



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

IMPLEMENTACIÓN DE UN MÉTODO BAYESIANO PARA LA
IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES ELECTROMECAÑICAS NO
LINEALES EN RECOLECTORES DE ENERGÍA PIEZOELÉCTRICOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

ALEJANDRO JOSÉ POBLETE ANDRADES

PROFESOR GUÍA:
RAFAEL RUIZ GARCÍA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN BELTRÁN MORALES
VIVIANA MERUANE NARANJO

Este trabajo ha sido financiado por FONDECYT

SANTIAGO DE CHILE
2020

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO
POR: ALEJANDRO JOSÉ POBLETE ANDRADES
FECHA: 2020
PROF. GUÍA: RAFAEL RUIZ GARCÍA

IMPLEMENTACIÓN DE UN MÉTODO BAYESIANO PARA LA IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES ELECTROMECHANICAS NO LINEALES EN RECOLECTORES DE ENERGÍA PIEZOELECTRICOS

Los recolectores de energía piezoeléctricos (REP) son dispositivos usados para la recolección de energía en ambientes vibratorios. Esto se hace posible debido a que cuentan con capas de material piezoeléctrico, el cual genera una diferencia de potencial al ser deformado. En el último tiempo, estos dispositivos han recibido especial atención debido a su uso en lugares remotos y de difícil acceso, en donde las clásicas baterías electroquímicas dejan de ser viables debido a su baja autonomía y mantención.

En la literatura se han desarrollado una gran variedad de modelos que pretenden predecir el comportamiento de estos dispositivos, con el objetivo de sintonizarlos de manera correcta. A pesar del avance de los modelos, las predicciones realizadas carecen de exactitud debido a imprecisiones en los procesos de manufactura, provocando grandes dispersiones en propiedades electromecánicas de estos dispositivos. Por otro lado, dispares comportamientos se presentan al excitar los recolectores con distintos niveles de amplitud de aceleración, reconociendo comportamientos lineales y no lineales.

El presente trabajo tiene como objetivo la implementación de la metodología Bayesiana para la identificación de propiedades electromecánicas no lineales en recolectores de energía piezoeléctricos. Bajo esta metodología, fundamentada en el teorema de Bayes, se incorpora el aspecto probabilístico a los modelos, siendo posible atrapar las incertidumbres/dispersiones presentes en los parámetros. Estos, son actualizados mediante datos experimentales, con el fin de identificarlos y disminuir sus incertidumbres. Por otro lado, esta metodología permite la selección de modelos, compensando la exactitud y complejidad del modelo.

Cuatro modelos predictivos fueron revisados, siendo el modelo principal un modelo no lineal analítico encontrado en la literatura. Los datos experimentales usados fueron datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido por el recolector, en los cuales se puede notar el comportamiento dispar mencionado anteriormente. Permutando los datos experimentales usados, un total de 48 casos fueron revisados.

Como resultados, se lograron identificar las propiedades electromecánicas no lineales buscadas, junto con predecir con una banda de dispersión los datos experimentales utilizados. Entre los modelos revisados, el modelo tres (que no considera un parámetro electromecánico no lineal), fue el modelo más adecuado para predecir voltaje emitido por el recolector, lo que en la práctica es útil debido a lo costoso que puede ser identificar con precisión este parámetro.

a Cachito

Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a mi familia, sin quienes no sería nada de lo que soy hoy. Madre, padre y hermano los amo. También agradecer a mi polola Li Quen por su apoyo incondicional y acompañarme en todo este último proceso, el cual fue mucho más grato gracias a ti.

Recordar a mis amigos del colegio, en especial a Benjamín y Simón, grandes amigos que me han dado la vida. Y como olvidar a LDS que con la mayoría somos amigos desde segundo básico, salud por eso. También recordar a mis primeros amigos de la U Ángela, Fernando, Claudio, Tania, junto con los demás de la sección 4 2014 PL, Fabi, Zapata, Sergio, Manteca, Pérez, Millanao, Max, Vicente, Carlo, Santiago, de seguro se me escapa alguno. Grandes y divertidas tardes junto a ellos que quedan en mi memoria.

Agradecer a mis amigos del DIMEC, Ignacio con quien partí y hasta este momento nos apañamos y ayudamos; a Daniel y Pancho por acompañarme en esta última etapa y aguantarme las prácticas; y a los Bannanas. También agradecer a Diego H. por ayudarme en distintos ámbitos prácticamente durante toda la especialidad y darme a conocer esta línea de investigación.

Por último, agradecer al profesor Rafael Ruiz por su gran disposición y ayuda en el desarrollo de este trabajo, muchas reuniones en las cuales aprendí mucho, y más que solo temas ingenieriles.

Este trabajo fue apoyado por el programa de ayudas para estadías cortas de investigación internacionales UCH-1556 y por FONDECYT, bajo el proyecto N° 11180812 “*Robust Bayesian Framework for Model Class Selection and Model Parameter Identification in Piezoelectric Energy Harvesters*”.

Tabla de contenido

Capítulo 1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo General	2
1.2.2 Objetivos Específicos	2
1.3 Alcances	2
Capítulo 2 Antecedentes	4
2.1 Recolectores de energía piezoeléctricos (REPs)	4
2.2 Modelos predictivos de REPs	5
2.2.1 Modelo lineal	5
2.2.2 Modelo no lineal	6
2.3 Metodología Bayesiana	9
2.3.1 Fundamentos	9
2.3.2 Transitional Markov Chain Monte Carlo	11
2.3.3 Análisis Predictivo	12
2.3.4 Model Class Selection	12
Capítulo 3 Metodología	14
Capítulo 4 Primera Actualización Bayesiana	15
4.1 Prior	15
4.2 Datos Experimentales	16
4.2.1 Amplitud de Oscilación	17
4.2.2 Voltaje Emitido	17
4.3 Actualización de parámetros	18
4.3.1 Amplitud de Oscilación	18
4.3.2 Voltaje Emitido	21
4.3.3 Amplitud de Oscilación y Voltaje Emitido	24
Capítulo 5 Segunda Actualización Bayesiana	28
5.1 Modelos	28
5.2 Actualización de modelos	29
5.2.1 Amplitud de Oscilación	29
5.2.2 Voltaje Emitido	31
5.2.3 Amplitud de Oscilación y Voltaje Emitido	33
Capítulo 6 Propagación de Incertidumbres	36

6.1	Constantes de Ecuaciones Constitutivas.....	36
6.1.1	Amplitud de Oscilación.....	36
6.1.2	Voltaje Emitido	37
6.1.3	Amplitud de Oscilación y Voltaje Emitido	38
6.2	Predicción	39
6.2.1	Amplitud de Oscilación.....	40
6.2.2	Voltaje Emitido	43
6.2.3	Amplitud de Oscilación y Voltaje Emitido	47
Capítulo 7 Conclusión		50
Bibliografía.....		52
Anexos.....		53
	Anexo A.....	53
	Anexo B.....	54
	Anexo C.....	55
	Anexo D.....	57
	Anexo E.....	59
	Anexo F.....	64
	Anexo G.....	70

Índice de Tablas

Tabla 1. Prior de los parámetros θ	15
Tabla 2. Parámetros actualizados usando datos de amplitud de oscilación.....	18
Tabla 3. Actualización de parámetros del modelo usando datos de amplitud de oscilación, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$	20
Tabla 4. Parámetros actualizados usando datos de voltaje emitido.....	21
Tabla 5. Actualización de parámetros del modelo usando datos de voltaje emitido, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$	23
Tabla 6. Parámetros actualizados usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido.	24
Tabla 7. Actualización de parámetros del modelo usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$	26
Tabla 8. Modelos considerados para la segunda actualización Bayesiana.....	28
Tabla 9. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación. Se muestra la mediana de las muestras.	29
Tabla 10. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de amplitud de oscilación.....	30
Tabla 11. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de amplitud de oscilación, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$	30
Tabla 12. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de voltaje emitido.....	31
Tabla 13. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de voltaje emitido....	32
Tabla 14. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de voltaje emitido, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$	32
Tabla 15. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido.	33
Tabla 16. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido.	34
Tabla 17. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$	35

Tabla 18. Propagación de incertidumbres a las propiedades electromecánicas no lineales, usando distintos sets de datos de amplitud de oscilación. Se muestra mediana y coeficiente de variación.	37
Tabla 19. Propagación de incertidumbres a las propiedades electromecánicas no lineales, usando distintos sets de datos de voltaje emitido. Se muestra mediana y coeficiente de variación.	38
Tabla 20. Propagación de incertidumbres a las propiedades electromecánicas no lineales, usando distintos sets de datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido. Se muestra mediana y coeficiente de variación.	39
Tabla 21. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = 0.56g$	64
Tabla 22. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = 2g$	64
Tabla 23. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = [0.56g \ 2g]$	65
Tabla 24. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de voltaje emitido con $Z = 0.56g$	65
Tabla 25. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de voltaje emitido con $Z = 2g$	66
Tabla 26. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de voltaje emitido con $Z = [0.56g \ 2g]$	67
Tabla 27. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido con $Z = 0.56g$	67
Tabla 28. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido con $Z = 2g$	68
Tabla 29. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido con $Z = [0.56g \ 2g]$	69

Índice de Figuras

Figura 1. Esquemas recolectores de energía piezoeléctricos.....	4
Figura 2. Parámetros geométricos recolector “ <i>bimorph</i> ”.....	6
Figura 3. Datos experimentales de amplitud de oscilación del recolector.	17
Figura 4. Datos experimentales de voltaje emitido por el recolector.	17
Figura 5. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC, usando datos de amplitud de oscilación. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.....	19
Figura 6. Muestras de los parámetros con coeficiente de correlación mayor a 0.6, usando los datos de amplitud de oscilación.	20
Figura 7. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC, usando datos de voltaje emitido. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	22
Figura 8. Muestras de los parámetros con coeficiente de correlación mayor a 0.6, usando los datos de voltaje emitido.	23
Figura 9. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.....	25
Figura 10. Muestras de los parámetros con coeficiente de correlación mayor a 0.6, usando los datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido.	26
Figura 11. Constantes electromecánicas no lineales encontradas usando los datos de amplitud de oscilación. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.....	37
Figura 12. Constantes electromecánicas no lineales encontradas usando los datos de voltaje emitido. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.....	38
Figura 13. Constantes electromecánicas no lineales encontradas usando los datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio...	39
Figura 14. Predicción hecha por las muestras usando todos los datos disponibles de amplitud de oscilación.....	40
Figura 15. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos de amplitud de oscilación.....	41
Figura 16. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = 0.56g$	42

Figura 17. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = 2g$.	42
Figura 18. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = [0.56g \ 2g]$.	43
Figura 19. Predicción hecha por las muestras usando todos los datos disponibles de voltaje emitido.	44
Figura 20. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos de voltaje emitido.	45
Figura 21. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de voltaje emitido con $Z = 0.56g$.	45
Figura 22. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de voltaje emitido con $Z = 2g$.	46
Figura 23. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de voltaje emitido con $Z = [0.56g \ 2g]$.	47
Figura 24. Predicción hecha por las muestras usando todos los datos disponibles.	47
Figura 25. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos disponibles.	48
Figura 26. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud con excitación $Z = 0.56g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	59
Figura 27. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud con excitación $Z = 2g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	59
Figura 28. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud con excitación $Z = [0.56g \ 2g]$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	60
Figura 29. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de voltaje emitido $Z = 0.56g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	60
Figura 30. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de voltaje emitido $Z = 2g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	61
Figura 31. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de voltaje emitido $Z = [0.56g \ 2g]$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	61
Figura 32. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido $Z = 0.56g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	62

Figura 33. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido $Z = 2g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.	62
Figura 34. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido $Z = [0.56 \ 2g]$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.....	63
Figura 35. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos disponibles con $Z = 0.56g$	70
Figura 36. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos disponibles con $Z = 2g$	71
Figura 37. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos disponibles con $Z = [0.56g \ 2g]$	72

Capítulo 1

Introducción

El avance de la electrónica y computación en los últimos años ha desarrollado dispositivos que requieren cada vez mayor consumo energético para su funcionamiento. Bajo este contexto, se han buscado nuevos métodos para alimentar a estos dispositivos, con el fin de desmarcarse de las clásicas baterías electroquímicas que no han tenido un desarrollo a la par. Una arista de estos nuevos métodos ha sido la obtención de energía de ambientes vibratorios, en donde se destaca el uso de los materiales piezoeléctricos.

Los materiales piezoeléctricos son materiales que al ser deformados, son capaces de emitir un potencial eléctrico y viceversa. Estos materiales, tienen una larga historia de ser usados como actuadores o sensores, sin embargo, en el último tiempo han recibido especial atención debido a su utilización como recolectores de energía en ambientes vibratorios. En general, los materiales piezoeléctricos se caracterizan por la llamada constante piezoeléctrica, denotada por d_{31} o e_{31} , la cual atrapa el fenómeno electromecánico, siendo incorporada en las ecuaciones constitutivas que gobiernan a estos materiales.

De esta manera, los llamados recolectores de energía piezoeléctricos cuentan con el atractivo de poder ser ubicados en zonas remotas o de difícil acceso para alimentar dispositivos o sensores, sin la necesidad estar regularmente accediendo a ellos como sucede con las baterías.

En general, estos recolectores consisten en una viga bajo la configuración empotrado-voladizo, con al menos dos capas de distintos materiales: una capa estructural que entrega rigidez al recolector y otra capa de material piezoeléctrico que hace posible la recolección de energía. Dependiendo de la cantidad de capas de material piezoeléctrico, los recolectores se dividen en “*unimorph*” (una capa de material piezoeléctrico) o “*bimorph*” (dos capas de material piezoeléctrico).

En la literatura se encuentran distintos modelos que predicen el comportamiento de recolectores de energía piezoeléctricos, desde simples modelos de un grado de libertad, hasta modelos no lineales o modelos de elemento finito.

1.1 Motivación

A pesar de la variedad y avances realizados en los modelos, las predicciones realizadas carecen de exactitud debido a la alta dispersión en propiedades asociadas al recolector, como consecuencia de imprecisiones en el proceso de manufactura de estos materiales. De esta forma, se requiere que

cada modelo y sus respectivos parámetros sean calibrados mediante datos experimentales. Por otra parte, la predicción del comportamiento de los recolectores suele realizarse utilizando modelos deterministas, sin incorporar ninguna variable estocástica o probabilística, con lo que no se puede conocer la incertidumbre asociada a cada modelo. Ante esto, la metodología Bayesiana incluye técnicas que incorporan incertidumbres a los parámetros del modelo, para luego identificarlos/calibrarlos frente a datos experimentales. Así, se obtienen densidades de probabilidad de cada parámetro que luego se propagan para conocer la incertidumbre de la predicción.

Por otro lado, dependiendo del nivel de amplitud de aceleración que se aplique a los recolectores, estos pueden llegar a presentar un comportamiento no lineal, lo cual no alcanza a ser predicho por modelos lineales. Este problema, también puede ser abordado por la metodología Bayesiana, la cual es capaz de seleccionar que modelo es el más adecuado ante datos experimentales.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

“Implementar un método Bayesiano para la identificación de propiedades electromecánicas no lineales en recolectores de energía piezoeléctricos y selección de modelos”

1.2.2 Objetivos Específicos

- Implementar un modelo predictivo de recolectores de energía piezoeléctricos con diferentes grados de no linealidad.
- Implementar una actualización Bayesiana para identificar propiedades electromecánicas en recolectores de energía piezoeléctricos.
- Implementar una segunda actualización Bayesiana para la selección de modelos.

1.3 Alcances

Los alcances del presente trabajo son en primera instancia identificar propiedades de recolectores de energía piezoeléctricos mediante datos experimentales, lo cual puede ser abordado mediante estimaciones puntuales (“*point estimates*”) o directamente obteniendo muestras de los parámetros. Dado que las estimaciones puntuales requieren suposiciones fuertes, se opta por la segunda opción más general. Esta opción es más compleja, pero entrega información más en detalle sobre cada parámetro.

Con las muestras obtenidas, se busca encontrar las propiedades electromecánicas no lineales de los recolectores, que son las constantes de las ecuaciones constitutivas que gobiernan a estos dispositivos, alcanzándose así el objetivo de este trabajo. Además, se espera predecir el comportamiento de los recolectores, obteniendo su valor esperado y una banda de confiabilidad, la cual servirá para un posterior análisis. Los datos experimentales serán obtenidos de la literatura, por lo que en el presente trabajo no tienen cabida ensayos experimentales de recolectores de energía piezoeléctricos.

En segunda instancia, se pondrán a prueba distintas clases de modelos, con distinto grado de complejidad. Esto se realiza usando submodelos derivados del modelo principal. Así, mediante la metodología Bayesiana se puede conocer qué modelo es más probable que sea el adecuado, compensando exactitud del modelo frente a datos experimentales y su complejidad.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Recolectores de energía piezoeléctricos (REPs)

Como se mencionó anteriormente, investigaciones se han enfocado en métodos de obtener energía eléctrica desde la energía ambiental, como lo puede ser un ambiente vibratorio. De este modo, en los últimos años se ha hecho especial énfasis en el estudio y modelamiento de los llamados recolectores de energía piezoeléctricos.

La recolección de energía en estos dispositivos ocurre debido a la estructura molecular de los materiales piezoeléctricos, que está orientada de tal manera que se forma una separación de carga local, fenómeno más conocido como dipolo eléctrico. Así, al aplicar energía de deformación a estos materiales, resulta en una alteración del dipolo, causando la formación de carga eléctrica que puede ser retirada para la alimentación eléctrica de dispositivos electrónicos.

Los recolectores de energía piezoeléctricos consisten en una viga empotrada en un extremo y voladizo en el otro, con al menos dos capas de material: una capa de material piezoeléctrico y otra capa de material estructural que provee de rigidez al recolector. El material piezoeléctrico más usado para la recolección de energía es el titanato zirconato de plomo, una cerámica piezoeléctrica conocida como PZT. Por otra parte, el material estructural suele ser aleaciones de cobre-cinc, hierro-níquel, aluminio, entre otros. Dependiendo de las capas presentes de material piezoeléctrico en el recolector, estos se clasifican en “*unimorph*” y “*bimorph*”, que poseen una y dos capas, respectivamente.

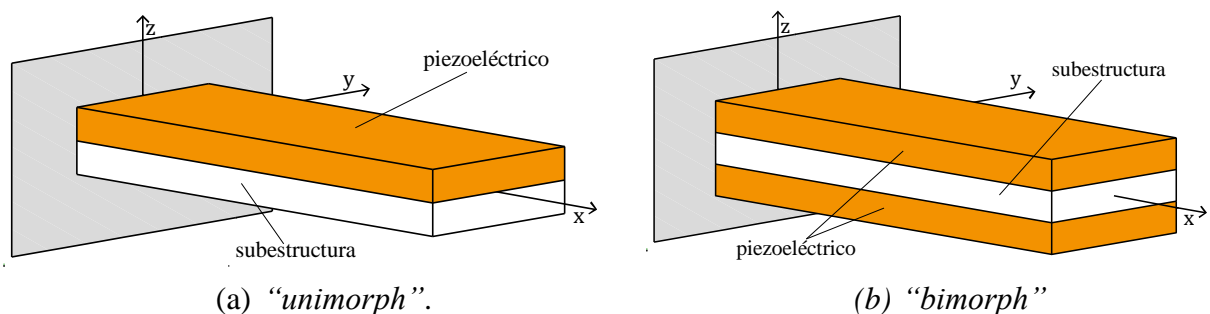


Figura 1. Esquemas recolectores de energía piezoeléctricos.

Para cuantificar la recolección de energía se acopla un circuito eléctrico mediante electrodos conectados a las capas de material piezoeléctrico, con lo cual se puede medir el voltaje emitido por el recolector.

2.2 Modelos predictivos de REPs

En la literatura se encuentra una gran variedad de modelos para predecir el comportamiento de recolectores de energía piezoeléctricos ante excitaciones externas, obteniendo predicciones de amplitud, velocidad, aceleración de oscilación y voltaje emitido, entre otros. Uno de los modelos más usados es el desarrollado por Erturk e Inman [1], que es un modelo lineal que incorpora el acoplamiento electromecánico del recolector. De Marqui *et al.* [2] desarrollan un modelo de elemento finito con acoplamiento electromecánico que contrastan con datos experimentales. Por otra parte, Stanton *et al.* [3] proponen un modelo electromecánico no lineal para predecir el comportamiento no lineal de amplitud de oscilación y voltaje emitido por el recolector, que se presenta a altos niveles de aceleración aplicado.

A continuación, se presentará brevemente el modelo lineal, para posteriormente mostrar con mayor detalle el modelo no lineal anteriormente mencionado, en el cual se basa el presente trabajo.

2.2.1 Modelo lineal

Para modelar el efecto piezoeléctrico, se acoplan las ecuaciones constitutivas de esfuerzo mecánico y desplazamiento eléctrico mediante la constante piezoeléctrica e_{31} , que posee unidades de C/m². La relación lineal entre estos dos fenómenos se modela como sigue [1]:

$$T_1 = c_{11}S_1 - e_{31}E_3 \quad (2.1)$$

$$D_3 = \epsilon_{33}E_3 + e_{31}S_1 \quad (2.2)$$

En donde T es el esfuerzo mecánico, c_{11} es el módulo elástico del material piezoeléctrico, S es la deformación, E es el campo eléctrico, D es el desplazamiento eléctrico y ϵ es la permitividad eléctrica. Las direcciones 1 y 3 coinciden con las coordenadas x y z de la Figura 1, respectivamente.

Luego de una serie de pasos matemáticos que se detallarán en la siguiente sección, se llega al siguiente set de ecuaciones diferenciales acopladas, las cuales son la ecuación de movimiento y del circuito eléctrico del sistema, respectivamente:

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + EIw'''' - \hat{\theta} \left[\hat{\delta}'(x) - \hat{\delta}'(x-L) \right] v = -m\ddot{z} \quad (2.3)$$

$$C\dot{v} + \frac{1}{R}v + \int_0^L \hat{\theta} \dot{w}''^2 dx = 0 \quad (2.4)$$

2.2.2 Modelo no lineal

Como se mencionó anteriormente, Stanton *et al.* [3] proponen un modelo electromecánico no lineal para predecir el comportamiento de los recolectores, en donde a las ecuaciones lineales de esfuerzo mecánico (2.1) y desplazamiento eléctrico (2.2) le añaden términos no lineales de hasta tercer orden:

$$T_1 = c_{11}S_1 - e_{31}E_3 + c_{111}S_1^2 - e_{311}S_1E_3 + c_{1111}S_1^3 - e_{3111}S_1^2E_3 \quad (2.5)$$

$$D_3 = \epsilon_{33}E_3 + e_{31}S_1 + e_{311}S_1E_3 + e_{3111}S_1^2E_3 \quad (2.6)$$

En donde c_{111} , c_{1111} , e_{311} y e_{3111} son constantes electromecánicas no lineales del material. El recolector que se modela tiene un largo L , ancho b y tiene configuración “*bimorph*”, con espesor h_p las capas de material piezoeléctrico y h_s la capa de material estructural, dando un espesor total de $2h_p + h_s$.

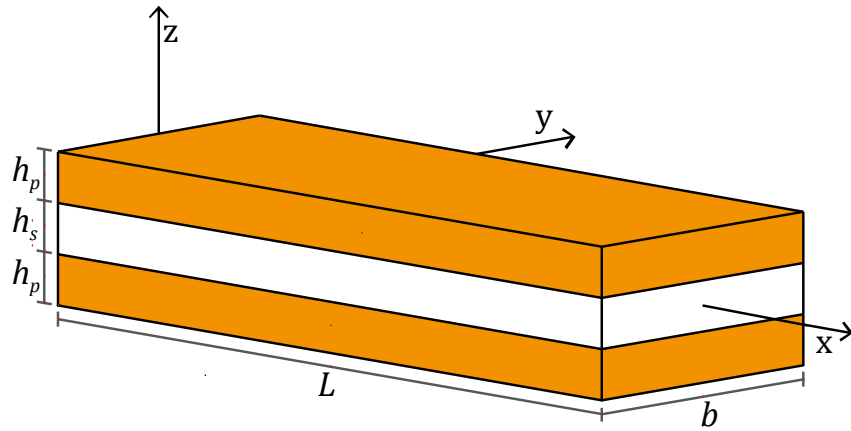


Figura 2. Parámetros geométricos recolector “*bimorph*”.

Debido a que este trabajo se basa en este modelo no lineal, a continuación se detalla el procedimiento matemático para obtener las ecuaciones para resolver el comportamiento de desplazamiento y voltaje del recolector.

