



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

DETERMINACIÓN DEL DAÑO EN LAS VIBRACIONES DE PANELES
COMPUESTOS AUXÉTICOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

CRISTÓBAL ANTONIO DOÑA RODRÍGUEZ

PROFESOR GUÍA:
VIVIANA MERUANE NARANJO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN
JUAN ZAGAL MONTEALEGRE

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT

SANTIAGO DE CHILE
2020

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO
POR: CRISTÓBAL ANTONIO DOÑA RODRÍGUEZ
FECHA: 2020
PROF. GUÍA: VIVIANA MERUANE NARANJO

DETERMINACIÓN DEL DAÑO EN LAS VIBRACIONES DE PANELES COMPUESTOS AUXÉTICOS

Los materiales auxéticos son aquellos materiales que presentan un módulo de Poisson negativo, esto es que al ser sometidos a tensión o compresión en la dirección longitudinal, presentan el mismo comportamiento en la dirección transversal. Por lo general presentan buenas propiedades mecánicas en cuanto a absorción de impactos, rigidez, resistencia a fractura, entre otras, lo que los hace ideales para ser utilizados en materiales compuestos tipo sándwich en aplicaciones estructurales, en la industria automotriz, aeroespacial, etc.

Es por lo anterior y sumado al desarrollo reciente en los procesos de manufactura, que este último tiempo se ha puesto mucho énfasis en este tipo de materiales, buscando reemplazar a los compuestos sándwich tradicionales.

En este trabajo de título se busca identificar daño por delaminación en paneles compuestos auxéticos de tipo honeycomb, para lo cual se crea un modelo de elementos finitos al cual se le agrega delaminación, la cual consiste en modelar pérdida de contacto entre las pieles y el núcleo. Para determinar este daño se analizan los modos de vibración y se comparan los modos con y sin daño utilizando herramientas de análisis modal.

Se logra obtener los modos de vibración de un panel sandwich auxético en los casos sin y con delaminación, y se observa el cambio en los modos debido a la delaminación añadida. También se comparan estos modos con los de un panel sandwich no auxético y se concluye que el daño por delaminación afecta de una forma similar a ambos modelos. A partir de los modos de vibración con delaminación se logra detectar el daño.

A mi familia, mi novia, amigos y a todos quienes me apoyaron en este proceso.

Agradecimientos

Desde pequeño siempre me gustaron mucho las matemáticas y la ciencia, y me llamaba la atención el trabajo de mi papá, que era profesor de matemáticas, y le preguntaba acerca de su trabajo, en que consistía y le pedía que me enseñara, le planteaba mis inquietudes, las cuales siempre respondía y me incitaba a seguir aprendiendo. Recuerdo que me llevó a sus clases un par de veces y me hacía participar, recuerdo que una vez me preguntó en frente a todo su curso cuanto era la raíz de 4 y yo le respondí 16 y todo el curso se ríó y obviamente me avergoncé, pero esas cosas me daban ganas de seguir aprendiendo. Así que en primer lugar quiero agradecerle a él que me enseñó todo lo que sé, me maravilló con el mundo de las matemáticas y me dio la base para seguir aprendiendo, viejito eres un crack. En segundo lugar, pero no menos importante, por supuesto quiero agradecer a mi mamá que siempre ha estado presente dándome amor y contención, escuchándome cuando tengo algún problema y aconsejándome con la sabiduría única que tiene mi madre. Siempre me decía "tienes que estudiar en la Universidad de Chile, es pluralista y es la mejor universidad de Chile". Me dio la vida y me ha aguantado todo este tiempo, me ha enseñado de la vida, y de verdad te admiro mamita. A mi mellizo Agustín también le agradezco porque enseñarle a él también me hizo aprender y como yo era el mayor siempre tuve que ser una figura paterna para él, símbolo de responsabilidad y rigurosidad. Además la competitividad que siempre hemos tenido nos ayudó a ambos a crecer. A mi hermano Huguito también le doy las gracias por siempre estar pendiente y preocupado de como voy con mis avances y con mi carrera y siempre estar enriqueciéndome con su experiencia de su paso por la universidad. Gracias Loreto, que a pesar del distanciamiento también te preocupaste. A mi abuelita Agustina, que aún recuerdo como se sentía darle un beso en sus mejillas arrugadas y su dulce voz, espero que esté orgullosa de lo que me he convertido, siempre la tengo presente. A la Ruly que a pesar de no alcanzar a conocerla mucho me mostró su lado dulce y me entrego cariño, y a mi Tata que me dio un ejemplo de como es que tiene que ser una persona, por su honestidad su rectitud y sus grandes anécdotas heroicas, es alguien al que aspiro llegar a convertirme.

Este camino ha sido un proceso largo y quería agradecer a las personas que conocí antes de la Universidad que me ayudaron a ser lo que soy hoy, en especial a mis hermanos Nico y Emilio, con los cuales tengo una conexión especial, los conozco hace 15 años y los amo en sobremanera, a mis primos Coteloteiker, Joel, Eric, Alvaricoque y Kevinazo (mención honrosa por apañarme siempre a hacer cosas ñoñas como estudiar cálculo en la playa jajaja) que siempre me han apañado, me han hecho reír y me han dado un apoyo increíble, a mis amigos, Belencita, Negrita, Dome, Antonio, Ri, Ama, Jose, Guatón, Camilo, Lyssys, Dako, Cony, Melody, Paula, Pelao, Villa y Ursu, cada uno ocupa un espacio en mi corazón.

Mi paso por la Universidad no estuvo exento de conocer personas maravillosas e increíbles, entre las cuales destacan el Wiki, mi primer amigo de la U, un crack, recuerdo el primer y segundo año que se venía a mi casa a estudiar para los controles y siempre salíamos adelante, además tuve la suerte de conocer en Antofagasta a su familia, personas maravillosas, que nos recibieron muy bien junto a mi hermano. Tuve la suerte que en mi sección por el azar coincidieron grandes personas y amigos con los que compartimos grandes experiencias, Rorro (mi hijo del futbol), Tole, Benjita, Adolfoño, Pipe, Basti, Joaco, Berni. Además agradecer a mis amigos de la especialidad, Vayron, Vicho Quezada, Juanmi, Kidel, los cabros de chillán, Matisanvi, Pancho Fuentes, Richi (aunque es parralino) y en especial al loco Yévenes y Franco Clandestino.

Finalmente quería agradecer a mi polola Javiera, pilar fundamental que estuvo apoyándome e hinchándome para que trabaje y no saque la vuelta, escuchando mis problemas, dándome consejos pero por sobretodo dándome amor, gracias por ser tan linda.

Tabla de Contenido

Índice de Tablas	viii
Índice de Ilustraciones	ix
Introducción	1
Objetivos	2
1. Antecedentes	3
1.1. Materiales compuestos tipo sándwich	3
1.2. Materiales Auxéticos	4
1.2.1. Principales características y propiedades	7
1.3. Paneles compuestos auxéticos de panel de abeja	10
1.4. Modos de vibración	12
1.5. Método de elementos finitos	13
1.5.1. Análisis modal	17
2. Metodología	19
2.1. Desarrollo del modelo	19
3. Resultados obtenidos	29
3.1. Modos de vibración de panel auxético	32
3.1.1. Caso sin delaminación	32
3.1.2. Caso con delaminación	36
3.2. Modos de vibración de panel no auxético	40
3.2.1. Caso sin delaminación	40
3.2.2. Caso con delaminación	44
3.3. Modal Assurance Criterion	49
3.4. Diferencia de modos emparejados sin delaminación y con delaminación	55
3.4.1. Modelo auxético	55
3.4.2. Modelo no auxético	58
3.5. Caso con delaminación reducida	59
Conclusión	64
Bibliografía	66

Índice de Tablas

1.1. Aplicaciones de materiales auxéticos [6]	10
2.1. Propiedades del Ti-6Al-4V [14]	21
2.2. Elementos utilizados en el modelado	22
3.1. Análisis de convergencia de malla	30
3.2. Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para la placa superior del panel sándwich auxético	50
3.3. Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para la placa inferior del panel sándwich auxético	50
3.4. Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para ambas placas del panel sándwich auxético	50
3.5. Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para la placa superior del panel sándwich no auxético	51
3.6. Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para la placa inferior del panel sándwich no auxético	51
3.7. Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para ambas placas del panel sándwich no auxético	51
3.8. Matriz de MAC para comparar los modelos auxético y no auxético en el caso sin delaminación	52
3.9. Matriz de MAC para comparar los modelos auxético y no auxético en el caso con delaminación	52

Índice de Ilustraciones

1.	Comportamiento de un cuerpo elástico típico en tracción con módulo de Poisson positivo. En línea punteada se muestra la forma original del cuerpo antes de ser deformado [1]	1
1.1.	Estructura típica de sándwich [2]	3
1.2.	Tipos de estructuras sándwich según su núcleo [3]	4
1.3.	Estructuras reentrantes [6]	5
1.4.	Comportamiento auxético de estructura reentrante hexagonal [8]	6
1.5.	Principales tipos de estructuras hexagonales reentrantes o de panal de abeja auxético	6
1.6.	Estructuras quirales de panal de abeja [6]	6
1.7.	Estructuras de cuadrado rotatorio [7]	7
1.8.	Comportamiento frente a indentación de un material estándar en comparación a un material auxético [8]	8
1.9.	Comportamiento frente a flexión de materiales tradicionales en contraste a materiales auxéticos [8]	9
1.10.	Variación de la permeabilidad con el tamaño de la celda [8]	9
1.11.	Estructura auxética tipo honeycomb [5]	10
1.12.	Comportamiento de la celda de panal de abeja auxética bajo compresión y tensión [10]	11
2.1.	Boceto 2D de la celda unitaria del modelo auxético de panel honeycomb . . .	20
2.2.	Vista isométrica de la celda unitaria. En la parte central de la figura se puede encontrar la forma observada en la Figura 1.12, la cual se repite en cada dirección	20
2.3.	Vista isométrica de la geometría del modelo auxético	21
2.4.	Geometría del elemento BEAM188, se aprecian los nodos I y J, mientras que el punto K es para dar orientación al elemento [16]	23
2.5.	Geometría del elemento SHELL181, se aprecian los nodos I, J, K y L. [16] . .	23
2.6.	Se aprecia que el elemento CONTA175 corresponde a un único nodo [16] . .	24
2.7.	Se aprecia el par de contacto TARGE170-CONTA175, en este caso la forma del elemento TARGE170 es de un triángulo [16]	24
2.8.	Mallado de núcleo y de las pieles	25
2.9.	Mallado de la estructura	25
2.10.	Boceto 2D de la celda unitaria del modelo de panel no auxético	25
2.11.	Celda unitaria del modelo no auxético	26
2.12.	Modelo geométrico no auxético y sus dimensiones generales	26
2.13.	Deformación bajo carga uniforme del panel auxético	27

2.14. Deformación bajo carga uniforme del panel no auxético	27
2.15. Contactos modelados	28
2.16. Zona de delaminación	28
3.1. Solapamiento entre el núcleo y la placa superior	31
3.2. Modo 7. Frecuencia 1700,7 Hz	32
3.3. Modo 8. Frecuencia 2429,8 Hz	32
3.4. Modo 9. Frecuencia 2454,2 Hz	33
3.5. Modo 10. Frecuencia 2786,4 Hz	33
3.6. Modo 11. Frecuencia 2786,7 Hz	33
3.7. Modo 12. Frecuencia 3525,2 Hz	34
3.8. Modo 13. Frecuencia 3525,4 Hz	34
3.9. Modo 14. Frecuencia 3588,2 Hz	34
3.10. Modo 15. Frecuencia 3826,9 Hz	35
3.11. Modo 16. Frecuencia 4046,4 Hz	35
3.12. Frecuencia 1051 Hz	36
3.13. Modo 8. Frecuencia 1694,6 Hz	36
3.14. Modo 9. Frecuencia 2140,7 Hz	37
3.15. Modo 10. Frecuencia 2142,6 Hz	37
3.16. Modo 11. Frecuencia 2416,6 Hz	37
3.17. Modo 12. Frecuencia 2483,4 Hz	38
3.18. Modo 13. Frecuencia 2774,5 Hz	38
3.19. Modo 14. Frecuencia 2774,5 Hz	38
3.20. Modo 15. Frecuencia 3356 Hz	39
3.21. Modo 16. Frecuencia 3460 Hz	39
3.22. Modo 7. Frecuencia 2760 Hz	40
3.23. Modo 8. Frecuencia 3920,2 Hz	40
3.24. Modo 9. Frecuencia 3956,1 Hz	41
3.25. Modo 10. Frecuencia 4479,9 Hz	41
3.26. Modo 11. Frecuencia 4480 Hz	41
3.27. Modo 12. Frecuencia 5081,7 Hz	42
3.28. Modo 13. Frecuencia 5082 Hz	42
3.29. Modo 14. Frecuencia 5280,1 Hz	42
3.30. Modo 15. Frecuencia 5716,3 Hz	43
3.31. Modo 16. Frecuencia 6400,1 Hz	43
3.32. Modo 7. Frecuencia 1052,3 Hz	44
3.33. Modo 8. Frecuencia 2155,8 Hz	44
3.34. Modo 9. Frecuencia 2156,8 Hz	45
3.35. Modo 10. Frecuencia 2747,8 Hz	45
3.36. Modo 11. Frecuencia 3391,9 Hz	45
3.37. Modo 12. Frecuencia 3601,8 Hz	46
3.38. Modo 13. Frecuencia 3882,6 Hz	46
3.39. Modo 14. Frecuencia 3918,1 Hz	46
3.40. Modo 15. Frecuencia 4138,4 Hz	47
3.41. Modo 16. Frecuencia 4436,9 Hz	47
3.42. Diferencia entre los modos 7 sin delaminación y 8 con delaminación del modelo auxético	55

3.43. Diferencia entre los modos 8 sin delaminación y 11 con delaminación del modelo auxético	55
3.44. Diferencia entre los modos 9 sin delaminación y 12 con delaminación del modelo auxético	56
3.45. Diferencia entre los modos 10 sin delaminación y 13 con delaminación del modelo auxético	56
3.46. Diferencia entre los modos 11 sin delaminación y 14 con delaminación del modelo auxético	57
3.47. Diferencia entre los modos 12 sin delaminación y 16 con delaminación del modelo auxético	57
3.48. Diferencia entre los modos 7 sin delaminación y 10 con delaminación del modelo no auxético	58
3.49. Diferencia entre los modos 8 sin delaminación y 14 con delaminación del modelo no auxético	58
3.50. Diferencia entre los modos 11 sin delaminación y 16 con delaminación del modelo no auxético	59
3.51. Modo 8. Frecuencia 1997,6 Hz	60
3.52. Modo 10. Frecuencia 2507,8 Hz	60
3.53. Modo 13. Frecuencia 3455,3 Hz	60
3.54. Modo 14. Frecuencia 3455,9 Hz	61
3.55. Modo 15. Frecuencia 3615,1 Hz	61
3.56. Diferencia entre los modos 12 sin delaminación y 13 con delaminación	62
3.57. Diferencia entre los modos 13 sin delaminación y 14 con delaminación	62
3.58. Diferencia entre los modos 14 sin delaminación y 15 con delaminación	62
3.59. Modo 7, placa inferior	68
3.60. Modo 8, placa inferior	68
3.61. Modo 9, placa inferior	68
3.62. Modo 10, placa inferior	69
3.63. Modo 11, placa inferior	69
3.64. Modo 12, placa inferior	69
3.65. Modo 13, placa inferior	69
3.66. Modo 14, placa inferior	70
3.67. Modo 15, placa inferior	70
3.68. Modo 16, placa inferior	70
3.69. Modo 1 de placa circular	70
3.70. Modo 2 de placa circular	71
3.71. Modo 3 de placa circular	71
3.72. Modo 4 de placa circular	71
3.73. Modo 5 de placa circular	72
3.74. Modo 6 de placa circular	72
3.75. Modo 7 de placa circular	72
3.76. Modo 8 de placa circular	73
3.77. Modo 9 de placa circular	73
3.78. Modo 10 de placa circular	73

Introducción

En la naturaleza, los cuerpos sólidos tienen un comportamiento que tiende aproximadamente a conservar el volumen, es decir, al ser comprimidos o traccionados en una dirección tienden a expandirse o contraerse respectivamente en las direcciones laterales. Este comportamiento se puede apreciar en la Figura 1. Sin embargo, se puede raramente encontrar en la naturaleza, o bien crear por procesos industriales, cuerpos que presenten un comportamiento contrario al esperado en el rango elástico, esto técnicamente se conoce como que presentan un módulo de Poisson negativo. A este tipo de materiales se les conoce como materiales auxéticos y tienen propiedades muy interesantes entre las cuales destacan una alta resistencia al impacto, son livianos y presentan un buen comportamiento en flexión, lo que los hace ideales para ser utilizados en la industria aeroespacial, automotriz y militar por nombrar algunas.

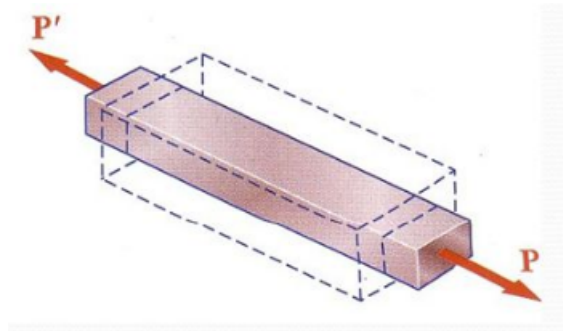


Figura 1: Comportamiento de un cuerpo elástico típico en tracción con módulo de Poisson positivo. En línea punteada se muestra la forma original del cuerpo antes de ser deformado [1]

Si bien se han realizado estudios modales en paneles sándwich con delaminación, lo innovador de este trabajo es ocupar un material auxético, los cuales están en reciente auge.

Objetivos

El objetivo general de este trabajo de título es evaluar el cambio en los modos de vibración de este tipo de materiales al sufrir daño por delaminación, específicamente en un panel sandwich de núcleo auxético con forma de panal (auxetic honeycomb core). Para dicho propósito se plantean los siguientes objetivos específicos.

- Desarrollar un modelo geométrico y posterior modelo de elementos finitos en ANSYS basado en diseños existentes.
- Obtener los modos de vibración libre (sin restricciones de apoyos) para el panel auxético sin delaminación y con delaminación añadida.
- Observar el efecto de la delaminación en los modos de vibración
- Utilizar herramientas de análisis modal para la detección de daño.
- Analizar la validez de los resultados y contrastarlos con estudios similares encontrados en la literatura

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Materiales compuestos tipo sándwich

Las estructuras sándwich consisten principalmente de dos placas delgadas llamadas pieles (sheets), las cuales están unidas a un núcleo (core) de un material distinto por lo general, utilizando para esto una capa de adhesivo. Por lo general las pieles son de algún metal o algún material con buenas propiedades mecánicas y el núcleo de algún material liviano.

A continuación se muestra un esquema de un material compuesto tipo sándwich.

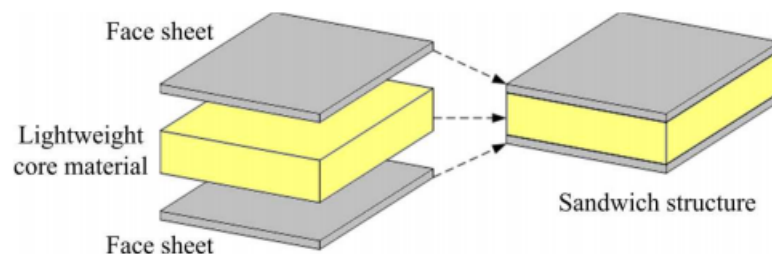
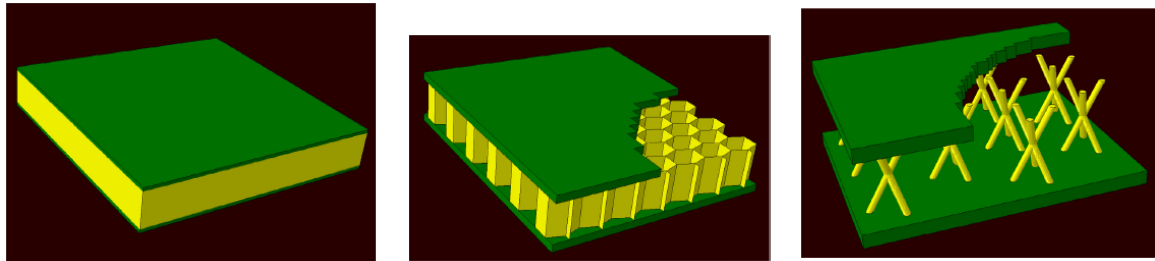


Figura 1.1: Estructura típica de sándwich [2]

Por lo general se cumple que el espesor del núcleo es entre 10 y 100 veces el espesor de las pieles.

El núcleo puede ser llenado completamente por material con baja densidad (bulk material) como se aprecia en la Figura 1.2a o bien con un material más denso pero con espacios llenados por aire (non-bulk material). Este último es el caso más típico para el material del núcleo, el cual a su vez se puede clasificar en si es que tiene una forma irregular, como lo son las espumas, o si es que tiene un patrón regular, en el que se repite una celda unitaria (periodic cellular cores). En este último caso también destacan dos clasificaciones. La primera consiste en que el núcleo está conformado por prismas, ya sean hexagonales, triangulares, cuadrados, etc (prismatic architecture), los cuales pueden estar orientados perpendiculares (out-of-plane) o paralelos (in-plane) al plano de las pieles. En la Figura 1.2b se aprecia un tipo prismático. La segunda clasificación se puede observar en la Figura 1.2c y consiste en que el núcleo

tiene forma de enrejado/entramado de barras (lattice-truss architecture), lo que hace una geometría más compleja. Es en este tipo de núcleos para materiales sándwich, en los que se basa este trabajo. [3]



(a) Estructura típica de sándwich con núcleo llenado por completo por material
 (b) Núcleo tipo prismático, en este caso la configuración es perpendicular al plano de las pieles
 (c) Núcleo tipo enrejado

Figura 1.2: Tipos de estructuras sándwich según su núcleo [3]

Se puede encontrar en la naturaleza materiales que cumplen con la definición anteriormente dada de un material tipo sándwich, entre los que destacan los tallos de las plantas, alas de aves, huesos y dientes, entre otros. En cuanto a aplicaciones destacan en las áreas de construcción y aeroespacial, pero también se encuentran en las áreas automotriz, en barcos, sistemas de energía eólica por nombrar algunas. Su amplio uso es debido a que combinan las buenas propiedades mecánicas de los materiales que conforman las pieles y el núcleo, permitiendo por ejemplo la disminución del peso en una estructura, al usar un material con baja densidad en el núcleo. Por lo general estos materiales compuestos presentan una buena rigidez a flexión, además de ser livianos y de tener un buen aislamiento térmico debido a la baja conductividad del núcleo.

1.2. Materiales Auxéticos

Para comprender los materiales auxéticos es necesario primero entender el coeficiente o módulo de Poisson, el cual es una constante que caracteriza cómo se deforma un material en sus direcciones laterales al ser deformado longitudinalmente y viene dado por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_{lateral} = -\nu\varepsilon_{longitudinal} \quad (1.1)$$

En donde ν es el módulo de Poisson, mientras que ε representa la deformación que viene definida por

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (1.2)$$

Por lo general esta constante se encuentra entre 0,2 y 0,5 para los materiales elásticos isotrópicos, sin embargo, en raras ocasiones esta constante puede tomar valores negativos, caso en el cual se denomina material auxético. Teóricamente según la teoría de la elasticidad,

por consideraciones termodinámicas de la energía de deformación, un material isotrópico puede tener un módulo de Poisson con valores entre -1 y 0,5.[4]

Se pueden encontrar materiales que naturalmente se comportan de forma auxética como las piritas, zeolitas (tipo de mineral microporoso), carbon pirolítico, rocas con microgrietas y estructuras de membrana, entre otros. [5, 6] Los materiales auxéticos no llamaban la atención hasta que Lakes (1987) [4] descubrió que se pueden manufacturar fácilmente espumas poliméricas auxéticas a partir de espumas convencionales, al aplicar compresión volumétrica en conjunto con calor en un rango específico de temperaturas.

Existen muchas geometrías que dan lugar a estructuras con comportamiento auxético, entre ellas destacan estructuras reentrantes, quirales y unidades rotatorias, entre otros. Es necesario destacar que el comportamiento auxético se debe a la geometría de estas estructuras y no es propia del material que las conforma.

Las estructuras reentrantes corresponden a la modificación de geometrías convencionales, en las cuales las geometrías convexas se transforman en cóncavas al modificar sus ángulos apuntando hacia adentro, y por esto toma el nombre de reentrante. Para clarificar este concepto a continuación se muestran algunas estructuras reentrantes.

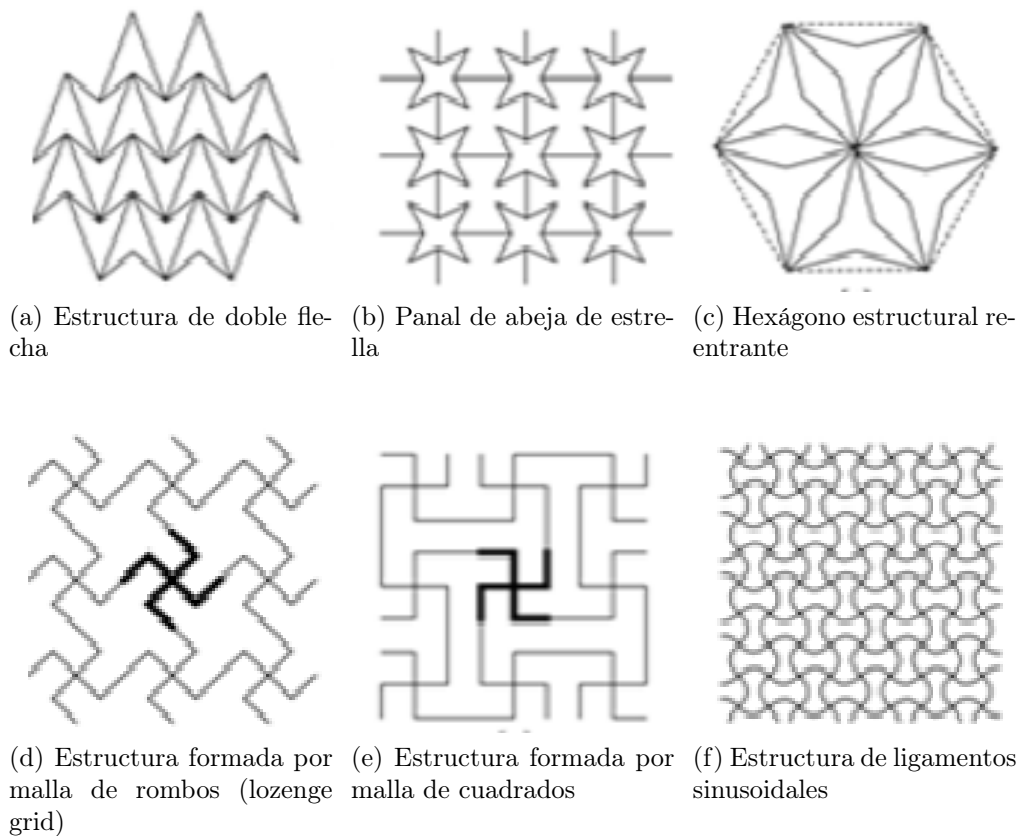


Figura 1.3: Estructuras reentrantes [6]

Una de las estructuras reentrantes más estudiadas es la de hexágono, también denominada de panal de abeja auxético (auxetic honeycomb), la cual se muestra a continuación.

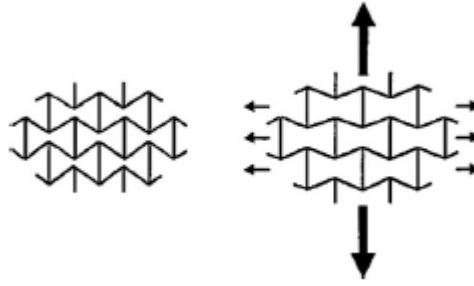
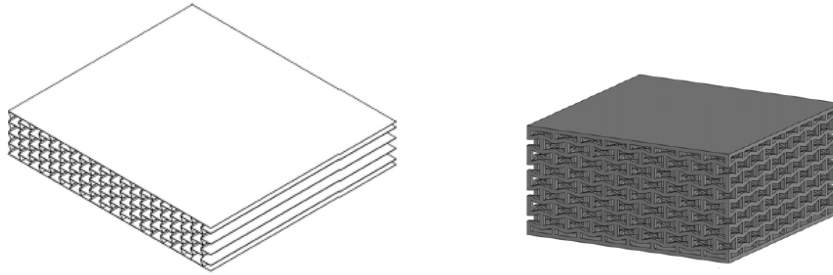


Figura 1.4: Comportamiento auxético de estructura reentrante hexagonal [8]

Ésta geometría se puede lograr para estructuras en 2D y 3D. Las estructuras 3D se basan en la misma figura de hexágono reentrante, y pueden ser principalmente de dos tipos, uno formado por láminas y otro por puntales (struts).

