



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

PREDICCIÓN GEOESTADÍSTICA DE VARIABLES
GEOMETALÚRGICAS DEFINIDAS POR COCIENTES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

SEBASTIÁN IGNACIO ARÉVALO CÁCERES

PROFESOR GUÍA:
XAVIER EMERY

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALEJANDRO CÁCERES SAAVEDRA
FABIÁN SOTO FERNÁNDEZ

SANTIAGO DE CHILE
2020

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE:** Ingeniero Civil de Minas
POR: Sebastián Ignacio Arévalo Cáceres
FECHA: 17/08/2020
PROFESOR GUÍA: Xavier Emery

RESUMEN

La geometalurgia es un enfoque multidisciplinario que involucra diversas áreas como geología, mineralogía, procesamiento de minerales y metalurgia por lo que su importancia dentro de la minería es muy alta. Existen variables geometalúrgicas como la recuperación metalúrgica y la solubilidad cuya estimación enfrenta un problema asociado al soporte de las mediciones puesto que estas variables no son aditivas. Entender si se puede generar estimadores insesgados de estas variables en soportes más voluminosos (de bloques) mediante métodos como realizar el cociente entre las estimaciones del numerador y el denominador darían solución a los problemas de interpolación en soporte puntual y en soporte de bloques.

Este trabajo busca confirmar si efectivamente y bajo qué condiciones, realizar el cociente entre dos estimadores ya sea en soporte puntual o de bloques genera una estimación insesgada de la variable geometalúrgica estudiada que en este caso es la solubilidad definida como el cociente entre la ley de cobre soluble y la ley de cobre total.

Se trabaja en dos casos de estudio con dos bases de datos diferentes de yacimientos pórfidos cupríferos. Lo primero que se realiza es la generación de una realidad virtual para contrastar las estimaciones tanto en soporte puntual como de bloques, a partir de una co-simulación de las variables cobre total y solubilidad. Posterior a esto, se hace la estimación de la solubilidad de dos maneras: una estimación directa por kriging de los valores puntuales de solubilidad de las muestras y un co-kriging de las variables cobre soluble y cobre total para realizar el cociente entre estas estimaciones. Una vez obtenidos los resultados de las co-simulaciones y las estimaciones se pueden comparar los resultados realizando un estudio del sesgo global y condicional de los resultados para verificar en qué casos se obtuvo un estimador insesgado de la solubilidad.

En el primer caso las variables cobre soluble y cobre total tienen una alta correlación ($R=0.72$) y efectivamente, el cociente de estas estimaciones generó un estimador insesgado de la solubilidad. En el segundo caso de estudio el cobre soluble y el cobre total tenían una correlación alta también ($R=0.60$) y el cociente de las estimaciones estaba sesgado tanto globalmente como condicionalmente. La diferencia radica en la correlación entre la solubilidad y el cobre total pues en el primer caso ambas variables eran totalmente independientes ($R= -0.15$), mientras que en el segundo caso había correlación entre las variables aunque era negativa ($R=-0.35$). Esto último entonces limita el rango de aplicación del método propuesto.

... Para mi tío Jaime González, que en paz descansa ...

AGRADECIMIENTOS

Es gratificante el poder estar finalizando una etapa tan importante como es la enseñanza superior y más aun tomando en consideración el difícil contexto en el cual nos encontramos como sociedad.

Resulta complejo resumir los agradecimientos cuando hay un grupo tan grande de personas que fueron partícipes directa o indirectamente de este logro. En primer lugar, agradecer a mi familia por su apoyo incondicional durante este proceso en especial a mi mamá, a mi papá y a mis tíos por siempre confiar en mí; agradecer a mi compañera de vida Silvana por estar siempre ahí, motivándome cuando la carga académica parecía ser demasiada. Resultó más fácil de llevar el proceso con un apoyo constante y con alguien que está en las buenas y en las no tan buenas. Agradecer también a mi grupo de amigos y amigas que tengo en Santiago y en Constitución, siempre es bueno tener con quien conversar, que te apoyen en las decisiones y es confortante mantener amistades por tantos años pese a tomar rumbos distintos.

Agradezco enormemente al Profesor Xavier por su paciencia, siempre con buen humor y por darme la oportunidad de desarrollar este trabajo. A Fabián por su buena disposición y su comprensión cuando tenía más de alguna duda.

Finalmente, agradecer al laboratorio ALGES, perteneciente al Advance Mining Technology Center (AMTC) de la FCFM por permitirme realizar parte de mi trabajo con la licencia de su software geoestadístico ANDES. A la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) por financiar los trabajos mediante los proyectos AFB180004 PIA CONICYT (AMTC) y FONDECYT N° 1170101: "Geostatistics applied to geometallurgy and geomechanics".

TABLA DE CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN	1
1.1.	Objetivo General.....	1
1.2.	Objetivos específicos.....	1
1.3.	Alcances.....	2
2.	ANTECEDENTES	3
2.1.	Modelamiento geometalúrgico	3
2.2.	Modelamiento geoestadístico	4
2.2.1	Estudio exploratorio de datos	4
2.2.2	Análisis variográfico.....	5
2.2.3	Kriging	8
2.2.4	Kriging ordinario (media desconocida).....	9
2.2.5	Co-kriging	11
2.2.6	Co-kriging ordinario	12
2.2.7	Simulación geoestadística	12
2.2.8	Simulación multivariable	13
2.2.9	Sesgo condicional	14
2.3.	Estado del arte	15
2.3.1	Modelamiento geoestadístico de la razón de solubilidad en un yacimiento de oxidados de cobre (Emery et al. 2004).....	15
2.3.2	Additivity, metallurgical recovery, and grade (Carrasco et al. 2008).....	16
2.3.3	Geoestadística de yacimientos de cobre chilenos (Sèguret and Emery, 2019. 139-141 p.)	17
2.3.4	Geostatistical Modelling of Geometallurgical Variables – Problems and Solutions (Dominy S, 2013.)	17
3.	METODOLOGÍA	18
4.	PRIMER CASO DE ESTUDIO	21
4.1.	Análisis exploratorio de datos	21
4.2.	Co-Simulación	25
4.2.1	Anamorfosis Gaussiana de los datos.....	25
4.2.2	Validación de la hipótesis multi-Gaussiana.....	26
4.2.3	Análisis variográfico.....	29
4.2.4	Co-simulación condicional	33
4.2.5	Validación cruzada	37
4.2.6	Rebloqueo de resultados	38
4.3.	Estimación directa de Solubilidad	41
4.3.1	Análisis variográfico.....	41
4.3.2	Resultados estimación.....	42

4.3.3	Rebloqueo de resultados	43
4.4.	Estimación de cobre soluble y cobre total	44
4.4.1	Análisis variográfico	44
4.4.2	Resultados estimación	46
4.4.3	Rebloqueo de resultados	48
4.5.	Comparación de resultados primer caso	50
4.5.1	Comparación en soporte puntual	51
4.5.2	Comparación en soporte de bloques	57
5.	SEGUNDO CASO DE ESTUDIO	62
5.1.	Análisis exploratorio de datos	62
5.2.	Co-Simulación	66
5.2.1	Anamorfosis Gaussiana de los datos	66
5.2.2	Validación de la hipótesis multi-Gaussiana	67
5.2.3	Análisis variográfico	70
5.2.4	Variogramas experimentales	72
5.2.5	Variogramas modelados	72
5.2.6	Co-simulación condicional	73
5.2.7	Validación cruzada	77
5.2.8	Rebloqueo de resultados	78
5.3.	Estimación directa de Solubilidad	81
5.3.1	Análisis variográfico	81
5.3.2	Resultados estimación	82
5.3.3	Rebloqueo de resultados	83
5.4.	Estimación de cobre soluble y cobre total	84
5.4.1	Análisis variográfico	84
5.4.2	Resultados estimación	86
5.4.3	Rebloqueo de resultados	87
5.5.	Comparación de resultados segundo caso	89
5.5.1	Comparación en soporte puntual	90
5.5.2	Comparación en soporte de bloques	93
6.	CONCLUSIONES	98
7.	BIBLIOGRAFÍA	100
8.	ANEXOS	101
A.	Definición de unidades de estimación segundo caso de estudio	101

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1 ESTADÍSTICAS BÁSICAS DATOS DESAGRUPADOS.....	21
TABLA 2 ESTADÍSTICAS BÁSICAS DATOS GAUSSIANOS	25
TABLA 3 PARÁMETROS UTILIZADOS PARA CÁLCULO DE VARIOGRAMA Y MADOGRAMA.....	29
TABLA 4 PARÁMETROS DE CÁLCULO PARA VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES	31
TABLA 5 ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE REALIZACIONES.....	33
TABLA 6 PARÁMETROS DE CÁLCULO PARA VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES	41
TABLA 7 PARÁMETROS DE CÁLCULO PARA VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES	44
TABLA 8 ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE ERRORES Y ERRORES ESTANDARIZADOS DE VALIDACIÓN CRUZADA ESTIMACIÓN DIRECTA DE SOLUBILIDAD	51
TABLA 9 ESTADÍSTICAS BÁSICAS ERRORES Y ERRORES ESTANDARIZADOS COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL	52
TABLA 10 ESTADÍSTICAS BÁSICAS ESTIMADORES GENERADOS EN SOPORTE PUNTUAL.....	53
TABLA 11 ESTADÍSTICAS BÁSICAS ESTIMADORES GENERADOS EN SOPORTE DE BLOQUES	57
TABLA 12 ESTADÍSTICAS BÁSICAS UG10.....	63
TABLA 13 ESTADÍSTICAS BÁSICAS DATOS GAUSSIANOS	66
TABLA 14 PARÁMETROS UTILIZADOS PARA EL CÁLCULO DE VARIOGRAMA Y MADOGRAMA	69
TABLA 15 PARÁMETROS DE CÁLCULO PARA VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES	72
TABLA 16 ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE REALIZACIONES.....	74
TABLA 17 PARÁMETROS DE CÁLCULO PARA VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES	81
TABLA 18 PARÁMETROS DE CÁLCULO PARA VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES	84
TABLA 19 ESTADÍSTICAS BÁSICAS ESTIMADORES GENERADOS EN SOPORTE PUNTUAL.....	90
TABLA 20 ESTADÍSTICAS BÁSICAS ESTIMADORES GENERADOS EN SOPORTE DE BLOQUES	94
TABLA 21 AGRUPAMIENTO DE ATRIBUTOS GEOLÓGICOS.....	103
TABLA 22 DEFINICIÓN UNIDADES DE ESTIMACIÓN.....	104

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 SESGO CONDICIONAL.....	14
FIGURA 2 METODOLOGÍA DE TRABAJO	20
FIGURA 3 VISTA EN PLANTA DE UBICACIÓN DE LAS MUESTRAS DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) Y COBRE TOTAL (DERECHA).....	21
FIGURA 4 HISTOGRAMAS DESAGRUPADOS DE LEYES DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) Y COBRE TOTAL (DERECHA).....	22
FIGURA 5 SCATTER PLOTS DE CUS VS CUT, SOL VS CUT Y SOL VS CUS.....	22
FIGURA 6 MEDIAS CONDICIONALES PARA COBRE TOTAL EN LAS DIRECCIONES ESTE (SUPERIOR), NORTE (CENTRO) Y ELEVACIÓN (INFERIOR)	24
FIGURA 7 HISTOGRAMAS DE DATOS GAUSSIANOS PARA COBRE TOTAL (IZQUIERDA) COBRE SOLUBLE (CENTRO) Y SOLUBILIDAD (DERECHA)	25
FIGURA 8 NUBES DE CORRELACIÓN DIFERIDA PARA SOLUBILIDAD (SUPERIOR), COBRE TOTAL (CENTRO) Y COBRE SOLUBLE (INFERIOR) CON UNA DISTANCIA DE SEPARACIÓN DE 3M (IZQUIERDA) Y 15M (DERECHA).....	27
FIGURA 9 NUBES DE CORRELACIÓN DIFERIDA CUT VS CUS (SUPERIOR), CUS VS SOL (CENTRO) Y CUT VS SOL (INFERIOR) CON UNA DISTANCIA DE SEPARACIÓN DE 3M (IZQUIERDA) Y 15M (DERECHA).....	28
FIGURA 10 COMPARACIÓN VARIOGRAMA / MADOGRAMA	29
FIGURA 11 MAPAS VARIOGRÁFICOS COBRE TOTAL EN EL PLANO XY (SUPERIOR), XZ (CENTRO) E YZ (INFERIOR)	30
FIGURA 12 VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES DIRECTOS Y CRUZADOS PARA COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD	31

FIGURA 13 VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO Y CRUZADO PARA COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD	32
FIGURA 14 HISTOGRAMAS LEY DE COBRE TOTAL PARA MEJOR CASO (IZQUIERDA), PEOR CASO (CENTRO) Y MEDIA DE REALIZACIONES (DERECHA)	34
FIGURA 15 DOS REALIZACIONES DE SOLUBILIDAD (SUPERIOR) Y COBRE TOTAL (INFERIOR) EN SOPORTE PUNTUAL	35
FIGURA 16 DOS REALIZACIONES PARA SOLUBILIDAD EN SOPORTE PUNTUAL	36
FIGURA 17 MEDIA DE REALIZACIONES DE SOLUBILIDAD (IZQUIERDA) COBRE SOLUBLE (CENTRO) Y COBRE TOTAL (DERECHA) EN SOPORTE PUNTUAL	36
FIGURA 18 SCATTER PLOTS PARA VER INSESGO CONDICIONAL DE COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD.....	37
FIGURA 19 GRÁFICOS DE INCERTIDUMBRE PARA COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD.....	38
FIGURA 20 DOS REALIZACIONES DE COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL EN SOPORTE DE BLOQUES.....	39
FIGURA 21 DOS REALIZACIONES PARA LA SOLUBILIDAD EN SOPORTE DE BLOQUES.....	40
FIGURA 22 MEDIA DE REALIZACIONES PARA SOLUBILIDAD (IZQUIERDA) COBRE SOLUBLE (CENTRO) Y COBRE TOTAL (DERECHA) EN SOPORTE DE BLOQUES.....	40
FIGURA 23 VARIOGRAMA EXPERIMENTAL DIRECTO SOLUBILIDAD.....	41
FIGURA 24 VARIOGRAMA DIRECTO MODELADO DE SOLUBILIDAD.....	42
FIGURA 25 ESTIMACIÓN DE SOLUBILIDAD DIRECTAMENTE POR KRIGING EN SOPORTE PUNTUAL.....	43
FIGURA 26 ESTIMACIÓN DE SOLUBILIDAD DIRECTAMENTE POR KRIGING EN SOPORTE DE BLOQUES..	44
FIGURA 27 VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES DIRECTOS Y CRUZADO PARA COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL	45
FIGURA 28 VARIOGRAMAS DIRECTOS Y CRUZADOS PARA COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL	46
FIGURA 29 ESTIMACIÓN POR CO-KRIGING ORDINARIO DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) COBRE TOTAL (DERECHA) COCIENTE ENTRE AMBAS (CENTRO)EN SOPORTE PUNTUAL	47
FIGURA 30 ESTIMACIÓN POR CO-KRIGING DE MEDIAS RELACIONADAS DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) COBRE TOTAL (DERECHA) COCIENTE ENTRE AMBAS (CENTRO)EN SOPORTE PUNTUAL	48
FIGURA 31 ESTIMACIÓN DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) SOLUBILIDAD (CENTRO) Y COBRE TOTAL (DERECHA) EN SOPORTE DE BLOQUES CO-KRIGING ORDINARIO	49
FIGURA 32 ESTIMACIÓN DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) SOLUBILIDAD (CENTRO) Y COBRE TOTAL (DERECHA) EN SOPORTE DE BLOQUES CO-KRIGING DE MEDIAS RELACIONADAS	50
FIGURA 33 HISTOGRAMAS DE ERRORES Y ERRORES ESTANDARIZADOS DE VALIDACIÓN CRUZADA ESTIMACIÓN DIRECTA DE SOLUBILIDAD	51
FIGURA 34 HISTOGRAMA DE ERRORES Y ERRORES ESTANDARIZADOS PARA COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL	52
FIGURA 35 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (KRIGING DIRECTO DE SOLUBILIDAD) EN SOPORTE PUNTUAL	54
FIGURA 36 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (COCIENTE DE COBRE SOLUBLE SOBRE COBRE TOTAL) EN SOPORTE PUNTUAL CO-KRIGING ORDINARIO	54
FIGURA 37 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (COCIENTE DE COBRE SOLUBLE SOBRE COBRE TOTAL) EN SOPORTE PUNTUAL CO-KRIGING DE MEDIAS RELACIONADAS	55
FIGURA 38 CURVAS TONELAJE LEY CO-SIMULACIÓN COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD Y CO-ESTIMACIÓN COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL EN SOPORTE PUNTUAL	56
FIGURA 39 SOLUBILIDAD MEDIA OBTENIDA POR CO-SIMULACIÓN Y CO-ESTIMACIÓN SEGÚN LEY DE CORTE DE CUT EN SOPORTE PUNTUAL	56
FIGURA 40 SCATTER PLOT REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (MEDIA 65 REALIZACIONES) EN SOPORTE DE BLOQUES.....	58
FIGURA 41 SCATTER PLOT REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (KRIGING DIRECTO DE SOLUBILIDAD) EN SOPORTE DE BLOQUES	58
FIGURA 42 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (COCIENTE DE COBRE SOLUBLE SOBRE COBRE TOTAL) EN SOPORTE DE BLOQUES CO-KRIGING ORDINARIO	59
FIGURA 43 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (COCIENTE DE COBRE SOLUBLE SOBRE COBRE TOTAL) EN SOPORTE DE BLOQUES CO-KRIGING DE MEDIAS RELACIONADAS	60
FIGURA 44 CURVAS TONELAJE LEY CO-SIMULACIÓN COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD Y CO-ESTIMACIÓN COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL EN SOPORTE DE BLOQUES	61

FIGURA 45 SOLUBILIDAD MEDIA OBTENIDA POR CO-SIMULACIÓN Y CO-ESTIMACIÓN SEGÚN LEY DE CORTE DE CUT EN SOPORTE DE BLOQUES.....	61
FIGURA 46 VISTA EN PLANTA DE UBICACIÓN DE LAS MUESTRAS DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) Y COBRE TOTAL (DERECHA).....	62
FIGURA 47 HISTOGRAMAS DESAGRUPADOS DE LEYES DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) Y COBRE TOTAL (DERECHA).....	63
FIGURA 48 SCATTER PLOTS DE CUS VS CUT, SOL VS CUT Y SOL VS CUS.....	64
FIGURA 49 MEDIAS CONDICIONALES DE COBRE TOTAL EN LAS DIRECCIONES ESTE (SUPERIOR), NORTE (CENTRO) Y COTA (INFERIOR).....	65
FIGURA 50 HISTOGRAMAS DE DATOS GAUSSIANOS PARA COBRE TOTAL (IZQUIERDA) COBRE SOLUBLE (CENTRO) Y SOLUBILIDAD (DERECHA).....	66
FIGURA 51 NUBES DE CORRELACIÓN DIFERIDA PARA COBRE SOLUBLE (SUPERIOR), COBRE TOTAL (CENTRO) Y SOLUBILIDAD (INFERIOR) PARA UN PASO DE 5M (IZQUIERDA) Y 20M (DERECHA).....	67
FIGURA 52 NUBES DE CORRELACIÓN DIFERIDA CUT VS CUS (SUPERIOR), CUS VS SOL (CENTRO) Y CUT VS SOL (INFERIOR) CON UNA DISTANCIA DE SEPARACIÓN DE 5M (IZQUIERDA) Y 20M (DERECHA).....	68
FIGURA 53 COMPARACIÓN VARIOGRAMA / MADOGRAMA.....	69
FIGURA 54 MAPAS VARIOGRÁFICOS PLANOS XY (SUPERIOR), XZ (CENTRO) E YZ (INFERIOR).....	71
FIGURA 55 VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES DIRECTOS Y CRUZADOS PARA COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD.....	72
FIGURA 56 VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO Y CRUZADO PARA COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD.....	73
FIGURA 57 HISTOGRAMAS LEY DE COBRE TOTAL PARA MEJOR CASO (IZQUIERDA), PEOR CASO (CENTRO) Y MEDIA DE REALIZACIONES (DERECHA).....	74
FIGURA 58 DOS REALIZACIONES DE COBRE TOTAL (SUPERIOR) Y SOLUBILIDAD (INFERIOR) EN SOPORTE PUNTUAL.....	75
FIGURA 59 DOS REALIZACIONES DE COBRE SOLUBLE EN SOPORTE PUNTUAL.....	76
FIGURA 60 MEDIA DE REALIZACIONES PARA COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA), SOLUBILIDAD (CENTRO) Y COBRE TOTAL (DERECHA).....	77
FIGURA 61 RESULTADOS VALIDACIÓN CRUZADA CO-SIMULACIÓN.....	78
FIGURA 62 DOS REALIZACIONES DE COBRE SOLUBLE EN SOPORTE DE BLOQUES.....	79
FIGURA 63 DOS REALIZACIONES DE COBRE TOTAL EN SOPORTE DE BLOQUES.....	79
FIGURA 64 DOS REALIZACIONES DE SOLUBILIDAD EN SOPORTE DE BLOQUES.....	80
FIGURA 65 MEDIA DE REALIZACIONES DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA), SOLUBILIDAD (CENTRO) Y COBRE TOTAL (DERECHA).....	80
FIGURA 66 VARIOGRAMA EXPERIMENTAL SOLUBILIDAD.....	81
FIGURA 67 VARIOGRAMA MODELADO SOLUBILIDAD.....	82
FIGURA 68 ESTIMACIÓN POR KRIGING DE LA VARIABLE SOLUBILIDAD EN SOPORTE PUNTUAL.....	83
FIGURA 69 ESTIMACIÓN POR KRIGING DE LA VARIABLE SOLUBILIDAD EN SOPORTE DE BLOQUES.....	84
FIGURA 70 VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES DIRECTOS Y CRUZADO PARA COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL.....	85
FIGURA 71 VARIOGRAMAS DIRECTOS Y CRUZADOS PARA COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL.....	86
FIGURA 72 ESTIMACIÓN POR CO-KRIGING DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA), COBRE TOTAL (DERECHA) Y COCIENTE DE ESTIMACIONES (CENTRO) CO-KRIGING ORDINARIO.....	86
FIGURA 73 ESTIMACIÓN POR CO-KRIGING DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA), COBRE TOTAL (DERECHA) Y COCIENTE DE ESTIMACIONES (CENTRO) CO-KRIGING DE MEDIAS RELACIONADAS.....	87
FIGURA 74 ESTIMACIÓN DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) SOLUBILIDAD (CENTRO) Y COBRE TOTAL (DERECHA) EN SOPORTE DE BLOQUES CO-KRIGING ORDINARIO.....	88
FIGURA 75 ESTIMACIÓN DE COBRE SOLUBLE (IZQUIERDA) SOLUBILIDAD (CENTRO) Y COBRE TOTAL (DERECHA) EN SOPORTE DE BLOQUES CO-KRIGING DE MEDIAS RELACIONADAS.....	89
FIGURA 76 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (KRIGING DIRECTO DE SOLUBILIDAD) EN SOPORTE PUNTUAL.....	91
FIGURA 77 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (COCIENTE DE COBRE SOLUBLE SOBRE COBRE TOTAL) EN SOPORTE PUNTUAL CO-KRIGING ORDINARIO.....	91

FIGURA 78 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (COCIENTE DE COBRE SOLUBLE SOBRE COBRE TOTAL) EN SOPORTE PUNTUAL CO-KRIGING DE MEDIAS RELACIONADAS	92
FIGURA 79 CURVAS TONELAJE LEY CO-SIMULACIÓN COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD Y CO-ESTIMACIÓN COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL EN SOPORTE PUNTUAL	92
FIGURA 80 SOLUBILIDAD MEDIA OBTENIDA POR CO-SIMULACIÓN Y CO-ESTIMACIÓN SEGÚN LEY DE CORTE DE CUT EN SOPORTE PUNTUAL	93
FIGURA 81 SCATTER PLOT REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (MEDIA 65 REALIZACIONES) EN SOPORTE DE BLOQUES.....	94
FIGURA 82 SCATTER PLOT REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (KRIGING DIRECTO DE SOLUBILIDAD) EN SOPORTE DE BLOQUES	95
FIGURA 83 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (COCIENTE DE COBRE SOLUBLE SOBRE COBRE TOTAL) EN SOPORTE DE BLOQUES CO-KRIGING ORDINARIO	95
FIGURA 84 SCATTER PLOT DE REALIDAD VERSUS ESTIMACIÓN (COCIENTE DE COBRE SOLUBLE SOBRE COBRE TOTAL) EN SOPORTE DE BLOQUES CO-KRIGING DE MEDIAS RELACIONADAS	96
FIGURA 85 CURVAS TONELAJE LEY CO-SIMULACIÓN COBRE TOTAL Y SOLUBILIDAD Y CO-ESTIMACIÓN COBRE SOLUBLE Y COBRE TOTAL EN SOPORTE DE BLOQUES	97
FIGURA 86 SOLUBILIDAD MEDIA OBTENIDA POR CO-SIMULACIÓN Y CO-ESTIMACIÓN SEGÚN LEY DE CORTE DE CUT EN SOPORTE DE BLOQUES.....	97
FIGURA 87 QQ-PLOT ALTERACIÓN	101
FIGURA 88 QQ-PLOT LITOLÓGÍA	102
FIGURA 89 QQ-PLOT MINERALIZACIÓN	103

1. INTRODUCCIÓN

La predicción geoestadística tiene diversas aplicaciones y puede ser utilizada para predecir variables geológicas como la ley de alguna especie mineral de interés, variables mineras como el tonelaje de algún sector específico de una operación y variables geometalúrgicas como la recuperación metalúrgica, work index, entre otras. Estas últimas variables son el foco de interés de este trabajo y en particular una de ellas que es la solubilidad. La solubilidad se define como la fracción de cobre soluble sobre el cobre disponible o cobre total. La solubilidad influye en la recuperación metalúrgica y por lo tanto influye directamente también, en el valor económico de un proyecto minero.

Una de las herramientas que se utiliza para realizar la predicción de la solubilidad es el kriging (en cualquiera de sus variantes, kriging simple, kriging ordinario, etc.) porque de acuerdo a los parámetros escogidos puede entregar una estimación precisa de la variable de interés. Sin embargo, existe una limitación para la estimación de la solubilidad y es que esta variable no es aditiva, es decir, el valor promedio de la solubilidad de un bloque no es el promedio de los valores puntuales de solubilidad dentro de éste. Por otro lado, estimar las leyes de cobre soluble y cobre total (ambas aditivas) por kriging o co-kriging para luego calcular su cociente podría derivar en un sesgo.

Lograr plantear bajo qué condiciones se puede realizar el cociente de dos estimadores obtenidos por kriging (u otro estimador) aumentaría la coherencia en la evaluación de los recursos y por lo tanto, genera impactos positivos en términos técnicos y económicos. Para este trabajo se aprovecha también, la potencia de las simulaciones geoestadísticas, pues cada una de las realizaciones que se obtienen al realizar una simulación puede ser considerada como un escenario posible del yacimiento, permite entonces tener una imagen realista para poder comparar los resultados de las estimaciones por kriging y co-kriging tanto en soporte puntual como de bloques.

1.1. Objetivo General

- Determinar estimadores insesgados de variables regionalizadas definidas por cocientes, tales como razón de solubilidad.

1.2. Objetivos específicos

- Analizar los pros y contras, identificar diferencias entre los dos enfoques propuestos que son:
 - Estimar directamente la solubilidad.

- Estimar por co-kriging las variables cobre soluble, cobre total y hacer el cociente entre estas estimaciones.
- Verificar el rango de aplicación del enfoque propuesto.
- Examinar el efecto de los parámetros utilizados para la co-simulación y la estimación, por ejemplo, tamaño de la vecindad y datos utilizados en cada octante.

1.3. Alcances

El estudio que se realiza está acotado a dos casos, donde cada uno de ellos se genera a partir de datos de sondeos de yacimientos de cobre anónimos. Estas bases de datos fueron parcialmente modificadas aplicando, entre otros, un factor multiplicativo a las leyes de cobre soluble y cobre total para mantener la confidencialidad de los datos.

Los métodos utilizados para la simulación y la estimación consisten en kriging y co-kriging en dos variantes: ordinario tradicional y de medias relacionadas.

El procesamiento de los resultados abarca estudios estadísticos principalmente estadísticas básicas y herramientas gráficas como histogramas y scatter plots.

2. ANTECEDENTES

2.1. Modelamiento geometalúrgico

Es importante definir algunos conceptos previamente, los que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Un primer concepto es el de geometalurgia que se define como un enfoque multidisciplinario que integra geología, mineralogía, procesamiento de minerales y metalurgia para crear modelos basados en el espacio para la producción y las decisiones operativas. La geometalurgia tiene como objetivo mejorar el valor del proyecto minero al predecir el impacto que las características del mineral y el lastre tendrán en el proceso minero y metalúrgico.

Existen variables geometalúrgicas que se definen por cocientes, este es el caso de la solubilidad y la recuperación metalúrgica, por ejemplo. La solubilidad es una variable regionalizada que se define como la razón entre las leyes de cobre soluble (CuS) y cobre total (CuT); es un parámetro relevante para determinar la recuperación metalúrgica y por ende el valor económico del negocio minero. La recuperación metalúrgica a su vez se define como la razón entre la cantidad de metal recuperado (metal en el concentrado, por ejemplo, después de un proceso de flotación de sulfurados de cobre) y la cantidad total de metal. Estas dos variables no son aditivas, es decir, su valor sobre un bloque no es el promedio de los valores puntuales dentro de este bloque.

Hay dos problemas asociados a la predicción de estas variables. Se propone el caso de la solubilidad: para un soporte puntual, se podría estimar la solubilidad sin sesgo por kriging, mientras que podría haber sesgo al dividir el kriging de CuS (numerador) por el kriging de CuT (denominador). Ahora bien, si se cambia de soporte ya no vale interpolar la solubilidad por kriging, puesto que no es una variable aditiva como se menciona anteriormente. Sin embargo, se puede hacer kriging de CuS y CuT en el soporte de bloque sin tener sesgo. Este sesgo existe cuando la esperanza matemática del cociente de las variables (CuS y CuT en este caso) no coincide con el cociente entre la esperanza del numerador y la esperanza del denominador. Se verifica que cuando numerador y denominador están en correlación intrínseca y el cociente entre estas variables es independiente del denominador (Seguret & Emery, 2019) se obtiene un resultado insesgado.

Surge entonces la pregunta de saber en qué condiciones dividir el kriging (u otro estimador) de CuS por el kriging (u otro estimador) de CuT proporciona una estimación insesgada de la solubilidad, lo que daría una solución a ambos problemas (interpolar la solubilidad a soporte puntual y cambiar de soporte). Además, esta alternativa permitiría trabajar con estimaciones de CuS, CuT y solubilidad que cumplen con la relación matemática entre estas variables, aumentando entonces la coherencia en la evaluación de recursos. Es importante mencionar también que la información disponible consiste en un muestreo, que a veces contiene pocos datos y a veces es heterotópico.

2.2. Modelamiento geoestadístico

La geoestadística se define como el estudio de fenómenos regionalizados, es decir, fenómenos que se extienden en el espacio y presentan una cierta continuidad. El objeto sobre el cual se trabaja es una descripción matemática del fenómeno regionalizado, es decir, una o varias funciones numéricas llamadas variables regionalizadas, que miden ciertas propiedades o atributos relacionados con este fenómeno. Es posible encontrar variables continuas y categóricas. Por ejemplo, la ley de un metal, la densidad de la roca o la recuperación metalúrgica describen un fenómeno de mineralización y corresponden a variables continuas. Los tipos de roca o tipos de mineralización corresponden a variables categóricas o codificadas.

Una variable regionalizada puede definirse, no sólo en cada punto del espacio, sino que también en una superficie (2D) o en un volumen (3D). La superficie o el volumen sobre el cual se considera la variable regionalizada se denomina soporte. En general, el soporte de las mediciones es muy pequeño (asimilado a un “punto”), mientras que el que interesa en la práctica puede ser más voluminoso (por ejemplo, las unidades selectivas de explotación en evaluación minera o las unidades de remediación en contaminación de suelo).

2.2.1 Estudio exploratorio de datos

La geoestadística busca estudiar una o varias variables regionalizadas conocidas vía una toma de muestra (Chilès y Delfiner, 2012). Previo al uso de métodos geoestadísticos propiamente tal, conviene realizar un estudio exploratorio de los datos disponibles, el cual tiene tres objetivos:

- Analizar (mediante herramientas estadísticas simples) la cantidad, la calidad y la ubicación de los datos disponibles.
- Definir la(s) zona(s) de estudio. Una división del campo en varias sub-zonas puede ser relevante si uno observa cambios abruptos en la distribución espacial de valores, o si la geología del fenómeno lo indica.
- Anticipar dificultades o problemas que puedan surgir en la fase de estimación local (por ejemplo, presencia de valores atípicos que se destacan de aquellos de los datos vecinos).

Las herramientas que se pueden utilizar en un estudio exploratorio de datos son las siguientes:

1) Despliegue de datos (mapas)

El despliegue de los datos permite visualizar su ubicación en el espacio. Cuando se trabaja en el espacio tridimensional, el despliegue puede hacerse con proyecciones (plantas y secciones) o vistas en perspectiva.

2) Distribución estadística de valores

Además de visualizar mapas de los datos, interesa conocer la distribución estadística de sus valores. Para ello, existen varias herramientas, siendo la más conocida el histograma. Además del histograma se pueden realizar también: estadísticas elementales (media, varianza, desviación estándar, etc.), diagramas de caja, histogramas acumulados, gráficos de probabilidad. Es conveniente previo a realizar histogramas, por ejemplo, considerar una variable de ponderación o “desagrupamiento” a modo de corregir los efectos provocados por las irregularidades de la malla de muestreo.

3) Análisis multivariable

Para este tipo de análisis se pueden realizar: gráfico cuantil contra cuantil, nube de dispersión o de correlación, matriz de correlación y análisis en componentes principales.

4) Comportamiento espacial

Existen dos herramientas para analizar más en detalle la distribución espacial de los datos que son las nubes direccionales (swath plots) y las nubes de correlación diferida.

2.2.2 Análisis variográfico

2.2.2.1 Variograma experimental

Los valores de una variable regionalizada no son independientes, en el sentido que un valor observado en un sitio proporciona información sobre los valores de los sitios vecinos. Para modelar esta dependencia espacial, la geoestadística interpreta la variable regionalizada como una realización de una función aleatoria, es decir, el valor observado

en cada punto del espacio se ve como una realización de una variable aleatoria. Bajo esta interpretación, la noción intuitiva de dependencia está descrita por la distribución espacial de la función aleatoria, que modela la manera como se relacionan los valores observados en distintos sitios por una distribución de probabilidad multivariable. En la práctica, la determinación de dicha distribución espacial se restringe a aquella de sus primeros momentos, entre los cuales se cuenta con el denominado variograma.

Consideremos una variable regionalizada z conocida en n sitios $\{x_1, \dots, x_n\}$. El estimador tradicional del variograma para un vector de separación h dado, se define de la siguiente manera:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(u_i) - z(u_i + h)]^2$$

Donde:

$$N(h) = \{(\alpha, \beta) \text{ tal que } x_\alpha - x_\beta = h\}$$

$|N(h)|$ es el número de pares contenidos en el conjunto $N(h)$

Se ve que el estimador anterior consiste en reemplazar la esperanza en la expresión del variograma teórico:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\}$$

El variograma cruzado entre dos funciones aleatorias Z_i y Z_j para un vector de separación h se define como:

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} \text{cov}\{Z_i(x+h) - Z_i(x), Z_j(x+h) - Z_j(x)\}$$

Los parámetros a especificar para calcular un variograma experimental son los siguientes:

- Dirección de interés: acimut, inclinación

- Distancias de interés, en general múltiplos de una distancia elemental llamado *paso* (“lag”)
- Tolerancia en la dirección: tolerancia angular, ancho(s) de banda
- Tolerancia en las distancias

2.2.2.2 Variograma modelado

El variograma experimental no puede utilizarse directamente. Por una parte, sólo está definido para ciertas distancias y direcciones, por lo que es incompleto. Por otra parte, está sujeto a ciertas aproximaciones, debido al número limitado de datos y a los parámetros de tolerancia utilizado en el cálculo. Para subsanar esta situación, la idea es ajustar un modelo teórico de variograma en torno al variograma experimental. Esta etapa es la fase esencial de todo estudio geoestadístico, pues aquí es donde uno “interpreta” la continuidad espacial de la variable en estudio.

Para el ajuste del variograma se utilizan modelos elementales que son presentados a continuación:

Efecto pepita:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Este modelo se traduce en una ausencia total de correlación en el espacio, es decir, dos variables aleatorias distintas tienen valores independientes.

Modelo esférico:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left\{ \frac{3|h|}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{|h|^3}{a^3} \right) \right\} & \text{si } |h| \leq a \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

El alcance es el parámetro a , mientras que la meseta es el parámetro C .

Modelo exponencial:

$$\gamma(h) = C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{3|h|}{a}\right) \right\}$$

El alcance es el parámetro a, mientras que la meseta es el parámetro C.

Modelo gaussiano:

$$\gamma(h) = C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{3|h|^2}{a^2}\right) \right\}$$

El alcance es el parámetro a, mientras que la meseta es el parámetro C.

2.2.3 Kriging

El contar con un número limitado de muestras en un campo de interés hace necesario buscar un método que permita estimar o predecir el valor de la variable regionalizada en sitios donde no se tiene información. Es así como uno de los métodos de interpolación más utilizados es el Kriging, el cual estima el valor $z(x_0)$ (desconocido) en un sitio x_0 a partir de los valores conocidos en sitios con datos.

El Kriging busca mejorar los resultados de la interpolación con respecto a otros métodos pues considera los siguientes aspectos:

- Distancias al sitio a estimar
- Redundancias entre los datos debidas a posibles agrupamientos
- Continuidad espacial de la variable regionalizada (variograma)

Este método está sujeto a tres restricciones, las cuales son:

2.2.3.1 Restricción de linealidad

El estimador tiene que ser una combinación lineal ponderada (promedio ponderado) de los datos, que denotaremos de la siguiente forma:

$$Z^*(x_0) = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$$

Donde x_0 es el sitio donde se busca tener una estimación, $\{x_{\alpha}, \alpha = 1 \dots n\}$ son los sitios con datos, mientras que los ponderadores $\{\lambda_{\alpha}, \alpha = 1 \dots n\}$ y el coeficiente a son las incógnitas del problema de kriging. En rigor, se debería escribir $\lambda_{\alpha}(x_0)$ en lugar de λ_{α} , puesto que los ponderadores de kriging dependerán del sitio x_0 a estimar.

2.2.3.2 Restricción de insesgo

Esta restricción consiste en expresar que el error de estimación tiene esperanza nula, decir

$$E[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = 0$$

Si se reemplaza la esperanza matemática por una media en el espacio se puede interpretar esta restricción como que la media de los errores de estimación cometidos se acerca a cero. Cabe mencionar que esto no garantiza que los errores sean bajos, sino más bien que globalmente la media es nula.

2.2.3.3 Restricción de optimalidad

Se busca que los ponderadores minimicen la varianza del error de estimación, es decir

$$\text{var}[Z^*(x_0) - Z(x_0)] \text{ es mínima}$$

Existen distintas variantes del Kriging donde se destacan el Kriging simple, Kriging ordinario, Kriging de bloques, entre otros, sin embargo, a continuación, se presenta el sistema de Kriging ordinario.

2.2.4 Kriging ordinario (media desconocida)

En este caso se supone que la variable regionalizada es la realización de una función aleatoria tal que:

- La media m es desconocida
- Sólo se conoce el variograma $\gamma(h)$ o la covarianza $C(h)$ (función igual a la meseta menos el variograma).

Las restricciones presentadas anteriormente quedan de la siguiente manera:

Linealidad: el estimador en x_0 se define

$$Z^*(x_0) = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha})$$

Donde $Z^*(x_0)$ es el valor estimado en el sitio x_0 , a es un factor de adición y λ_{α} son los ponderadores asociados a los sitios con datos x_{α} .

Insesgo: el valor esperado del error de estimación es

$$E[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} E[Z(x_{\alpha})] - E[Z(x_0)] = a + \left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} - 1 \right) m$$

Como se desconoce el valor de la media m , este valor esperado es nulo si:

$$a = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1$$

Con la igualdad sobre los ponderadores se asegura que en caso de que todos los datos son iguales a una misma constante, el valor estimado será igual a esta constante.

Optimalidad: la varianza del error de estimación es:

$$\text{var}[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) + C(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0)$$

Se necesita minimizar esta expresión bajo la condición de Insesgo, que impone que la suma de las incógnitas es igual a 1. Se debe entonces, introducir una incógnita adicional llamada multiplicador de Lagrange, que se denotará como μ . Se escribe:

$$\text{var}[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = C(0) + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) + C(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0) + 2\mu \left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} - 1 \right)$$

Como resultado de las derivadas parciales se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha}} = 0: \sum_{\beta=1}^n C(x_{\alpha} - x_{\beta}) + \mu = C(x_{\alpha} - x_0) \quad \forall \alpha = 1 \dots n \\ \frac{\partial}{\partial \mu} = 0: \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1 \quad (\text{condición de insesgo}) \end{cases}$$

El que expresado de forma matricial tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} C(x_1 - x_1) & \dots & C(x_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ C(x_n - x_1) & \dots & C(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x_1 - x_0) \\ \vdots \\ C(x_n - x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se puede utilizar el variograma en reemplazo de la covarianza pues son equivalentes.

2.2.4.1 Varianza de Kriging

La varianza del error de Kriging ordinario se expresa de la siguiente forma:

$$\sigma_{KO}^2(x_0) = \sigma^2 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0) - \mu = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \gamma(x_{\alpha} - x_0) - \mu$$

2.2.5 Co-kriging

El objetivo del co-kriging es estimar el valor de una variable en un sitio o un bloque, a partir no sólo de las mediciones de ésta, sino también de otras variables correlacionadas con ella. Se trata de una extensión de la técnica de kriging al caso multivariable. Se presentará a modo de ejemplo al igual que en el caso del kriging ordinario, el co-kriging ordinario.