La energía cinética y potencial de deformación son:

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^L (\dot{w} + \dot{z})^2 dx \quad (2.7)$$

$$U = \frac{1}{2} EI_s \int_0^L w''^2 dx + \frac{1}{2} \int_{V_p} (T_1 S_1 - D_3 E_3) dV_p \quad (2.8)$$

En donde $m = b(\rho_s h_s + 2\rho_p h_p)$ es la masa por unidad de largo del recolector, ρ_p y ρ_s son la densidad del material piezoeléctrico y estructural, respectivamente. V_p es el volumen total del recolector. De esta forma, la energía potencial de deformación toma la siguiente forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI w''^2 + \frac{1}{6} G w''^4 - 2 \left(\hat{\theta} w'' + \frac{1}{6} \hat{\phi} w''^3 \right) \right] dx - \frac{1}{2} C v^2 \quad (2.9)$$

Las constantes relacionadas a esta última ecuación se muestran en el Anexo A. Los términos no lineales relacionados a c_{111} y e_{311} se anulan debido a la simetría geométrica de la configuración “*bimorph*”. Aplicando el principio de Hamilton, con el Lagrangiano $T - U$ y trabajo no conservativo relacionado a roce viscoso y potencia entregada a una resistencia R , las siguientes ecuaciones diferenciales parciales acopladas son obtenidas:

$$m \ddot{w} + c \dot{w} + EI w'''' + G w'' (w'' w'''' + 2w''^2) - \left(\hat{\theta} [\hat{\delta}'(x) - \hat{\delta}'(x-L)] + \hat{\phi} [w'' w'''' + w''^2] \right) v = -m \ddot{z} \quad (2.10)$$

$$C \dot{v} + \frac{1}{R} v + \int_0^L \left(\hat{\theta} + \frac{1}{2} \hat{\phi} w''^2 \right) \dot{w}''^2 dx = 0 \quad (2.11)$$

Estas dos últimas ecuaciones son la ecuación de movimiento y del circuito del sistema, respectivamente. Si se remueven las constantes no lineales G y ϕ , se obtiene el modelo lineal [1] visto anteriormente (ecuaciones (2.3) y (2.4)). Con estas ecuaciones no lineales, se modela el recolector como una viga de Euler-Bernoulli, es decir, $S_1 = -z w''$, en donde $w(x, t)$ es la deflexión de la viga. Se descompone la deflexión como una serie infinita de coordenadas modales $x_n(t)$ y funciones ortogonales $\phi_n(x)$, en donde n denota los modos de vibración:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) \phi_n(x) \quad (2.12)$$

Para la configuración empotrado-voladizo del recolector, las funciones ortogonales toman la siguiente forma:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{mL}} \left[\cosh\left(\frac{\lambda_n}{L} x\right) - \cos\left(\frac{\lambda_n}{L} x\right) - \sigma_n \left(\sinh\left(\frac{\lambda_n}{L} x\right) - \sin\left(\frac{\lambda_n}{L} x\right) \right) \right] \quad (2.13)$$

En donde λ_n satisface:

$$1 + \cos(\lambda_n) \cosh(\lambda_n) = 0 \quad (2.14)$$

$$\sigma_n = \frac{\sinh(\lambda_n) - \sin(\lambda_n)}{\cosh(\lambda_n) + \cos(\lambda_n)} \quad (2.15)$$

Así, reemplazando (2.12) en (2.10) y (2.11), usando las propiedades de ortogonalidad de $\phi_n(x)$ y considerando solo el primer modo de vibración ($n=1$) se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \zeta_a\dot{x}|\dot{x}| + \omega^2x + \alpha x^3 - (\theta + \varphi x^2)v = -\Gamma Z \cos(\Omega t) \quad (2.16)$$

$$C\dot{v} + \frac{v}{R} + (\theta + \varphi x^2)\dot{x} = 0 \quad (2.17)$$

En donde se agrega amortiguamiento no lineal ζ_a , el cual se aproxima mediante linealización armónica. Por otra parte, como se puede ver en la ecuación (2.16), se supone que la excitación vibratoria del recolector es armónica, de amplitud de aceleración Z y frecuencia Ω . Las expresiones de las constantes de estas dos últimas ecuaciones se encuentran en el Anexo B. Con el fin de resolver la amplitud de oscilación y voltaje emitido por el recolector, se suponen soluciones en estado estacionario con sus respectivos ángulos de fase:

$$x = a \cos(\Omega t + \phi_x) \quad (2.18)$$

$$v = b \cos(\Omega t + \phi_v) \quad (2.19)$$

La solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales se encuentra mediante el método de balance armónico, en donde solo es considerado el primer armónico. De esta forma el siguiente set de ecuaciones es obtenido para a , b , ϕ_x y ϕ_v :

$$\left(\omega^2 - \Omega^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 \right) a - b \left(\theta + \frac{3}{4}\varphi a^2 \right) \cos(\phi_v - \phi_x) = -\Gamma Z \cos(\phi_x) \quad (2.20)$$

$$\left(2\zeta\omega + \frac{8}{3\pi}\zeta_a\Omega a \right) \Omega a - b \left(\theta + \frac{1}{4}\varphi a^2 \right) \sin(\phi_v - \phi_x) = -\Gamma Z \sin(\phi_x) \quad (2.21)$$

$$\left(\theta + \frac{1}{4}\varphi a^2 \right) \Omega a \sin(\phi_v - \phi_x) = -\frac{b}{R} \quad (2.22)$$

$$\left(\theta + \frac{1}{4}\varphi a^2\right)\Omega a \cos(\phi_v - \phi_x) = -Cb\Omega \quad (2.23)$$

Así, para la amplitud a del recolector se obtiene un polinomio de grado 10, en donde sus factores m_i se encuentran en el Anexo C.

$$m_{10}a^{10} + m_8a^8 + m_7a^7 + m_6a^6 + m_5a^5 + m_4a^4 + m_3a^3 + m_2a^2 - \Gamma^2Z^2 = 0 \quad (2.24)$$

2.3 Metodología Bayesiana

Como se mencionó anteriormente, la metodología Bayesiana [4] es una herramienta capaz de incorporar incertidumbres a la identificación de parámetros ante datos experimentales. Esto se realiza mediante la designación de densidades de probabilidad a los parámetros, escapándose del enfoque habitual determinista. Al implementar esta metodología, se actualizan estas densidades de probabilidad, obteniéndose una densidad con nuevas propiedades. A continuación, se presentan las bases de esta metodología, la cual será aplicada en el presente trabajo.

2.3.1 Fundamentos

Tomando $f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})$ como la salida del modelo, en donde $\boldsymbol{\theta}$ son los parámetros del modelo y \mathbf{u} las entradas del sistema, se considera cierto error e para tomar en cuenta la discrepancia entre el modelo determinista y la verdadera salida del sistema y . En este trabajo se considera este error como multiplicativo:

$$y = f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})e \quad (2.25)$$

El error e se considera aleatorio, de forma que ahora la salida y del sistema también lo es. Se puede notar que el error multiplicativo puede tratarse como error aditivo entre los logaritmos de las salidas $\ln(y)$ y $\ln(f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}))$. De esta forma, se considera el error e como una distribución log-Normal con mediana 1 y coeficiente de variación σ_e , por lo que la salida tiene una función de densidad de probabilidad asociada:

$$p(y|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) = \frac{1}{y\sigma_e\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\ln(y) - \ln(f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})))^2\right] \quad (2.26)$$

Si se tienen set de datos experimentales con entradas $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{u}_1 \dots \hat{u}_M]$ y salidas $\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{y}_1 \dots \hat{y}_M]$, al evaluar estos datos para la densidad de probabilidad (suponiendo que no están correlacionados), se

obtiene la llamada función *Likelihood*, que es una medida del ajuste del modelo con los datos experimentales:

$$p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{U}}) = \prod_{m=1}^M p(\hat{y}_m | \boldsymbol{\theta}, \hat{u}_m) \quad (2.27)$$

Así, para este caso en particular, toma la siguiente forma:

$$p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{U}}) = \left(\frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} \right)^M \left(\prod_{m=1}^M \frac{1}{\hat{y}_m} \right) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{m=1}^M \ln(\hat{y}_m) - \ln(f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})) \right] \quad (2.28)$$

Bajo la metodología Bayesiana, se debe contar con una creencia *a priori* que se tenga sobre los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ del modelo, que se expresa mediante una distribución de probabilidad llamada “prior” $p(\boldsymbol{\theta})$. Así, el teorema de Bayes es usado para actualizar los parámetros del modelo ante datos experimentales:

$$p(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}) = \frac{p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{U}}) p(\boldsymbol{\theta})}{\int p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{U}}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \quad (2.29)$$

En donde $p(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$ es una distribución de probabilidad llamada “posterior”, que es la actualización del prior ante datos experimentales, proceso que también es llamado primera actualización Bayesiana. El denominador es una constante de normalización llamada “*evidence*”.

Existen diversas formas de identificar la distribución de densidad de probabilidad posterior, entre las que se encuentran la estimación mediante puntos máximos (“*point estimates*”), como el estimador MLE (*Maximum Likelihood Estimate*) y MAP (*Maximum a Posteriori*) [5][6], que se muestran a continuación, respectivamente:

$$\boldsymbol{\theta}^{MLE} = \arg \max \left[\ln \left(p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{U}}) \right) \right] \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\theta}^{MAP} = \arg \max \left[\ln \left(p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{U}}) p(\boldsymbol{\theta}) \right) \right] \quad (2.31)$$

Como se puede notar, la maximización se realiza en el espacio logarítmico debido a estabilidad numérica. La obtención de $\boldsymbol{\theta}^{MLE}$ solo se enfoca en la maximización del *Likelihood*, sin usar ninguna información *a priori* sobre los parámetros. Información que si es usada en la obtención de $\boldsymbol{\theta}^{MAP}$, en donde es incorporado el prior $p(\boldsymbol{\theta})$. El denominador de la ecuación (2.29) no es parte de la optimización debido a que es una constante y no afecta los resultados de la optimización.

Entre los resultados de estas optimizaciones se pueden encontrar un máximo global, máximos locales o múltiples conjuntos de θ con idénticas soluciones. Esto conlleva a caracterizar el problema como identificable, localmente identificable o inidentificable, respectivamente.

Una vez encontrado el valor θ^{MAP} , una forma de aproximar la densidad de probabilidad del posterior es suponiendo que los parámetros distribuyen como una densidad gaussiana y mediante la aproximación asintótica de Laplace es posible encontrar de manera analítica los parámetros de la densidad. Esta aproximación es válida cuando la función *Likelihood* se encuentra concentrada en θ^{MAP} y es doblemente diferenciable, con lo que el posterior distribuye como una gaussiana centrada en θ^{MAP} con matriz de covarianza igual al inverso del Hessiano $\mathbf{H}(\theta)$ evaluado en θ^{MAP} :

$$\mathbf{H}(\theta) = -\nabla_{\theta} \nabla_{\theta} \ln \left(p(\hat{\mathbf{Y}} | \theta, \hat{\mathbf{U}}) p(\theta) \right) \quad (2.32)$$

A pesar de lo anterior, más allá de aproximaciones, en el presente trabajo se busca conocer la densidad de probabilidad del posterior con mayor detalle. Esto debido a que el modelo implementado puede resultar ser un problema no identificable, por lo que un método más general es necesario. Una forma de lograr esto, es obteniendo muestras del posterior, siendo el método *Transitional Markov Chain Monte Carlo* (TMCMC) uno de los más usados para este fin.

2.3.2 Transitional Markov Chain Monte Carlo

Este método [7][8] consiste en una implementación secuencial usando series de densidades de probabilidad auxiliares, en donde se comienza generando muestras desde el prior $p(\theta)$ hasta converger al posterior $p(\theta | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$. Las densidades auxiliares $p_j(\theta | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$ son definidas mediante la siguiente relación proporcional $p_j(\theta | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}) \propto p(\hat{\mathbf{Y}} | \theta, \hat{\mathbf{U}})^{q_j} p(\theta)$, en donde la transición entre una densidad y otra es controlada por el exponente $q_j \in [0, 1]$. De esta forma, en los extremos $q_0 = 0$ y $q_n = 1$, las densidades son el prior y el posterior, respectivamente. Las densidades intermedias son usadas para facilitar la transición desde la densidad inicial (prior) hasta la densidad final (posterior), definiendo de manera meticulosa los exponentes q_j . Esto se realiza mediante el método MCMC que es mostrado en el Anexo D.

De esta forma, se obtienen N_s muestras de cada PDF auxiliar llegando finalmente a muestras del posterior. Además, se obtiene una estimación para la constante de normalización (“*evidence*”), la cual será usada más adelante. En particular, la “*evidence*” puede ser estimada mediante la siguiente expresión:

$$\prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{N_s} \sum_{p=1}^{N_s} p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}_{(j)}^p, \hat{\mathbf{U}}) \right] \quad (2.33)$$

En donde $\boldsymbol{\theta}_{(j)}^p$ corresponde la p-ésima muestra de la j-ésima densidad intermedia.

2.3.3 Análisis Predictivo

Considerando que ahora los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ no son deterministas, sino que presentan incertidumbres asociadas a una densidad de probabilidad, se requiere propagar estas incertidumbres [6] en la predicción del sistema. Así, para encontrar el valor esperado del modelo, se realiza la siguiente integral probabilística (con \mathbf{u} conocido):

$$E[y | \mathbf{u}] = \int y(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (2.34)$$

Al considerar la densidad de probabilidad actualizada para $\boldsymbol{\theta}$ (densidad posterior, obtenida mediante la metodología Bayesiana), se obtiene la propagación *a posteriori*:

$$E[y | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}] = \int y(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{U}}) p(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}) d\boldsymbol{\theta} \quad (2.35)$$

Debido a la complejidad que puede presentar obtener la solución analítica o numérica de esta integral ($\boldsymbol{\theta}$ puede ser de dimensión alta), se opta estimar $E[y | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}]$ mediante la simulación directa de Montecarlo [9]. Bajo este método, mediante K muestras que siguen $p(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$, denotadas por $\boldsymbol{\theta}^p$, se estima la integral por medio de la siguiente expresión:

$$\hat{h} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K y(\boldsymbol{\theta}^p, \hat{\mathbf{U}}) \quad (2.36)$$

Donde \hat{h} es la estimación de $E[y | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}]$ y es la media del modelo evaluado en las muestras $\boldsymbol{\theta}^p$.

2.3.4 Model Class Selection

Además de la actualización de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ mencionada anteriormente, la metodología Bayesiana permite la selección del modelo más adecuado entre una serie de modelos (*Model class selection* o segunda actualización Bayesiana) [10]. Sea $\bigcup_{j=1}^N M_j$ el conjunto de modelos M_j con

salida $f(\boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{u})$ y parámetros $\boldsymbol{\theta}_j$. Al condicionar según datos experimentales, el teorema de Bayes es usado para actualizar la probabilidad de cada modelo:

$$p(M_j | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}) = \frac{p(\hat{\mathbf{Y}} | \hat{\mathbf{U}}, M_j) p(M_j)}{\sum_{j=1}^N p(\hat{\mathbf{Y}} | \hat{\mathbf{U}}, M_j) p(M_j)} \quad (2.37)$$

Se puede notar que en esta ocasión, la versión discreta del teorema de Bayes es aplicada. $p(M_j)$ es el prior de cada modelo, es decir, la creencia *a priori* de que el modelo M_j sea el adecuado frente a los demás. $p(\hat{\mathbf{Y}} | \hat{\mathbf{U}}, M_j)$ es la “*evidence*” del modelo M_j , que corresponde al denominador de la ecuación (2.29). Finalmente, $p(M_j | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$ es la probabilidad posterior (actualizada) de cada modelo, que representa una medida lógica para la selección del modelo más adecuado ante los datos experimentales.

Cabe mencionar, que bajo esta metodología, se hace válido el principio de “*model parsimony*”: en el valor de $p(M_j | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$ existe compensación entre la precisión del modelo con los datos experimentales y la complejidad que presente este. De esta forma, modelos complejos que se ajustan de mejor manera a los datos experimentales no necesariamente son los seleccionados, debido a la mayor cantidad de parámetros en $\boldsymbol{\theta}$ usados para la predicción.

Capítulo 3

Metodología

En el presente trabajo, se seguirá la siguiente metodología:

1. Revisión bibliográfica sobre recolectores de energía piezoeléctricos, desde sus características generales hasta el estudio de distintos modelos para predecir su comportamiento. En particular se buscan modelos analíticos no lineales.
2. Implementación de un modelo predictivo de recolectores de energía piezoeléctrico con distintos grados de no linealidad. La implementación del modelo se realiza mediante el software computacional *Matlab*.
3. Definición del “prior” del modelo. Dado que es una densidad de probabilidad, se debe establecer su tipo de distribución junto con su media y dispersión.
4. Obtención de datos experimentales directamente de la literatura revisada, en donde se encuentran datos de amplitud, velocidad y aceleración de oscilación y voltaje emitido por el recolector.
5. Usar el método TMCMC para actualizar parámetros, obteniendo muestras del posterior. Deben ser suficientes muestras para conocer la forma completa de su densidad de probabilidad, con lo cual se obtienen estadísticas tales como media, dispersión y correlaciones entre parámetros.
6. Identificar propiedades electromecánicas no lineales con las muestras, obteniendo su valor medio y dispersión.
7. Realizar la predicción de las muestras, obteniendo el valor esperado de la predicción junto con una banda de dispersión. Contrastar la predicción con los datos experimentales.
8. Definición de submodelos a partir del modelo principal para realizar la segunda actualización Bayesiana, con lo cual se obtiene que modelo es el más probable que sea el adecuado.

Capítulo 4

Primera Actualización Bayesiana

A continuación, se muestra la aplicación de la metodología Bayesiana al modelo no lineal de recolectores de energía piezoeléctricos desarrollado anteriormente. Se comienza con la primera actualización, en la cual se actualizan los parámetros θ del modelo, definidos por:

$$\theta = [\zeta \quad c_{11} \quad e_{31} \quad \epsilon_{33} \quad \rho_p \quad \rho_s \quad E_s \quad L \quad b \quad h_s \quad h_p \quad \zeta_a \quad \alpha \quad \varphi] \quad (4.1)$$

De esta forma, se tiene un total de 14 parámetros, a los cuales se les debe definir su densidad de probabilidad *a priori* y los datos experimentales a usar.

4.1 Prior

Según [11], la dispersión de las propiedades electromecánicas de los REPs puede alcanzar valores de 20% (de los valores nominales), debido a imprecisiones en la manufactura de estos dispositivos. Por otra parte, los parámetros geométricos del recolector presentan menor dispersión, alcanzando valores de 3% (de los valores nominales).

Así, dada la naturaleza de los parámetros, el prior de la actualización se define como densidades log-Normal independientes, con mediana igual en los valores nominales reportados en [1] y coeficiente de variación 5% para los parámetros geométricos y 50% para los parámetros electromecánicos. Esto se resume en la Tabla 1:

Tabla 1. Prior de los parámetros θ .

Parámetro	Prior	
	Mediana	COV
Z	0.0058	50%
c_{11} [GPa]	60.6	50%
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	16.6	50%
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	25.55	50%
ρ_p [kg m ⁻³]	7500	50%
ρ_s [kg m ⁻³]	9000	50%
E_s [GPa]	105	50%

L [mm]	24.06	5%
b [mm]	6.4	5%
h_s [mm]	0.14	5%
h_p [mm]	0.265	5%
z_a [m ⁻¹]	1.4038E4	50%
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	9.3722E17	50%
$-j$ [C m ⁻³]	1.3642E10	50%
S_e	0.1	400%

Se puede notar que, dada la naturaleza negativa de algunos parámetros, estos son centrados en su valor opuesto, lo que no causa problemas en la actualización (simplemente es un cambio de espacio). Por otra parte, el último parámetro es el error S_e , que es considerado multiplicativo por lo que también posee una distribución log-Normal, el valor de 400% de su COV tiene como objetivo dar libertad a este parámetro para el correcto ajuste del modelo.

4.2 Datos Experimentales

Para realizar la actualización de los parámetros, se usan datos experimentales directamente extraídos de [1], en donde se tienen datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido por el recolector. En particular, se usan datos de 6 amplitudes de excitación $Z = [0.56g \ 0.84g \ 1.12g \ 1.4g \ 1.7g \ 2g]$ ($g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$) y 5 frecuencias de excitación $W = [530\text{Hz} \ 535\text{Hz} \ 540\text{Hz} \ 545\text{Hz} \ 550\text{Hz}]$, dando un total de 30 datos para cada respuesta.

El contar con datos de distintas amplitudes de excitación, permite comportamientos dispares del recolector, que se mostrarán más adelante. Al incrementar la amplitud de excitación al recolector, se empieza a dar un comportamiento no lineal de este, teniendo en $Z = 2g$ el comportamiento con mayor no linealidad y $Z = 0.56g$ un comportamiento lineal. Los datos se muestran a continuación.

4.2.1 Amplitud de Oscilación

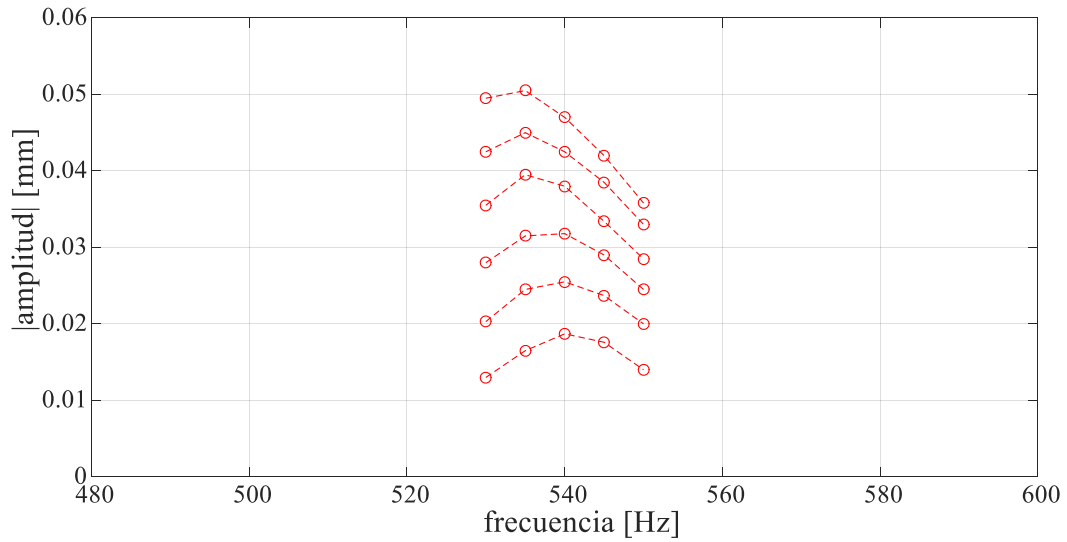


Figura 3. Datos experimentales de amplitud de oscilación del recolector.

4.2.2 Voltaje Emitido

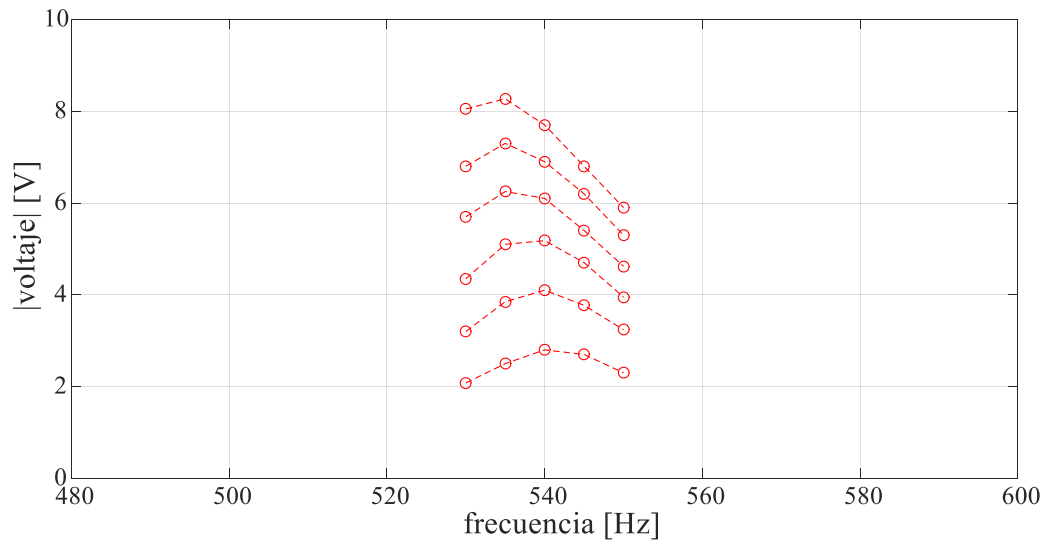


Figura 4. Datos experimentales de voltaje emitido por el recolector.

4.3 Actualización de parámetros

Usando el método TMCMC con 300 cadenas y 3000 muestras, se obtuvieron muestras de la densidad de probabilidad posterior de los 15 parámetros a actualizar (14 parámetros del modelo y el error S_e).

Se realizó este proceso usando distintos sets de los datos experimentales mostrados, con el objetivo de conocer si hacen falta todos o una menor cantidad de datos experimentales para realizar una predicción correcta.

4.3.1 Amplitud de Oscilación

Usando todos los datos experimentales de amplitud de oscilación, los valores de los parámetros actualizados son los mostrados en la Tabla 2. Se pueden ver altas variaciones en los valores de los parámetros del modelo, alcanzando diferencias de 57% (Z) hasta un 80%, como sucede con Z_a . Por otra parte, otros valores mantienen sus propiedades cercanas a los valores nominales, como son los parámetros geométricos y E_s , que presentaron variaciones menores a 3%. Respecto al error S_e , este disminuyó su valor respecto al valor nominal, lo cual es esperable para el correcto ajuste de los parámetros.

Tabla 2. Parámetros actualizados usando datos de amplitud de oscilación.

Parámetro	Posterior	
	Mediana	COV
Z	0.0091	31%
c_{11} [GPa]	73.7	28%
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	15.69	38%
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	29.95	39%
ρ_p [kg m ⁻³]	9409	35%
ρ_s [kg m ⁻³]	9645	62%
E_s [GPa]	104.9	52%
L [mm]	23.65	4%
b [mm]	6.4	5%
h_s [mm]	0.143	5%
h_p [mm]	0.265	4%
Z_a [m ⁻¹]	2.5164E4	17%

$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.0753E18	21%
$-j$ [C m ⁻³]	1.5102E10	57%
S_e	0.02	8%

Las demás propiedades electromecánicas obtuvieron diferencias de 5-30% respecto a sus valores nominales. Los histogramas marginalizados de cada parámetro se muestran en la Figura 5, en donde en la esquina superior derecha se muestra el respectivo coeficiente de variación. Los parámetros geométricos mantuvieron o disminuyeron su COV, mientras que algunos parámetros electromecánicos aumentaron su COV por sobre el 50%, siendo estos ρ_s , E_s y j . Los parámetros electromecánicos restantes disminuyeron su COV hasta un 40%.