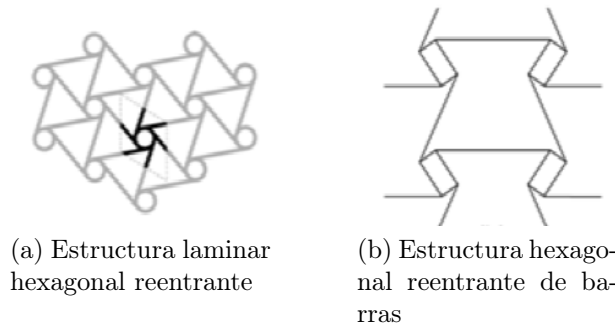


(a) Estructura laminar hexagonal reentrante [5]

(b) Estructura hexagonal reentrante de barras [9]

Figura 1.5: Principales tipos de estructuras hexagonales reentrantes o de panal de abeja auxético

Las estructuras quirales están formadas por unidades quirales básicas que consisten en ligamentos rectos unidos a nodos con formas geométricas, principalmente rectángulos y círculos. La estructura completa se forma al unir las unidades quirales básicas. El término quiral hace referencia a que su imagen especular no puede ser sobrepuesta por medio de rotaciones y traslaciones, es decir, no tienen simetría reflexiva. En este tipo de estructuras el comportamiento auxético se logra debido a que al aplicarse una fuerza externa los ligamentos se envuelven o desenvuelven de los nodos.



(a) Estructura laminar hexagonal reentrante

(b) Estructura hexagonal reentrante de barras

Figura 1.6: Estructuras quirales de panal de abeja [6]

Por último destaca el modelo de unidades rotatorias, el cual consiste en la unión articulada de varias unidades geométricas rígidas o semi-rígidas en vértices seleccionados. Estas figuras son por lo general cuadrados, rectángulos o triángulos. A continuación se muestra una estructura de cuadrado rotatorio y su comportamiento auxético al ser sometido a una carga, el cual es debido al pivote de las figuras geométricas alrededor de sus vértices.

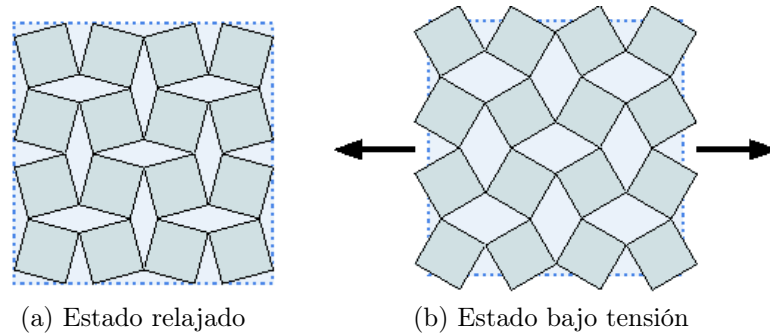


Figura 1.7: Estructuras de cuadrado rotatorio [7]

También se han manufacturado materiales auxéticos poliméricos, principalmente en forma de espumas, en los cuales el comportamiento auxético se ve a nivel macromolecular. Cabe destacar que se han diseñado polímeros con comportamiento auxético a nivel molecular pero aún no se han sintetizado.

La manufactura de los materiales auxéticos en general no se ha masificado ya que el interés en este tipo de materiales se ha desarrollado en el último tiempo, pero se puede decir de manera general que los materiales auxéticos poliméricos se pueden manufacturar a partir de espumas convencionales (no auxéticas), en cuyo caso las propiedades mecánicas resultantes son en gran medida empíricas. Los materiales auxéticos de panal de abeja de tipo laminar (prismático) se manufacturan a través del corrugado de laminas de metal, las cuales son posteriormente unidas por soldadura. Por último las estructuras de panal de abeja de tipo enrejado se pueden crear utilizando manufactura aditiva, principalmente Electron Beam Melting y Selective Laser Sintering.

Las principales características que comparten los materiales auxéticos se resumen a continuación.

1.2.1. Principales características y propiedades

- Livianos: Debido a su porosidad/permeabilidad, por lo general son materiales livianos.
- Absorción de energía por impacto: Esta es una de las principales características de estos materiales, sobretodo si se compara con materiales convencionales. Permite la adecuada absorción de impactos pequeños, por lo que puede ser ocupado en la industria aeroespacial. [9]
- Resistencia a la indentación: Los materiales auxéticos presentan una compensación de la presión aplicada localmente, al contrario de los materiales convencionales, lo que se traduce en una elevada dureza. La propiedad anterior se aprecia en la siguiente figura. [8]

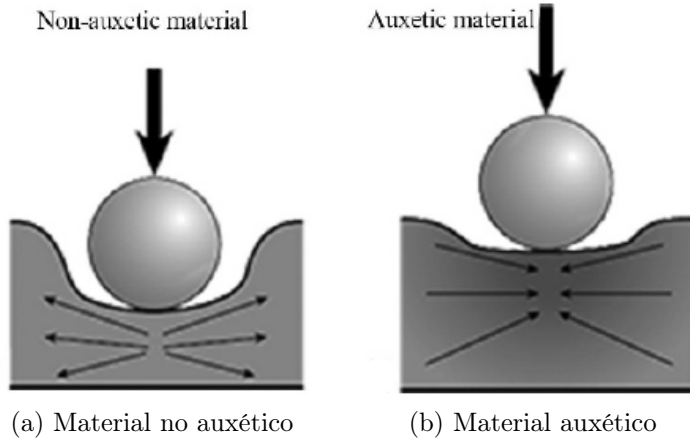


Figura 1.8: Comportamiento frente a indentación de un material estándar en comparación a un material auxético [8]

Además la ecuación que justifica la proposición anterior es:

$$H \propto \left[\frac{E}{(1 - \nu^2)} \right]^\gamma \quad (1.3)$$

Donde H es la dureza, E el módulo de Young, ν el módulo de Poisson y γ una constante que vale 1 o 2/3 dependiendo del tipo de distribución asumido para la presión. La justificación viene dada en que para sólidos isotrópicos en 3D el valor límite superior que puede obtener el módulo de Poisson es 0.5 (el módulo de corte debe ser positivo) y por lo tanto mientras más se acerque a -1 este valor, mayor es la dureza.

- Resistencia al corte: El módulo de corte se relaciona con el módulo de Poisson y con el módulo de Young a través de la siguiente ecuación.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.4)$$

Por lo tanto se desprende que a valores negativos de ν se obtengan grandes valores para G .

- Resistencia a la fractura: Estos materiales tienen una baja propagación de grietas, además de que estas requieren mayor energía para ser expandidas. Cuando estos materiales son sometidos a una tensión tienden a expandirse debido a la expansión de las celdas unitarias, por lo tanto cuando una grieta se forma, la expansión de las celdas tienden a cerrarla.
- Absorción acústica.
- Comportamiento sinclástico: Al ser sometido a flexión estos materiales tienden a formar domos, lo que es conocido como comportamiento sinclástico. Cuando un material está sometido a flexión presenta un campo de esfuerzos de compresión por un lado y de tracción por otro lado, al ser este un material auxético, se compensan estos esfuerzos debido a la expansión del material en tracción y a la contracción del material en compresión. Lo anterior se observa en la siguiente figura.

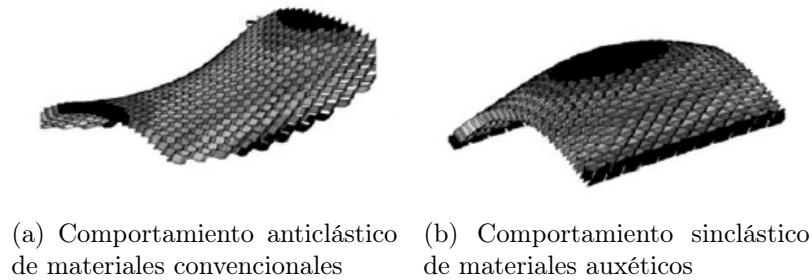


Figura 1.9: Comportamiento frente a flexión de materiales tradicionales en contraste a materiales auxéticos [8]

- Permeabilidad variable: Debido al comportamiento estructural de estos materiales se puede decir que tienen una permeabilidad variable, que se reduce al estar en contracción y aumenta al estar en tensión. Este comportamiento puede ser aprovechado en la creación de filtros. A continuación se esquematiza la permeabilidad variable.

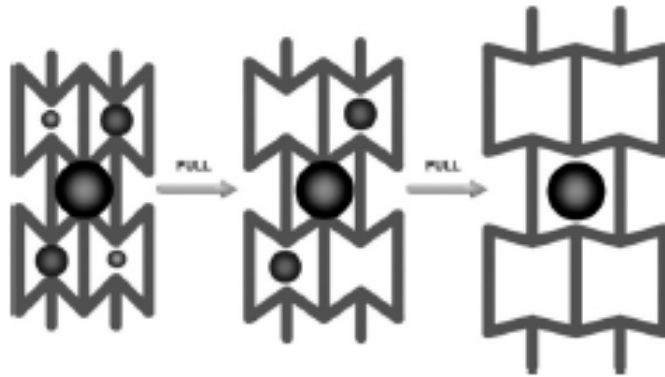


Figura 1.10: Variación de la permeabilidad con el tamaño de la celda [8]

- Memoria de forma: Se ha demostrado que algunas espumas auxéticas tienen memoria de forma, lo que quiere decir que al ser deformadas plástica o semi-plásticamente pueden volver a su estado original luego de ser sometidas a ciertas temperaturas durante un período de tiempo, sin comprometer las propiedades mecánicas.
- Comportamiento tribológico: Debido a las propiedades combinadas de una mayor dureza y una resistencia a la fractura se desprende que estos materiales pueden tener un mejor comportamiento tribológico, es decir, una mayor resistencia a la fricción y al desgaste. Se ha probado en algunos materiales un aumento de la resistencia a la abrasión.
- Alta rigidez flexural.

Lo anterior, junto a las mejoras recientes en los procesos de manufactura, sobretodo en manufactura aditiva, hacen a estos materiales ideales para aplicaciones en núcleos de sándwich. Además, los materiales auxéticos se pueden encontrar en las siguientes aplicaciones.

Tabla 1.1: Aplicaciones de materiales auxéticos [6]

Área	Aplicaciones
Textil	Fibras auxéticas, hilos, tejido funcional, tejidos con color cambiante
Industrial	Fibras de reforzamiento, filtros de aire, empaquetaduras, mallas, cuerdas, filtros, remaches, sellos, cojines de asiento, amortiguadores, absorbedores de sonido, material para empaquetar
Aerospacial	Partes curvas, nariz cónica de avión, panel de las alas
Protección	Cascos para choques, chalecos antibalas, canilleras, rodilleras, guantes, parachoques de auto.
Medicina	Vendaje, almohadilla presión para heridas, hilo dental, baso sanguíneo artificial, piel artificial, suturación quirúrgica, banda elástica para músculos y ligamentos
Sensores	Hidrófonos, dispositivos piezoeléctricos, sensores en miniatura

1.3. Paneles compuestos auxéticos de panal de abeja

Los compuestos de panal de abeja auxéticos son similares a los convencionales, pero en vez de tener una forma hexagonal, los lados que están inclinados se introducen en el polígono, convirtiéndolo en un polígono cóncavo, conocido como estructura reentrante. Al ángulo que forman estos lados con los lados horizontales se le llama ángulo reentrante. A continuación se presenta una imagen de un tipo panal de abeja.

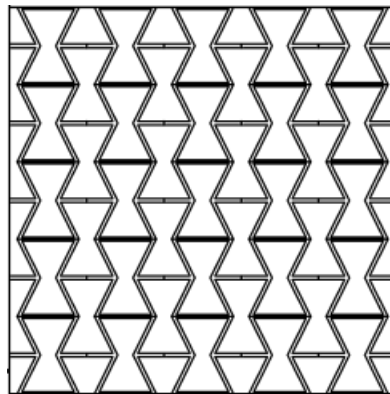


Figura 1.11: Estructura auxética tipo honeycomb [5]

Su comportamiento auxético se puede esquematizar en la siguiente figura.

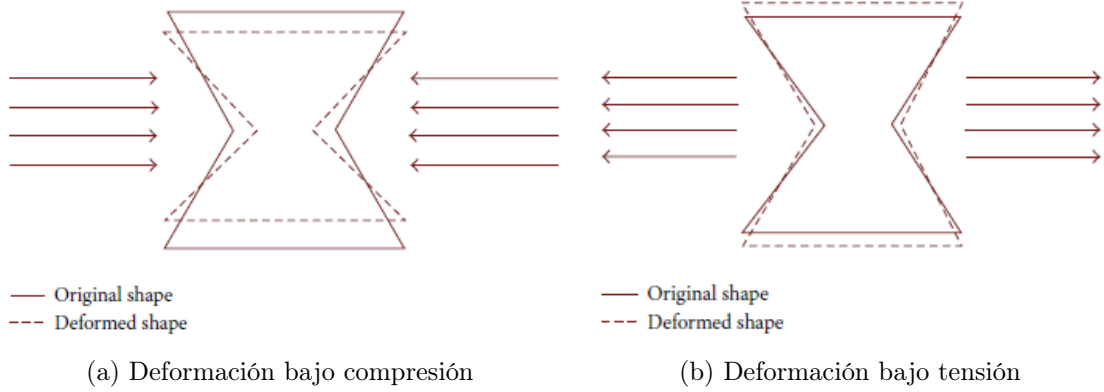


Figura 1.12: Comportamiento de la celda de panal de abeja auxética bajo compresión y tensión [10]

Se puede encontrar una relación monótona creciente entre las propiedades mecánicas de los panales de abeja auxéticos con una disminución del módulo de Poisson, por lo que el módulo de Poisson se convierte en un parámetro que permite evaluar fácilmente las características de un diseño en una primera instancia. Dependiendo de las dimensiones de la celda unitaria y del ángulo reentrante, puede cambiar el módulo de Poisson y por ende las propiedades de flexión y de absorción de impacto.

Se puede obtener el coeficiente de Poisson para la celda unitaria de la estructura auxética reentrante de panal de abeja, mostrada en la Figura 1.5b a partir de las siguientes relaciones. [9]

$$\nu_{zx} = -\frac{\left(\frac{L^2}{Et^2} + \frac{6}{5G}\right)\cos\theta(\alpha - \cos\theta)}{\frac{L^2\sin^2\theta}{Et^2} + \frac{6\sin^2\theta}{5G} + \frac{4\alpha}{E}} \quad (1.5)$$

$$\nu_{xz} = -\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\alpha - \cos\theta)} \quad (1.6)$$

En las ecuaciones anteriores L es el largo reentrante, α es la razón entre la altura de la celda y el largo reentrante, E es el módulo de Young, G es el módulo de Poisson, t es el ancho de los puntales que forman el núcleo y ν_{ij} , es el coeficientes de Poisson de la deformación transversal en la dirección i por la deformación axial en la dirección j .

Por último es necesario caracterizar la delaminación, que será el tipo de daño agregado en la simulación. Esta consiste en la separación de la unión existente entre el núcleo y las pieles, y puede ocurrir debido a defectos de manufactura, como un pegado incompleto o burbujas de aire que quedan atrapadas en el proceso de curado para el caso de placas laminares. También se puede deber a impactos en alguna mantención o en servicio. O bien se puede deber a la absorción de agua en sándwich con núcleos celulares, a la desgasificación (outgassing) en los núcleos de espumas por la exposición directa al sol o a un régimen de sobrecarga y elevada temperatura. [11]

La delaminación es uno de los principales mecanismos de falla en los materiales compuestos tipo sándwich, ya que una vez producida se propaga y puede gatillar otros tipos de daño como generar arrugas en las placas, grietas en el núcleo y en conjunto terminar derivando en la falla de la placa sándwich. Debido a lo anterior es muy importante una correcta identificación de la delaminación en los materiales compuestos tipo sándwich.

1.4. Modos de vibración

Los modos de vibración son las formas principales en las que vibra un sistema naturalmente, es decir, sin forzamiento ni amortiguamiento, sujeto solo a condiciones iniciales ya sea de desplazamiento o velocidad. La ecuación de movimiento de un sistema con múltiples grados de libertad viene dada por:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (1.7)$$

En donde M es la matriz de masa del sistema, y K es la matriz de rigidez. Para resolver esta ecuación diferencial en forma matricial, se puede premultiplicar la ecuación 1.7 por la inversa de la matriz de masa y se puede asumir una solución de la forma $x = \mathbf{u}e^{j\omega t}$, con e el número de Euler, j la unidad imaginaria y ω una constante positiva, por lo que al reemplazar se obtiene:

$$(M^{-1}K - \omega^2 I)\mathbf{u}e^{j\omega t} = \mathbf{0} \implies (M^{-1}K - \omega^2 I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

El término $e^{j\omega t}$ es distinto de cero para cualquier valor de t, por lo que se puede eliminar de la ecuación con lo que se obtiene un problema de vectores y valores propios (Eigenvalue problem). Para resolver este problema se debe imponer que la matriz $M^{-1}K - \omega^2 I$ no sea invertible, para así no obtener la solución trivial $\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Al imponer esta condición se tiene que:

$$\det(M^{-1}K - \lambda I) = 0 \quad (1.9)$$

Con $\lambda = \omega^2$. Lo anterior es una ecuación de polinomio característico, en la que el polinomio tiene n soluciones reales mayores a 0, donde n es el número de grados de libertad del sistema. Para casos en que no hay restricciones de desplazamiento, aparecen modos de cuerpo rígido asociados a una frecuencia igual a 0. Para cada valor propio (cero del polinomio) existe un vector propio el cual se debe obtener reemplazando el valor propio en la ecuación 1.8. A la raíz de los valores propios se les llama frecuencias naturales del sistema, y la primera frecuencia natural (la primera frecuencia mayor a cero) es denominada frecuencia fundamental. Los vectores propios asociados a los valores propios se les llama modos de vibración, y tienen magnitud arbitraria debido a que si \mathbf{u} es solución a la ecuación 1.8, $\alpha\mathbf{u}$ también lo es, con α un número real.

Los modos de vibración presentan una propiedad interesante que es la ortogonalidad de la modos de vibración con la matriz de masa y de rigidez. Lo anterior se expresa para dos modos arbitrarios u_r y u_s de la manera siguiente:

$$u_r^T M u_s = 0 \quad r \neq s \quad (1.10)$$

$$u_r^T M u_s \neq 0 \quad r = s \quad (1.11)$$

Cómo se mencionó anteriormente los modos de vibración tienen una magnitud arbitraria, y por norma general se normalizan con respecto a la matriz de masa de modo que el producto de la ecuación 1.11 sea 1 para cada modo de vibración. Al realizar esta normalización, el mismo producto pero con respecto a la matriz de rigidez entrega el valor propio asociado al vector propio que se está multiplicando.

$$P^T M P = I \implies P^T K P = \omega^2 \quad (1.12)$$

en donde P corresponde a la matriz formada por los modos de vibración, es decir, $P = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. La matriz I es la matriz identidad de dimensión n y ω^2 viene siendo una matriz diagonal formada por el cuadrado de las frecuencias naturales asociadas a cada modo de vibración.

Se puede hacer una transformación en las coordenadas de los grados de libertad llamada transformación nodal de la forma $x = Py$, con lo que junto al premultiplicar por P^T y aprovechando la normalización de los modos de vibración, la ecuación de movimiento dada en 1.7 queda de la forma:

$$P^T M P \ddot{y} + P^T K P y = 0 \implies \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (1.13)$$

El proceso recién realizado permitió desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales original de la ecuación 1.7, por lo que se obtienen n ecuaciones diferenciales desacopladas que se pueden resolver por separado.

1.5. Método de elementos finitos

El método de elementos finitos es una técnica numérica empleada para resolver ecuaciones diferenciales asociadas a problemas con geometrías complicadas. En este método se subdivide la estructura en varias partes, no intersecantes entre si, llamadas *elementos finitos*, los cuales presentan puntos representativos denominados *nodos*, que pueden estar adentro del elemento finito o bien en un extremo, caso en el cual puede ser compartido por otro elemento de la estructura. Luego se calculan los desplazamientos en los elementos a partir de utilizar interpolación en los desplazamientos de los nodos (desplazamientos nodales).

Al proceso de dividir la estructura en elementos finitos se le conoce como *discretización* y al resultado de este proceso se le conoce como *malla*. El poder de este método radica en discretizar problemas complejos para analizarlos parte por parte y obtener soluciones aproximadas pero precisas independiente de la geometría siempre y cuando se escoja un mallado adecuado.

El origen del método de elementos finitos no está bien esclarecido, Courant fue el primero en sugerirlo en 1943 pero su trabajo como matemático aplicado fue ignorado hasta que ingenieros lo desarrollaron independientemente. Los trabajos anteriores a la década del 50'

no tenían mucho valor práctico debido a que no había un desarrollo de los computadores. En 1956 se ocupó por primera vez para análisis estructural de aviones. Más adelante en la década de los 60' se amplió el uso del método para diversos problemas de ingeniería y ciencia aplicada (elasticidad, conducción de calor, etc.). [12]

El método de elementos finitos resuelve un modelo matemático que idealiza el problema real que se desea resolver. Hay dos categorías principales de modelos matemáticos, de parámetro agrupado (lumped-parameter models) y basados en mecánica continua (continuum-mechanics-based models), enfocados a sistemas discretos y continuos respectivamente. Para sistemas continuos la respuesta está dominada por ecuaciones diferenciales, a diferencia de los sistemas discretos que tienen como respuesta un conjunto de ecuaciones algebraicas. La solución exacta de estas ecuaciones diferenciales cumpliendo las condiciones de borde solo es posible en modelos muy simples, y por lo general se deben ocupar procedimientos numéricos que en esencia transforman el modelo continuo en uno discreto. Este modelo matemático se puede plantear en forma directa (diferencial) o en forma variacional (integral), también denominada forma débil. La primera es la aproximación que utilizaron los matemáticos para abordar el problema independientemente de los ingenieros, los cuales a su vez ocuparon la aproximación variacional, al considerar un punto de vista más físico, hasta que en la década del 60' se dieron cuenta que ingenieros y matemáticos estaban resolviendo el mismo problema pero desde distintas aproximaciones. El planteamiento variacional tiene las ventajas de que las ecuaciones de equilibrio se pueden obtener al considerar el aporte de cada elemento a la energía total, para luego invocar el principio estacionario que en esencia genera automáticamente la interconectividad de los elementos, es por esto y otras ventajas que la aproximación variacional es la base del método de elementos finitos.[13] En la aproximación variacional se plantea el principio de estacionaridad de un funcional, que para problemas estructurales este funcional bien puede ser la energía total del sistema, lo que se traduce en:

$$\Pi = \mathcal{U} - \mathcal{W} \tag{1.14}$$

$$\delta\Pi = 0 \tag{1.15}$$

en donde \mathcal{U} es la energía de deformación y \mathcal{W} es la energía potencial de las cargas externas.

Es necesario notar que para un problema en específico pueden existir varios funcionales apropiados, pero una vez que se define un funcional para una clase de problemas este es aplicable para deducir las ecuaciones diferenciales para cualquier problema de esa clase, por ejemplo el principio de mínima energía es aplicable para los problemas de teoría de elasticidad lineal.

Ahora bien, para resolver la formulación de estos problemas, los procedimientos clásicos son el método de los residuos ponderados (weighted residual method) y el método de Ritz. El principio de ambos métodos es el mismo, asumir que la solución de la variable de estado es una suma ponderada de funciones de prueba linealmente independientes (trial functions), las que representan una aproximación de la solución, y que inducen un error que debe ser minimizado. Lo anterior se explicita en las ecuaciones 1.16, 1.17 y 1.18. La ecuación 1.16 muestra el planteamiento general de la EDO que define el problema. En 1.17 se muestra la aproximación usando las funciones de prueba f_i con sus coeficientes α_i en modo general. La

ecuación 1.18 muestra el error inducido al reemplazar la aproximación que se muestra en 1.17 en el problema original 1.16.

$$L_{2m}[\phi] = r \quad (1.16)$$

$$\phi \approx \sum_i \alpha_i f_i \quad (1.17)$$

$$R = r - L_{2m} \left[\sum_i \alpha_i f_i \right] \quad (1.18)$$

L_{2m} corresponde al operador diferencial que define la ecuación diferencial en tanto que ϕ es la variable de estado (desplazamiento, temperatura, etc), r es la función forzante y R es el error introducido al reemplazar la aproximación el cual se busca minimizar.

Dentro de los métodos de residuos ponderados destacan el método de Galerkin y de mínimos cuadrados principalmente, que se diferencian en la forma en que minimizan los coeficientes que acompañan las funciones de prueba. La diferencia entre el método de residuos ponderados y de Ritz es que el primero es aplicado en la formulación diferencial, mientras que el segundo en la variacional. En la forma diferencial las funciones de prueba deben cumplir todas las condiciones de borde, mientras que en la variacional solo deben cumplir las condiciones de borde esenciales, lo que permite una elección más fácil de las funciones de prueba.

Para imponer restricciones en el modelo, existen dos métodos ampliamente utilizados, el método de los multiplicadores de Lagrange, y el método de penalización.

El principio de desplazamientos virtuales (o trabajos virtuales) es la base de la formulación del método de elementos finitos, para aplicaciones estructurales, y es equivalente a la aproximación variacional y a la diferencial.

Este principio establece que si sometemos un cuerpo a cualquier desplazamiento virtual arbitrario que satisfaga las condiciones de borde esenciales (geométricas), entonces el trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo es igual al trabajo virtual interno realizado por los esfuerzos internos del cuerpo, lo que se expresa a continuación como:

$$\int_V \varepsilon^T \tau dV = \int_V U^T f^B dV + \int_S U^{S^T} f^S dS + \sum_i U^{i^T} f^i \quad (1.19)$$

El término a la izquierda corresponde a el trabajo virtual interno mientras que el término derecho de la igualdad es el trabajo virtual externo, ε^T corresponde a las deformaciones relacionadas a los desplazamientos virtuales, τ son los esfuerzos virtuales, U^T son los desplazamientos virtuales, f son las fuerzas. El índice T representa la traspuesta de una matriz, el índice B hace relación al cuerpo y S a la superficie. La sumatoria corresponde a las fuerzas puntuales y desplazamientos virtuales en los puntos donde son aplicadas tales fuerzas. Las integrales son evaluadas en todo el volumen del cuerpo.

El supuesto más grande del método corresponde a que los desplazamientos en un elemento se obtienen a partir de los desplazamientos en los nodos.

$$u^{(m)}(x, y, z) = H^{(m)}(x, y, z)\hat{U} \quad (1.20)$$

En la ecuación 1.20, $H^{(m)}(x, y, z)$ corresponde a la matriz de interpolación asignada al elemento m , la cual se debe definir para cada elemento y está formada por las funciones de interpolación y muchos ceros para que los desplazamientos en un elemento sean debidos exclusivamente a los desplazamientos en los nodos que pertenecen a ese mismo elemento. En la ecuación 1.20 $u^{(m)}(x, y, z)$ son los desplazamientos continuos adentro del elemento mientras que \hat{U} son los desplazamientos nodales.

A partir de los desplazamientos se pueden obtener las deformaciones simplemente derivando la ecuación 1.20.

$$\varepsilon^{(m)}(x, y, z) = B^{(m)}(x, y, z)\hat{U} \quad (1.21)$$

En este caso ε corresponde a las deformaciones y $B^{(m)}(x, y, z)$ es una matriz que se obtiene a partir de $H^{(m)}(x, y, z)$ luego de derivar y combinar linealmente en forma adecuada.

Luego los esfuerzos se obtienen a partir de las deformaciones según la ley de esfuerzo-deformación

$$\tau^{(m)} = c^{(m)}\varepsilon^{(m)} + \tau^{I(m)} \quad (1.22)$$

En donde c representa la ley de esfuerzo-deformación del material y que puede variar según el elemento y $\tau^{I(m)}$ es el esfuerzo inicial que puede estar en el cuerpo.

El hecho de calcular las deformaciones a partir de los desplazamientos continuos permite satisfacer el requerimiento de compatibilidad, es decir, al deformarse el cuerpo no habrán brechas entre los elementos. El requerimiento de equilibrio (satisfacer las ecuaciones diferenciales) se satisface en un sentido global, pero en un sentido local se cumplirá aproximadamente. Sin embargo a medida que se tenga una mejor malla y se cumplan los requisitos de convergencia se puede llegar a satisfacer el equilibrio localmente en un elemento.

Luego al reemplazar las relaciones 1.20, 1.21 y 1.22 en el principio de desplazamientos virtuales, aprovechando la linealidad de la integral y a partir de manipulaciones matemáticas se obtiene:

$$KU = R \quad (1.23)$$

$$R = R_B + R_S + R_C - R_I \quad (1.24)$$

$$K = \sum_m \left(\int_{V^{(m)}} B^{(m)T} c^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \right) \quad (1.25)$$

$$R_B = \sum_m \left(\int_{V^{(m)}} H^{(m)T} f^{B^{(m)}} dV^{(m)} \right) \quad (1.26)$$

$$R_S = \sum_m \left(\int_{V^{(m)}} H^{S^{(m)T}} f^{S^{(m)}} dS^{(m)} \right) \quad (1.27)$$

$$R_I = \sum_m \left(\int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \tau^{I^{(m)}} dV^{(m)} \right) \quad (1.28)$$

$$R_C = F \quad (1.29)$$

La matriz $H^{S^{(m)T}}$ representa la matriz de interpolación en una superficie del elemento m en donde actúa una fuerza superficial $f^{S^{(m)}}$ y que se obtiene de reemplazar las coordenadas de esa superficie en la matriz $H^{(m)T}$ del mismo elemento m . En la ecuación 1.29 F es un vector que lista las fuerzas puntuales que aparecen en el sistema.