2.2.6 Co-kriging ordinario

Si se suponen las medias m_1, \dots, m_N desconocidas, las restricciones de linealidad, insesgo y optimalidad quedan definidas según el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^{n_j} \lambda_{\beta}^j C_{ij}(x_{\alpha}^i - x_{\beta}^j) + \mu_i = C_{i1}(x_{\alpha}^i - x_0) \quad \forall i = 1 \dots N, \forall \alpha = 1 \dots n_i \\ \sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{\alpha}^1 = 1 \\ \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i = 0 \quad \forall i = 2 \dots N \end{array} \right.$$

Y la varianza del error:

$$\sigma_{CKO-Z_1}^2(x_0) = C_{11}(0) - \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i C_{i1}(x_{\alpha}^i - x_0) - \mu_1$$

Hay que tener en consideración que aumentar el número de variables para la estimación por co-kriging mejora los resultados pues se ven reflejadas correlaciones entre variables, pero el tiempo computacional para ejecutarlo aumenta también.

2.2.7 Simulación geoestadística

Debido a los problemas del kriging como, por ejemplo, el suavizamiento que se traduce en una sobreestimación de las leyes bajas y una subestimación de las leyes altas es necesario encontrar una alternativa que mitigue estos problemas y logre reflejar la variabilidad del yacimiento. Es así como una alternativa al método tradicional de estimación es la simulación. Una simulación o modelo numérico consiste en construir una variable regionalizada que “se parece” a aquella que se estudia, es decir, que reproduce su continuidad espacial y también coincide con los valores medidos en los sitios con datos.

El principio de una simulación consiste en construir una variable ficticia que reproduce la continuidad/variabilidad espacial de la variable regionalizada $z = \{z(x), x \in D\}$. Esta construcción se basa en la interpretación de z como una realización particular de una función aleatoria $Z = \{Z(x), x \in D\}$. La idea es generar otras realizaciones de esta función aleatoria. Mientras que el kriging y otros métodos de interpolación conducen a una imagen suavizada de la realidad, las realizaciones de Z presentan la misma variabilidad espacial que la variable regionalizada real, en particular, el mismo histograma y el mismo variograma. En consecuencia, la “respuesta” de una simulación a una operación (por ejemplo, selección sobre un valor umbral) es similar a la respuesta que daría la variable real.

La simulación tendrá las siguientes propiedades:

- Interpolación exacta cuando es “condicional”.
- Insesgo: la variable regionalizada o, más generalmente, una función de esta variable puede ser estimada sin sesgo (es decir, con un error de esperanza nula) por la misma función aplicada a los valores simulados.
- No suaviza: la dispersión de los valores simulados es la misma que la dispersión de los valores verdaderos.
- No es precisa: el error entre valor real y valor simulado no tiene una varianza mínima.

Existen dos tipos de simulación que son las simulaciones condicionales y no condicionales. Las simulaciones condicionales son aquellas que restituyen los valores en los sitios con datos, mientras que las simulaciones no condicionales sólo reproducen la variabilidad de los datos.

2.2.8 Simulación multivariable

Se puede extender los métodos de simulación condicional al ámbito multivariable (se habla entonces de co-simulación). Es de interés para los fines de este trabajo el modelo multi- Gaussiano, que sirve para simular variables de distribuciones continuas.

Se supone que cada variable ha sido transformada a una Gaussiana (anamorfosis) y que se ha verificado el carácter bi-Gaussiano para cada variable y cada par de variables. A continuación, presentaremos distintas opciones para la cosimulación.

El método que se utiliza para la simulación multivariable en este trabajo es el de las bandas rotantes. Lo que se realiza es condicionar las realizaciones a los datos disponibles utilizando un co-kriging. En la sección metodología se profundiza en los pasos para realizar la simulación.

2.2.9 Sesgo condicional

Como se mencionó en apartados anteriores, una de las restricciones del kriging consiste en que la esperanza del error promedio cometido sea lo más cercano a cero posible, sin embargo, esto solamente implica que globalmente los resultados de este método están insesgados. Profundizando un poco más en esto, podrían existir sesgos localizados que, al imponer alguna condición, por ejemplo, una ley de corte a los resultados se vería que las medias del kriging están subestimadas o sobreestimadas con respecto a la realidad, en este caso estamos hablando de que existe un sesgo condicional. Este tipo de sesgo existe cuando la media de los errores cometidos depende de los valores estimados. Matemáticamente la condición de insesgo condicional implicaría lo siguiente:

$$E(Z | Z^* \geq z) = Z^*$$

Esto se puede interpretar como que la ley media real (Z) sobre cierta ley de corte z , sea igual a la ley media estimada (Z^*) sobre dicha ley de corte. Se deja adjunto un caso en el cual se tienen dos resultados insesgados globalmente, pero uno de ellos con sesgo condicional.

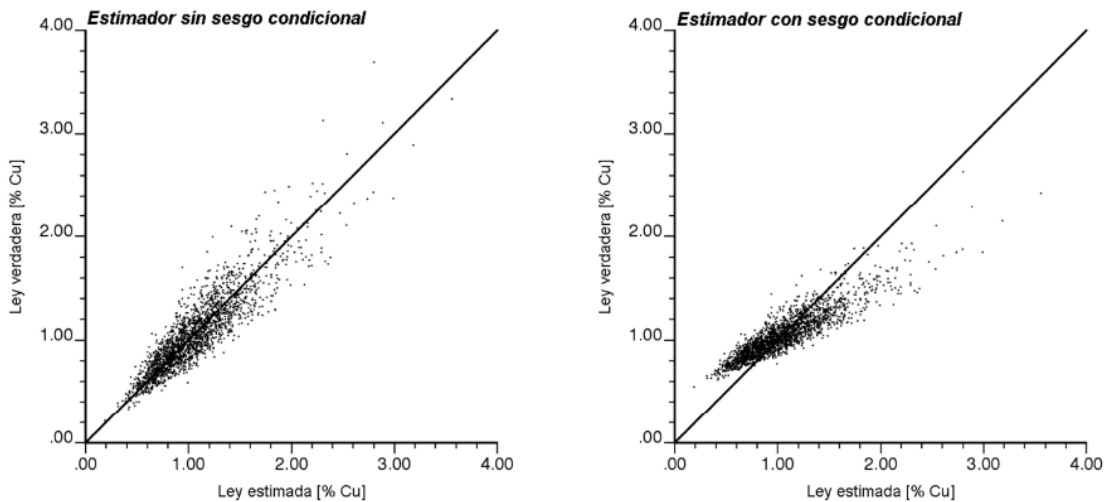


Figura 1 Sesgo condicional

2.3. Estado del arte

Existen publicaciones de geoestadística aplicada a la geometalurgia que abordan el problema de la aditividad en variables geometalúrgicas definidas por cocientes. Se presentan cuatro publicaciones a continuación:

2.3.1 Modelamiento geoestadístico de la razón de solubilidad en un yacimiento de oxidados de cobre (Emery et al. 2004)

En este artículo se presenta una alternativa a la estimación tradicional mediante kriging, utilizando la simulación condicional; esto porque se desea predecir la solubilidad en soporte de bloques aplicado a un yacimiento de cobre chileno. Para ello, se cuenta con datos de una campaña de sondajes que contiene variables como la ley de cobre soluble, ley de cobre total y, por ende, solubilidad. Al hacer estudios previos se ve que las variables que son más adecuadas para realizar la simulación condicional son la solubilidad y la ley de cobre total puesto que al graficarlos en una nube de dispersión sus valores no mantienen correlación lo que cumple con uno de los tests de adecuación de hipótesis multigaussiana.

Una vez escogidas las dos variables a co-simular, se realiza una transformación gaussiana a los datos y se hace el análisis variográfico correspondiente obteniendo variografía experimental y modelada. Con los variogramas modelados se puede realizar la co-simulación que para este caso se realiza en primera instancia en un soporte puntual con una grilla densa de $2 \times 2 \times 5 \text{ m}^3$. Se generan 65 realizaciones de solubilidad y cobre total en soporte puntual, donde cada una de ellas se puede considerar como la realidad. El contar con valores de estas variables permite obtener ley de cobre soluble en soporte puntual y de esta manera rebloquear en unidades de mayor tamaño pues cobre soluble y cobre total son variables aditivas (unidades de $10 \times 10 \times 10 \text{ m}^3$) promediando los valores de cobre soluble y cobre total dentro de este bloque.

Teniendo valores en soporte de bloques para cobre soluble y total se puede hacer el cociente entre estos valores para obtener la solubilidad del bloque. En resumen, se cuenta con 65 realizaciones para cobre soluble, cobre total y solubilidad en soporte de bloques. Obtener el promedio de las realizaciones es uno de los métodos más utilizadas. Finalmente, y para plasmar el potencial de la simulación condicional se realiza un kriging de bloques para las variables cobre soluble y cobre total, el resultado se divide y se obtiene valores de solubilidad. Se desea comparar ambos estimadores (media de realizaciones y cociente de CuS/CuT) para verificar que a diferencia del kriging que genera resultados con un sesgo condicional, es decir, dado un cierto valor estimado, el error cometido no tiene una esperanza nula, las simulaciones condicionales arrojan resultados insesgados.

En este trabajo se muestran las limitaciones del kriging en el caso de querer realizar estimación de variables no aditivas y cambios de soporte, presentando como alternativa para este problema las simulaciones condicionales, pues además, no solamente se cuenta con una estimación de la variable de interés, sino que también se aprecia la incertidumbre asociada a los valores reales desconocidos.

2.3.2 Additivity, metallurgical recovery, and grade (Carrasco et al. 2008)

En esta publicación se aborda la problemática asociada a la predicción de la recuperación metalúrgica, puesto que esta variable al igual que la solubilidad es una variable geometalúrgica regionalizada definida por cociente y que, por ende, no es aditiva.

Lo que primero se presenta es la definición de aditividad con algunos ejemplos de la importancia que tiene. Posterior a sentar la base teórica de lo que a aditividad se refiere, se define la recuperación metalúrgica y se menciona que esta variable no es aditiva por lo que se deben buscar variables que sí lo sean (“variables útiles”) para poder realizar una correcta predicción de esta variable.

Al igual que en la publicación anterior se hace una simulación multivariable donde se tienen tres variables que son aditivas, estas variables son: la ley de cabeza Z_H , recuperación en masa “ r ” y la ley recuperada Z_R que es el producto de la recuperación metalúrgica “ R ” y la ley de cabeza definida anteriormente. Se cuenta con una base de datos de 1112 muestras que cubren 1.3 km. en el eje X, 3.9 km. en el eje Y y 1.4 km. en el eje Z. Hay tres zonas minerales, pero los dos experimentos se realizan en una de las zonas minerales que es la que contiene mayor cantidad de información.

De las tres variables aditivas definidas anteriormente y realizando las nubes de dispersión entre ellas, se observa que las dos que son prácticamente independientes son la ley de cabeza Z_H y la recuperación en masa r , no obstante, la co-simulación presentada en el experimento 2 está hecha en base a las tres variables. Definido esto, se realiza la variografía experimental para ver el comportamiento de las variables y corroborar la hipótesis antes mencionada.

El primer experimento busca exponer la importancia de la aditividad si se desea calcular la recuperación metalúrgica a la escala del depósito; para ello, como se cuenta con mediciones de Z_R y Z_H se pueden calcular en cada punto donde hay datos valores puntuales de recuperación metalúrgica y promediar todo estos valores lo que arroja una recuperación metalúrgica $R^* = 88.8\%$ que es distinto al resultado que se obtiene al hacerlo de la manera correcta que sería promedio todos los valores de Z_R y Z_H a la escala del depósito y hacer el cociente entre estos valores. Con esta última manera de calcular la recuperación metalúrgica se obtiene un $R = 89.3\%$.

El segundo experimento consiste en restringir el área donde se quiere calcular la recuperación metalúrgica y se escoge un volumen de $200 \times 200 \times 50 \text{ m}^3$. Se divide este volumen en 500 bloques y cada uno de ellos es discretizado en 500 nodos, 20 co-simulaciones condicionales se hacen de las variables Z_R , Z_H y r . Ahora bien, la recuperación de cada uno de los bloques se calcula con dos procedimientos diferentes: uno aditivo y uno no aditivo. El procedimiento aditivo consistía en promediar todos los Z_R y Z_H dentro del bloque, luego se obtenía la recuperación del bloque dividiendo estas cantidades. El procedimiento no aditivo era calcular la recuperación en cada nodo del bloque y luego promediar estas cantidades. Lo que se quería hacer con esto era al igual que en el caso 1 comparar el cociente de dos promedios versus el promedio de cocientes.

De este trabajo se puede concluir que la aditividad puede tener o no un impacto significativo en los resultados dependiendo de dos factores: la variabilidad de las cantidades involucradas y la escala a la que se está calculando.

2.3.3 Geoestadística de yacimientos de cobre chilenos (Sèguret and Emery, 2019. 139-141 p.)

En las páginas citadas del libro se presenta una manera de realizar kriging a dos variables Z_1 y Z_2 y que el cociente entre ellas no presente sesgo pues se comprueba que la esperanza del cociente de los kriging de Z_1 y Z_2 coincide con la esperanza del cociente Z_1/Z_2 . Cabe mencionar que uno de los supuestos es que la variable Z_2 es independiente del cociente Z_1/Z_2 .

2.3.4 Geostatistical Modelling of Geometallurgical Variables – Problems and Solutions (Dominy S, 2013.)

Esta publicación aborda las problemáticas más usuales a la hora de predecir geoestadísticamente variables geometalúrgicas y propone algunas soluciones para mitigar estos problemas. Uno de estos problemas es la no aditividad de ciertas variables geometalúrgicas como la recuperación metalúrgica. En primera instancia se define el concepto de aditividad y se presenta un ejemplo para plasmar su importancia al igual que en el primer artículo citado en esta sección. Se menciona que el kriging entrega resultados sesgados debido a la no aditividad de las variables pues promedia todos los puntos que discretizan un bloque lo cual no aplica para este tipo de variables. Como primera solución para este problema, se propone no promediar, es decir, evitar las técnicas de kriging y como alternativa se pueden utilizar las simulaciones, pues, además, capturan la variabilidad de la variable y los resultados no están sesgados. El kriging utilizado en la simulación no introduce un sesgo cuando se condicionan realizaciones no condicionales o cuando se derivan distribuciones condicionales. Una de las principales desventajas de utilizar la simulación es que los recursos computacionales son mayores y un mayor esfuerzo técnico para manejar las realizaciones.

3. METODOLOGÍA

Se considera una variable geometalúrgica definida por cociente $R=Z_1/Z_2$ (por ejemplo, la razón de solubilidad). Interesa ver bajo qué condiciones se puede predecir R sin sesgo por la razón de las predicciones de Z_1 y Z_2 , es decir: $R^*=Z_1^*/Z_2^*$.

Ventajas sobre una predicción directa de R :

- R no es aditiva, por lo que la predicción directa no permite el cambio de soporte. En cambio, si Z_1 y Z_2 son aditivas, entonces se puede usar R^* en diferentes soportes.
- Se tiene tres predictores (R^* , Z_1^* , Z_2^*) coherentes entre sí.

Para desarrollar este estudio se cuenta con dos bases de datos de yacimientos tipo pórfido cuprífero. Cada base de datos cuenta con mediciones de cobre soluble, cobre total y, por ende, datos de solubilidad. El modelamiento geoestadístico considera las siguientes etapas:

1. Análisis exploratorio de datos: esta etapa tiene como objetivo identificar anomalías en la base de datos como, por ejemplo, datos duplicados, outliers (valores extremos), errores de tipeo, etc. Además de esto, el utilizar herramientas estadísticas simples y despliegue de herramientas gráficas (histogramas, medias condicionales, etc.) en esta etapa permite ver la cantidad y calidad de los datos. Con todo esto se puede definir una zona de estudio de interés de acuerdo con el criterio que se considere adecuado al trabajo. Adicionalmente a lo mencionado anteriormente, se realiza un desagrupamiento con el fin de corregir los efectos que puede provocar las irregularidades de la malla de muestreo.

2. Generación de realidad virtual: para poder comparar los resultados obtenidos mediante la estimación por co-kriging se realiza una co-simulación de las variables cobre total y solubilidad. Para llevar a cabo esto se siguen los siguientes pasos:

a. Transformación los datos en datos Gaussianos (anamorfosis), tomando en cuenta los ponderadores de desagrupamiento. Con esto se logra generar una distribución normal de media cero y varianza uno. Esto se realiza para las tres variables (cobre total, cobre soluble y solubilidad).

b. Validar la hipótesis multi-Gaussiana: para esto se analizan las nubes de correlación diferida entre las variables y la comparación entre variograma y madograma.

c. Realizar el análisis variográfico de los datos Gaussianos: se realizan mapas variográficos con el fin de detectar posibles direcciones de anisotropía. A partir de la interpretación de los mapas se calculan variogramas experimentales y posteriormente se modelan estos variogramas.

d. Co-simulación a soporte puntual: una vez modelados los variogramas se realiza una co-simulación de las variables de interés a soporte puntual, se generan 65 realizaciones de cada variable para lograr capturar la variabilidad del yacimiento y de éstas, se escoge una para utilizar como realidad. El método utilizado es el de las bandas rotantes.

e. Rebloqueo de resultados co-simulación puntual: se realiza rebloqueo a unidades de mayor volumen al discretizar los bloques como el promedio de valores puntuales de la variable de interés.

3. Estimación por Kriging y Co-kriging: se quiere comparar los resultados de realizar kriging directo sobre la solubilidad y un co-kriging de cobre soluble y cobre total. Para ello se siguen pasos similares a los seguidos en la co-simulación:

a. Análisis variográfico: se realizan mapas variográficos con el fin de detectar posibles direcciones de anisotropía. A partir de la interpretación de los mapas se calculan variogramas experimentales y posteriormente se modelan estos variogramas.

b. Estimación por Kriging y co-kriging soporte puntual: con los variogramas modelados se puede realizar la estimación en soporte puntual de las variables de interés y estudiar el sesgo obtenido pues al realizar la validación cruzada se obtienen errores cometidos y también el realizar nubes de dispersión con los resultados permiten estudiar el sesgo condicional.

c. Rebloqueo de resultados de kriging y co-kriging: se rebloquean las variables de interés.

4. Procesamiento de resultados: teniendo los resultados de la co-simulación, kriging y co-kriging tanto en soporte puntual como de bloques, se pueden contrastar los resultados obtenidos. En primera instancia se desea ver la diferencia entre hacer kriging directo de solubilidad versus hacer el cociente de co-kriging de cobre soluble y cobre total, donde éste último podría tener sesgo condicional.

El contar con rebloqueo de las 65 realizaciones de co-simulación permite generar un estimador definido como el promedio de estas 65 realizaciones. También se puede utilizar cualquiera de las realizaciones como la realidad por lo que se puede estudiar en soporte de bloque si existe sesgo condicional hacer el cociente del co-kriging de cobre soluble y cobre total. Este número de realizaciones fue escogido porque se observó experimentalmente que con un menor número de realizaciones no se lograba capturar la variabilidad de los datos.

Se adjunta un diagrama que resume toda la metodología recién expuesta.

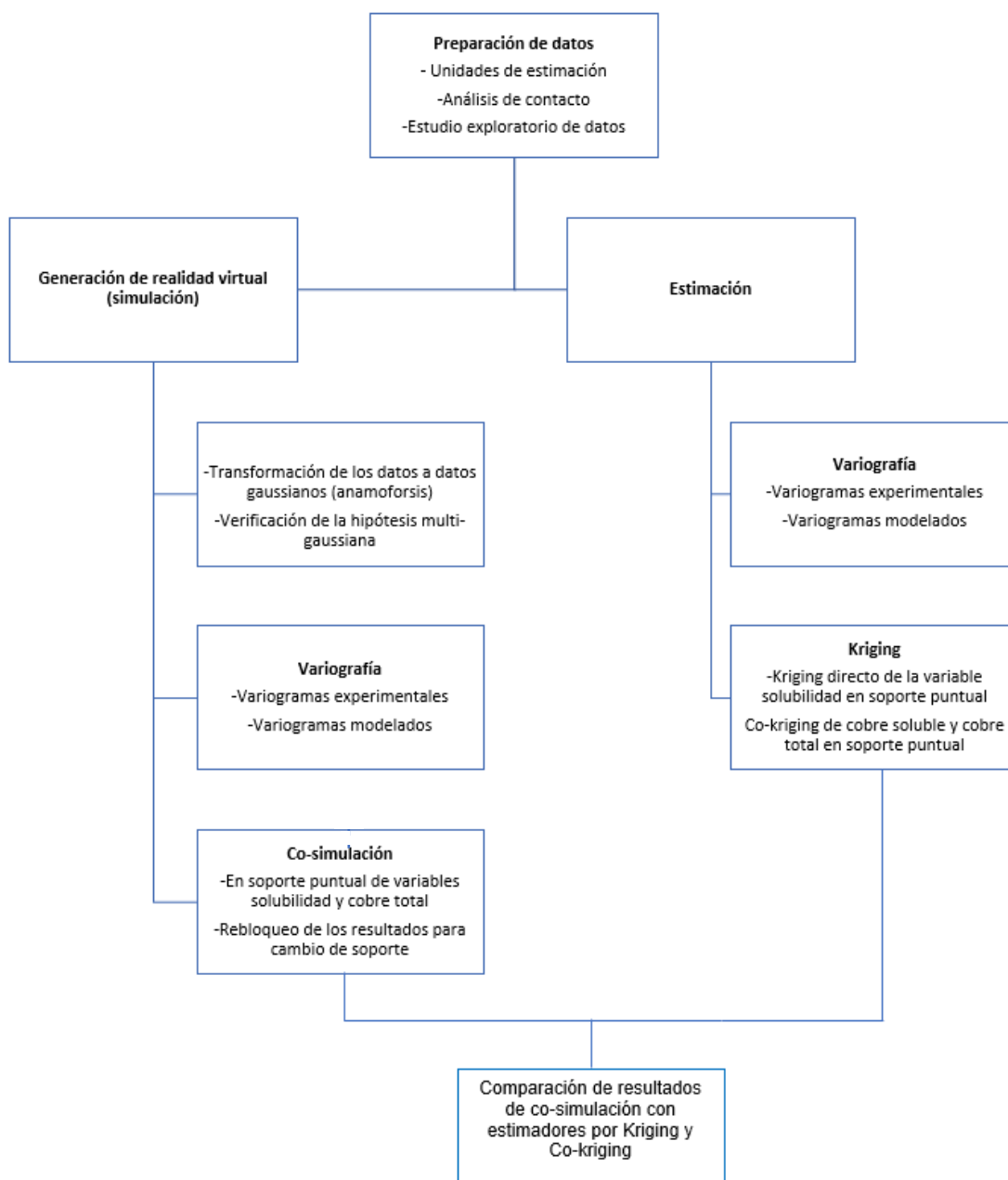


Figura 2 Metodología de trabajo

4. PRIMER CASO DE ESTUDIO

4.1. Análisis exploratorio de datos

Las muestras disponibles abarcan un volumen de 1.1 km x 1.5 km x 0.2 km (figura 3), por temas de confidencialidad se deja adjunta solamente una vista en planta de los datos para las variables cobre soluble y cobre total.

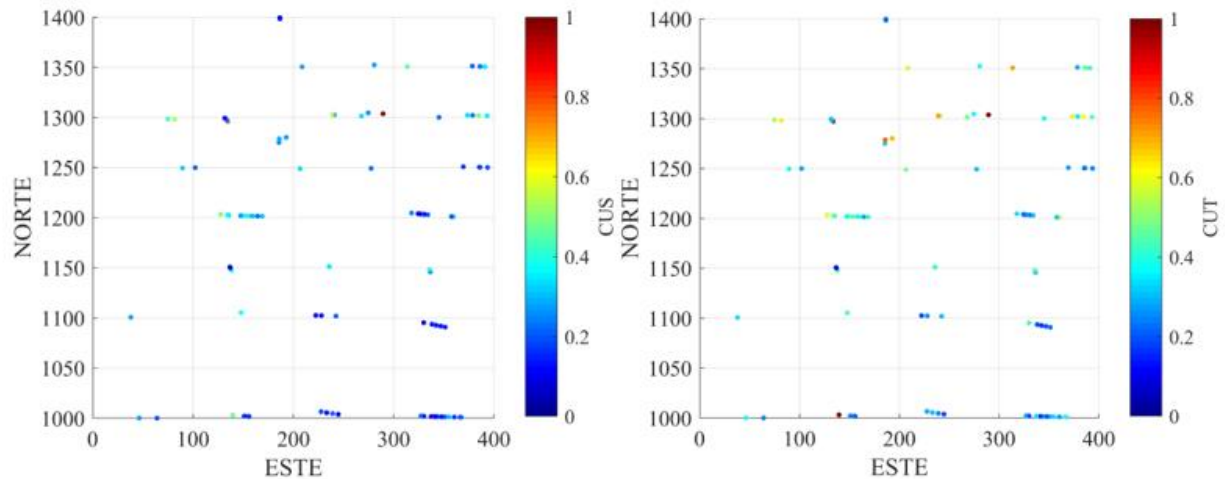


Figura 3 Vista en planta de ubicación de las muestras de cobre soluble (izquierda) y cobre total (derecha)

Las estadísticas básicas de las muestras se dejan adjuntas en la siguiente tabla:

Tabla 1 Estadísticas básicas datos desagrupados

	Cobre soluble	Cobre Total	Solubilidad
Mínimo	0.005	0.021	0.045
Máximo	1.679	2.477	1.0
Número de datos	10,274	10,274	10,274
Media	0.183	0.298	0.631
Media desagrupada	0.187	0.321	0.607
Varianza	0.012	0.029	0.039
Varianza desagrupada	0.014	0.037	0.043

Con el fin de corregir los efectos que puedan tener las irregularidades del muestreo se hace un desagrupamiento basado en la malla de muestreo que en este caso es de aproximadamente 50m x 100m x 5m. El método utilizado para desagrupar es el método de las celdas y a continuación se presentan los histogramas desagrupados para cobre

soluble y cobre total. Cabe mencionar también que los datos están compositados con una longitud de compósito de 1.5m por lo que no se requiere hacer mayores modificaciones.

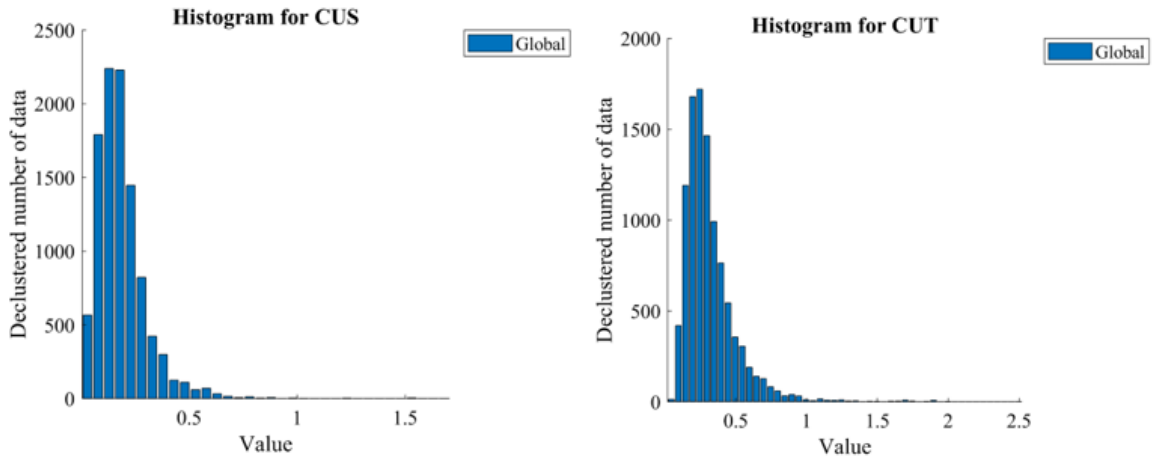


Figura 4 Histogramas desagrupados de leyes de cobre soluble (izquierda) y cobre total (derecha)

Es importante ver si existe una correlación en las variables, pues esta información es útil a la hora de ver qué variables serán utilizadas en la predicción. Se deja adjunta la nube de dispersión entre el cobre total y cobre soluble.

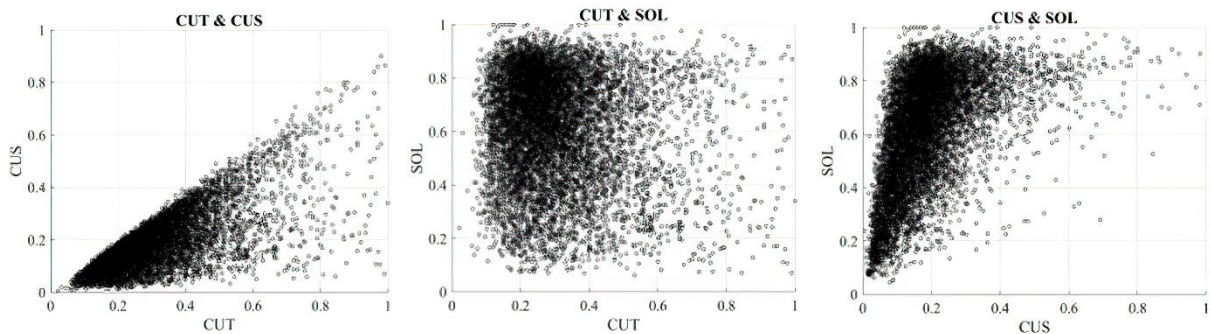
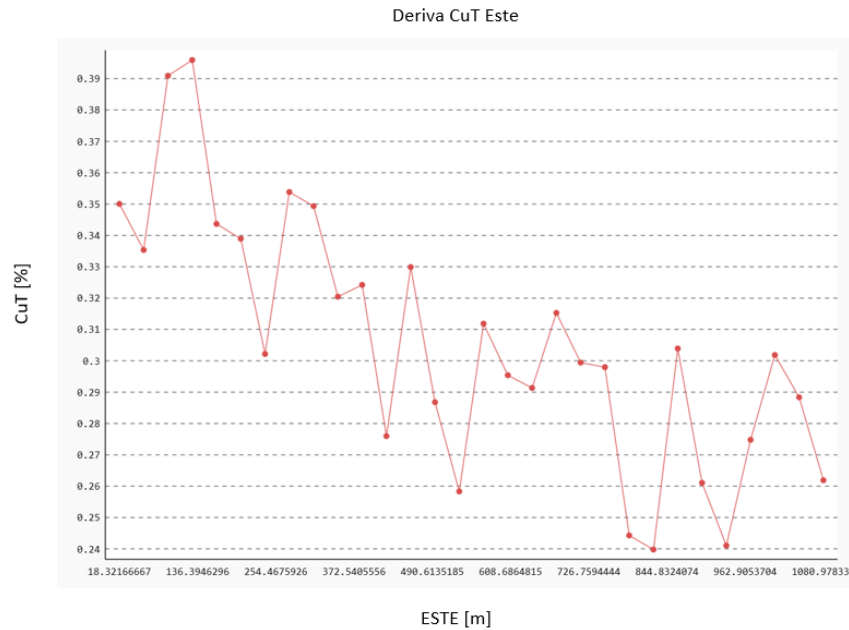


Figura 5 Scatter plots de CuS vs CuT, Sol vs CuT y Sol vs CuS

El coeficiente de correlación entre cobre soluble y cobre total es $R=0.72$ lo cual indica una buena correlación entre ambas variables y es importante notar que todos los valores se encuentran bajo la primera bisectriz lo cual se debe a que el cobre soluble siempre es menor o igual al cobre total. Entre el cobre total y la solubilidad hay un coeficiente de correlación $R=-0.15$ lo cual indica independencia entre estas variables. Por último, el

coeficiente de correlación entre cobre soluble y solubilidad es $R=0.46$ que refleja una correlación baja.

Se realizan también el cálculo de las medias condicionales (swath plots) de cada variable para comprender de mejor manera el comportamiento espacial de las variables. En este caso se calcularon para el este, norte y elevación. Se muestran los resultados para la variable cobre total.



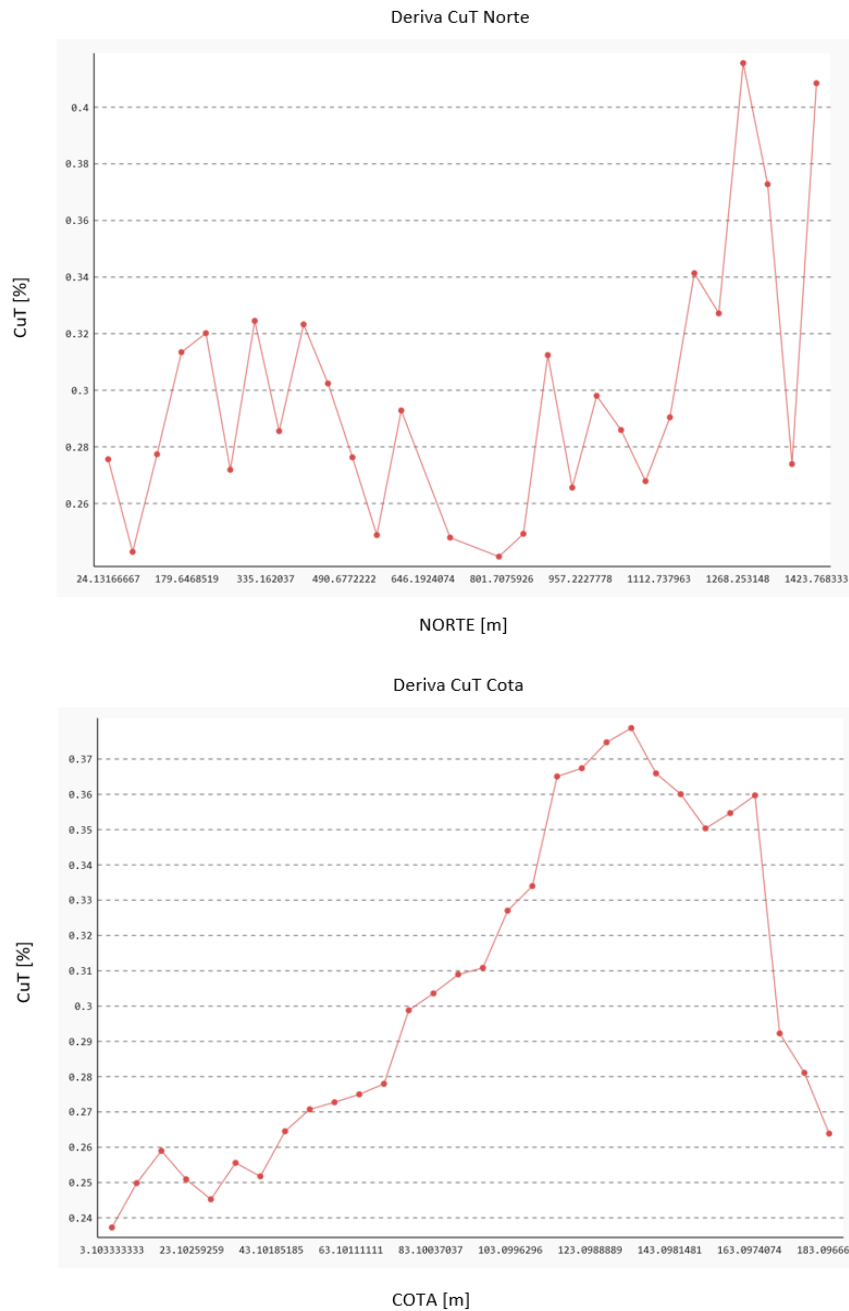


Figura 6 Medias condicionales para cobre total en las direcciones este (superior), norte (centro) y elevación (inferior)

Con respecto a los resultados de las medias condicionales tanto en el este, norte y cota se pueden apreciar tendencias al alza en la ley en ciertos rangos de valores. Es así como en el este en los primeros 130 metros se tiene una ley mayor a la del resto del espacio alcanzo valores de 0.40%, mientras que el resto se mantiene en torno a 0.30%. Para el norte en los primeros 1000 metros se mantiene estable el valor en torno a 0.30%, pero en los últimos 200 metros se alcanzan valores de hasta 0.42%. Finalmente, en la cota, se observa un alza más sostenida a medida que aumenta su valor, pasando de 0.23% hasta 0.38% casi en los 200 metros. Esto explica que la malla de muestreo sea regular

de 50m x 100m x 5m y que, sin embargo, haya sondajes de relleno en zonas donde aumenta el valor de la ley promedio lo que hizo necesaria en la etapa previa el desagrupamiento de los datos.

4.2. Co-Simulación

4.2.1 Anamorfosis Gaussiana de los datos

Se debe realizar una transformación gaussiana a los datos puesto que se busca trabajar con distribucionales normales de media 0 y varianza 1. En este caso se aplicó la transformación a las tres variables de interés: cobre total, cobre soluble y solubilidad. Se muestran los resultados para estas tres variables.

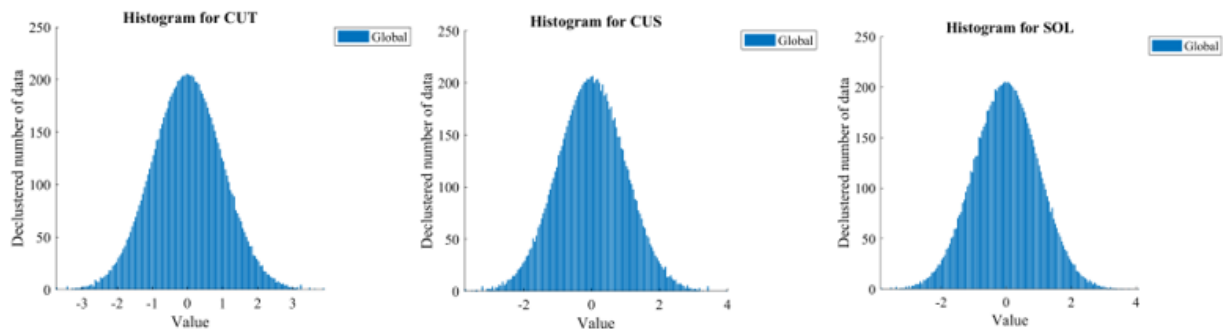


Figura 7 Histogramas de datos gaussianos para cobre total (izquierda) cobre soluble (centro) y solubilidad (derecha)

Al realizar esta transformación las estadísticas básicas cambian también, la siguiente tabla muestra estos nuevos valores:

Tabla 2 Estadísticas básicas datos Gaussianos

	Cobre soluble	Cobre Total	Solubilidad
Mínimo	-3.747	-3.747	-3.863
Máximo	3.961	3.863	4.069
Número de datos	10,274	10,274	10,274
Media	0.0	0.0	0.0
Varianza	1.0	1.0	1.0

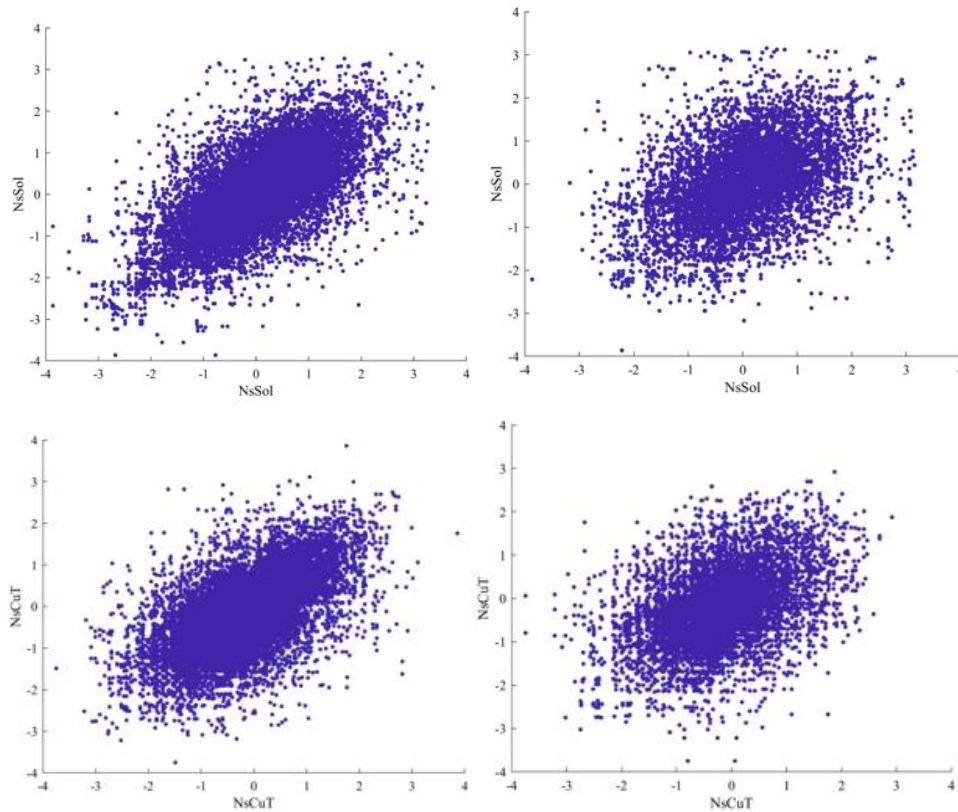
Tal y como se esperaba, la media y la varianza de los datos es 0 y 1 respectivamente por lo que la distribución cumple con esta condición para continuar adelante con el trabajo.

4.2.2 Validación de la hipótesis multi-Gaussiana

Debido a que teóricamente la verificación de la hipótesis multi-Gaussiana es muy exigente y difícil de confirmar con los datos experimentales disponibles lo que se hace es validar que la hipótesis se cumple a nivel de las distribuciones bivariantes (aquellas que involucran a dos valores Gaussianos a la vez). Para realizar esto existen tests y para este caso se realizan dos: nubes de correlación diferida y comparación entre variograma y madograma (Chilès y Delfiner, 2012).

4.2.2.1 Nubes de correlación diferida

Este test plantea que la nube de correlación diferida calculada con los datos Gaussianos para un vector h , debe tener una forma elíptica. Además, a medida que h se va haciendo muy grande la nube de correlación diferida se va volviendo circular y por el contrario cuando h se hace muy pequeño la nube se restringe en torno a la primera bisectriz. Se calcularon las nubes de correlación diferida para las tres variables en estudio. Las nubes presentadas a continuación, fueron calculadas en la dirección vertical con un paso de 3m.



