



Sobre Polaridades Ortogonales y Unitarias del Plano Proyectivo de Figueroa

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con Mención en Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Harold Cristóbal Ojeda Gajardo

Octubre 2020

Director de Tesis: **Dr. Rolando Pomareda Rodríguez**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Harold Cristóbal Ojeda Gajardo

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 15 de enero de 2021.

Director de Tesis

Dr. Rolando Pomareda Rodríguez

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dra. Alicia Labra Jeldres

Dr. Oscar Vega Abarca

Defender la alegría como un principio . . .
—Mario Benedetti

Biografía



Nací el 06 de septiembre de 1990 en Santiago, Chile. Hijo de Ivonne Gajardo Ruiz y Erwin Ojeda Gómez, los cuales me inculcaron el valor del estudio. Mi educación básica la realicé en el Colegio Manuel José Irarrázaval y mi educación media en la Escuela Industrial San Vicente Paúl. Aquí fue donde adquirí el gusto por las matemáticas y el ajedrez. En el año 2009 ingresé a estudiar Pedagogía en Educación Media en Matemáticas y Física en la Universidad de Chile, titulándome como profesor el año 2014. Durante ese período me di cuenta que quería estudiar matemáticas. Así, terminé ingresando al Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, culminando con el sentimiento de seguir contribuyendo en esta área (ojalá).

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi tutor de tesis Rolando Pomareda Rodríguez por acompañarme en este proceso a pesar de todos los inconvenientes. Es una gran persona y un buen profesor, aún tengo mucho que aprender de él. Agradecer también a la profesora Anita Rojas Rodríguez por ayudar y guiar mi ingreso al magíster, al profesor Yves Martin González por ayudarme en la última parte de este proceso, al profesor Antonio Behn Von Schmieden por ayudarme al inicio de mi proceso autodidacta en SAGE y al profesor Oscar Vega Abarca por darme el tiempo de resolver mis consultas.

Agradezco también a mis grandes amigas y amigos que me han apoyado en el transcurso de mis estudios de pregrado, postgrado y la vida. A mis amigas y amigos de Exactas, Joel, Sabina, Sebastián, Eleazar y Daniela; a mis amigos y amiga de postgrado, Alejandro, Eugenio, Fernando, Iván y Lya; y a mis amigos de la casa, Gonzalo, Roberto y Angelo; que siempre han estado presente en los momentos difíciles y también en los momentos alegres.

También agradecer a mi familia materna, paterna y de mi polola, por preocuparse de mí y apoyarme siempre.

Por sobre todo quiero agradecer a mi kernel familiar. A mi padre, que sé que me acompañó en todo momento. Quiero que sepa que fue el mejor papá que pude haber tenido (te extraño). A mi madre, que a pesar de los inconvenientes supo sacarnos adelante. Quiero que sepa que es una mamá a toda máquina y que es la mejor (obvio). A mi hermano, por aguantarme y mimarme en todo momento. No es sólo un buen hermano sino que también una bonita persona (no sé cómo me tiene tanta paciencia). A Lady Esquivel Rojas (mi compañera), por apoyarme y alentarme en cada momento. Sin ti no hubiera sido lo mismo este camino. Y a Evaristo Nicanor (mi perrito), por alegrarme los días. Este trabajo está dedicado a ustedes, quiénes siempre piensan en mi felicidad.

Perdón si no me explayé lo suficiente, pero como muy bien saben no soy un buen redactor/orador.

Resumen

Sea α la colineación de orden tres del plano proyectivo $PG(2, q^6)$ (con q potencia de algún primo impar) inducida por el automorfismo de orden tres de $GF(q^6)$, con la que construimos el plano proyectivo de Figueroa de orden q^6 asociado a α . En este plano analizamos las condiciones que deben cumplir ciertas polaridades ortogonales que conmutan con α y sus óvalos asociados. También analizamos ciertas polaridades unitarias en el plano de Figueroa que conmutan con α y sus unitales asociados. En particular obtenemos que el pedal de un punto exterior al Unital de Figueroa está contenido en una recta. Por último, el pedal de un punto exterior al unital ortogonal de Buekenhout-Metz formado por cónicas, es un arco en $PG(2, q^2)$. A través de la herramienta computacional SAGE, elaboramos ejemplos afines a lo estudiado en la tesis.

