1.8435**
$\bar{\theta}_1$	0,1612	0.1748**
$\bar{\theta}_2$	0,2078	0.2254**
$\bar{\theta}_3$	0,1691	0.1834*
σ_1	0,0192	0.0208*
σ_2	0,3310	0.3555**
σ_3	0,1357	0.1457**
λ_1	0,0355	0.0388**
λ_2	0,0141	0.0154***
λ_3	0,0238	0.02674**

Tabla 10b. RMSE of Model in Simulation

Maturity	Vasicek
1–1.5	0,30
1.5–2.5	0,28
2.5–3.5	0,25
3.5–4.5	0,19
4.5–5.5	0,21
5.5–6.5	0,19
6.5–7.5	0,11
7.5–8.5	0,10
8.5–9.5	0,15
9.5–10.5	0,11
10.5–11.5	0,06
11.5–12.5	0,06
12.5–13.5	0,08
13.5–14.5	0,04
14.5–15.5	0,06
15.5–16.5	0,08
16.5–17.5	0,06
17.5–18.5	0,11
18.5–19.5	0,04
19.5–20	0,06
Total	0,13

Tabla 11a

Parameter	Real Value	Estimated Value
κ_1	0,0021	0.0023*
κ_2	0,0038	0.0041**
κ_3	0,0105	0.0113*
$\bar{\theta}_1$	0,0217	0.0235**
$\bar{\theta}_2$	0,0198	0.0215*
$\bar{\theta}_3$	0,0253	0.0274**
σ_1	1,2461	1.3516**
σ_2	1,7292	1.8571*
σ_3	2,4365	2.6166**
λ_1	(0,0231)	(0.0253)**
λ_2	(0,0182)	(0.0199)***
λ_3	(0,0370)	(0.0405)**

Tabla 11b. RMSE of Model in Simulation

Maturity	Vasicek
1–1.5	0,26
1.5–2.5	0,26
2.5–3.5	0,21
3.5–4.5	0,22
4.5–5.5	0,18
5.5–6.5	0,15
6.5–7.5	0,12
7.5–8.5	0,08
8.5–9.5	0,12
9.5–10.5	0,09
10.5–11.5	0,06
11.5–12.5	0,08
12.5–13.5	0,10
13.5–14.5	0,05
14.5–15.5	0,06
15.5–16.5	0,07
16.5–17.5	0,07
17.5–18.5	0,08
18.5–19.5	0,04
19.5–20	0,05
Total	0,12

Tabla 12a

Parameter	Vasicek	CIR
κ_1	0.0015*	0.0017*
κ_2	1.2395**	1.5869*
κ_3	2.3488**	2.4929**
$\bar{\theta}_1$	0.0176***	0.0307**
$\bar{\theta}_2$	0.0328***	0.0345***
$\bar{\theta}_3$	0.0205**	0.0295***
σ_1	0.01905*	0.0160**
σ_2	0.1671**	0.1324**
σ_3	0.25305**	0.2313***
λ_1	(0.0025)**	(0.0030)**
λ_2	(0.0256)**	(0.0278)***
λ_3	(0.0010)*	(0.0114)**

Tabla 12b. RMSE of Model in Simulation

Maturity	Vasicek
1–1.5	0.27
1.5–2.5	0.29
2.5–3.5	0.22
3.5–4.5	0.31
4.5–5.5	0.23
5.5–6.5	0.16
6.5–7.5	0.15
7.5–8.5	0.07
8.5–9.5	0.12
9.5–10.5	0.09
10.5–11.5	0.08
11.5–12.5	0.14
12.5–13.5	0.17
13.5–14.5	0.09
14.5–15.5	0.06
15.5–16.5	0.05
16.5–17.5	0.06
17.5–18.5	0.03
18.5–19.5	0.05
19.5–20	0.01
Total	0.13

Tabla 13a

Parameter	Vasicek	CIR
κ_1	0.0018*	0.0017*
κ_2	1.3963*	1.7185**
κ_3	2.2708**	2.4189**
$\bar{\theta}_1$	0.0159**	0.0268***
$\bar{\theta}_2$	0.0269**	0.0261**
$\bar{\theta}_3$	0.0150***	0.0215**
σ_1	0.0175***	0.0147*
σ_2	0.1956**	0.1557**
σ_3	0.2494***	0.2290**
λ_1	(0.0021)*	(0.0030)**
λ_2	(0.0283)**	(0.0298)***
λ_3	(0.0013)**	(0.0117)**

Tabla 13b. RMSE of Model in Simulation

Maturity	Vasicek
1–1.5	0.25
1.5–2.5	0.27
2.5–3.5	0.19
3.5–4.5	0.29
4.5–5.5	0.19
5.5–6.5	0.13
6.5–7.5	0.13
7.5–8.5	0.05
8.5–9.5	0.09
9.5–10.5	0.06
10.5–11.5	0.05
11.5–12.5	0.11
12.5–13.5	0.13
13.5–14.5	0.06
14.5–15.5	0.04
15.5–16.5	0.05
16.5–17.5	0.06
17.5–18.5	0.03
18.5–19.5	0.03
19.5–20	0.01
Total	0.11