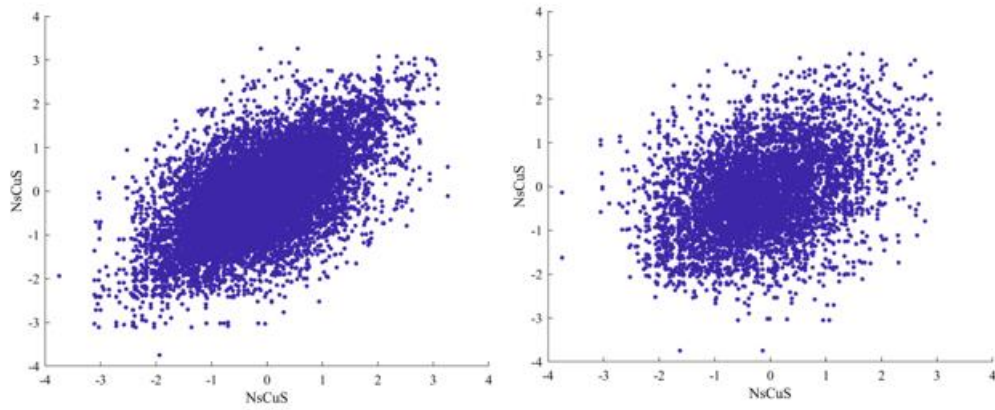
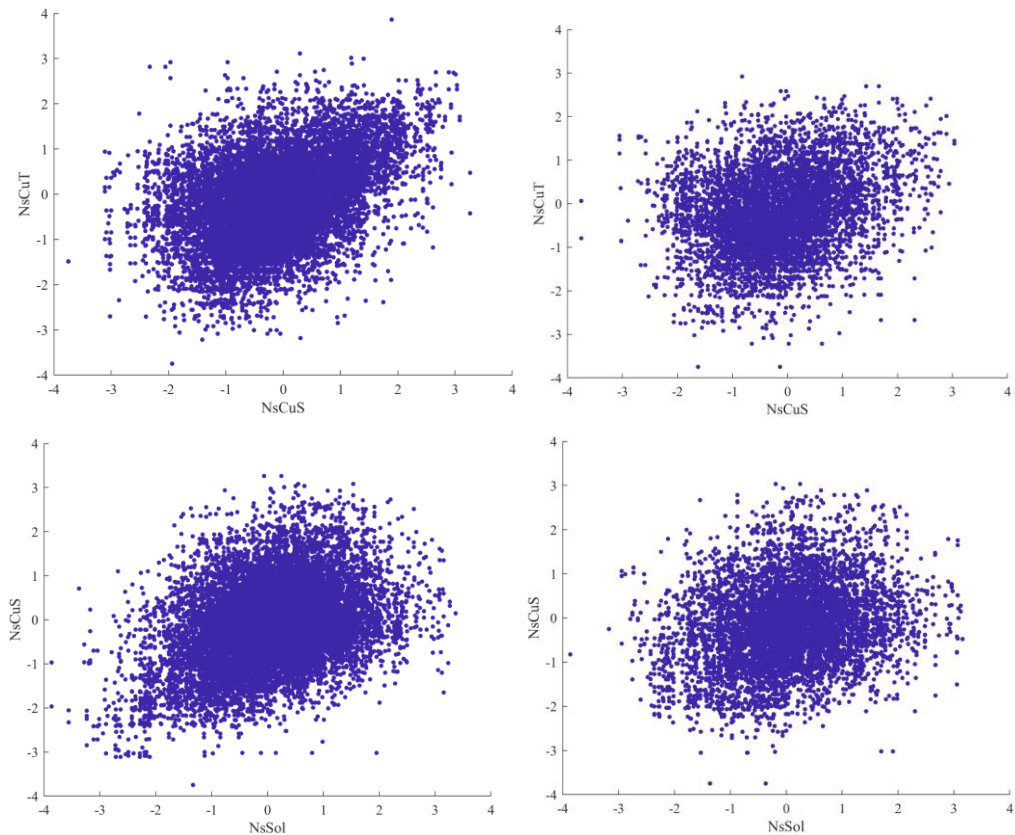


Figura 8 nubes de correlación diferida para solubilidad (superior), cobre total (centro) y cobre soluble (inferior) con una distancia de separación de 3m (izquierda) y 15m (derecha)

Efectivamente, las nubes de correlación diferida calculadas tienen forma elíptica y también se observa que a medida que la distancia de separación se hace más pequeña se comienzan a restringir en torno a la primera bisectriz, mientras que si la distancia de separación crece se van volviendo circulares. Por esto, se concluye que el test resulta de manera correcta. Se presentan también, las nubes de correlación diferida entre variables de interés (CuT vs CuS, CuT vs Sol y CuS vs Sol).



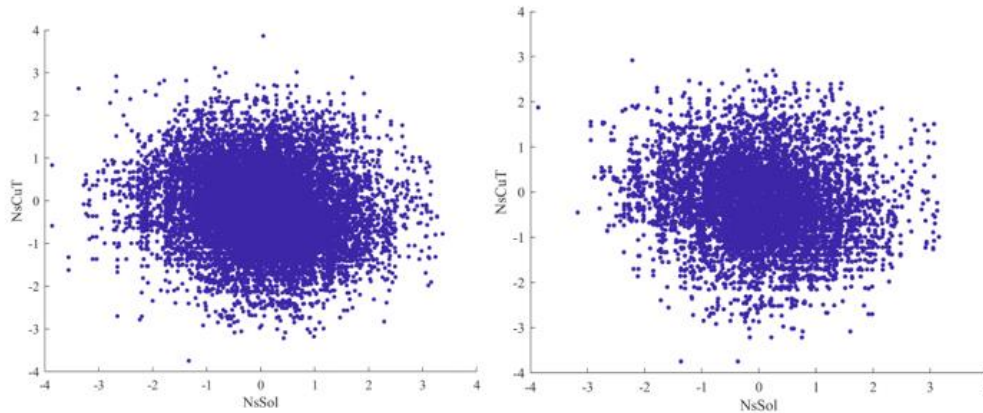


Figura 9 nubes de correlación diferida CuT vs CuS (superior), CuS vs Sol (centro) y CuT vs Sol (inferior) con una distancia de separación de 3m (izquierda) y 15m (derecha)

Las nubes de correlación diferida de CuT vs CuS no cumplen que para pasos pequeños sea más elíptica y que a medida que se aumenta el paso se vuelva más circular, lo mismo pasa para las nubes de correlación diferida de CuS vs Sol. Se confirma de la nube de correlación diferida para CuT vs Sol que estas variables son independientes pues esta nube es casi circular, es importante destacar ,además, que esta última es circular para pasos pequeños (3m) y pasos más grandes (15m).

4.2.2.2 Comparación entre variograma y madograma

El segundo test que se realiza para verificar el carácter bigaussiano consiste en hacer el cociente entre la raíz cuadrada del variograma y el madograma (variograma de orden 1). Este cociente se mantiene constante en torno a la raíz cuadrada de π . Matemáticamente eso significa:

$$\frac{\sqrt{\gamma(h)}}{\gamma_1(h)} = \sqrt{\pi} = 1.77 \quad (\text{independiente de } h)$$

En la figura 10 se puede ver el resultado de realizar este procedimiento para el cual fueron utilizados los siguientes parámetros: direcciones omnihorizontal y vertical (la figura muestra el gráfico correspondiente a la dirección omnihorizontal). El paso utilizado es de 10m con una tolerancia de 10m puesto que se aprecia que hay una estructura de corto alcance en las variables. El test se cumple correctamente exceptuando el primer punto que es para una distancia de 0.5m, pero pasando de este valor se mantiene casi constante en torno al 1.77.

La siguiente tabla resume los parámetros utilizados.

Tabla 3 Parámetros utilizados para cálculo de variograma y madograma

Dirección	Azimuth	Tolerancia az.	Dip	Tolerancia dip	Paso	Tolerancia paso	Número paso
Omnihorizontal	0.0	90.0	0.0	20.0	3.0	1.5	5
Vertical	0.0	90.0	90.0	20.0	3.0	1.5	5

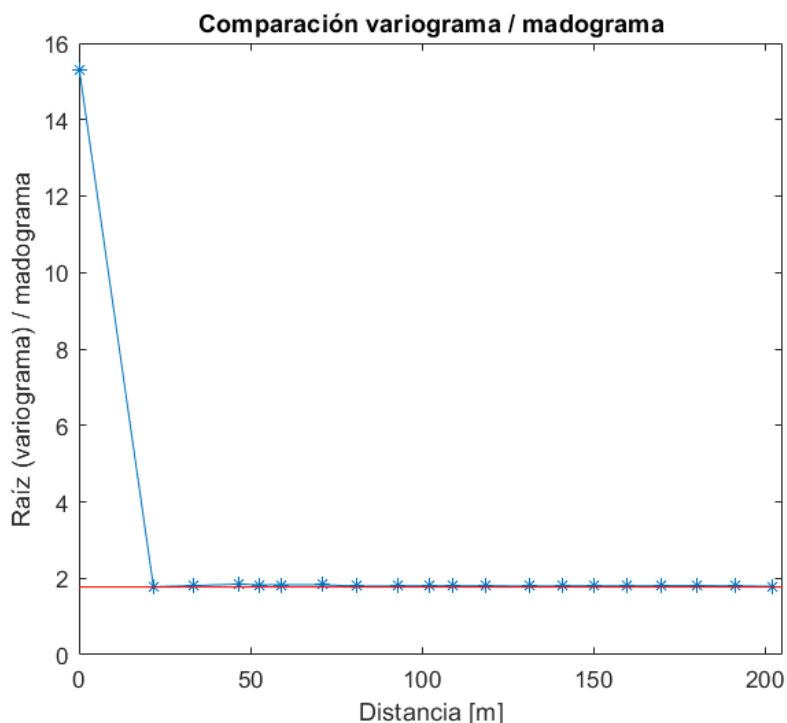


Figura 10 Comparación variograma / madograma

4.2.3 Análisis variográfico

Del test de nubes de correlación realizado para las tres variables (CuT, CuS y Sol) se ve que al realizar las nubes cruzadas entre estas variables el cobre total y la solubilidad tienen un comportamiento casi independiente en comparación a las demás por lo que el análisis variográfico involucra a estas dos variables.

4.2.3.1 Mapas variográficos

La realización de los tests para verificación de hipótesis bigaussiana fue en base al plano omnihorizontal y la dirección vertical, sin embargo, es necesario asegurarse que estas

direcciones se ajustan a los datos por lo que los mapas variográficos correspondientes son calculados. Los resultados mostrados corresponden al cálculo para la variable CuT.

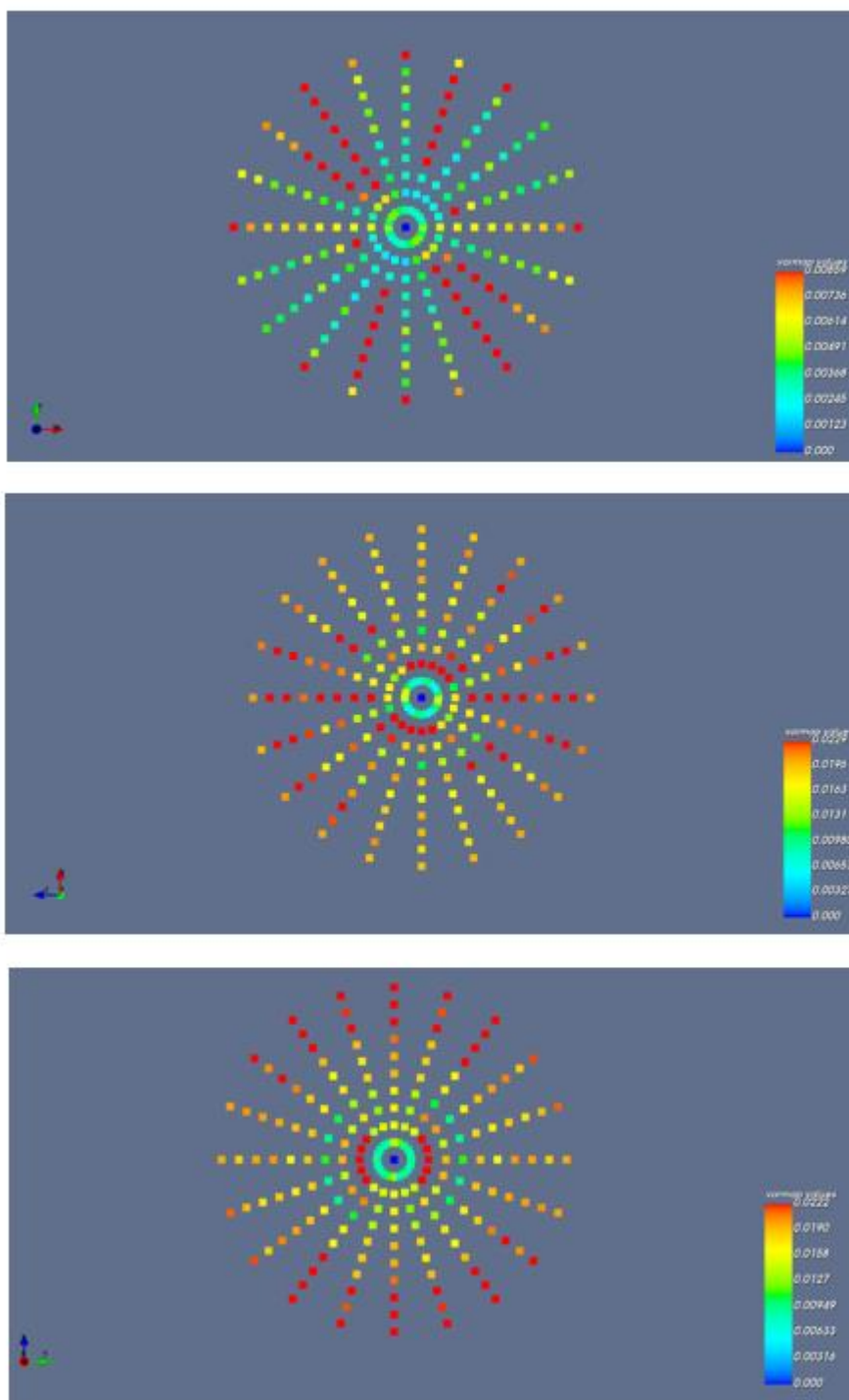


Figura 11 Mapas variográficos cobre total en el plano XY (superior), XZ (centro) e YZ (inferior)

De los resultados observados en los mapas variográficos se puede destacar que en plano XY no es apreciable una dirección preferencial de anisotropía pues a excepción de 2

direcciones que están con un valor más alto de variograma, las demás son similares. Con respecto a los planos verticales es más claro notar que hay una dirección de anisotropía pues se aprecian valores más bajos de variograma en 1 o 2 direcciones con respecto a las demás. Tomando esto en consideración las direcciones para calcular los variogramas experimentales serán el plano XY (omnihorizontal) y la dirección vertical.

4.2.3.2 Variogramas experimentales

La tabla 4 muestra los parámetros utilizados para el cálculo de los variogramas experimentales.

Tabla 4 Parámetros de cálculo para variogramas experimentales

Dirección	Azimuth	Tolerancia az.	Dip	Tolerancia dip	Paso	Tolerancia paso	Número paso
Omnihorizontal	0.0	90.0	0.0	20.0	10.0	10.0	20
Vertical	0.0	90.0	90.0	20.0	10.0	10.0	10

Con estos parámetros se obtienen los siguientes variogramas directos y cruzados:

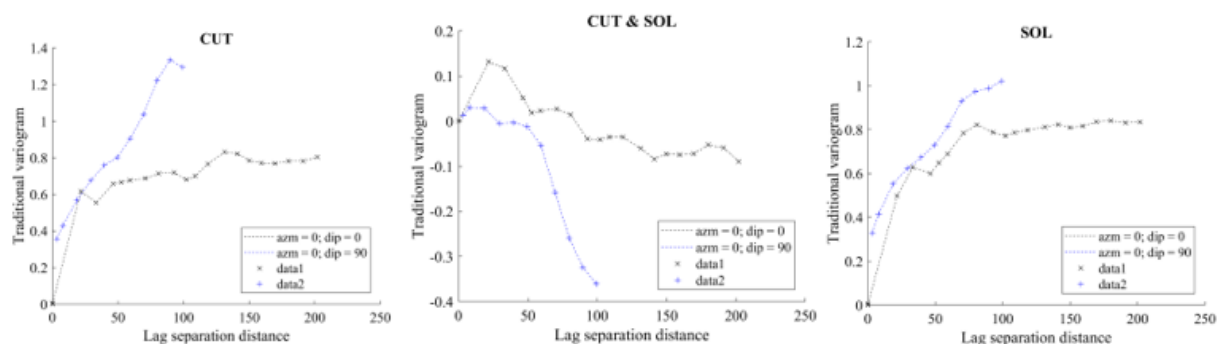


Figura 12 Variogramas experimentales directos y cruzados para cobre total y solubilidad

Se aprecia que en la dirección vertical hay una mayor variabilidad aún para distancias pequeñas y en el caso del cobre total, por ejemplo, el variograma directo toma una distancia mayor para alcanzar su meseta.

4.2.3.3 Variogramas modelados

Una vez obtenidos los variogramas experimentales directos y cruzados para CuT y Sol se puede modelar para lo que se considera un efecto pepita y tres estructuras esféricas anidadas. El modelo completo queda definido por la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{CuT} & \gamma_{CuT-Sol} \\ \gamma_{Sol-CuT} & \gamma_{Sol} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.120 & -0.005 \\ -0.005 & 0.103 \end{pmatrix} \cdot pepa + \begin{pmatrix} 0.338 & 0.172 \\ 0.172 & 0.422 \end{pmatrix} \cdot esf(19m,24m) \\ + \begin{pmatrix} 0.314 & -0.232 \\ -0.232 & 0.296 \end{pmatrix} \cdot esf(148m,119m) + \begin{pmatrix} 0.530 & -0.246 \\ -0.246 & 0.184 \end{pmatrix} \cdot esf(\infty,140)$$

Con este modelo, los variogramas modelados se muestran en la figura 13.

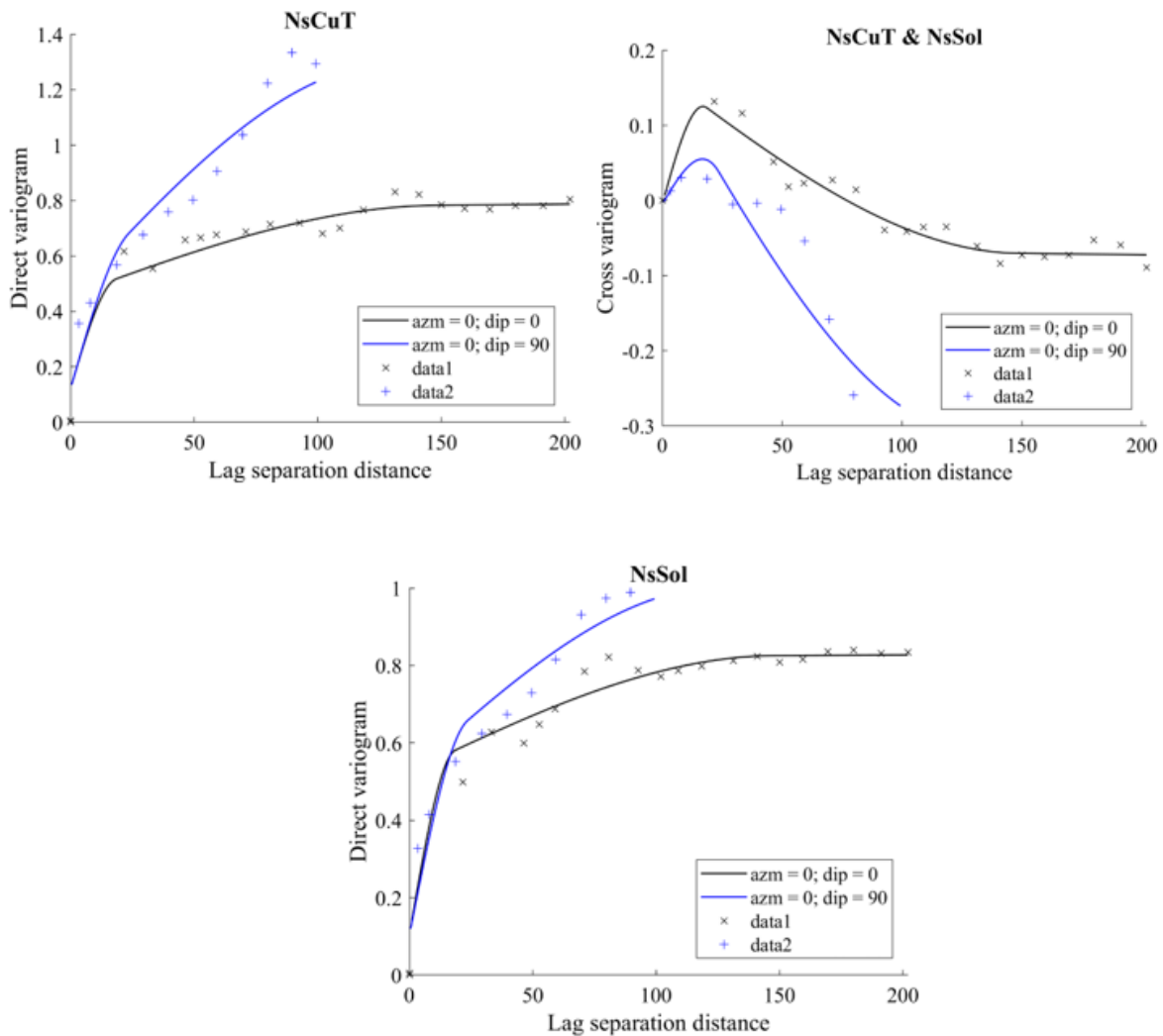


Figura 13 Variograma modelado directo y cruzado para cobre total y solubilidad

4.2.4 Co-simulación condicional

La idea principal detrás de realizar la co-simulación es construir imágenes ficticias, pero realistas, pues las realizaciones logran capturar la variabilidad e incertidumbre sobre las variables de interés. Cada realización puede ser considerada como la realidad y un buen estimador que se suele utilizar es obtener el promedio de todas las realizaciones.

Como se menciona en el análisis variográfico las variables que presentan mejor compatibilidad (pues su nube de correlación es la más “circular”) es el cobre total y la solubilidad. Co-simulando dos de las tres variables es suficiente, pues las operaciones matemáticas como multiplicación o división son válidas para obtener la tercera variable, en este caso el cobre soluble.

La co-simulación se lleva a cabo sobre una grilla densa de 2m x 2m x 5m con un soporte puntual y el área a considerar es 400m x 400m x 100m. Lo anterior implica que el total de nodos a considerar son 400,000 entre las coordenadas (100m, 1050m, 0m) y (500m,1450,100m).

A continuación, se presentan algunas estadísticas asociadas a las realizaciones donde se mostrará un mejor y peor caso a modo comparativo tomando como parámetro de comparación la ley de CuT donde mayor ley de CuT se interpreta como mejor caso y menor ley de CuT como peor caso. Se agrega también el resultado de promediar las 65 realizaciones.

Tabla 5 Estadísticas básicas de realizaciones

Caso	Mínimo (% CuT)	Máximo (% CuT)	Media (%CuT)	Varianza	Desv. Estándar
Mejor caso (Realización 53)	0.013	2.625	0.487	0.151	0.389
Peor caso (Realización 4)	0.022	2.562	0.364	0.034	0.186
Media realizaciones	0.142	1.072	0.387	0.008	0.093

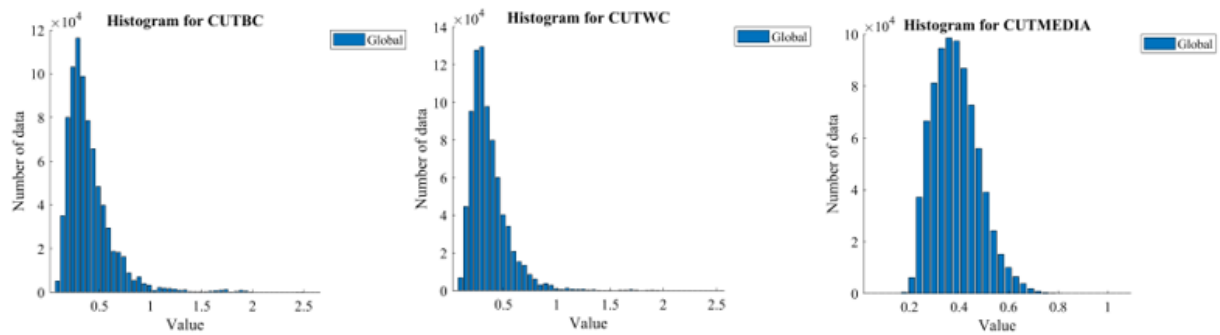


Figura 14 Histogramas ley de cobre total para mejor caso (izquierda), peor caso (centro) y media de realizaciones (derecha)

Es apreciable una diferencia significativa en las medias de la realización con mejor ley media de cobre total y la realización con la peor. Esto refleja que la variabilidad de los datos es muy alta. En los mínimos y máximos no hay mayor diferencia entre estos dos casos. Los histogramas muestran que las distribuciones de la mejor realización y la peor son similares, pero muestran diferencias en los valores superiores a 1% de CuT donde se ve una mayor cantidad de datos para el mejor caso. El promedio de las realizaciones muestra un comportamiento centrado en torno a 0.4% lo cual se ve confirmado con las estadísticas donde hay una ley media de 0.39%.

En las figuras 15y 16 se ven estos dos casos (mejor y peor) para las tres variables de interés CuT, CuS y Sol y también se muestra en la figura 17 el resultado de promediar las 65 realizaciones. Los resultados de la validación cruzada también se enseñan para ver si se logra capturar la variabilidad de los datos.

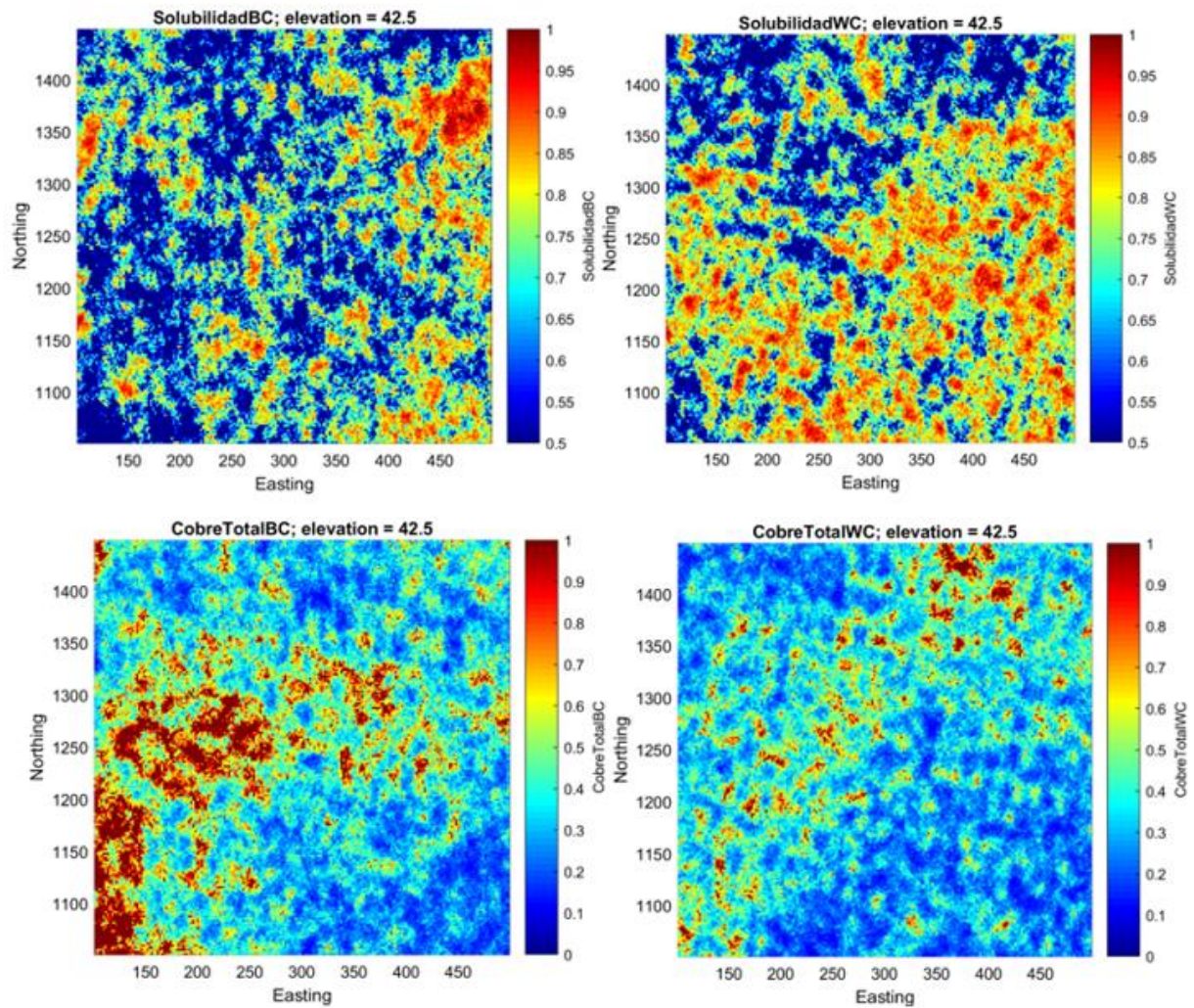


Figura 15 Dos realizaciones de solubilidad (superior) y cobre total (inferior) en soporte puntual

Una primera observación con respecto a las realizaciones tanto para la solubilidad como para el cobre total es que son bastante diferentes entre ellas lo que confirma que la incertidumbre con respecto al valor es bastante alta. Contar con realizaciones de estas dos variables permite al hacer el producto entre ellas obtener 65 realizaciones para cobre soluble.

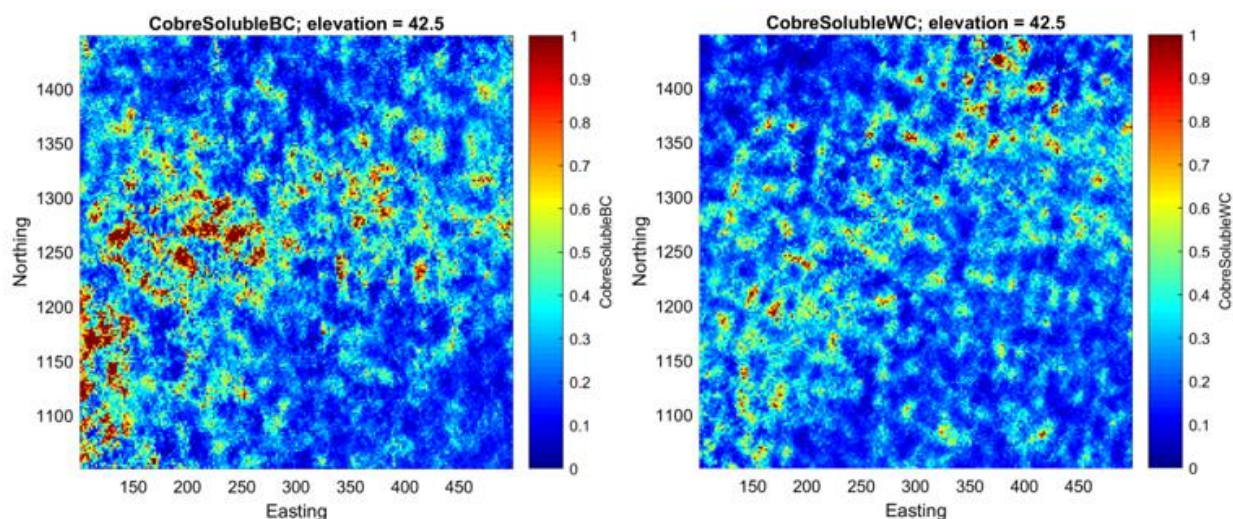


Figura 16 Dos realizaciones para solubilidad en soporte puntual

Con las realizaciones de cobre soluble pasa lo mismo que se menciona anteriormente, las realizaciones corresponden a la fracción soluble de la figura 15 y al ser obtenidas mediante el producto entre la solubilidad y el cobre soluble, se observa que ambas realizaciones son muy distintas entre sí también. La media de las 65 realizaciones para solubilidad, cobre total y cobre soluble es presentada en la figura 17:

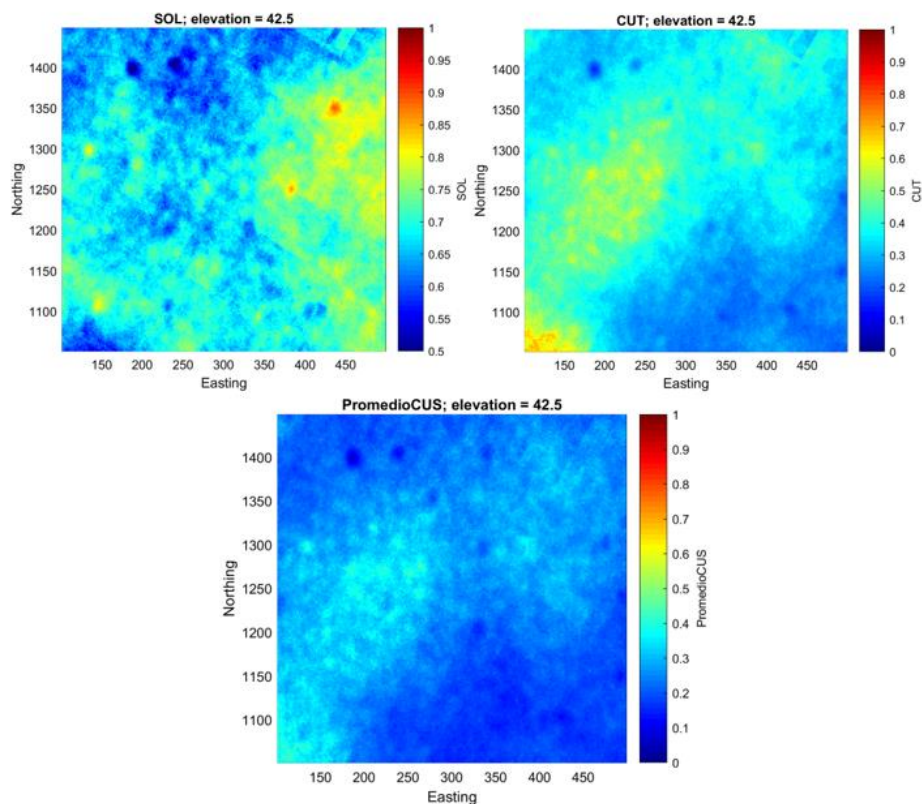


Figura 17 Media de realizaciones de solubilidad (izquierda) cobre soluble (centro) y cobre total (derecha) en soporte puntual

Como era de esperar, al promediar las 65 realizaciones para cada una de las variables, el resultado se suaviza donde el caso más evidente es el del cobre soluble que baja casi en su totalidad a valores entre 0.2% y 0.3%. El cobre total tiene zonas con valores relevantes con leyes de 0.5% en promedio. La solubilidad se suaviza, pero permanece con valores altos donde en general se supera el 70%, también hay zonas donde se alcanzan peaks de 90%.

4.2.5 Validación cruzada

Es importante validar los resultados de la co-simulación para verificar la correcta adecuación de los parámetros utilizados. Es así como se generan scatter plots para verificar la condición de insesgo condicional (la regresión se ajusta a la primera bisectriz) y gráficos de incertidumbre para ver si las simulaciones tienen la variabilidad correcta.

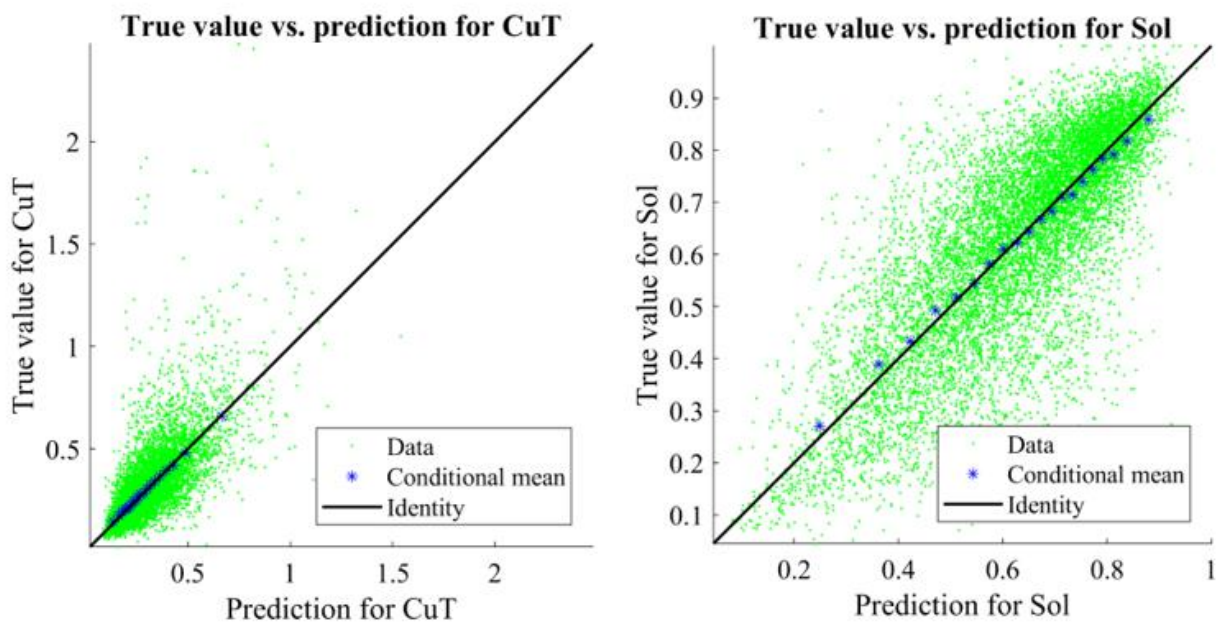


Figura 18 Scatter plots para ver insesgo condicional de cobre total y solubilidad

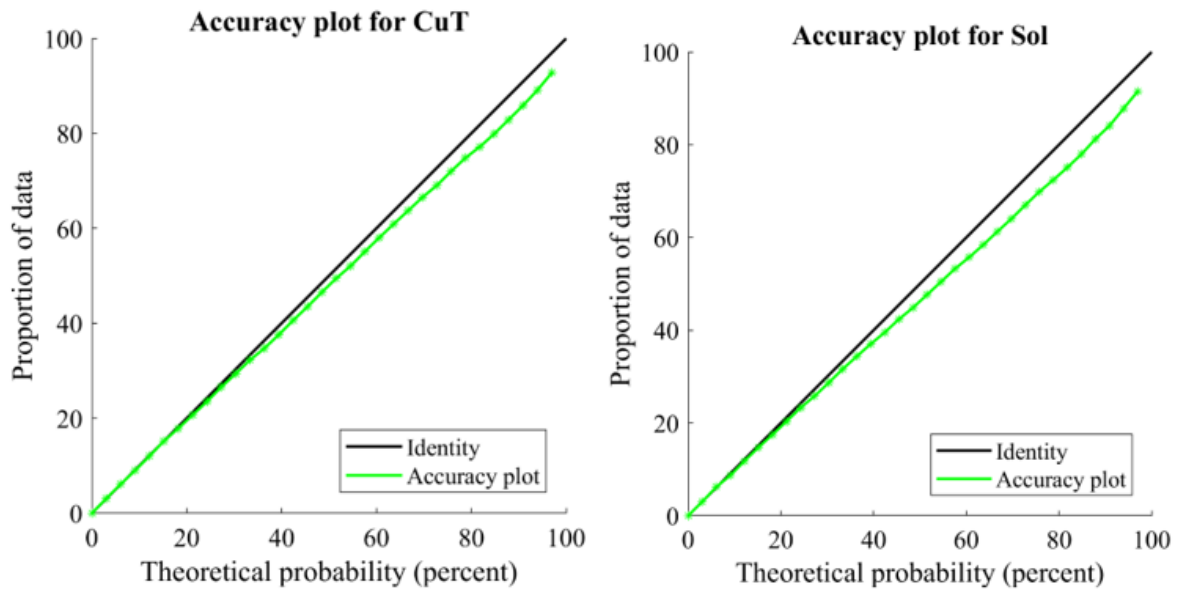


Figura 19 Gráficos de incertidumbre para cobre total y solubilidad

De los resultados de la validación cruzada se puede mencionar en primer lugar con respecto a los scatter plots para ver el sesgo condicional y que los datos se ajustan a la diagonal o primera bisectriz lo cual implica que se verifica sesgo condicional y una muy buena precisión para los parámetros utilizados en la co-simulación. De los gráficos de incertidumbre también es importante notar que las realizaciones logran captar la variabilidad de los datos pues tanto para cobre total como para solubilidad las curvas se encuentran alineadas casi en su totalidad con la primera bisectriz.

4.2.6 Rebloqueo de resultados

Debido a que el objetivo de este trabajo es ver bajo qué condiciones se puede predecir sin sesgo una variable geometalúrgica definida por cociente, se debe tener una imagen plausible de la realidad en soporte de bloques y como se menciona anteriormente cualquiera de las realizaciones puede ser considerada como la realidad. Es por esto que se rebloquean los resultados obtenidos anteriormente, pero el procedimiento para realizar esto es el siguiente:

- Como se cuenta con 65 realizaciones para cobre total y solubilidad, mediante el producto entre ellas se puede obtener 65 realizaciones del cobre soluble.
- Ahora que se tienen valores de cobre total y cobre soluble (donde ambas variables sí son aditivas) se puede realizar un cambio de soporte desde el soporte de las mediciones (puntual) a un soporte de mayor volumen. Se escogieron dimensiones de 10m x 10m x 10m.
- Con las realizaciones de CuS y CuT en soporte de bloques se puede hacer el cociente entre ellas para generar 65 realizaciones de solubilidad en soporte de bloques.

Al igual que para el soporte puntual, se muestran los resultados de dos realizaciones tomando como parámetro para escogerlas la mejor ley de CuT y peor ley de CuT. También se presenta el resultado de promediar las 65 realizaciones en soporte de bloques.