Lo expuesto anteriormente es válido para un análisis estático, mientras que para un análisis dinámico se debe tener en cuenta el principio de D'alembert al considerar las fuerzas de D'alembert (o inerciales) en las fuerzas de cuerpo f^B . Esto es:

$$f^{B^{(m)}} = \tilde{f}^{B^{(m)}} - \rho \ddot{u}^{(m)} \quad (1.30)$$

En donde $\ddot{u}^{(m)}$ se obtiene directamente de la relación 1.20, es decir, $\ddot{u}^{(m)} = H(m)\ddot{U}$. De lo anterior se obtiene la relación para un análisis dinámico y una definición para la matriz de masa del sistema.

$$M\ddot{U} + KU = R \quad (1.31)$$

$$M = \sum_m \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} H^{(m)T} H^T dV^{(m)} \quad (1.32)$$

En donde ρ es la densidad del cuerpo.

La obtención de las matrices de rigidez y de masa de esta forma es denominada el método de rigidez directo (direct stiffness method), en el que el ensamble de la matriz de rigidez (o de masa) del sistema se realiza sumando las matrices de rigidez de cada elemento. El problema de este procedimiento radica en que las matrices de rigidez de cada elemento son de la misma dimensión de la matriz global de rigidez, y tienen muchos ceros, por lo que en la práctica se ocupa una forma más eficiente, que consiste en considerar matrices de rigidez elementales compactas y ensamblarlas por medio de arreglos de conectividad.

1.5.1. Análisis modal

En análisis modal, se buscan las frecuencias naturales y los modos de vibración asociados a la estructura, para lo cual se debe resolver un problema de valores propios generalizado (generalized eigenvalue problem), el cual se presenta a continuación.

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (1.33)$$

En donde K es la matriz de rigidez, M la matriz de masa y λ y ϕ son los valores y vectores propios a encontrar que nos entregarán las frecuencias naturales y los modos de vibración respectivamente.

En la aproximación tradicional para resolver el problema de valor propio generalizado se busca transformar este en un problema de valor propio estándar, para luego resolverlo con alguno de los muchos métodos disponibles (método QR, Jacobi, etc). Para realizar esta transformación se puede descomponer la matriz M con factores de Choleski. Esta resolución es poco eficiente computacionalmente, por lo que en la práctica se ocupan métodos iterativos, como iteración de vectores (inversa, hacia adelante, cocientes de rayleigh), método de iteración polinomial (explícita, implícita), secuencias de Sturm, métodos de transformación. Si se deseará resolver directamente calculando los ceros del polinomio característico, también se debería ocupar iteración para un grado del polinomio mayor o igual a 4, por lo que estos métodos son equivalentes, en el sentido de que se debe iterar para encontrar la solución. En la práctica para problemas de grandes dimensiones se deben combinar estos métodos para encontrar una solución eficientemente. Para la elección de los vectores iniciales se puede usar el método de Lanczos.

Además de los métodos nombrados anteriormente se destaca el método de bloques de Lanczos que está basado en el método clásico de Lanczos pero aplicado a un bloque de vectores, éste método es el usado por ANSYS para la obtención de los valores y vectores propios.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Desarrollo del modelo

Para el modelo de elementos finitos se utilizará el software ANSYS Workbench 19.2. El principal modelo para el panel compuesto sandwich será de tipo enrejado-entramado de panal de abeja auxético, el cual se basa en el diseño A3 del artículo "Design of auxetic sandwich panels for structural applications". [9] Además del modelo de panel sándwich auxético se diseña una estructura no auxética basada en este diseño, para poder comparar resultados.

Los pasos a seguir son diseñar la geometría, para luego definir el mallado y finalmente obtener los modos de vibración.

Al definir el mallado se define el contacto entre la placa superior y el núcleo, etapa a partir de la cual se agrega la delaminación, por lo que se obtienen finalmente cuatro modelos, el modelo auxético con delaminación y sin delaminación así como el modelo no auxético con delaminación y sin delaminación. Posterior al análisis se repite este análisis para el modelo auxético con delaminación pero disminuyendo el área delaminada.

Con respecto a la geometría se utilizó el editor de geometría Design Modeler para su diseño, debido a que es el editor por defecto de ANSYS Workbench por lo que presenta mayor información disponible para su aprendizaje.

El procedimiento para definir la geometría es en primer lugar diseñar la geometría 2D de una cara de la celda unitaria en el editor Design Modeler, y al ser simétrica la celda unitaria, se replica esta cara en los distintos planos de la celda. Se decidió no utilizar un modelo CAD para evitar problemas de incompatibilidad al importarlos en ANSYS. La celda unitaria y sus dimensiones se muestran a continuación en las Figuras 2.1 y 2.2.

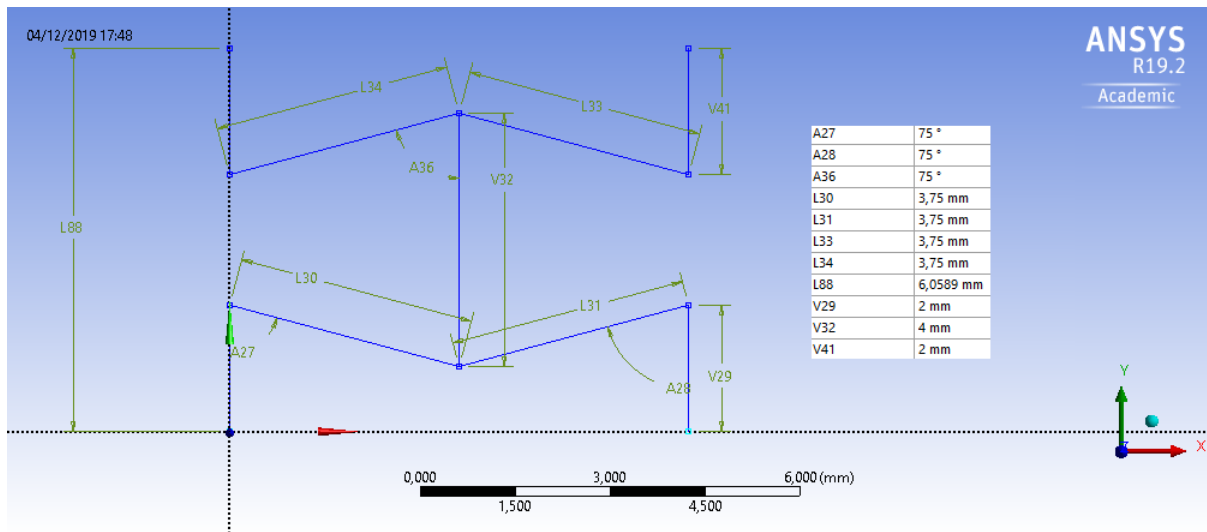
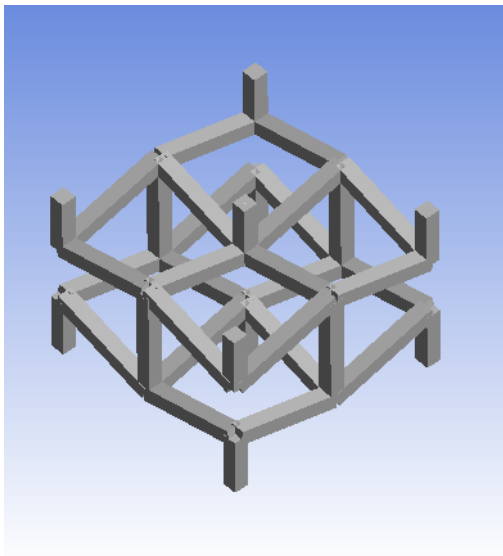
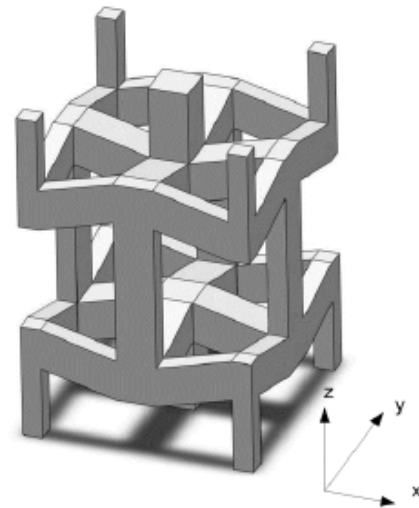


Figura 2.1: Boceto 2D de la celda unitaria del modelo auxético de panel honeycomb

No se agrega la dimensión general horizontal para no restringir el modelo, pero esta corresponde a $2 \cdot 3,75 \sin 75 \approx 7,244 [mm]$



(a) Celda unitaria del modelo auxético diseñado



(b) Celda unitaria tipo honeycomb obtenida original de [9]

Figura 2.2: Vista isométrica de la celda unitaria. En la parte central de la figura se puede encontrar la forma observada en la Figura 1.12, la cual se repite en cada dirección

Para la sección transversal de las barras se considera un cuadrado de $1 \times 1 [mm]$. El proceso de manufactura considerado es de Electron Beam Melting (EBM) y se utiliza como material polvo de Ti-6Al-4V, tanto para las placas como para el núcleo.

A continuación se detallan las propiedades del material.

Tabla 2.1: Propiedades del Ti-6Al-4V [14]

Densidad [$\frac{kg}{m^3}$]	4430
Módulo de Young [GPa]	113,8
Coefficiente de Poisson	0,342
Módulo de corte [GPa]	42,399
Esfuerzo de fluencia [MPa]	880
Esfuerzo último de tracción [MPa]	950

Con estas definiciones se puede obtener el coeficiente de Poisson de la celda basado en las ecuaciones 1.5 y 1.6, con lo que se obtiene un valor de :

$$\nu_{zx} = -0,198 \quad \nu_{xz} = -4,462$$

Notar que se obtiene para ν_{xz} un valor menor a -1, lo que es perfectamente posible ya que la estructura no es isotrópica y es más bien transversa isotrópica.

La siguiente etapa en la definición de la geometría corresponde a replicar la celda unitaria en las direcciones X, Y y Z, para así formar un panel tipo sándwich. Esta celda se replica 9x2x9 respectivamente, teniendo en cuenta que la dirección vertical corresponde al eje Y en este modelo. Por lo tanto las dimensiones de la placa corresponden a 65,2 x 65,2 y 12,118 mm. Posterior a replicar la celda unitaria se genera en el mismo modelo geométrico las placas superior e inferior de espesor 0,5 [mm] y del mismo material que el núcleo. Además se define la sección transversal de las barras del núcleo, la cual corresponde a una sección cuadrada de lado 0,5 [mm]. El modelo geométrico 3D se aprecia en la Figura 2.3.

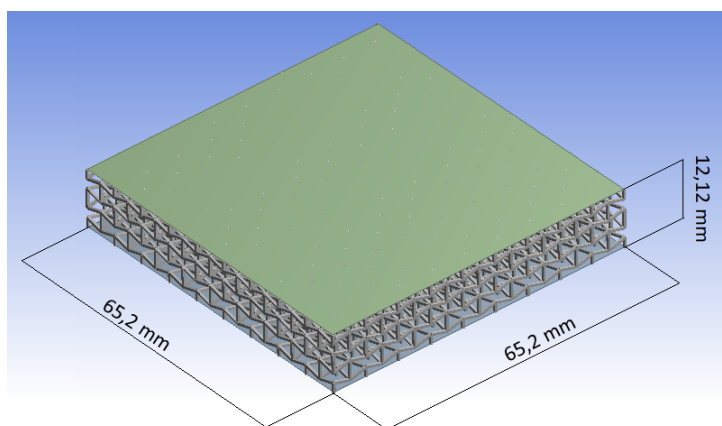


Figura 2.3: Vista isométrica de la geometría del modelo auxético

No se impusieron condiciones de borde ni solicitaciones, debido a que se realizará un análisis modal. Al no tener condiciones de borde los primeros 6 modos de vibración corresponderán a los modos de cuerpo libre. Además se considera que la estructura no tiene esfuerzos residuales iniciales.

Posteriormente se genera el mallado de forma semiautomática, para el cual se considera

cada barra como un elemento tipo beam debido a que presentan un ancho y profundidad mucho menores en comparación al largo, además de presentar una sección transversal uniforme. Para las placas superior e inferior se consideran elementos tipo shell también por consideraciones geométricas, ya que tienen un espesor despreciable en comparación a las dimensiones de largo y ancho, ocupar elementos sólidos 3D no es eficiente debido a la razón de aspecto que deben cumplir para obtener soluciones numéricas. Además se debe tener en cuenta que estos elementos permiten una mayor eficiencia computacional y están en correspondencia con los elementos encontrados en la literatura. [10, 15]

El mallado de las placas y del núcleo se realiza de manera independiente, es decir, los elementos no comparten nodos, y para la unión de ambos elementos se ocupan pares elementos de contacto, unión denominada “contact-paired”. Se ocupan elementos tipo “target” y tipo “contact”, de los cuales los primeros se asignan a la superficie de la placa, y los segundos se asignan a los nodos de los extremos de los elementos beam que van unidos a la placa. Este es el tipo de contacto más simple, debido a que no permite la separación en el contacto (gap) y tampoco permite deslizamiento, es decir, no incluye fricción en su formulación. Este tipo de contacto denominado “bonded” se puede pensar como que los elementos que están en contactos están pegados. También se puede modelar este contacto permitiendo que ambas superficies compartan nodos y para una malla lo suficientemente fina los resultados son los mismos. El contacto entre cada celda unitaria formada por barras es de este tipo, es decir, compartiendo nodos. En ANSYS este tipo de unión es denominada “Shared Topology”.

A continuación se presenta una tabla con la información resumida de los elementos utilizados en el modelo.

Tabla 2.2: Elementos utilizados en el modelado

Tipo de elemento	Nodos por elemento	Cantidad de elementos
BEAM188	2	3820
SHELL181	4	12800
CONTA175	1	333
TARGE170	1	12800

BEAM188 es un elemento viga en 3D con dos nodos basado en la teoría de Timoshenko, es decir la sección transversal de la viga permanece plana y sin distorsión después de la deformación. Este elemento presenta 6 grados de libertad en cada nodo, correspondientes a 3 traslaciones y 3 rotaciones en los ejes principales. Se recomienda para vigas delgadas, y se puede utilizar lo siguiente como criterio:

$$\frac{GAL^2}{EI} > 30 \tag{2.1}$$

En donde el miembro de la izquierda de la inecuación es la razón de esbeltez (slenderness ratio) formada por el módulo de corte G, el área transversal A, el módulo de Young E y el segundo momento de área I. Para la viga más corta del modelo, de un largo de 3,75 [mm] se obtiene una razón de esbeltez de 260, por lo que este elemento es adecuado y no se requieren elementos más sofisticados.

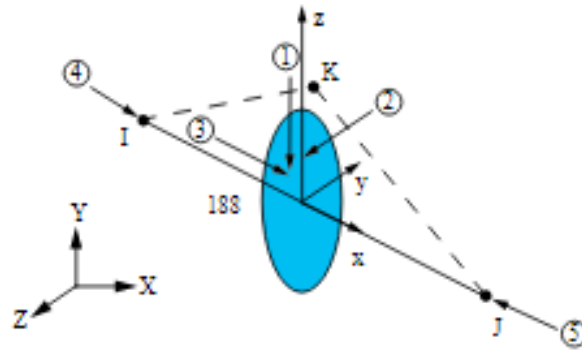


Figura 2.4: Geometría del elemento BEAM188, se aprecian los nodos I y J, mientras que el punto K es para dar orientación al elemento [16]

SHELL181 es un elemento cascarón basado en la teoría de Mindlin-Reissner, se recomienda su uso para superficies delgadas, es de 4 nodos con 6 grados de libertad por cada nodo.

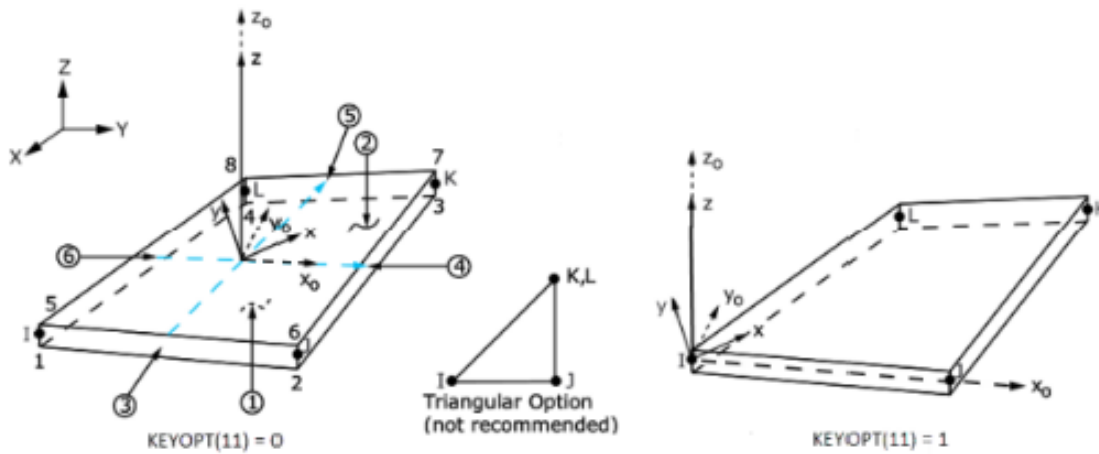


Figura 2.5: Geometría del elemento SHELL181, se aprecian los nodos I, J, K y L. [16]

Además se utilizan los elementos de contacto CONTA175 en conjunto con TARGE170 para definir el contacto entre los elementos shell y beam. Los elementos son emparejados entre ellos por medio de una serie de constantes reales compartidas.

El elemento CONTA175 corresponde a un nodo el cual se sitúa sobrepuesto de las superficies de contacto. En el caso de unión entre beam y shell, la superficie de contacto es el nodo extremo del elemento beam y la superficie objetivo es la del elemento shell. Además este elemento permite la separación de la unión bonded para modelar la delaminación en una interfaz. [16]

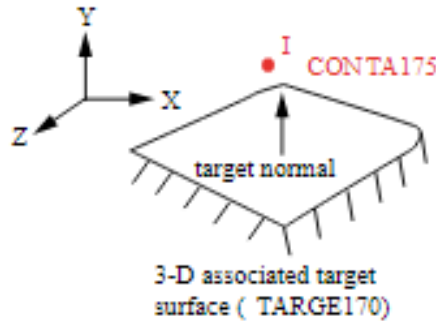


Figura 2.6: Se aprecia que el elemento CONTA175 corresponde a un único nodo [16]

El elemento TARGE170 puede adoptar distintas formas pero en general tiene una geometría igual a la del elemento al cual se sobrepone, en este caso adopta la forma de un cuadrilátero. Se puede pensar el elemento TARGE170 como una entidad geométrica que detecta cuando uno o más elementos de contacto emparejados se mueven dentro de los segmentos del elemento objetivo. [16]

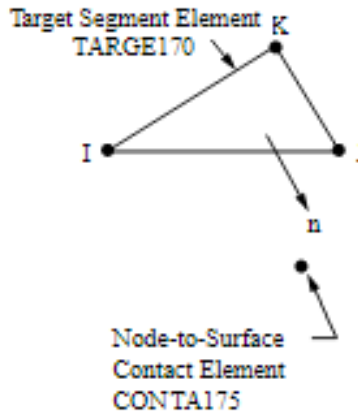
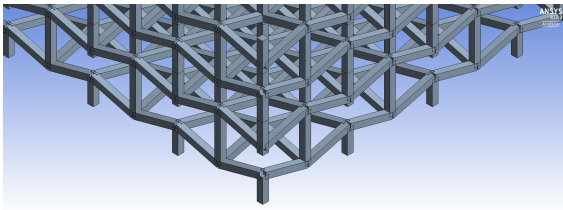
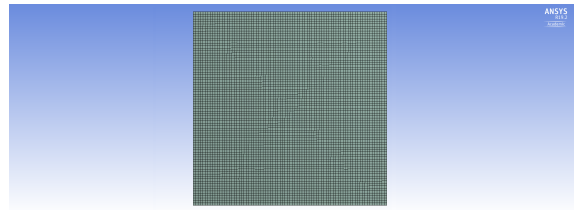


Figura 2.7: Se aprecia el par de contacto TARGE170-CONTA175, en este caso la forma del elemento TARGE170 es de un triángulo [16]

El mallado final se muestra a continuación, y el análisis de convergencia a partir del cual se escoge este mallado se justifica en el Capítulo 3.



(a) Mallado del núcleo



(b) Mallado de las placas superior e inferior

Figura 2.8: Mallado de núcleo y de las pieles

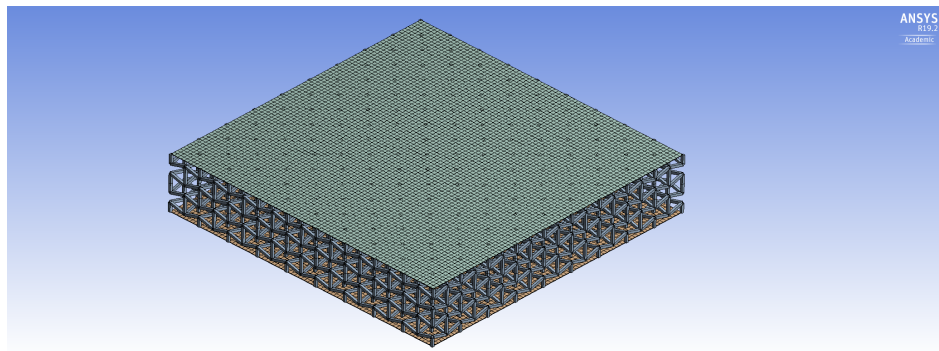


Figura 2.9: Mallado de la estructura

El diseño del modelo no auxético se basa en la misma celda unitaria pero se cambia la característica reentrante, es decir, el ángulo A27 de la Figura 2.1, pasa a ser de 105° , correspondiente al ángulo A18 de la Figura 2.10. Al cambiar el ángulo cambia la altura de la celda, por lo que cambian también las dimensiones generales.

A continuación en la Figura 2.10 se muestra el bosquejo 2D del modelo no auxético con sus dimensiones, la celda unitaria y el modelo completo del panel no auxético de panel de abeja.

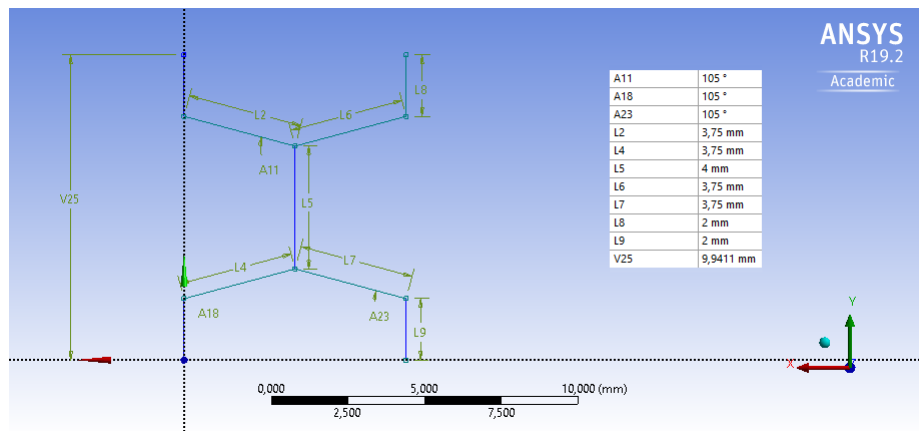


Figura 2.10: Boceto 2D de la celda unitaria del modelo de panel no auxético

Este modelo 2D da origen a la celda unitaria 3D mostrada en la Figura 2.11, la cual se obtiene de la misma forma que la celda unitaria del modelo auxético mostrada en la Figura 2.2.

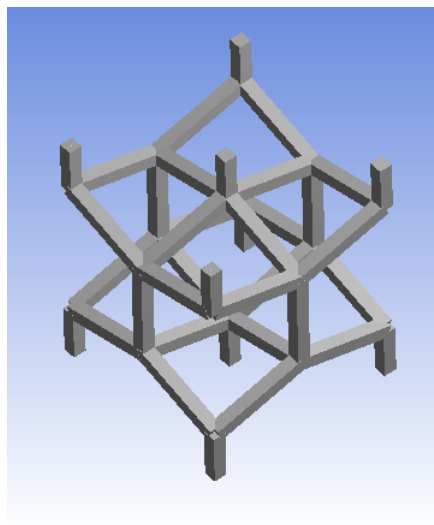


Figura 2.11: Celda unitaria del modelo no auxético

Finalmente se obtiene el panel completo replicando la celda unitaria en las direcciones X, Y y Z, el cual se aprecia junto con las dimensiones generales en la Figura 2.12.

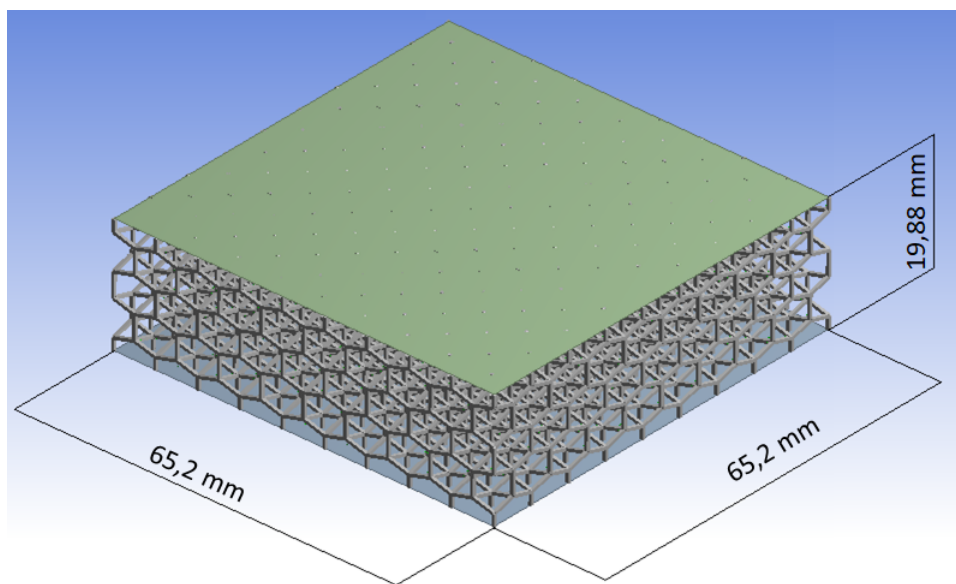


Figura 2.12: Modelo geométrico no auxético y sus dimensiones generales

Con propósito de demostrar el comportamiento auxético del modelo, se decide realizar un análisis estático simple para ambos modelos y contrastarlos. El análisis estático corresponde a someter ambos paneles a un soporte empotrado en la placa inferior y a una solicitación de fuerza distribuida en la superficie superior equivalente a 1 MPa. Los resultados cualitativos de las deformaciones se muestran a continuación en las Figuras 2.13 y 2.14.

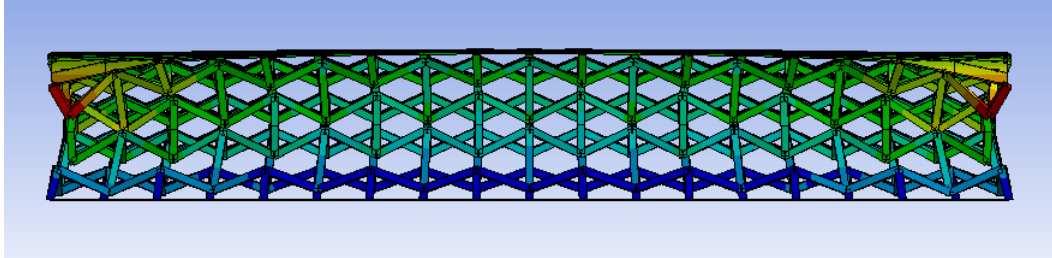


Figura 2.13: Deformación bajo carga uniforme del panel auxético

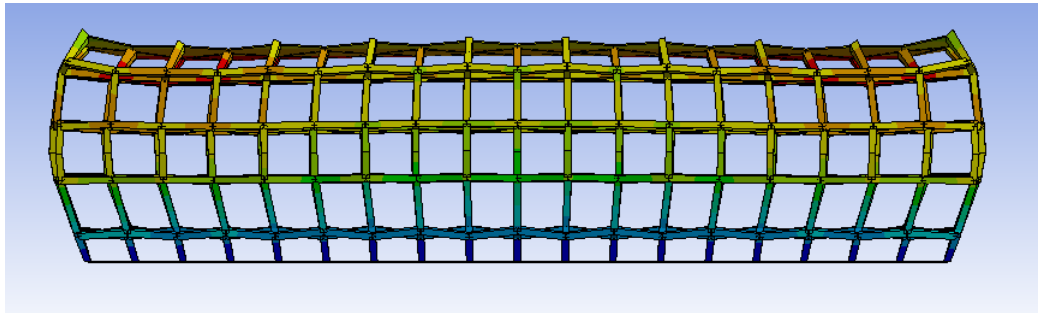


Figura 2.14: Deformación bajo carga uniforme del panel no auxético

Se puede apreciar que la Figura 2.13 presenta un comportamiento auxético debido a que al comprimirse en una dirección, se comprime también en las direcciones laterales. El efecto contrario ocurre en la Figura 2.14 la cual presenta un comportamiento no auxético típico. También se aprecia en ambas figuras la condición de borde empotrada para la placa inferior. Es necesario resaltar que este comportamiento solo se presenta en el rango elástico.

Se definieron dos formas de contacto entre la superficie superior y el núcleo, mientras que para la superficie inferior el contacto es el mismo en ambos casos, con todas las barras unidas a la placa inferior.