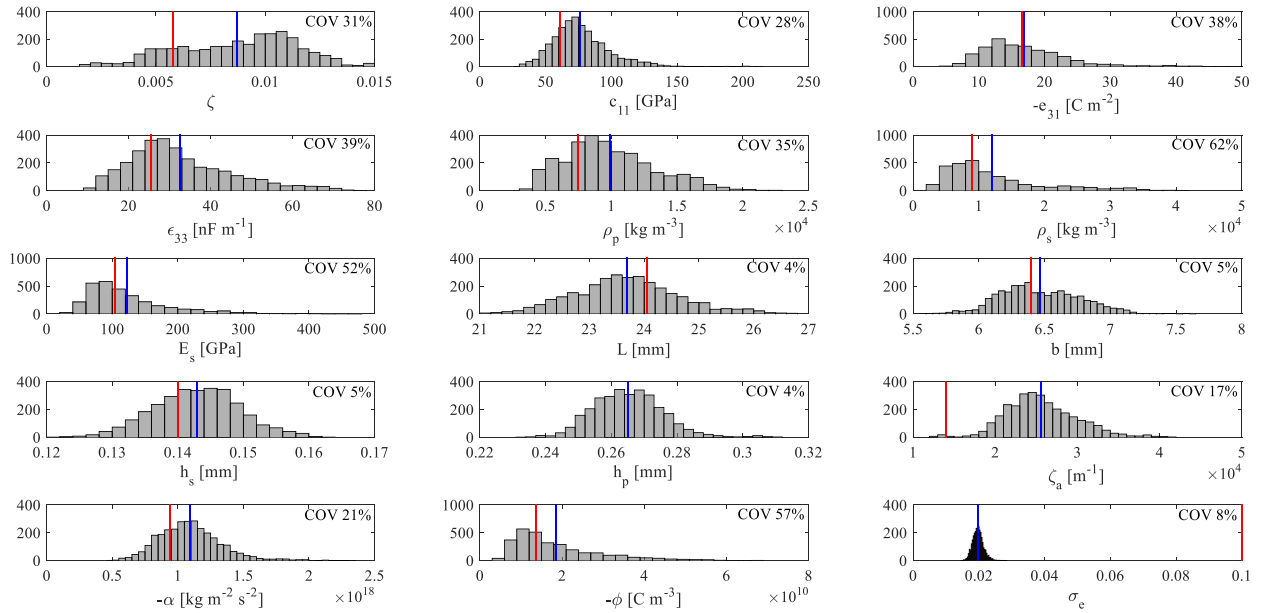


Figura 5. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC, usando datos de amplitud de oscilación. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

Dada la forma de los histogramas, se constata que la aproximación asintótica de Laplace discutida anteriormente hubiera presentado resultados erróneos, dada la suposición de una densidad posterior con distribución normal, lo que posiblemente hubiera conducido a predicciones erróneas.

Entre las muestras obtenidas de los parámetros del modelo, se dieron fuertes correlaciones entre pares de parámetros, siendo la mayor entre los parámetros electromecánicos $e_{31} - e_{33}$. En la Figura 6 se muestran los pares de parámetros con un coeficiente de correlación mayor a 0.6, los cuales tendrán un rol importante al realizar la predicción del comportamiento de REPs. El error S_e obtuvo correlaciones mayores con los parámetros por lo que es considerado no correlacionado.

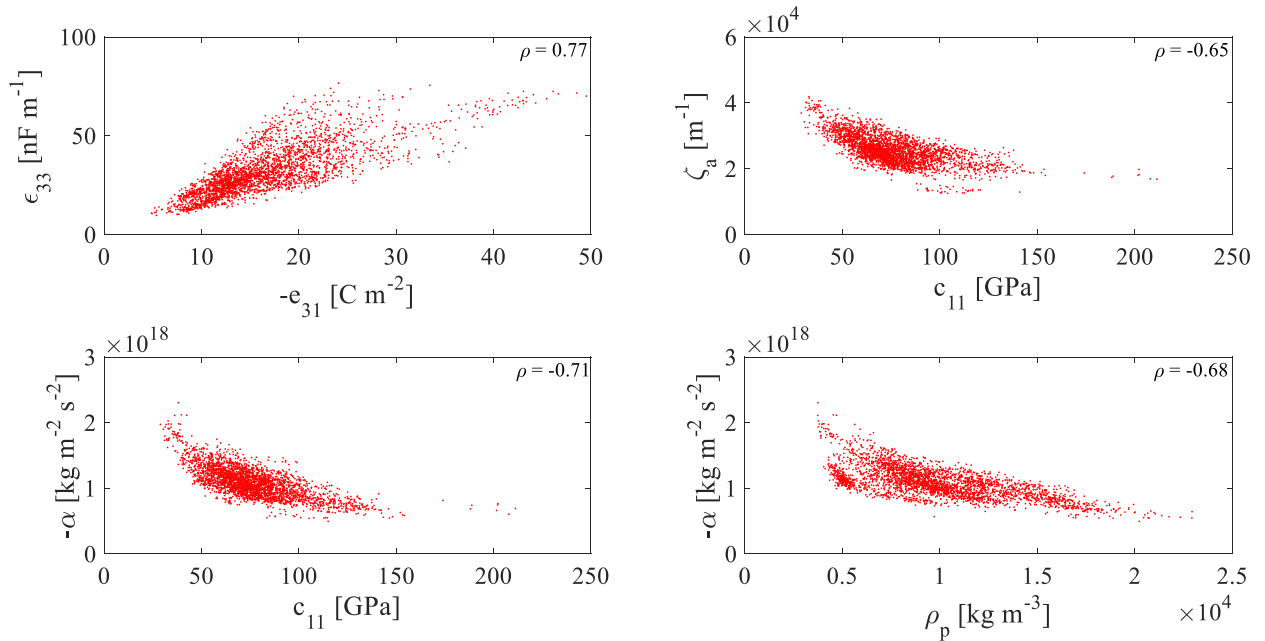


Figura 6. Muestras de los parámetros con coeficiente de correlación mayor a 0.6, usando los datos de amplitud de oscilación.

Se realizó el mismo procedimiento anterior, esta vez usando distintos sets de datos. Se usaron los datos extremos de excitación, es decir, $Z = 0.56g$ y $Z = 2g$, en donde la primera amplitud origina un comportamiento lineal del recolector y la segunda un comportamiento no lineal, como se puede notar en la Figura 3. Los resultados obtenidos son los de la Tabla 3, en donde se notan las grandes diferencias entre algunos parámetros al usar los distintos datos experimentales, lo cual se debe al distinto comportamiento que presentan.

Tabla 3. Actualización de parámetros del modelo usando datos de amplitud de oscilación, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$.

Parámetro	Posterior					
	$Z = 0.56g$		$Z = 2g$		$Z = [0.56g \ 2g]$	
	Mediana	COV	Mediana	COV	Mediana	COV
Z	0.0059	47%	0.0027	68%	0.0067	42%
c_{11} [GPa]	59.6	25%	69.8	19%	77.5	31%
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	14.78	27%	16.34	22%	16.21	36%
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	24.23	35%	21.23	23%	28.02	39%
ρ_p [kg m ⁻³]	5988	49%	7262	24%	10311	40%
ρ_s [kg m ⁻³]	10374	60%	9758	29%	8645	53%
E_s [GPa]	121.9	42%	93.8	35%	110.9	49%
L [mm]	24.16	4%	24.86	3%	23.80	5%

b [mm]	6.5	6%	6.5	3%	6.4	5%
h_s [mm]	0.143	4%	0.135	5%	0.140	5%
h_p [mm]	0.261	4%	0.260	3%	0.266	5%
z_a [m ⁻¹]	1.0274E4	48%	1.7684E4	25%	2.3127E4	28%
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.1063E18	53%	6.2236E17	18%	1.1335E18	27%
$-j$ [C m ⁻³]	1.6846E10	40%	2.5658E10	25%	1.4811E10	53%
S_e	0.022	25%	0.004	29%	0.028	20%

De esta forma, el modelo es capaz de atrapar el comportamiento lineal o no lineal del recolector, pero las muestras obtenidas pueden carecer de exactitud al intentar predecir un comportamiento u otro, como se verá más adelante. En el Anexo E se encuentran los histogramas para estos tres últimos casos revisados.

4.3.2 Voltaje Emitido

Usando todos los datos experimentales de voltaje emitido, se muestran los valores de los parámetros actualizados en la Tabla 4. La variación de los valores de los parámetros del modelo respecto a los nominales fue menor, en donde la mayor variación la obtuvo nuevamente z_a , con un 56%. Los parámetros geométricos tuvieron variaciones menores al 2% y los demás parámetros electromecánicos no obtuvieron variaciones mayores al 35%. El error S_e disminuyó su valor en gran medida, lo cual es esperable para el correcto ajuste.

Tabla 4. Parámetros actualizados usando datos de voltaje emitido.

Parámetro	Posterior	
	Mediana	COV
z	0.0052	37%
c_{11} [GPa]	77.4	27%
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	19.56	25%
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	29.96	29%
ρ_p [kg m ⁻³]	10103	30%
ρ_s [kg m ⁻³]	7577	53%
E_s [GPa]	110.2	45%
L [mm]	24.17	4%
b [mm]	6.3	5%

h_s [mm]	0.138	4%
h_p [mm]	0.267	4%
Z_a [m ⁻¹]	2.1821E4	7%
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	9.9778E17	19%
$-j$ [C m ⁻³]	1.1597E10	45%
S_e	0.017	9%

En la Figura 7, se muestran los histogramas de las muestras obtenidas, junto con su coeficiente de variación en la esquina superior derecha. Solo un parámetro (ρ_s) aumentó su coeficiente de variación, siendo este un incremento ligero a 53%. Los demás parámetros tuvieron disminución de su COV, destacando el 7% obtenido por Z_a .

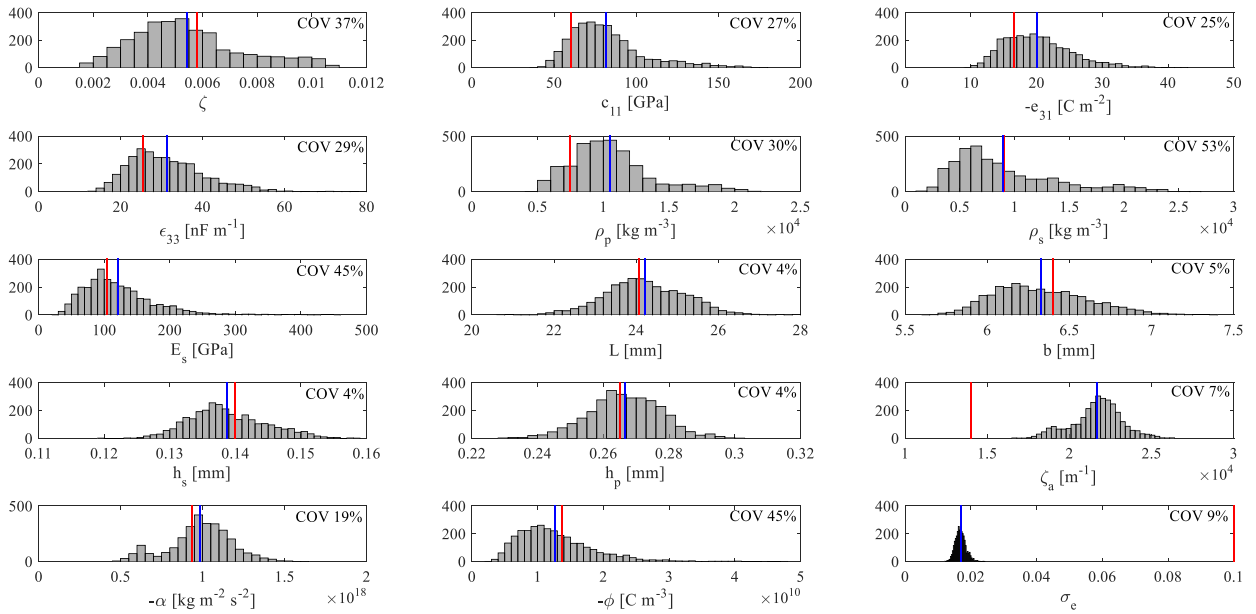


Figura 7. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC, usando datos de voltaje emitido. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

Nuevamente se obtienen histogramas de forma peculiar, como por ejemplo los histogramas de Z_a y a , los cuales no pueden ser aproximados de forma correcta mediante el método de Laplace.

Con los datos de voltaje, se obtuvieron más y nuevas correlaciones fuertes entre parámetros en comparación a las obtenidas con los datos de amplitud. Se conservan 3 de los 4 pares de parámetros fuertemente correlacionados y se agregan 7 pares nuevos. Nuevamente el par de parámetros

electromecánicos e_{31} - ϵ_{33} es el que obtuvo mayor coeficiente de correlación, esta vez con 0.93. El error S_e es considerado no correlacionado.

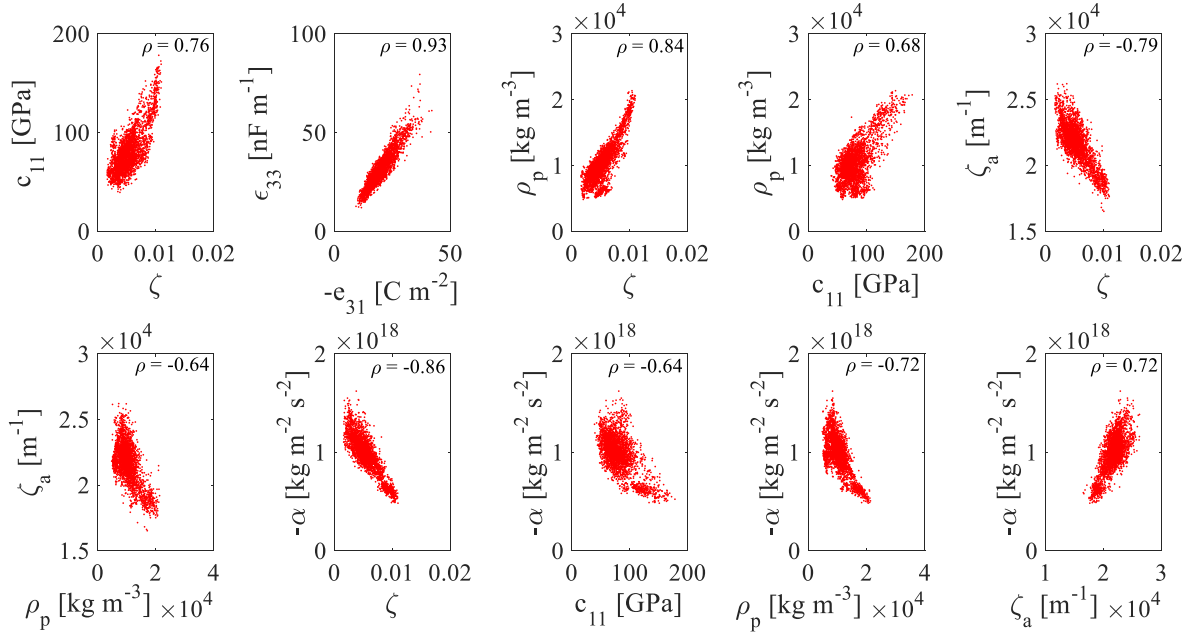


Figura 8. Muestras de los parámetros con coeficiente de correlación mayor a 0.6, usando los datos de voltaje emitido.

Al igual que para los datos de amplitud de oscilación, se realizó el mismo procedimiento de uso de datos, esta vez con los de voltaje. Con los datos de nivel de excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$, se obtuvieron los resultados mostrados en la Tabla 5 y en el Anexo E se encuentran los histogramas respectivos de los parámetros.

Tabla 5. Actualización de parámetros del modelo usando datos de voltaje emitido, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$.

Parámetro	Posterior					
	$Z = 0.56g$		$Z = 2g$		$Z = [0.56g \ 2g]$	
	Mediana	COV	Mediana	COV	Mediana	COV
Z	0.0049	31%	0.0041	35%	0.0049	33%
c_{11} [GPa]	69.3	12%	48.5	18%	72.0	22%
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	12.78	28%	16.80	25%	20.87	32%
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	17.04	37%	31.00	24%	31.37	34%
ρ_p [kg m ⁻³]	6876	29%	6160	23%	8567	28%
ρ_s [kg m ⁻³]	14995	42%	10755	28%	9935	50%
E_s [GPa]	78.3	43%	98.1	41%	106.3	46%

L [mm]	23.39	3%	23.83	3%	24.32	4%
b [mm]	6.4	5%	6.5	7%	6.5	5%
h_s [mm]	0.138	4%	0.148	5%	0.141	5%
h_p [mm]	0.259	6%	0.269	4%	0.264	5%
z_a [m ⁻¹]	9.6327E3	44%	1.4911E4	39%	2.2486E4	8%
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	5.7723E17	37%	8.3863E17	25%	1.1046E18	17%
$-j$ [C m ⁻³]	2.2246E10	39%	1.8023E10	45%	1.2667E10	47%
s_e	0.006	18%	0.005	25%	0.020	16%

Existen grandes diferencias entre los valores de los parámetros, nuevamente debido a la diferencia de comportamiento que provocan las distintas excitaciones $Z = 0.56g$ y $Z = 2g$. Una vez más, la metodología Bayesiana es capaz de entregar valores para los parámetros usando distintos sets de datos (con distinto comportamiento), pero se verá más adelante que su uso puede llevar a predicciones erróneas.

4.3.3 Amplitud de Oscilación y Voltaje Emitido

En este caso se actualizan los parámetros usando el total de los datos disponibles, es decir, los datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido a la vez, dando un total de 60 datos. Para realizar esto, se debe añadir un error extra para ajustar los parámetros a ambos fenómenos: σ_a y σ_v . De esta forma ahora se tienen 16 parámetros θ a actualizar.

Los resultados de los parámetros actualizados son los mostrados en la Tabla 6, en donde se ven ligeros cambios respecto a sus valores nominales en los parámetros geométricos ($< 2\%$) y en E_s (0.43%). Por otra parte, los mayores cambios lo sufrieron z_a (62%) y j (47%), mientras que los demás no superaron el 40%.

Tabla 6. Parámetros actualizados usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido.

Parámetro	Posterior	
	Mediana	COV
Z	0.0068	17%
c_{11} [GPa]	84.4	18%
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	18.89	34%
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	29.16	36%
ρ_p [kg m ⁻³]	10401	23%

ρ_s [kg m ⁻³]	10007	61%
E_s [GPa]	104.6	59%
L [mm]	23.95	4%
b [mm]	6.5	3%
h_s [mm]	0.139	3%
h_p [mm]	0.266	4%
z_a [m ⁻¹]	2.2727E4	4%
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.0215E18	11%
$-j$ [C m ⁻³]	2.0064E10	22%
σ_a	0.02	9%
σ_v	0.017	9%

Respecto a la dispersión de los parámetros actualizados, se logró disminuir en la mayoría de estos, en donde se destaca el 4% de z_a . Solo dos parámetros aumentaron su dispersión, siendo estos ρ_s y E_s , que alcanzaron aproximadamente un COV de 60%. Los histogramas de las 3000 muestras de los 16 parámetros actualizados son mostrados en la Figura 9.

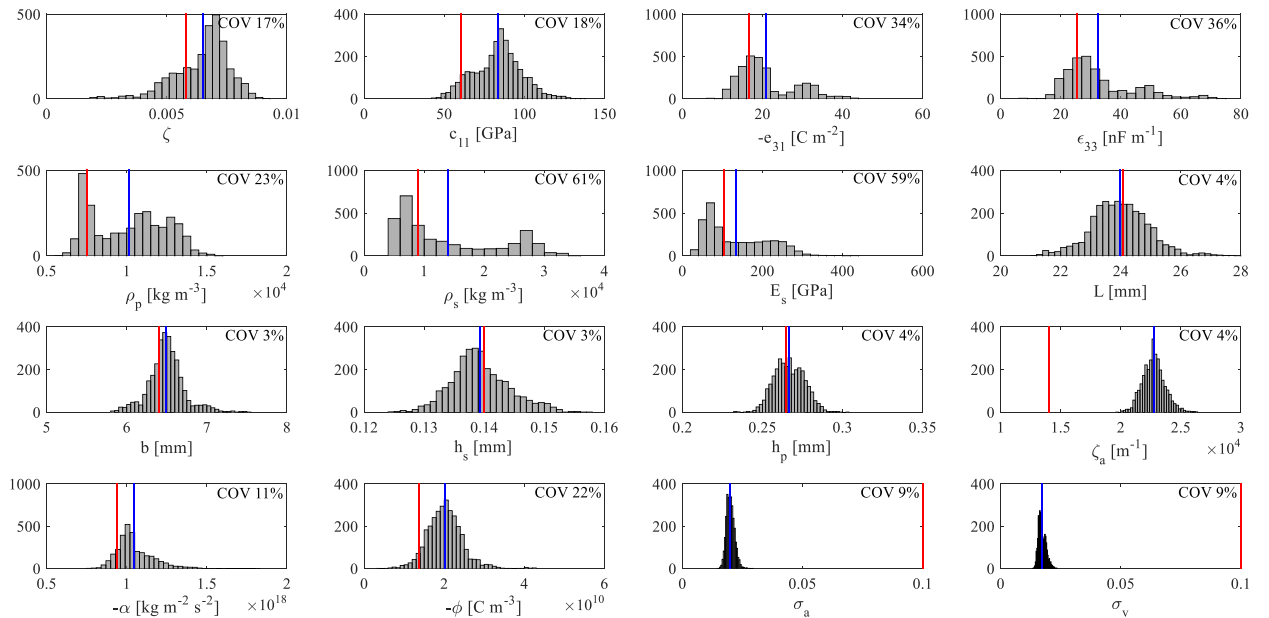


Figura 9. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

Nuevamente, fuertes correlaciones (>0.6) son encontradas entre pares de parámetros, en donde resalta la correlación entre e_{31} - ϵ_{33} , que alcanzó un coeficiente de 0.97, del mismo orden que el encontrado en el caso anterior de voltaje emitido. Las muestras de los parámetros fuertemente correlacionados se muestran en la Figura 10, que fueron nuevamente diez.

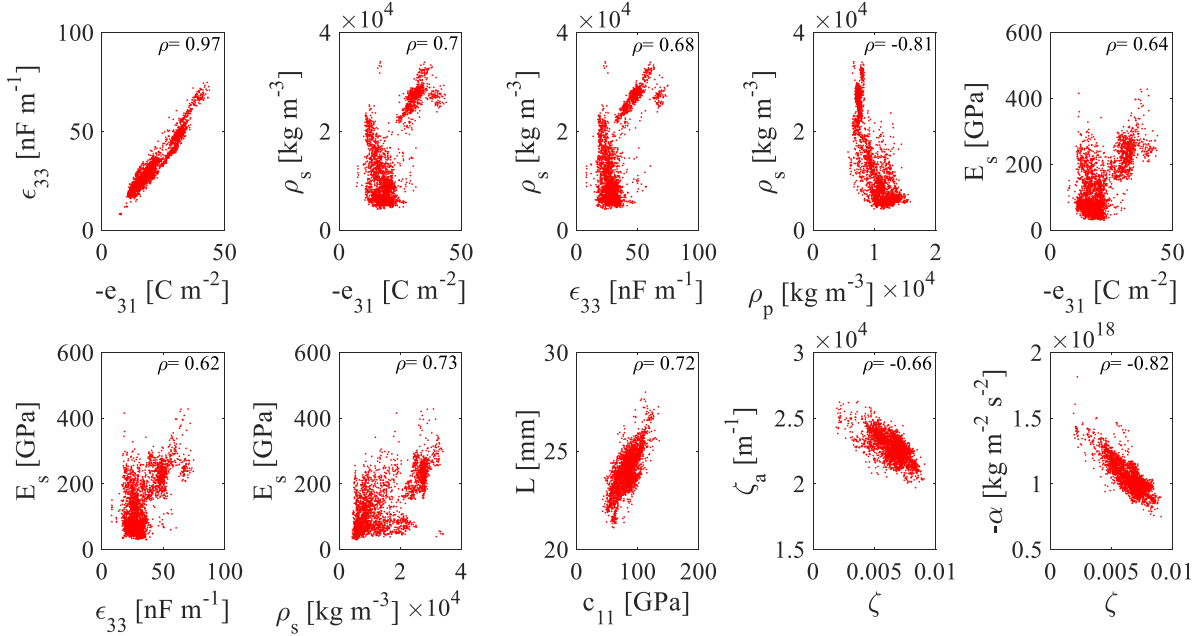


Figura 10. Muestras de los parámetros con coeficiente de correlación mayor a 0.6, usando los datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido.

Los parámetros actualizados usando distintos sets de datos ($Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$) son mostrados en la Tabla 7. Se obtienen valores variados de los parámetros según el caso, al igual que con los coeficientes de variación. Esto nuevamente debido a que los parámetros deben ajustarse al distinto comportamiento que presentan los datos.

Tabla 7. Actualización de parámetros del modelo usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$.

Parámetro	Posterior					
	$Z = 0.56g$		$Z = 2g$		$Z = [0.56g \ 2g]$	
	Mediana	COV	Mediana	COV	Mediana	COV
Z	0.0046	36%	0.0047	24%	0.0053	24%
c_{11} [GPa]	66.1	23%	48.3	17%	72.4	19%
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	15.81	29%	18.89	20%	14.65	23%
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	24.61	32%	29.62	20%	22.56	25%
ρ_p [kg m ⁻³]	8915	29%	8414	8%	9716	35%
ρ_s [kg m ⁻³]	8264	50%	4261	26%	10169	57%

E_s [GPa]	105.0	48%	92.1	40%	114.6	42%
L [mm]	23.93	4%	23.03	4%	23.95	4%
b [mm]	6.5	6%	6.5	4%	6.5	4%
h_s [mm]	0.142	5%	0.139	4%	0.140	4%
h_p [mm]	0.268	5%	0.259	3%	0.267	5%
z_a [m ⁻¹]	1.9058E4	47%	1.0784E4	25%	2.3227E4	7%
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	6.998E17	39%	6.3669E17	13%	1.1417E18	13%
$-j$ [C m ⁻³]	1.0657E10	62%	1.3206E10	28%	1.7574E10	32%
σ_a	0.027	44%	0.006	36%	0.028	17%
σ_v	0.015	45%	0.005	37%	0.020	17%

Capítulo 5

Segunda Actualización Bayesiana

Como se mencionó anteriormente, la metodología Bayesiana permite una segunda instancia de actualización, en la cual se actualizan las probabilidades de modelos de ser los adecuados ante datos experimentales. Para realizar esto hace, hace falta definir los modelos a evaluar y la obtención de su “evidence”, que se logra con el método TMCMC según la ecuación (2.33).

5.1 Modelos

Un total de 4 modelos fueron evaluados, en donde el primer modelo es el modelo principal revisado hasta ahora y los 3 restantes son submodelos de este. Cada modelo usa distintos parámetros θ para realizar su predicción, por lo que tienen distinto nivel de complejidad (n_θ). En particular, los parámetros examinados fueron los no lineales electromecánicos: α y φ , que están directamente relacionados con los parámetros de las ecuaciones constitutivas que rigen al recolector (ecuaciones (2.5) y (2.6)) mediante las ecuaciones (B.2) y (B.4), respectivamente. De esta forma, se evaluaron modelos con el mayor grado de no linealidad electromecánica (modelo principal), nivel de no linealidad electromecánica intermedia (sin un parámetro electromecánico no lineal) y nivel de no linealidad electromecánica nula (sin parámetros electromecánicos no lineales). Se resumen los modelos en la Tabla 8:

Tabla 8. Modelos considerados para la segunda actualización Bayesiana.