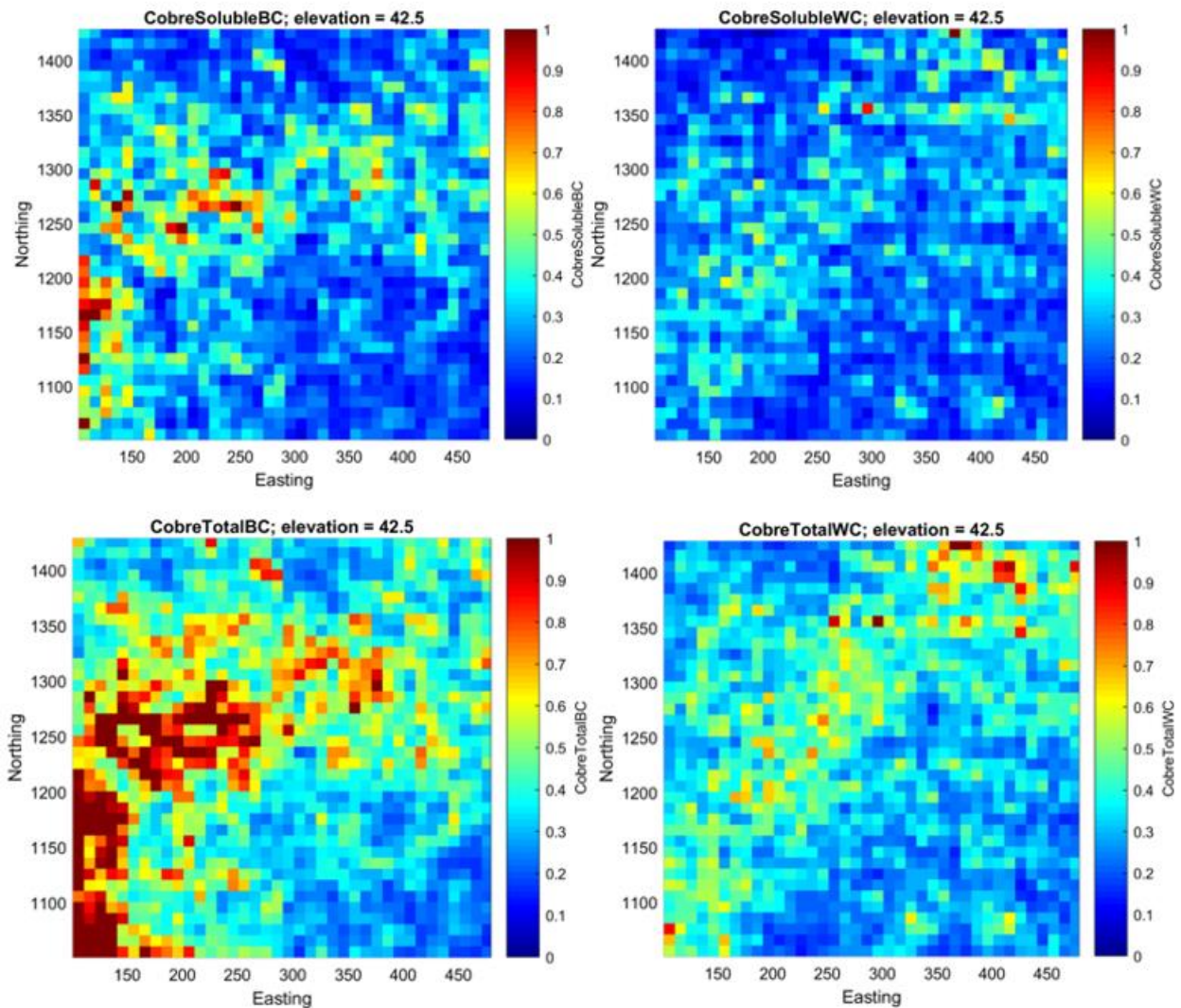


Figura 20 Dos realizaciones de cobre soluble y cobre total en soporte de bloques

Como se menciona anteriormente, como el cobre soluble y el cobre total son variables aditivas, no hay problema con hacer el cociente entre ambas en soporte de bloques y obtener las realizaciones de solubilidad.

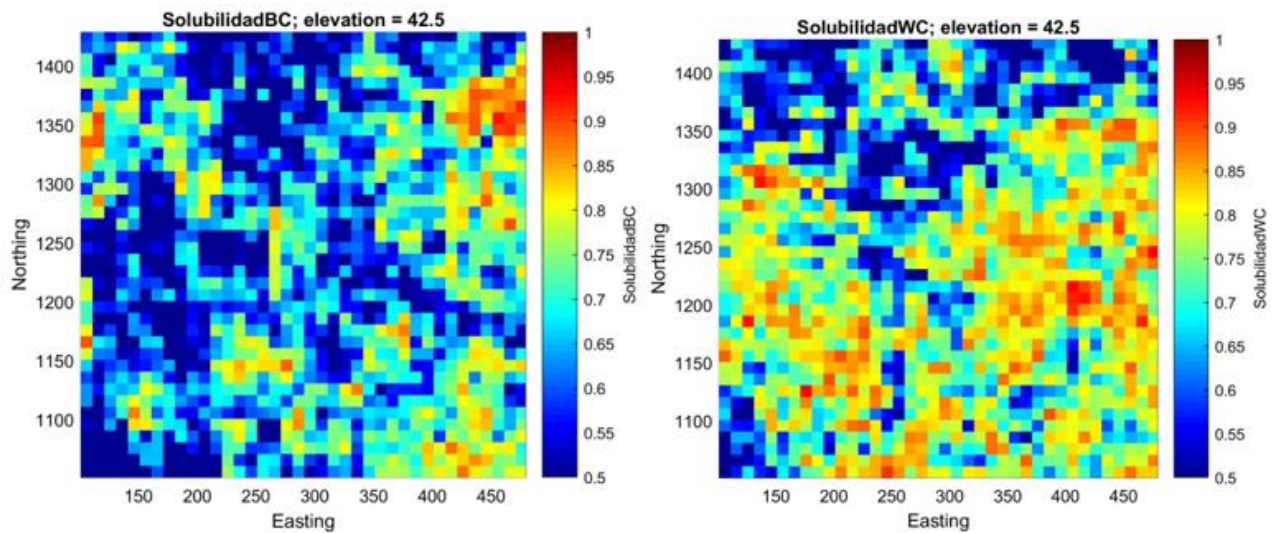


Figura 21 Dos realizaciones para la solubilidad en soporte de bloques

El resultado de promediar las 65 realizaciones de cada variable:

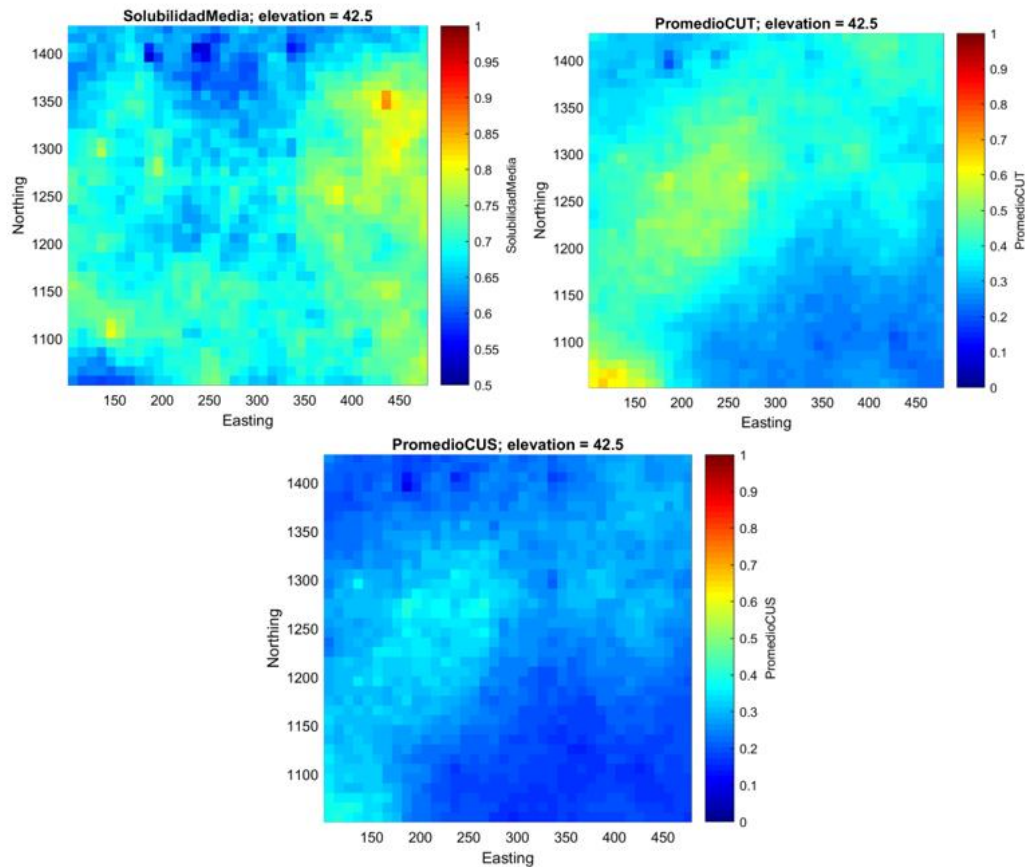


Figura 22 Media de realizaciones para solubilidad (izquierda) cobre soluble (centro) y cobre total (derecha) en soporte de bloques

Si se compara la media de las realizaciones en soporte puntual y el resultado obtenido para soporte de bloques se observa que algunos valores más extremos se suavizan, pero en general, mantiene una distribución de valores muy similar.

4.3. Estimación directa de Solubilidad

Estimar la solubilidad directamente en soporte puntual no conlleva ningún problema, sin embargo, al rebloquear o realizar la estimación en un soporte de bloques se incurre en un sesgo pues la variable no es aditiva, es decir, el promedio de los puntos incluidos dentro del bloque no es el valor promedio del bloque. En esta etapa se presentan los resultados de hacer la estimación por kriging en soporte puntual y se rebloquean los resultados para mostrar que efectivamente hay sesgo al hacer esta operación.

4.3.1 Análisis variográfico

4.3.1.1 Variograma experimental

Se calcula el variograma experimental en las direcciones obtenidas en la parte anterior (omnihorizontal y vertical). La tabla 6 resume los parámetros de cálculo que se utilizan:

Tabla 6 Parámetros de cálculo para variogramas experimentales

Dirección	Azimuth	Tolerancia az.	Dip	Tolerancia dip	Paso	Tolerancia paso	Número paso
Omnihorizontal	0.0	90.0	0.0	20.0	10.0	10.0	150
Vertical	0.0	90.0	90.0	20.0	10.0	10.0	24

Con estos parámetros se obtiene el siguiente variograma:

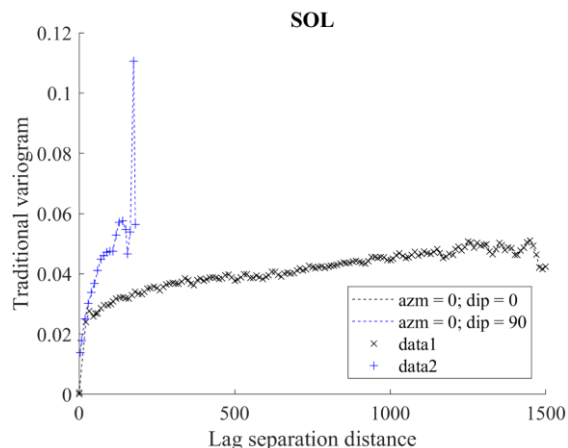


Figura 23 Variograma experimental directo solubilidad

Omnihorizontalmente se aprecia una mayor continuidad del variograma experimental. Se genera un número de pasos tan grande porque como se observa en la dirección vertical a partir de los 200m el variograma se vuelve más bien errático y el fin era comprobar si esto era solamente para esta dirección.

4.3.1.2 Variograma modelado

Para modelar este variograma se usan cuatro estructuras anidadas siendo una exponencial, dos esféricas y una gaussiana. El modelo completo se define por la siguiente expresión:

$$\gamma_{sol} = 0.010 \cdot pepa + 0.013 \cdot \exp(16m) + 0.013 \cdot esf(299m) + 0.001 \cdot esf(1745m) + 0.018 \cdot gauss(2000)$$

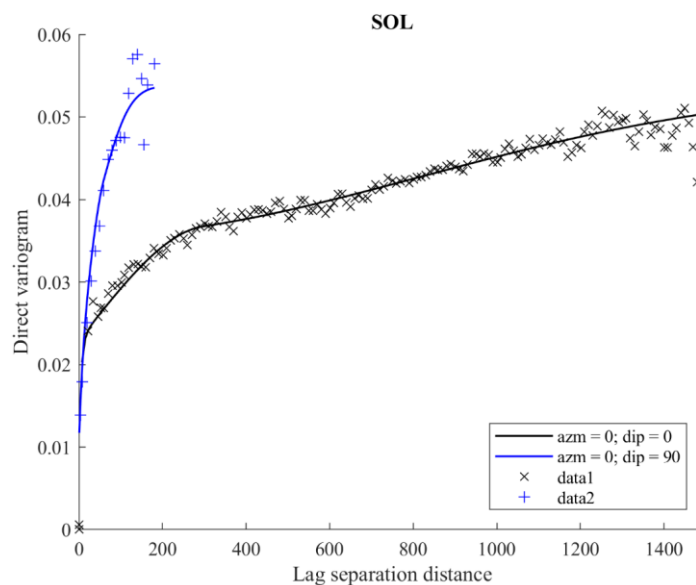


Figura 24 Variograma directo modelado de solubilidad

4.3.2 Resultados estimación

Una vez realizada la variografía se puede hacer el kriging de la solubilidad y para ello se utiliza una discretización puntual con bloques del mismo tamaño que los de la co-simulación (2m x 2m x 5m). La vecindad es de 350m x 350m x 100m y está dividida en octantes con 12 datos en cada uno. El tipo de kriging realizado es el kriging ordinario, es decir, con media desconocida. La figura 25, presenta el resultado obtenido para la misma

cota a la que se visualiza la co-simulación a modo de poder realizar una comparación entre ambas.

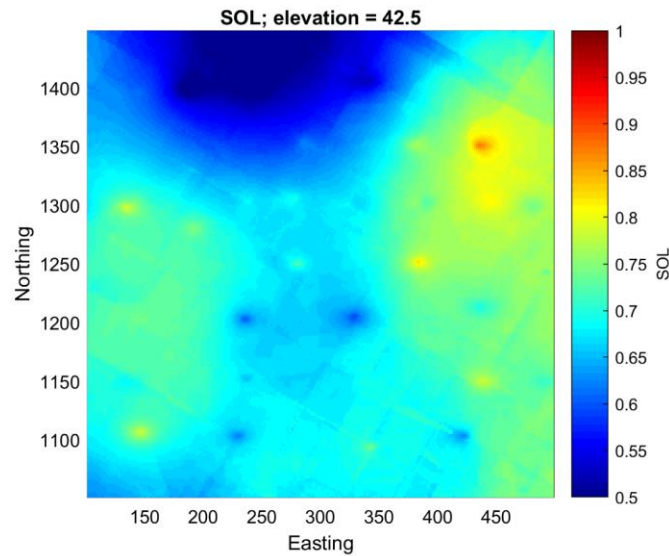


Figura 25 Estimación de solubilidad directamente por kriging en soporte puntual

El resultado que se obtiene reproduce bastante bien la variable solubilidad si se compara en primera instancia (de manera visual) con el resultado de promediar las 65 realizaciones que se presenta en la parte anterior. Cabe mencionar, no obstante, que existe la presencia de “artefactos” cuyas causas generalmente involucran que la vecindad donde se realiza la estimación tiene muy pocos datos, sin embargo, se eliminó el uso de octantes y se utilizó una vecindad única con 90 datos, pero el resultado no variaba por lo que se mantuvo como parámetro de entrada una vecindad dividida en octantes con 12 datos cada uno, como se menciona anteriormente.

4.3.3 Rebloqueo de resultados

Para poder comparar los resultados en soporte puntual y en soporte de bloques se rebloquean los resultados de la solubilidad, pese a que matemáticamente es incorrecto realizarlo porque se ha mencionado que la variable no es aditiva. Los resultados del rebloqueo son presentados a continuación.

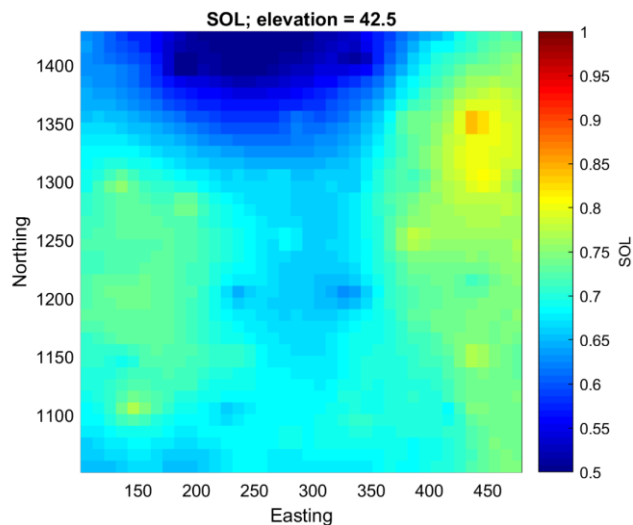


Figura 26 Estimación de solubilidad directamente por kriging en soporte de bloques

4.4. Estimación de cobre soluble y cobre total

Lo que se hace en esta etapa, es realizar una estimación mediante co-kriging de las variables cobre soluble y cobre total. Es mejor un co-kriging frente a un kriging individual de cada variable, pues se toma en cuenta la información de ambas variables a la hora de hacer la estimación.

4.4.1 Análisis variográfico

4.4.1.1 Variogramas experimentales

Los variogramas experimentales (directos y cruzados) se calculan omnihorizontalmente y en la dirección vertical. La tabla 7 resume los principales parámetros utilizados.

Tabla 7 Parámetros de cálculo para variogramas experimentales

Dirección	Azimuth	Tolerancia az.	Dip	Tolerancia dip	Paso	Tolerancia paso	Número paso
Omhorizontal	0.0	90.0	0.0	20.0	10.0	10.0	100
Vertical	0.0	90.0	90.0	20.0	10.0	10.0	11

Con estos parámetros se obtienen los siguientes variogramas experimentales:

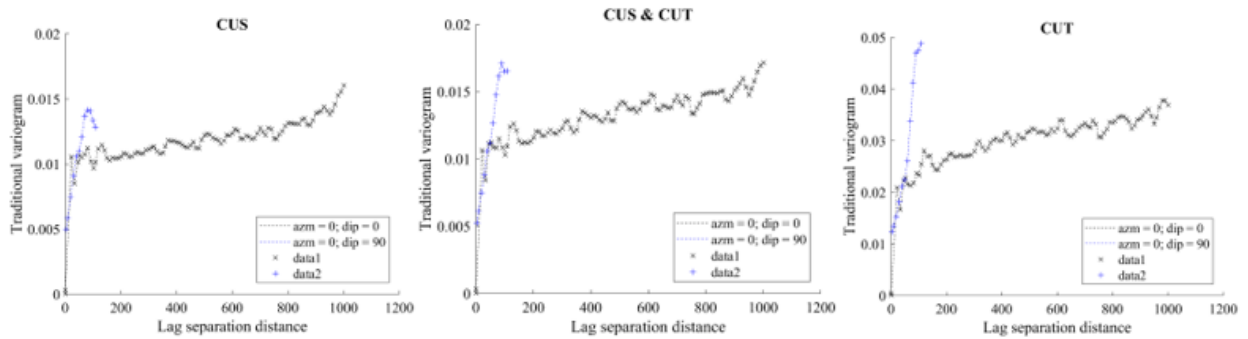


Figura 27 Variogramas experimentales directos y cruzado para cobre soluble y cobre total

De los variogramas experimentales se observa que al igual que en los casos anteriores la dirección vertical tiene un comportamiento un poco más errático con respecto al comportamiento omnihorizontal que aumenta de manera más estable.

4.4.1.2 Variogramas modelados

Para modelar estos variogramas se utilizan cuatro estructuras anidadas siendo dos exponenciales y dos esféricas. El modelo completo queda definido por la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{CuT} & \gamma_{CuT-CuS} \\ \gamma_{CuT-CuS} & \gamma_{CuS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.005 & 0.002 \\ 0.002 & 0.002 \end{pmatrix} \cdot pepa + \begin{pmatrix} 0.009 & 0.004 \\ 0.004 & 0.003 \end{pmatrix} \cdot \exp(22m, 30m) + \\ \begin{pmatrix} 0.010 & 0.004 \\ 0.004 & 0.003 \end{pmatrix} \cdot \exp(12m, 100m) + \begin{pmatrix} 0.011 & 0.005 \\ 0.005 & 0.004 \end{pmatrix} \cdot esf(1250m, 110m) + \\ \begin{pmatrix} 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0002 \end{pmatrix} \cdot esf(1250m, 500m)$$

Con este modelo los variogramas directos y cruzado se muestran la figura 28:

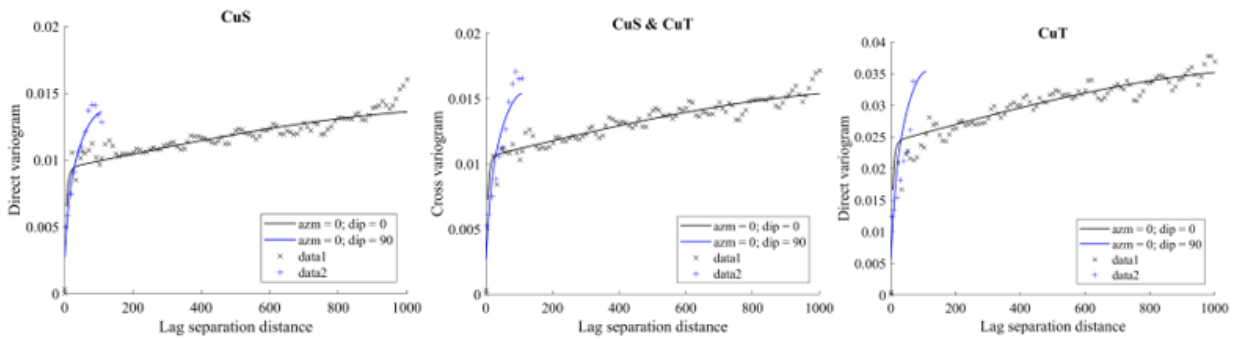
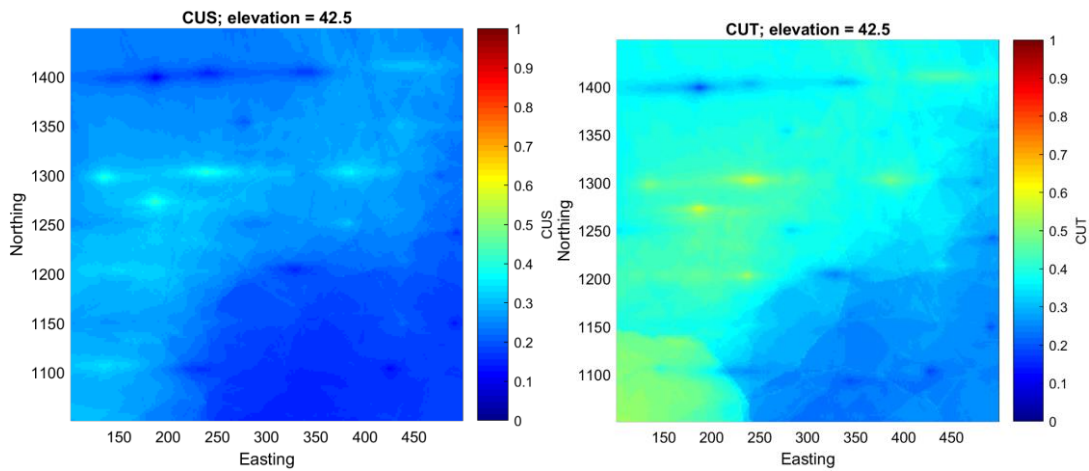


Figura 28 Variogramas directos y cruzados para cobre soluble y cobre total

4.4.2 Resultados estimación

Se realiza un co-kriging como se menciona anteriormente de las variables cobre soluble y cobre total, contar con las estimaciones de estas variables permite realizar el cociente entre ellas y obtener una estimación para solubilidad. Se aplican dos tipos de co-kriging para ver si se genera alguna diferencia significativa: ordinario y de medias relacionadas.



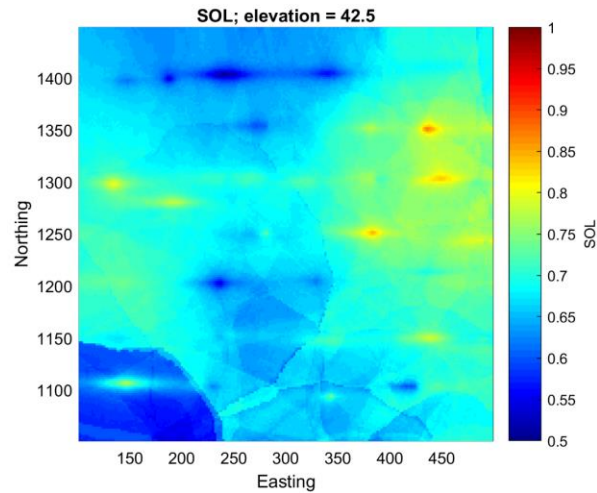
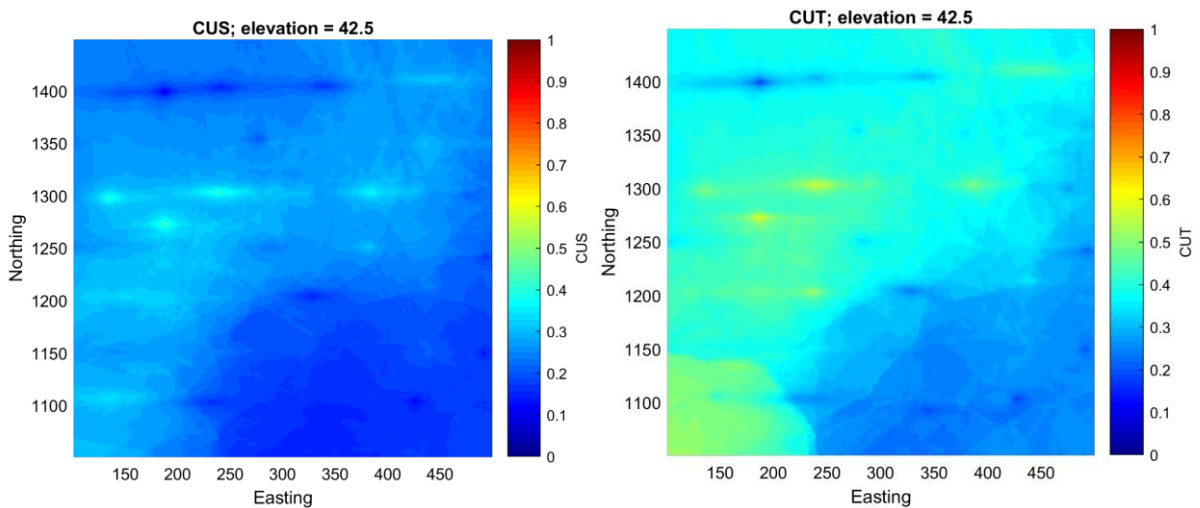


Figura 29 Estimación por co-kriging ordinario de cobre soluble (izquierda) cobre total (derecha) cociente entre ambas (centro) en soporte puntual

Acá se observa inmediatamente la aparición de “artefactos” en los resultados tanto de cobre soluble, cobre total y la solubilidad. Estos artefactos pueden deberse a la implementación del cokriging en vecindad móvil, donde aparece que los artefactos son más perceptibles al momento de calcular el cociente. Se prueba como solución para este problema optar por una vecindad única con una amplia cantidad de datos, sin embargo, no muestra mayores cambios.

Como se comentó anteriormente, se presenta también el resultado obtenido de realizar el co-kriging con medias relacionadas (Emery, 2012) entre las variables cobre soluble y total. Se tiene una relación entre estas medias que es descrita por la expresión $m_{CuS} = 0.58 \cdot m_{CuT}$, esta expresión se determina a partir de las medias experimentales de CuS y CuT.



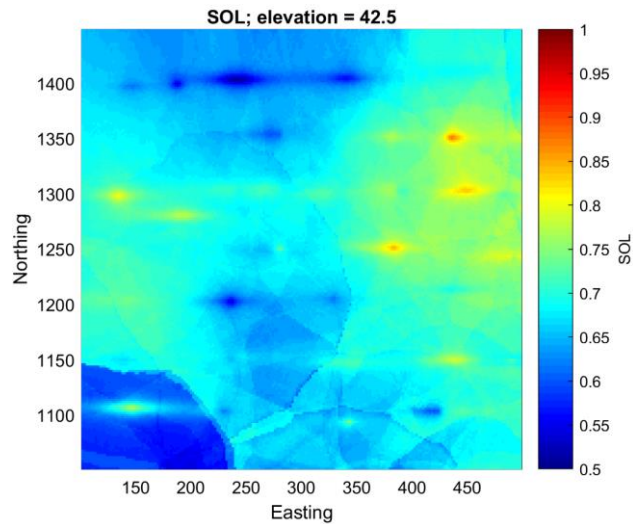


Figura 30 Estimación por co-kriging de medias relacionadas de cobre soluble (izquierda) cobre total (derecha) cociente entre ambas (centro) en soporte puntual

El resultado es prácticamente el mismo y la presencia de artefactos se mantiene también, pese a que para este caso se probó con una vecindad sin octantes y con 110 datos a considerar para la estimación de cada punto.

4.4.3 Rebloqueo de resultados

Al igual que para la estimación directa de la solubilidad, se rebloquean los resultados del cociente entre cobre soluble y cobre total para poder contrastarlo con una imagen de la realidad que corresponde a una de las realizaciones de la co-simulación de la solubilidad.

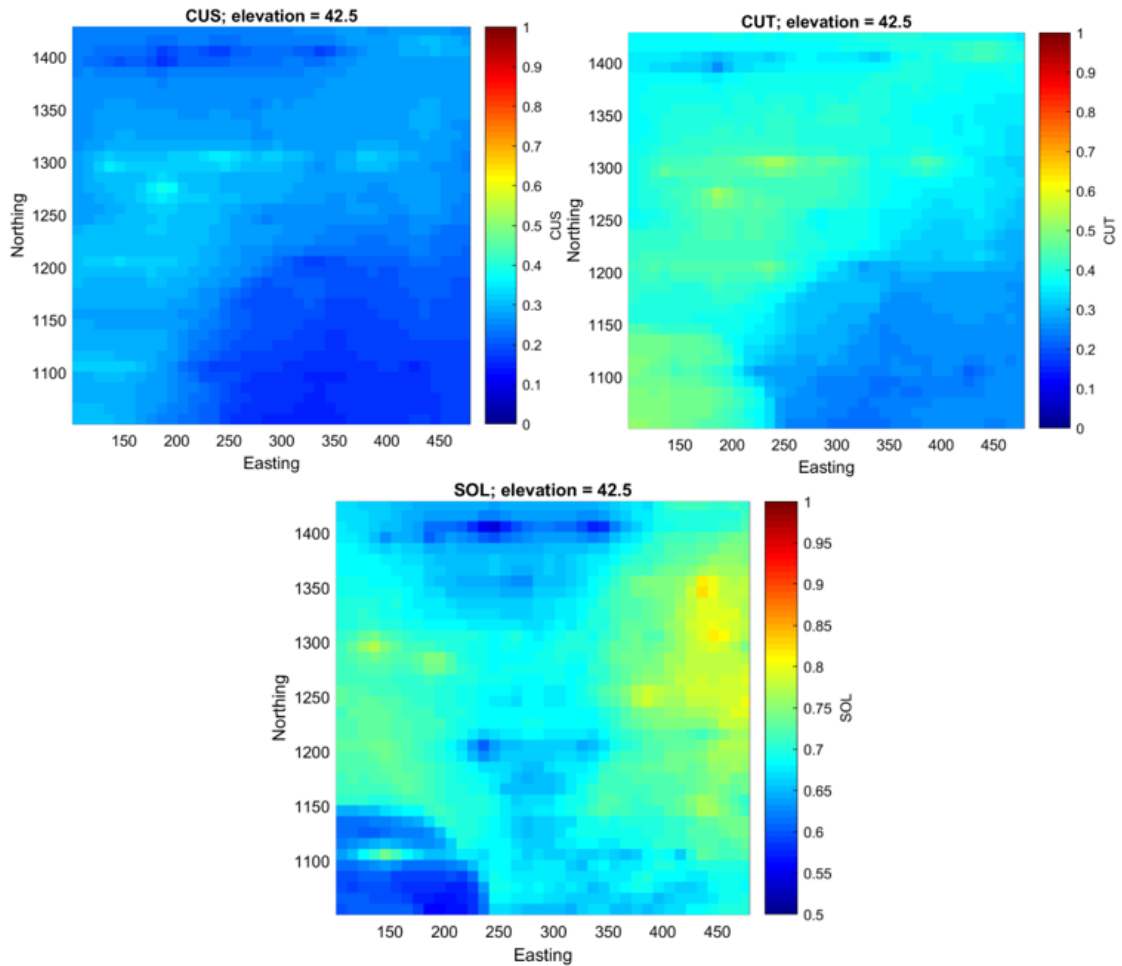


Figura 31 Estimación de cobre soluble (izquierda) solubilidad (centro) y cobre total (derecha) en soporte de bloques co-kriging ordinario

De los resultados del rebloqueo se puede comentar que, en primer lugar, los artefactos que estaban en el soporte puntual desaparecen, lo cual es lo que se espera, pues se está usando una discretización 5 5 2 (este, norte y cota respectivamente) por lo que promediar estos puntos dentro de un bloque de mayor volumen elimina cambios tan bruscos en los valores de las variables.

Se presenta también el rebloqueo del resultado obtenido mediante el co-kriging de medias relacionadas:

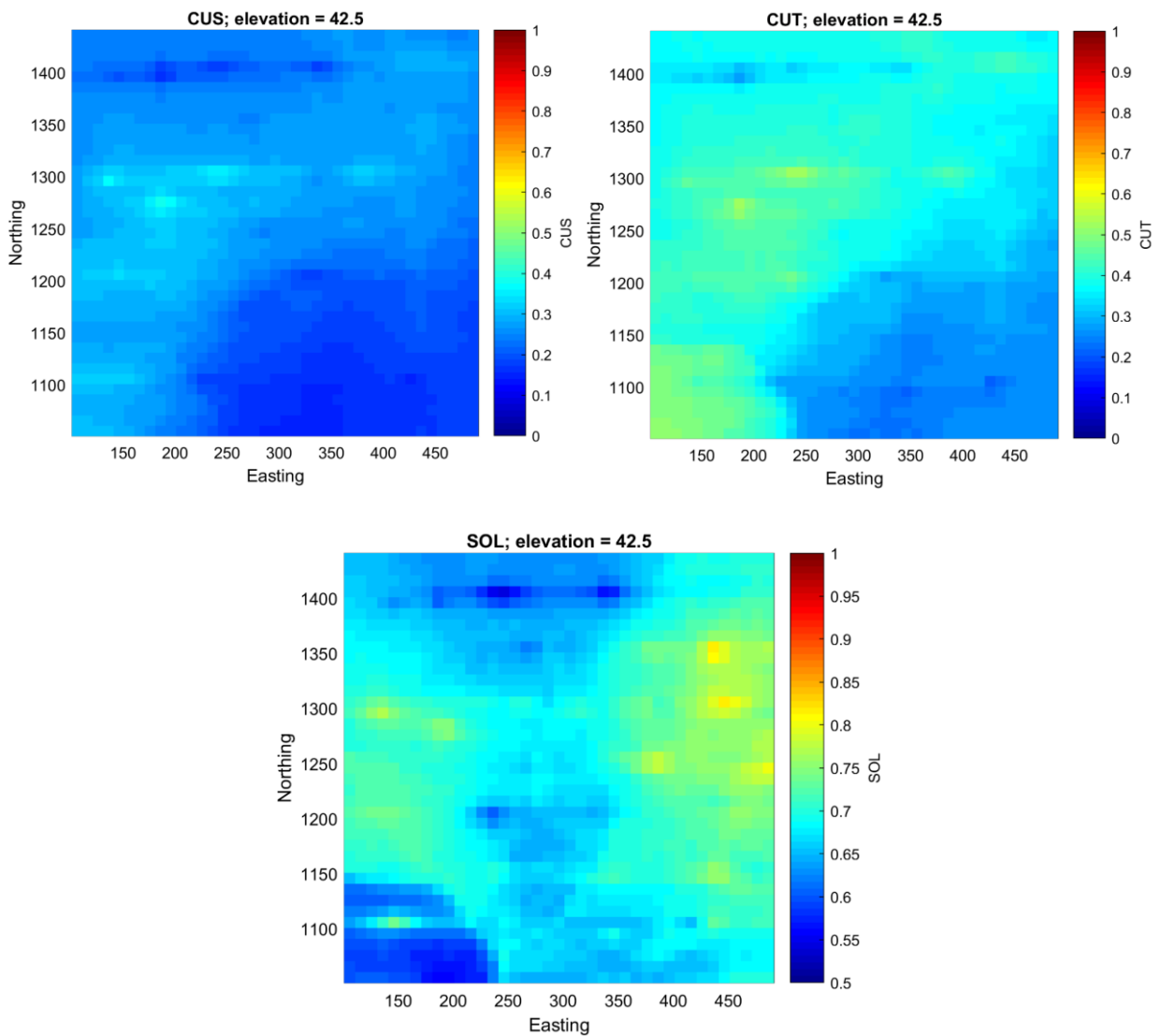


Figura 32 Estimación de cobre soluble (izquierda) solubilidad (centro) y cobre total (derecha) en soporte de bloques co-kriging de medias relacionadas

Se mantiene el resultado comentado en el soporte puntual y es que este tipo de co-kriging para este caso presenta un resultado muy parecido (o igual) al obtenido por co-kriging ordinario. Se estudia estadísticamente este resultado en la sección siguiente.

4.5. Comparación de resultados primer caso

Interesa saber tanto en soporte puntual (de las muestras) como en soporte de bloques si los resultados de las estimaciones se ajustan a lo esperado y están insesgados tanto globalmente como condicionalmente. Para esto se calculan estadísticas básicas para ver la distribución de errores, error cuadrático medio, entre otros. También se pueden hacer scatter plots de realidad versus estimación donde para el caso del soporte puntual la realidad son las muestras originales y en el caso del soporte de bloques se cuenta con

65 realizaciones de la co-simulación y cada una de ellas puede ser considerada como la realidad del sector estudiado.

4.5.1 Comparación en soporte puntual

Se cuenta con los resultados de las validaciones cruzadas de las estimaciones para poder hacer el análisis estadístico de los resultados y estudiar también la eventual presencia de sesgo condicional.

Lo primero que se puede realizar es el cálculo de las estadísticas básicas de los errores cometidos en la estimación para tener un conocimiento más detallado de éstos; se acompañan también con histogramas de los errores y errores estandarizados para conocer la distribución de dichos errores. También se calculan las estadísticas de ambos estimadores (estimación de solubilidad directa y cociente de co-kriging de cobre soluble y cobre total) y las estadísticas de los datos reales. Con esto se puede calcular el error cuadrático promedio que tienen los resultados.

Tabla 8 Estadísticas básicas de errores y errores estandarizados de validación cruzada estimación directa de solubilidad

	Media	Varianza
Errores	-0.001	0.016
Errores estandarizados	-0.003	0.93

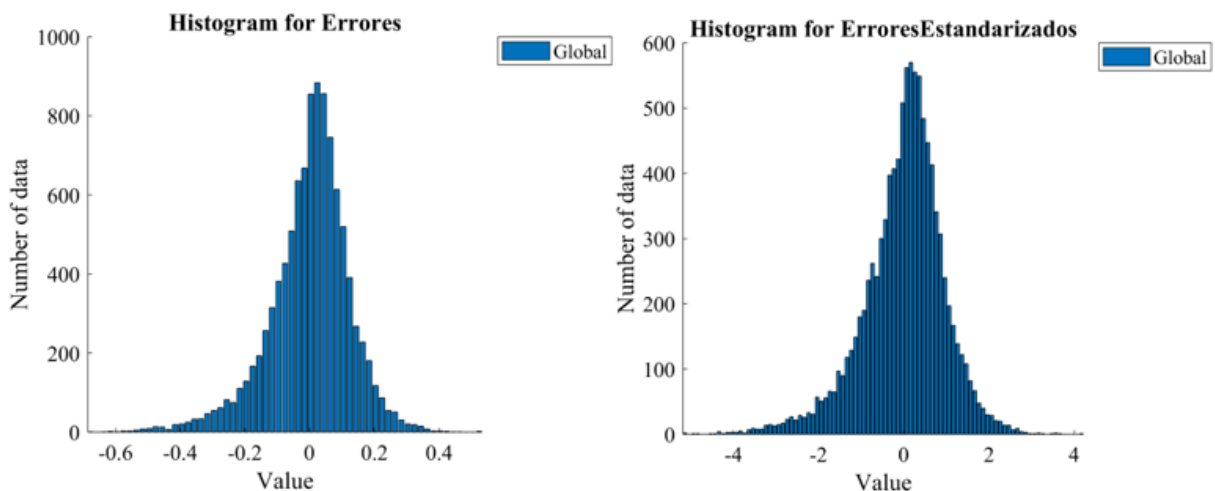


Figura 33 Histogramas de errores y errores estandarizados de validación cruzada estimación directa de solubilidad

La estimación directa de la solubilidad tiene errores muy bajos y cercanos a cero lo que es esperable por las condiciones bajo las cuales se desarrolla el kriging, los histogramas

muestran una distribución centrada en el cero también y con un rango de error entre -0.5 y 0.4 para los errores y entre -4 y 4 para los errores estandarizados. A continuación, se presentan el resultado para los errores de la estimación del cobre soluble y cobre total.