La primera forma consiste en un contacto en toda la superficie, es decir, sin delaminación añadida, mientras que en la segunda se agrega delaminación en el centro en forma circular con un radio aproximado de $15,3 [mm]$ y con un área de $734,75 [mm^2]$ de un total de $4251 [mm^2]$ equivalente a un $17,28 \%$ de la superficie superior. Se elige esta forma de delaminación porque es la más común debido a un impacto. En estricto rigor el área no es un círculo debido a que las uniones entre el núcleo y la piel son discretas, por lo que la figura que se forma es un octágono.

Una vez realizado el análisis para este daño, se repite el análisis en forma resumida, para una delaminación menor equivalente al 8,6 % del área de la placa superior, solo aplicado en el modelo auxético.

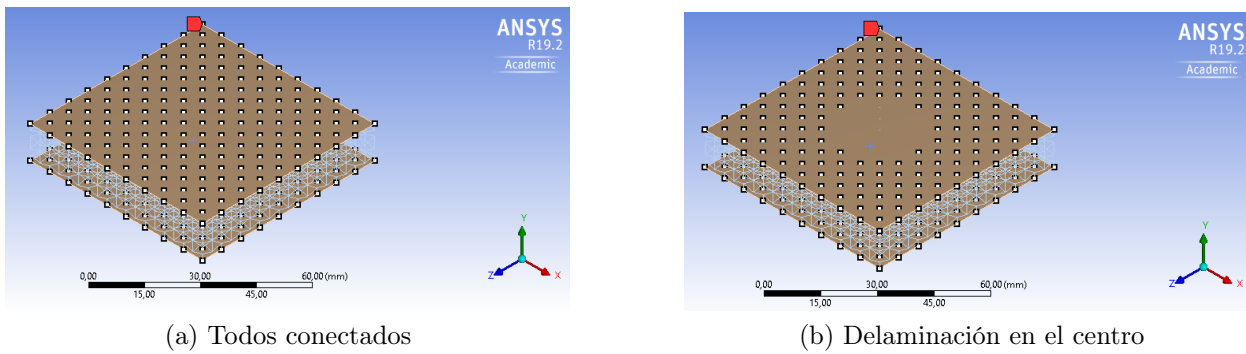


Figura 2.15: Contactos modelados

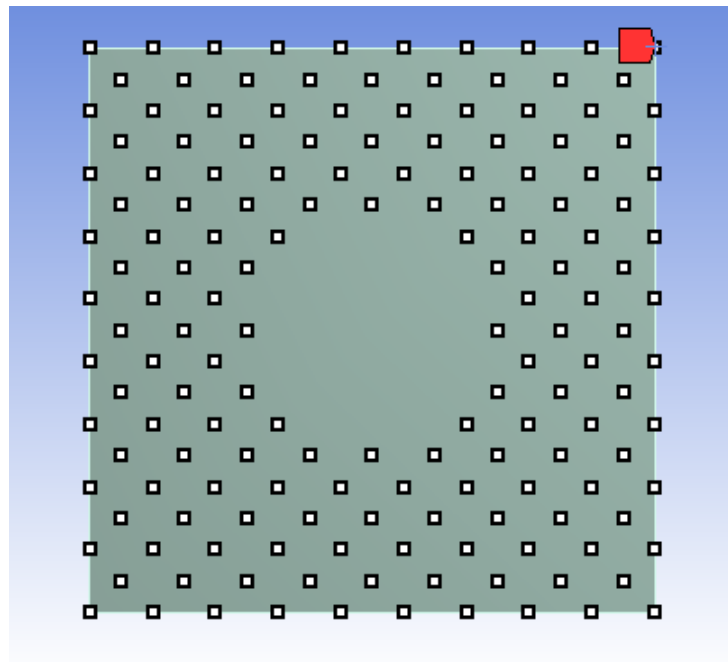


Figura 2.16: Zona de delaminación

Capítulo 3

Resultados obtenidos

Se encuentran los primeros 16 modos de vibración de la estructura, la cual no está sometida a apoyos en ningún lado, por lo que los primeros 6 modos son los de cuerpo rígido y por lo tanto, los resultados se centran en los siguientes 10 modos. Para encontrar con precisión los modos de vibración se realiza un análisis de convergencia de malla en las placas del panel sándwich.

Para obtener el mallado adecuado se utiliza el modelo del panel auxético sin delaminación, una vez se encuentre el mallado adecuado y aprovechándonos de las similitudes geométricas de ambos modelos, este mallado será utilizado en el modelo no auxético. Como parámetro de convergencia se utiliza la frecuencia de los modos, es decir, se obtienen los modos y las frecuencias a partir de una malla gruesa, para luego refinarla aumentando el número de elementos, aproximadamente al doble y con la nueva frecuencia obtenida calcular la diferencia relativa, para repetir este proceso hasta que esta diferencia sea menor a un 2 % para todos los modos. El refinamiento del mallado se hace homogéneamente, es decir, todos los elementos tienen aproximadamente el mismo tamaño. Es necesario destacar que se utiliza la frecuencia como parámetro ya que utilizar los modos es más complicado porque son vectores que cambia la cantidad de elementos al cambiar la malla, por lo que no es fácil cuantificar la diferencia entre una malla y otra, sin embargo se observa cualitativamente que los modos no cambiaban de forma al refinar la malla, sólo cambia el orden en que son presentados, lo cual tiene mucho sentido porque se ordenan de menor a mayor según las frecuencias, las cuales al ser recalculadas si varían su valor. También es necesario destacar que el estudio de convergencia de malla se hizo para los elementos de las placas y no para los elementos del núcleo, ya que se observa que no es necesario ocupar más de un elemento para cada barra.

A continuación se presenta el análisis de convergencia realizado resumido en una tabla.

Tabla 3.1: Análisis de convergencia de malla

Primer mallado: 9 elementos por lado		
Modo	Frecuencias	Error
7	1861,1-	
8	2761,5-	
9	2811-	
10	3171,1-	
11	3171,1-	
12	4179,1-	
13	4284,2-	
14	4284,3-	
15	4548-	
16	4894,6-	

Segundo mallado: 18 elementos por lado		
Modo	Frecuencias	Error
7	1688	0,103
8	2498,7	0,125
9	2499	0,105
10	2798,4	0,133
11	2798,4	0,133
12	3583,9	0,166
13	3725,5	0,150
14	3725,5	0,150
15	3984,7	0,141
16	4143,4	0,181

Tercer mallado: 40 elementos por lado		
Modo	Frecuencias	Error
7	1720,4	0,019
8	2461,9	0,015
9	2489,6	0,004
10	2822,8	0,009
11	2823,8	0,009
12	3590,8	0,038
13	3592,1	0,037
14	3638,4	0,015
15	3887,6	0,025
16	4115,4	0,007

Cuarto mallado: 80 elementos por lado		
Modo	Frecuencias	Error
7	1700,7	0,012
8	2429,8	0,013
9	2454,2	0,014
10	2786,4	0,013
11	2786,7	0,013
12	3525,2	0,019
13	3525,4	0,019
14	3588,2	0,014
15	3826,9	0,016
16	4046,4	0,017

Para calcular la diferencia se ocupa la siguiente fórmula:

$$Diferencia = \frac{FrecuenciaNueva - FrecuenciaAnterior}{FrecuenciaAnterior} \quad (3.1)$$

Para calcular adecuadamente la diferencia, se debe tener en cuenta el cambio en el orden de los modos debido al cambio en la frecuencia, lo cual ocurre cuando las frecuencias de los modos están cercanas, cómo lo es en el caso de los modos 8 y 9, y 12, 13 y 14.

Al obtener los modos de vibración ocurre un fenómeno de solapamiento entre la placa con delaminación y el núcleo, esto debido a las condiciones de contacto entre ambos. La condición de delaminación impuesta es de no contacto, aunque en la práctica el contacto que mejor modelaría la situación es el tipo de contacto sin fricción (frictionless) en el que se permita un contacto abierto, es decir, se impida la penetración pero a la vez se permita la separación y se permita también un deslizamiento sin fricción. Sin embargo el análisis modal es en si un análisis lineal, cómo se vio en el Capítulo 2, es la solución a un problema de valor

propio en el que la matriz de rigidez y de masa son constantes en el tiempo, pero al agregar este tipo de contacto se agregan no linealidades debidas al cambio en el área de contacto en el tiempo. Si bien se puede modelar con el contacto tipo sin fricción al resolver el modelo, este cambia automáticamente a una condición de no contacto, ya que solo considera las condiciones iniciales. Una solución más precisa a la delaminación sería un análisis dinámico de respuesta libre.

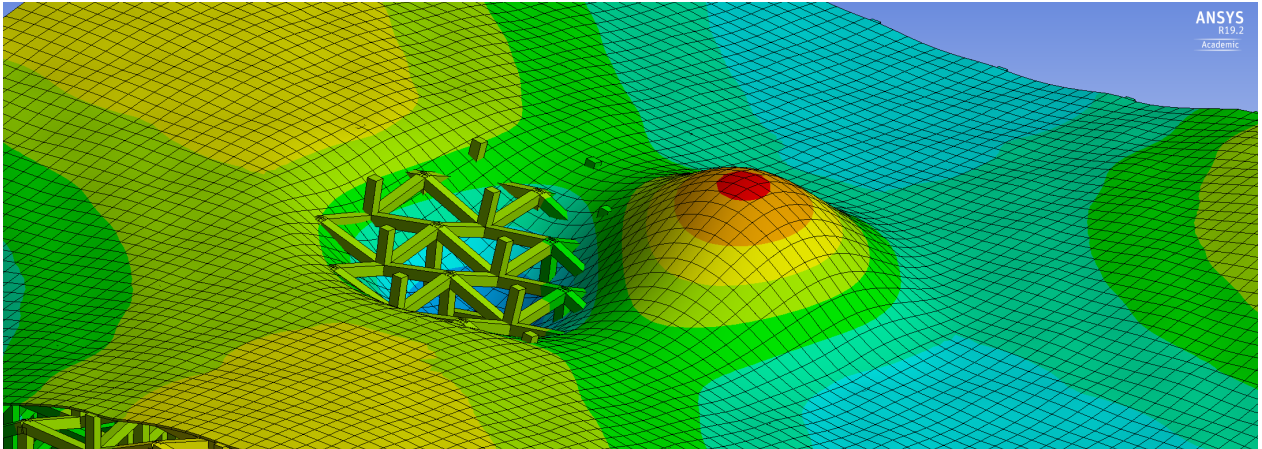


Figura 3.1: Solapamiento entre el núcleo y la placa superior

Con motivo de un mejor análisis se obtienen también los primeros 10 modos de vibración de una placa circular con el borde empotrado, con las mismas dimensiones y material que el sector delaminado. Los resultados se presentan en la sección de Anexos.

3.1. Modos de vibración de panel auxético

3.1.1. Caso sin delaminación

A continuación se presentan los modos de vibración de la placa superior de los paneles auxéticos sin delaminación ordenados de menor a mayor según su frecuencia, la cual va desde 1700,7 [Hz] hasta 4064,4 [Hz].

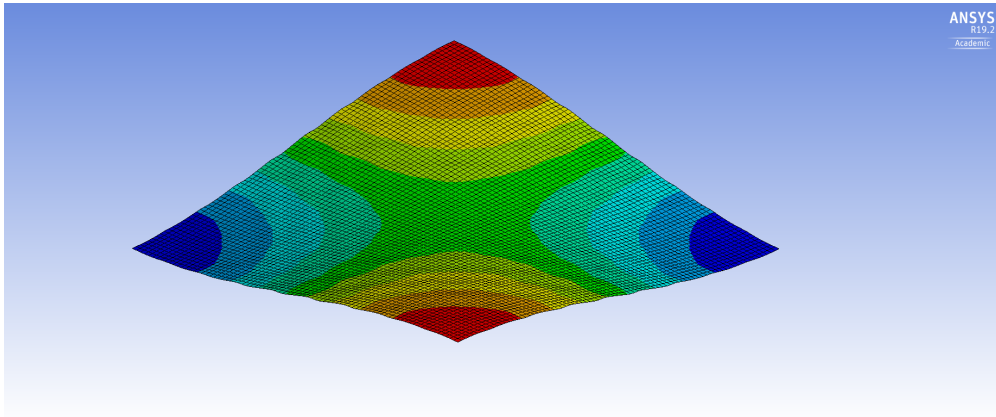


Figura 3.2: Modo 7. Frecuencia 1700,7 Hz

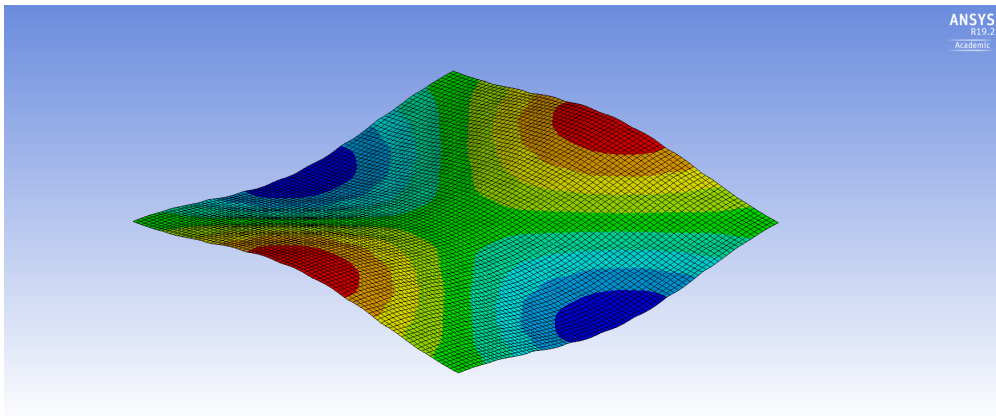


Figura 3.3: Modo 8. Frecuencia 2429,8 Hz

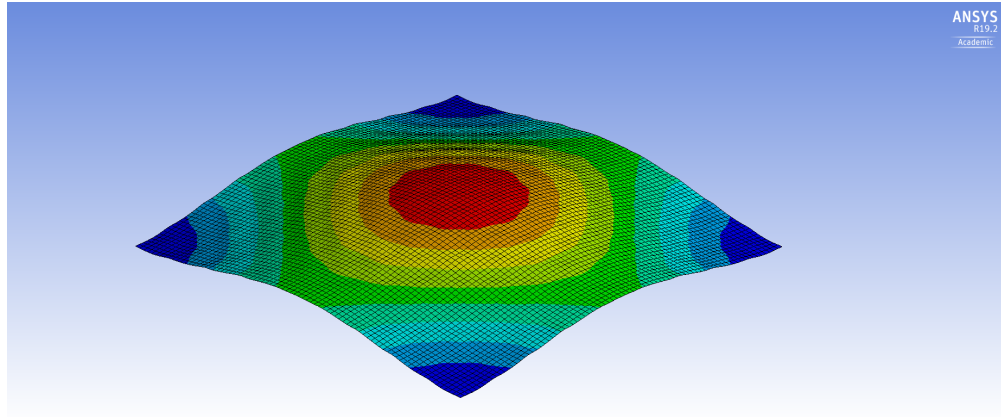


Figura 3.4: Modo 9. Frecuencia 2454,2 Hz

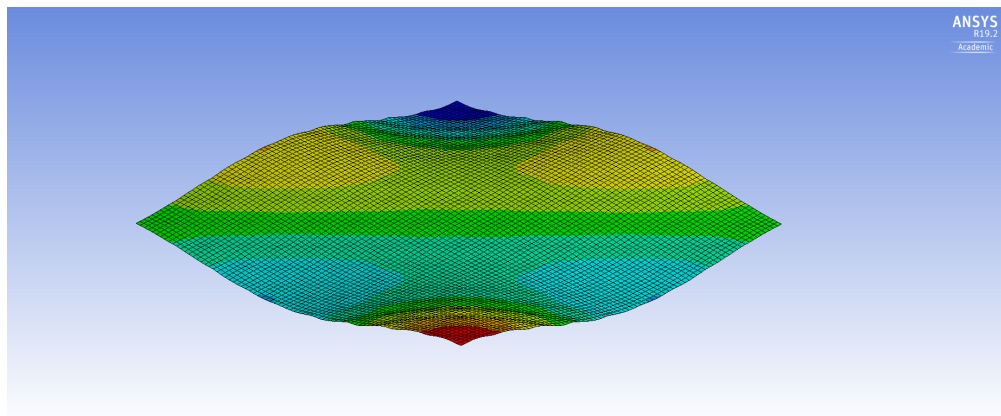


Figura 3.5: Modo 10. Frecuencia 2786,4 Hz

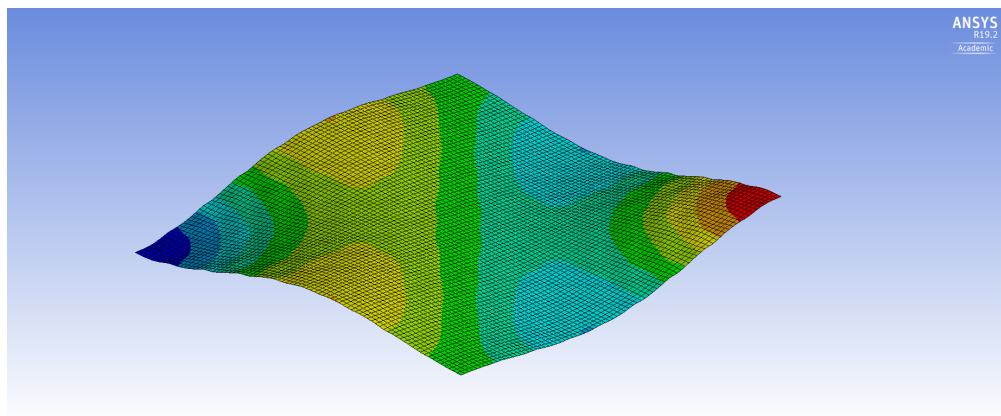


Figura 3.6: Modo 11. Frecuencia 2786,7 Hz

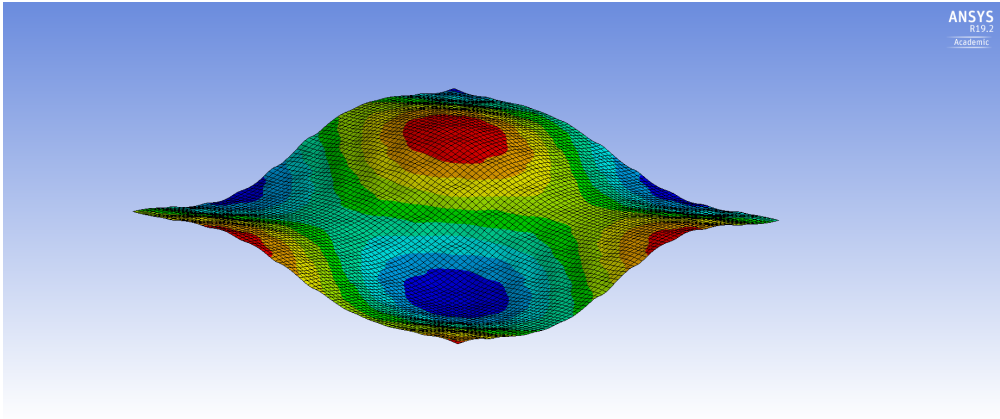


Figura 3.7: Modo 12. Frecuencia 3525,2 Hz

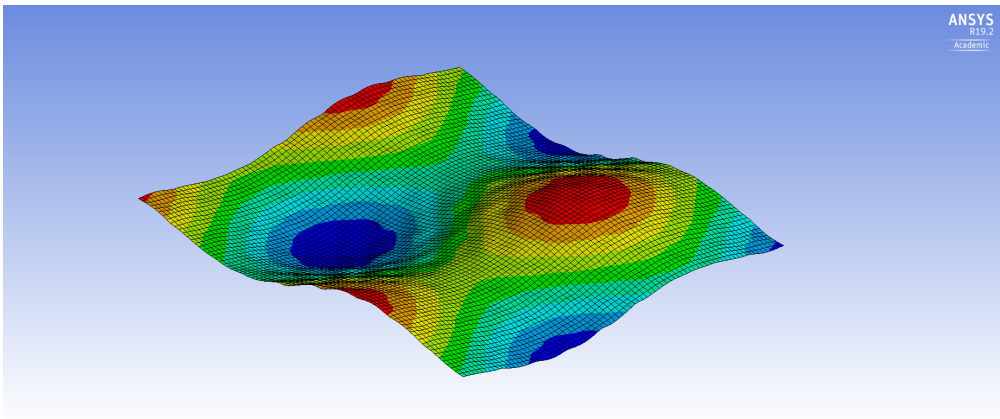


Figura 3.8: Modo 13. Frecuencia 3525,4 Hz

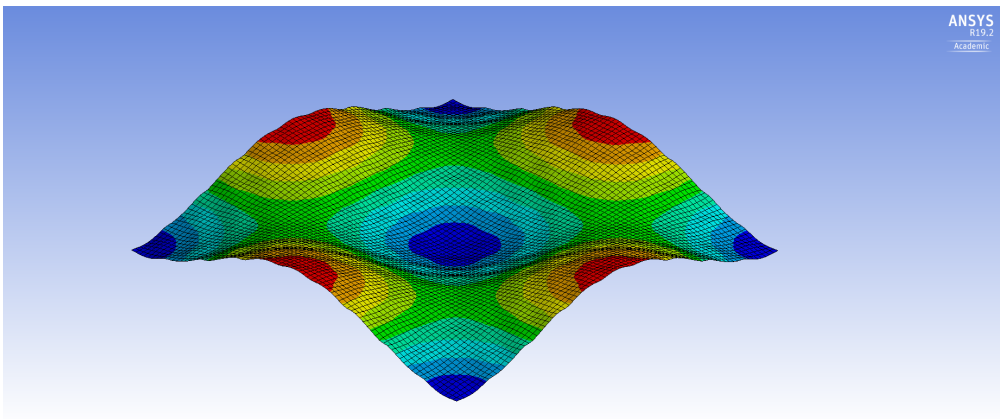


Figura 3.9: Modo 14. Frecuencia 3588,2 Hz

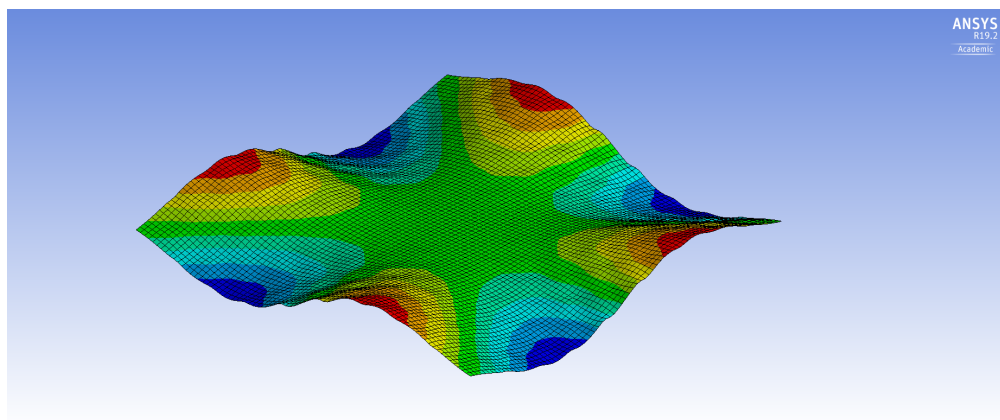


Figura 3.10: Modo 15. Frecuencia 3826,9 Hz

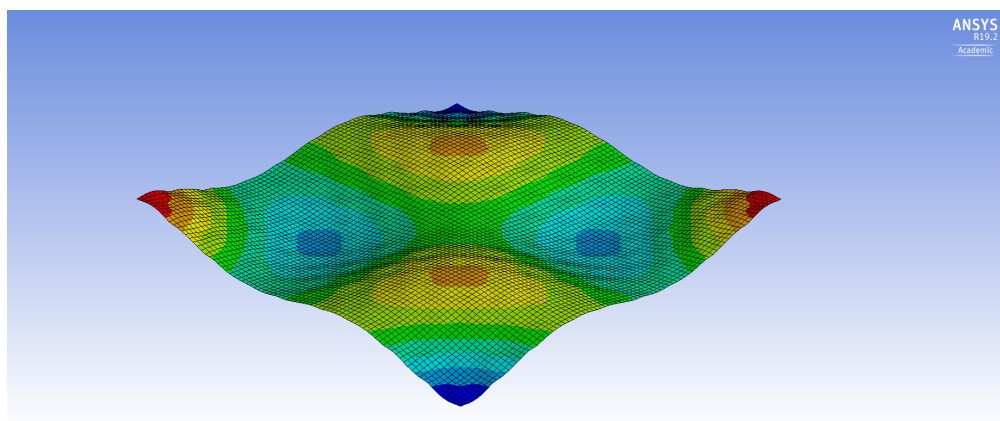


Figura 3.11: Modo 16. Frecuencia 4046,4 Hz

3.1.2. Caso con delaminación

A continuación se presentan los modos de vibración de la placa superior de los paneles auxéticos con delaminación ordenados de menor a mayor según su frecuencia, la cual va desde 1051 [Hz] hasta 3460 [Hz].