Modelo	Parámetros considerados del modelo	Descripción
$M_1(n_\theta = 15)$	Todos	Todos los parámetros del modelo
$M_2(n_\theta = 14)$	Todos menos α	Sin un parámetro electromecánico no lineal
$M_3(n_\theta = 14)$	Todos menos φ	Sin un parámetro electromecánico no lineal
$M_4(n_\theta = 13)$	Todos menos α y φ	Sin parámetros electromecánicos no lineales

Se considera que cada modelo *a priori* es igualmente plausible de ser el adecuado, es decir cada modelo comienza con un prior $p(M_j) = 1/4$.

5.2 Actualización de modelos

Para realizar la segunda actualización Bayesiana o Model Class Selection, en primera instancia se deben actualizar los parámetros para conocer la “*evidence*”. El error S_e juega un rol importante en esta segunda etapa, debido a que es una medida del ajuste del modelo a los datos experimentales. Se seguirá la misma tendencia del uso de sets de datos experimentales de amplitud de oscilación y voltaje emitido.

5.2.1 Amplitud de Oscilación

Al actualizar los parámetros de cada modelo usando todos los datos disponibles de amplitud de oscilación, se obtuvieron los valores de la Tabla 9, en donde se muestra la mediana de las muestras de los parámetros actualizados.

Tabla 9. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación. Se muestra la mediana de las muestras.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
z	0.0091	0.0108	0.009	0.0071
c_{11} [GPa]	73.7	62.6	84.2	74.5
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	15.69	11.29	15.62	14.54
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	29.95	32.33	31.29	27.85
ρ_p [kg m ⁻³]	9409	6515	11256	9367
ρ_s [kg m ⁻³]	9645	10707	6636	9760
E_s [GPa]	104.9	104.6	97.4	103.8
L [mm]	23.65	24.19	24.02	23.92
b [mm]	6.4	6.4	6.5	6.4
h_s [mm]	0.143	0.139	0.143	0.14
h_p [mm]	0.265	0.263	0.266	0.266
z_a [m ⁻¹]	2.5164E4	3.575E4	2.6853E4	3.1005E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.0753E18	-	7.9795E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.5102E10	7.7479E9	-	-
S_e	0.02	0.066	0.019	0.063

Existe variación en los valores de los parámetros del modelo, en donde se marca el gran cambio en las propiedades electromecánicas. Por otra parte, se puede ver que el modelo 1 y 3 obtuvieron un error S_e similar, que es menor a los de los modelos 2 y 4.

Los resultados de la segunda actualización usando todos los datos de amplitud de oscilación se muestran en la Tabla 10. El modelo dos y cuatro resultaron con probabilidad totalmente nula, dejando con probabilidad similar al modelo uno y tres, con ligera ventaja a este último. El que estos modelos sean los más probables responde a que ambos presentaron un error S_e menor a los modelos restantes. Sin embargo, hay que remarcar que el modelo tres posee un grado menos de complejidad para predecir amplitud.

Tabla 10. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de amplitud de oscilación.

	M_1	M_2	M_3	M_4
logEvidence	58.40	24.53	58.58	26.78
$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	45%	0%	55%	0%

Usando distintos sets de datos experimentales para realizar la segunda actualización, se obtienen los valores mostrados en la Tabla 11. Se ve que al usar los datos con comportamiento lineal ($Z = 0.56g$) todos los modelos alcanzan probabilidad mayor o igual al 15%, como consecuencia del error S_e similar que obtuvieron. El modelo lineal electromecánico (modelo cuatro) tiene cabida, sin embargo, el modelo con mayor grado de no linealidad (modelo uno) posee la mayor probabilidad de ser el adecuado bajo el esquema Bayesiano.

Tabla 11. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de amplitud de oscilación, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$.

	M_1	M_2	M_3	M_4	
$Z = 0.56g$	logEvidence	1.58	1.50	1.42	0.87
	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	31%	28%	26%	15%
	S_e	0.022	0.02	0.02	0.021
$Z = 2g$	logEvidence	5.65	2.70	3.64	3.95
	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	73%	4%	10%	13%
	S_e	0.004	0.012	0.006	0.008
	logEvidence	8.30	-2.17	8.14	-1.31

$Z = [0.56g \ 2g]$	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	54%	0%	46%	0%
	S_e	0.028	0.107	0.027	0.096

Por el otro lado, usando los datos con mayor grado de no linealidad ($Z = 2g$), el modelo uno presentó el menor error S_e , con lo que logró la mayor probabilidad de ser el adecuado. Le sigue el modelo cuatro con un 13%, que obtuvo el doble de error S_e , pero con un menor grado de complejidad.

Finalmente, usando los sets de datos extremos ($Z = [0.56g \ 2g]$) se dan resultados similares que al usar todas las curvas, dejando nulos al modelo dos y cuatro, y con probabilidad similar al modelo uno y tres. De esta forma, se puede desprender que para la predicción de ambos comportamientos (lineal y no lineal) del recolector, el parámetro \mathcal{A} juega un rol importante en la predicción de amplitud de oscilación.

5.2.2 Voltaje Emitido

Al usar los 30 datos disponibles de voltaje emitido por el recolector, se obtienen los resultados mostrados Tabla 12. Nuevamente, se ven grandes diferencias en algunos parámetros, como sucede con los parámetros de densidad y los electromecánicos. El menor error S_e lo obtuvieron el modelo uno y tres, alcanzando un valor similar.

Tabla 12. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de voltaje emitido.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0052	0.0049	0.0082	0.0055
c_{11} [GPa]	77.4	71.7	94.1	73.8
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	19.56	17.43	19.62	17.59
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	29.96	24.08	30.52	25.49
ρ_p [kg m ⁻³]	10103	9146	13654	9616
ρ_s [kg m ⁻³]	7577	9934	5377	9951
E_s [GPa]	110.2	103.8	122.5	103.8
L [mm]	24.17	24.05	24.10	24.01
b [mm]	6.3	6.4	6.6	6.5
h_s [mm]	0.138	0.140	0.141	0.140

h_p [mm]	0.267	0.267	0.268	0.267
z_a [m ⁻¹]	2.1821E4	2.5578E4	1.9034E4	2.373E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	9.9778E17	-	6.0698E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.1597E10	6.5196E9	-	-
s_e	0.017	0.071	0.017	0.065

Los resultados de la segunda actualización o Model Class Selection, usando los datos de voltaje emitido se muestran en la Tabla 13, en donde se da nuevamente que los modelos dos y cuatro poseen nula probabilidad. El error s_e similar que obtuvieron el modelo uno y tres, se ve reflejado en los resultados de actualización de probabilidad, en donde el modelo tres alcanzó la mayor (81%). De esta forma, a pesar de que ambos modelos poseen un nivel de exactitud similar ante los datos experimentales, la metodología Bayesiana conduce a la elección del modelo tres, que posee un menor grado de complejidad.

Tabla 13. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de voltaje emitido.

	M_1	M_2	M_3	M_4
logEvidence	61.38	22.67	62.83	25.76
$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	19%	0%	81%	0%

En la Tabla 14 se resumen los resultados obtenidos usando distintos sets de datos. En el caso del menor nivel de excitación ($Z = 0.56g$), el modelo dos obtuvo la mayor probabilidad (64%), dejando con probabilidades menores a los demás modelos. El modelo uno (modelo lineal) tiene cabida, pero con baja probabilidad (9%) de ser seleccionado.

Al usar el set de datos experimentales con mayor grado de no linealidad ($Z = 2g$), el modelo uno y cuatro obtuvieron el menor error s_e , siendo este similar entre ambos. De esta forma, estos modelos obtuvieron la mayor probabilidad de ser los seleccionados, en donde se destaca la mayor probabilidad alcanzada por el modelo cuatro (modelo lineal). La menor complejidad de este modelo puede ser la causante de su selección, sin embargo, su uso puede llevar a resultados erróneos al predecir otros niveles de excitación, como se verá más adelante.

Tabla 14. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de voltaje emitido, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$.

	M_1	M_2	M_3	M_4
logEvidence	3.71	5.52	4.16	3.53

$Z = 0.56g$	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	11%	64%	16%	9%
	S_e	0.006	0.003	0.008	0.005
	logEvidence	5.25	4.68	4.55	5.42
$Z = 2g$	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	31%	17%	15%	37%
	S_e	0.005	0.006	0.004	0.005
	logEvidence	9.07	-1.88	9.08	-0.87
$Z = [0.56g \ 2g]$	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	50%	0%	50%	0%
	S_e	0.02	0.125	0.02	0.105

Usando los sets de datos extremos ($Z = [0.56g \ 2g]$), se obtiene la misma probabilidad para el modelo uno y tres, dejando nulos al modelo dos y cuatro. De esta forma, al seleccionar modelos bajo estos datos experimentales, existe indiferencia entre el modelo uno y tres, pero hay que considerar que el modelo tres posee un grado menor de complejidad.

Nuevamente, bajo los resultados vistos, se puede desprender que para predecir el comportamiento lineal y no lineal presentado por los datos experimentales, el parámetro electromecánico no lineal \mathcal{A} es importante para realizar predicciones de voltaje.

5.2.3 Amplitud de Oscilación y Voltaje Emitido

Los parámetros actualizados usando la totalidad de datos experimentales disponibles (30 de amplitud de oscilación y 30 de voltaje emitido), son los mostrados en la Tabla 15. Se muestran ambos errores σ_a y σ_v , que dan cuenta de la calidad del ajuste a los datos de amplitud y voltaje, respectivamente.

Tabla 15. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0068	0.0038	0.0048	0.0053
c_{11} [GPa]	84.4	71.7	76.3	78.7
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	18.89	13.16	23.71	17.07
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	29.16	18.26	34.17	25.85

ρ_p [kg m ⁻³]	10401	6494	11206	10475
ρ_s [kg m ⁻³]	10007	20416	5817	10408
E_s [GPa]	104.6	117.3	112.5	102.2
L [mm]	23.95	23.72	23.95	23.87
b [mm]	6.5	6.5	6.4	6.4
h_s [mm]	0.139	0.141	0.139	0.140
h_p [mm]	0.266	0.260	0.259	0.266
z_a [m ⁻¹]	2.2727E4	2.8638E4	2.4090E4	2.6794E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.0215E18	-	8.8616E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	2.0064E10	3.4498E9	-	-
σ_a	0.02	0.063	0.022	0.064
σ_v	0.017	0.064	0.018	0.064

Los cuatro modelos revisados presentan cambios significativos en los parámetros electromecánicos actualizados, como sucede con la constante piezoeléctrica e_{31} . Los menores errores obtenidos son los dados por el modelo uno y tres, que comparten el mismo nivel de error en ambas respuestas.

En la Tabla 16 se muestran los resultados de la segunda actualización, en donde el modelo uno es el seleccionado de forma manifiesta. De esta forma, para predecir tanto amplitud de oscilación como voltaje emitido por el recolector, el modelo principal de este trabajo es el adecuado. Esta selección responde a que el modelo no lineal por Erturk *et al.* [3] predice con exactitud ambos comportamientos del recolector y es capaz de atrapar la física del sistema, siendo necesario el uso de todos los parámetros.

Tabla 16. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido.

	M_1	M_2	M_3	M_4
logEvidence	129.80	56.39	126.48	61.00
$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	97%	0%	3%	0%

En la Tabla 17 se muestran los resultados de la segunda actualización usando distintos niveles de excitación, en donde la menor excitación ($Z = 0.56g$) conduce a la selección del modelo dos por sobre los demás. Este modelo presenta el peor ajuste en amplitud de oscilación y el mejor ajuste en voltaje. El modelo cuatro (lineal) también tiene cabida con un 30%, lo cual responde al tipo de comportamiento de los datos experimentales.

Tabla 17. Resultados de la segunda actualización Bayesiana usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido, con excitación $Z = 0.56g$, $Z = 2g$ y $Z = [0.56g \ 2g]$.

		M_1	M_2	M_3	M_4
$Z = 0.56g$	logEvidence	9.03	10.63	9.03	10.08
	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	10%	50%	10%	30%
	$\sigma_a \quad \sigma_v$	0.027 0.015	0.063 0.003	0.025 0.016	0.031 0.009
$Z = 2g$	logEvidence	18.53	10.55	18.52	13.78
	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	50%	0%	50%	0%
	$\sigma_a \quad \sigma_v$	0.006 0.005	0.01 0.014	0.005 0.004	0.008 0.01
$Z = [0.56g \ 2g]$	logEvidence	27.72	1.76	24.99	4.02
	$p(M_j \hat{U}, \hat{Y})$	94%	0%	6%	0%
	$\sigma_a \quad \sigma_v$	0.028 0.02	0.103 0.103	0.033 0.021	0.094 0.092

En el caso de los datos con mayor nivel de excitación ($Z = 2g$), existe indiferencia entre el modelo uno y tres, teniendo cada uno una probabilidad del 50%. Ambos presentaron los menores errores de ajuste, siendo estos similares.

Por último, los resultados al usar los datos de menor y mayor nivel de excitación ($Z = [0.56g \ 2g]$) nuevamente conducen a la selección del modelo uno, que presentó los menores errores. De esta forma, al igual que cuando se usaron todos los datos experimentales, el modelo principal es el adecuado, que es capaz de predecir de manera correcta el comportamiento lineal y no lineal del recolector ante distintos niveles de excitación.

Capítulo 6

Propagación de Incertidumbres

Con las 3000 muestras disponibles de los parámetros actualizados (densidad de probabilidad posterior), es directo propagar las incertidumbres presentes en θ mediante lo visto en la sección 2.3.3 del presente trabajo. En particular, se identifican las incertidumbres presentes en las constantes de las ecuaciones constitutivas del recolector y en la predicción de los modelos revisados, de modo de conocer su exactitud y confiabilidad.

6.1 Constantes de Ecuaciones Constitutivas

Las constantes de las ecuaciones constitutivas (ecuaciones (2.5) y (2.6)) a identificar y conocer su incertidumbre, son las constantes electromecánicas no lineales c_{1111} y e_{3111} , recordando que c_{111} y e_{311} se anulan debido a la simetría geométrica que presenta el recolector “*bimorph*”. Estas constantes son obtenidas mediante las ecuaciones (A.2) y (A.4) presentes en el Anexo A. La constante c_{1111} es de carácter negativo, por lo que es tratada en el espacio opuesto, es decir, como $-c_{1111}$.

A continuación, se revisan las constantes encontradas usando los datos experimentales de amplitud de oscilación, voltaje emitido y ambos para todos los modelos revisados. Dado que algunos modelos revisados no incluyen parámetros electromecánicos no lineales, las constantes encontradas en estos modelos escapan de su sentido físico y solo tienen fines predictivos. El modelo cuatro no se incluye debido a que no cuenta con ninguna de las dos constantes.

6.1.1 Amplitud de Oscilación

Los histogramas de las constantes encontradas usando todos los datos disponibles de amplitud de oscilación, son los que se muestran en la Figura 11. Se pueden notar diferencias en los valores nominales y medios encontrados en c_{1111} y e_{3111} , alcanzando diferencias de 61% y 57%, respectivamente. Altas dispersiones se presentan en las constantes, siendo la mayor la presentada por e_{3111} .

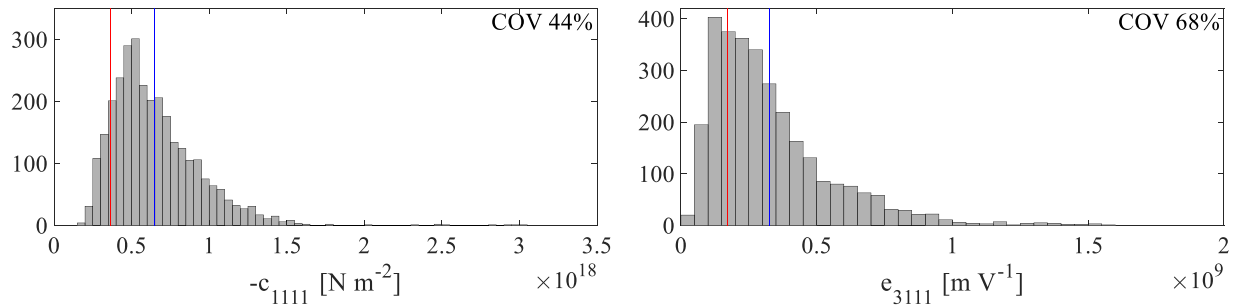


Figura 11. Constantes electromecánicas no lineales encontradas usando los datos de amplitud de oscilación. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

Los resultados de los demás casos se muestran en la Tabla 18, en la cual se observan las diferencias obtenidas, dependiendo de los datos experimentales y modelos usados. Las menores dispersiones de ambas constantes se dan al usar los datos con $Z = 2g$.

Tabla 18. Propagación de incertidumbres a las propiedades electromecánicas no lineales, usando distintos sets de datos de amplitud de oscilación. Se muestra mediana y coeficiente de variación.

		M_1		M_2		M_3	
$Z =$ [0.56g 0.84g 1.12g 1.4g 1.7g 2g]	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	5.9134E17	44%	-	-	5.9145E17	30%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	2.7070E8	68%	9.8908E7	62%	-	-
$Z = 0.56g$	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	3.8382E17	74%	-	-	3.2086E17	75%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	2.0657E8	49%	1.5089E8	77%	-	-
$Z = 2g$	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	3.3798E17	43%	-	-	1.1650E17	34%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	4.0325E8	46%	1.8415E8	71%	-	-
$Z = [0.56g$ 2g]	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	7.1174E17	49%	-	-	5.7498E17	43%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	2.6549E8	74%	1.4804E8	74%	-	-

6.1.2 Voltaje Emitido

Usando todos los datos disponibles de voltaje emitido por el recolector, se obtienen los histogramas de la Figura 12. Nuevamente se dan diferencias en los valores nominales y medios encontrados de c_{1111} y e_{3111} , alcanzando diferencias de 74% y 26%, respectivamente. Ambas constantes presentan menores dispersiones que en el caso anterior de amplitud de oscilación.

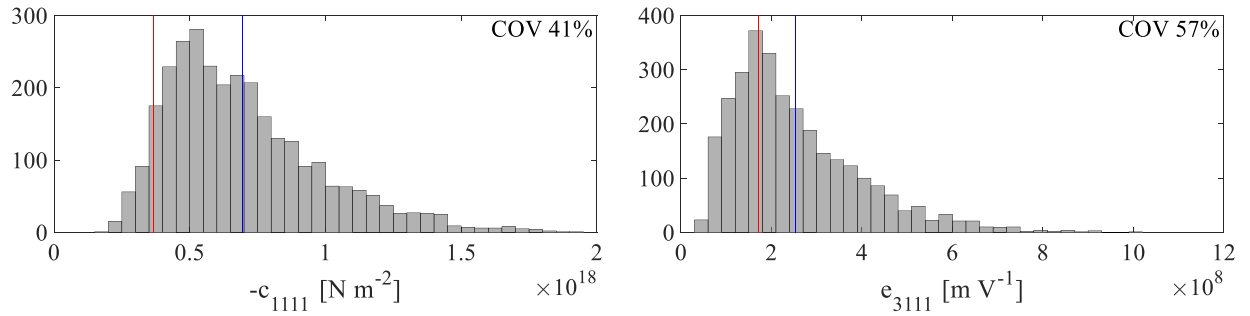


Figura 12. Constantes electromecánicas no lineales encontradas usando los datos de voltaje emitido. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

En la Tabla 19 se resumen las constantes encontradas para todos los casos revisados, en donde nuevamente para el caso $Z = 2g$ se presentaron las menores dispersiones.

Tabla 19. Propagación de incertidumbres a las propiedades electromecánicas no lineales, usando distintos sets de datos de voltaje emitido. Se muestra mediana y coeficiente de variación.

		M_1		M_2		M_3	
$Z =$ [0.56g 0.84g 1.12g 1.4g 1.7g 2g]	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	6.3875E17	41%	-	-	5.9092E17	27%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	2.1679E8	57%	1.0998E8	57%	-	-
$Z = 0.56g$	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	2.6918E17	51%	-	-	3.2440E17	20%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	3.1214E8	46%	1.8113E8	35%	-	-
$Z = 2g$	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	2.4291E17	33%	-	-	2.5642E17	34%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	1.7501E8	48%	1.0463E8	60%	-	-
$Z = [0.56g$ $2g]$	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	6.6646E17	39%	-	-	4.6981E17	44%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	2.2206E8	56%	1.8889E8	69%	-	-

6.1.3 Amplitud de Oscilación y Voltaje Emitido

Finalmente, usando todos los datos experimentales usados, se obtienen los histogramas de la Figura 13. Dada la mayor cantidad de datos experimentales, se tiene menos dispersión en las constantes electromecánicas no lineales, ambas con un 35%. Altas diferencias con los valores nominales presentaron las constantes encontradas, alcanzando un 110% $-c_{1111}$ y un 134% e_{3111} . Las constantes encontradas por todos los casos se muestran en la Tabla 20.

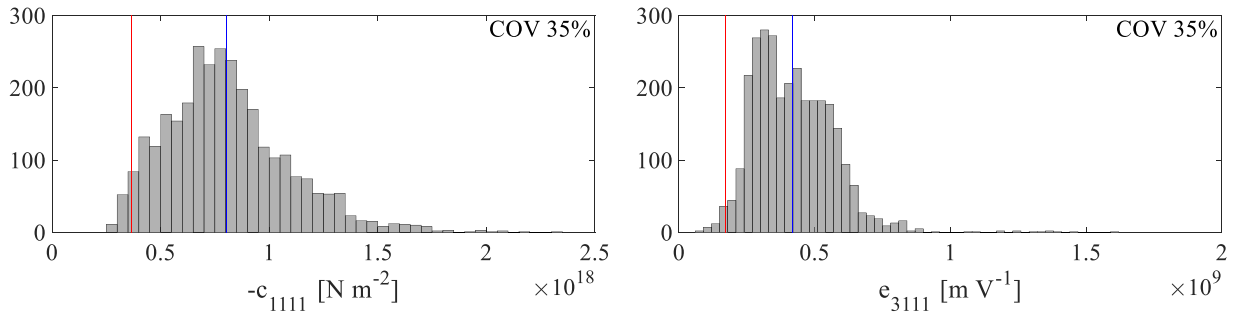


Figura 13. Constantes electromecánicas no lineales encontradas usando los datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

Tabla 20. Propagación de incertidumbres a las propiedades electromecánicas no lineales, usando distintos sets de datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido. Se muestra mediana y coeficiente de variación.

		M_1		M_2		M_3	
$Z =$ [0.56g 0.84g 1.12g 1.4g 1.7g 2g]	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	7.6914E17	35%	-	-	5.7405E17	32%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	4.0343E8	35%	5.5230E7	40%	-	-
$Z = 0.56g$	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	3.3522E17	52%	-	-	3.2020E17	55%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	1.6148E8	71%	2.7336E8	57%	-	-
$Z = 2g$	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	1.6865E17	34%	-	-	1.7895E17	35%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	1.2412E8	39%	1.3902E8	44%	-	-
$Z = [0.56g$ $2g]$	$-c_{1111}$ [N m ⁻²]	6.2144E17	35%	-	-	5.0445E17	39%
	e_{3111} [m V ⁻¹]	2.9148E8	43%	1.3193E8	57%	-	-

6.2 Predicción

El fin último de las muestras encontradas es brindar una predicción que se ajuste a los datos experimentales, de esta forma, es directo usar la ecuación (2.36) evaluando las muestras en las ecuaciones (2.20) – (2.24), de manera de propagar sus incertidumbres en la predicción según sea el caso.

Dado que se tienen 3000 muestras de cada parámetro en θ , por cada frecuencia y amplitud de excitación evaluada se tendrán 3000 valores de predicción, lo que en la práctica es muy costoso y engorroso de graficar. Dado lo anterior, se opta por graficar con línea continua el promedio

encontrado de la predicción junto con una banda de dispersión en línea punteada que representa ± 1 desviación estándar ($\pm \sigma$).

6.2.1 Amplitud de Oscilación

La predicción hecha por las 3000 muestras de los parámetros usando todos los datos disponibles de amplitud de oscilación se muestra en la Figura 14. Se puede notar una estrecha banda de dispersión ($\pm \sigma$) en torno al promedio de la predicción, que se ajusta de buena manera a todos los datos experimentales usados. Lo anterior se dio tanto para los datos de bajo nivel de excitación ($Z = 0.56g$) que representan el comportamiento lineal del recolector, como para los datos de mayor nivel de excitación ($Z = 2g$), que representan el comportamiento no lineal del recolector.

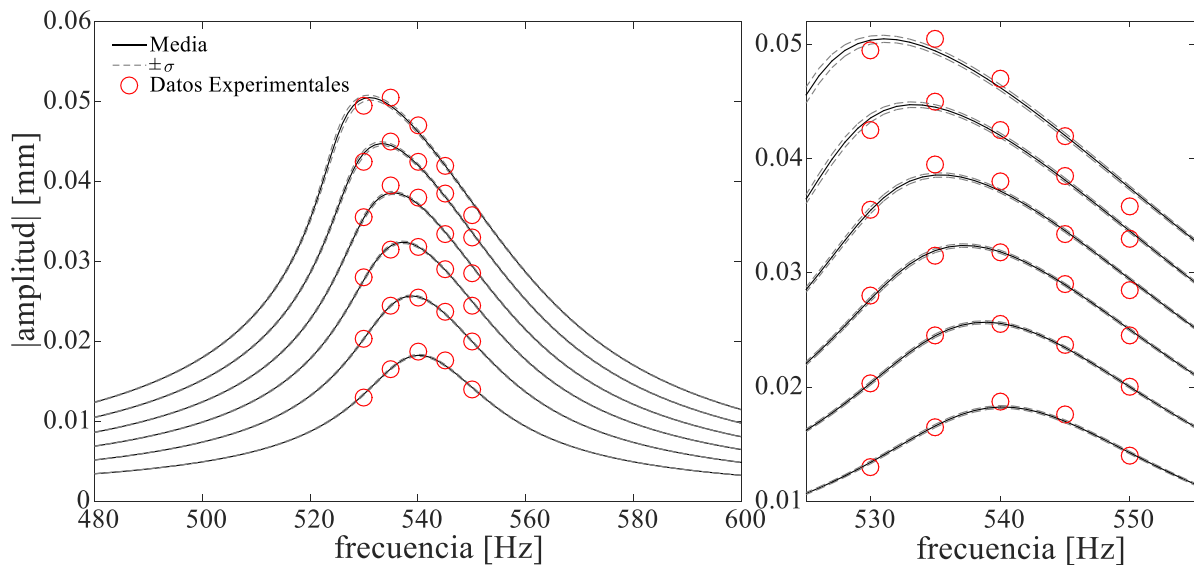


Figura 14. Predicción hecha por las muestras usando todos los datos disponibles de amplitud de oscilación.