Tabla 9 Estadísticas básicas errores y errores estandarizados cobre soluble y cobre total

	Media	Varianza
Errores CUT	0.001	0.014
Errores estandarizados CUT	0.004	1.322
Errores CUS	0.000	0.006
Errores estandarizados CUS	0.001	1.302

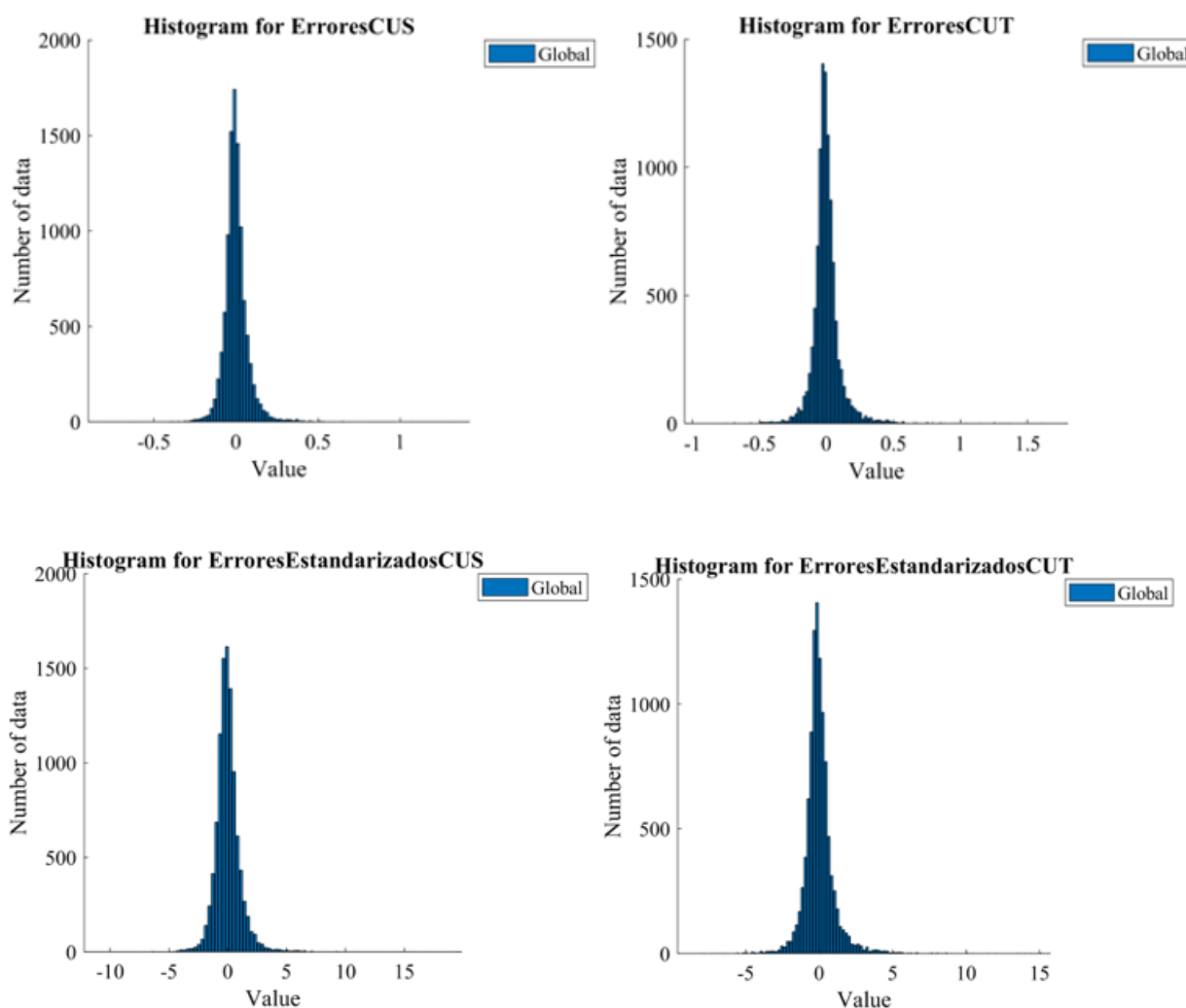


Figura 34 Histograma de errores y errores estandarizados para cobre soluble y cobre total

Esta segunda estimación también mantiene la tendencia comentada anteriormente que consiste principalmente en que el error global de las estimaciones en este caso de cobre soluble y cobre total tienen errores muy bajos siendo prácticamente cero y la distribución

observada en los histogramas están centradas en torno a este valor con un rango de valores muy acotado.

Se calculan ahora, las estadísticas de cada uno de los estimadores obtenidos para ver si alguno de ellos tiene algún tipo de sesgo y se calcula el error cuadrático medio.

Tabla 10 Estadísticas básicas estimadores generados en soporte puntual

Solubilidad [%]				
	Datos (muestras)	Kriging Solubilidad Directa	Cociente Co- kriging ordinario	Cociente Co-kriging de medias relacionadas
Promedio	0.631	0.632	0.632	0.632
Máximo	1.000	0.943	0.955	0.955
Mínimo	0.045	0.102	0.103	0.104
Varianza	0.039	0.023	0.025	0.025
Error cuadrático promedio	-	0.016	0.017	0.017

Primero es importante destacar que ambas estimaciones tienen la misma media y que difiere muy poco de lo que es la realidad lo cual se puede interpretar como que los parámetros utilizados en ambos están correctos. Los errores cuadráticos en ambos casos son muy bajos.

Se pueden realizar también los scatter plots de realidad versus estimación para verificar el sesgo o insesgo condicional de los resultados. El primero que se realiza es de la solubilidad directa donde se esperaría teóricamente que el resultado esté insesgado condicionalmente pues no se está haciendo matemáticamente ninguna operación errónea. Se realiza también el scatter plot para analizar el resultado de hacer el cociente entre cobre soluble y cobre total donde, sí se esperaría que el resultado tenga un sesgo condicional asociado.

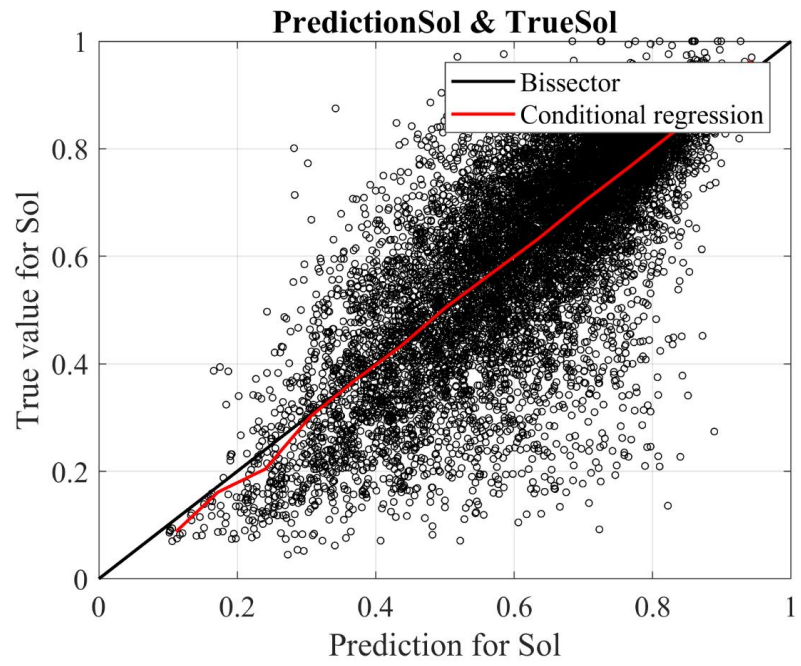


Figura 35 Scatter plot de realidad versus estimación (kriging directo de solubilidad) en soporte puntual

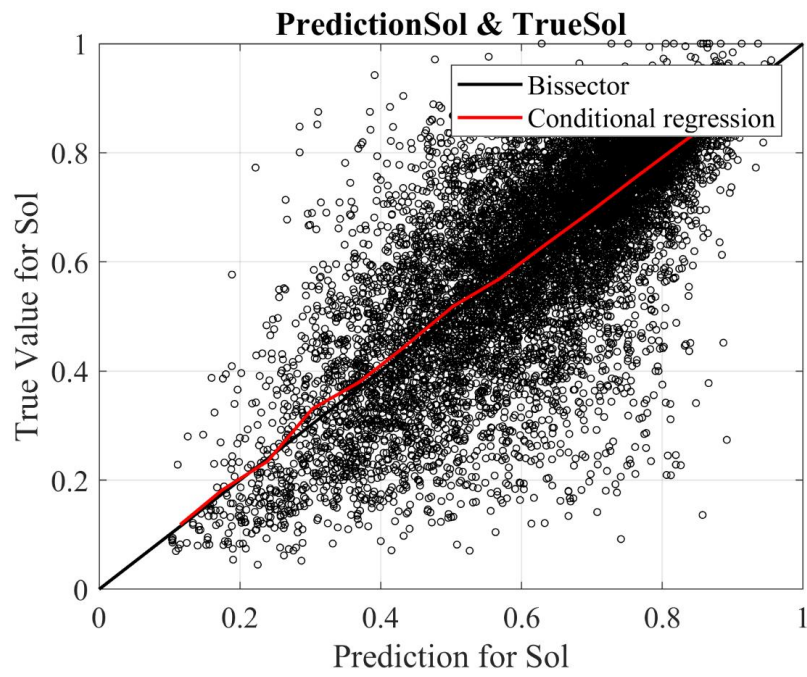


Figura 36 Scatter plot de realidad versus estimación (cociente de cobre soluble sobre cobre total) en soporte puntual co-kriging ordinario

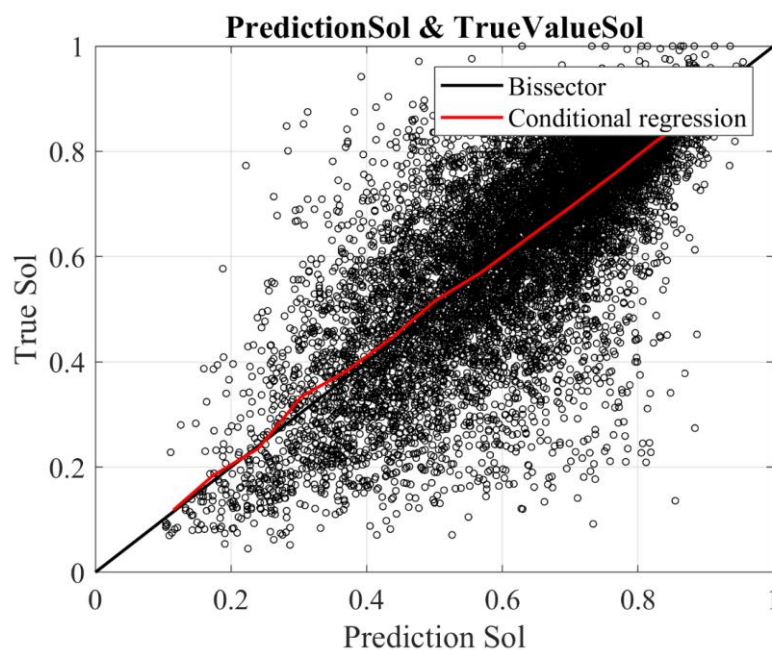


Figura 37 Scatter plot de realidad versus estimación (cociente de cobre soluble sobre cobre total) en soporte puntual co-kriging de medias relacionadas

Para este caso, tanto la estimación por kriging directo sobre los valores de solubilidad y el cociente del co-kriging de cobre soluble y cobre total (obtenido con ambos tipos de co-kriging) tienen regresiones que están sobre la primera bisectriz lo que implica que no tienen un sesgo condicional asociado, esto puede deberse a que los datos tienen una varianza muy baja puesto que se ha demostrado en un artículo (Dominy, 2013) que dos factores son los más influyentes a la hora de comparar el promedio de datos definidos por cocientes versus hacer el promedio del numerador y el denominador por separado para luego hacer el cociente; estos dos factores son que el sector estudiado sea más acotado que hacerlo en todo el espacio y que la varianza de los datos sea muy pequeña. Hipotéticamente podría atribuirse al segundo factor que los resultados sean similares para los dos estimadores. Es importante agregar que la estimación por kriging o co-kriging de medias relacionadas presenta una alternativa igual o mejor que los métodos tradicionales, permitiendo tener además estimaciones coherentes de las tres variables (CuT, CuS y solubilidad) en lugar de solamente la solubilidad.

Se pueden calcular también las curvas tonelaje ley del resultado obtenido para la co-simulación y la estimación de cobre soluble y cobre total; para los resultados de la estimación directa de la solubilidad no se puede obtener esta curva pues sólo se cuenta con valores de esta variable. Las curvas se construyeron utilizando como valor de corte la ley de cobre total, como variable principal el tonelaje y como variable secundaria la ley media de cobre soluble.

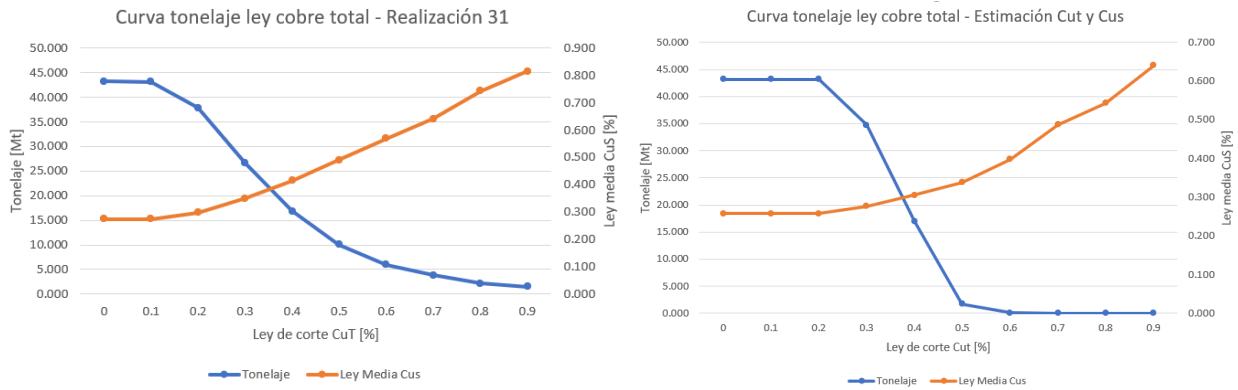


Figura 38 Curvas tonelaje ley co-simulación cobre total y solubilidad y co-estimación cobre soluble y cobre total en soporte puntual

El suavizamiento que se obtiene mediante el kriging o co-kriging afecta a los valores extremos por lo que en el caso de la co-simulación el rango de valores altos (sobre 0.9%) es más amplio que en el caso de la co-estimación esto se ve reflejado en el tonelaje asociado a la ley de corte 0.9%, sin embargo, haciendo un análisis más detallado se observa que ambas curvas presentan valores de tonelaje y ley media de CuS muy similares a lo largo del intervalo de ley de corte. Es importante mencionar que la realización seleccionada (31) tiene una media de cobre total de 0.40%, mientras que la co-estimación tiene una ley media de 0.37%, esto se aprecia pues pese a que la tendencia de las curvas de ambos casos son prácticamente iguales, en el caso de la co-simulación se alcanza un valor de 0.8%, mientras que en el caso de la co-estimación se alcanza un valor de 0.65%.

Se puede también realizar el cálculo de la solubilidad media condicionada a la ley de corte asociada a la variable cobre total.

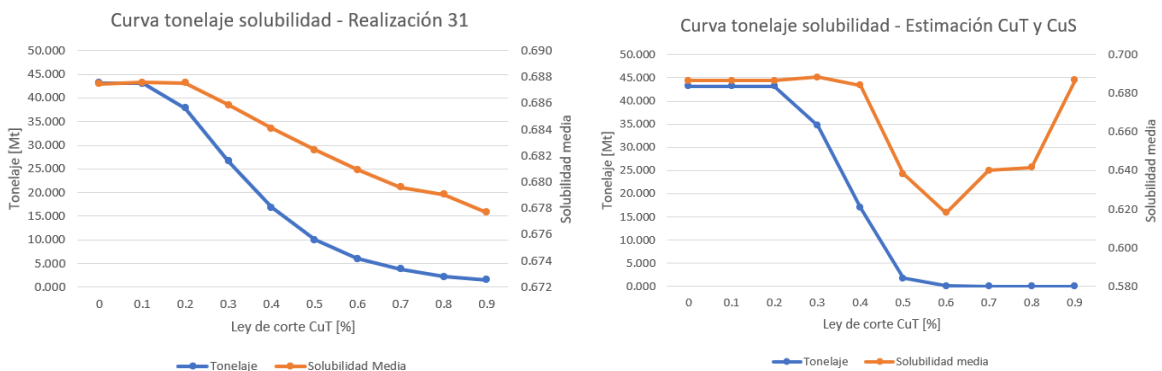


Figura 39 Solubilidad media obtenida por co-simulación y co-estimación según ley de corte de CuT en soporte puntual

La figura anterior muestra un comportamiento bastante continuo para el caso de la co-simulación, mientras que hay una variación para la co-estimación en el tramo 0.5-0.8%

CuT. Anteriormente se mencionó que la media cobre total de la realización seleccionada era mayor a la media obtenida en la co-estimación lo que explica esta diferencia, sin embargo, en los tramos restantes, los valores son prácticamente iguales, específicamente entre 0-0.4% CuT.

4.5.2 Comparación en soporte de bloques

Como se cuenta con una realidad virtual para soporte de bloques, además de estimación por kriging de la variable solubilidad directamente y por co-kriging de cobre soluble y cobre total donde haciendo el cociente entre ambas se tiene una estimación para la solubilidad también. Interesa saber cuál o cuáles de estas estimaciones tiene sesgo (por ejemplo, sesgo condicional) o no lo tiene en este soporte, porque de esta manera se da solución a los dos problemas planteados al inicio de este trabajo.

Se puede calcular las estadísticas básicas de los tres estimadores con los que se cuenta: media de las 65 realizaciones, estimación de solubilidad directa por kriging, cociente de co-kriging de cobre soluble y cobre total.

Tabla 11 Estadísticas básicas estimadores generados en soporte de bloques

	Solubilidad [%]				Media 65 realizaciones
	Realización 31	Kriging Solubilidad Directa	Cociente Co-kriging ordinario	Cociente Co-kriging de medias relacionadas	
Promedio	0.694	0.690	0.695	0.687	0.691
Máximo	0.963	0.845	0.865	0.863	0.883
Mínimo	0.154	0.439	0.509	0.503	0.459
Varianza	0.015	0.003	0.002	0.002	0.002
Error cuadrático promedio	-	0.013	0.013	0.013	0.012

Se puede también realizar scatter plots de la realidad versus estimación y ajustar una curva de regresión para ver nuevamente el sesgo (insesgo) condicional que podría haber asociado a alguna de las estimaciones.

El primer scatter plot que se realiza es el que compara la realidad con el estimador que resulta de promediar las 65 realizaciones de la co-simulación.

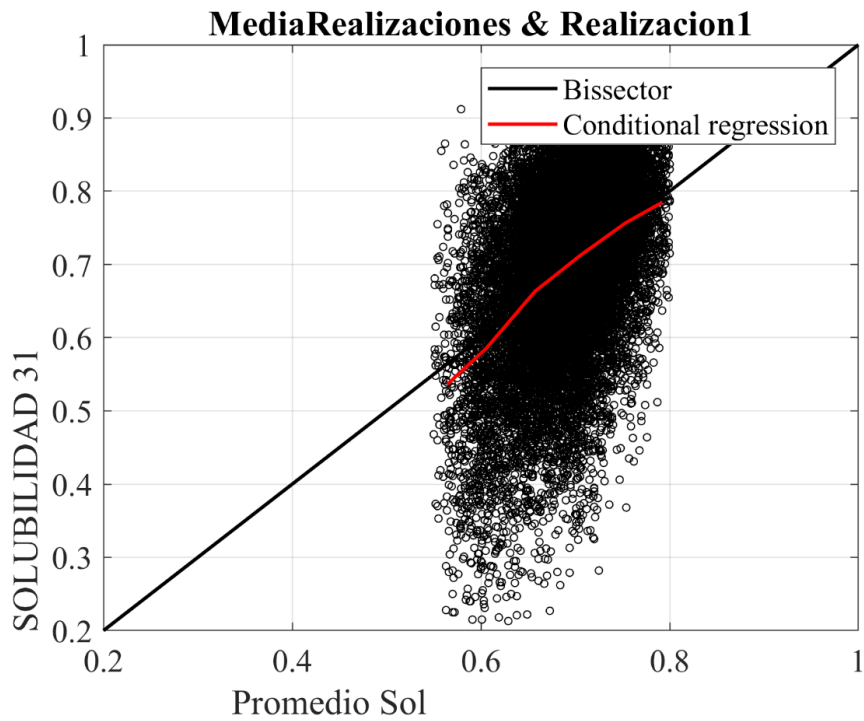


Figura 40 Scatter plot realidad versus estimación (media 65 realizaciones) en soporte de bloques

Ahora se muestra el scatter plot que se obtiene al comparar la realidad versus la estimación directa por kriging en soporte de bloques.

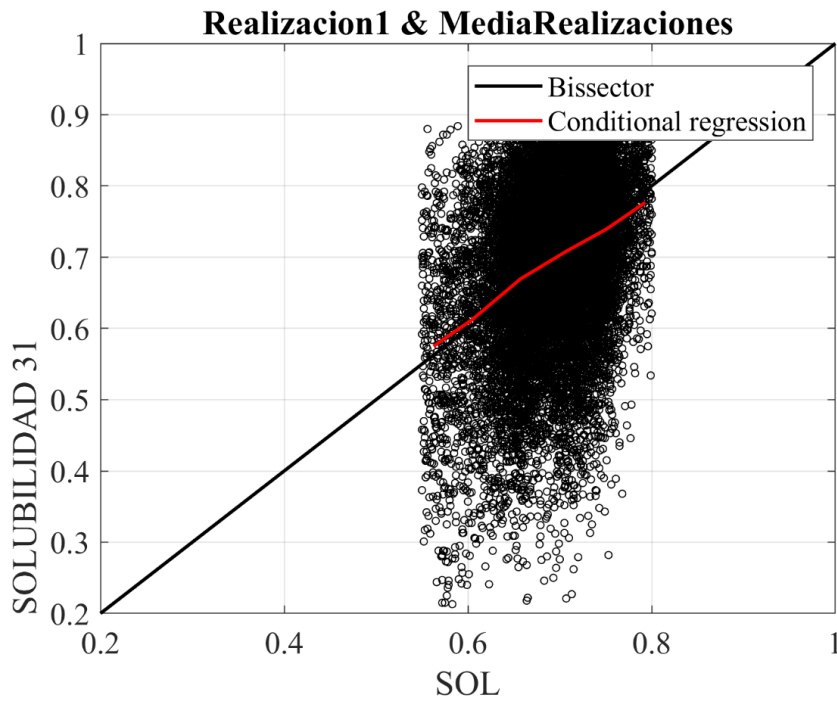


Figura 41 Scatter plot realidad versus estimación (kriging directo de solubilidad) en soporte de bloques

Es importante destacar, que para este caso emplear técnicas no aditivas como rebloquear la variable solubilidad en este caso, no genera un mayor impacto en los resultados del estudio del sesgo condicional, sin embargo, estadísticamente como se muestra en la tabla 11 la media difiere levemente, en torno a un 0.4%.

Por último, se compara la realidad con el estimador que se obtiene de hacer el cociente de cobre soluble y cobre total en soporte de bloques tanto por co-kriging ordinario como de medias relacionadas.

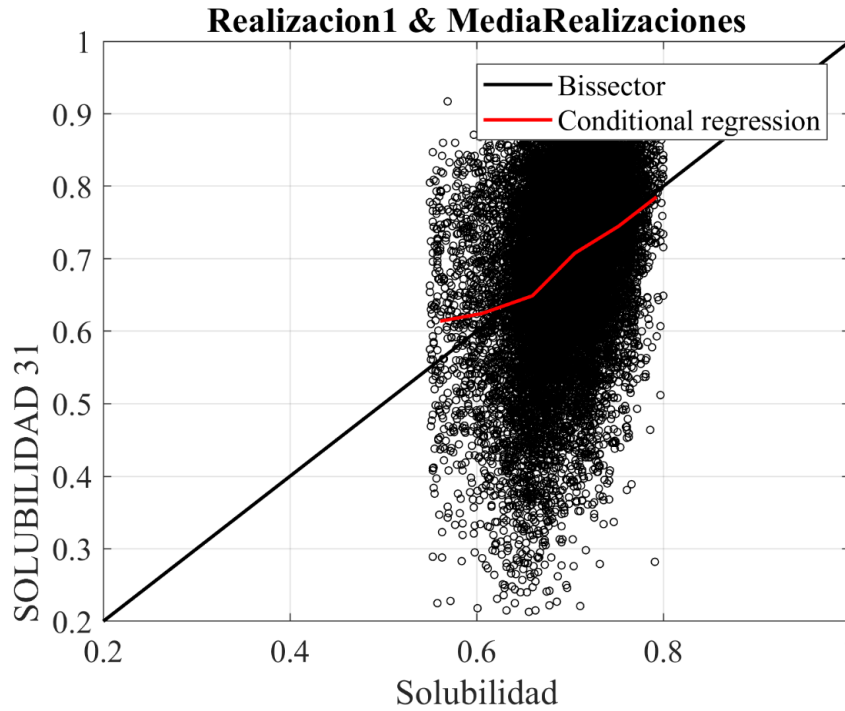


Figura 42 Scatter plot de realidad versus estimación (cociente de cobre soluble sobre cobre total) en soporte de bloques co-kriging ordinario

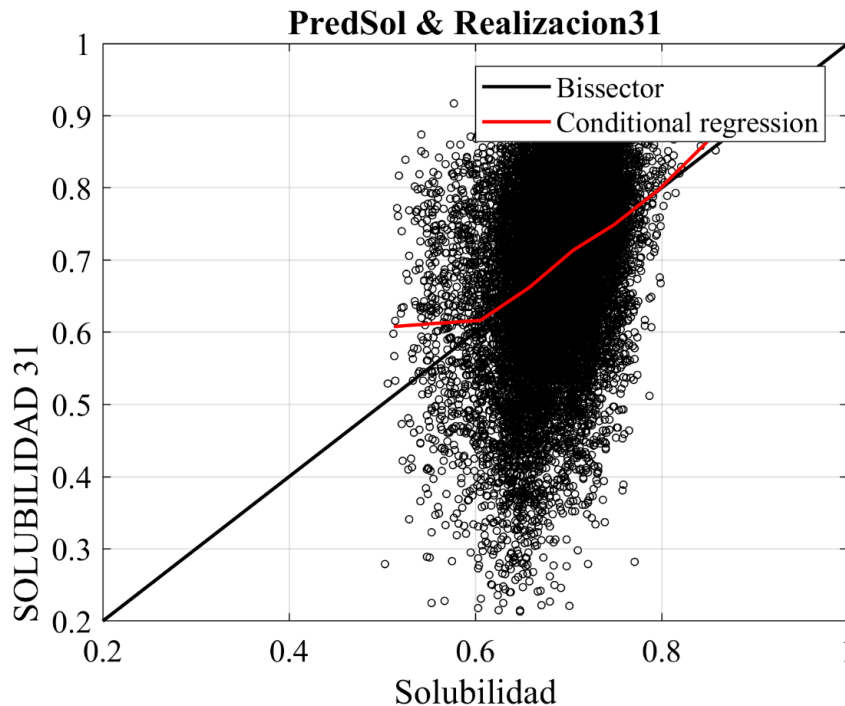


Figura 43 Scatter plot de realidad versus estimación (cociente de cobre soluble sobre cobre total) en soporte de bloques co-kriging de medias relacionadas

Estas regresiones mantienen la tendencia de mantenerse lineal en la mayor parte de la curva, sin embargo, y al igual que en los otros casos hay una fracción en la cual se desvía un poco, pero no es cambio demasiado abrupto y concierne una baja cantidad de bloques (pocos puntos de las nubes).

Estadísticamente la media del cociente del cobre soluble sobre el cobre total obtenido por co-kriging ordinario es prácticamente igual a la media de la realización que se utiliza como la realidad y difieren en apenas 0.1%. Resulta curioso que en soporte de bloques el co-kriging de medias relacionadas esté un poco sesgado pues la media de solubilidad es 0.687 por lo que, si bien sigue siendo un resultado cercano a la realidad simulada, no es óptimo.

Pese a que del análisis de los scatter plots el que mejor comportamiento presenta es el rebloqueo de la estimación directa de la solubilidad, esto sigue siendo inválido matemáticamente y se encuentra una alternativa viable que sí es correcta de realizar que corresponde a realizar el cociente entre la estimación de cobre soluble y cobre total, pues el cambio de soporte de estas variables sí es válido ya que estas variables sí son aditivas.

Al igual que en el soporte puntual, se calculan las curvas tonelaje ley, pero esta vez en el soporte de bloques.

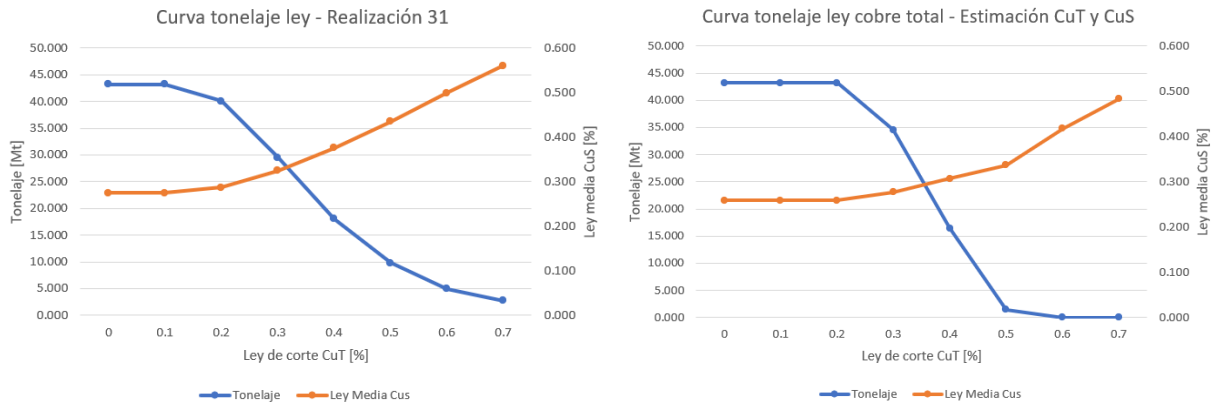


Figura 44 Curvas tonelaje ley co-simulación cobre total y solubilidad y co-estimación cobre soluble y cobre total en soporte de bloques

En este caso, las curvas tonelaje ley son prácticamente iguales, pero sucede que hay una mayor cantidad de datos sobre la ley de corte 0.7% en la co-simulación por lo que hay un mayor tonelaje asociado a este valor y también se observa que consecuentemente la ley media de cobre soluble es levemente mayor en el caso de la co-simulación. A partir de esto se puede confirmar la hipótesis que consiste en que el cociente de los estimadores de cobre soluble y cobre total genera un estimador insesgado (o con un sesgo muy menor) de la solubilidad.

Se calcula también la curva correspondiente a la solubilidad media de acuerdo a valores de corte en la ley de CuT.

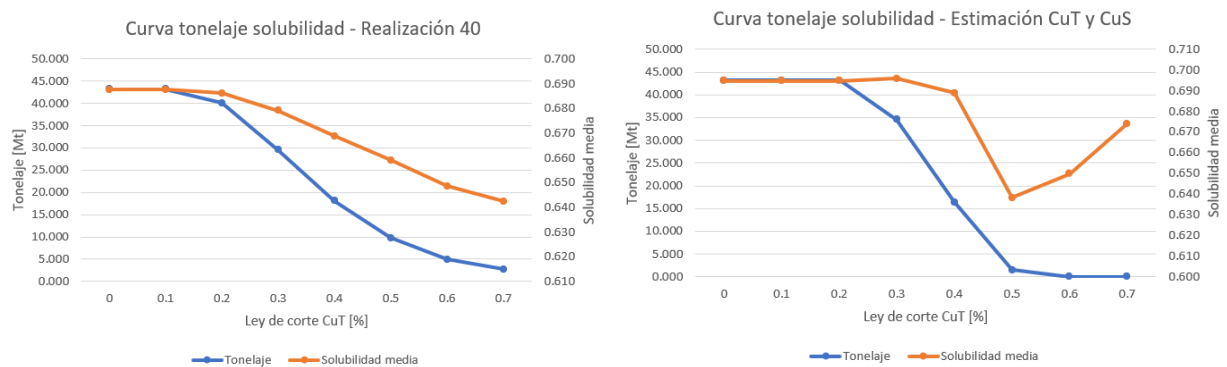


Figura 45 Solubilidad media obtenida por co-simulación y co-estimación según ley de corte de CuT en soporte de bloques

En esta figura se puede apreciar el efecto del cambio de soporte, pues los resultados están más suavizados en ambos casos y las dos curvas son similares, habiendo una diferencia más evidente solamente para los puntos 0.5 y 0.7%. Las diferencias que hay en los valores de cada método pueden atribuirse a la realización seleccionada pues entre las 65 generadas hay un rango de variabilidad considerable.

5. SEGUNDO CASO DE ESTUDIO

5.1. Análisis exploratorio de datos

Se cuenta con una base de 125,000 datos que abarcan un volumen de 2.0 km x 3.0 km x 0.5 km (figura 46), por temas de confidencialidad al igual que en el caso 1 se han multiplicado las leyes por un factor constante y se deja adjunta solamente una vista en planta de los datos en una zona reducida para las variables cobre soluble y cobre total. Se tiene información de variables geológicas las cuales son: alteración, mineralización y litología. Los datos se encuentran compositados a un largo de 5m.

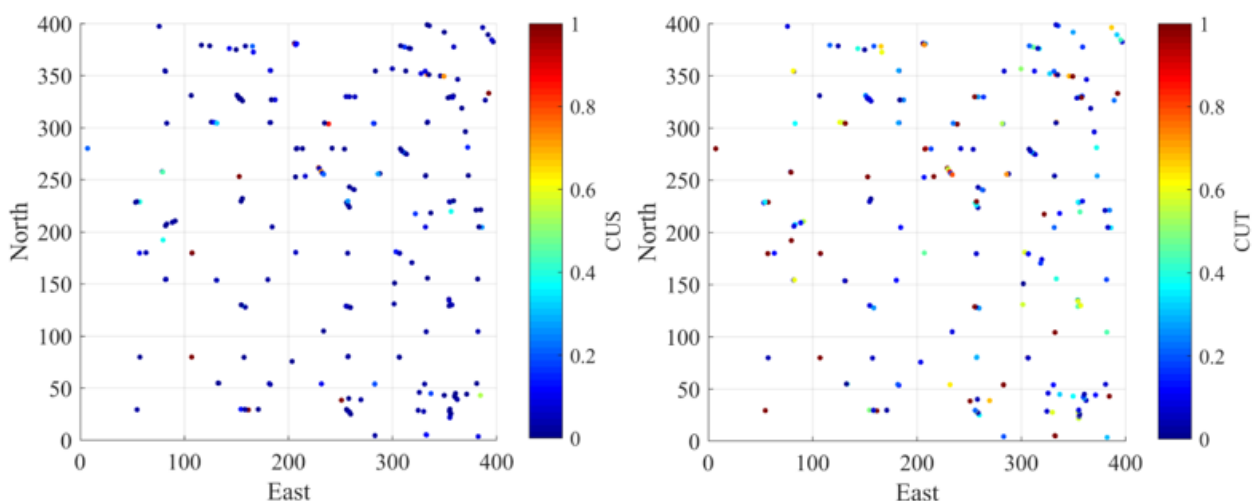


Figura 46 Vista en planta de ubicación de las muestras de cobre soluble (izquierda) y cobre total (derecha)

Es necesario generar unidades geológicas (UG) para poder realizar las estimaciones en un subconjunto de datos que sea estacionario, es decir, que las estadísticas dentro de éste se mantengan constantes. Todo el proceso de definición de unidades geológicas se deja adjunto en el anexo [A](#).

Este estudio se limita a considerar los datos de una unidad geológica que en este caso es la UG 10 que contiene principalmente sulfuros de baja ley y desde ahora en lo que sigue del desarrollo de este trabajo todo lo que se realice será en base a los datos de esta UG. En primer lugar, se debe realizar el cálculo de las estadísticas básicas para saber qué rango de valores de cobre soluble, cobre total y solubilidad poseen los datos y tener un mayor conocimiento estadístico de éstos.

Tabla 12 Estadísticas básicas UG10

	Cobre soluble	Cobre Total	Solubilidad
Mínimo	0.001	0.011	0.001
Máximo	3.576	55.655	0.946
Número de datos	11849	11849	11849
Media	0.126	0.954	0.164
Media desagrupada	0.131	0.962	0.167
Varianza	0.013	1.067	0.009
Varianza desagrupada	0.014	0.912	0.010

Se tienen valores bastantes bajos de cobre soluble en este caso en comparación con los valores de cobre total que se observan. La solubilidad en consecuencia tiene valores más bajos también, pero esto se debe a las características geológicas de los minerales presentes en esta unidad geológica.

Se presentan a continuación histogramas para ver la distribución de valores tanto para cobre soluble como para cobre total.

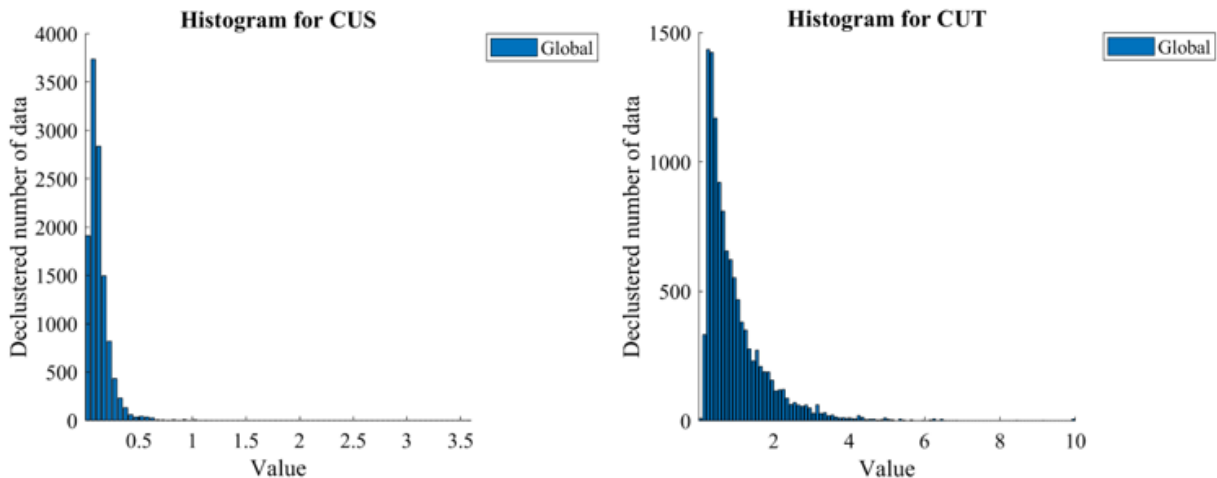


Figura 47 Histogramas desagrupados de leyes de cobre soluble (izquierda) y cobre total (derecha)

Para el caso del cobre soluble y de acuerdo a lo que se revisó en las estadísticas básicas, la mayor concentración de valores se encuentra en el rango 0 - 0.5% mientras que para el cobre total el rango es un poco más amplio teniendo su mayor concentración entre 0 y 2% lo que explica que la media para esta variable sea tan alta. Se genera también la nube de correlación entre estas dos variables para verificar que todos los valores se encuentran bajo la primera bisectriz, pues es lo que se espera al tener que siempre el valor de cobre soluble debe ser menor o igual al valor de cobre total.

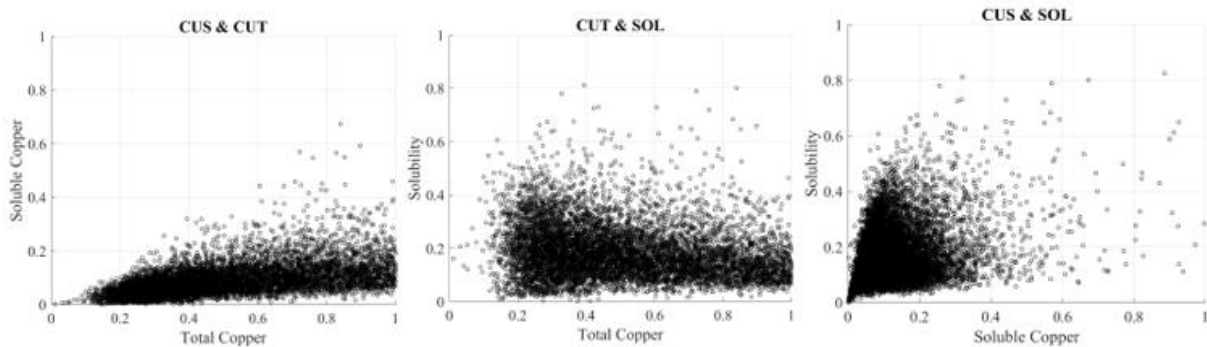


Figura 48 Scatter plots de CuS vs CuT, Sol vs CuT y Sol vs CuS

El coeficiente de correlación es 0.60 que es más bajo de lo que observamos en el primer caso de estudio, pero sigue siendo un valor alto. La correlación entre el cobre total y la solubilidad es $R=-0.35$ que refleja que sí hay una correlación entre estas variables. Finalmente, la correlación entre el cobre soluble y la solubilidad es $R=0.31$.

Se realizan también el cálculo de las medias condicionales (swath plots) de cada variable para comprender de mejor manera el comportamiento espacial de las variables. En este caso se calcularon para el este, norte y la cota. Se muestran los resultados para la variable cobre total.