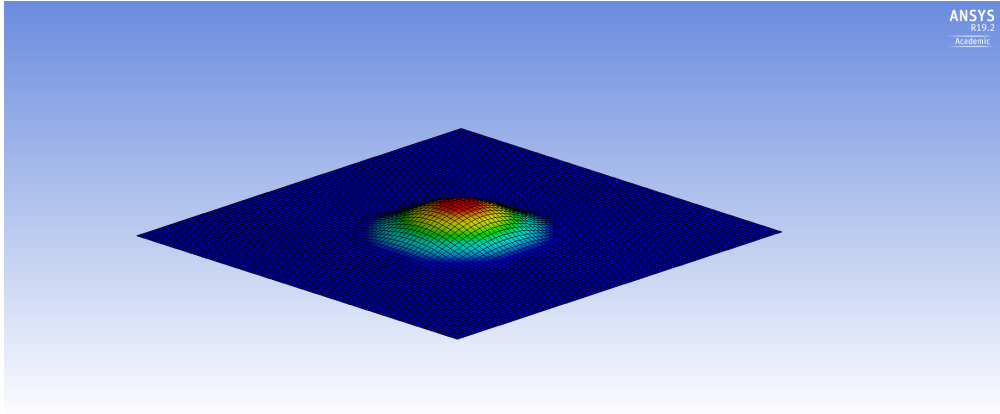


Figura 3.12: Frecuencia 1051 Hz

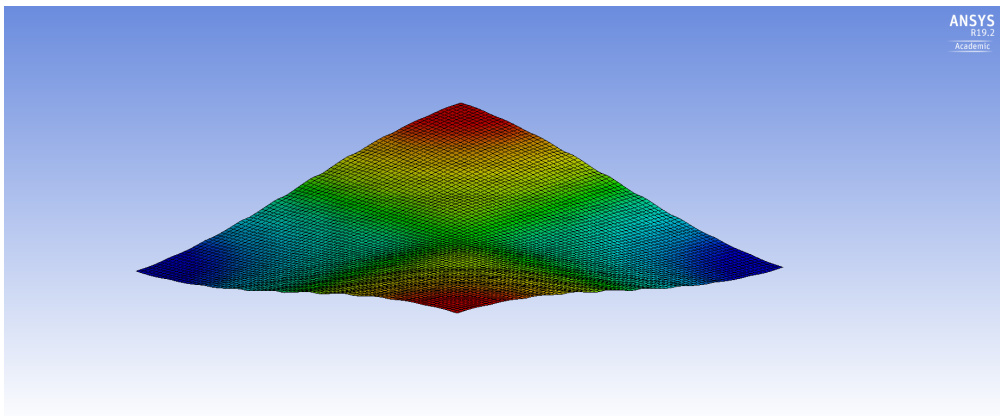


Figura 3.13: Modo 8. Frecuencia 1694,6 Hz

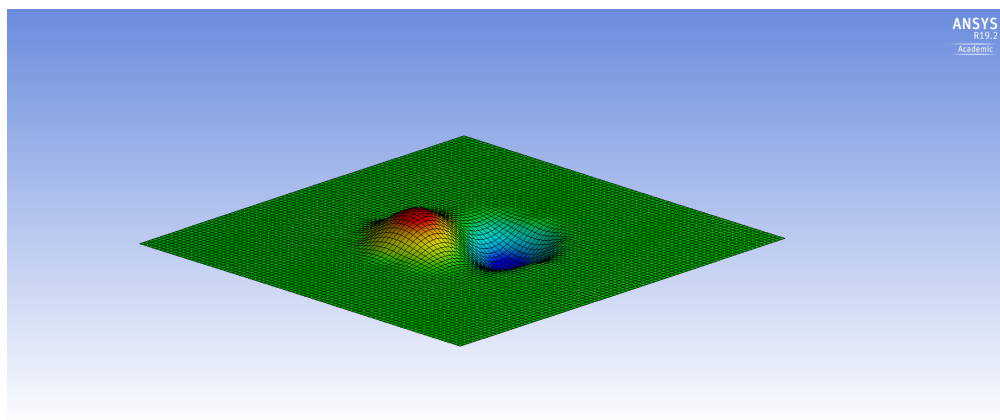


Figura 3.14: Modo 9. Frecuencia 2140,7 Hz

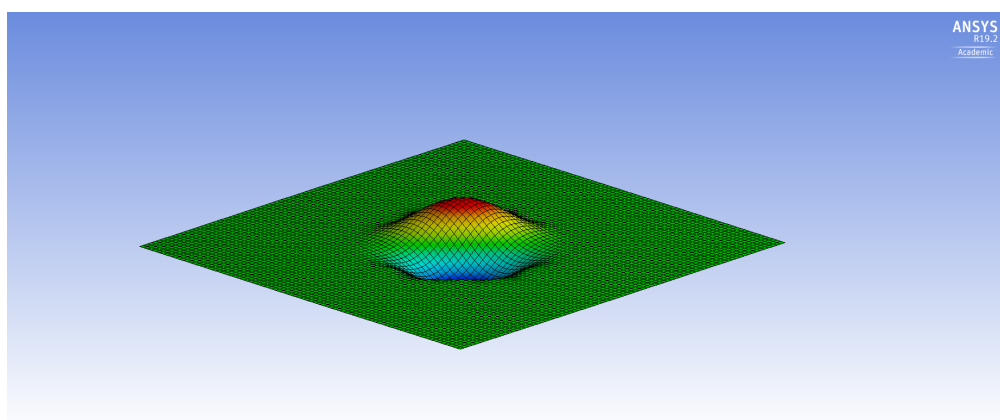


Figura 3.15: Modo 10. Frecuencia 2142,6 Hz

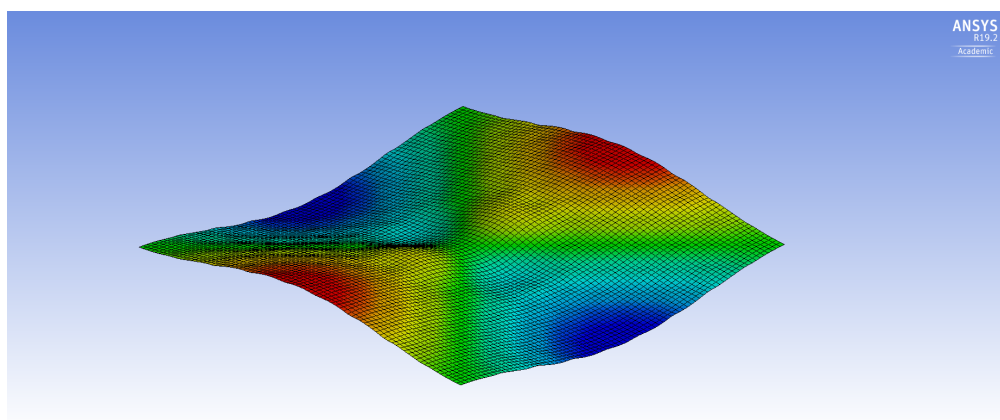


Figura 3.16: Modo 11. Frecuencia 2416,6 Hz

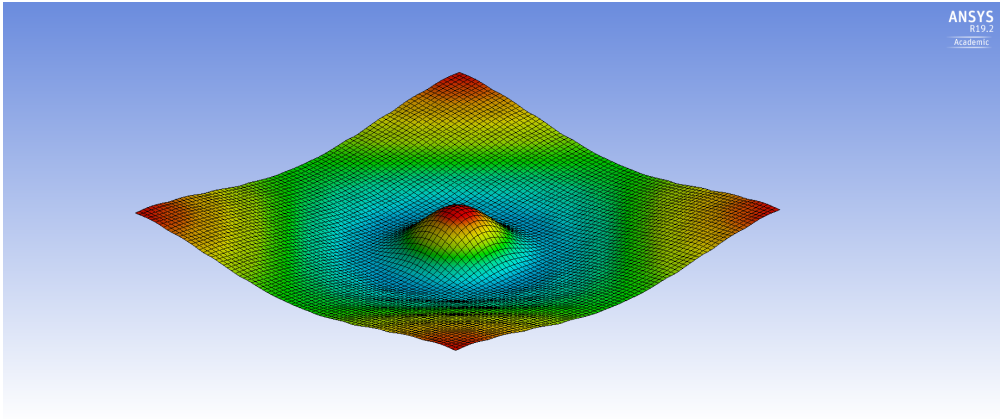


Figura 3.17: Modo 12. Frecuencia 2483,4 Hz

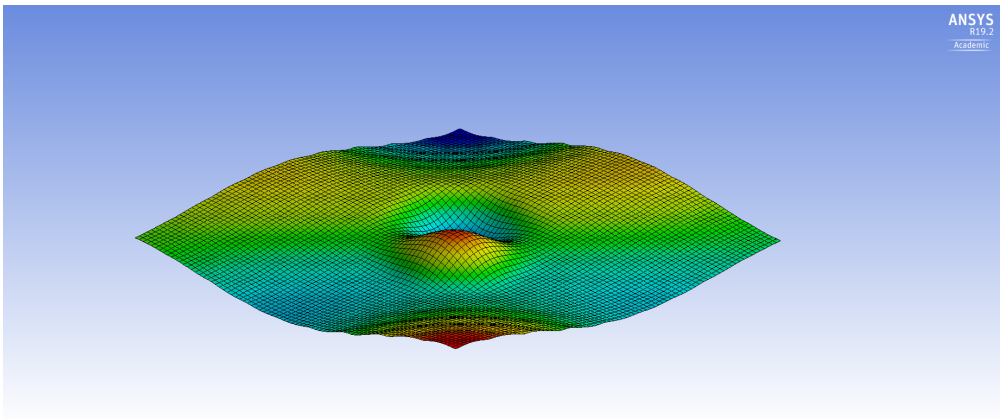


Figura 3.18: Modo 13. Frecuencia 2774,5 Hz

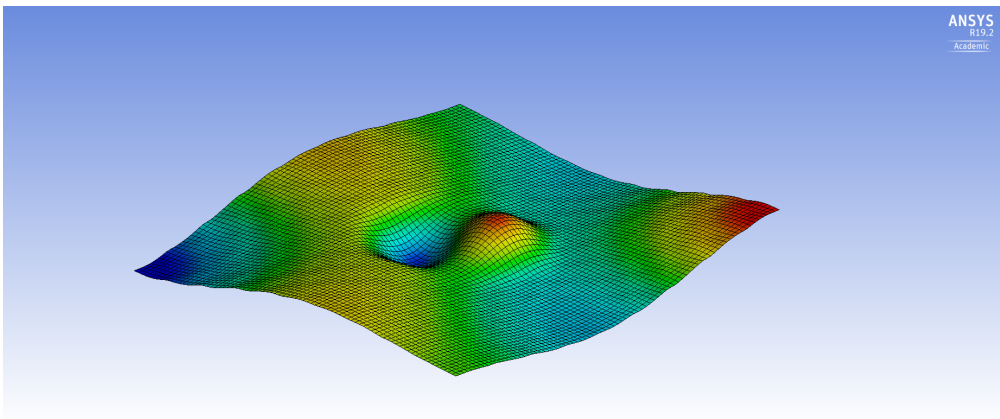


Figura 3.19: Modo 14. Frecuencia 2774,5 Hz

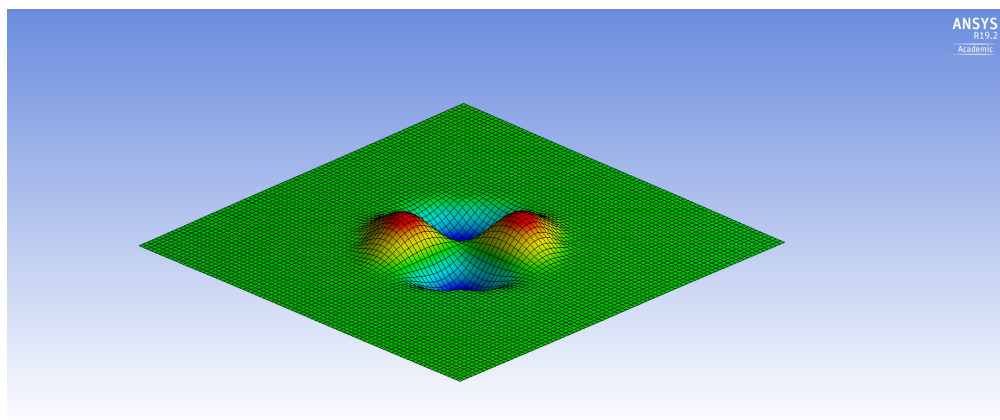


Figura 3.20: Modo 15. Frecuencia 3356 Hz

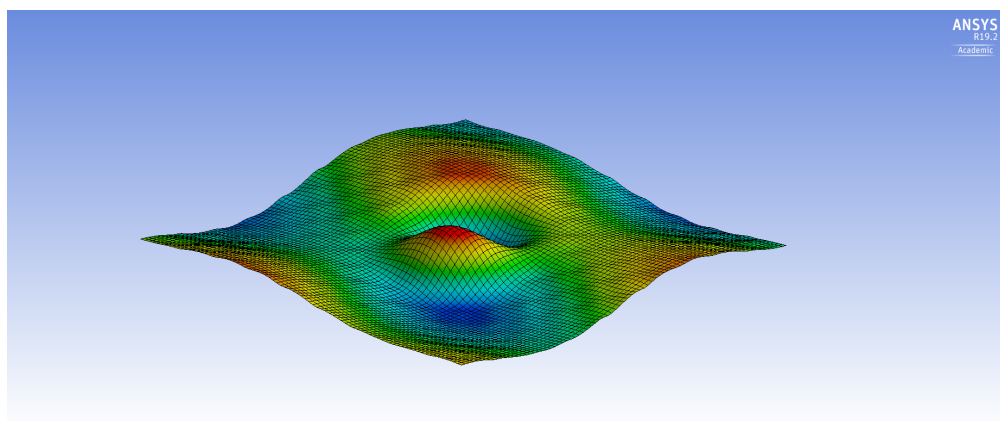


Figura 3.21: Modo 16. Frecuencia 3460 Hz

3.2. Modos de vibración de panel no auxético

En esta sección se presentan los modos de vibración de la placa superior de los paneles no auxéticos sin delaminación ordenados de menor a mayor según su frecuencia, la cual va desde 2760 [Hz] hasta 6400,1 [Hz].

3.2.1. Caso sin delaminación

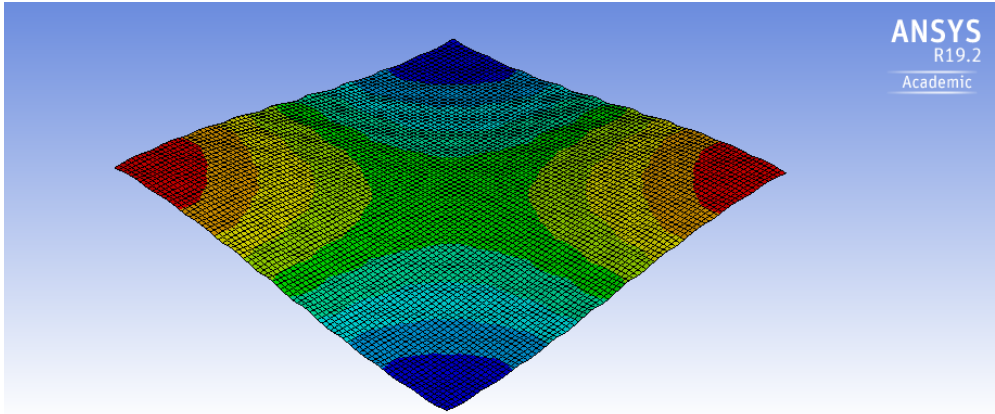


Figura 3.22: Modo 7. Frecuencia 2760 Hz

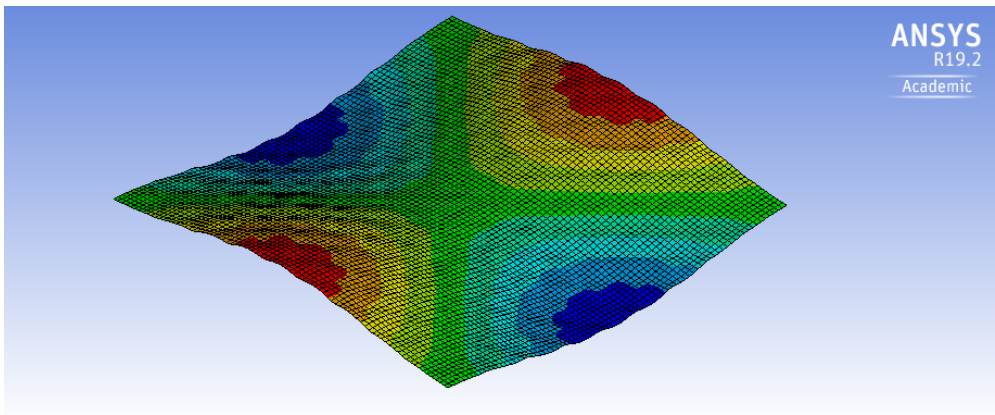


Figura 3.23: Modo 8. Frecuencia 3920,2 Hz

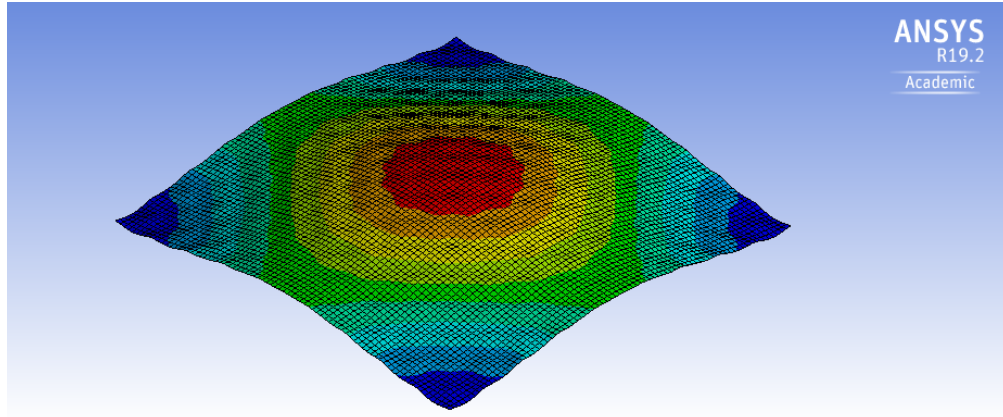


Figura 3.24: Modo 9. Frecuencia 3956,1 Hz

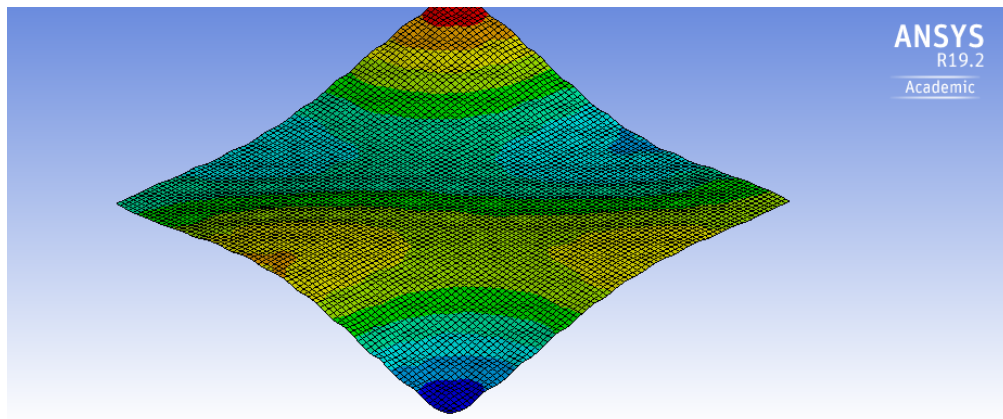


Figura 3.25: Modo 10. Frecuencia 4479,9 Hz

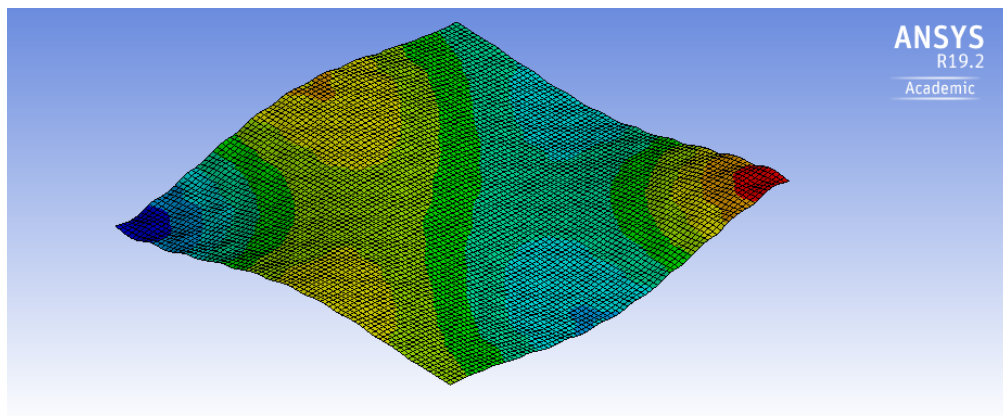


Figura 3.26: Modo 11. Frecuencia 4480 Hz

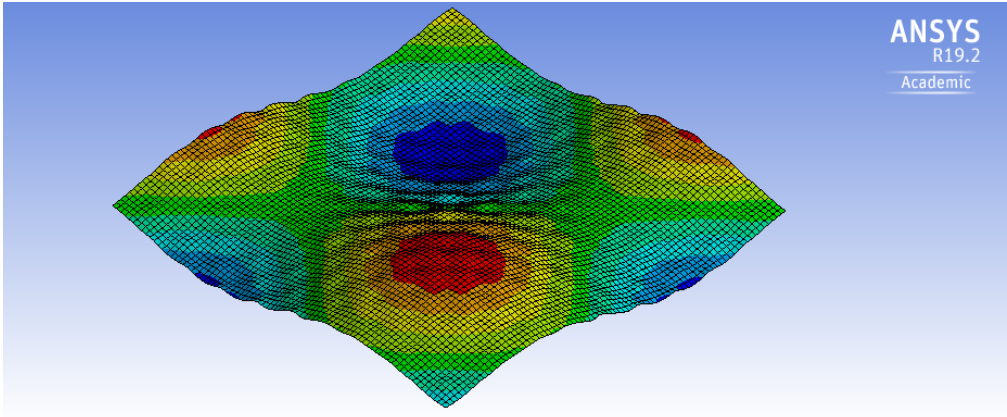


Figura 3.27: Modo 12. Frecuencia 5081,7 Hz

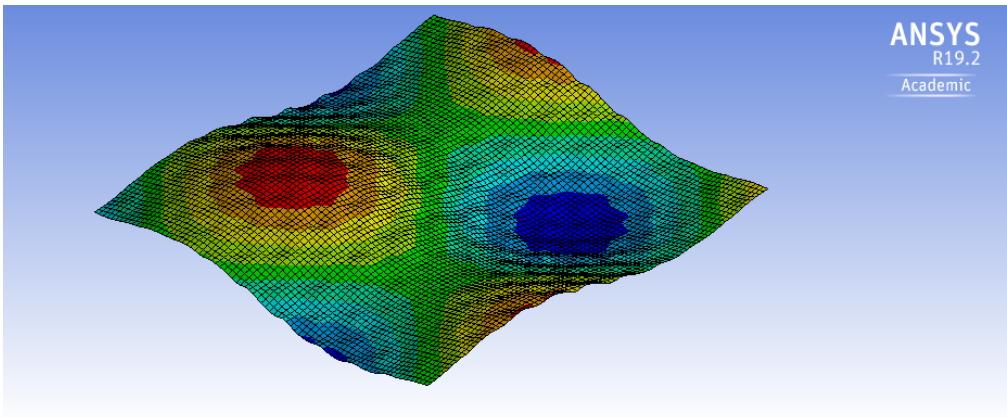


Figura 3.28: Modo 13. Frecuencia 5082 Hz

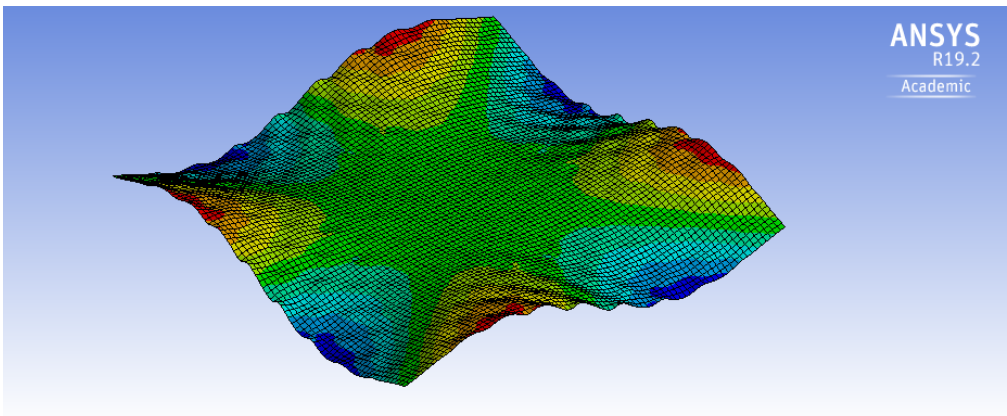


Figura 3.29: Modo 14. Frecuencia 5280,1 Hz

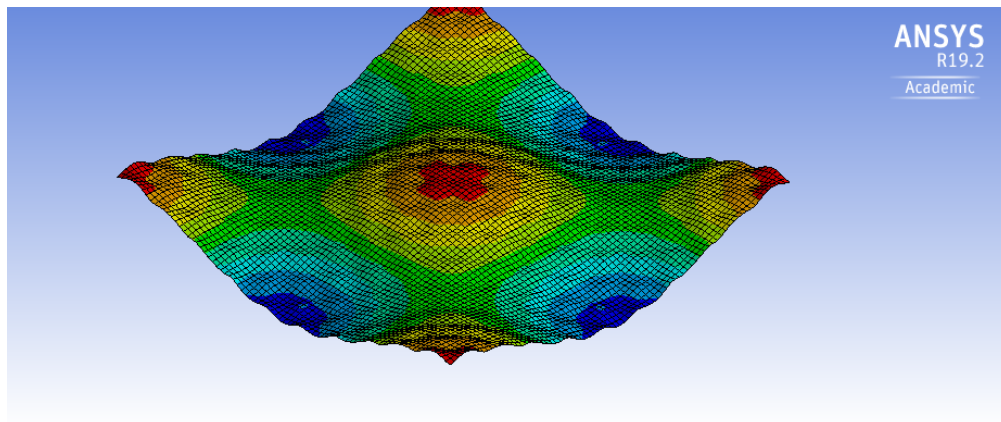


Figura 3.30: Modo 15. Frecuencia 5716,3 Hz

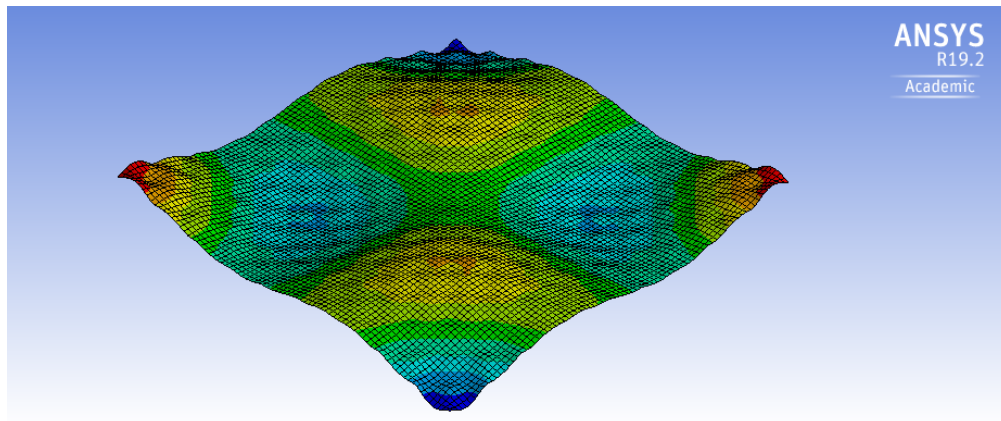


Figura 3.31: Modo 16. Frecuencia 6400,1 Hz

3.2.2. Caso con delaminación

Se presentan a continuación los modos de vibración de la placa superior de los paneles no auxéticos con delaminación ordenados de menor a mayor según su frecuencia, la cual va desde 1052,3 [Hz] hasta 4436,9 [Hz].