Tabla 14

Parameter	Vasicek	CIR
κ_1	0.0022*	0.0018*
κ_2	1.5531*	1.8514*
κ_3	2.1928**	2.3459***
$\bar{\theta}_1$	0.0142**	0.0231*
$\bar{\theta}_2$	0.0211**	0.0191**
$\bar{\theta}_3$	0.0096**	0.0144***
σ_1	0.0163***	0.0135**
σ_2	0.2241*	0.1785**
σ_3	0.2459**	0.2268***
λ_1	(0.0022)**	(0.0035)**
λ_2	(0.0311)***	(0.0319)**
λ_3	(0.0017)*	(0.0125)**

Tabla 15

Parameter	Vasicek	CIR
κ_1	0.0025*	0.0010*
κ_2	1.4114**	1.6073***
κ_3	2.2863**	2.4544**
$\bar{\theta}_1$	0.0189**	0.0290**
$\bar{\theta}_2$	0.0303**	0.0305**
$\bar{\theta}_3$	0.0184**	0.0271*
σ_1	0.0152***	0.0118***
σ_2	0.1983***	0.1294**
σ_3	0.2448***	0.2299**
λ_1	(0.0019)**	(0.0033)***
λ_2	(0.0292)**	(0.0274)**
λ_3	(0.0014)**	(0.0115)***

Apéndice

$$P_t = [-A'(\tau) + \sum_{i=1}^n B_i'(\tau)y_i]e^{A(\tau) - \sum_{i=1}^n B_i(\tau)y_i} = [-A'(\tau) + \sum_{i=1}^n B_i'(\tau)y_i]P(\tau)$$

$$P_{y_i} = -B_i(\tau)e^{A(\tau) - \sum_{i=1}^n B_i(\tau)y_i} = -B_i(\tau)P(\tau)$$

$$P_{y_i y_j} = B_i(\tau)B_j(\tau)e^{A(\tau) - \sum_{i=1}^n B_i(\tau)y_i} = B_i(\tau)B_j(\tau)P(\tau)$$

Recordando nuestra ecuación de derivadas parciales

$$P_t + \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i - y_i)P_{y_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} P_{y_i y_j} - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) P(t, T) = 0$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} & [-A'(\tau) + \sum_{i=1}^n B_i'(\tau)y_i]P(\tau) \\ & - \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i - y_i)B_i(\tau)P(\tau) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} B_i(\tau)B_j(\tau)P(\tau) - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) P(t, T) = 0 \end{aligned}$$

$$-A'(\tau) + \sum_{i=1}^n B_i'(\tau)y_i - \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i - y_i)B_i(\tau) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} B_i(\tau)B_j(\tau) - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) = 0$$

$$-A'(\tau) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} B_i(\tau)B_j(\tau) - \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i)B_i(\tau) + \sum_{i=1}^n (1 - B_i'(\tau) - k_i B_i(\tau))y_i = 0$$

Podemos separar esta ecuación en dos partes

$$B_i'(\tau) + k_i B_i(\tau) = 1$$

$$-A'(\tau) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} B_i(\tau)B_j(\tau) - \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i)B_i(\tau) = 0$$

Para resolver la primera parte de la ecuación nos apoyamos en las condiciones limites entregadas por nuestra ecuación inicial $P(T, T, y_1, \dots, y_n) = 1$

$$A(0) = B_1(0) = \dots = B_n(0)$$

Así obtenemos

$$B_i(\tau) = \frac{1}{\kappa_i} (1 - e^{-\kappa_i \tau})$$

Para resolver la segunda parte de la ecuación volvemos a la especificación temporal anterior $\tau = T - t$, así

$$\int_t^T A'(T-s) ds = \int_t^T \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} B_i(T-s) B_j(T-s) - \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i) B_i(T-s) \right\} ds$$

$$A(T-t) - A(0) = \int_t^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} B_i(T-s) B_j(T-s) ds - \int_t^T \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i) B_i(T-s) ds$$

$$A(T-t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} \int_t^T B_i(T-s) B_j(T-s) ds - \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i) \int_t^T B_i(T-s) ds$$

$$A(T-t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2} \int_t^T \frac{1}{\kappa_i} (1 - e^{-\kappa_i(T-s)}) \frac{1}{\kappa_j} (1 - e^{-\kappa_j \tau}) ds - \sum_{i=1}^n k_i(\bar{\theta}_i) \int_t^T \frac{1}{\kappa_i} (1 - e^{-\kappa_i(T-s)}) ds$$

$$\begin{aligned}
A(T-t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2k_i k_j} \left[(T-t) \frac{1}{\kappa_i} (1 - e^{-\kappa_i(T-t)}) - \frac{1}{\kappa_j} (1 - e^{-\kappa_j T}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{k_i + k_j} (1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(T-t)}) \right] - \sum_{i=1}^n (\bar{\theta}_i) \left[(T-t) - \frac{1}{\kappa_i} (1 - e^{-\kappa_i(T-t)}) \right] \\
A(\tau) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{2k_i k_j} \left[\tau - B_i(\tau) - B_j(\tau) + \frac{1}{k_i + k_j} (1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(T-t)}) \right] - \sum_{i=1}^n (\bar{\theta}_i) (\tau - B_i(\tau)) \\
A(\tau) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\gamma_i(B_i(\tau) - \tau)}{\kappa_i^2} - \frac{\sigma_i^2 B_i^2(\tau)}{4\kappa_i} \right] \\
&\quad + \sum_{\{i,j:i \neq j\}} \frac{\sigma_{ij}}{2\kappa_i \kappa_j} \left[\tau - B_i(\tau) - B_j(\tau) + \frac{1}{\kappa_i + \kappa_j} (1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(\tau)}) \right]
\end{aligned}$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$