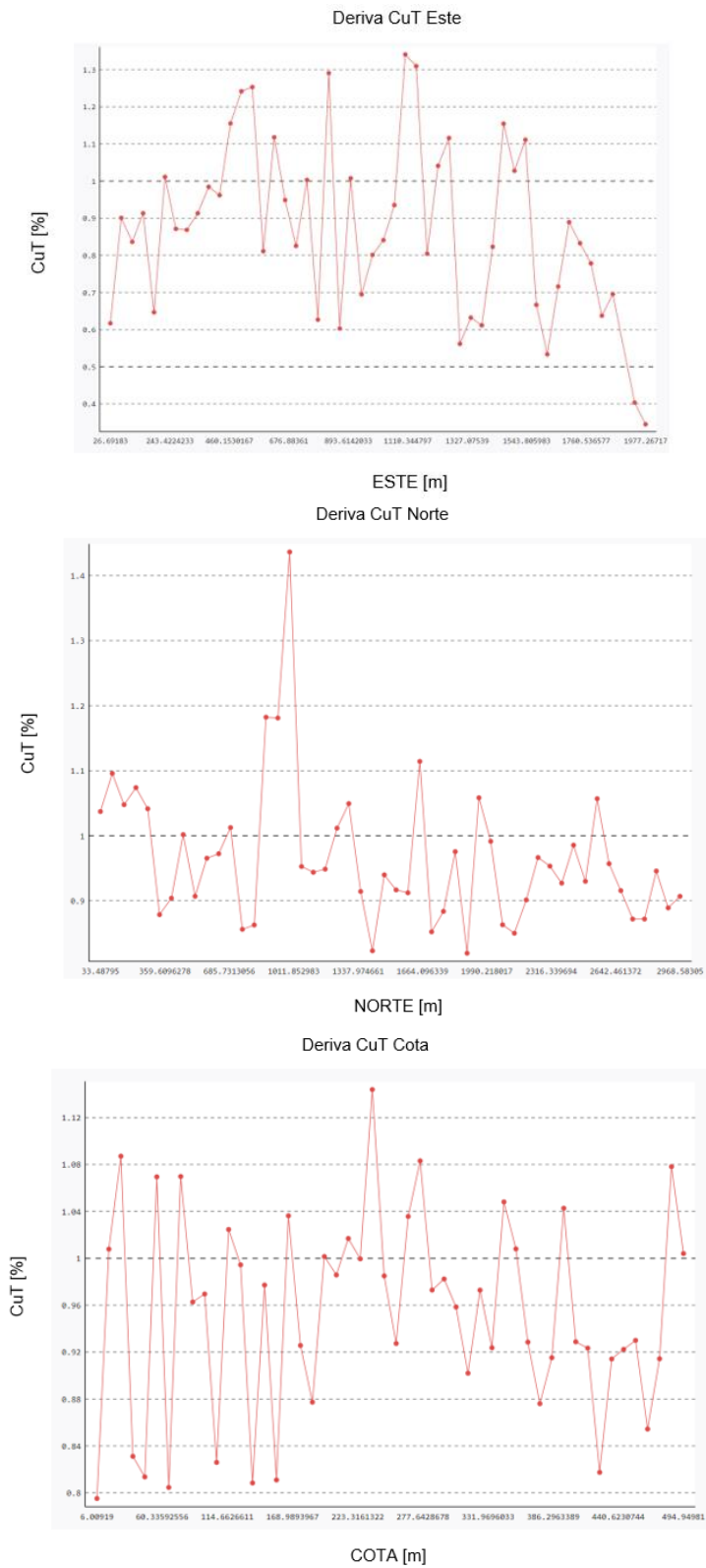


Figura 49 medias condicionales de cobre total en las direcciones este (superior), norte (centro) y cota (inferior)

En la dirección Este el rango de valores va desde el 0.4% hasta peaks de 1.3%, sin embargo, la tendencia que se puede observar es que en torno al valor 0.9% se concentran las medias. Pasa lo mismo con la dirección norte y con la cota o elevación donde hay pequeñas variaciones en el valor en torno al cual oscilan las medias, siendo 0.95% para el norte y 1.05% para la cota. No se presentan variaciones muy abruptas por lo que se puede asumir una cierta continuidad en esta unidad.

5.2. Co-Simulación

5.2.1 Anamorfosis Gaussiana de los datos

Se realiza la transformación gaussiana a los datos puesto que se busca trabajar con distribucionales normales de media 0 y varianza 1. Se aplica la transformación a las tres variables de interés: cobre total, cobre soluble y solubilidad. Se muestran los resultados para estas tres variables.

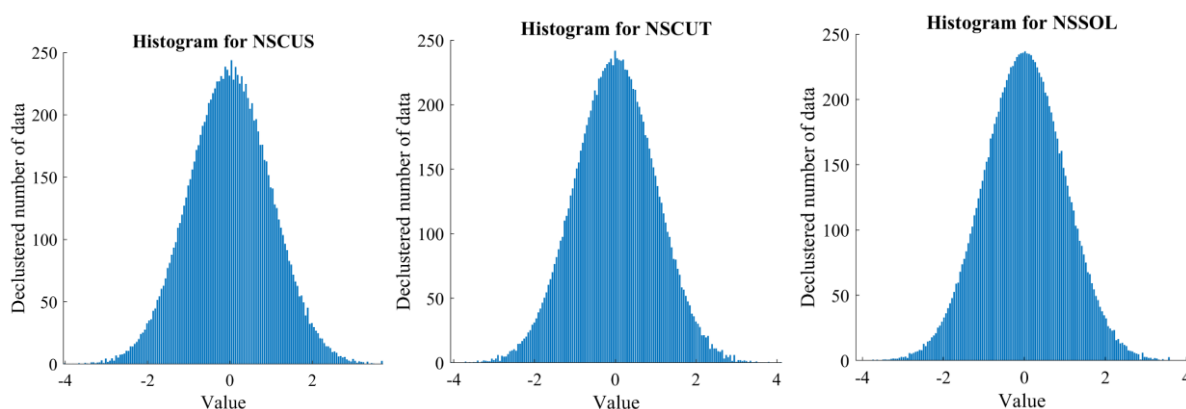


Figura 50 Histogramas de datos gaussianos para cobre total (izquierda) cobre soluble (centro) y solubilidad (derecha)

Las estadísticas básicas de los datos Gaussianos quedan resumidas en la tabla 13:

Tabla 13 Estadísticas básicas datos gaussianos

	Cobre soluble	Cobre Total	Solubilidad
Mínimo	-4.037	-4.082	-4.161
Máximo	3.698	4.089	4.010
Número de datos	11849	11849	11849
Media	-0.040	-0.015	-0.032
Varianza	0.990	0.995	0.983

Efectivamente, las tres variables cuentan con una media 0 y una varianza 1, lo que se confirma de la figura 50 donde los histogramas muestran claramente distribuciones normales.

5.2.2 Validación de la hipótesis multi-Gaussiana

5.2.2.1 Nubes de correlación diferida

Al igual que en el primer caso de estudio, es necesario validar que se cumplen la hipótesis multi-Gaussiana mediante la realización de dos tests que son las nubes de correlación diferida y comparación entre variograma y madograma. El resultado del primer test es presentado a continuación. El cálculo se realiza omnidireccionalmente ya que a priori no se tienen definidas las direcciones principales de anisotropía, el paso considerado es de 5m con una tolerancia de la mitad del paso, es decir, 2.5m.

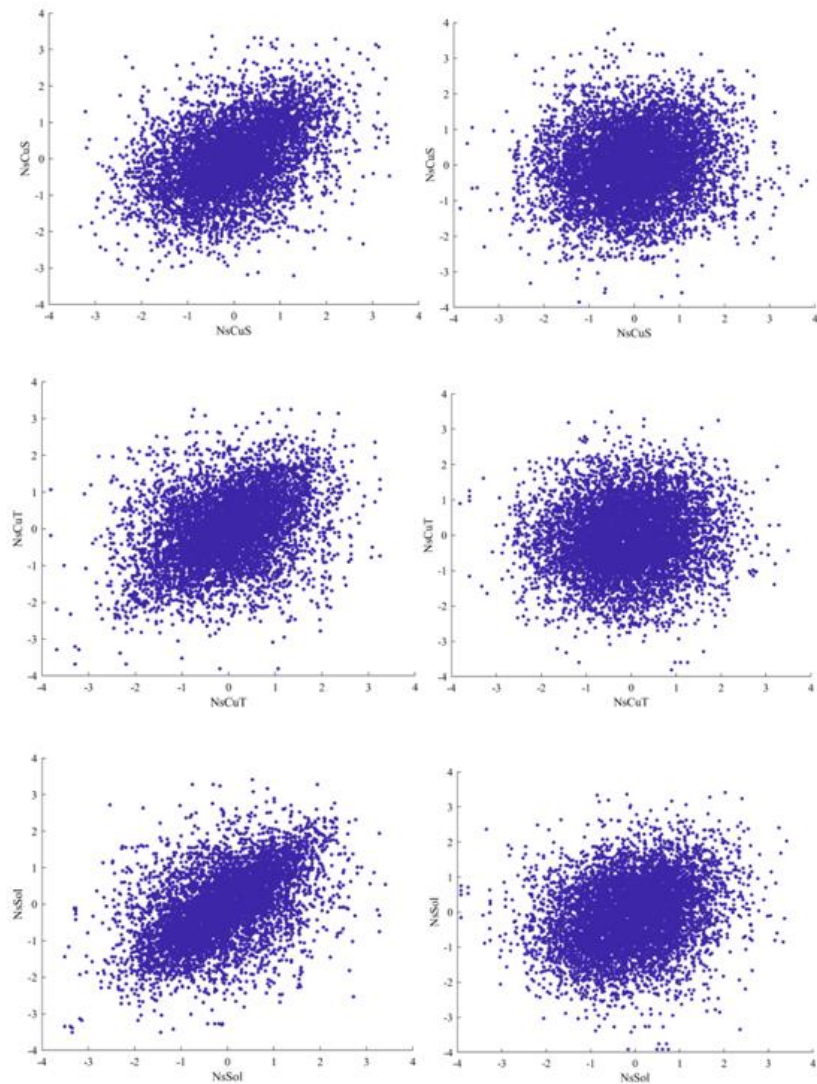


Figura 51 nubes de correlación diferida para cobre soluble (superior), cobre total (centro) y solubilidad (inferior) para un paso de 5m (izquierda) y 20m (derecha)

Los resultados confirman que las nubes de correlación diferida tienen forma elíptica y a medida que el paso aumenta de 5m a 20m se va volviendo más circular por lo que se puede concluir que este test está correcto para las tres variables. Se presentan también, las nubes de correlación diferida entre variables de interés (CuT vs CuS, CuT vs Sol y CuS vs Sol).

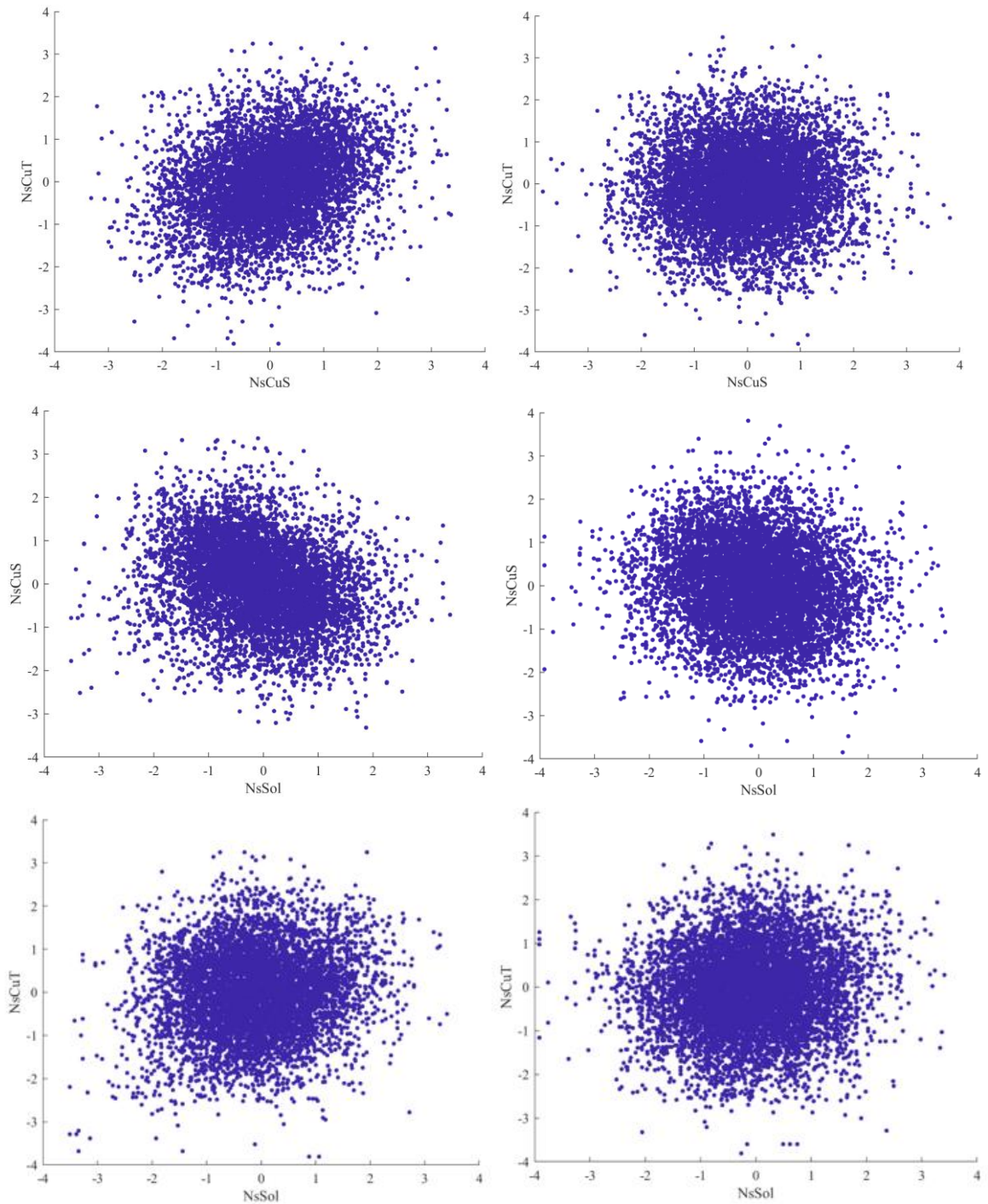


Figura 52 nubes de correlación diferida CuT vs CuS (superior), CuS vs Sol (centro) y CuT vs Sol (inferior) con una distancia de separación de 5m (izquierda) y 20m (derecha)

5.2.2.2 Comparación entre variograma y madograma

El segundo test que se realiza para verificar el carácter bigaussiano consiste en hacer el cociente entre la raíz cuadrada del variograma y el madograma (variograma de orden 1). Este cociente se mantiene constante en torno a la raíz cuadrada de π (aproximadamente 1.77).

Los parámetros utilizados para el cálculo del variograma y madograma se resumen en la tabla adjunta a continuación:

Tabla 14 Parámetros utilizados para el cálculo de variograma y madograma

Dirección	Azimuth	Tolerancia az.	Dip	Tolerancia dip	Paso	Tolerancia paso	Número paso
Omnihorizontal	0.0	90.0	0.0	20.0	3.0	1.5	5
Vertical	0.0	90.0	90.0	20.0	3.0	1.5	5

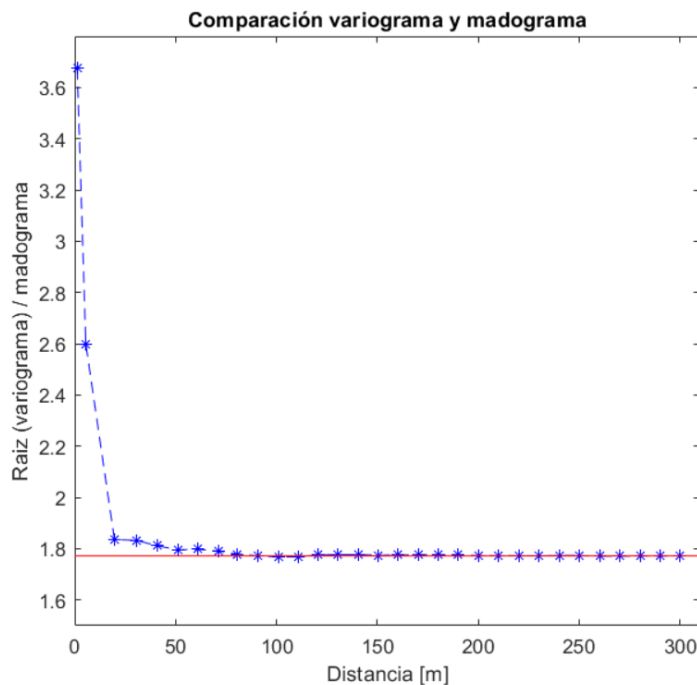


Figura 53 Comparación variograma / madograma

En la figura 53 se puede ver el resultado de realizar este procedimiento para el cual fueron utilizados los siguientes parámetros: variograma y madograma calculados omnidireccionalmente, el paso utilizado es de 10m con una tolerancia de 10m puesto que se aprecia que hay una estructura de corto alcance en las variables. El test se cumple correctamente, aunque para los primeros dos puntos (correspondientes a distancias muy

cortas y pocos pares de datos) difiere de la raíz de π , pero pasando estos dos puntos se mantiene casi constante en torno al 1.77.

5.2.3 Análisis variográfico

5.2.3.1 Mapas variográficos

Para ver la presencia de eventuales direcciones principales de anisotropía es conveniente realizar los mapas variográficos de las variables y en base a los resultados de estos escoger las direcciones para el cálculo de los variogramas experimentales. Se presenta el resultado para la variable cobre total.

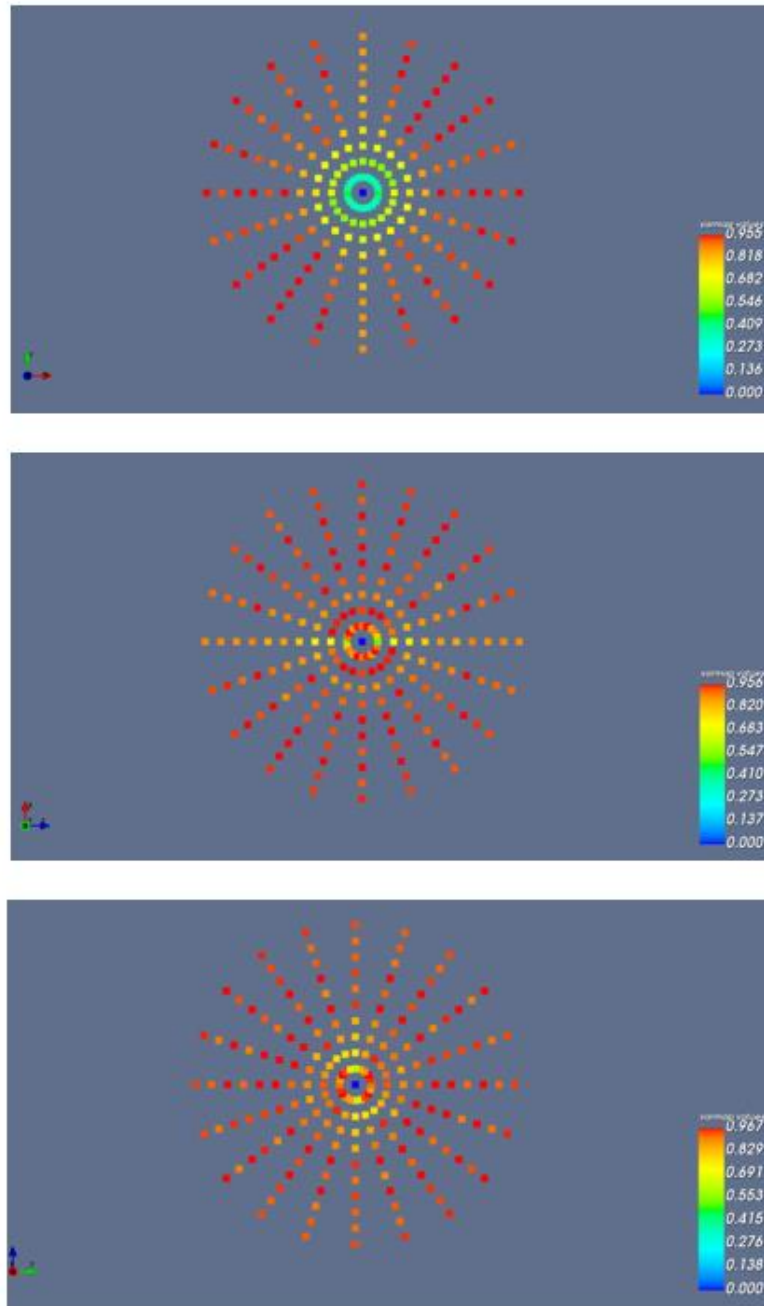


Figura 54 Mapas variográficos planos XY (superior), XZ (centro) e YZ (inferior)

De los mapas variográficos se pueden hacer algunas observaciones para cada uno de los planos calculados. El plano XY presenta diferencias en los valores del variograma en la dirección NS donde en ésta hay valores más bajos lo cual indica una eventual dirección preferencial de anisotropía, sin embargo, si se mira en distancias pequeñas el comportamiento es similar en todas las direcciones por lo que se sugeriría realizar la variografía omnihorizontalmente. En el plano XZ también se aprecia una dirección preferencial donde los valores del variograma para todas las distancias es menor en la dirección Norte-Cota. Finalmente, en el plano YZ no se aprecia ninguna dirección de

anisotropía principal. Ya se sugirió el plano omnihorizontal para el cálculo del variograma experimental y como en el plano XZ también hay una dirección de anisotropía se suma otra dirección que es la dirección vertical para el cálculo de los variogramas.

5.2.4 Variogramas experimentales

Una vez definidas las direcciones, se calculan los variogramas experimentales y los parámetros utilizados son resumidos en la tabla 15.

Tabla 15 Parámetros de cálculo para variogramas experimentales

Dirección	Azimuth	Tolerancia az.	Dip	Tolerancia dip	Paso	Tolerancia paso	Número paso
Omnihorizontal	0.0	90.0	0.0	20.0	10.0	10.0	30
Vertical	0.0	90.0	90.0	20.0	10.0	10.0	20

Con estos parámetros se obtienen los siguientes variogramas directos y cruzados:

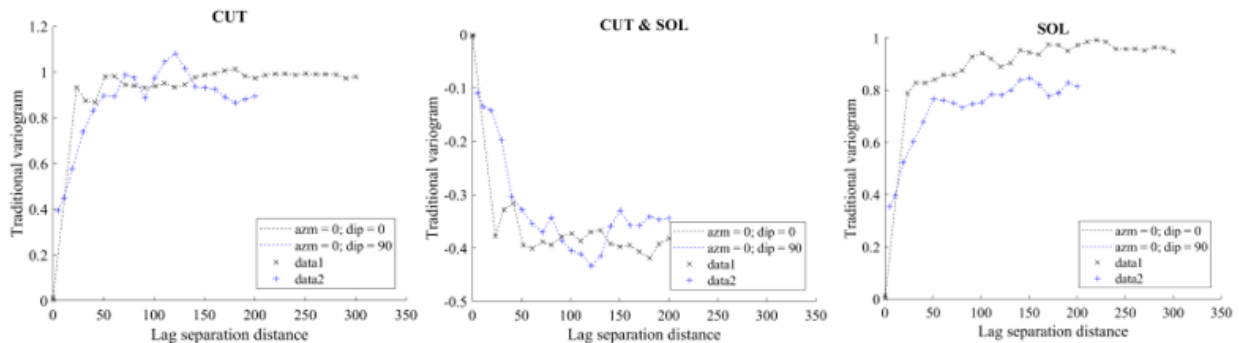


Figura 55 Variogramas experimentales directos y cruzados para cobre total y solubilidad

En el variograma directo del cobre total para las dos direcciones calculadas los variogramas son similares y difieren un poco en la meseta, esto podría hacer considerar la opción de realizar un variograma omnidireccional, pues esto se emplea cuando los variogramas se superponen, sin embargo, si se observa el variograma directo de la solubilidad, acá si hay diferencias más notorias en términos de meseta y alcance por lo que lo anterior se descarta.

5.2.5 Variogramas modelados

Una vez obtenidos los variogramas experimentales directos y cruzados para CuT y Sol se puede modelar para lo que se considera un efecto pepita y tres estructuras anidadas

que es una gaussiana y dos exponenciales. El modelo completo queda definido por la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{CuT} & \gamma_{CuT-Sol} \\ \gamma_{Sol-CuT} & \gamma_{Sol} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.014 & 0.004 \\ 0.004 & 0.012 \end{pmatrix} \cdot pepa + \begin{pmatrix} 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 \end{pmatrix} \cdot gauss(15m, 22m) \\ + \begin{pmatrix} 0.893 & -0.338 \\ -0.338 & 0.704 \end{pmatrix} \cdot exp(31m, 65m) + \begin{pmatrix} 0.078 & -0.070 \\ -0.070 & 0.256 \end{pmatrix} \cdot exp(210, 600)$$

Con este modelo, los variogramas modelados se muestran en la figura 56:

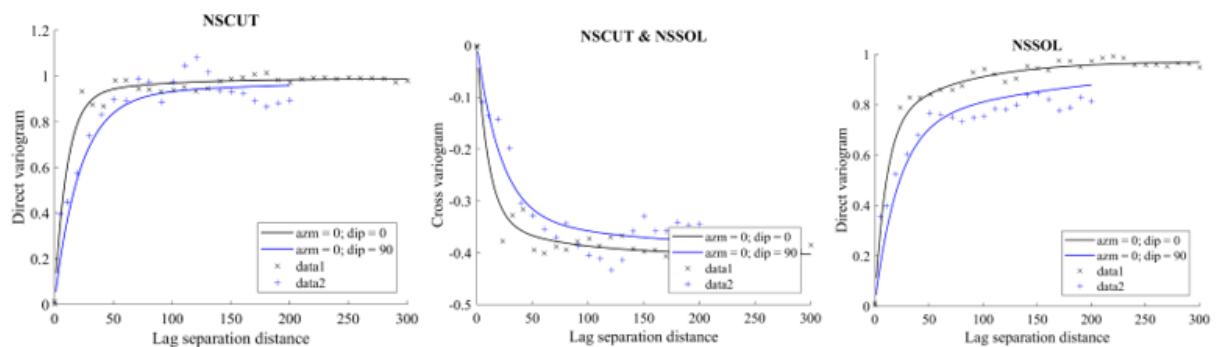


Figura 56 Variograma modelado directo y cruzado para cobre total y solubilidad

5.2.6 Co-simulación condicional

Una vez modelados los variogramas se puede realizar la co-simulación que en este caso se utilizará la información de las variables cobre total y solubilidad pues el análisis de las nubes de correlación diferida es circular lo que hace que sean adecuadas para realizar el procedimiento.

La co-simulación se lleva a cabo sobre una grilla densa de 2m x 2m x 5m con un soporte puntual y el área a considerar es 400m x 400m x 100m. Lo anterior implica que el total de nodos a considerar son 400,000 entre las coordenadas (1000m, 1500m, 300m) y (1400m, 1900, 400m). Se generan un total de 65 realizaciones para estas dos variables.

A continuación, se presentan algunas estadísticas asociadas a las realizaciones donde se mostrará un mejor y peor caso a modo comparativo tomando como parámetro de comparación la ley de cobre total y se agrega también el resultado de promediar las 65 realizaciones. También se generan histogramas para el cobre total con el fin de apreciar

la distribución de los valores generados tanto para el mejor y peor caso en cuanto a ley de cobre total se refiere y también para la media de las realizaciones.

Tabla 16 Estadísticas básicas de realizaciones

Caso	Mínimo (% CuT)	Máximo (% CuT)	Media (%CuT)	Varianza	Desv. Estándar
Mejor caso (Realización 35)	0.006	55.655	1.045	1.287	1.135
Peor caso (Realización 61)	0.007	55.655	0.816	0.568	0.754
Media realizaciones	0.184	8.316	0.901	0.080	0.282

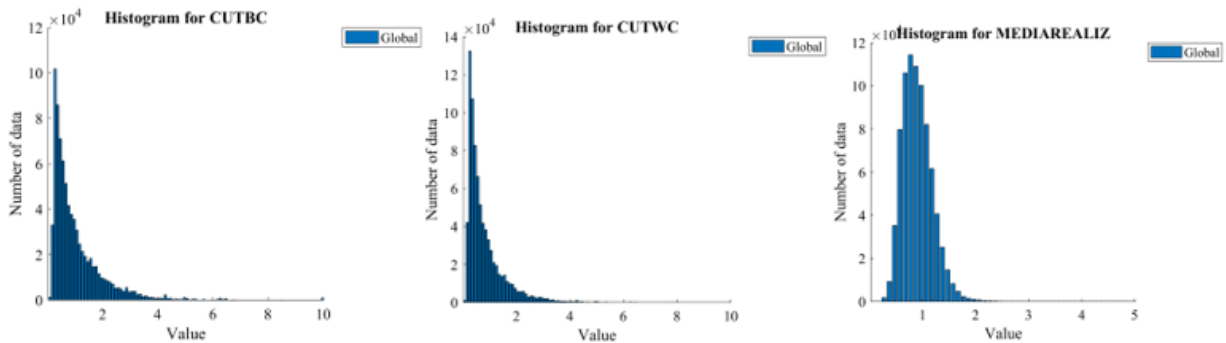


Figura 57 Histogramas ley de cobre total para mejor caso (izquierda), peor caso (centro) y media de realizaciones (derecha)

El mejor caso y el peor caso difieren en 0.2% en sus medias lo cual es considerable tomando como parámetro de comparación la ley de cobre total. Hay un número alto de valores que están por sobre el 3% lo que hace que la varianza y por consiguiente la desviación estándar de los datos sea alta también. Hay un dato extremo (outlier) que fue considerado para el cálculo para ver cómo afectaban en la co-simulación y este valor es reproducido tanto en la mejor realización como en la peor (55.6% de cobre total). Se comparó previamente el efecto de este dato en los resultados para removerlo o hacer algún tratamiento con él (reemplazarlo por la media, por ejemplo), pero no repercute apreciablemente por lo que se deja en las muestras.

Las distribuciones que se observan en la figura 57 son bastante similares, sin embargo, para el caso de la peor ley de cobre total se ve que hay una mayor concentración de valores entre 0-1% mientras que para la realización con mejor ley de cobre total hay una concentración más alta en el intervalo 0.5 y 1.5%. Es esperable que al promediar las 65 realizaciones se suavicen los resultados y los datos se concentran entre 0.5 y 1.5%.

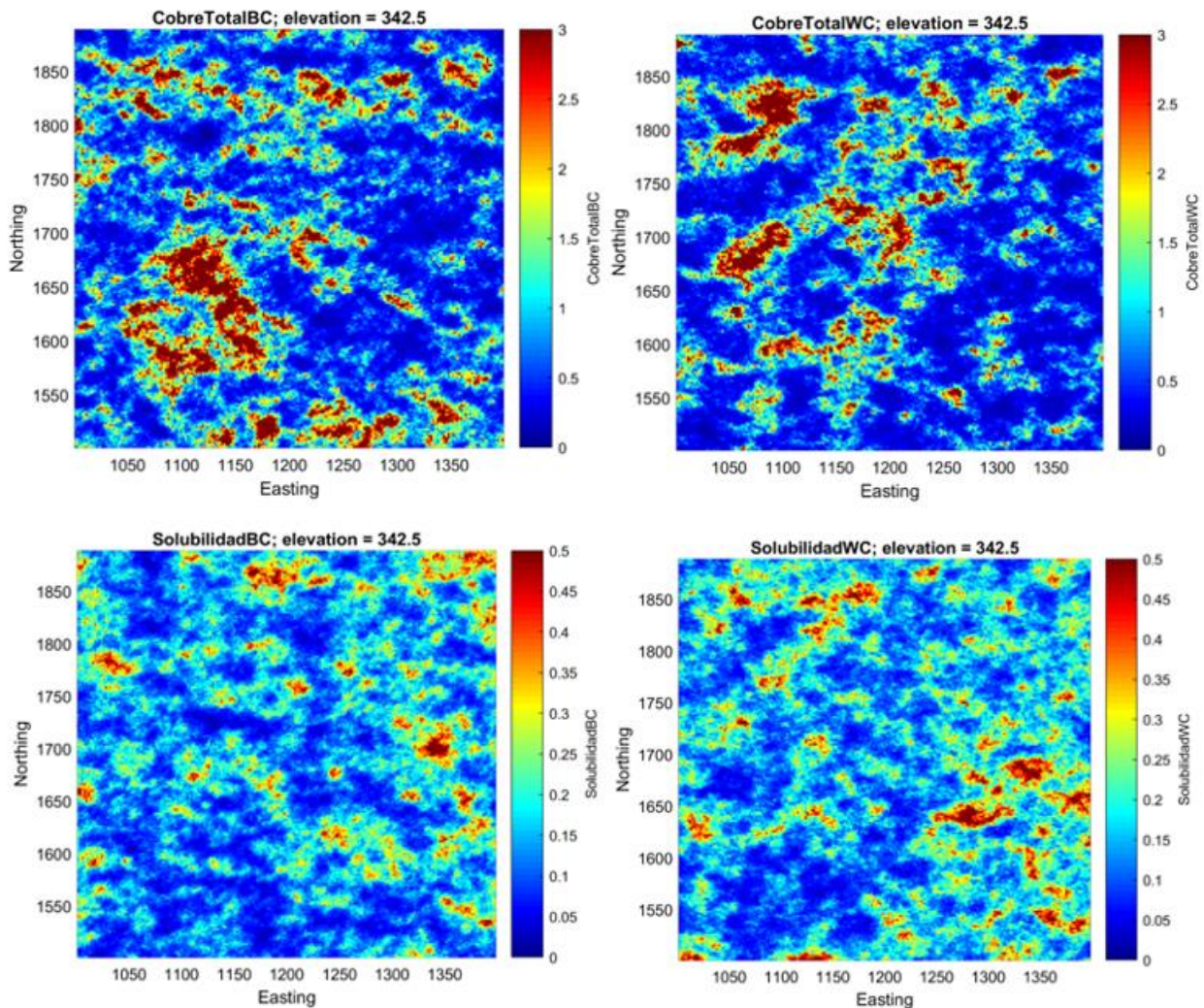


Figura 58 Dos realizaciones de cobre total (superior) y solubilidad (inferior) en soporte puntual

Las realizaciones tanto para el cobre total como para la solubilidad, muestran valores muy diferentes por lo que se puede decir que la incertidumbre asociada al valor real de cada variable es alta. Existen zonas con valores muy altos de cobre total (mayores a 3%) y no hay a simple vista una correlación entre la solubilidad y el cobre total, puesto que los mapas generados no permiten asociar zonas de alta/baja ley con zonas de alta/baja solubilidad.

El contar con 65 realizaciones de cobre total y 65 de solubilidad, permite mediante el producto entre éstas generar 65 realizaciones de cobre soluble. Esto es necesario pues la próxima etapa que consiste en rebloquear los resultados requiere que las variables sean aditivas y el cobre soluble y total lo son. El resultado de realizar el producto entre las dos variables se presenta en la figura 59.

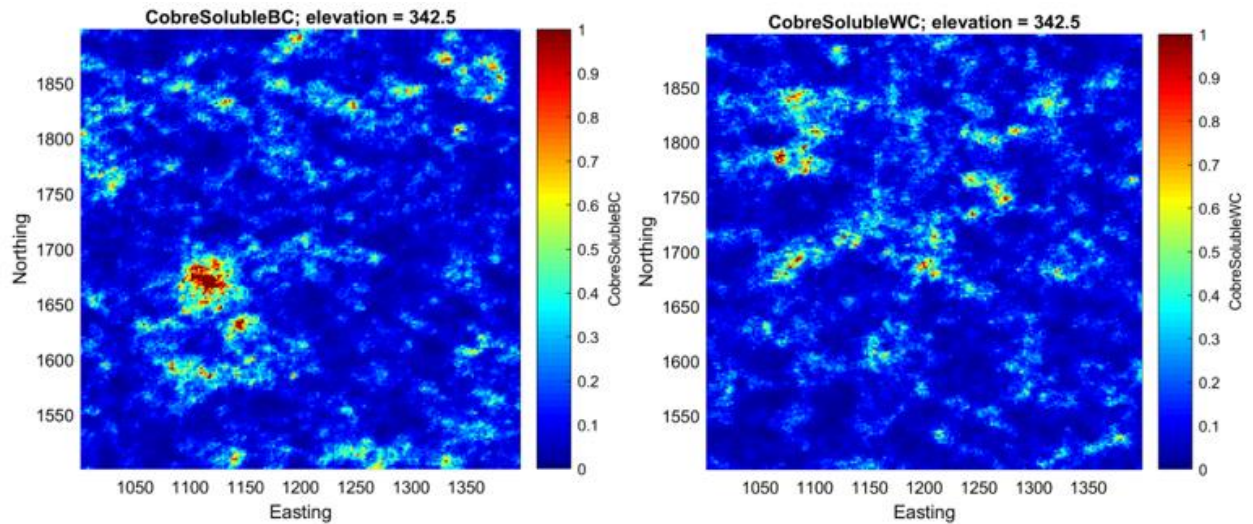


Figura 59 Dos realizaciones de cobre soluble en soporte puntual

Para el cobre soluble también es apreciable una gran diferencia entre una realización y otra, aunque se debe considerar que se están comparando tanto la realización con la ley de cobre total más alta como la realización con la ley de cobre total más baja.

Si se calcula el promedio de las 65 realizaciones para las tres variables en estudio, se genera el siguiente resultado:

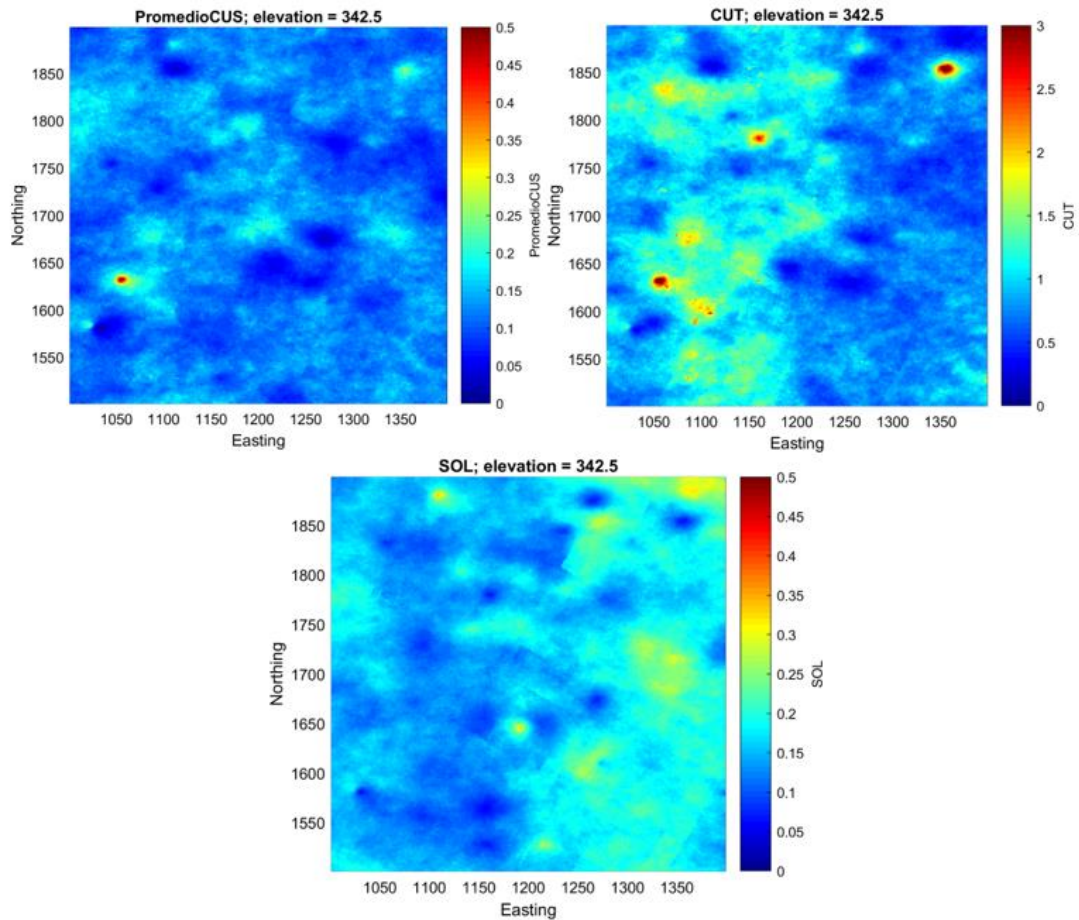


Figura 60 Media de realizaciones para cobre soluble (izquierda), solubilidad (centro) y cobre total (derecha)

La media de realizaciones suaviza todos los valores al calcularlo como el promedio de 65 valores, sin embargo, hay zonas, por ejemplo, donde hay concentraciones altas de cobre total y que también se observa en el cobre soluble. Para la solubilidad en cambio, el resultado general es suavizado y los valores se concentran en el rango 0.2-0.3.

5.2.7 Validación cruzada

Es importante validar los resultados de la co-simulación para verificar la correcta adecuación de los parámetros utilizados. Es así como se generan scatter plots y gráficos de incertidumbre para ver si las simulaciones tienen la variabilidad correcta.