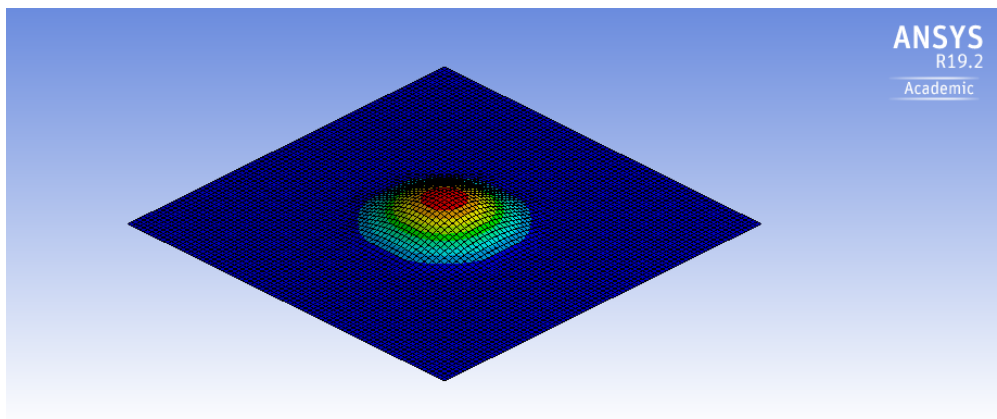


Figura 3.32: Modo 7. Frecuencia 1052,3 Hz

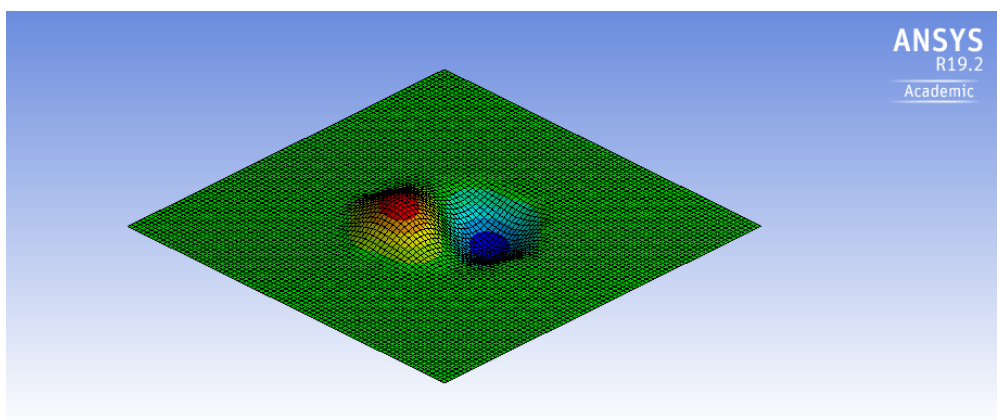


Figura 3.33: Modo 8. Frecuencia 2155,8 Hz

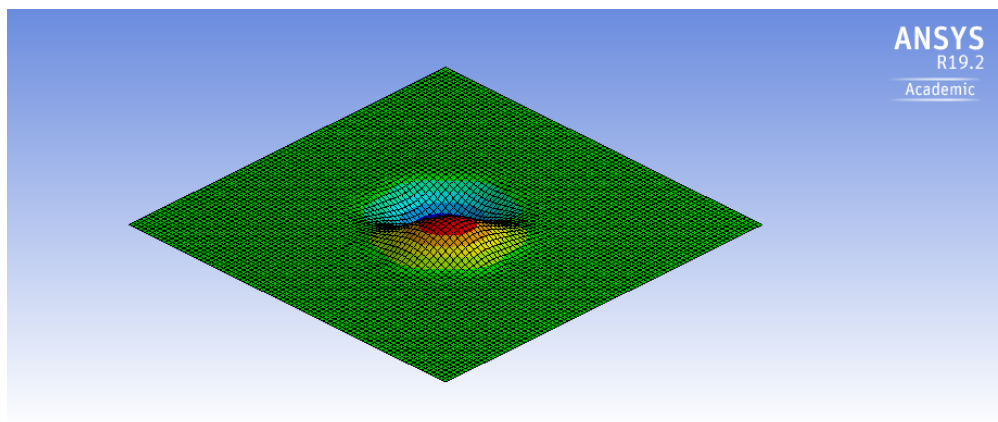


Figura 3.34: Modo 9. Frecuencia 2156,8 Hz

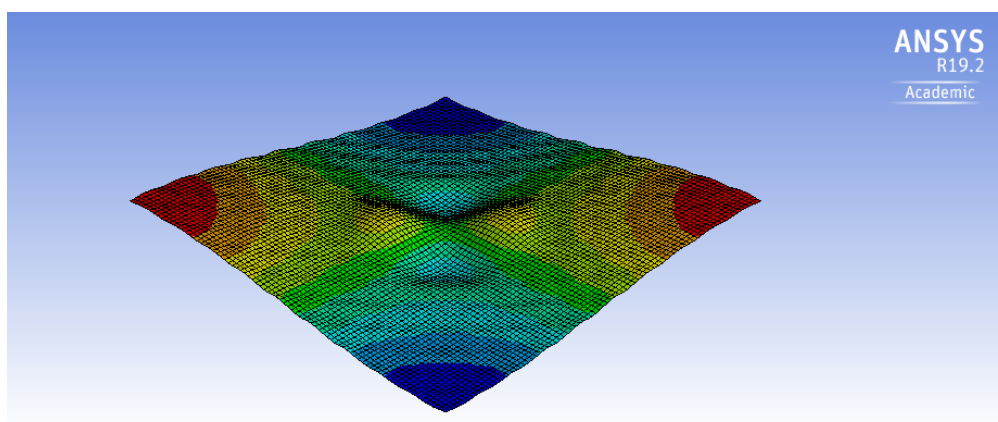


Figura 3.35: Modo 10. Frecuencia 2747,8 Hz

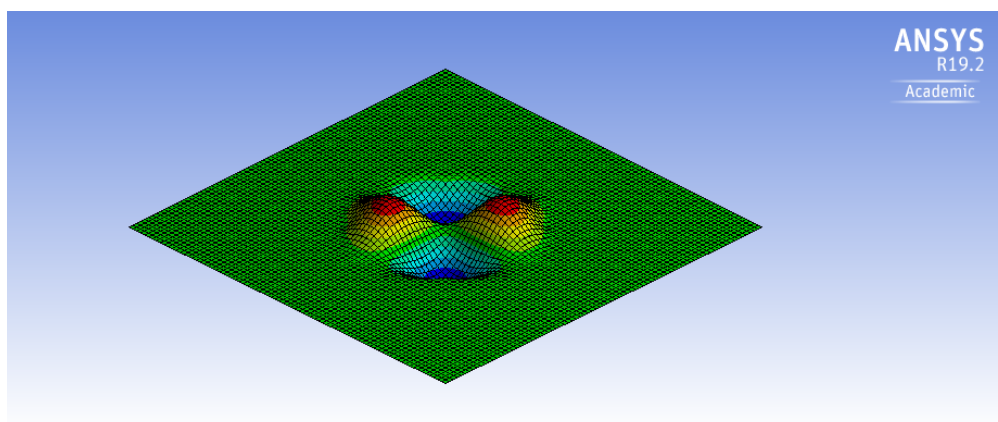


Figura 3.36: Modo 11. Frecuencia 3391,9 Hz

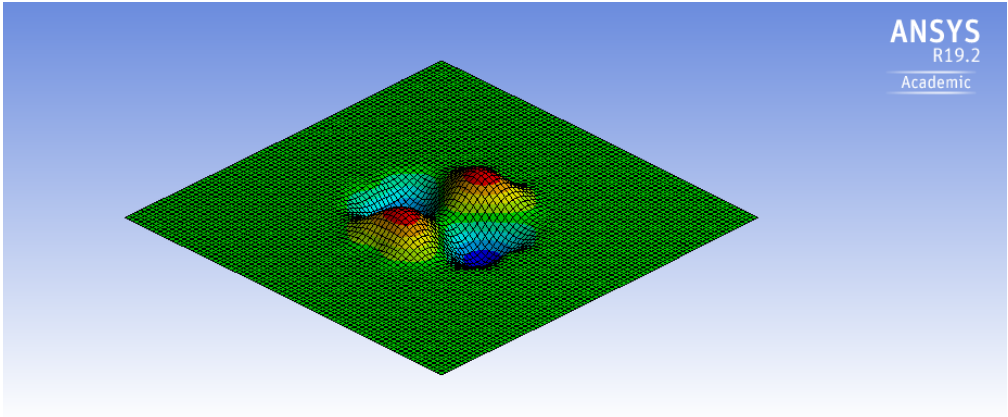


Figura 3.37: Modo 12. Frecuencia 3601,8 Hz

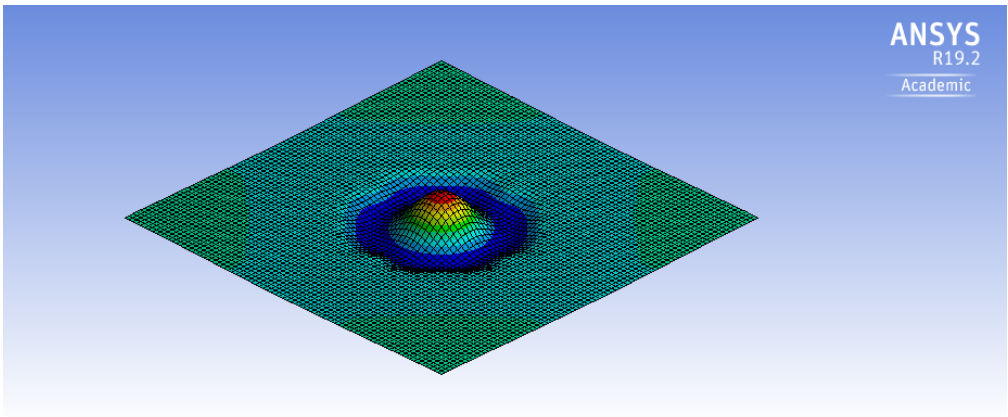


Figura 3.38: Modo 13. Frecuencia 3882,6 Hz

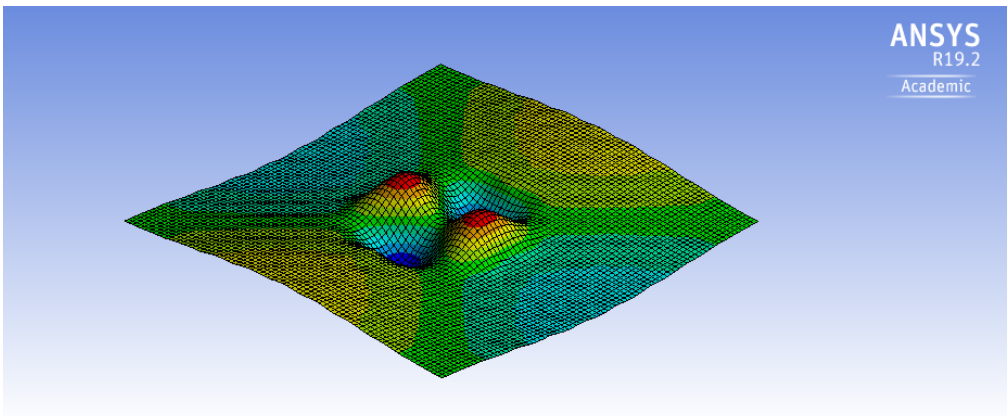


Figura 3.39: Modo 14. Frecuencia 3918,1 Hz

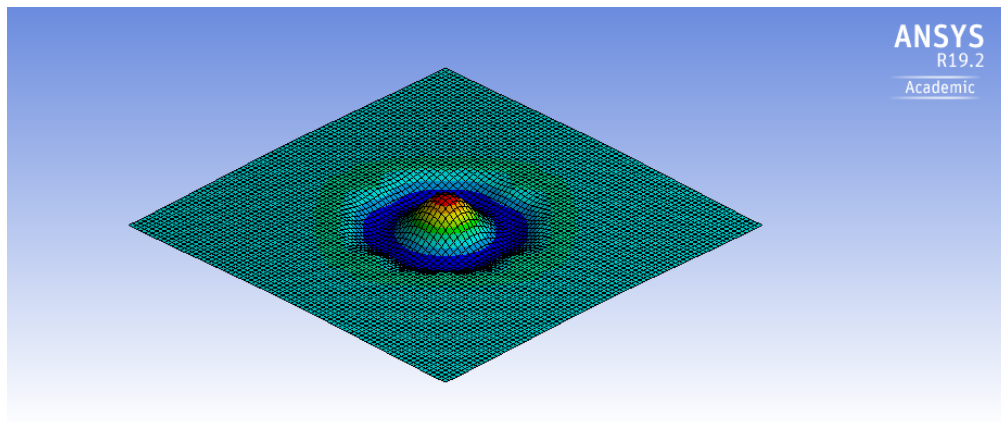


Figura 3.40: Modo 15. Frecuencia 4138,4 Hz

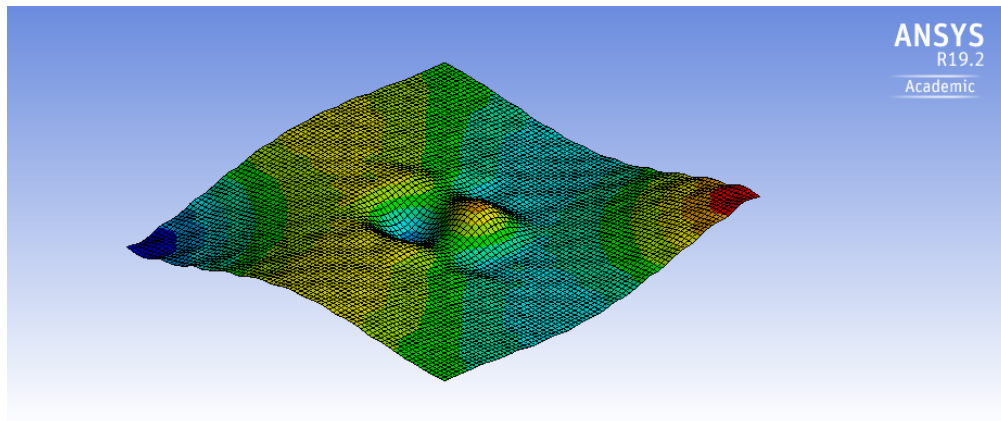


Figura 3.41: Modo 16. Frecuencia 4436,9 Hz

Por consideraciones de espacio, las imágenes de los modos de vibración de las placas inferiores del modelo con delaminación se adjuntan en la sección de Anexos. Para el caso sin delaminación los modos en las placas superior e inferior son iguales por lo que no es necesario mostrar dichos modos.

Con respecto a los modos de vibración obtenidos, se destaca en primer lugar que los modos de vibración obtenidos para el caso sin delaminación son los mismos que se encuentran en la literatura para una placa cuadrada delgada. [17, 18]

Se puede notar que los casos sin delaminación entre el modelo auxético y el modelo no auxético son muy parecidos, salvo que el orden de los modos 14 y 15 están intercambiados, como se puede apreciar al comparar las Figuras 3.9 y 3.10 con las Figuras 3.29 y 3.30. El orden correcto corresponde al obtenido en el caso auxético. Las diferencias de las frecuencias entre los modos 14 y 15 no es pequeña, por lo que al refinar aún más la malla no se arreglaría este cambio en el orden. Las frecuencias del modelo auxético se encuentran entre 1700 [Hz] y 4050 [Hz] mientras que para el modelo no auxético varían desde 2700 [Hz] a 6400 [Hz], siendo estas últimas bastante mayores que las primeras. Esto puede ser debido en parte al comportamiento no auxético de la estructura o bien a la diferencia en la geometría, ya que el modelo no auxético presenta una distancia entre placas mayor que el modelo auxético. Se puede apreciar que hay dos pares de modos que tienen prácticamente la misma frecuencia y además tienen la misma forma, estos modos se muestran en las Figuras 3.5 y 3.6, 3.7 y 3.8 para el modelo auxético, 3.25 y 3.26, 3.27 y 3.28 para el modelo no auxético. Esto es debido a la simetría de la placa cuadrada.

Se puede observar que ocurre un desfase al comparar los modos de vibración entre el caso sin delaminación con el caso con delaminación, tanto para el modelo auxético como para el modelo no auxético, ya que por ejemplo los modos 7 y 8 mostrados en las Figuras 3.2 y 3.3 corresponden a los modos 8 y 11 de las Figuras 3.13 y 3.16 esto es debido a que al agregar delaminación aparecen nuevos modos, como lo son los de las Figuras 3.12, 3.14, 3.15, 3.20 entre otros. Además ocurre un desfase en las frecuencias (shift), que en general tiende a disminuir las frecuencias de vibración de los modos, lo que ya ha sido observado en paneles sándwich tradicionales al agregar delaminación. [11]

En los nuevos modos que aparecen al agregar delaminación se observa como es excitada la parte de delaminación y el resto de la placa se mantiene sin deformarse a simple vista, es decir, en estos modos solo se excita el área delaminada. Al comparar las Figuras 3.12, 3.14, 3.15, 3.20 con las Figuras 3.69, 3.70, 3.71 y 3.72, se observa que se presentan los mismos modos de una placa circular empotrada, lo que es esperable ya que al agregar la delaminación el sector circular puede vibrar sujeto a las uniones con el núcleo, y al ser de tipo bonded, tiene los mismos grados de libertad que una unión empotrada. Se observa también que los modos de vibración de una placa circular que aparecen en la delaminación son los primeros cuatro modos, es decir los de frecuencias más bajas, lo que concuerda con lo esperado.

Aparte de los modos en los que se excita principalmente la zona delaminada aparecen modos en los que se observa una mezcla entre el modo normal sin delaminación y el modo de una placa circular. Ejemplos de estos modos son las Figuras 3.17, 3.18, 3.19 y 3.21, además se puede notar levemente en la Figura 3.16. El modo 8, Figura 3.13, no muestra a simple vista presencia de la delaminación, lo que tiene sentido ya que en este modo se intersectan

líneas nodales de cero desplazamiento en el centro, es decir, la zona central no se excita. Lo mismo ocurre para el caso de la Figura 3.16, salvo que al tener una mayor frecuencia natural se aprecia una leve participación del modo 4 de una placa circular (Figura 3.72) en las zonas cercanas al centro de la placa.

Lo mismo que ocurre para el modelo auxético se observa para el modelo no auxético, salvo que para el modelo no auxético al presentar frecuencias naturales más elevadas se aprecia que aparece también el modo 6 de la placa circular. Basta comparar las Figuras 3.38, 3.40 con la Figura 3.74.

Para poder emparejar cuantitativamente los modos de vibración entre ellos es necesario ocupar una herramienta denominada Modal Assurance Criterion (MAC).

3.3. Modal Assurance Criterion

El MAC es un indicador estadístico, análogo a la función de coherencia en procesamiento de señales, que permite correlacionar los modos de vibración, puede ser utilizado para comparar aquellos obtenidos experimentalmente con los obtenidos analíticamente. En este trabajo se utiliza únicamente comparando modos obtenidos analíticamente.

El MAC entre dos vectores (modos) $\vec{\phi}_A$ y $\vec{\phi}_B$ se calcula de la siguiente manera.

$$MAC(\vec{\phi}_A, \vec{\phi}_B) = \left(\frac{\vec{\phi}_A^t \cdot \vec{\phi}_B}{\|\vec{\phi}_A\| \cdot \|\vec{\phi}_B\|} \right)^2 \quad (3.2)$$

El resultado del MAC es un escalar entre 0 y 1, en donde 0 indica que no hay correspondencia entre los modos y 1 representa que si hay consistencia. En general este método se utiliza sobre dos conjuntos de vectores que son los modos que se quieren comparar, y da como resultado una matriz, en donde cada componente es el MAC entre un par de vectores. Es necesario destacar que en el caso de trabajar con modos de vibración experimentales estos pueden tener componentes complejas, en cuyo caso la formulación es la siguiente [18]:

$$MAC(\vec{\phi}_A, \vec{\phi}_B) = \frac{|\vec{\phi}_A^H \cdot \vec{\phi}_B|}{(\vec{\phi}_A^H \cdot \vec{\phi}_A)(\vec{\phi}_B^H \cdot \vec{\phi}_B)} \quad (3.3)$$

En donde el superíndice H representa la matriz hermitiana (transpuesta conjugada).

Este método no demuestra ortogonalidad, ya que en ningún momento se ocupa la matriz de masa o de rigidez. Además al ser un indicador estadístico se requiere que los modos tengan una gran cantidad de elementos para que no ocurra sesgo.

A continuación se presentan los MAC's obtenidos a partir del caso con delaminación y sin delaminación de la placa superior e inferior de los paneles auxético y no auxético.

Tabla 3.2: Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para la placa superior del panel sándwich auxético

		Sin delaminación									
		Modo 7	Modo 8	Modo 9	Modo 10	Modo 11	Modo 12	Modo 13	Modo 14	Modo 15	Modo 16
		1700,7 [Hz]	2429,8 [Hz]	2454,2 [Hz]	2786,4 [Hz]	2786,7 [Hz]	3525,2 [Hz]	3525,4 [Hz]	3588,2 [Hz]	3826,9 [Hz]	4046,4 [Hz]
Con delaminación	Modo 7 1051 [Hz]	0,00000	0,00000	0,31518	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,21265	0,00000	0,00000
	Modo 8 1694,6 [Hz]	0,99798	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00267
	Modo 9 2140,7 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00002	0,04122	0,00443	0,11537	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 10 2142,6 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,04108	0,00002	0,11454	0,00439	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 11 2416,6 [Hz]	0,00000	0,98907	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 12 2483,4 [Hz]	0,00001	0,00000	0,58856	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,09715	0,00000	0,00001
	Modo 13 2774,5 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,77520	0,00866	0,01368	0,00007	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 14 2774,5 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00857	0,77376	0,00006	0,01313	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 15 3356 [Hz]	0,00174	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,06068
	Modo 16 3460 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,01257	0,00103	0,68963	0,00901	0,00000	0,00000	0,00000

Tabla 3.3: Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para la placa inferior del panel sándwich auxético

		Sin delaminación									
		Modo 7	Modo 8	Modo 9	Modo 10	Modo 11	Modo 12	Modo 13	Modo 14	Modo 15	Modo 16
		1700,7 [Hz]	2429,8 [Hz]	2454,2 [Hz]	2786,4 [Hz]	2786,7 [Hz]	3525,2 [Hz]	3525,4 [Hz]	3588,2 [Hz]	3826,9 [Hz]	4046,4 [Hz]
Con delaminación	Modo 7 1051 [Hz]	0,00001	0,00000	0,06755	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00434	0,00000	0,00000
	Modo 8 1694,6 [Hz]	0,99996	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00169
	Modo 9 2140,7 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00025	0,58617	0,01083	0,28240	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 10 2142,6 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,58665	0,00027	0,27868	0,01064	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 11 2416,6 [Hz]	0,00000	0,99990	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 12 2483,4 [Hz]	0,00000	0,00000	0,99952	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00017	0,00000	0,00001
	Modo 13 2774,5 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,98799	0,01104	0,00091	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 14 2774,5 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,01094	0,98807	0,00001	0,00114	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 15 3356 [Hz]	0,02261	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,86821
	Modo 16 3460 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00140	0,00010	0,98486	0,01295	0,00000	0,00000	0,00000

Tabla 3.4: Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para ambas placas del panel sándwich auxético

		Sin delaminación									
		Modo 7	Modo 8	Modo 9	Modo 10	Modo 11	Modo 12	Modo 13	Modo 14	Modo 15	Modo 16
		1700,7 [Hz]	2429,8 [Hz]	2454,2 [Hz]	2786,4 [Hz]	2786,7 [Hz]	3525,2 [Hz]	3525,4 [Hz]	3588,2 [Hz]	3826,9 [Hz]	4046,4 [Hz]
Con delaminación	Modo 7 1051 [Hz]	0,00000	0,00000	0,16237	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,10723	0,00000	0,00000
	Modo 8 1694,6 [Hz]	0,99896	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00215
	Modo 9 2140,7 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,02735	0,00250	0,06513	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 10 2142,6 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,02732	0,00001	0,06469	0,00248	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 11 2416,6 [Hz]	0,00000	0,99437	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 12 2483,4 [Hz]	0,00001	0,00000	0,79117	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,01888	0,00000	0,00001
	Modo 13 2774,5 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,87593	0,00978	0,00201	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 14 2774,5 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00969	0,87516	0,00001	0,00175	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 15 3356 [Hz]	0,00054	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,04510
	Modo 16 3460 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00563	0,00045	0,82942	0,01088	0,00000	0,00000	0,00000

Tabla 3.5: Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para la placa superior del panel sándwich no auxético

		Sin delaminación									
		Modo 7 2760 [Hz]	Modo 8 3920,2 [Hz]	Modo 9 3956,1 [Hz]	Modo 10 4479,9 [Hz]	Modo 11 4480 [Hz]	Modo 12 5081,7 [Hz]	Modo 13 5082 [Hz]	Modo 14 5280,1 [Hz]	Modo 15 5716,3 [Hz]	Modo 16 6400,1 [Hz]
Con delaminación	Modo 7 1052,3 [Hz]	0,00000	0,00000	0,31106	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,21394	0,00000
	Modo 8 2155,8 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00173	0,03240	0,00053	0,09471	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 9 2156,8 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,03224	0,00174	0,09425	0,00054	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 10 2747,8 [Hz]	0,97334	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00485
	Modo 11 3391,9 [Hz]	0,00073	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,04020
	Modo 12 3601,8 [Hz]	0,00000	0,02661	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 13 3882,6 [Hz]	0,00000	0,00000	0,18981	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00185	0,00000
	Modo 14 3918,1 [Hz]	0,00000	0,60519	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 15 4138,4 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00091	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,05613	0,00000
	Modo 16 4436,9 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,04525	0,84663	0,00000	0,00007	0,00000	0,00000	0,00000

Tabla 3.6: Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para la placa inferior del panel sándwich no auxético

		Sin Delaminación									
		Modo 7 2760 [Hz]	Modo 8 3920,2 [Hz]	Modo 9 3956,1 [Hz]	Modo 10 4479,9 [Hz]	Modo 11 4480 [Hz]	Modo 12 5081,7 [Hz]	Modo 13 5082 [Hz]	Modo 14 5280,1 [Hz]	Modo 15 5716,3 [Hz]	Modo 16 6400,1 [Hz]
Con delaminación	Modo 7 1052,3 [Hz]	0,0000	0,0000	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Modo 8 2155,8 [Hz]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0122	0,2268	0,0002	0,0369	0,0000	0,0000	0,0000
	Modo 9 2156,8 [Hz]	0,0000	0,0000	0,0000	0,2249	0,0121	0,0365	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	Modo 10 2747,8 [Hz]	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0016
	Modo 11 3391,9 [Hz]	0,8709	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0907
	Modo 12 3601,8 [Hz]	0,0000	0,9911	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Modo 13 3882,6 [Hz]	0,0000	0,0000	0,9982	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0000
	Modo 14 3918,1 [Hz]	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Modo 15 4138,4 [Hz]	0,0000	0,0000	0,9913	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	Modo 16 4436,9 [Hz]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0503	0,9420	0,0000	0,0044	0,0000	0,0000	0,0000

Tabla 3.7: Matriz de MAC entre el caso con delaminación y sin delaminación para ambas placas del panel sándwich no auxético

		Sin delaminación									
		Modo 7 2760 [Hz]	Modo 8 3920,2 [Hz]	Modo 9 3956,1 [Hz]	Modo 10 4479,9 [Hz]	Modo 11 4480 [Hz]	Modo 12 5081,7 [Hz]	Modo 13 5082 [Hz]	Modo 14 5280,1 [Hz]	Modo 15 5716,3 [Hz]	Modo 16 6400,1 [Hz]
Con delaminación	Modo 7 1052,3 [Hz]	0,00000	0,00000	0,15622	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,10695	0,00000
	Modo 8 2155,8 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00092	0,01726	0,00027	0,04807	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 9 2156,8 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,01718	0,00093	0,04784	0,00028	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 10 2747,8 [Hz]	0,98635	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00300
	Modo 11 3391,9 [Hz]	0,00001	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,02161
	Modo 12 3601,8 [Hz]	0,00000	0,02734	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 13 3882,6 [Hz]	0,00000	0,00000	0,25418	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00120	0,00000
	Modo 14 3918,1 [Hz]	0,00000	0,76623	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 15 4138,4 [Hz]	0,00000	0,00000	0,04595	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,02496	0,00000
	Modo 16 4436,9 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,04774	0,89328	0,00001	0,00139	0,00000	0,00000	0,00000

Tabla 3.8: Matriz de MAC para comparar los modelos auxético y no auxético en el caso sin delaminación

		Sin delaminación									
		Placa no auxética									
		Modo 7	Modo 8	Modo 9	Modo 10	Modo 11	Modo 12	Modo 13	Modo 14	Modo 15	Modo 16
		2760 [Hz]	3920,2 [Hz]	3956,1 [Hz]	4479,9 [Hz]	4480 [Hz]	5081,7 [Hz]	5082 [Hz]	5280,1 [Hz]	5716,3 [Hz]	6400,1 [Hz]
Placa auxética	Modo 7	1700,7 [Hz]	0,99989	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00098
	Modo 8	2429,8 [Hz]	0,00000	0,99971	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 9	2454,2 [Hz]	0,00001	0,00000	0,99970	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00034	0,00001
	Modo 10	2786,4 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,97738	0,02177	0,00133	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 11	2786,7 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,02193	0,97751	0,00000	0,00136	0,00000	0,00000
	Modo 12	3525,2 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00023	0,00000	0,89315	0,02840	0,00000	0,00000
	Modo 13	3525,4 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00036	0,02815	0,89333	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 14	3588,2 [Hz]	0,00001	0,00000	0,00046	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,99897	0,00000
	Modo 15	3826,9 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,98855	0,00000
	Modo 16	4046,4 [Hz]	0,00137	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,99840

Tabla 3.9: Matriz de MAC para comparar los modelos auxético y no auxético en el caso con delaminación

		Con delaminación									
		Placa no auxética									
		Modo 7	Modo 8	Modo 9	Modo 10	Modo 11	Modo 12	Modo 13	Modo 14	Modo 15	Modo 16
		1052,3 [Hz]	2155,8 [Hz]	2156,8 [Hz]	2747,8 [Hz]	3391,9 [Hz]	3601,8 [Hz]	3882,6 [Hz]	3918,1 [Hz]	4138,4 [Hz]	4436,9 [Hz]
Placa Auxética	Modo 7	1051 [Hz]	0,99991	0,00000	0,00000	0,00000	0,00003	0,00000	0,00004	0,00000	0,00001
	Modo 8	1694,6 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,99243	0,00106	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 9	2140,7 [Hz]	0,00000	0,99489	0,00341	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00003
	Modo 10	2142,6 [Hz]	0,00000	0,00325	0,99477	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	Modo 11	2416,6 [Hz]	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,05598	0,00000	0,70239	0,00000
	Modo 12	2483,4 [Hz]	0,00402	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,37352	0,00000	0,02648
	Modo 13	2774,5 [Hz]	0,00000	0,00145	0,04193	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,03192
	Modo 14	2774,5 [Hz]	0,00000	0,04226	0,00147	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,92373
	Modo 15	3356 [Hz]	0,00007	0,00000	0,00000	0,01946	0,99459	0,00000	0,00003	0,00000	0,00002
	Modo 16	3460 [Hz]	0,00000	0,00310	0,02120	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00065

Además de las matrices de MAC mostradas anteriormente se realizaron las matrices de MAC para cada conjunto de modos sobre si mismo, para ver si hay algún tipo de acoplamiento entre los modos y se obtuvieron matrices muy cercanas a una matriz Identidad con valores muy cercanos a cero en los elementos fuera de la diagonal, que es lo esperado debido a que los modos de vibración son linealmente independientes. Estos resultados no aportan mucho valor al análisis por lo que no se agregan en este trabajo.

Con respecto al modelo auxético, de las Tablas 3.2, 3.3 y 3.4 se obtiene que los modos 8, 11, 12, 13, 14 y 16 con delaminación se corresponden con los modos 7, 8, 9, 10, 11 y 12 del caso sin delaminación teniendo en cuenta el modelo auxético. Análogamente de la Tablas 3.5, 3.6 y 3.7, se puede observar para el modelo no auxético que los modos 10, 14 y 16 del caso con delaminación se corresponden a los modos 7, 8 y 11 del modelo sin delaminación.

Se puede observar al comparar las Tablas 3.2 y 3.3 que la delaminación afecta negativamente en el emparejamiento de algunos de los pares de modos sin delaminación-con delaminación, como lo son el par 9-12,10-13,11-14 y 12-16, sin embargo para el los pares de modos 7-8 y 8-11 no se aprecia un cambio significativo lo que corrobora lo observado anteriormente debido a que estos modos no excitan en gran parte la zona central. También se aprecia que aparecen valores altos de MAC entre los pares 10-10, 11-9 y 16-15. Este fenómeno se debe a que para los modos en que se excita solamente la parte delaminada y no se presenta el modo combinado entre placa cuadrada y circular, la placa inferior si presenta un modo de placa

cuadrada, pero muy levemente excitado como se puede apreciar al comparar la Figura 3.62a con las Figuras 3.15 y 3.5.

Sin embargo este efecto desaparece al considerar ambas placas simultáneamente como lo muestra la Tabla 3.4 indicando que el modo de la placa superior tiene una mayor ponderación sobre la estructura tal que el de la placa inferior, es decir, las Tablas 3.2 y 3.4 son muy similares entre si. Además es curioso notar que los modos que aparecen en la Tabla 3.3 que presentan un MAC considerable (cerca de 0,6) no están correlacionados a ningún modo, esto es, los modos 9, 10 y 15 de la placa con delaminación, modos en los que se excita solamente la parte central.

Además para el modo 7 con delaminación no aparece ningún modo asociado.

Con respecto al modelo no auxético, se observa en primera instancia que son menos los pares de modos emparejados que el modelo auxético, ya que para el modelo auxético de los 10 modos se emparejan 6 de estos, en cambio para el modelo no auxético se emparejan apenas 3. Se observa nuevamente al tener en cuenta solo las placas inferiores que aparecen valores altos de MAC duplicados en la Tabla 3.6 que no aparecen en las Tablas 3.5 y 3.7. Estos valores altos se asocian con el fenómeno recientemente estudiado, por lo que no participan en el emparejamiento de modos y se deben descartar. Notar que los modos que no presentan un emparejamiento según el MAC se corresponden con los modos en los que solo se excita la parte delaminada. Es decir los modos de las Figuras 3.32, 3.33, 3.34, 3.36, 3.37, 3.38 y 3.41.

Si la delaminación no afectara a los modos de vibración se obtendría MAC's idénticos a una matriz identidad. En general se puede observar que las matrices obtenidas con los MAC's son en cierto modo parecidas a una matriz identidad, pero desfasadas hacia abajo debido a los nuevos modos que aparecen.

Al comparar los modelos no auxético con auxético en la Tabla 3.8 se comprueba lo observado en la sección 3.2, esto es que los modos de vibración obtenidos sin delaminación son los mismos salvo la permutación que ocurre para los modos 14 y 15, es decir, la matriz es casi una identidad.