La estrecha banda de dispersión obtenida, no se condice con las altas dispersiones obtenidas por algunos parámetros en la primera actualización, en donde por ejemplo ρ_s y E_s obtuvieron un 62% y 52% de coeficiente de variación, respectivamente. De esta forma, la estrecha banda es explicada por las fuertes correlaciones encontradas entre pares de parámetros, que son las mostradas en la Figura 6. Así, las incertidumbres presentes de algunos parámetros se esfuman al propagarlas a la predicción, debido a las altas correlaciones presentes.

Al revisar los demás modelos propuestos anteriormente, se obtienen las curvas de predicción que se muestran en la Figura 15. Se puede ver como el modelo 2 y 4 no son capaces de corresponder los datos experimentales, lo que sí es logrado con el modelo uno y tres. Justamente, estos modelos fueron los más probables de ser los adecuados en la segunda actualización Bayesiana, obteniendo un 45% y 55%, respectivamente. Prácticamente, ambos modelos conducen a la misma predicción

de amplitud de oscilación del recolector, pero hay que recalcar que el modelo tres posee un grado de complejidad menos debido a que no utiliza el parámetro electromecánico no lineal j .

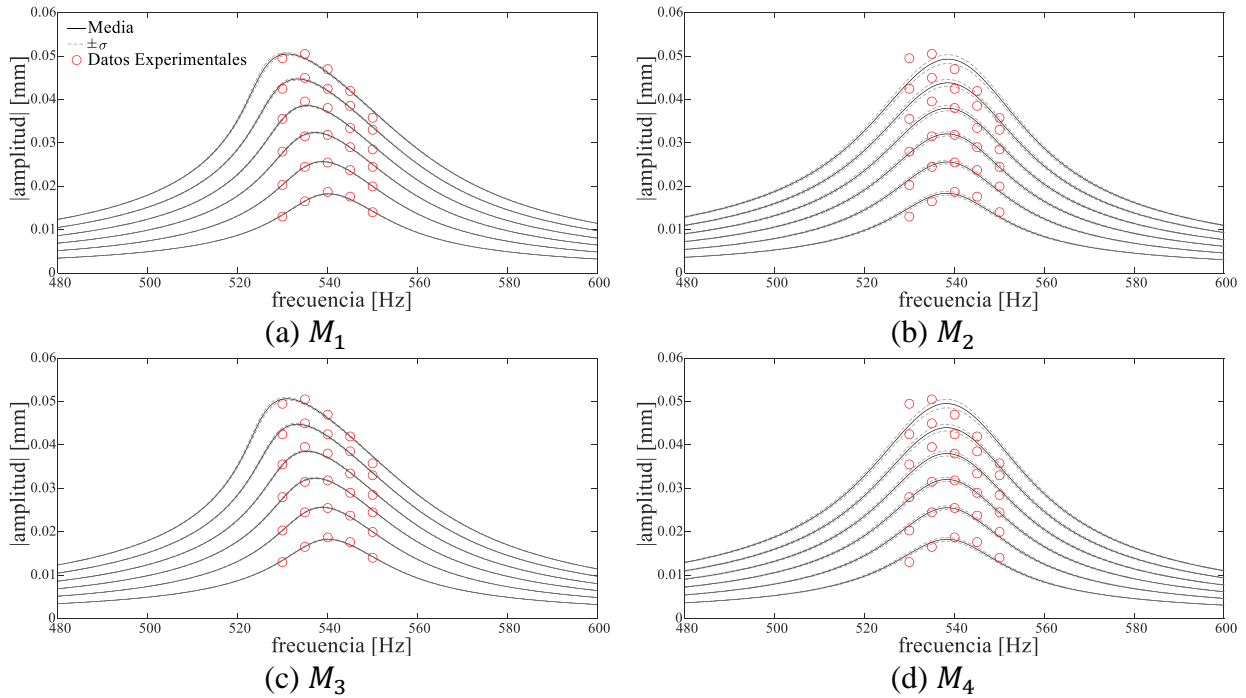
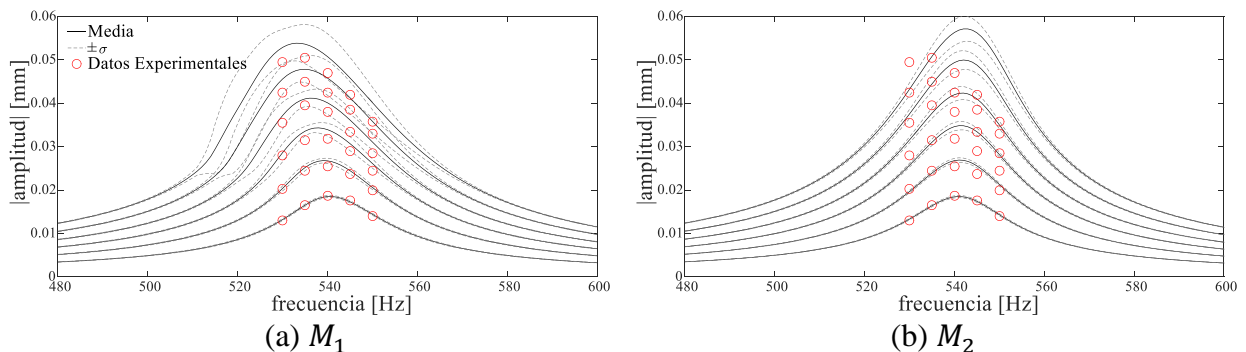


Figura 15. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos de amplitud de oscilación.

Las curvas de predicción, esta vez hechas por las muestras obtenidas usando los datos de menor nivel de excitación ($Z = 0.56g$), son las mostradas en la Figura 16. Prácticamente, todos los modelos fueron capaces de ajustarse a los datos usados, sin embargo, no fueron capaces de lograr predecir las curvas superiores. Por ejemplo, la predicción hecha por el modelo uno para $Z = 0.56g$, se ajusta de buena manera a los datos experimentales de $Z = 0.56g$ y $Z = 0.84g$ (primera y segunda curva desde abajo hacia arriba, respectivamente), no obstante, desde $1.12g$ (tercera curva desde abajo hacia arriba) la predicción carece de exactitud y posee una ancha banda de dispersión. Esto debido a que los parámetros θ de los modelos, fueron ajustados usando datos experimentales con un comportamiento particular del recolector (comportamiento lineal en este caso), lo cual provoca que predigan de forma deficiente otro tipo de comportamiento presente.



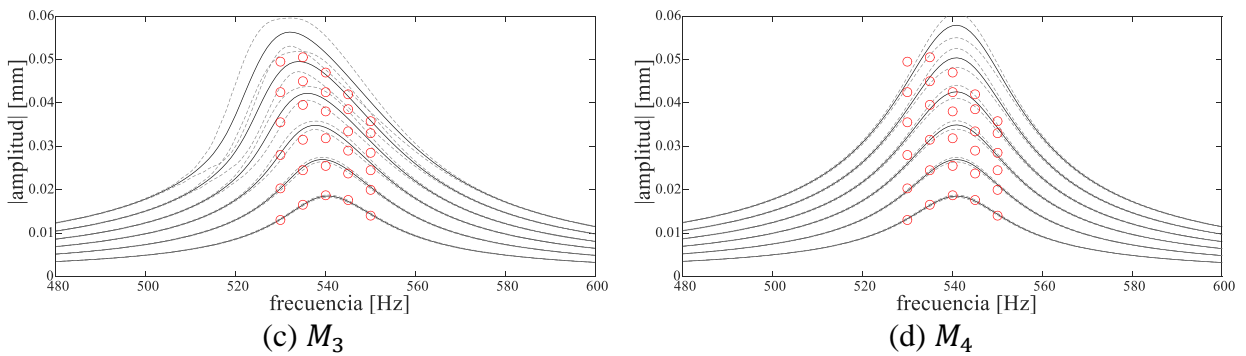


Figura 16. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = 0.56g$.

Por otra parte, al usar las muestras obtenidas mediante los datos experimentales de mayor nivel de excitación ($Z = 2g$), las predicciones de los 4 modelos revisados son las mostradas en la Figura 17. Al igual que en el caso anterior, se da el comportamiento de que las predicciones hecha por los modelos son capaces de ajustarse a los datos experimentales usados (curva superior), mas no son capaces de predecir los datos experimentales de las curvas inferiores. Nuevamente, esto se da por las razones del caso anterior.

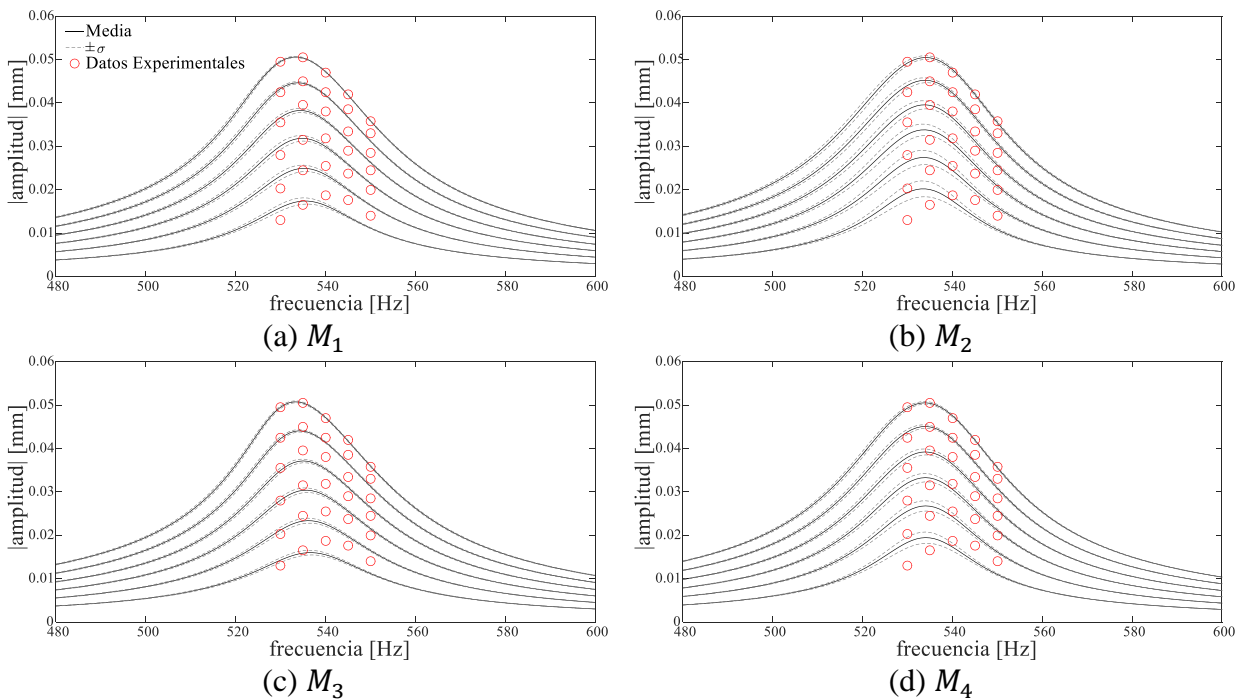


Figura 17. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = 2g$.

Por último, al usar las muestras actualizadas de θ con los datos experimentales de menor y mayor nivel de excitación ($Z = [0.56g \ 2g]$), se obtienen las predicciones de la Figura 18. En primer lugar, se puede notar que los modelos que mejor se ajustan a los datos son el modelo uno y tres, lo cual

se relaciona con los resultados de la segunda actualización, en donde el modelo uno obtuvo 54% y el modelo tres 46%, dejando nulos a los demás modelos.

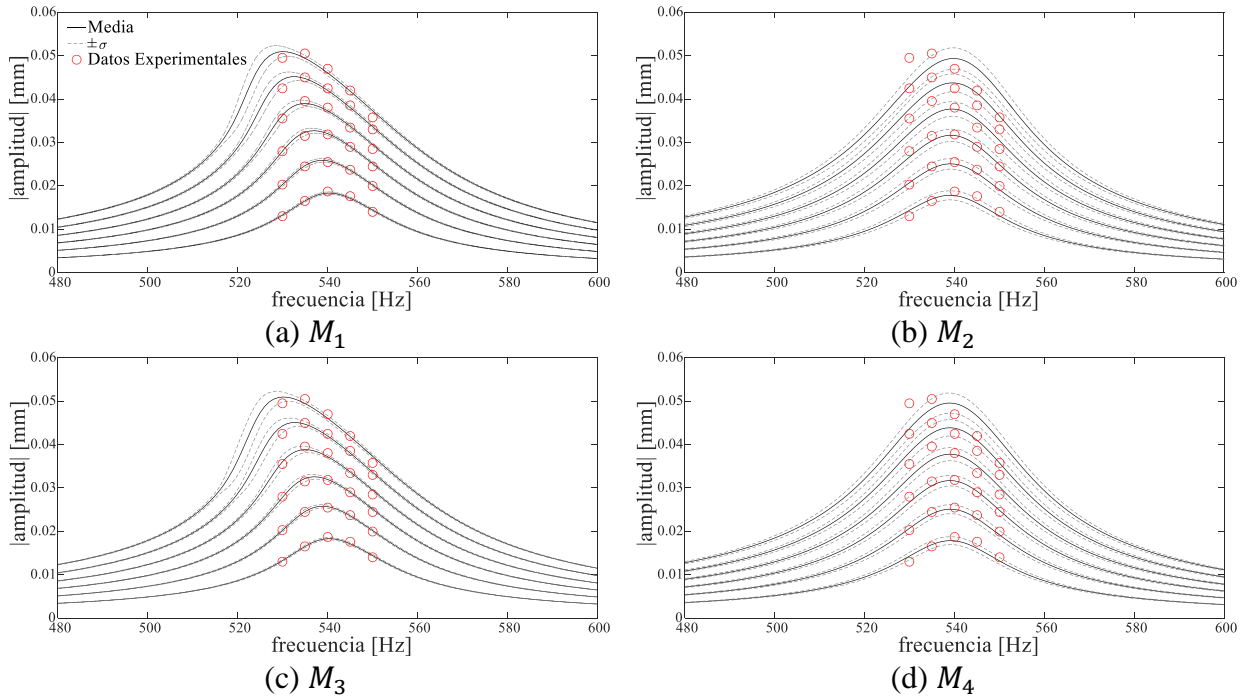


Figura 18. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = [0.56g \ 2g]$.

Además de lograr predecir de buena manera los datos de menor y mayor nivel de excitación, se puede notar que el modelo uno y tres son capaces de predecir los datos de las excitaciones intermedias ($Z = [0.84g \ 1.12g \ 1.4g \ 1.7g]$) obteniendo prácticamente el mismo ajuste. Esto debido a que los parámetros actualizados de estos modelos fueron capaces de recoger el comportamiento lineal y no lineal del recolector, logrando no solo ajustarse a estos datos, sino que también conseguir ajustarse a la transición entre ambos comportamientos. Sin perjuicio de lo anterior, hay que advertir que se obtiene una dispersión mayor que al usar todos los datos disponibles de amplitud de oscilación (Figura 15), lo cual es coherente por la diferencia de datos experimentales usados.

6.2.2 Voltaje Emitido

La recolección de energía por parte del recolector es posible debido a la emisión de voltaje por parte de las capas de material piezoeléctrico. De esta forma, es importante que las predicciones de voltaje emitido por el recolector obedezcan de buena manera a los datos experimentales, con el fin de realizar una sintonización correcta del recolector a ambientes vibratorios.

En la Figura 19, se muestran las curvas de predicción hechas por las muestras actualizadas usando todos los datos de voltaje emitido. Una estrecha banda de dispersión se da en todas las curvas de

distinto nivel de excitación, que corresponden de buena manera a los datos experimentales. Nuevamente, las altas dispersiones que presentaron algunos parámetros en la primera actualización, por ejemplo ρ_s (53%) y E_s (45%), no se ven reflejadas en la estrecha banda de dispersión de la predicción. Esto debido a las fuertes correlaciones encontradas, mostradas en la Figura 8, que juegan un rol importante al realizar la predicción.

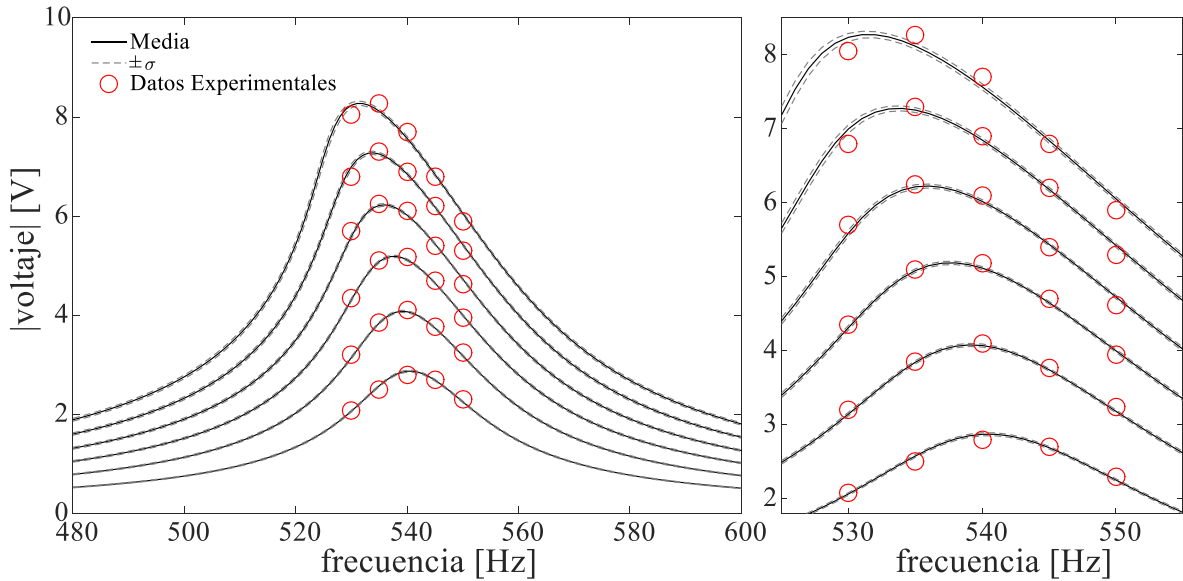
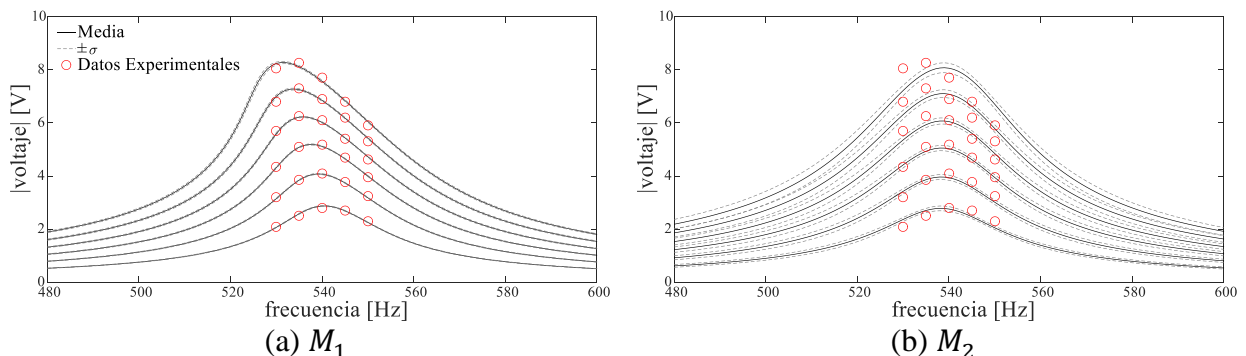


Figura 19. Predicción hecha por las muestras usando todos los datos disponibles de voltaje emitido.

Al revisar las predicciones hechas por los demás modelos, se obtienen las curvas mostradas en la Figura 20. Los modelos dos y cuatro no lograron ajustarse de buena manera a los datos experimentales, lo que es corroborado por sus mayores \mathcal{S}_e registrados (Tabla 12). El modelo uno y tres obtuvieron prácticamente el mismo ajuste a los datos, siendo el modelo tres el que obtuvo la mayor probabilidad de ser el adecuado (81%). Esta mayor probabilidad se debe a la menor complejidad que presenta el modelo para realizar la predicción, al no contar con j entre sus parámetros θ . Así, el modelo tres es capaz de llegar a la misma precisión usando menos parámetros en su predicción, lo que en la práctica es útil debido a lo costoso que puede implicar encontrar una constante electromecánica no lineal con precisión.



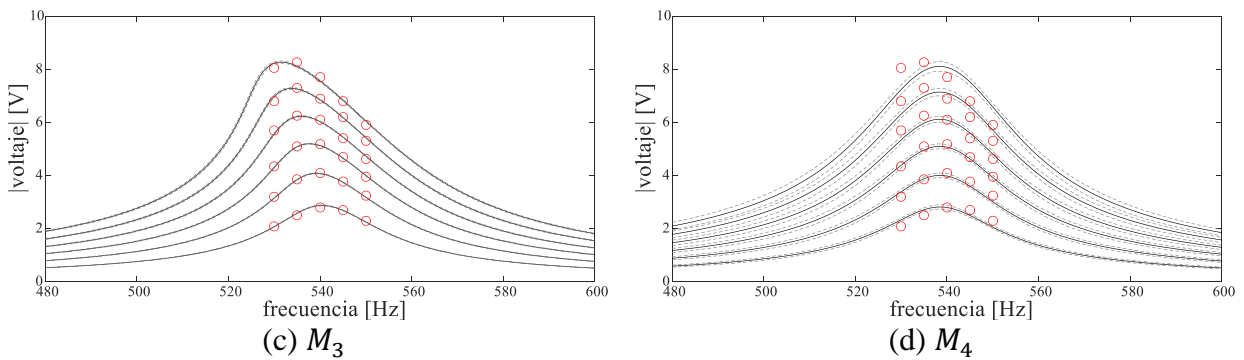


Figura 20. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos de voltaje emitido.

Las predicciones de las muestras obtenidas mediante los datos de menor nivel de excitación ($Z = 0.56g$) son las mostradas en la Figura 21. Todos los modelos fueron capaces de predecir los datos de menor nivel de excitación, sin embargo, esto no sucedió para las curvas superiores. De esta forma, el uso de estos datos para actualizar parámetros no es suficiente para atrapar el comportamiento no lineal del recolector.

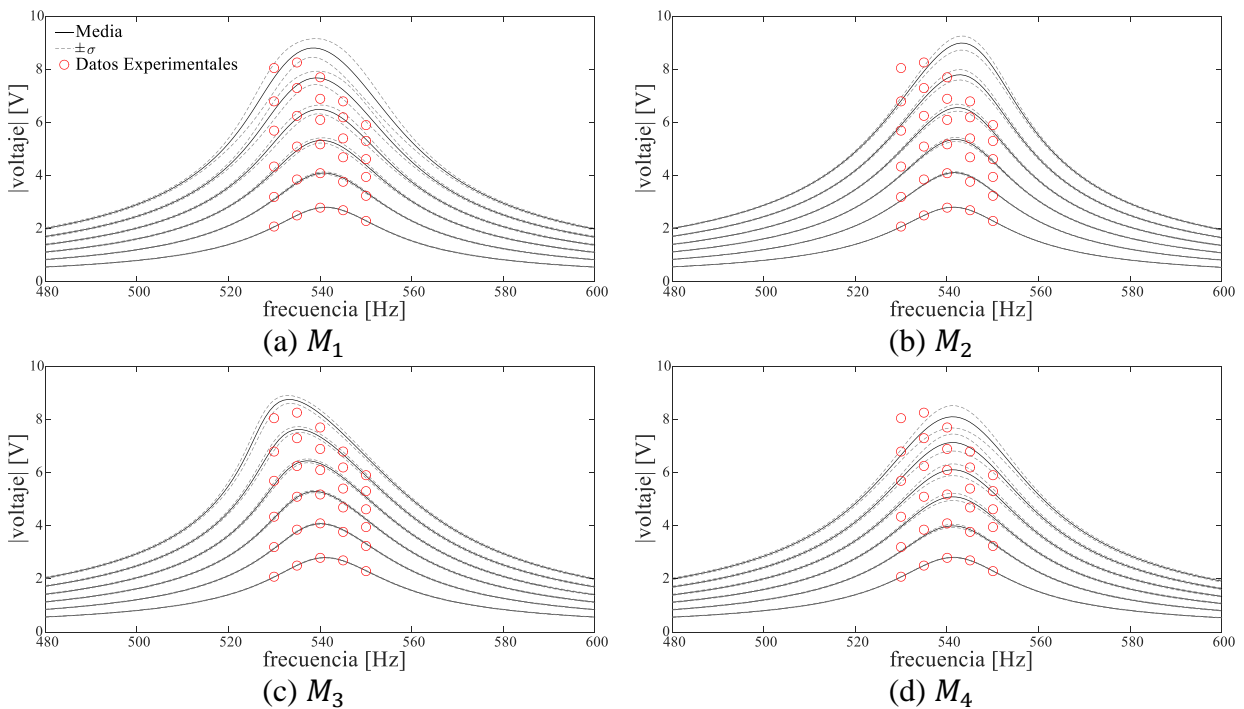


Figura 21. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de voltaje emitido con $Z = 0.56g$.

Algo similar a lo descrito en el párrafo anterior, ocurre al realizar la predicción esta vez usando las muestras encontradas con los datos de mayor nivel de excitación ($Z = 2g$). Las predicciones se muestran en la Figura 22, en donde se puede notar el buen ajuste a los datos usados (curva superior). Sin embargo, el ajuste comienza a ser deficiente conforme disminuye en el nivel de excitación (curvas inferiores).