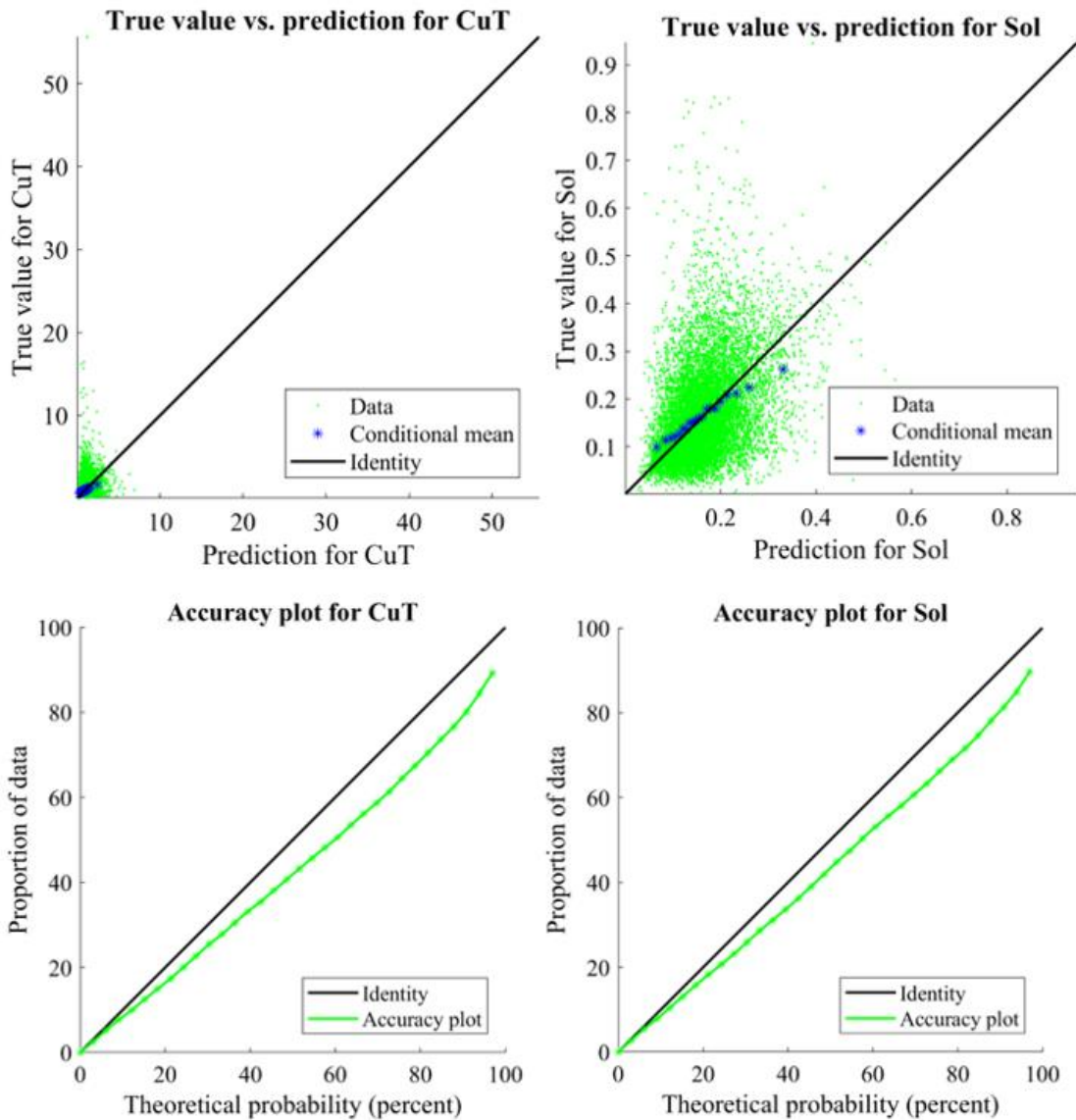


Figura 61 Resultados validación cruzada co-simulación

Los scatter plots presentan una buena correlación entre valores reales y predichos, para la variable cobre total es mejor el resultado que para la solubilidad, esto puede deberse a la dispersión presente en los datos. Los gráficos de probabilidad para ver si se logra captar la incertidumbre de los valores también arrojan buenos resultados pues se encuentran cercanos a la primera bisectriz, quizás agregar un mayor número de realizaciones podría mejorar aún más estos gráficos.

5.2.8 Rebloqueo de resultados

Para el objetivo de este trabajo se requiere tener los resultados tanto en soporte puntual como en soporte de bloques, es por esto que se realiza un rebloqueo de las realizaciones

obtenidas para cobre total y cobre soluble porque estas variables son aditivas y con estas variables en soporte de bloques se puede hacer el cociente entre ellas para obtener realizaciones de la solubilidad en soporte de bloques. El tamaño del bloque considerado es de 10m x 10m x 10m lo que implica una discretización de 5, 5 y 2 puntos en las direcciones x,y,z respectivamente. A continuación, se presenta el resultado obtenido para las tres variables en el soporte mencionado.

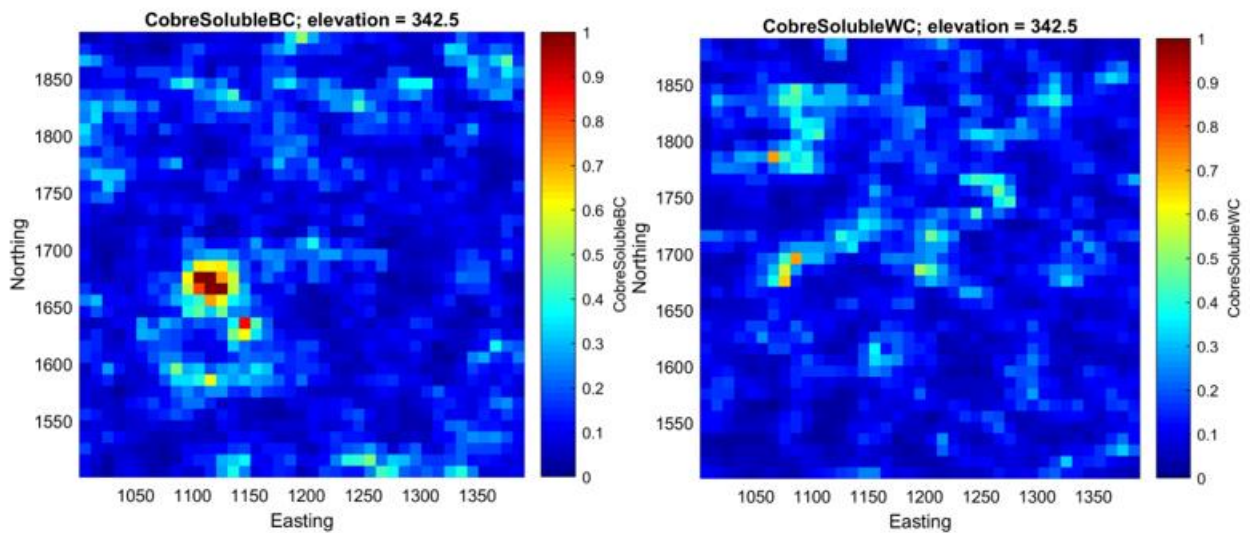


Figura 62 Dos realizaciones de cobre soluble en soporte de bloques

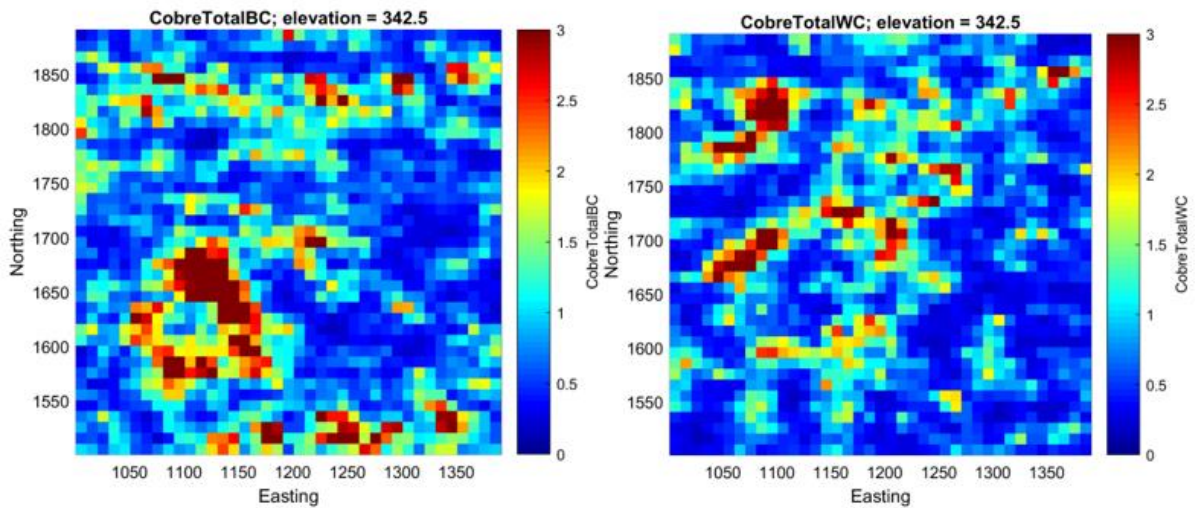


Figura 63 Dos realizaciones de cobre total en soporte de bloques

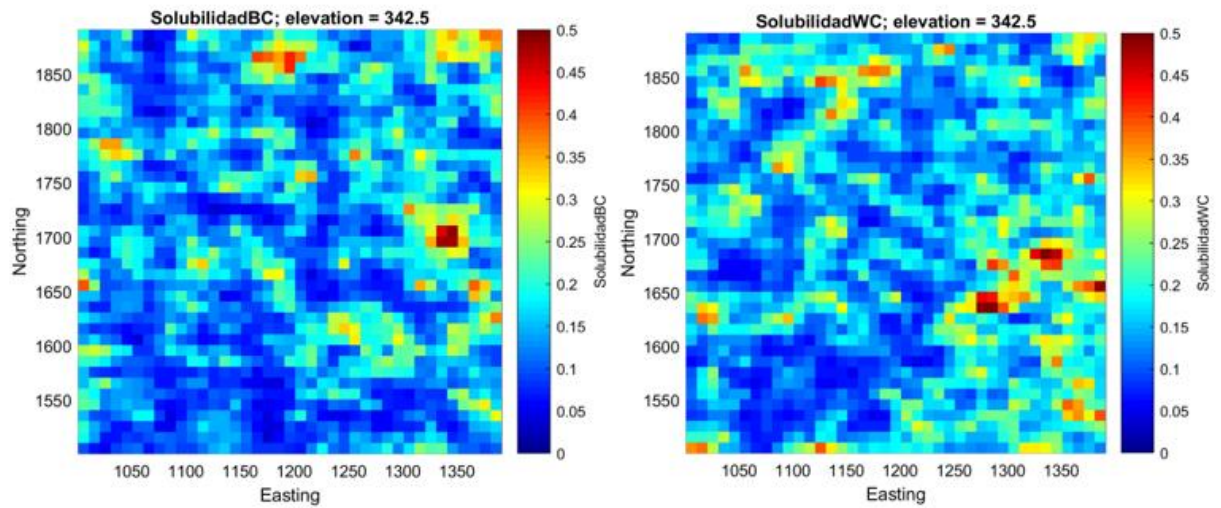


Figura 64 Dos realizaciones de solubilidad en soporte de bloques

Interesa también saber cómo cambia el resultado al rebloquear la media de las 65 realizaciones de cobre soluble, cobre total y solubilidad.

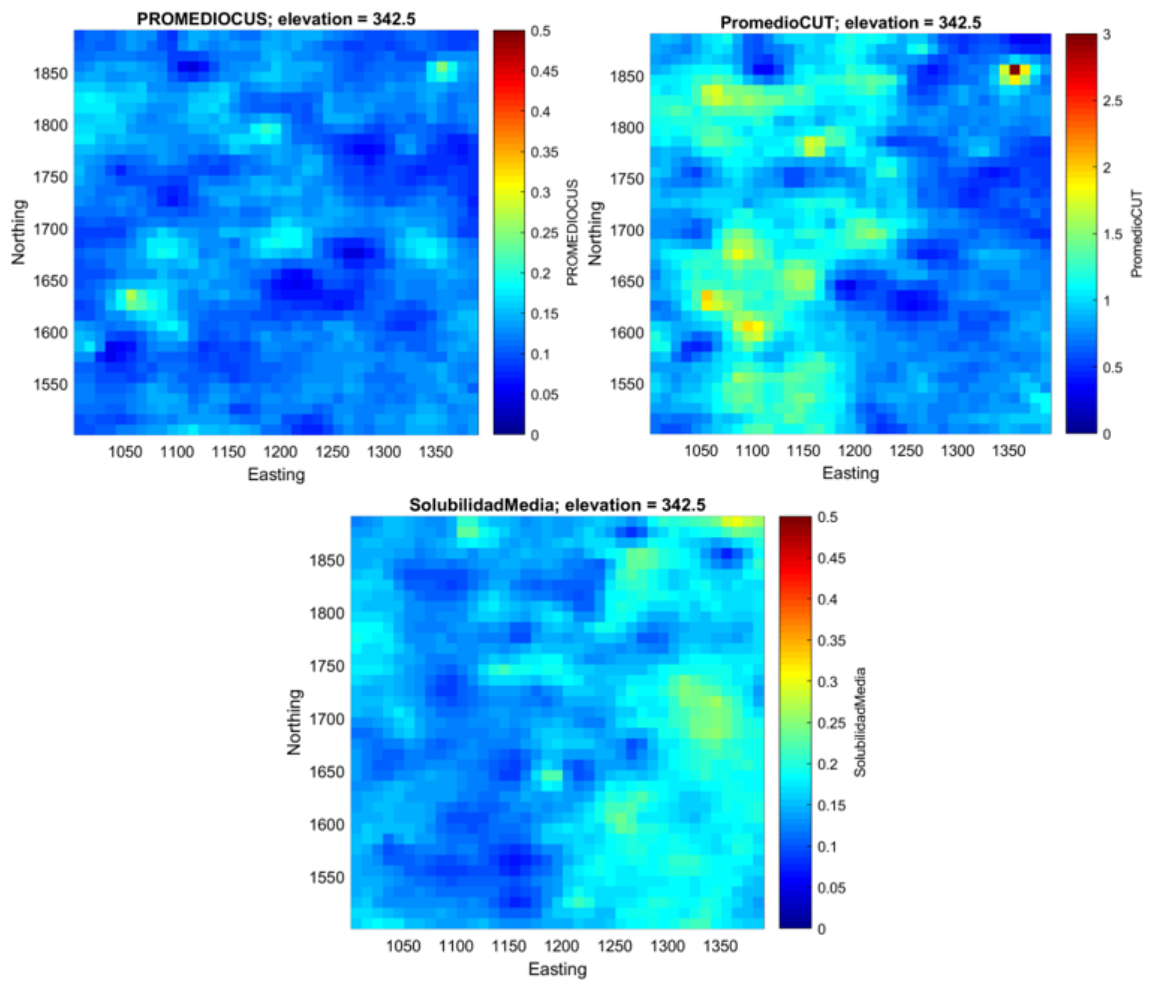


Figura 65 Media de realizaciones de cobre soluble (izquierda), solubilidad (centro) y cobre total (derecha)

5.3. Estimación directa de Solubilidad

Al igual que en el primer caso, se desea comparar los estimadores obtenidos mediante una estimación directa de los valores que se tienen para la solubilidad u obtener ésta última como el cociente del kriging o el co-kriging del cobre soluble y cobre total, tanto en soporte puntual como en soporte de bloques.

5.3.1 Análisis variográfico

5.3.1.1 Variograma experimental

Se calcula el variograma experimental omnihorizontalmente, pero en vez de utilizar la dirección vertical se utiliza una dirección sub-vertical con una inclinación de 60° en vez 90° pues la validación cruzada mostró mejores resultados (se deja adjunto mapa variográfico que justifica esta decisión).

Tabla 17 Parámetros de cálculo para variogramas experimentales

Dirección	Azimuth	Tolerancia az.	Dip	Tolerancia dip	Paso	Tolerancia paso	Número paso
Omhorizontal	0.0	90.0	0.0	20.0	5.0	5.0	30
Sub-vertical	0.0	90.0	90.0	20.0	10.0	5.0	10

Con estos parámetros resulta el siguiente variograma experimental:

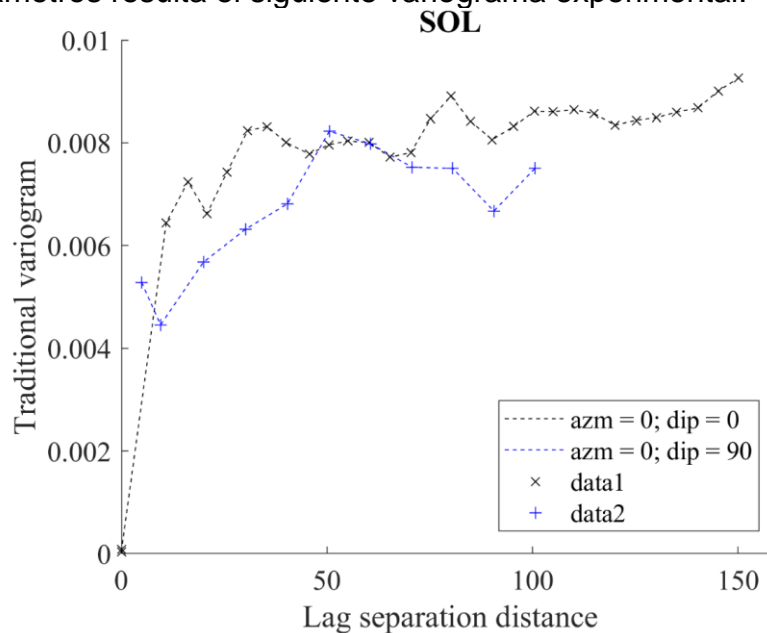


Figura 66 Variograma experimental solubilidad

Los variogramas obtenidos en ambas direcciones son bastante similares, lo que haría más conveniente realizar un variograma omnidireccional, no obstante, esto fue realizado y el resultado no fue óptimo (comparando las validaciones cruzadas de ambos resultados) por lo que se mantuvieron las dos direcciones propuestas que tienen una varianza bastante baja y se alcanza la meseta rápidamente.

5.3.1.2 Variograma modelado

Una vez obtenido el variograma experimental se modela utilizando un efecto pepa y cuatro estructuras anidadas que son dos esféricas y dos exponenciales. El modelo completo se define por la siguiente expresión:

$$\gamma_{sol} = 0.0001 \cdot pepa + 0.003 \cdot esf(12m, 10m) + 0.003 \cdot esf(35m, 16m) + 0.002 \cdot exp(196m, 500m) + 0.0001 \cdot exp(inf, 1500m)$$

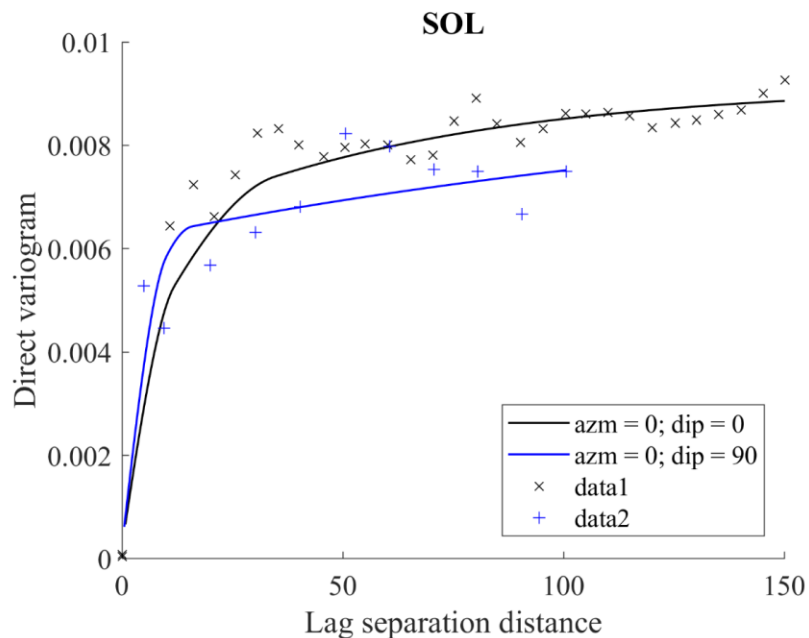


Figura 67 Variograma modelado solubilidad

5.3.2 Resultados estimación

Con el variograma modelado se realiza el kriging directo de la variable solubilidad, la discretización usada es puntual, la vecindad está dividida en octantes con 15 datos cada una para evitar la aparición de “artefactos”, las dimensiones de la vecindad son del tamaño del área a estimar, es decir, 400m x 400m x 100m y el tipo de kriging usado es

un kriging ordinario. Se mantiene el tamaño de bloques para las estimaciones puntuales que es de 2m x 2m x 5m.

El resultado de la estimación se muestra en la siguiente figura 68:

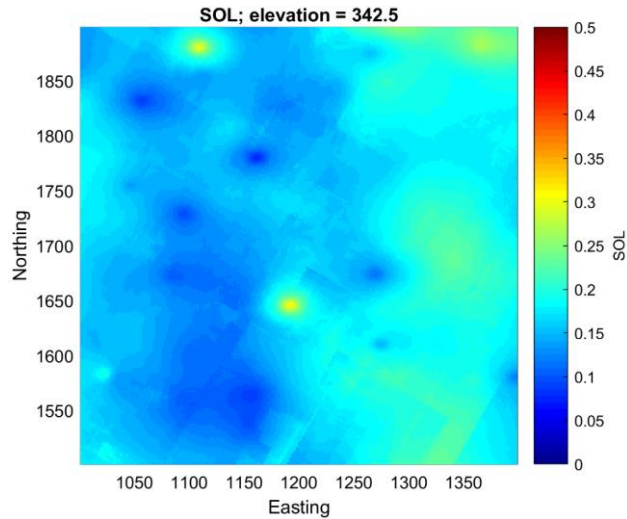


Figura 68 Estimación por kriging de la variable solubilidad en soporte puntual

El resultado está bastante suavizado como era de esperar y visualmente si se compara con el resultado de promediar las 65 realizaciones de la solubilidad son muy similares lo cual en primera instancia se puede interpretar como que este estimador genera un muy buen resultado para predecir esta variable. Se estudia estadísticamente el resultado de esta estimación en la sección de comparación de casos presentada más adelante.

5.3.3 Rebloqueo de resultados

Pese a que no es un procedimiento aditivo, se rebloquean los resultados de la solubilidad pues bajo ciertas condiciones como reducir el área donde realizar la estimación y que la varianza de las muestras sea muy baja, se puede obtener un estimador con un sesgo muy bajo o insesgado incluso. El tamaño escogido es el mismo que se ha usado a lo largo de este trabajo y son bloques de 10m x 10m x 10m. La figura 69 muestra el resultado obtenido.

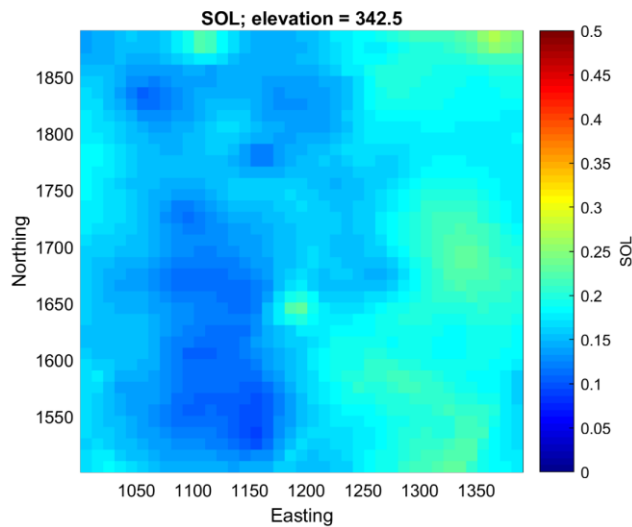


Figura 69 Estimación por kriging de la variable solubilidad en soporte de bloques

5.4. Estimación de cobre soluble y cobre total

En esta etapa, es realizar una estimación mediante co-kriging de las variables cobre soluble y cobre total. Es mejor un co-kriging frente a un kriging individual de cada variable, pues se toma en cuenta la información de ambas variables a la hora de hacer la estimación. Para realizar esto se realiza un co-kriging ordinario en soporte puntual primeramente y posterior a esto se puede rebloquear los resultados para obtener valores de la solubilidad en soporte de bloques.

5.4.1 Análisis variográfico

5.4.1.1 Variogramas experimentales

Anteriormente se vio que la variable cobre total no tenía direcciones principales de anisotropía en el plano horizontal, por lo tanto, se hará un variograma omnihorizontal y se agregará también la dirección vertical. Los parámetros de cálculo son resumidos a continuación:

Tabla 18 Parámetros de cálculo para variogramas experimentales

Dirección	Azimuth	Tolerancia az.	Dip	Tolerancia dip	Paso	Tolerancia paso	Número paso
Omnihorizontal	0.0	90.0	0.0	20.0	5.0	5.0	30
Vertical	0.0	90.0	90.0	20.0	5.0	5.0	10

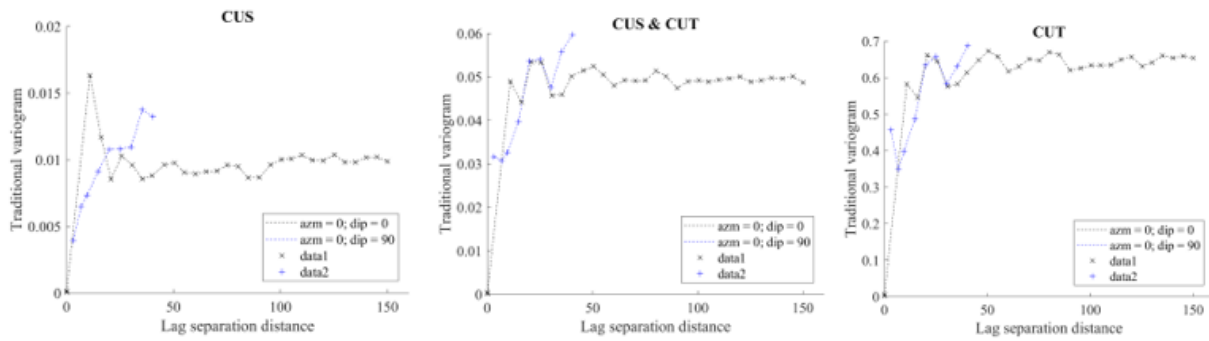


Figura 70 Variogramas experimentales directos y cruzado para cobre soluble y cobre total

Las direcciones escogidas alcanzan la meseta rápidamente en el caso del variograma cruzada entre CuS y CuT y también para el variograma directo de CuT, el comportamiento es un poco más errático para CuS lo que se ha visto a lo largo del desarrollo de este trabajo, pues en el primer caso también se daba el mismo fenómeno.

5.4.1.2 Variogramas modelados

Para modelar estos variogramas se utilizan cuatro estructuras anidadas (además del efecto pepita) siendo una esférica y tres exponenciales. El modelo completo queda definido por la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{CuT} & \gamma_{CuT-CuS} \\ \gamma_{CuT-CuS} & \gamma_{CuS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.003 \end{pmatrix} \cdot pepa + \begin{pmatrix} 0.008 & 0.050 \\ 0.050 & 0.496 \end{pmatrix} \cdot esf(15m, 12m) + \\ \begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0002 \\ -0.0002 & 0.1237 \end{pmatrix} \cdot exp(35m, 35m) + \begin{pmatrix} 0.001 & -0.002 \\ -0.002 & 0.026 \end{pmatrix} \cdot esf(200m, 120m) + \\ \begin{pmatrix} 0.004 & 0.014 \\ 0.014 & 0.055 \end{pmatrix} \cdot esf(\infty, 250m)$$

Con este modelo, los variogramas modelados se muestran en la figura 71.

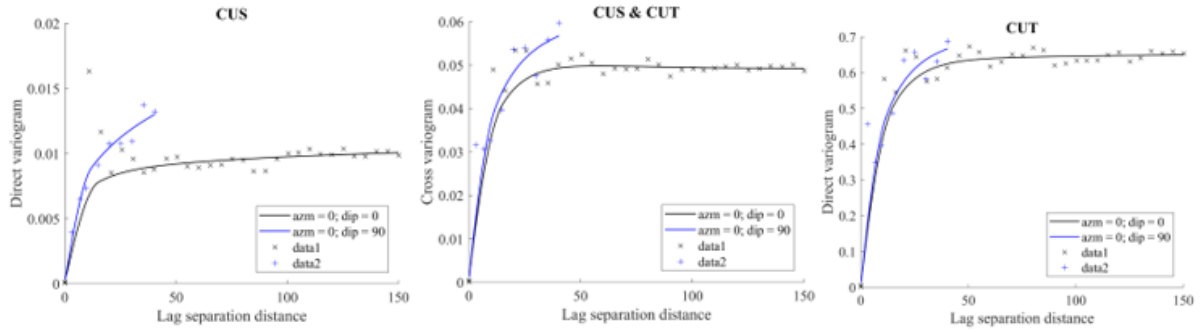


Figura 71 Variogramas directos y cruzados para cobre soluble y cobre total

5.4.2 Resultados estimación

Se realiza un co-kriging ordinario y uno de medias relacionadas de las variables cobre soluble y cobre total, la vecindad utilizada es de 400m x 400m x 110m; esta vecindad es de gran tamaño pues cuando se reducía el valor de alguna de las dimensiones, se intensificaba la aparición de artefactos y la validación cruzada no era óptima. Se calcula con octantes donde cada uno de ellos tiene 15 datos como máximo. Con estos parámetros de cálculo se obtiene el siguiente resultado de estimación:

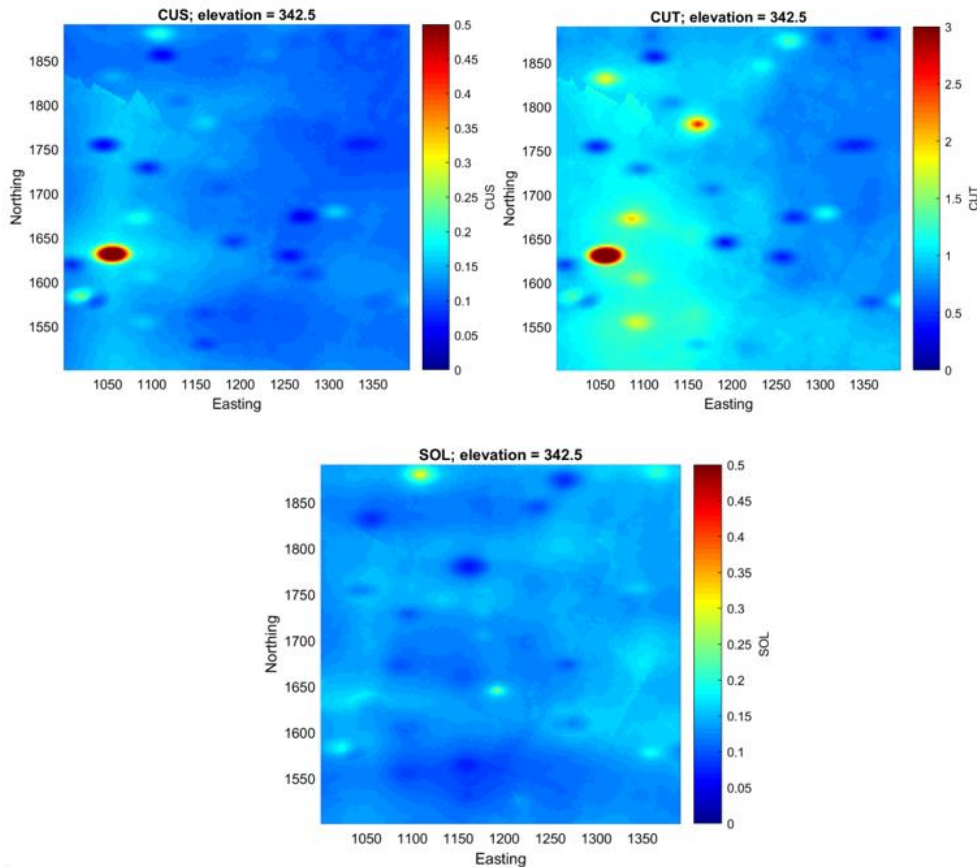


Figura 72 estimación por co-kriging de cobre soluble (izquierda), cobre total (derecha) y cociente de estimaciones (centro) co-kriging ordinario

Para este caso, se aprecia que los resultados están muy suavizados si se compara con la co-simulación y con la estimación directa de solubilidad, sin embargo, para tener una apreciación más concreta de los resultados se estudiarán estadísticamente en el siguiente capítulo. A continuación, se adjunta el resultado obtenido para el co-kriging de medias relacionadas. Esta relación la describe la expresión $m_{CuS} = 0.14 \cdot m_{CuT}$, ésta se determina a partir de las medias experimentales de CuS y CuT.

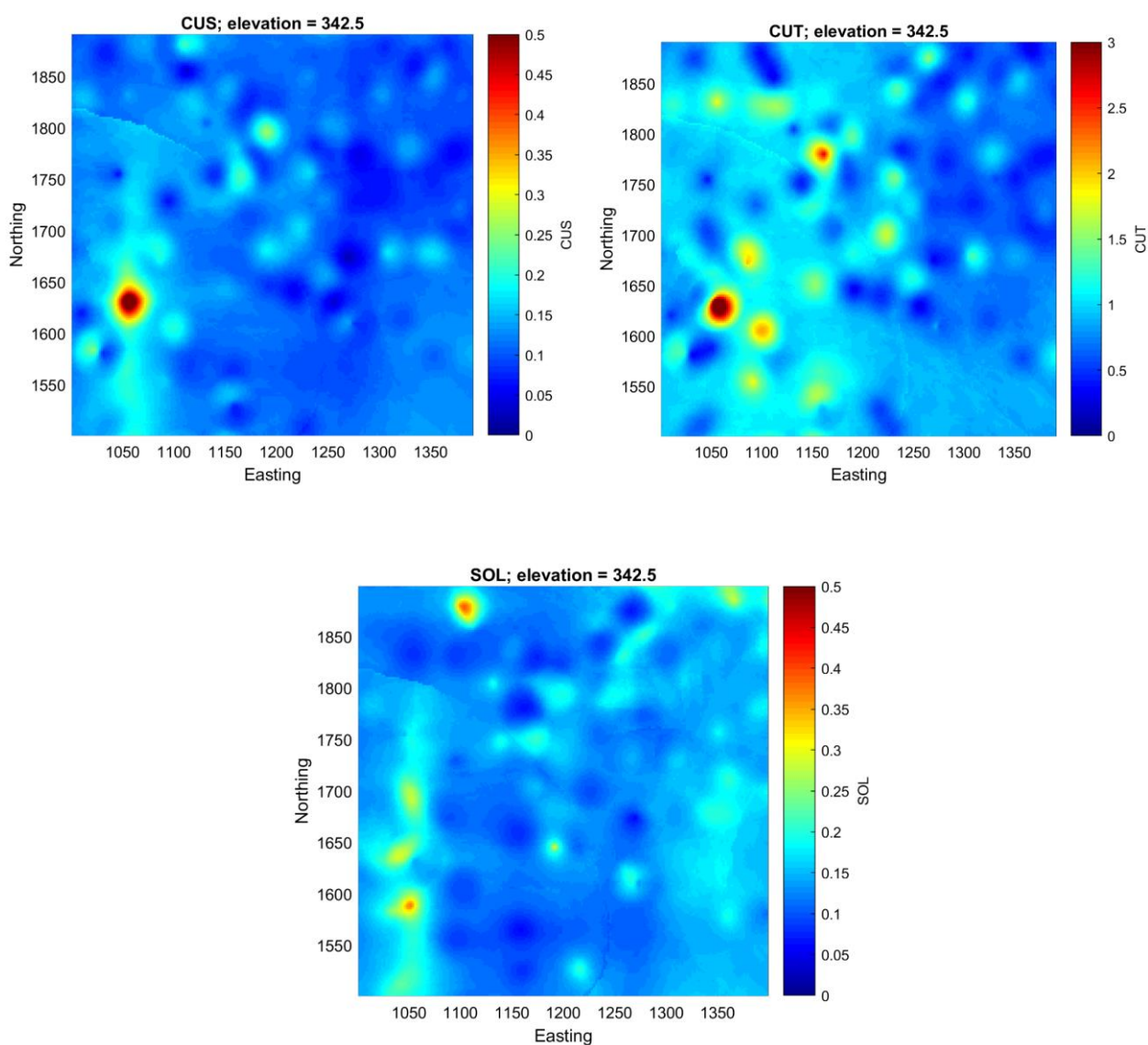


Figura 73 estimación por co-kriging de cobre soluble (izquierda), cobre total (derecha) y cociente de estimaciones (centro) co-kriging de medias relacionadas

5.4.3 Rebloqueo de resultados

Es necesario tener los resultados tanto en soporte puntual como de bloques para poder realizar la comparación entre los estimadores generados. Se rebloquea a unidades de 10m x 10m x 10m al igual que en los casos anteriores.

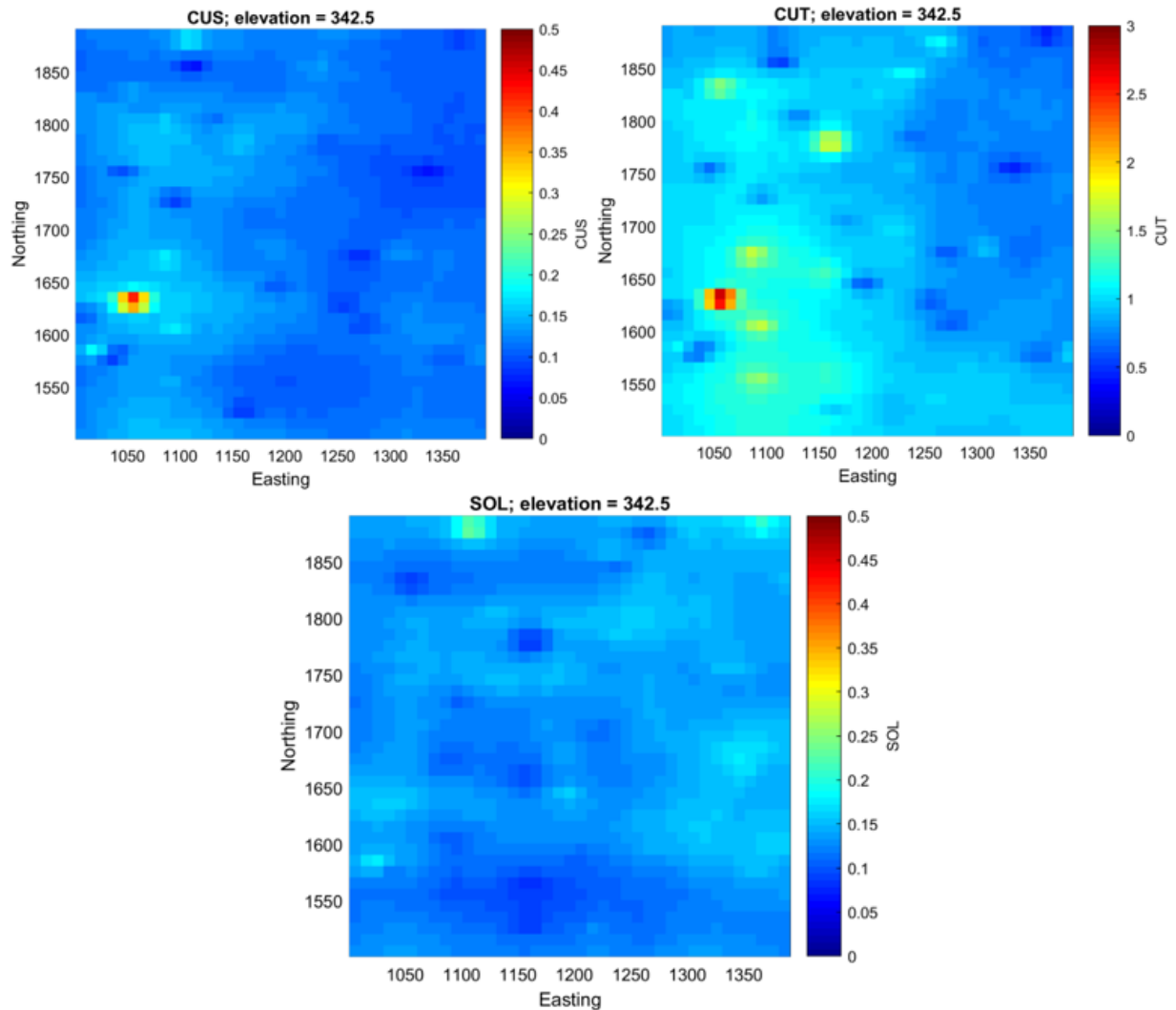


Figura 74 Estimación de cobre soluble (izquierda) solubilidad (centro) y cobre total (derecha) en soporte de bloques co-kriging ordinario

Se adjunta también el rebloqueo de la estimación obtenida por co-kriging de medias relacionadas:

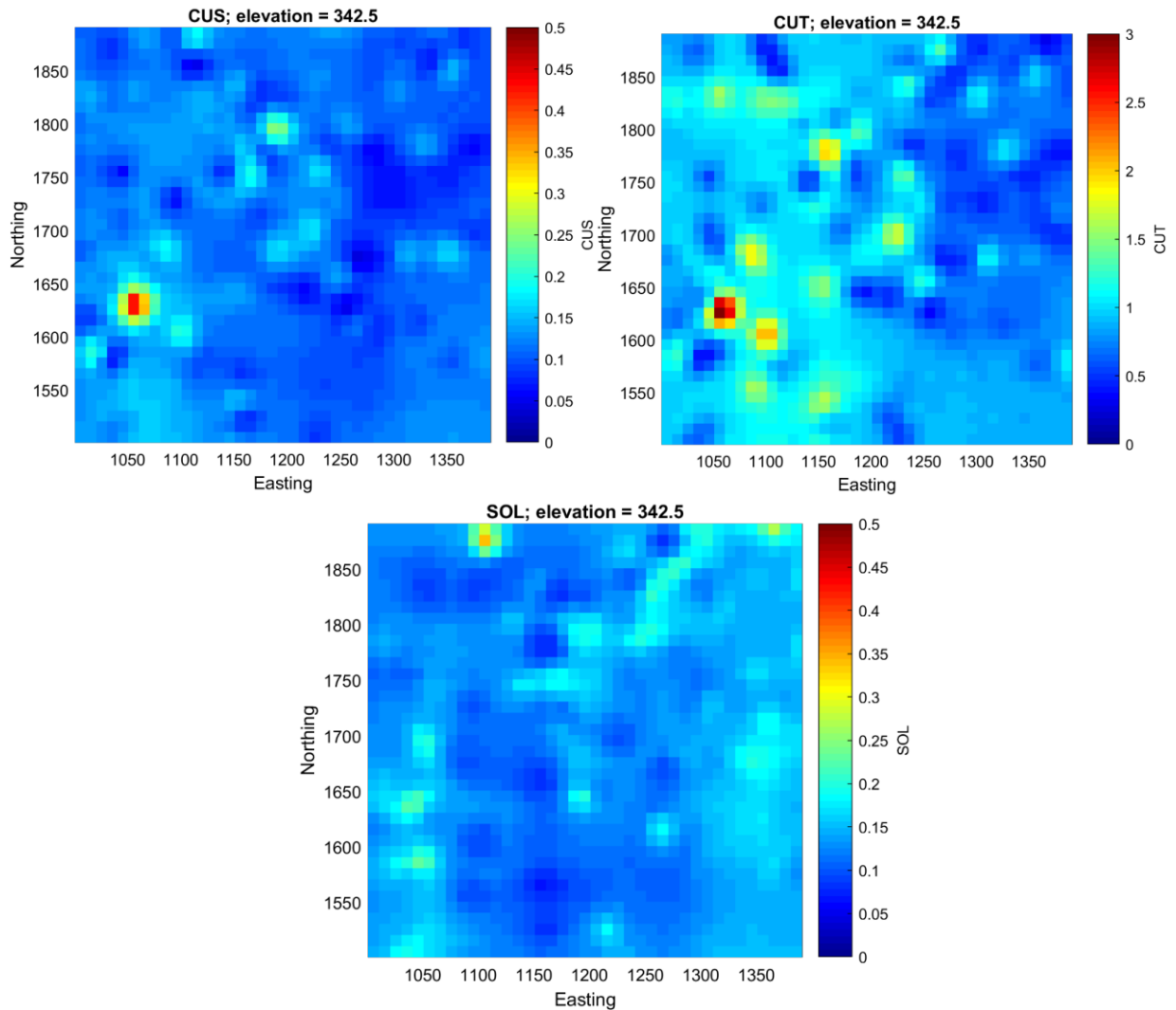


Figura 75 Estimación de cobre soluble (izquierda) solubilidad (centro) y cobre total (derecha) en soporte de bloques co-kriging de medias relacionadas

En este caso se observa que el resultado obtenido por co-kriging ordinario difiere considerablemente del resultado por co-kriging de medias relacionadas, esto se puede deber a que el primero está realizado con octantes con 15 datos en cada uno de ellos, mientras que el segundo consideró una vecindad sin división en sectores angulares con 115 datos para ver este efecto en las estimaciones.