Luego observando la Tabla 3.9 se destaca que la gran mayoría de modos se encuentran correlacionados y esta correlación es única. Los modos que no se encuentran correlacionados son los modos 12,13 y 16 de la placa auxética y los modos 12,13 y 15 de la placa no auxética.

En la Tabla 3.8 no se observa el comportamiento similar a una matriz identidad y más bien se presentan los emparejamientos entre los modos de una forma más desordenada.

Una vez se emparejan los modos de vibración y se correlacionan correctamente los distintos modelos, para poder compararlos numéricamente se deben normalizar tomando en cuenta las diferencias de magnitud y fase. Para esto se usa la herramienta conocida como Modal Scale Factor (MSF).

El Modal Scale Factor es un escalar que representa en cuanto hay que ampliar o disminuir un modo de vibración para que se asemeje lo más posible a otro modo y se define de la siguiente manera:

$$MSF(\vec{\phi}_A, \vec{\phi}_B) = \frac{\vec{\phi}_A^T \cdot \vec{\phi}_B}{\|\vec{\phi}_B\|^2} \quad (3.4)$$

Al igual que para el MAC para el caso en que se tienen modos de vibración de variable compleja la versión general y correcta del MSF es:

$$MSF(\vec{\phi}_A, \vec{\phi}_B) = \frac{\vec{\phi}_B^H \cdot \vec{\phi}_A^*}{\vec{\phi}_B^H \cdot \vec{\phi}_B^*} \quad (3.5)$$

El superíndice T representa la transpuesta, mientras que el símbolo * indica el conjugado del vector y el superíndice H es la matriz hermitiana. [18]

Se puede calcular entonces el Modal Scale Factor entre los modos emparejados (para los modos que no tienen una buena correlación modal, el Modal Scale Factor no tiene sentido). Una vez estos modos están ponderados por el MSF, se pueden restar y así obtener las diferencias entre ambos, que es en el fondo obtener lo que hace que su MAC no sea un 1 exacto. El resultado de esta diferencia se presenta en la siguiente sección.

3.4. Diferencia de modos emparejados sin delaminación y con delaminación

3.4.1. Modelo auxético

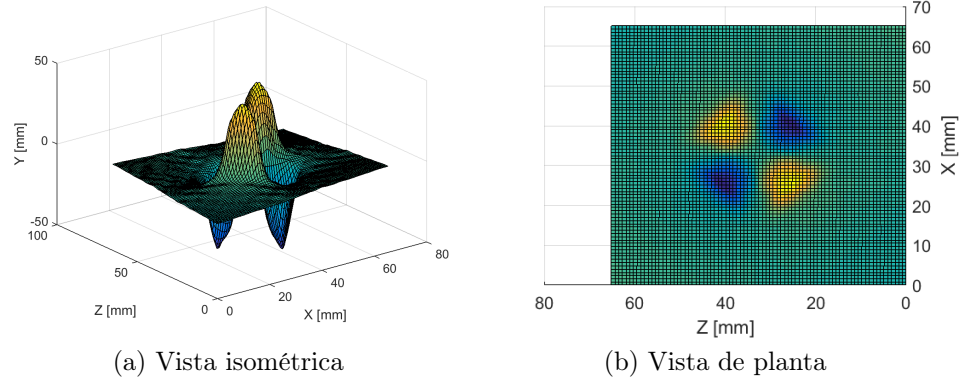


Figura 3.42: Diferencia entre los modos 7 sin delaminación y 8 con delaminación del modelo auxético

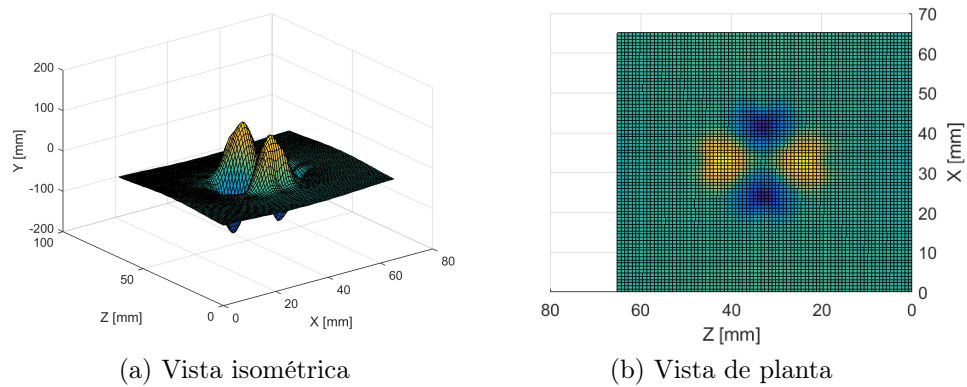
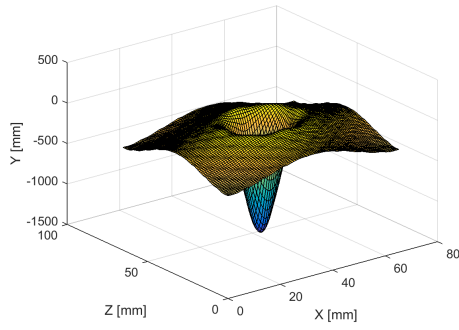
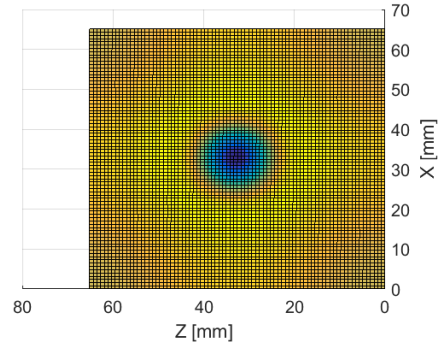


Figura 3.43: Diferencia entre los modos 8 sin delaminación y 11 con delaminación del modelo auxético

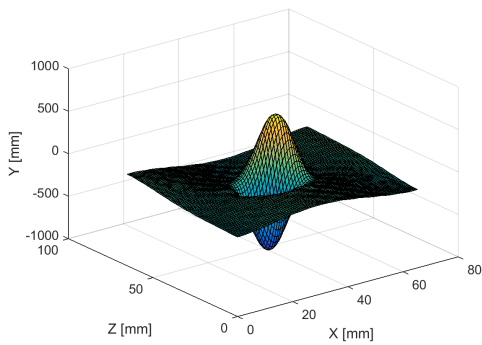


(a) Vista isométrica

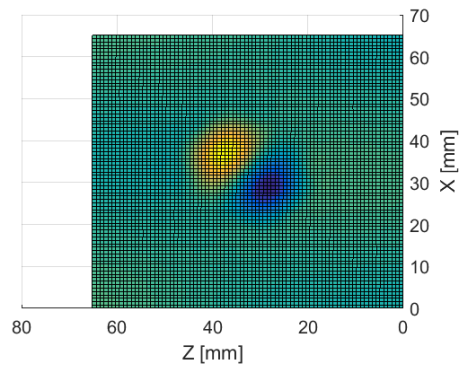


(b) Vista de planta

Figura 3.44: Diferencia entre los modos 9 sin delaminación y 12 con delaminación del modelo auxético

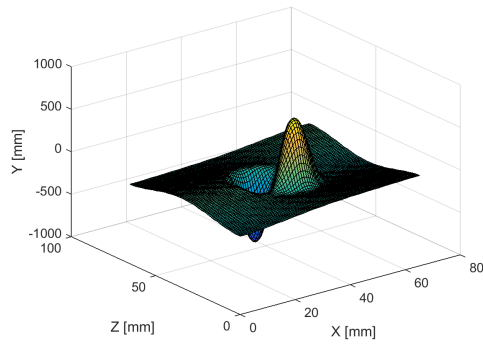


(a) Vista isométrica

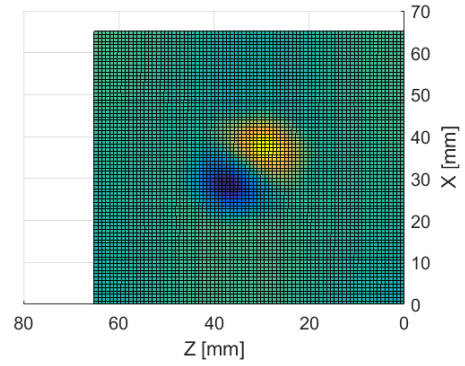


(b) Vista de planta

Figura 3.45: Diferencia entre los modos 10 sin delaminación y 13 con delaminación del modelo auxético

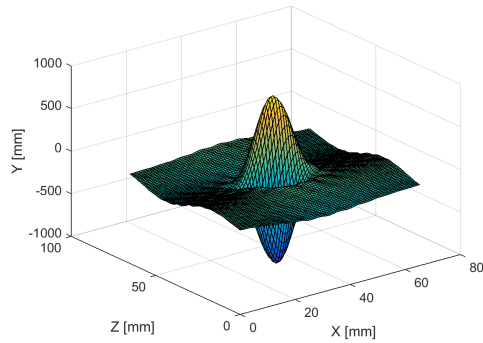


(a) Vista isométrica

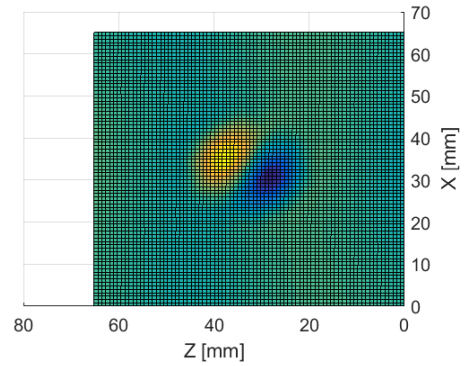


(b) Vista de planta

Figura 3.46: Diferencia entre los modos 11 sin delaminación y 14 con delaminación del modelo auxético



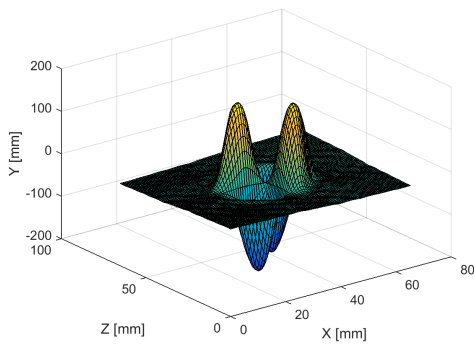
(a) Vista isométrica



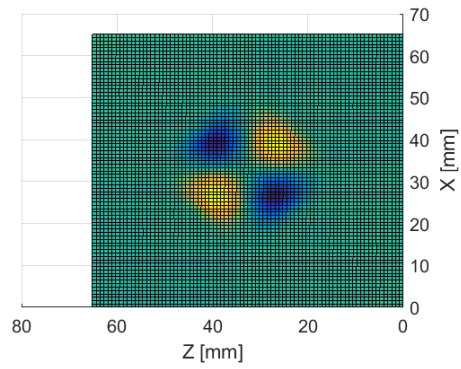
(b) Vista de planta

Figura 3.47: Diferencia entre los modos 12 sin delaminación y 16 con delaminación del modelo auxético

3.4.2. Modelo no auxético

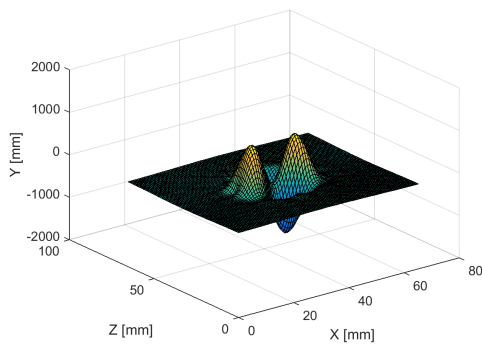


(a) Vista isométrica

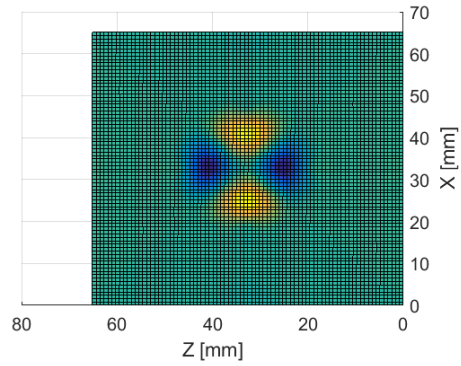


(b) Vista de planta

Figura 3.48: Diferencia entre los modos 7 sin delaminación y 10 con delaminación del modelo no auxético



(a) Vista isométrica



(b) Vista de planta

Figura 3.49: Diferencia entre los modos 8 sin delaminación y 14 con delaminación del modelo no auxético

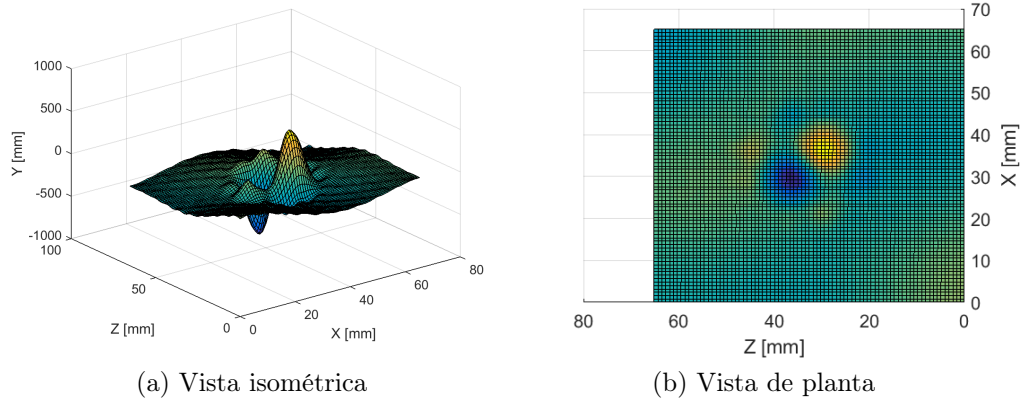


Figura 3.50: Diferencia entre los modos 11 sin delaminación y 16 con delaminación del modelo no auxético

Se aprecia de las Figuras 3.42, 3.43, 3.44, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.49 y 3.50 la presencia de la zona delaminada en forma circular. Se logran observar los primeros modos de una placa circular empotrada. Se obtiene que para todas las diferencias encontradas la mayor diferencia se encuentra en el centro, por lo que esa es la zona con la delaminación. Además en la Figura 3.44 se observa que la diferencia se presenta en toda la placa, por lo que si se analizara únicamente este emparejamiento podría conducir a errores, esto es debido a que el MAC entre ambos es el menor de los emparejamientos realizados. Es por esto que se deben comparar todas las diferencias entre emparejamientos para poder concluir la zona delaminada. Por último se observa en la Figura 3.50 patrones irregulares, no se observa un modo de placa circular en específico aunque es similar a los modos de frecuencias más elevadas.

3.5. Caso con delaminación reducida

Con motivo de ampliar el análisis, se repite el estudio realizado en las secciones 3.3 y 3.4, pero aplicado a una delaminación en un área inferior a la modelada anteriormente, equivalente al 8,6 % de la superficie total de la placa superior. Una delaminación menor con forma aproximadamente circular no es posible en este modelo, ya que daría lugar a una forma cuadrada debido a las uniones discretas entre el núcleo y la placa.

Se observa en primer lugar que los modos observados son los mismos, y se obtienen nuevamente modos donde se excita únicamente la parte delaminada, modos combinados en donde se puede apreciar la delaminación y modos combinados en donde la delaminación se aprecia levemente debido a que la parte central no es excitada.

A continuación se presentan los modos en donde se logra apreciar el daño. Los modos 7, 9, 11, 12 y 16 no se presentan, debido a que corresponden a los modos sin delaminación ya presentados anteriormente.

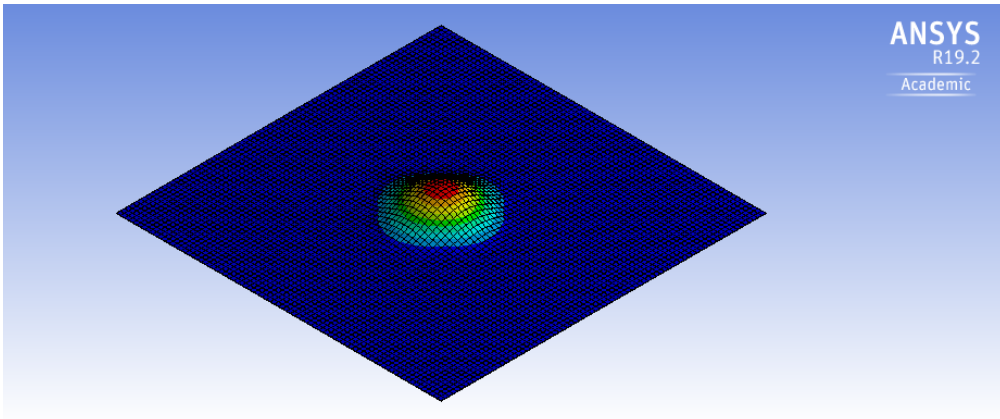


Figura 3.51: Modo 8. Frecuencia 1997,6 Hz

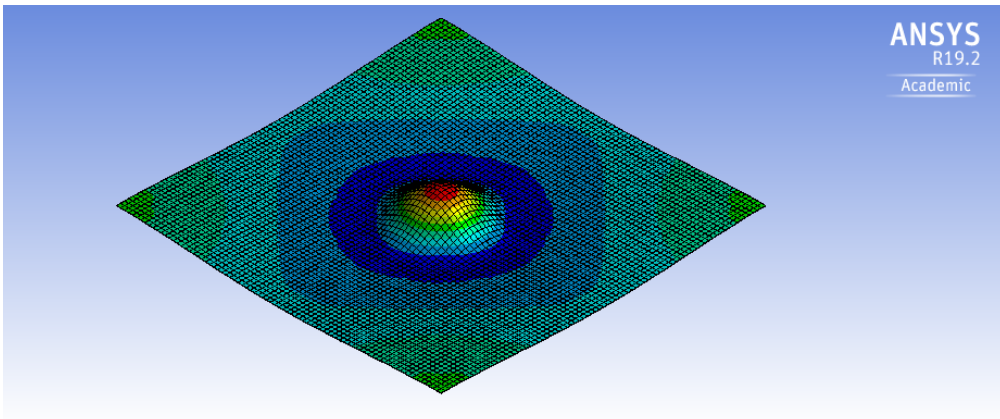


Figura 3.52: Modo 10. Frecuencia 2507,8 Hz

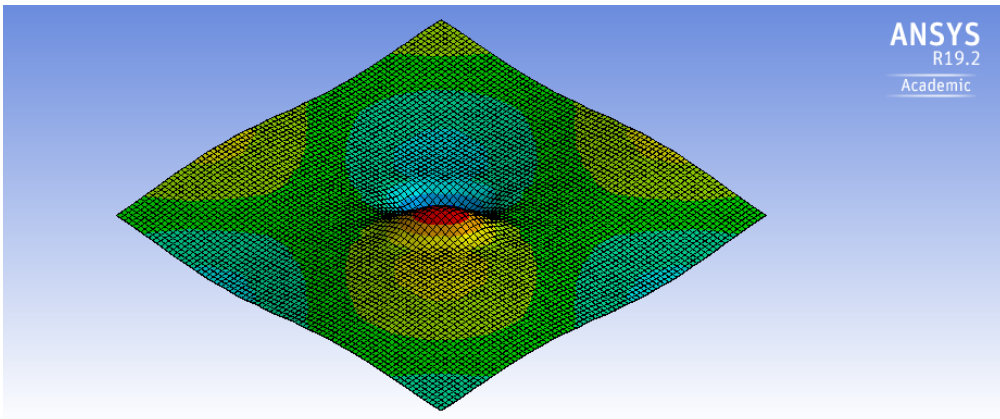


Figura 3.53: Modo 13. Frecuencia 3455,3 Hz

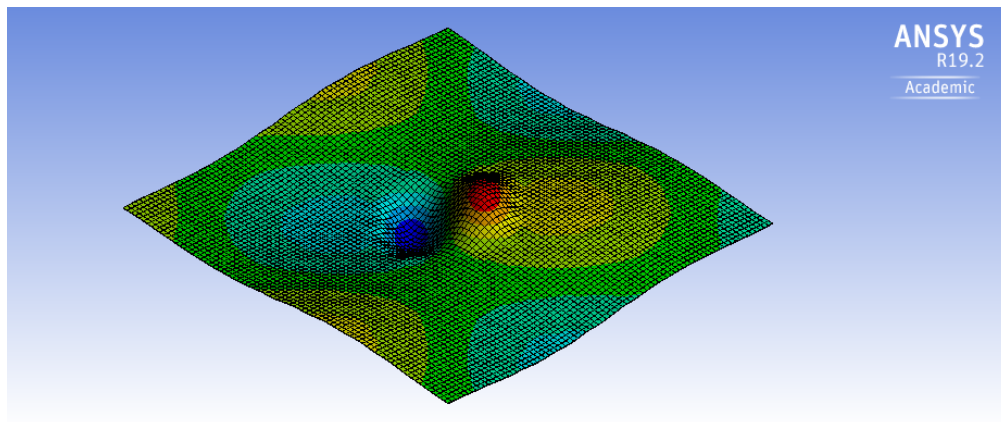


Figura 3.54: Modo 14. Frecuencia 3455,9 Hz

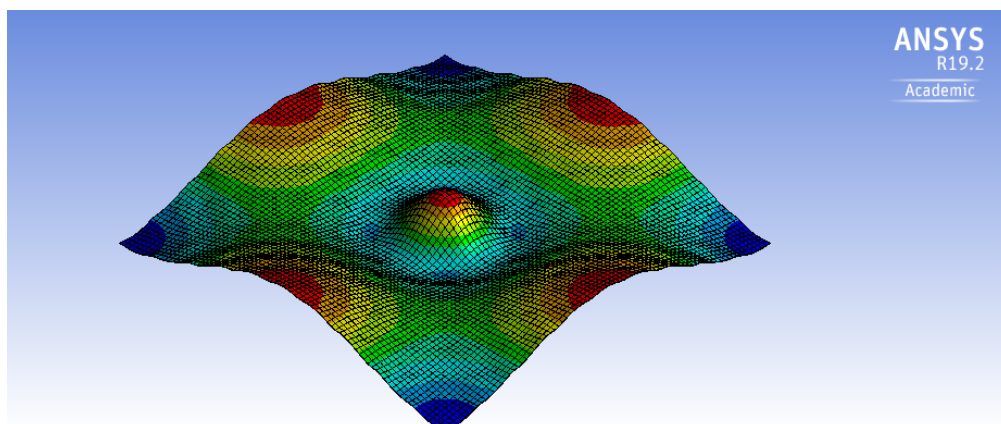


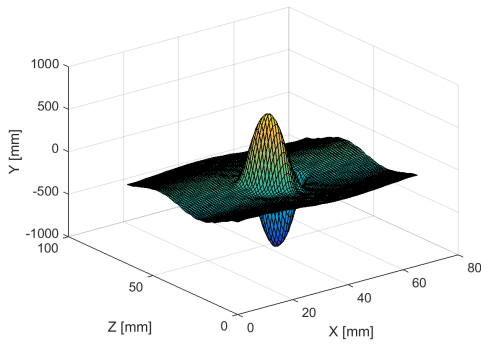
Figura 3.55: Modo 15. Frecuencia 3615,1 Hz

Las frecuencias aumentan levemente con respecto al caso con daño en un área mayor, pero este aumento es despreciable.

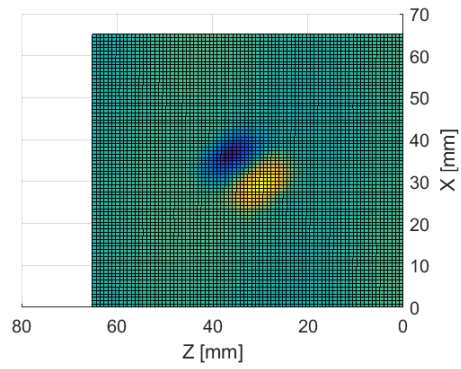
Además en este modelo se obtiene solo un modo en el cual se excita únicamente la parte delaminada, el cual se aprecia en la figura 3.51 a diferencia del modelo anterior en el cual aparecían cuatro de este tipo, 3.12, 3.14, 3.15, 3.20.

Nuevamente se emparejan los modos con delaminación con los sin delaminación y una vez emparejados se utiliza el MSF para restar los modos y encontrar las diferencias. Para evitar redundancia y exceso de información innecesaria no se adjunta el MAC realizado con los modos sin delaminación, y solo se adjunta la diferencia obtenida.

Los modos correctamente emparejados corresponden a los de las Figuras 3.53, 3.54, 3.55 con los de las Figuras 3.7, 3.8 y 3.9. De este emparejamiento de modos se obtiene la diferencia la cual es presentada a continuación.

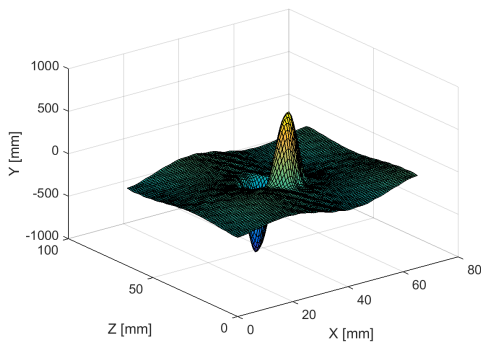


(a) Vista isométrica

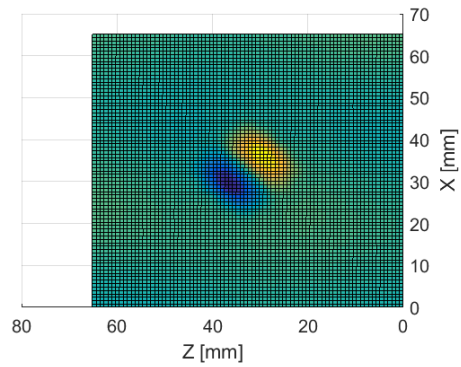


(b) Vista de planta

Figura 3.56: Diferencia entre los modos 12 sin delaminación y 13 con delaminación

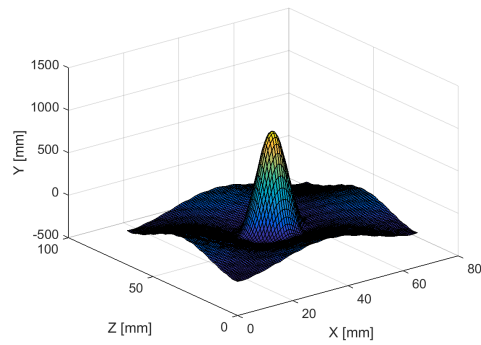


(a) Vista isométrica

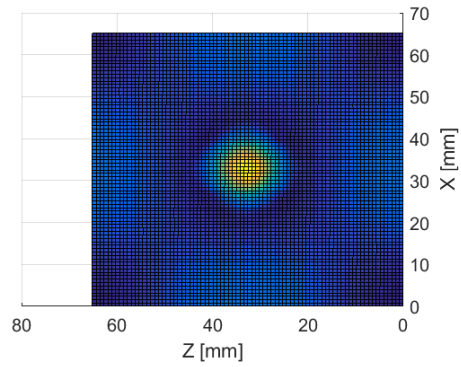


(b) Vista de planta

Figura 3.57: Diferencia entre los modos 13 sin delaminación y 14 con delaminación



(a) Vista isométrica



(b) Vista de planta

Figura 3.58: Diferencia entre los modos 14 sin delaminación y 15 con delaminación

Se pueden observar en las Figuras 3.56, 3.57 y 3.58 formas similares a las de las Figuras 3.45, 3.46 y 3.44. Se tiene entonces que la delaminación aún es observable para un daño del 8,6 %, salvo que para una menor cantidad de modos, en comparación con el caso anterior.

Conclusión

Se obtiene un modelo de elementos finitos tanto para un modelo auxético, como para uno no auxético, usando en ambos elementos tipo beam y shell basados en la teoría de Timoshenko y de Mindlin-Reisner respectivamente. Este modelo se justifica con un estudio de convergencia del mallado.

Se obtienen los modos de vibración libre del panel sándwich auxético y se comparan con los esperados de una placa cuadrada no auxética obtenidos de la literatura y se observa para el caso sin delaminación, que son los mismos.

Para agregar delaminación al modelo se desconectan elementos en el centro del núcleo con la placa superior en forma circular, formando un área equivalente aproximadamente al 17 % de la placa cuadrada. Sin embargo al realizar el análisis modal con la delaminación modelada de esta forma se omite el contacto entre la placa y el núcleo que podría ocurrir eventualmente en la vibración de la estructura, por lo que ocurre solapamiento. Esto es debido a que el análisis modal es en sí un análisis lineal y para agregar este efecto no lineal de contacto, se podría realizar un análisis dinámico de perturbación como lo recomienda V. Burlayenko [11] usando elementos de resorte no lineales (de tipo piecewise).

Una vez agregada la delaminación se observan los modos de vibración con delaminación añadida, tanto para el modelo auxético como para el modelo no auxético. Se observa que los modos de vibración con delaminación se presentan en tres formas principalmente, la primera son modos en los que se excita principalmente la zona delaminada por sobre el resto de la placa, la segunda muestra una mezcla de modos de placa circular y de placa cuadrada y la tercera son modos en los que la zona delaminada no se ve excitada. Esto también es observado en [11]. Además se observa que la delaminación añadida no cambia los modos de vibración de la placa cuadrada de una forma impredecible, esto es, al agregar delaminación los cambios son identificables en los modos ya que se presentan en la zona delaminada y no en toda la placa.