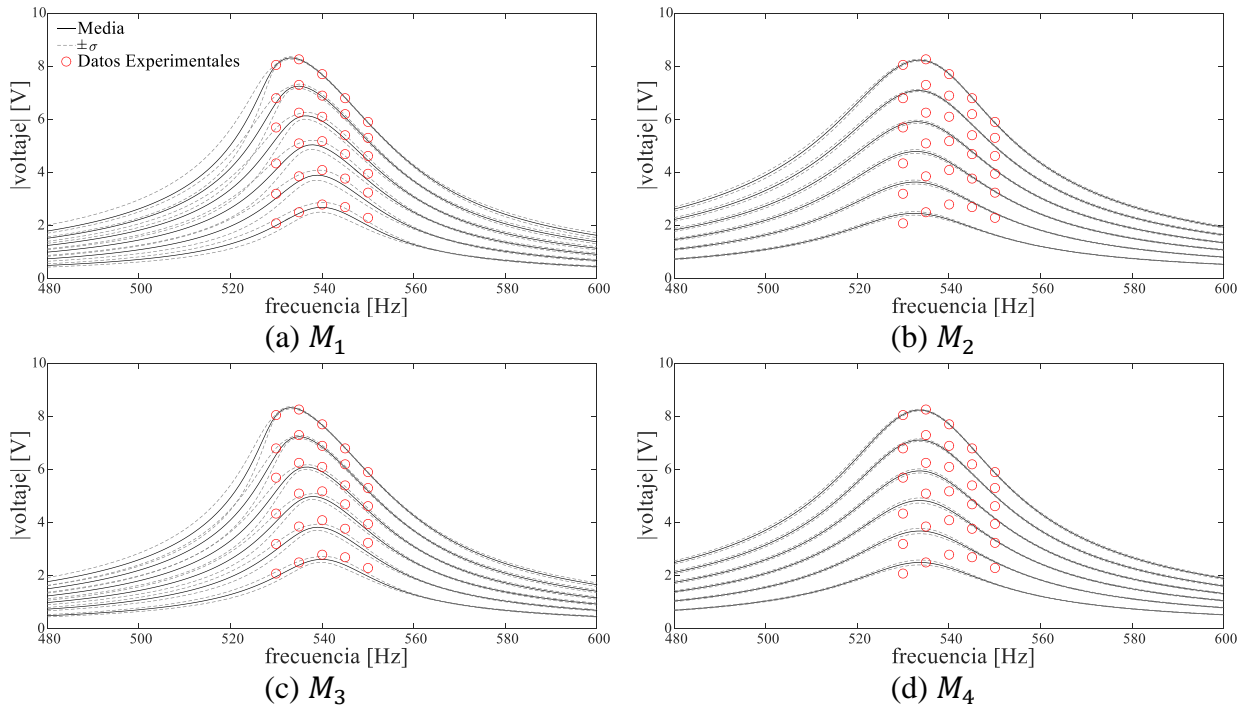
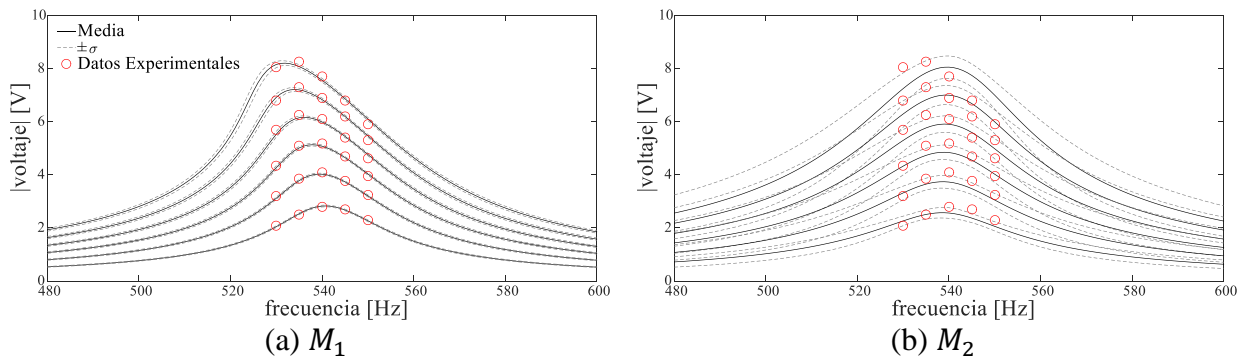


Figura 22. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de voltaje emitido con $Z = 2g$.

Finalmente, las predicciones hechas por las muestras encontradas mediante la curva de menor y mayor nivel de excitación $Z = [0.56g \ 2g]$, son las mostradas en la Figura 23. El modelo dos y cuatro no lograron ajustarse a los datos usados, lo que se condice con su nula probabilidad en la segunda actualización (Tabla 14). Por el contrario, el modelo uno y tres no solo lograron un ajuste adecuado a los datos usados (curva superior e inferior), sino que también lograron ajustarse a los datos intermedios. Se puede notar un ajuste similar entre estas predicciones y las hechas por las muestras encontradas usando todos los datos de excitación (Figura 20), sin embargo, estas poseen una dispersión mayor debido a la menor cantidad de datos experimentales usados. A pesar de esto, la banda sigue siendo estrecha (COV promedio 3%) y la menor cantidad de datos usados es conveniente.



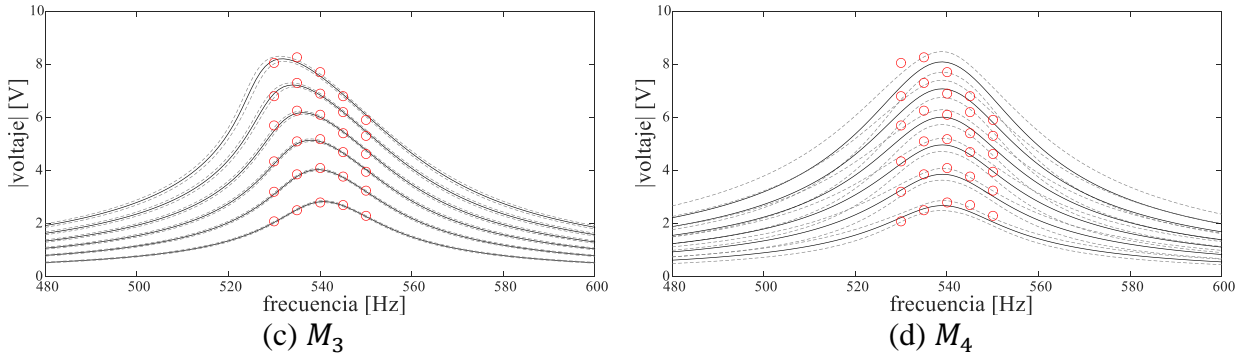


Figura 23. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando datos de voltaje emitido con $Z = [0.56g \ 2g]$.

De esta forma, el modelo uno y tres actualizados bajo datos experimentales con $Z = [0.56g \ 2g]$, logran predecir de buena manera los datos experimentales intermedios, siendo ambos modelos igualmente de probables (Tabla 14). Sin embargo, el modelo tres posee el atractivo de que no posee un parámetro electromecánico no lineal, lo cual lo hace más práctico.

6.2.3 Amplitud de Oscilación y Voltaje Emitido

Por último, las muestras de los parámetros actualizados usando todos los datos experimentales disponibles, predijeron el comportamiento del recolector según lo mostrado en la Figura 24. La predicción logra ajustarse de buena forma a los datos experimentales de amplitud de oscilación y voltaje emitido, con una estrecha banda de dispersión ($\pm \sigma$).

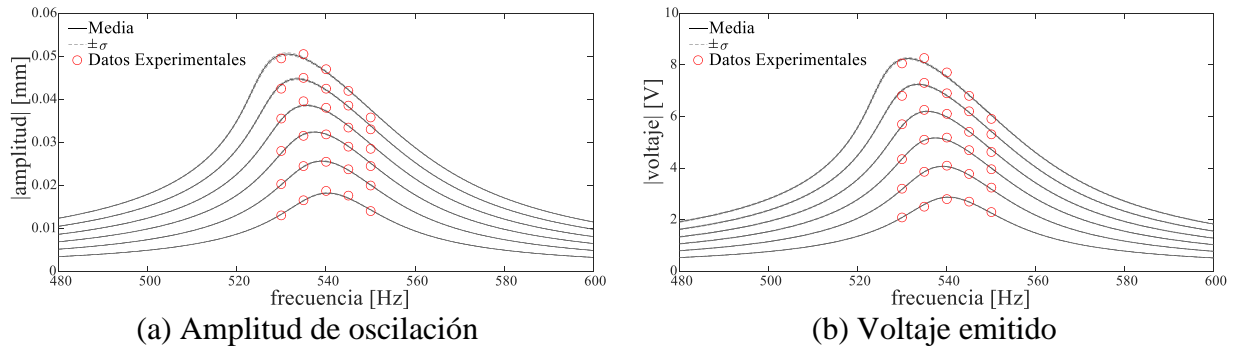
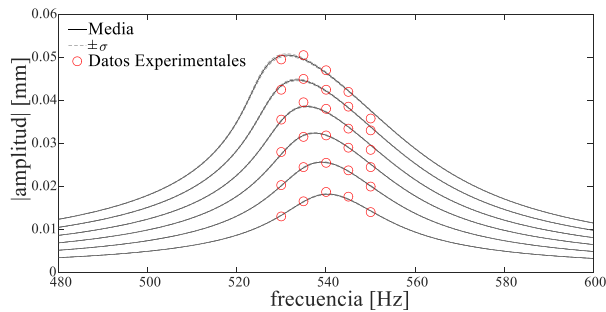


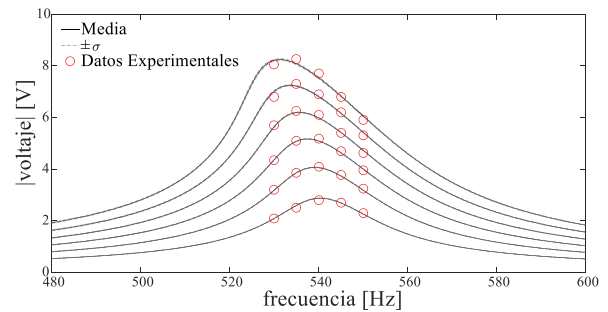
Figura 24. Predicción hecha por las muestras usando todos los datos disponibles.

A pesar de las altas incertidumbres encontradas en algunos parámetros, por ejemplo ρ_s con un coeficiente de variación de 61%, se obtuvo una estrecha banda de dispersión. Esto nuevamente es explicado por las fuertes correlaciones encontradas entre pares de parámetros, que son las mostradas en la Figura 10. La mayor información provista por estas correlaciones conduce a una predicción limitada en una angosta banda de dispersión, que se ajusta fielmente a los datos experimentales.

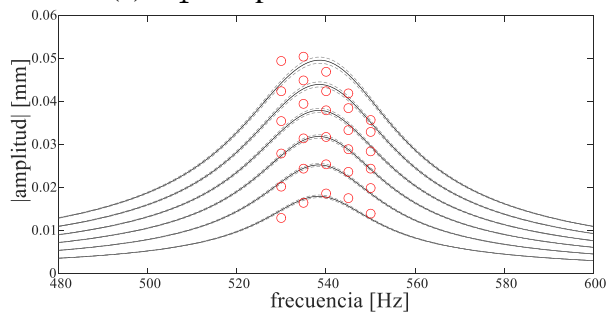
Las predicciones hechas por todos los modelos revisados se muestran en la Figura 25. Tanto para amplitud de oscilación y voltaje emitido, el modelo dos y cuatro no lograron ajustarse de buena manera a los datos experimentales, lo cual concuerda con los resultados de la segunda actualización, en donde estos modelos obtuvieron nula probabilidad de ser los adecuados. El modelo tres obtuvo un ajuste similar al modelo uno, sin embargo, este último modelo alcanzó un 97% de ser el adecuado (Tabla 16) debido a los menores errores σ_a y σ_v reportados (Tabla 15).



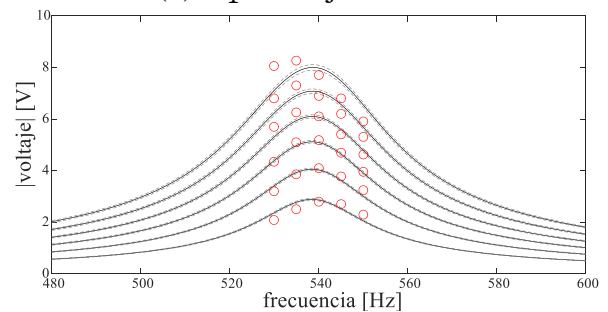
(a) M_1 . Amplitud de oscilación



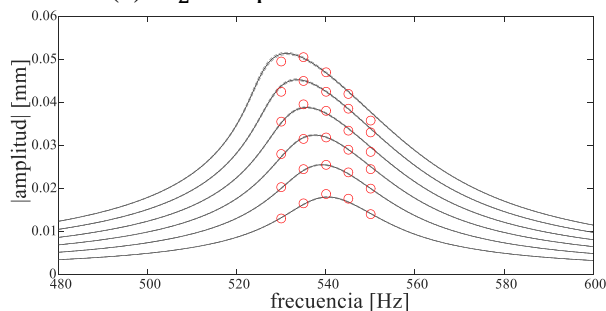
(b) M_1 . Voltaje emitido



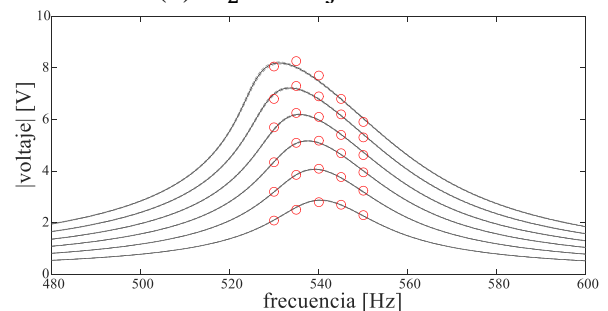
(c) M_2 . Amplitud de oscilación



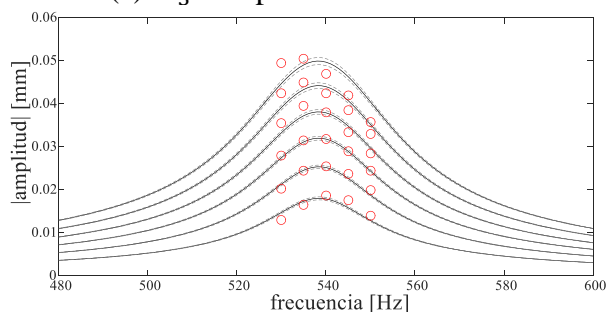
(d) M_2 . Voltaje emitido



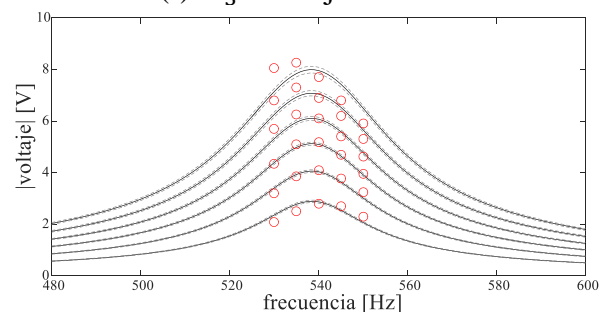
(e) M_3 . Amplitud de oscilación



(f) M_3 . Voltaje emitido



(g) M_4 . Amplitud de oscilación



(h) M_4 . Voltaje emitido

Figura 25. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos disponibles.

Los resultados de las predicciones hechas por los 4 modelos revisados usando parámetros obtenidos con distintos sets de datos, se encuentran en el Anexo G. Ya sea usando los datos con nivel de excitación $Z = 0.56g$ o $Z = 2g$ para actualizar los parámetros, las muestras solo logran predecir de buena manera los datos utilizados en la actualización y carecen de exactitud a medida que se alejan del nivel de excitación. Esto ocurrió para todos los modelos revisados, siendo algunos capaces solo de predecir los datos de nivel de excitación contiguos.

Por el contrario, las predicciones hechas por el modelo uno y tres usando las muestras obtenidas mediante los datos con nivel excitación $Z = [0.56g \ 2g]$ (Figura 37 (a), (b), (e) y (f)), lograron ajustarse en buena medida a las curvas de nivel de excitación intermedias, tanto para amplitud de oscilación y voltaje emitido. Se nota un ajuste similar al mostrado en la Figura 24, solo difiriendo en una banda de dispersión más ancha. Los resultados de la segunda actualización arrojaron resultados similares que al usar todos los datos experimentales; el modelo uno obtuvo un 94% por el 6% del modelo tres (Tabla 17). De esta forma, el modelo uno con solo los datos de niveles de excitación extremos disponibles $Z = [0.56g \ 2g]$, logra recoger el comportamiento lineal y no lineal del recolector, prediciendo de buena manera los niveles de excitación intermedios, pero con una banda de dispersión mayor, lo que es de utilidad dependiendo del nivel de precisión que se requiera.

Capítulo 7

Conclusión

En el presente trabajo, se aplicó la metodología Bayesiana a recolectores de energía piezoeléctricos con el fin de identificar propiedades electromecánicas no lineales, usando datos experimentales disponibles de amplitud de oscilación y voltaje emitido por el recolector. Esto se realizó desmarcándose del carácter determinista usual para sintonizar modelos, incorporando el aspecto probabilístico necesario para atrapar las incertidumbres presentes en parámetros geométricos y físicos del recolector.

Debido al comportamiento dispar del recolector dependiendo del nivel de excitación, el modelo revisado fue un modelo electromecánico no lineal que se encuentra en la literatura. A cada parámetro del modelo se le asignó una distribución de probabilidad inicial, la cual fue actualizada mediante distintos sets de datos experimentales. Mediante el método *Transitional Markov Chain Monte Carlo* (TMCMC), se obtuvieron muestras que siguen la densidad de probabilidad actualizada, con lo que se pudo conocer en detalle su naturaleza.

A partir de las muestras obtenidas de los parámetros, se obtuvieron histogramas junto con sus estadísticas, encontrándose altas variaciones en algunos casos. En efecto, algunos parámetros incrementaron su dispersión inicial, alcanzando valores de 62% de coeficiente de variación. Además, se notó que pares de parámetros están correlacionados, siendo las más fuertes y numerosas las encontradas mediante datos experimentales de voltaje emitido. Por otra parte, dado el aspecto inusual de algunos de los histogramas obtenidos, se constató que las aproximaciones puntuales (“*point estimates*”) hubieran conducido a resultados deficientes debido a las fuertes suposiciones que considera.

Además de lo anterior, se consideraron 3 modelos adicionales a actualizar, que fueron submodelos menos complejos que el modelo no lineal principal, al no considerar parámetros electromecánicos no lineales (\mathcal{A} y j) para predecir el comportamiento del recolector. Con la totalidad de estos 4 modelos se realizó una segunda actualización Bayesiana, la cual reporta que modelo es más probable que sea el adecuado ante datos experimentales, compensando exactitud y complejidad del modelo. Dependiendo de los datos experimentales usados, se llegó a resultados disímiles: por un lado, al usar los datos de amplitud de oscilación, se llegó a que los modelos uno y tres poseen probabilidades similares de ser los adecuados, dejando nulos al modelo dos y cuatro; al usar datos de voltaje emitido, el modelo tres fue el mejor posicionado con un 81%; y al usar datos de amplitud y voltaje (todos los datos experimentales disponibles) el modelo uno es el seleccionado con un 97%.

Lo mencionado en el párrafo anterior, se vio corroborado al ver las predicciones hechas por los distintos modelos y contrastarlas con los datos experimentales. Los modelos con 0% de

probabilidad no lograron ajustarse de buena manera, mientras que los nombrados en el párrafo anterior, sí. Además, se revisó si actualizando los parámetros con datos experimentales de menor y/o mayor nivel de excitación era posible predecir los demás datos con distinto nivel de excitación. Usando solo los datos de un nivel de excitación extremo ($Z = 0.56g$ o $Z = 2g$) no se lograron predecir los demás datos, solo parcialmente los de nivel de excitación aledaño. Por otra parte, al usar ambos sets de datos ($Z = [0.56g \ 2g]$) se pudo predecir de buena manera los datos restantes, logrando la transición desde el comportamiento lineal al no lineal del recolector.

Dado el hecho de que los modelos dos y cuatro obtuvieron nula probabilidad al usar datos con todos los niveles de excitación disponibles (ya sean de amplitud, voltaje o ambos), se desprende que el parámetro electromecánico no lineal a juega un rol importante en el modelo y es imprescindible para realizar predicciones correctas. No así con el parámetro electromecánico no lineal j , excluido en el modelo tres, el cual si tuvo probabilidad considerable e incluso fue el mejor posicionado en el caso de voltaje emitido, por lo que parece ser prescindible para realizar predicciones de esta variable.

Debido a que la función del recolector es justamente esa, recolectar energía, predecir y medir amplitud de oscilación es irrelevante y costoso de determinar. No así con el voltaje emitido por el recolector, que es la magnitud por la cual se hace posible la recolección de energía, por lo que los esfuerzos deben estar enfocados en predecir esta variable. En el presente trabajo, se lograron predecir de buena manera los datos de voltaje, en donde el modelo tres fue el mejor posicionado en la segunda actualización Bayesiana. Este modelo, con un nivel de complejidad menor que el modelo principal, logró el mismo nivel de precisión, lo cual es atractivo en el sentido práctico. Por otra parte, para predecir amplitud de oscilación y voltaje emitido por el recolector a la vez, el modelo seleccionado es el modelo principal, lo que es coherente con el hecho de que para predecir ambas magnitudes es necesario atrapar toda la física presente en el sistema, con lo que todos los parámetros del modelo son relevantes.

Por último, se lograron identificar propiedades electromecánicas no lineales de recolectores de energía piezoeléctricos, tales como c_{1111} y e_{3111} , obteniendo sus histogramas y valores estadísticos dependiendo del caso, lo cual era uno de los objetivos del presente trabajo.

Bibliografía

- [1] Erturk A., Inman. D. J., “A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters,” *Journal of Vibration and Acoustics*. vol. 130. 2008.
- [2] De Marqui Jr. C., Erturk. A. e Inman. D. J., “An Electromechanical Finite Element Model for Piezoelectric Energy Harvester Plates,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 327, 2009.
- [3] Stanton S. C., Erturk A., Mann B. P. e Inman D. J., “Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification,” *Journal of Applied Physics*, vol. 108, 2010.
- [4] Beck J. L. y Katafygiotis L. S., “Updating models and their uncertainties. i: Bayesian statistical framework,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 124, 1998.
- [5] Papadimitriou C., Beck J. L., y Katafygiotis L. S., “Updating robust reliability using structural test data,” *Probabilistic Eng. Mech.*, vol. 16, 2001.
- [6] Beck J. L. y Taflanidis A. A., “Prior and posterior robust stochastic predictions for dynamical systems using probability logic,” *International Journal for Uncertainty Quantification*. vol. 3, 2013.
- [7] Ching J., Chen Y.-C., “Transitional Markov chain Monte Carlo method for Bayesian model updating, model class selection, and model averaging,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 133, 2007.
- [8] Betz W., Papaioannou I., Straub D., “Transitional markov chain monte carlo: observations and improvements,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 142, 2016.
- [9] Lutes L. D., “Stochastic analysis of structural and mechanical vibrations,” Prentice Hall, 1997.
- [10] Beck J. L., “Bayesian system identification based on probability logic,” *Structure Control Health Monitoring*, vol. 17, 2010.
- [11] Ruiz R. O. y Meruane V., “Uncertainties propagation and global sensitivity analysis of the frequency response function of piezoelectric energy harvesters,” *Smart Materials and Structures*, vol. 26, 2017.