5.5. Comparación de resultados segundo caso

Se cuenta con resultados en soporte puntual y en soporte de bloques por lo que se pueden comparar los estimadores obtenidos por estimación directa de solubilidad, co-estimación de cobre soluble y cobre total y realizar cociente entre estimaciones. Acá se busca verificar en qué casos se obtiene un resultado insesgado y en cuales sí tiene un efecto considerable un método u otro.

5.5.1 Comparación en soporte puntual

Para hacer la comparación en soporte puntual se tienen dos opciones: se cuenta con los resultados de la validación cruzada de las estimaciones donde se puede realizar un estudio del insesgo condicional pues se tienen valores reales y estimados, también se puede utilizar una de las realizaciones de la co-simulación en soporte puntual que se puede utilizar como la realidad para contrastar de nuevo las estimaciones versus los valores reales. Se opta por utilizar los resultados de la validación, pero ambos métodos son válidos por lo que se podría realizar de la otra manera igualmente.

Lo primero que se puede realizar es el cálculo de las estadísticas básicas de ambos estimadores (estimación de solubilidad directa y cociente de co-kriging de cobre soluble y cobre total) y también calcular las estadísticas para las mediciones con las que se cuenta y ver el error cuadrático promedio que tienen los resultados.

Tabla 19 Estadísticas básicas estimadores generados en soporte puntual

	Solubilidad [%]			
	Datos (muestras)	Kriging Solubilidad Directa	Cociente Co- kriging ordinario	Cociente Co-kriging de medias relacionadas
Promedio	0.164	0.163	0.139	0.147
Máximo	0.946	0.671	0.829	1.800
Mínimo	0.001	0.051	-2.571	-0.094
Varianza	0.009	0.002	0.003	0.004
Error cuadrático promedio	-	0.008	0.010	0.009

Para este soporte se observa que la estimación directa de la solubilidad está insesgada pues la media de las realizaciones es prácticamente la misma que la de los datos originales y el error cuadrático medio es muy bajo, sin embargo, es de particular interés que el cociente de cobre soluble sobre cobre total (tanto en co-kriging ordinario como de medias relacionadas) está muy suavizado teniendo una diferencia considerable con las estadísticas de las muestras por lo que este resultado sí posee un sesgo global asociado y también es importante destacar que en esta estimación se generaron tres valores negativos para el cobre total.

Es importante verificar el insesgo condicional de los datos y es esperable que, para el caso del cociente entre cobre soluble y cobre total, la regresión condicional no se superponga con la primera bisectriz pues como se observa en la tabla anterior, la media difiere de la media de los datos. El primer scatter plot que se realiza es para el caso de la estimación directa de la solubilidad y también se realiza el scatter correspondiente al

cociente de las estimaciones de cobre soluble y cobre total por los dos métodos mencionados.

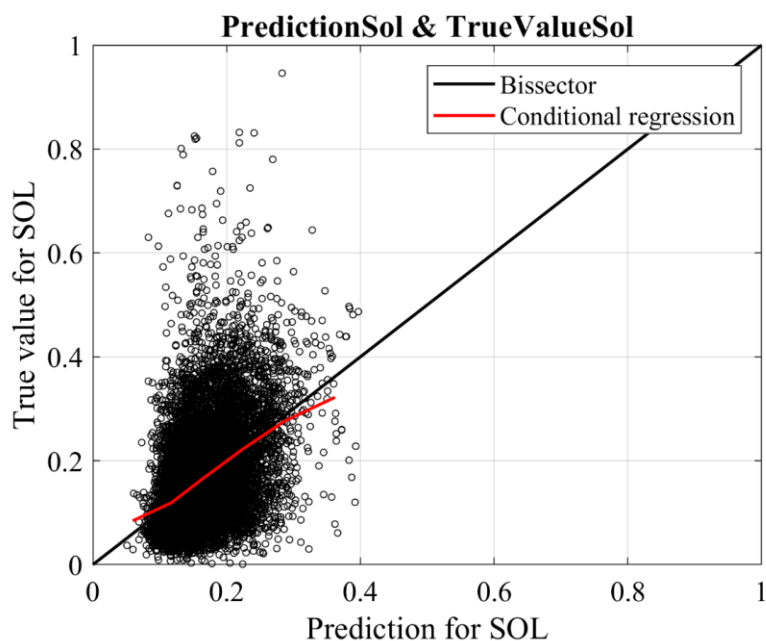


Figura 76 Scatter plot de realidad versus estimación (kriging directo de solubilidad) en soporte puntual

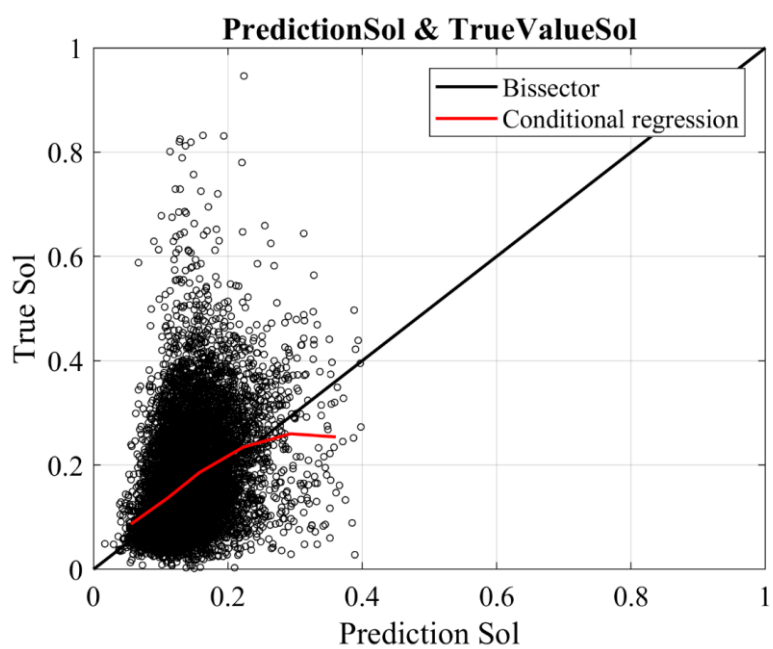


Figura 77 Scatter plot de realidad versus estimación (cociente de cobre soluble sobre cobre total) en soporte puntual co-kriging ordinario

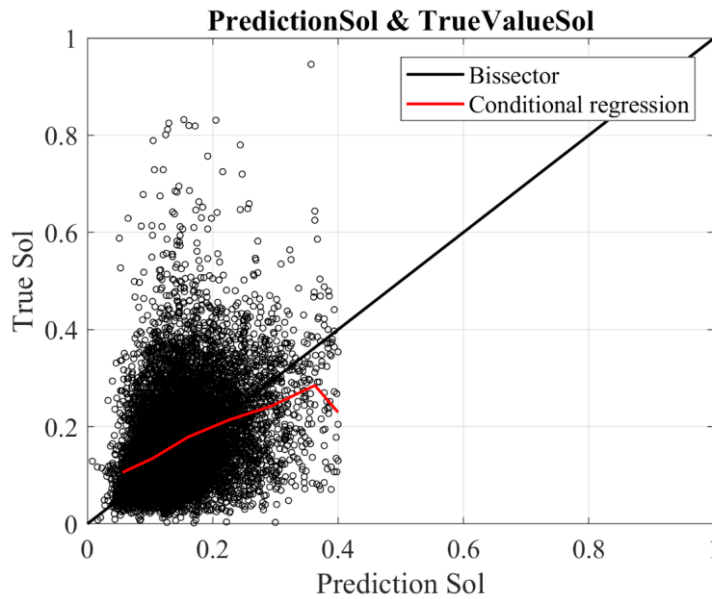


Figura 78 Scatter plot de realidad versus estimación (cociente de cobre soluble sobre cobre total) en soporte puntual co-kriging de medias relacionadas

La primera estimación efectivamente no posee un sesgo condicional asociado pues su regresión condicional coincide con la primera bisectriz, no obstante, y como mostró el estudio estadístico de la estimación del cociente de estimaciones el resultado está subestimado y tiene un sesgo condicional asociado en el rango de predicciones entre 0.3-0.4 donde el valor real es menor al valor predicho y la concentración de valores que presentan este comportamiento es considerable a diferencia de otros casos donde unos pocos datos desviaban la regresión desde la bisectriz siendo esto menos relevante. Se aprecia también que el co-kriging de medias relacionadas presenta sesgo en el rango de predicciones 0-0.1% donde el valor real es mayor al predicho.

Se presentan también, las curvas tonelaje ley de los resultados de la co-simulación y la co-estimación, la estimación directa de la solubilidad como se menciona en el caso 1 no permite obtener esta curva pues sólo se tienen valores de esta variable.

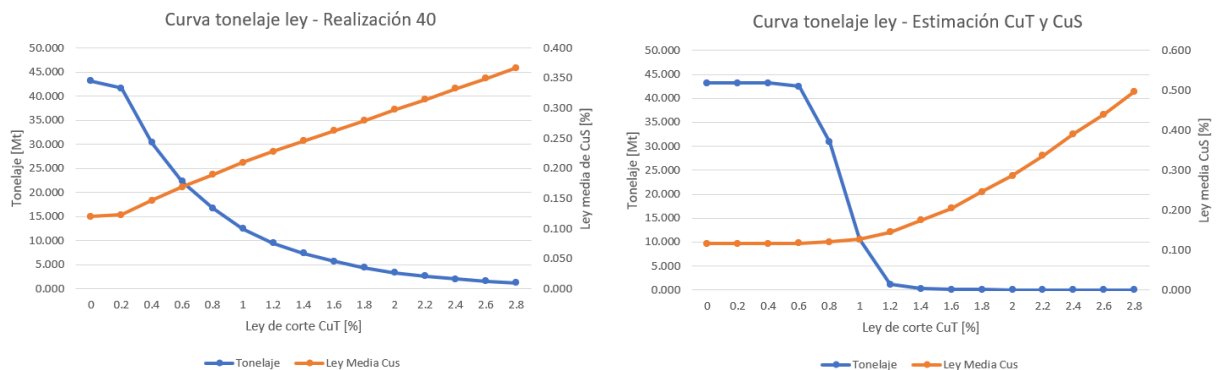


Figura 79 Curvas tonelaje ley co-simulación cobre total y solubilidad y co-estimación cobre soluble y cobre total en soporte puntual

En este caso se observan diferencias más significativas en los resultados, particularmente en el tonelaje pues tomando puntualmente el valor de ley de corte 1.2% se aprecia que en la co-simulación se tiene un tonelaje asociado de alrededor de 10 Mt, mientras que para la co-estimación se tienen aproximadamente 2 Mt. En cuanto a la ley media los valores extremos son prácticamente los mismos, pero a medida que crece la ley de corte se tiene un crecimiento más rápido de la ley media de cobre soluble en la co-estimación, pero con un tonelaje asociado muy bajo.

Se calcula también la solubilidad media obtenida para valores de corte de cobre total.

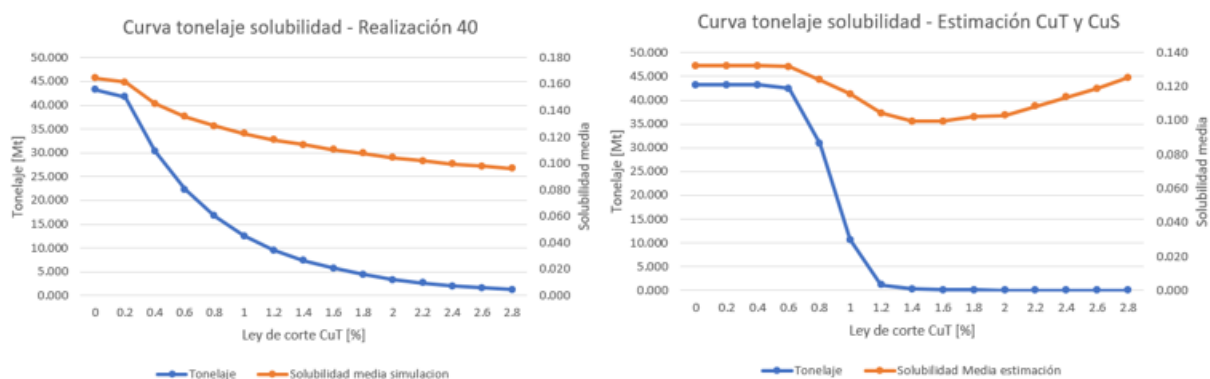


Figura 80 Solubilidad media obtenida por co-simulación y co-estimación según ley de corte de CuT en soporte puntual

Estas curvas difieren considerablemente tanto en las curvas de tonelaje como en las de solubilidad media, pues se aprecia que parten en valores con una diferencia amplia y terminan en valores muy disímiles, acá se puede confirmar que los resultados obtenidos por co-simulación y por co-estimación difieren en gran medida.

5.5.2 Comparación en soporte de bloques

Con los resultados de ambos estimadores en soporte de bloques y utilizando cualquiera de las realizaciones de la co-simulación como la realidad del yacimiento se pueden comparar los resultados en este soporte. En primer lugar, se calculan las estadísticas básicas de cada uno de los estimadores y también el error cuadrático medio cometido.

Tabla 20 Estadísticas básicas estimadores generados en soporte de bloques

	Solubilidad [%]				
	Realización 40	Kriging Solubilidad Directa	Cociente Co-kriging Ordinario	Media 65 realizaciones	Cociente Co-kriging de medias relacionadas
Promedio	0.157	0.165	0.132	0.156	0.137
Máximo	0.800	0.328	0.287	0.326	0.370
Mínimo	0.015	0.077	0.046	0.046	0.028
Varianza	0.005	0.001	0.000	0.001	0.001
Error cuadrático promedio	-	0.005	0.006	0.004	0.006

En este soporte también hay sesgo global en las estimaciones pues para la realización utilizada que tiene una media de 0.157 ninguno de los estimadores generados se acerca a este valor y más interesante aún, el cociente de cobre soluble y cobre total se aleja considerablemente de este valor teniendo diferencias de 0.025 o equivalentemente diferencias de 2.5% en los valores de solubilidad. El estimador que representa la media de las 65 realizaciones es insesgado y diferencia apenas en 0.001 con el valor real de la solubilidad.

Adicionalmente, se generan los scatter plots para verificar la condición de insesgo condicional de los resultados obtenidos, se agrega el estimador obtenido al promediar las 65 realizaciones de solubilidad de la co-simulación al estudio.

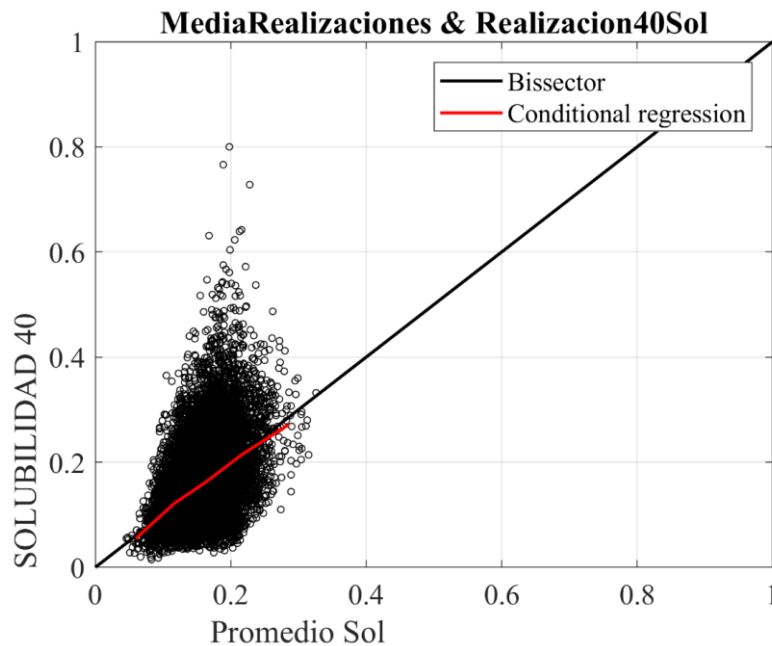


Figura 81 Scatter plot realidad versus estimación (media 65 realizaciones) en soporte de bloques

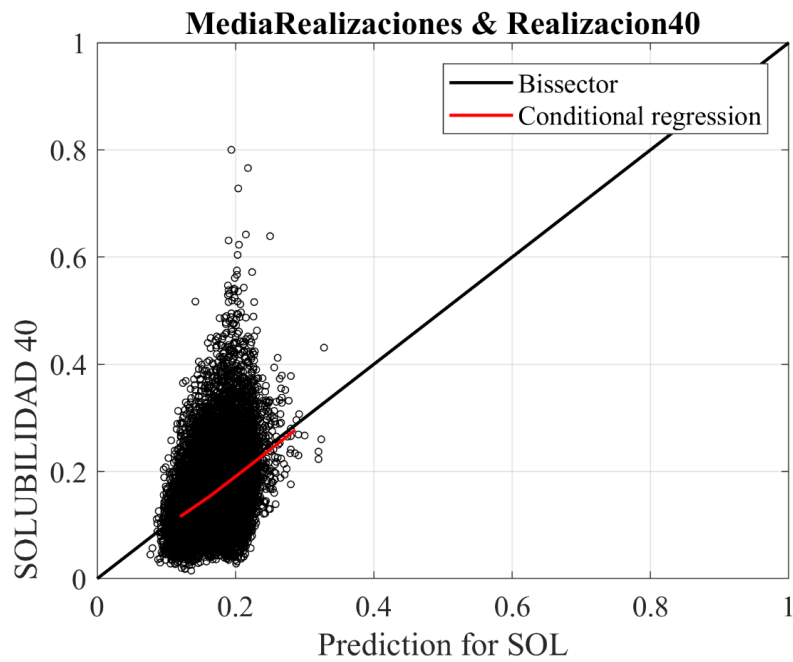


Figura 82 Scatter plot realidad versus estimación (kriging directo de solubilidad) en soporte de bloques

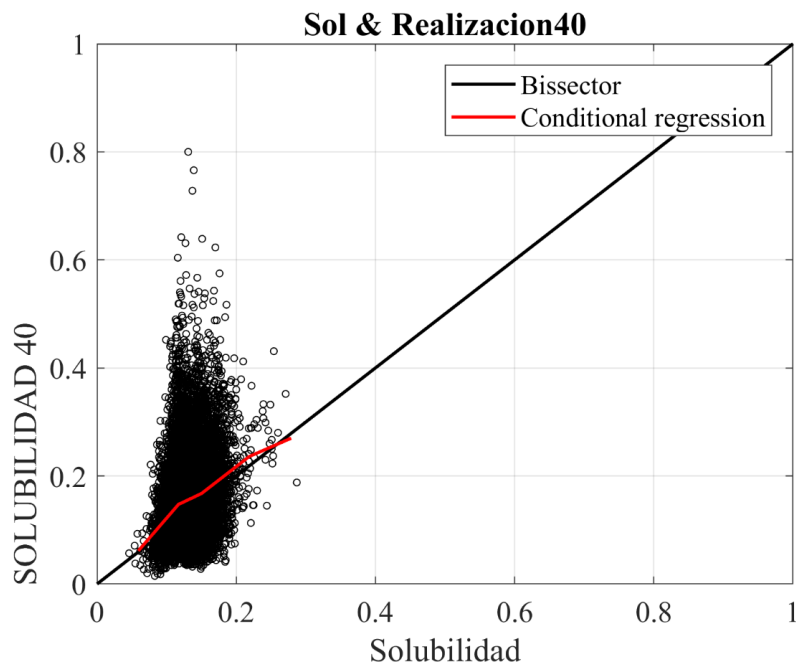


Figura 83 Scatter plot de realidad versus estimación (cociente de cobre soluble sobre cobre total) en soporte de bloques co-kriging ordinario

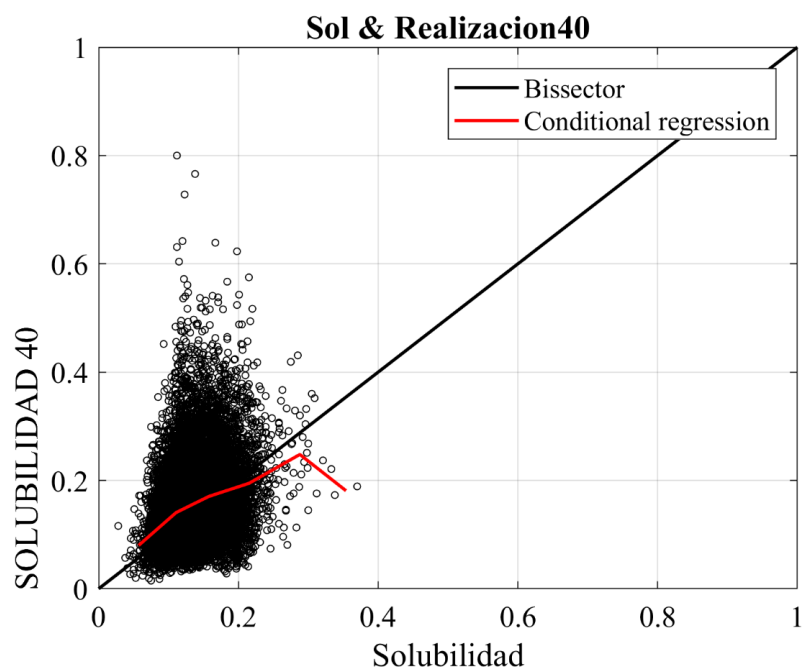


Figura 84 Scatter plot de realidad versus estimación (cociente de cobre soluble sobre cobre total) en soporte de bloques co-kriging de medias relacionadas

El estimador que se obtiene de promediar las 65 realizaciones de solubilidad presenta una regresión condicional que coincide con la regresión lineal lo que implica que no tiene sesgo condicional y el resultado es muy bueno pues como se vio anteriormente las medias de las realizaciones también eran prácticamente iguales. La estimación directa de la solubilidad rebloqueada también tiene una regresión que se superpone con la primera bisectriz lo que se interpreta como que este estimador no posee sesgo condicional, pero como se observó anteriormente las estadísticas están subestimadas con respecto a la realidad. Finalmente, la regresión condicional del estimador obtenido por el cociente de las estimaciones no presenta sesgo condicional si la estimación se realiza por co-kriging ordinario tradicional, mientras que sí tiene sesgo condicional cuando se utiliza como tipo de co-kriging el de medias relacionadas. Al igual que con la estimación directa de la solubilidad, la estimación por cociente de CuS y CuT subestima la solubilidad si se compara con la realidad.

Se calculan también las curvas tonelajes ley en soporte de bloques de los resultados para la co-simulación y la co-estimación.

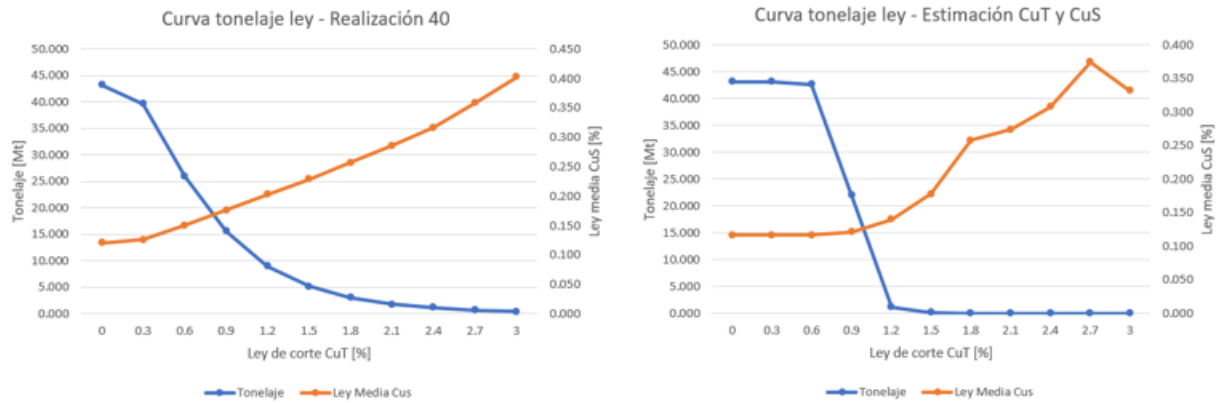


Figura 85 Curvas tonelaje ley co-simulación cobre total y solubilidad y co-estimación cobre soluble y cobre total en soporte de bloques

Para el caso de la co-simulación se ve una mayor continuidad tanto en tonelaje como en ley media de cobre soluble, mientras que las fluctuaciones son mayores en el caso de la co-estimación. Hay diferencias considerables de tonelajes puntualmente en el valor de corte 1.2% lo que refleja que hay diferencias importantes en los resultados entre cada uno de los métodos presentados.

Se calcula también la solubilidad media obtenida para valores de corte de cobre total.

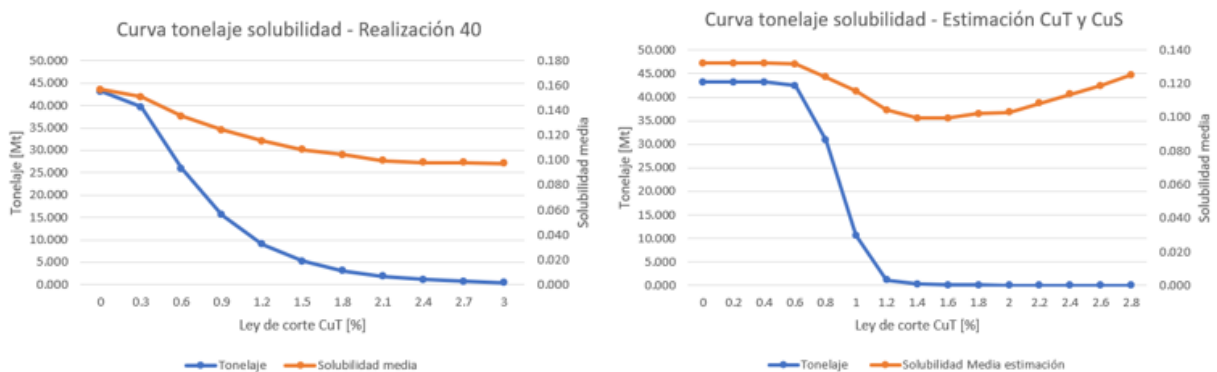


Figura 86 Solubilidad media obtenida por co-simulación y co-estimación según ley de corte de CuT en soporte de bloques

Se mantienen las diferencias del soporte puntual, tanto en las curvas de tonelaje como en las de cobre soluble, pese a que estas últimas curvas se ven similares, si se observan los valores con mayor detención, es notorio que los valores entre los que oscilan ambas curvas son distintos. Para este tipo de caso estudiado, el cociente entre cobre soluble y cobre total no presenta una alternativa para estimar la solubilidad, pues si se compara con la realidad hay diferencias considerables.

6. CONCLUSIONES

Del estudio realizado se pueden mencionar algunas conclusiones y recomendaciones:

Realizar el cociente entre las estimaciones de cobre soluble y cobre total tiene dos principales ventajas frente a una estimación directa de la variable solubilidad:

- En primer lugar, no hay problemas para cambiar soporte, pues ambas variables (CuS y CuT) son aditivas lo que permite trabajar sin problemas de tipo matemático que sí se generan si se cambia el soporte de valores de solubilidad pues esta variable no es aditiva.
- Al tener estimaciones de cobre soluble, cobre total y mediante el cociente entre estos valores se tiene una estimación de la solubilidad lo que en resumen es contar con tres estimadores coherentes entre sí por la relación matemática existe entre estas variables y que están insesgados (bajo condiciones que se mencionan a continuación) es claramente una ventaja frente a contar solamente con una variable que se tiene al hacer la estimación directa de la solubilidad.

El rango de aplicación de este método está sujeto a la correlación que hay entre el cociente de las estimaciones (solubilidad) y la variable correspondiente al denominador (CuT) pues como propuso Sèguret y Emery (2019) cuando estas variables son independientes o con una correlación muy baja, se puede obtener un cociente de estimaciones insesgado. Esto se comprueba con los casos de estudio, pues en el caso uno la solubilidad es independiente del cobre total ($R=-0.15$), mientras que en el segundo caso de estudio la correlación es más alta ($R=-0.35$).

Es importante incluir el estudio del sesgo condicional cuando se quieren comparar estimadores, pues puede que se tengan dos estimadores que tengan las mismas medias globales, sin embargo, uno de ellos estar sesgado condicionalmente lo cual repercute considerablemente en las etapas posteriores de una operación, por ejemplo. Actualmente, hay procedimientos que no son aditivos y por simpleza se utilizan, sin embargo, como se expuso a lo largo de este trabajo el sesgo generado puede tener desde un pequeño a un gran impacto en los resultados de una planta de flotación si se está estimando la recuperación metalúrgica o si se quiere estimar la solubilidad en un proyecto que considere minerales oxidados.

El kriging o co-kriging de medias relacionadas proporciona una buena alternativa a la hora de realizar una estimación, pues como se vio en los resultados para el caso 1 que es el que mostró una estimación insesgada realizando el cociente entre las estimaciones y ambos métodos (ordinario y medias relacionadas) fueron óptimos.

En el contexto del negocio minero es beneficioso utilizar el método propuesto, pues generalmente se usan procedimientos no aditivos para estimar variables geometalúrgicas y los resultados están sesgados, este es el caso de la solubilidad y la recuperación metalúrgica, sin embargo, el contar con un estimador que considere la aditividad y el cambio de soporte agregar valor al negocio, pues se tiene mayor coherencia en la evaluación de los recursos. Por todo lo mencionado es ventajoso considerar esta alternativa para estimar variables definidas por cocientes.

Se recomienda evaluar el impacto que tendría en una evaluación económica de algún proyecto u operación incluyendo una estimación de variables geometalúrgicas mediante la metodología propuesta y de esta manera poder comparar económicamente el eventual beneficio de no tener sesgo en las estimaciones.

Para trabajos futuros que aborden el tema de estimación de variables geometalúrgicas definidas por cocientes, se recomienda evaluar una posible optimización de los parámetros utilizados en el trabajo realizado y ver el efecto que tendría en las estimaciones, puntualmente en las que se vio la presencia de artefactos.

Realizar un tercer caso de estudio con otra base de datos que cumpla con la independencia entre denominador y cociente, pero que incluya información geológica, aumentaría la precisión de los resultados, pues como se observó en el caso de estudio 1, se contaba solamente con los valores de las tres variables en estudio, pero no se tenía información de variables geológicas como alteración, litología, etc. El caso 2 sí contaba con estas variables lo que permitió hacer el proceso de definición de unidades geológicas (UG's).

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Emery X., Carrasco P., Ortiz J., 2004. Modelamiento geoestadístico de la razón de solubilidad en un yacimiento de oxidados de cobre. MININ 2004, Santiago, Chile.
- [2] Carrasco P., Chilès J., Séguret S., 2008. Additivity, metallurgical recovery, and grade. VIII International Geostatistics Congress, Santiago, Chile.
- [3] Séguret S., Emery X., 2019. Geoestadística de yacimientos de cobre chilenos. Paris, Francia, p. 140-142.
- [4] Emery X., 2016. Geoestadística. Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- [5] Deutsch C., Rossi M., 2014. Mineral Resource Estimation. Berlin, Alemania: Springer, p. 51-65.
- [6] Emery X., 2015. Manual de uso XLib. Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- [7] Dominy S., 2013. Geomet 2013. The second ausimm international geometallurgy conference, Brisbane, Australia, p. 7-15.
- [8] Emery X., 2012. Cokriging random fields with means related by known linear combinations. Computers and Geoscience, 38, p. 136-144.
- [9] Sagar D., Cheng Q., Agterberg F., 2018. Handbook of mathematical geosciences. Cham, Switzerland, pp. 911.
- [10] Glen H., 2018. Back to the future. Geometallurgy conference 2018, Cape town, South Africa, pp. 273.
- [11] Chilès J.P., Delfiner, P., 2012. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. W Wiley, New York, United States, pp. 734.
- [12] Advanced Laboratory for Geoestatistical Supercomputing. (2020). ANDES (Versión 1.5.3). Windows. Santiago.

8. ANEXOS

A. Definición de unidades de estimación segundo caso de estudio

El segundo caso de estudio además de las mediciones de cobre soluble y cobre total cuentan con información de atributos geológicos que son la alteración, litología y mineralización. Las categorías de estos atributos geológicos se encuentran codificados con números por lo que se mantendrá este formato para presentar todo lo que a estudio estadístico y herramientas gráficas se refiere. Se tiene 6 tipos de alteración, 6 tipos de litologías y 8 tipos de mineralización.

Se realiza el cálculo de qq-plots para ver la distribución de estas variables geológicas y eventualmente, agrupar en subunidades si comparten dicha distribución.

Alteración:

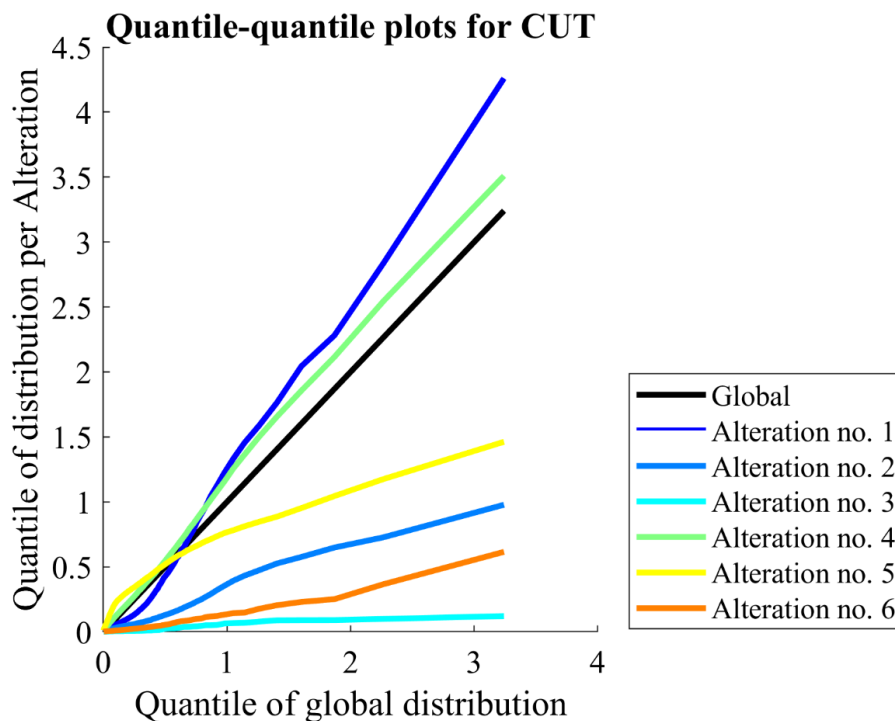


Figura 87 qq-plot alteración

Litología:

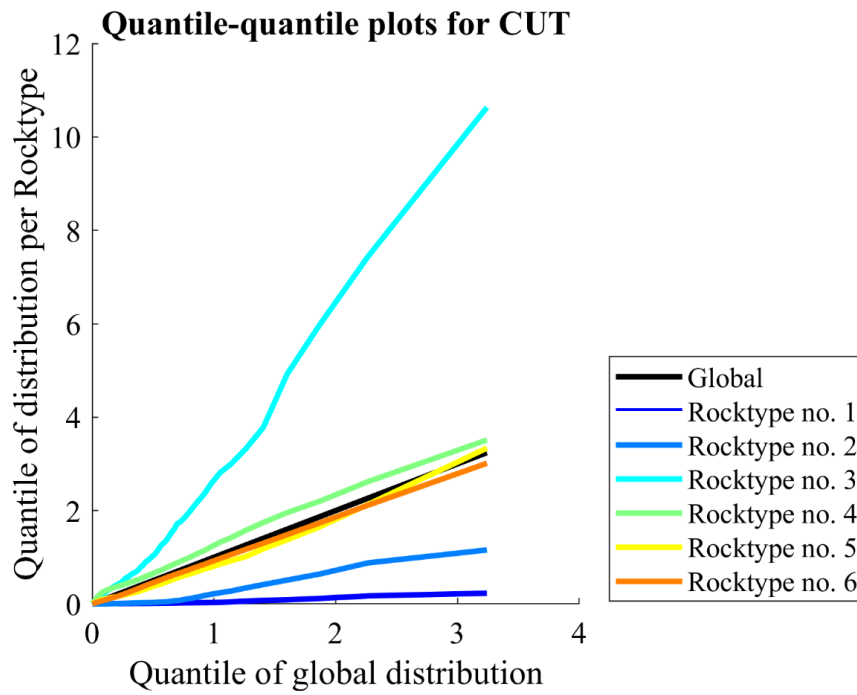


Figura 88 qq-plot litología

Mineralización:

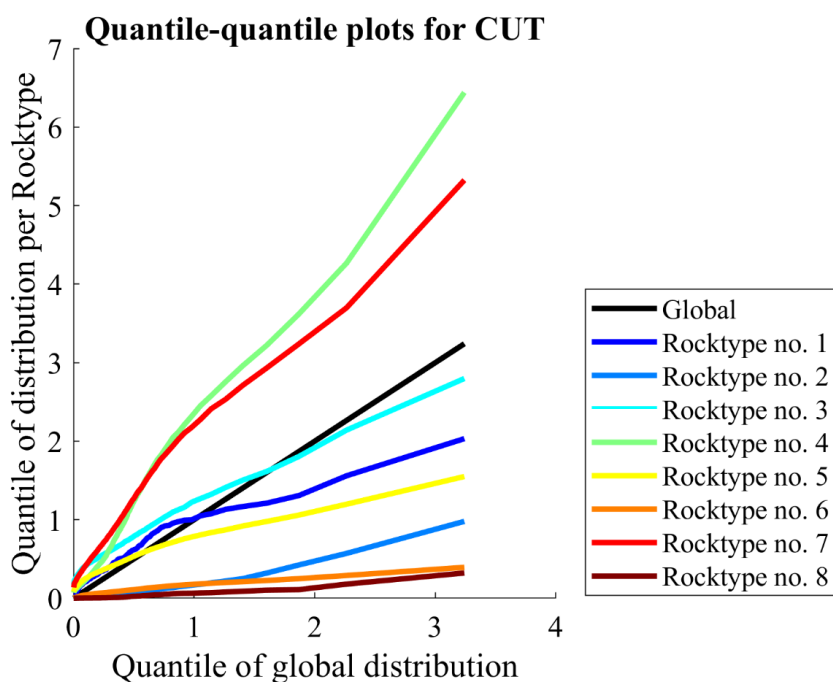


Figura 89 qq-plot mineralización

Posterior a realizar el cálculo de los qq-plots se toma la decisión de eliminar 1 tipo de alteración, 1 tipo de mineralización y 1 tipo de litología. Para el caso de la alteración se elimina la número 3 porque poseía un número muy bajo de datos y su representatividad estadística era muy baja. Para la mineralización y la litología se eliminaron por los mismos motivos el tipo 8 y 1 respectivamente.

Una vez removidos los atributos geológicos que tenían poco peso estadístico se procede a agrupar las variables que comparten distribuciones. La siguiente tabla muestra la agrupación realizada.

Tabla 21 Agrupamiento de atributos geológicos

ALTERACIÓN	CLASIFICACIÓN
1	Eliminado
2	1
3	2
4	3
5	3
6	3
LITOLÓGÍA	CLASIFICACIÓN
1	1
2	2
3	Eliminado
4	1
5	1
6	2
MINERALIZACIÓN	CLASIFICACIÓN
1	1
2	2

3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	Eliminado

Como se observa en la tabla 21, la alteración quedó finalmente constituida por tres tipos, la litología por dos y la mineralización que se determinó que es la variable dominante se dejó sin agrupar.

Lo que se hace posterior es hacer todas las combinaciones posibles entre los atributos geológicos para definir las unidades de estimación. La tabla 22 resume el procedimiento.

Tabla 22 Definición unidades de estimación

Unidad de Estimación	Número de datos	Mineralización	Litología	Alteración	UE Final
0	38,280	1	1+3	1	0
1	284	1	1+3	1	1
2	15,775	2	1+2+3	1+2	2
3	3,799	3	2+3	1+2	3
4	9,195	4	1+2+3	1+2	4
5	8	5	1	1	5
6	14,339	5	2	1	6
7	270	5	2	2	7
8	24,869	5	3	1	8
9	700	5	3	2	9
10	1184	6	2	1	10
11	60	6	2	2	11
12	17,088	6	3	1	12
13	4,229	6	3	2	13
14	3869	7	2	1+2	14
15	15,038	7	3	1+2	15

En la tabla 22 se muestran las posibles combinaciones entre los atributos geológicos y la cantidad de datos presentes en cada una de estas combinaciones. Hay algunas UE's que tienen un muy bajo número de datos por lo que se combinan con la que espacialmente comparten espacio. Resultaron 10 unidades de estimación y del análisis de las derivas de cada unidad definida, se observa que la que presenta el comportamiento más estacionario es la unidad 5.