Se utilizan herramientas de análisis modal como lo son el MAC (Modal Assurance Criterion) y el MSF (Modal Scale Factor) para poder analizar los modos vibración. Con el MAC se logran emparejar los modos de vibración entre los distintos casos y con el MSF se logran escalar los modos de vibración una vez emparejados. Una vez emparejados y escalados los modos se restan para obtener la diferencia entre estos modos, la cual es causada por la delaminación. Al observar la resta de los modos se presenta el cambio en los modos de vibración principalmente en la zona central, correspondiente a la zona delaminada, esto siempre que se realice correctamente el emparejamiento de los modos.

Al comparar el modelo auxético con el no auxético se tiene en primer lugar que para el modelo no auxético sin delaminación se obtienen los modos de vibración correctos pero con una permutación entre los modos 14 y 15. Además en el caso con delaminación se obtienen distintos resultados que para el caso auxético debido probablemente a que el modelo no auxético presenta frecuencias naturales mayores. Se observa que la delaminación afecta en mayor medida los modos del modelo no auxético, aunque la diferencia entre ambos modelos no es directamente atribuible a que un modelo es auxético y el otro no, y podría atribuirse en parte a la diferencia geométrica entre ambos modelos, ya que el modelo no auxético tiene un mayor espesor del núcleo y por ende se comporta menos como una placa.

Por otro lado se observa que para el caso con delaminación reducida, el daño sigue siendo observable en los modos de vibración, pero este es detectable en una menor cantidad de modos.

A pesar de obtener distintos resultados para el caso auxético y no auxético, se presenta el mismo fenómeno para ambos, en el que tres tipos principales de modos se presentan.

Para estudiar en mayor profundidad el efecto de la delaminación se plantea aumentar el espesor de las placas, ya que un mayor espesor aumentaría la rigidez flexural de la placa, por lo que es probable que el cambio en los modos de vibración sea menos identificable. También se plantea variar el tamaño, forma y cantidad de delaminación añadida para estudiar en más profundidad la detección de daño.

No se observa que la propiedad del material de ser auxético afecte en los modos de vibración, tanto para el caso sin delaminación como para el caso con delaminación.

Bibliografía

- [1] Mechanics of Materials - Ferdinand P. Beer
- [2] Development and optimization of a formable sandwich sheet, C. Besse, PhD thesis, Ecole Polytechnique X, Materials and structures in mechanics, 2012
- [3] Multi-physics modeling of the fabrication and dynamic performance of all-metal auxetic-hexagonal sandwich-structures, M. Grujicic
- [4] Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio, Roderic Lakes
- [5] Dynamic response of sandwich panels with auxetic cores, Tomasz Strek, Institute of Applied Mechanics, Poznan University of Technology
- [6] A review on auxetic structures and polymeric materials
- [7] Computational prediction of new auxetic materials. J. Dagdelen, Article in Nature Communications
- [8] Auxetic Materials A Review, V. H. Carneiro, Department of Mechanics Engineering, University of Minho
- [9] Design of auxetic sandwich panels for structural applications, Li Yang, Department of Industrial Engineering, University of Louisville
- [10] A Comparative Study of Ballistic Resistance of Sandwich Panels with Aluminum Foam and Auxetic Honeycomb Cores, Shu Yang, School of Automotive Engineering, Dalian University of Technology
- [11] Influence of skin/core debonding on free vibration behavior of foam and honeycomb cored sandwich plates, Vyacheslav N. Burlayenko, Tomasz Sadowski
- [12] Review on Finite Element Method, I. D. Erhunmwun, 2017
- [13] Finite Element Procedures, K. J. Bathe
- [14] ASM Aerospace Specification Metals, Inc., Titanium Ti-6Al-4V (Grade 5), Annealed.
- [15] Three-dimensional modelling of auxetic sandwich panels for localised impact resistance,

Gabriele Imbanzano, Journal of Sandwich Structures and Materials 2015

- [16] ANSYS Mechanical APDL 19.1, Element Reference
- [17] About the Vibration Modes of Square Plate-like Structures, Fabian Duvigneau
- [18] An Analytical Solution to Free Rectangular Plate Natural Vibrations by Beam Modes Ordinary and Missing Plate Modes, Ivo Senjanovic Allemang
- [19] The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse, Randall J. Allemang

Anexos

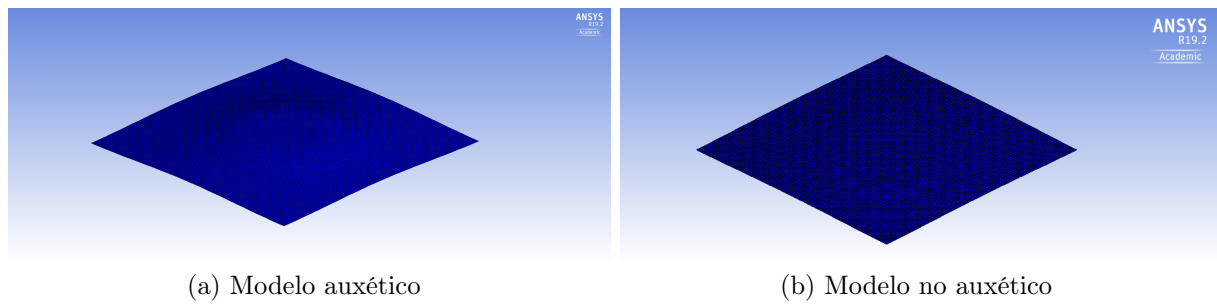


Figura 3.59: Modo 7, placa inferior

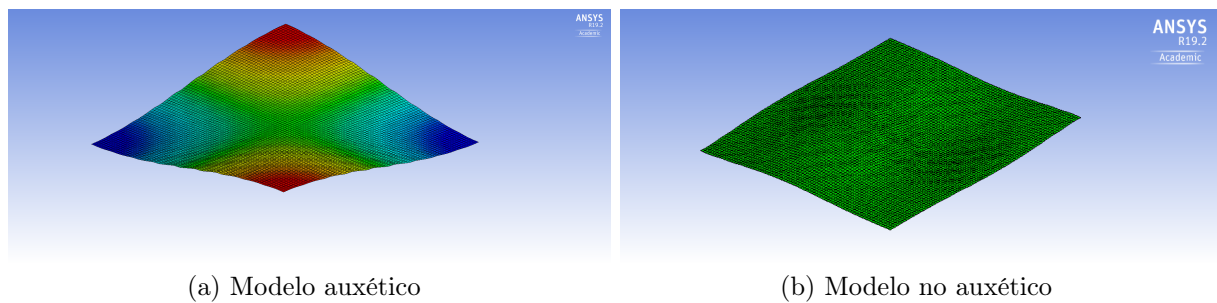


Figura 3.60: Modo 8, placa inferior

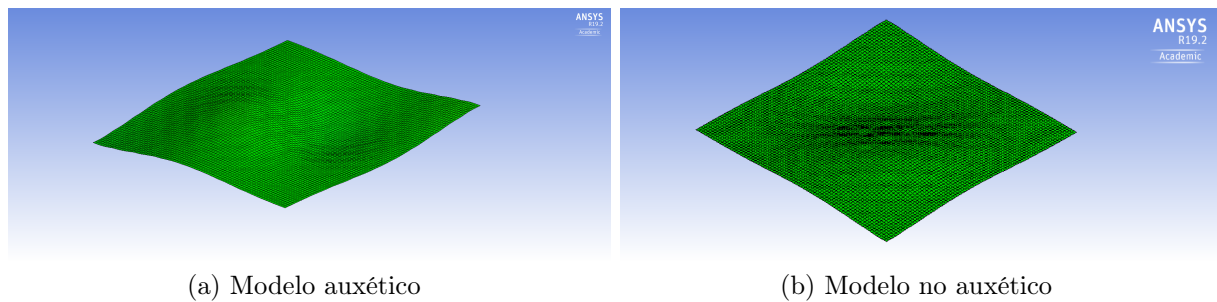


Figura 3.61: Modo 9, placa inferior

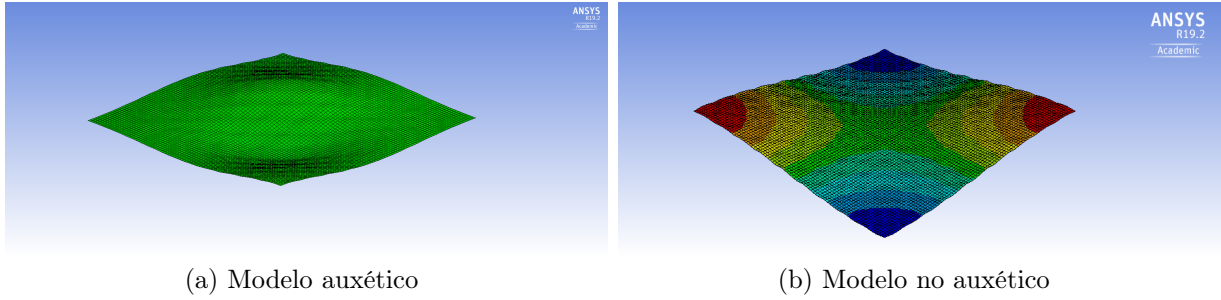


Figura 3.62: Modo 10, placa inferior

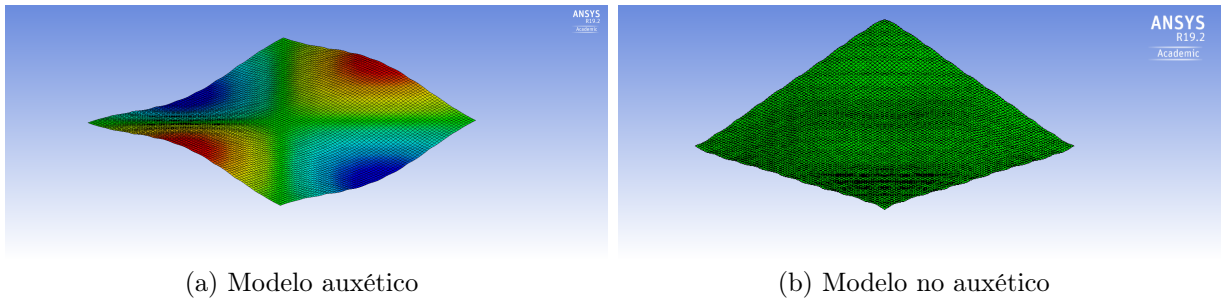


Figura 3.63: Modo 11, placa inferior

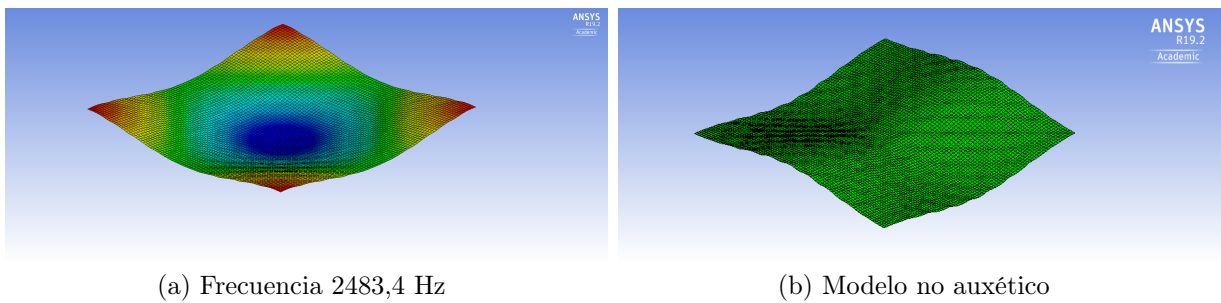


Figura 3.64: Modo 12, placa inferior

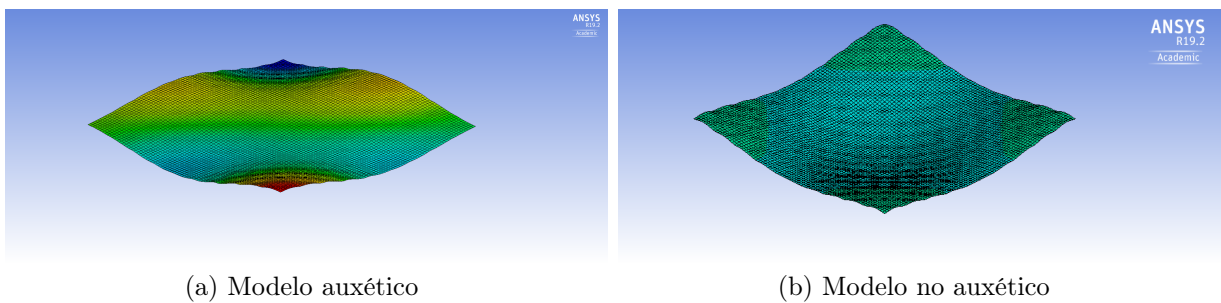
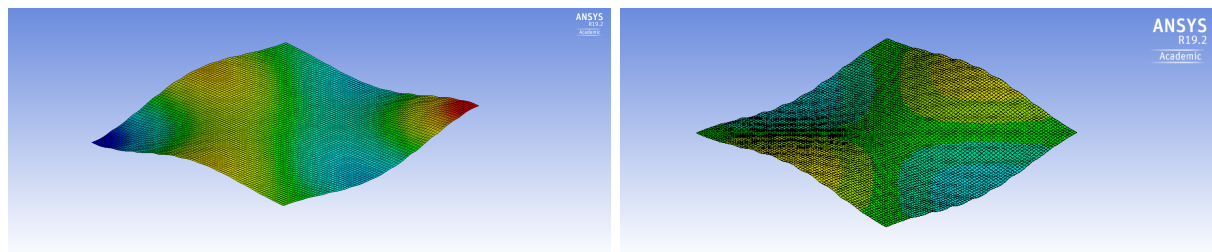


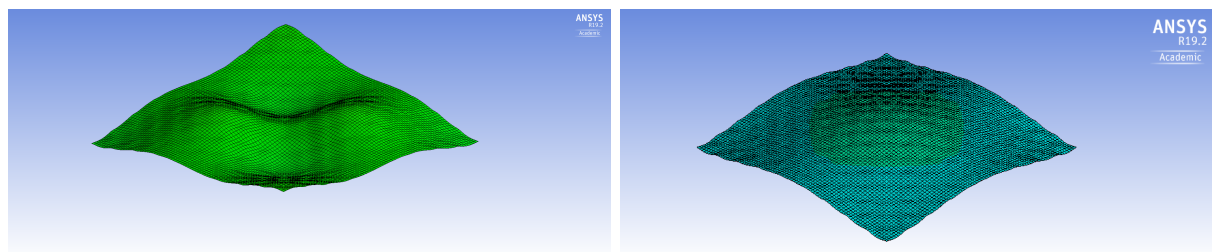
Figura 3.65: Modo 13, placa inferior



(a) Modelo auxético

(b) Modelo no auxético

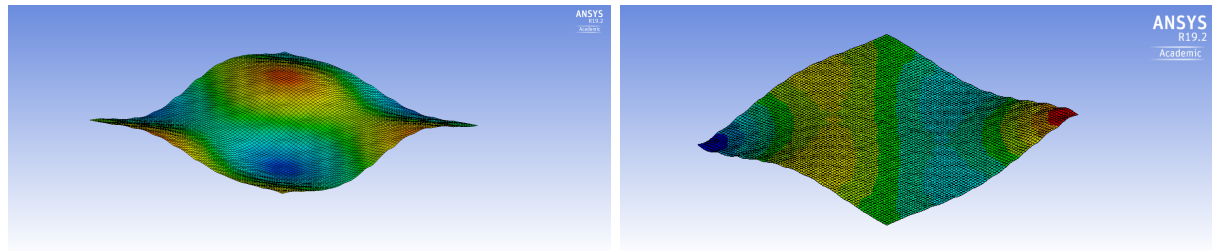
Figura 3.66: Modo 14, placa inferior



(a) Modelo auxético

(b) Modelo no auxético

Figura 3.67: Modo 15, placa inferior



(a) Modelo auxético

(b) Modelo no auxético

Figura 3.68: Modo 16, placa inferior

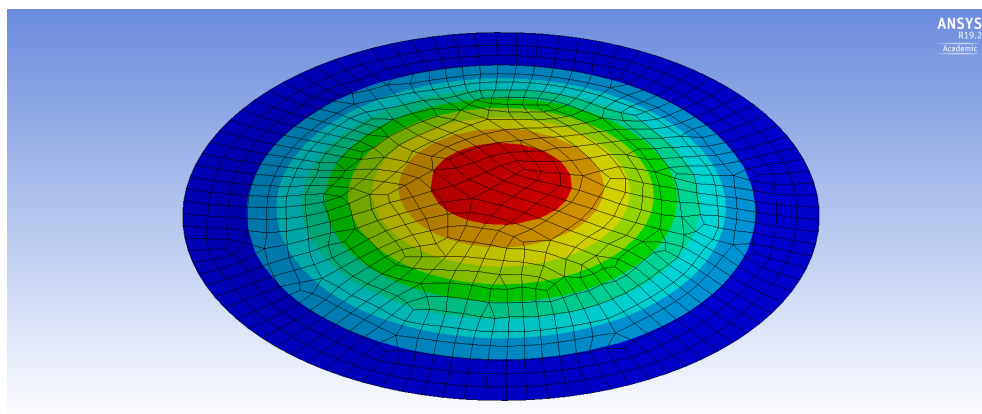


Figura 3.69: Modo 1 de placa circular

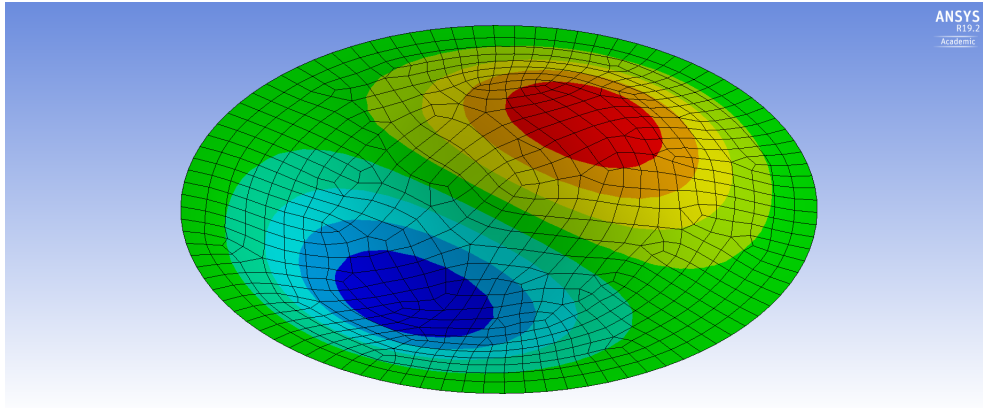


Figura 3.70: Modo 2 de placa circular

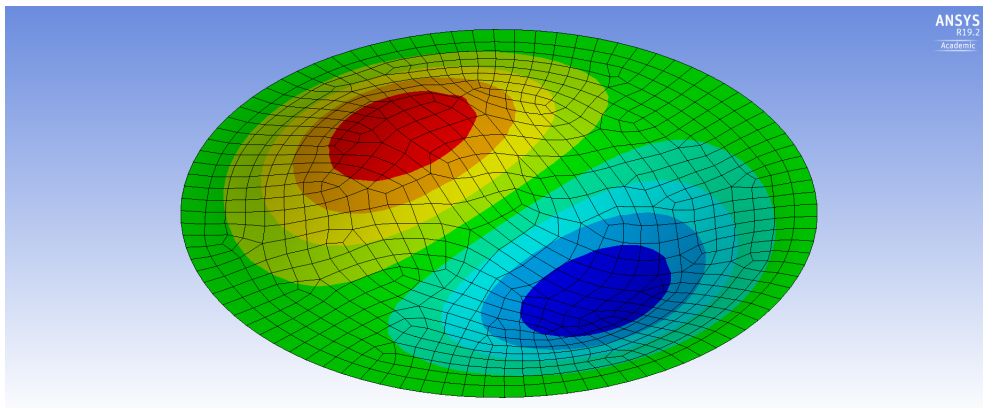


Figura 3.71: Modo 3 de placa circular

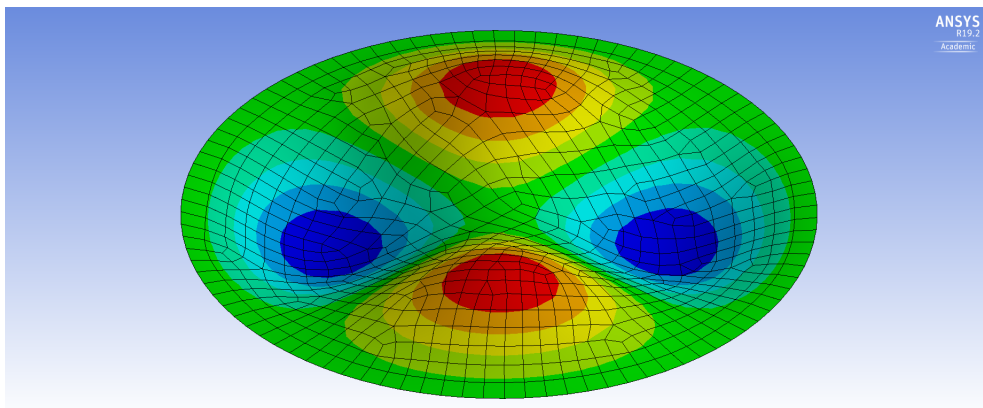


Figura 3.72: Modo 4 de placa circular

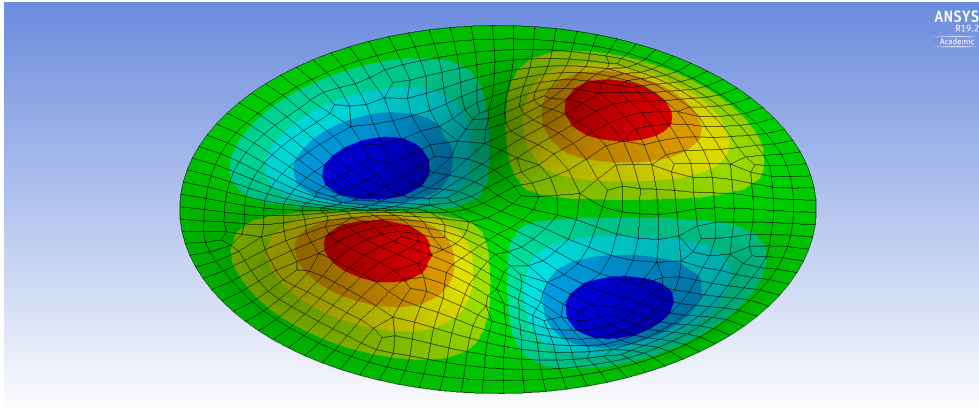


Figura 3.73: Modo 5 de placa circular

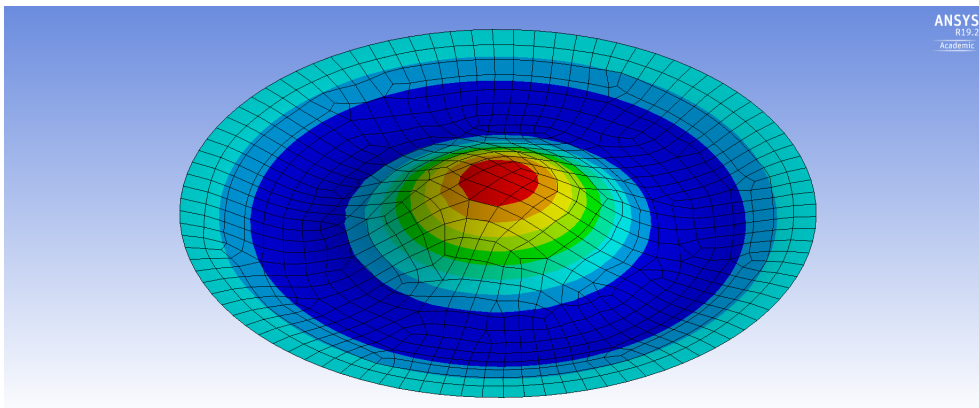


Figura 3.74: Modo 6 de placa circular

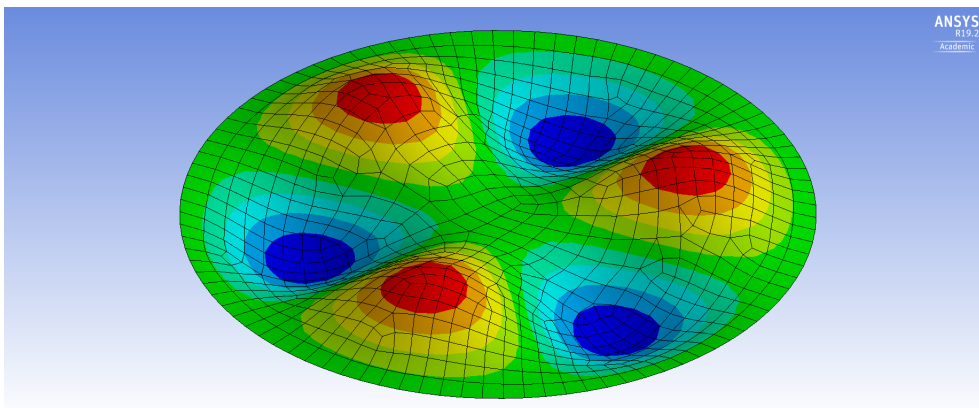


Figura 3.75: Modo 7 de placa circular

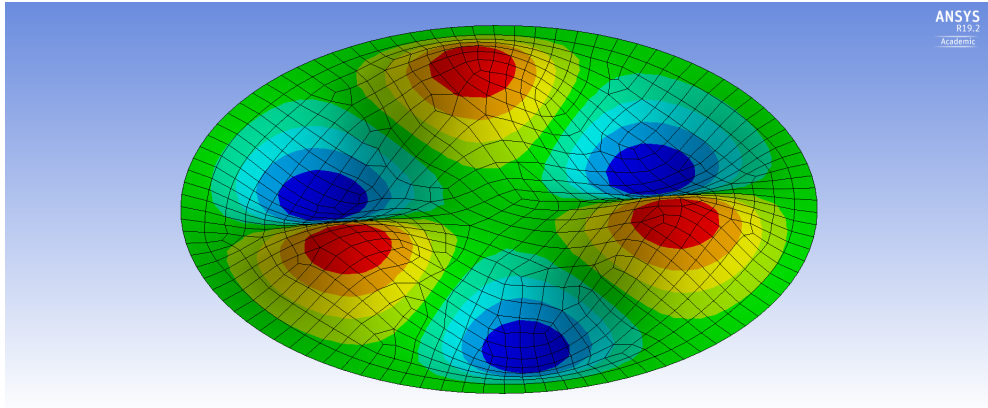


Figura 3.76: Modo 8 de placa circular

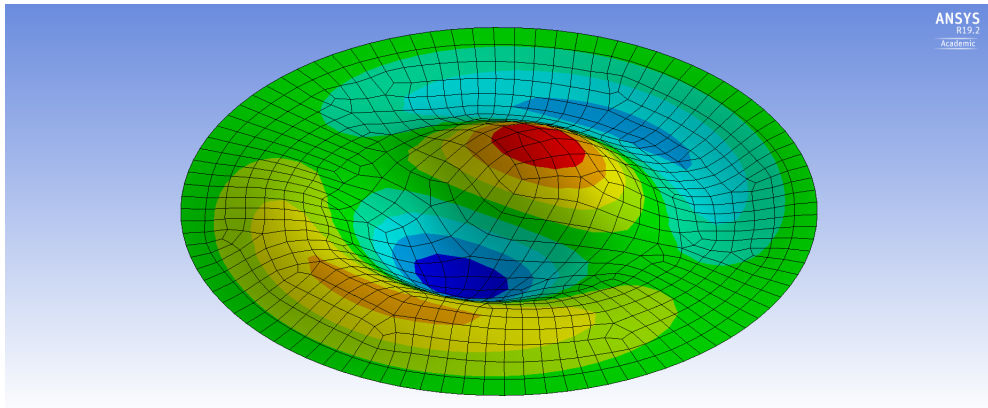


Figura 3.77: Modo 9 de placa circular

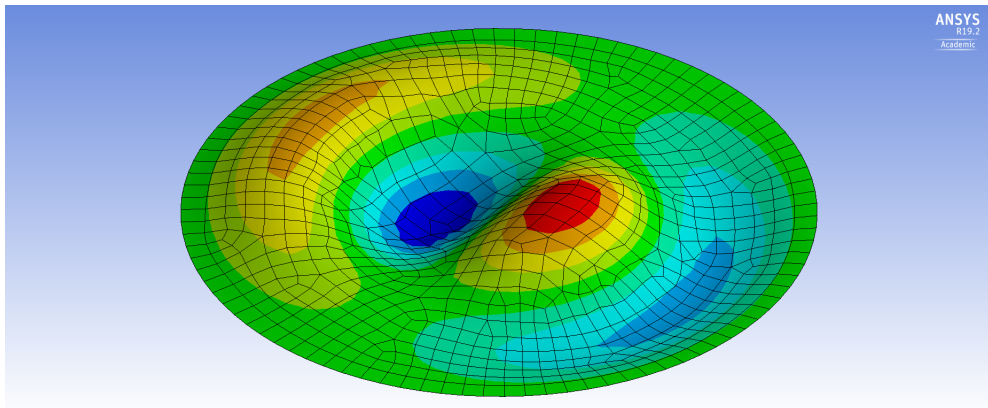


Figura 3.78: Modo 10 de placa circular