Anexos

Anexo A

$$EI = EI_s + \frac{1}{6} c_{11} b h_p (4h_p^2 + 6h_p h_s + 3h_s^2) \quad (\text{A.1})$$

$$G = \frac{3}{20} c_{1111} b h_p (16h_p^4 + 40h_p^3 h_s + 40h_p^2 h_s^2 + 20h_p h_s^3 + 5h_s^4) \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2} e_{31} b (h_s + h_p) \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{\phi} = \frac{3}{4} e_{3111} b (2h_p^3 + 4h_p^2 h_s + 3h_p h_s^2 + h_s^3) \quad (\text{A.4})$$

$$C = \frac{\epsilon_{33} b L}{2h_p} \quad (\text{A.5})$$

Anexo B

$$\omega = \lambda_1 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (\text{B.1})$$

$$\alpha = G \int_0^L \phi_1 \phi_1'' (\phi_1'' \phi_1'''' + 2\phi_1''' \phi_1''') \quad (\text{B.2})$$

$$\theta = \hat{\theta} \phi_1'(L) \quad (\text{B.3})$$

$$\varphi = \hat{\varphi} \int_0^L \phi_1 (\phi_1'' \phi_1'''' + \phi_1''' \phi_1''') dx \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma = m \int_0^L \phi_1 dx \quad (\text{B.5})$$

$$\zeta_a \dot{x} | \dot{x} | \approx \zeta_a \eta \Omega^2 a^2 \sin(\Omega t + \phi_x) \quad (\text{B.6})$$

con:

$$\eta = \frac{8}{3\pi} \quad (\text{B.7})$$

Anexo C

$$m_2 = (\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2\Omega^2\zeta^2 + \frac{\Omega^2\theta^4}{\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)^2} \left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right) + \frac{2\Omega^2\theta^2C(\omega^2 - \Omega^2)}{\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} + \frac{4\zeta\omega\Omega^2\theta^2}{R\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} \quad (\text{C.1})$$

$$m_3 = \frac{16\Omega^3\zeta_a}{3\pi} \left(2\zeta\omega + \frac{\theta^2}{R\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} \right) \quad (\text{C.2})$$

$$m_4 = \frac{64\Omega^4\zeta_a^2}{9\pi^2} + \frac{3\alpha}{2}(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{\Omega^2\theta^3\varphi}{\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)^2} \left(2\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right) + \frac{\Omega^2\theta}{\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} \left(\frac{3\alpha C\theta}{2} + \frac{2\zeta\omega\varphi}{R}\right) + \frac{2\Omega^2C\theta\varphi(\omega^2 - \Omega^2)}{\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} \quad (\text{C.3})$$

$$m_5 = \frac{8\Omega^3\zeta_a\theta\varphi}{3\pi R\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} \quad (\text{C.4})$$

$$m_6 = \frac{9\alpha^2}{16} + \frac{\Omega^2\theta^2\varphi^2}{8\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)^2} \left(11\Omega^2C^2 + \frac{3}{R^2}\right) + \frac{3\Omega^2C\theta^2\varphi^2(\omega^2 - \Omega^2)}{8\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} + \frac{\Omega^2\varphi}{2\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} \left(3\alpha C\theta + \frac{\zeta\omega\varphi}{2R}\right) \quad (\text{C.5})$$

$$m_7 = \frac{\Omega^3\zeta_a\varphi^2}{3\pi R\left(\Omega^2C^2 + \frac{1}{R^2}\right)} \quad (\text{C.6})$$

$$m_8 = \frac{\Omega^2 \theta \varphi^3}{8 \left(\Omega^2 C^2 + \frac{1}{R^2} \right)^2} \left(3\Omega^2 C^2 + \frac{1}{2R^2} \right) + \frac{9\Omega^2 C \alpha \varphi^2}{32 \left(\Omega^2 C^2 + \frac{1}{R^2} \right)} \quad (\text{C.7})$$

$$m_{10} = \frac{\Omega^2 \varphi^4}{256 \left(\Omega^2 C^2 + \frac{1}{R^2} \right)^2} \left(9\Omega^2 C^2 + \frac{1}{R^2} \right) \quad (\text{C.8})$$

Anexo D

El proceso para obtener N_s muestras de $p_{j+1}(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$ es:

Paso 1: Desde las N_s muestras disponibles $\{\boldsymbol{\theta}\}_j$ de la densidad anterior $p_j(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$, el exponente es determinado q_j tal que el coeficiente de variación COV de la cantidad $p_{j+1}(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}) / p_j(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}}) = p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}_{(j)}^p, \hat{\mathbf{U}})^{q_{j+1}-q_j}$ se iguala a un valor fijo, generalmente 100%. Así, los pesos de las muestras son calculados como el cociente de las dos densidades:

$$w_{j+1} = \frac{p_{j+1}(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})}{p_j(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})} = p(\hat{\mathbf{Y}} | \boldsymbol{\theta}_{(j)}^p, \hat{\mathbf{U}})^{q_{j+1}-q_j} \quad (\text{D.1})$$

Con lo que el promedio de los pesos es:

$$\hat{\mathbf{S}}_{j+1} = \frac{1}{N_s} \sum_{p=1}^{N_s} w_{j+1}(\boldsymbol{\theta}_{(j)}^p) \quad (\text{D.2})$$

La media y matriz de covarianza ponderados por los pesos:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{j+1} = \frac{1}{N_s \hat{\mathbf{S}}_{j+1}} \sum_{p=1}^{N_s} [w_{j+1}(\boldsymbol{\theta}_{(j)}^p) \boldsymbol{\theta}_{(j)}^p] \quad (\text{D.3})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{j+1} = \frac{1}{N_s} \sum_{p=1}^{N_s} \left[\frac{w_{j+1}(\boldsymbol{\theta}_{(j)}^p)}{\hat{\mathbf{S}}_{j+1} N_s} (\boldsymbol{\theta}_{(j)}^p - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{j+1})(\boldsymbol{\theta}_{(j)}^p - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{j+1})^T \right] \quad (\text{D.4})$$

Paso 2: Volver a obtener N_s muestras $\{\boldsymbol{\theta}\}_j$ con reemplazo de $\{\boldsymbol{\theta}\}_j$ según sus pesos w_{j+1} . Esto finalmente corresponde a muestras de $p_{j+1}(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{Y}})$. De cada una de estas muestras, iniciar cadenas de Markov independientes, por cada cadena repetir caminatas aleatorias con paso $\beta^2 \boldsymbol{\Sigma}_{j+1}$, en donde β es un factor de escala que se sugiere que sea 0.2. En particular, la caminata aleatoria p-ésima en la cadena c-ésima para la muestra $\boldsymbol{\theta}_{(c)}^p$, se realiza como sigue:

1. Obtener un candidato a muestra $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(c)}^p$ desde una distribución gaussiana centrada en $\boldsymbol{\theta}_{(c)}^{p-1}$ y covarianza $\beta^2 \boldsymbol{\Sigma}_{j+1}$. Obtener una muestra \mathbf{u} de distribución uniforme $[0,1]$.
2. Fijar $\boldsymbol{\theta}_{(c)}^p = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(c)}^p$, si la siguiente condición es satisfecha:

$$\frac{p_{j+1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(c)}^p | \hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathcal{Y}})^{q_j} p(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(c)}^p)}{p_{j+1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(c)}^{p-1} | \hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathcal{Y}})^{q_j} p(\boldsymbol{\theta}_{(c)}^{p-1})} \geq u \quad (\text{D.5})$$

En caso contrario fijar $\boldsymbol{\theta}_{(c)}^p = \boldsymbol{\theta}_{(c)}^{p-1}$. Luego de completar N_s caminatas aleatorias para todas las cadenas, combinar las muestras para obtener $\{\boldsymbol{\theta}\}_{j+1}$ de la densidad intermedia $p_{j+1}(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathcal{Y}})$.

Anexo E

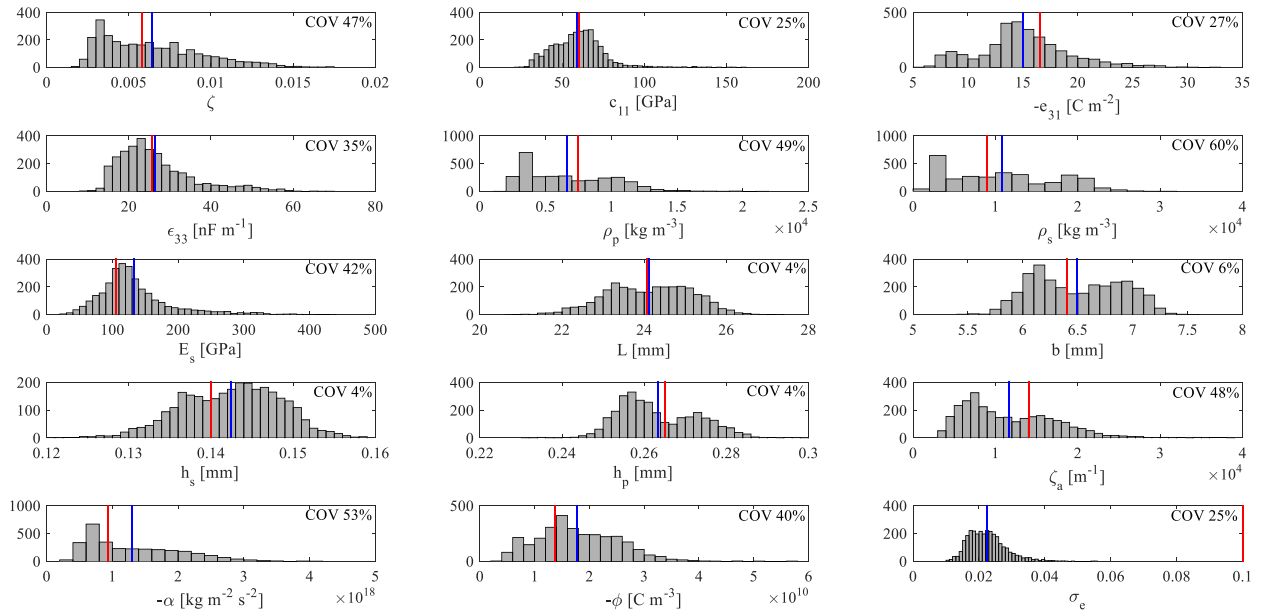


Figura 26. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud con excitación $Z = 0.56g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

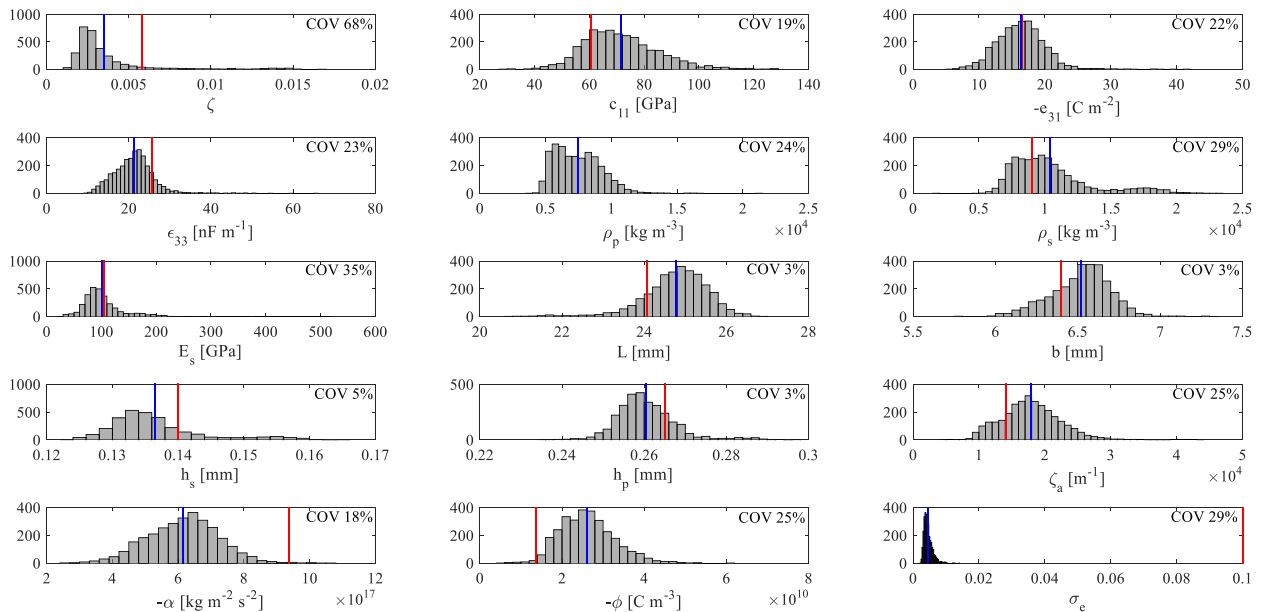


Figura 27. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud con excitación $Z = 2g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

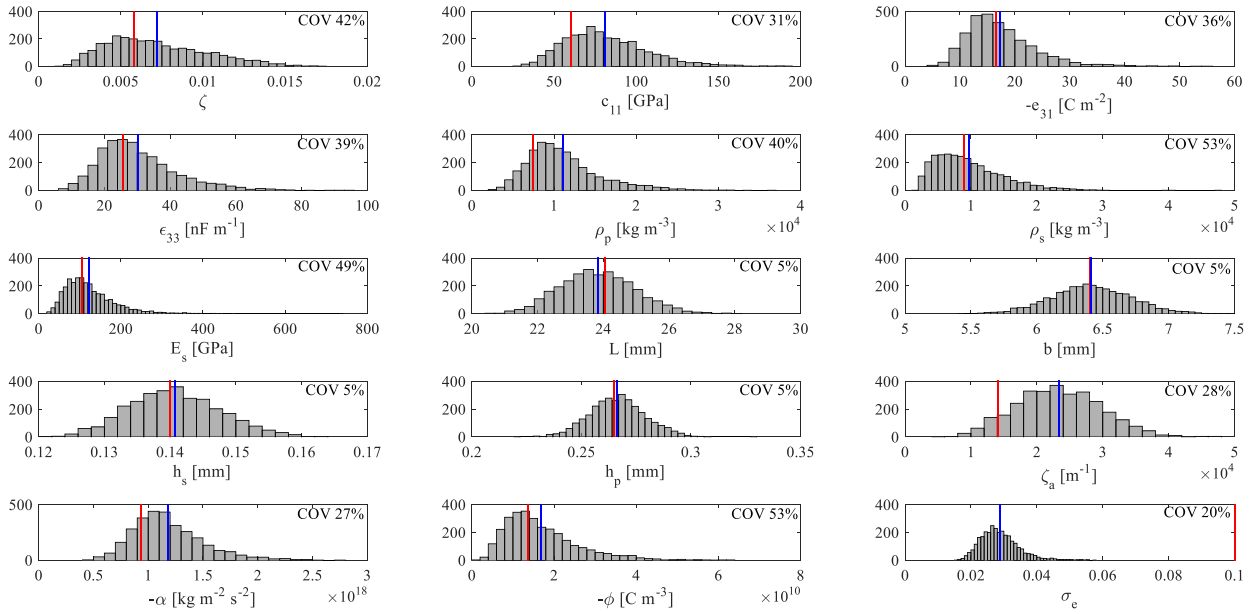


Figura 28. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud con excitación $Z = [0.56g \ 2g]$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

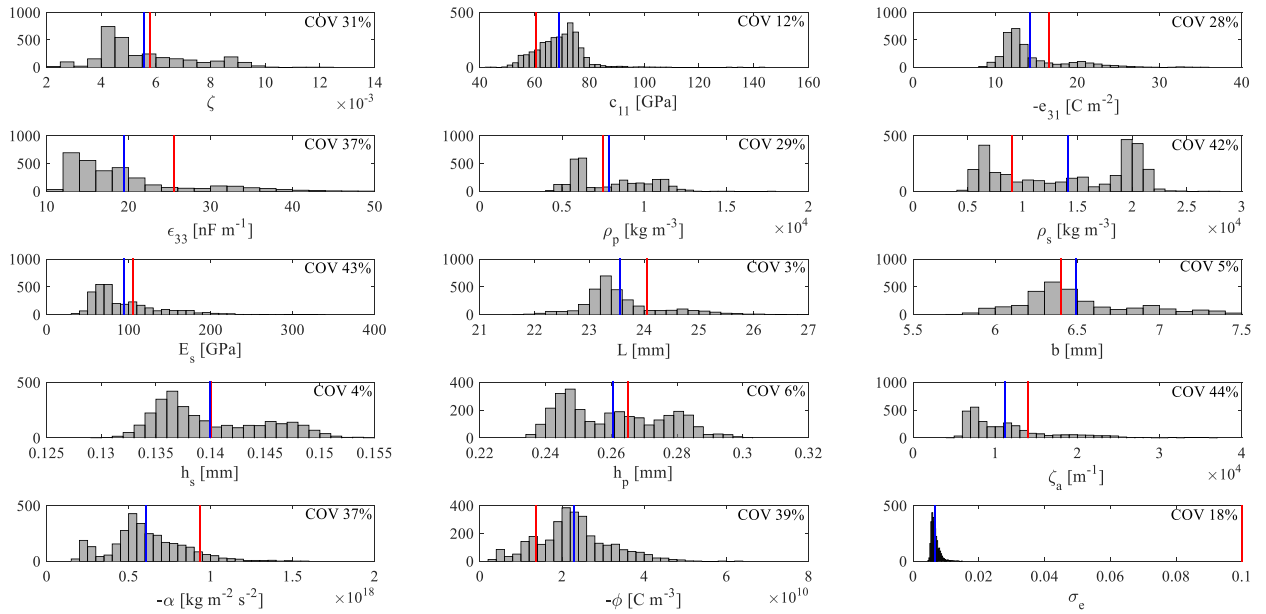


Figura 29. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de voltaje emitido $Z = 0.56g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

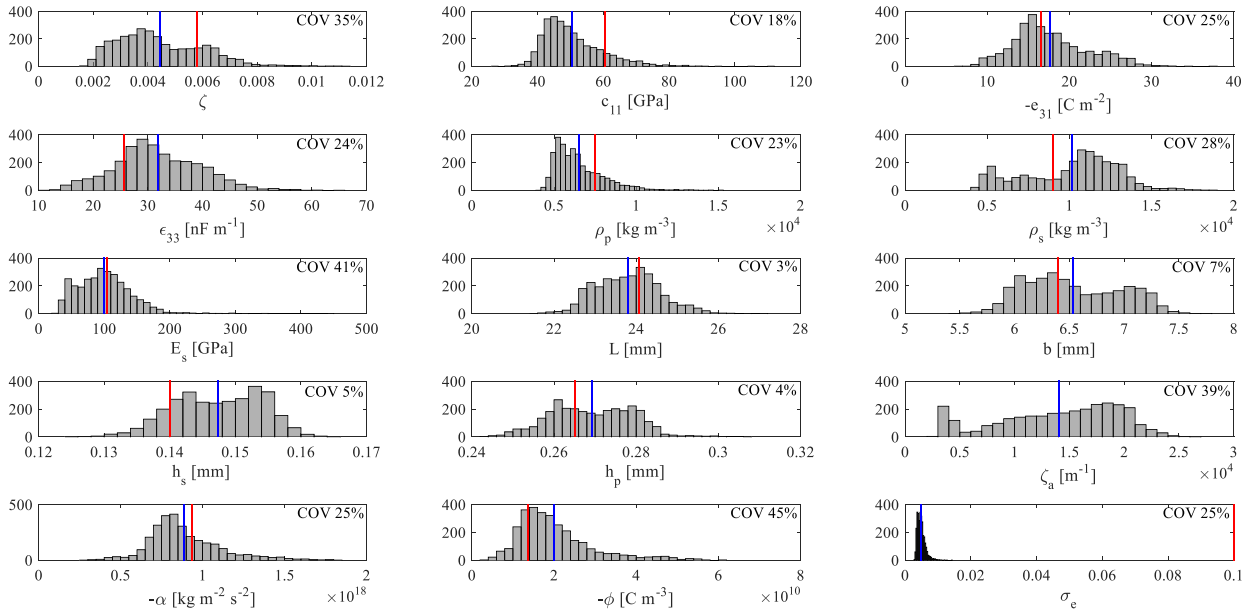


Figura 30. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de voltaje emitido $Z = 2g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

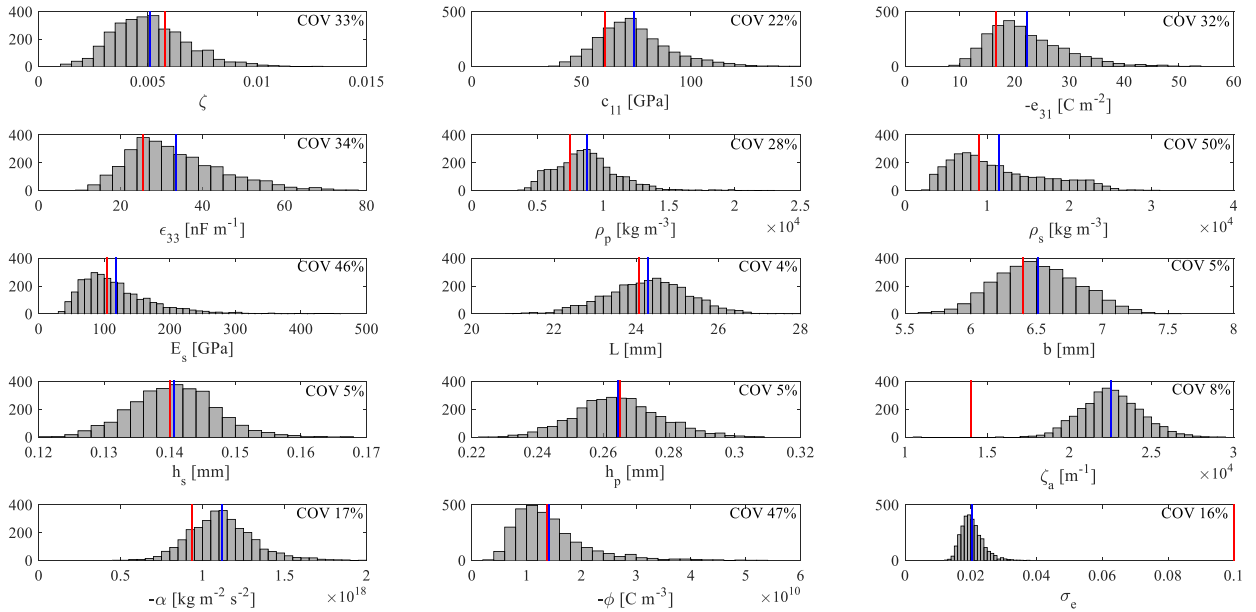


Figura 31. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de voltaje emitido $Z = [0.56g \ 2g]$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

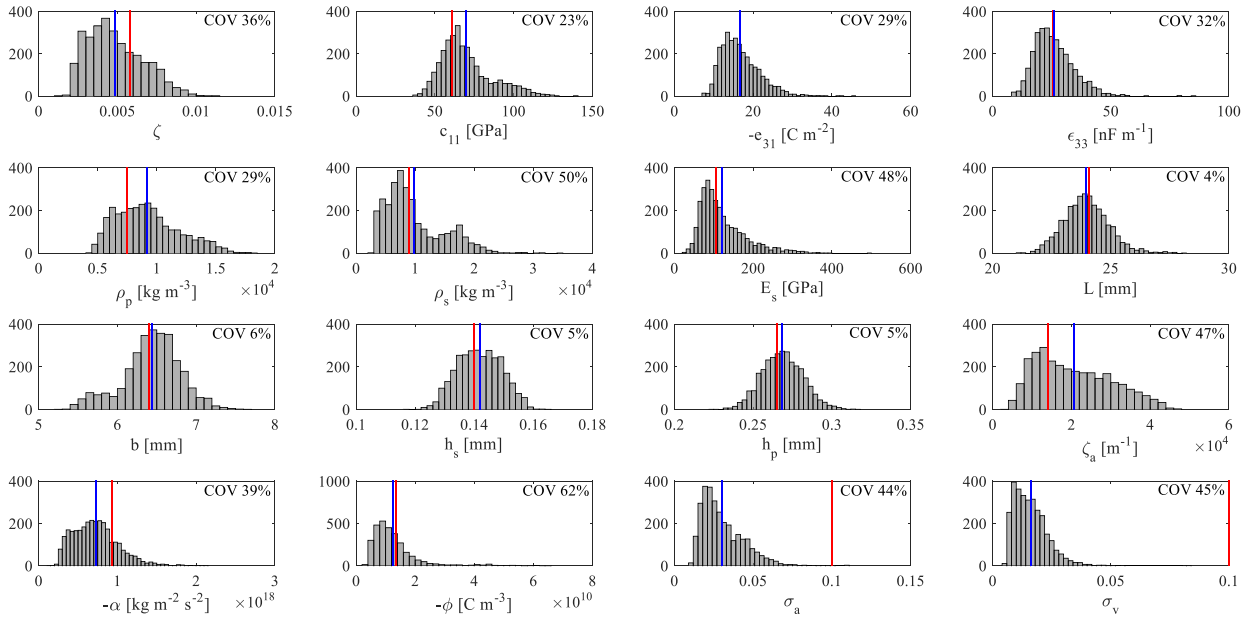


Figura 32. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido $Z = 0.56g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

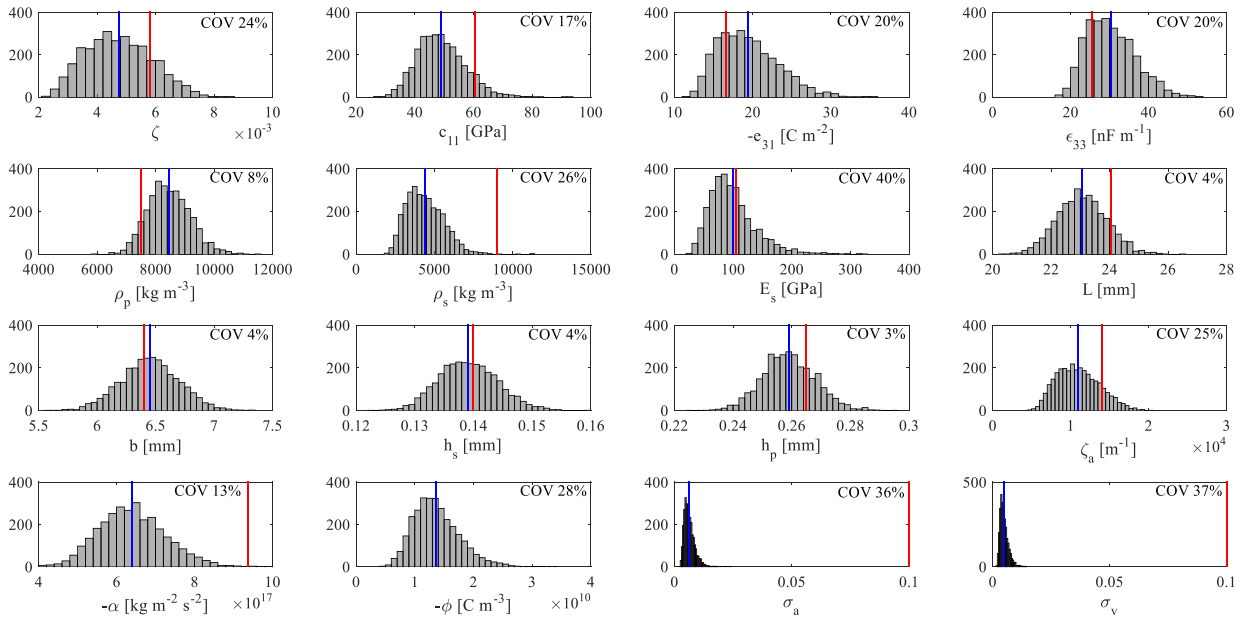


Figura 33. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido $Z = 2g$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

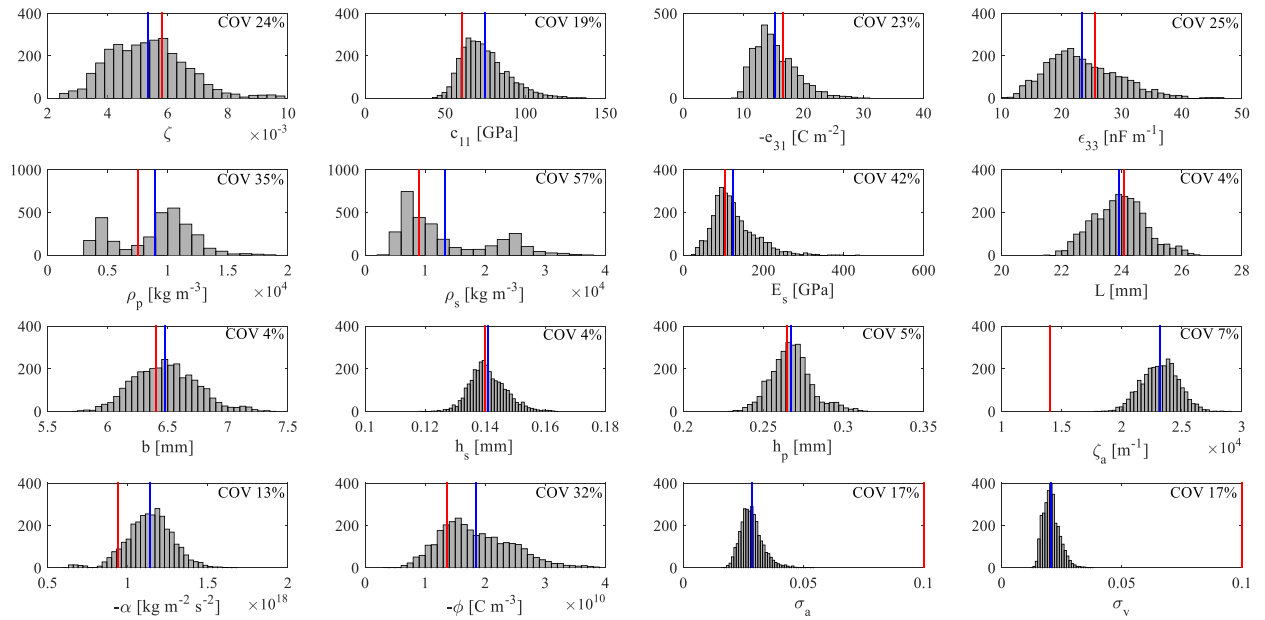


Figura 34. Histogramas de los parámetros del modelo obtenidos mediante TMCMC. usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido $Z = [0.56 \ 2g]$. Se marca en línea roja el valor nominal y en azul el valor medio.

Anexo F

Tabla 21. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = 0.56g$.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0059	0.0079	0.0070	0.0066
c_{11} [GPa]	59.6	57.0	58.4	66.2
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	14.78	14.19	16.06	16.06
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	24.23	27.68	29.81	27.94
ρ_p [kg m ⁻³]	5988	6492	7109	7649
ρ_s [kg m ⁻³]	10374	9058	8650	8769
E_s [GPa]	121.9	90.5	106.2	117.9
L [mm]	24.16	24.11	23.96	24.37
b [mm]	6.5	6.4	6.4	6.4
h_s [mm]	0.143	0.139	0.139	0.141
h_p [mm]	0.261	0.264	0.267	0.265
z_a [m ⁻¹]	1.0274E4	1.0287E4	1.0963E4	1.1358E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.1063E18	-	8.8408E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.6846E10	1.3186E10	-	-
s_e	0.022	0.02	0.02	0.021

Tabla 22. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = 2g$.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0027	0.0072	0.0066	0.0070
c_{11} [GPa]	69.8	74.9	43.8	94.4
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	16.34	13.41	16.00	17.26
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	21.23	36.13	28.58	31.03
ρ_p [kg m ⁻³]	7262	8918	5667	13003
ρ_s [kg m ⁻³]	9758	8561	5826	8807
E_s [GPa]	93.8	109.2	103.6	129.1

L [mm]	24.86	24.46	23.99	23.76
b [mm]	6.5	6.5	6.4	6.3
h_s [mm]	0.135	0.141	0.141	0.140
h_p [mm]	0.260	0.267	0.259	0.261
z_a [m ⁻¹]	1.7684E4	4.0270E4	1.6455E4	3.0444E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	6.2236E17	-	5.2683E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	2.5658E10	1.0673E10	-	-
s_e	0.004	0.012	0.006	0.008

Tabla 23. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación con $Z = [0.56g \ 2g]$.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0067	0.0075	0.0071	0.0066
c_{11} [GPa]	77.5	65.1	76.1	71.6
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	16.21	13.56	15.36	15.26
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	28.02	27.07	30.75	27.47
ρ_p [kg m ⁻³]	10311	7771	8978	8725
ρ_s [kg m ⁻³]	8645	9399	11199	9637
E_s [GPa]	110.9	104.7	104.3	105.8
L [mm]	23.80	24.07	24.00	24.05
b [mm]	6.4	6.4	6.4	6.4
h_s [mm]	0.140	0.140	0.141	0.140
h_p [mm]	0.266	0.265	0.266	0.266
z_a [m ⁻¹]	2.3127E4	2.8561E4	2.7279E4	2.8459E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.1335E18	-	9.5956E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.4811E10	1.0713E10	-	-
s_e	0.028	0.107	0.027	0.096

Tabla 24. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de voltaje emitido con $Z = 0.56g$.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
-----------	-------	-------	-------	-------

Z	0.0049	0.0062	0.0040	0.0022
c_{11} [GPa]	69.3	60.6	56.7	65.7
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	12.78	14.88	14.39	21.29
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	17.04	23.48	20.51	28.98
ρ_p [kg m ⁻³]	6876	8654	4865	8666
ρ_s [kg m ⁻³]	14995	11319	17558	7351
E_s [GPa]	78.3	155.2	83.9	133.5
L [mm]	23.39	23.68	24.39	24.01
b [mm]	6.4	6.3	6.7	6.4
h_s [mm]	0.138	0.145	0.145	0.147
h_p [mm]	0.259	0.277	0.277	0.249
z_a [m ⁻¹]	9.6327E3	1.0333E4	1.4098E4	2.6710E4
$-\partial$ [kg m ⁻² s ²]	5.7723E17	-	8.5425E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	2.2246E10	1.3546E10	-	-
S_e	0.006	0.003	0.008	0.005

Tabla 25. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de voltaje emitido con $Z = 2g$.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0041	0.0043	0.0045	0.0060
c_{11} [GPa]	48.5	49.8	61.4	59.5
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	16.80	16.53	13.74	18.19
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	31.00	22.02	20.63	23.04
ρ_p [kg m ⁻³]	6160	6654	6266	8068
ρ_s [kg m ⁻³]	10755	11731	9931	7702
E_s [GPa]	98.1	101.7	69.8	118.8
L [mm]	23.83	23.35	24.67	24.19
b [mm]	6.5	6.2	6.2	6.4
h_s [mm]	0.148	0.142	0.142	0.144
h_p [mm]	0.269	0.268	0.261	0.264

z_a [m ⁻¹]	1.4911E4	8.9725E3	1.0836E4	1.0949E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	8.3863E17	-	6.6000E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.8023E10	1.0297E10	-	-
s_e	0.005	0.006	0.004	0.005

Tabla 26. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de voltaje emitido con $Z = [0.56g \ 2g]$.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0049	0.0054	0.0052	0.0055
c_{11} [GPa]	72.0	67.9	70.3	69.1
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	20.87	18.86	18.39	17.98
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	31.37	22.57	28.32	24.54
ρ_p [kg m ⁻³]	8567	8937	9102	8919
ρ_s [kg m ⁻³]	9935	10114	9857	9913
E_s [GPa]	106.3	105.3	110.2	103.9
L [mm]	24.32	24.00	24.00	23.99
b [mm]	6.5	6.4	6.5	6.4
h_s [mm]	0.141	0.14	0.14	0.14
h_p [mm]	0.264	0.267	0.267	0.266
z_a [m ⁻¹]	2.2486E4	1.9115E4	2.1645E4	1.9966E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.1046E18	-	8.6653E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.2667E10	1.1538E10	-	-
s_e	0.020	0.125	0.020	0.105

Tabla 27. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido con $Z = 0.56g$.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0046	0.0073	0.0047	0.0050
c_{11} [GPa]	66.1	85.7	73.9	73.8
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	15.81	15.6	16.14	15.32
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	24.61	23.04	23.78	24.14

ρ_p [kg m ⁻³]	8915	9273	8797	9447
ρ_s [kg m ⁻³]	8264	12094	10376	11381
E_s [GPa]	105.0	120.7	116.6	90.5
L [mm]	23.93	25.31	23.88	23.85
b [mm]	6.5	6.5	6.4	6.4
h_s [mm]	0.142	0.140	0.139	0.142
h_p [mm]	0.268	0.289	0.26	0.269
z_a [m ⁻¹]	1.9058E4	2.2034E4	1.7512E4	2.7360E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	6.9980E17	-	5.9942E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.0657E10	1.1448E10	-	-
σ_a	0.027	0.063	0.025	0.031
σ_v	0.015	0.003	0.016	0.009

Tabla 28. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido con $Z = 2g$.

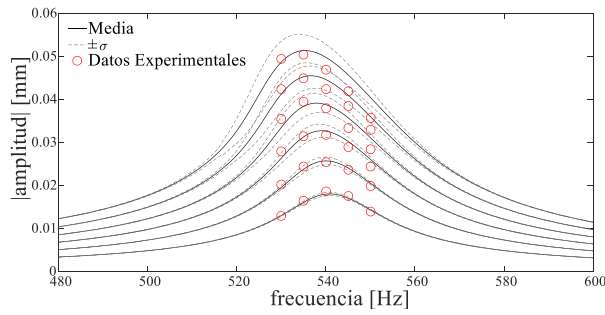
Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0047	0.0038	0.0062	0.0043
c_{11} [GPa]	48.3	93.1	62.8	82.4
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	18.89	12.13	25.13	19.00
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	29.62	16.33	36.18	29.63
ρ_p [kg m ⁻³]	8414	11974	7598	11158
ρ_s [kg m ⁻³]	4261	10676	8431	16572
E_s [GPa]	92.1	104.6	118.3	142.8
L [mm]	23.03	24.22	24.70	23.08
b [mm]	6.5	6.3	6.5	6.3
h_s [mm]	0.139	0.139	0.138	0.143
h_p [mm]	0.259	0.267	0.268	0.263
z_a [m ⁻¹]	1.0784E4	3.0512E4	1.3104E4	2.9782E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	6.3669E17	-	3.6300E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.3206E10	5.9003E9	-	-

σ_a	0.006	0.01	0.005	0.008
σ_v	0.005	0.014	0.004	0.01

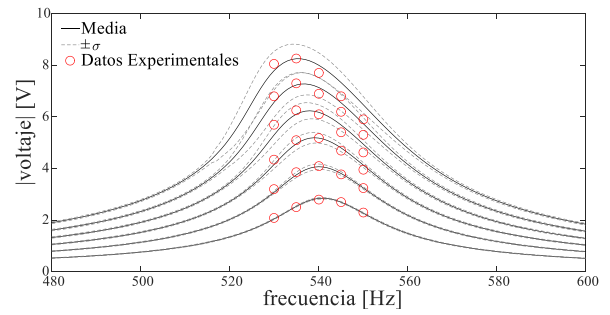
Tabla 29. Actualización de parámetros de los 4 modelos considerados, usando datos de amplitud de oscilación y voltaje emitido con $Z = [0.56g \ 2g]$.

Parámetro	M_1	M_2	M_3	M_4
Z	0.0053	0.0051	0.0052	0.0053
c_{11} [GPa]	72.4	73.5	71.6	75.9
$-e_{31}$ [C m ⁻²]	14.65	15.57	19.21	16.83
ϵ_{33} [nF m ⁻¹]	22.56	23.70	29.71	25.47
ρ_p [kg m ⁻³]	9716	9423	9396	9769
ρ_s [kg m ⁻³]	10169	9945	9128	10099
E_s [GPa]	114.6	104.9	100.8	103.0
L [mm]	23.95	23.94	24.03	23.99
b [mm]	6.5	6.4	6.5	6.5
h_s [mm]	0.14	0.14	0.14	0.14
h_p [mm]	0.267	0.267	0.267	0.267
z_a [m ⁻¹]	2.3227E4	2.6249E4	2.3314E4	2.6514E4
$-a$ [kg m ⁻² s ²]	1.1417E18	-	8.7817E17	-
$-j$ [C m ⁻³]	1.7574E10	7.7073E9	-	-
σ_a	0.028	0.103	0.033	0.094
σ_v	0.02	0.103	0.021	0.092

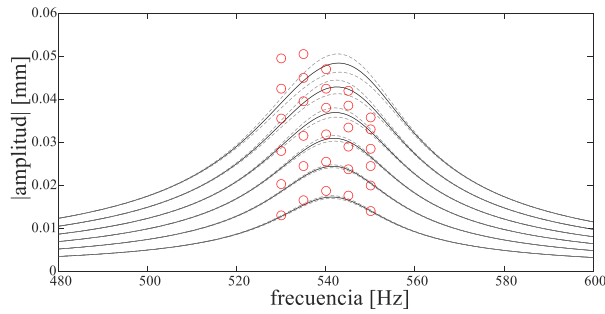
Anexo G



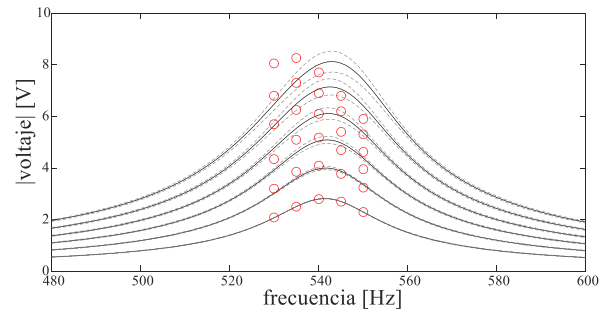
(a) M_1 . Amplitud de oscilación



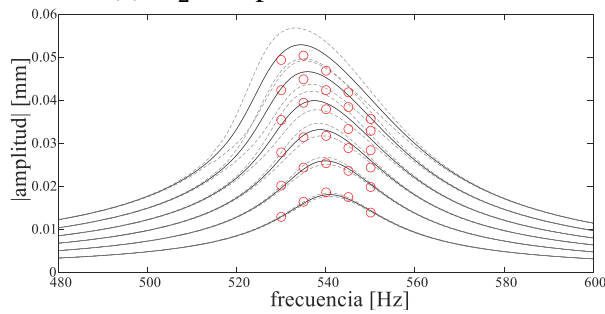
(b) M_1 . Voltaje emitido



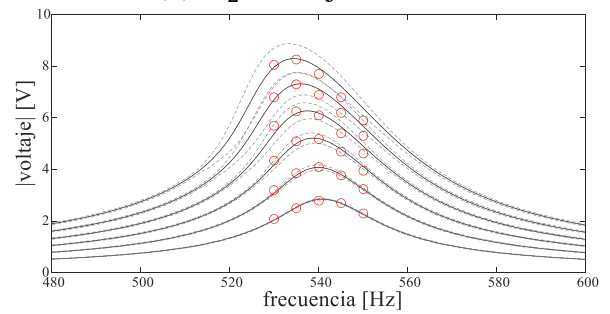
(c) M_2 . Amplitud de oscilación



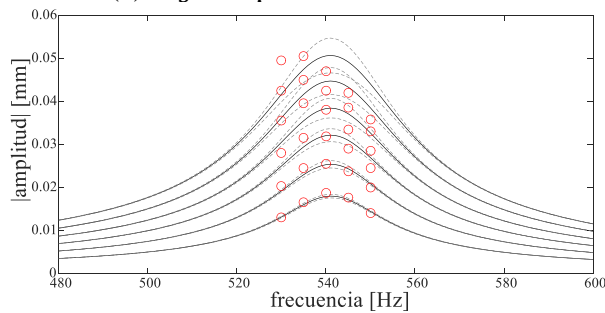
(d) M_2 . Voltaje emitido



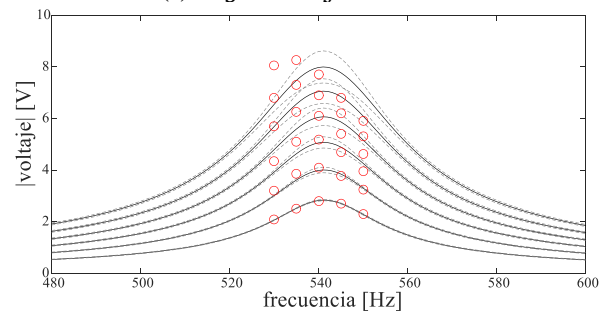
(e) M_3 . Amplitud de oscilación



(f) M_3 . Voltaje emitido

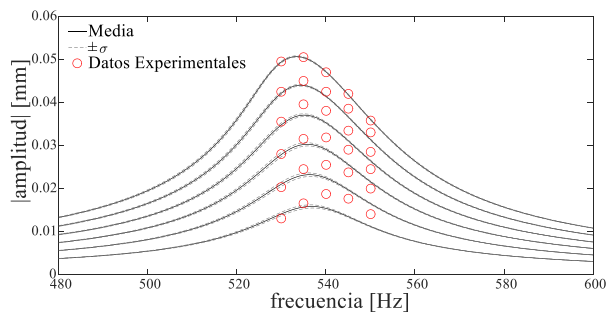


(g) M_4 . Amplitud de oscilación

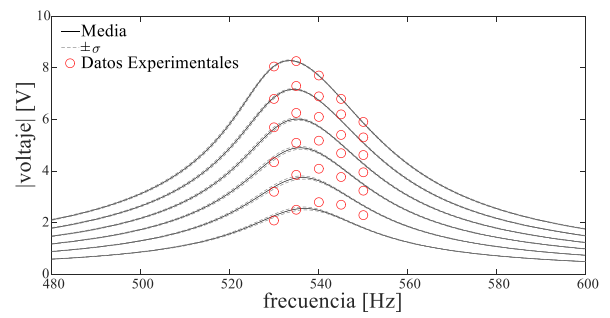


(h) M_4 . Voltaje emitido

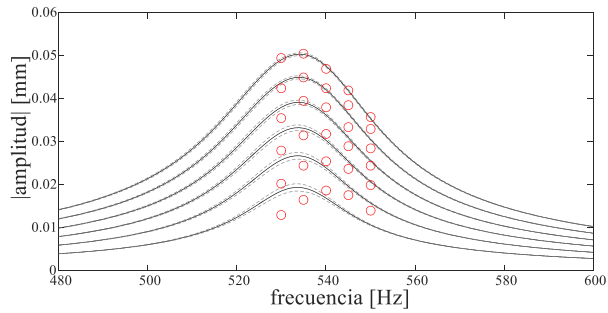
Figura 35. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos disponibles con $Z = 0.56g$.



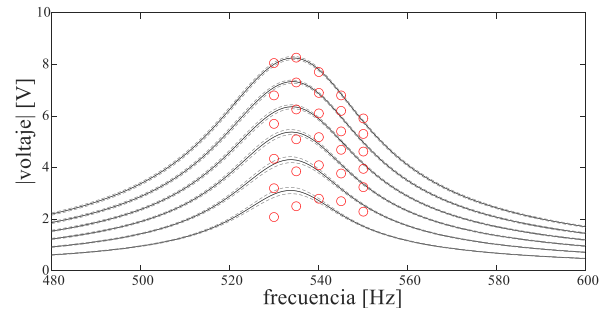
(a) M_1 . Amplitud de oscilación



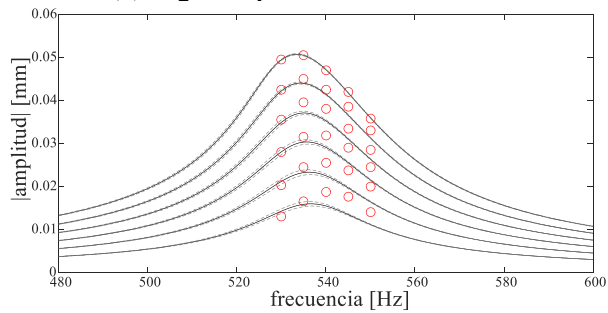
(b) M_1 . Voltaje emitido



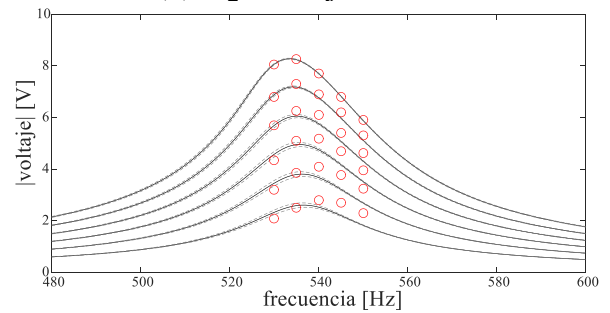
(c) M_2 . Amplitud de oscilación



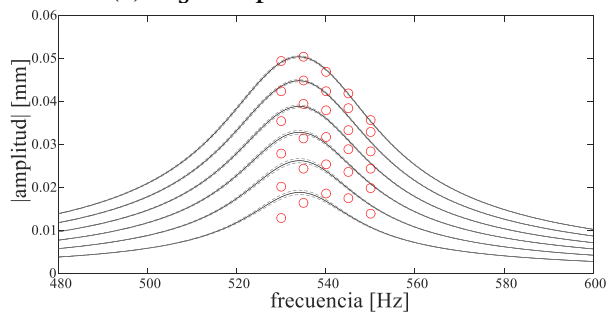
(d) M_2 . Voltaje emitido



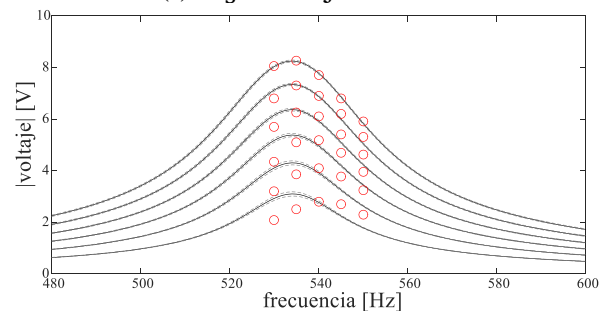
(e) M_3 . Amplitud de oscilación



(f) M_3 . Voltaje emitido

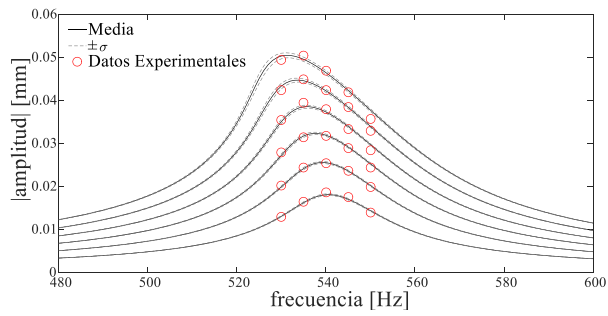


(g) M_4 . Amplitud de oscilación

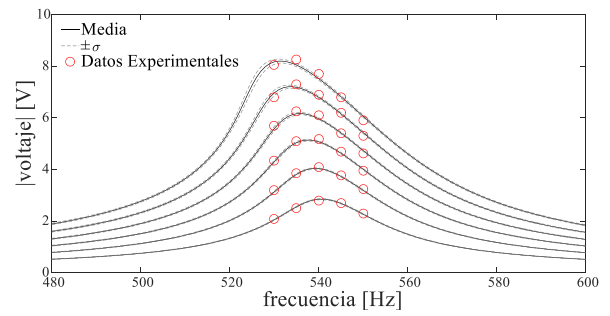


(h) M_4 . Voltaje emitido

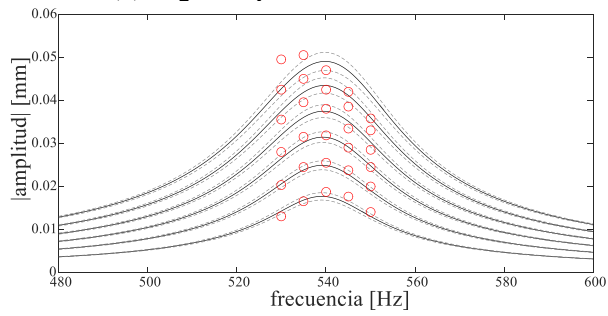
Figura 36. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos disponibles con $Z = 2g$.



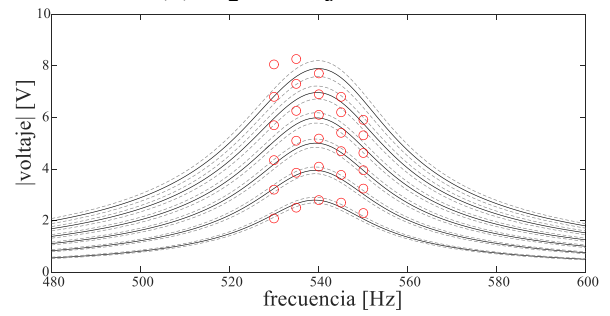
(a) M_1 . Amplitud de oscilación



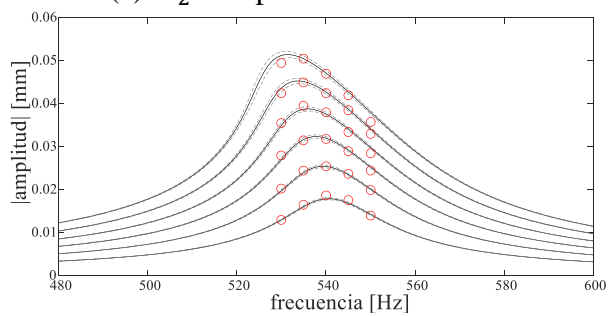
(b) M_1 . Voltaje emitido



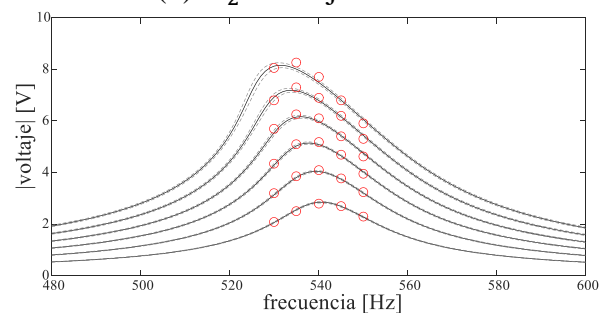
(c) M_2 . Amplitud de oscilación



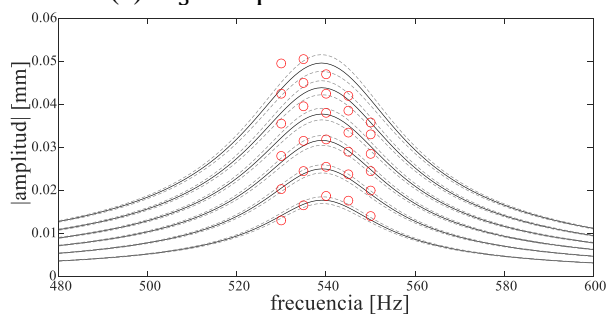
(d) M_2 . Voltaje emitido



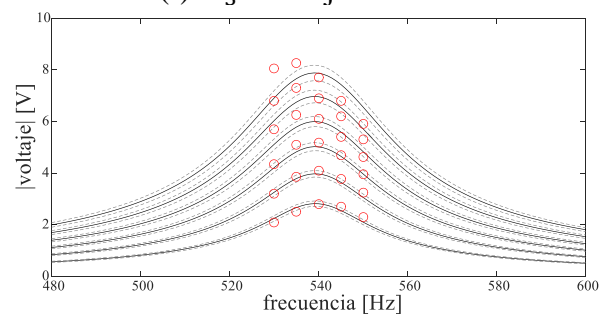
(e) M_3 . Amplitud de oscilación



(f) M_3 . Voltaje emitido



(g) M_4 . Amplitud de oscilación



(h) M_4 . Voltaje emitido

Figura 37. Predicciones de los 4 modelos revisados, usando todos los datos disponibles con $Z = [0.56g \ 2g]$.