Índice

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Conceptos Algebraicos	3
2.2. Planos Projectivos	3
2.2.1. Plano Projectivo Desarguesiano	4
2.2.2. Plano de Figueroa	5
2.3. Polaridades	8
2.4. Cónicas	9
2.5. Unitales	11
2.5.1. Unital Clásico	12
2.5.2. Unital ortogonal de Buekenhout-Metz	12
2.5.3. Unital de Figueroa	13
2.5.4. Correspondencia entre los puntos de tipo III de \mathcal{H} y los puntos de tipo III de \mathcal{U}	14
3. Óvalos en el Plano de Figueroa	15
3.1. Polaridad ortogonal representada por la matriz I_3	15
3.1.1. Correspondencia entre los puntos de tipo III de \mathcal{C} y los puntos de tipo III de \mathcal{O}	19
3.2. Polaridad ortogonal representada por la matriz $M_{a,r}$	20
3.2.1. Correspondencia entre los puntos de tipo III de $\mathcal{C}_{a,r}$ y los puntos de tipo III de $\mathcal{O}_{a,r}$	27
3.3. Ejemplos	27
3.3.1. Para $r \notin GF(3^2)$, los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$	28
3.3.2. Para $a \notin GF(3^2)$, los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$	29
4. Unitales ortogonales de Buekenhout-Metz, con $a = 0$, en el Plano de Figueroa	31
4.1. Polaridad unitaria representada por la matriz M_b	31
4.1.1. Correspondencia entre los puntos de tipo III de $\mathcal{U}_{0,b}$ y los puntos de tipo III de $\mathcal{U}_{0,b}$	38
4.2. Ejemplo	39
4.2.1. Para $b - b^{3^3} \notin GF(3^2)$ los puntos absolutos de ρ_b no forman un unital en $Fig(3^6)$	39
5. Pies de tangencia en el Unital de Figueroa	40
6. Pies de tangencia en el unital ortogonal de Buekenhout-Metz, con $b = b^q$	42
Anexo	44
A. Ejemplo Sección 3.1	44
A.1. Los puntos absolutos de ρ forman un óvalo en $Fig(3^6)$	44
A.2. No hay puntos en común entre \mathcal{C} y \mathcal{O} en $Fig(3^6)$	46
A.3. Los punto de tipo III de \mathcal{C} están en correspondencia con los puntos de tipo III de \mathcal{O} en $Fig(3^6)$	46
B. Ejemplos Sección 3.2	47
B.1. Para un $r \in GF(3^3) \setminus GF(3)$, los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$	47
B.2. Para un $a \in GF(3^6) \setminus GF(3^2)$, los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ no forman un óvalo $Fig(3^6)$	51
C. Ejemplo Capítulo 4	54
C.1. Para un $b - b^{3^3} \notin GF(3^2)$, los puntos absolutos de ρ_b no forman un unital en $Fig(3^6)$	54

D. Ejemplos Capítulo 5	57
D.1. Los pies de tangencia de un punto Q , de tipo I, sobre \mathcal{U} son colineales en $PG(2, 3^6)$	57
D.2. Los pies de tangencia de un punto Q , de tipo II, sobre \mathcal{U} son colineales en $PG(2, 3^6)$	59
D.3. Los pies de tangencia de un punto Q , de tipo III, sobre \mathcal{U} son colineales en $PG(2, 3^6)$	63
E. Ejemplo Capítulo 6	67
E.1. Pies de tangencia de sobre un $U_{a,0}$ en $PG(2, 3^6)$	67

1. Introducción

En esta tesis estudiamos las polaridades ortogonales y unitarias del Plano de Figueroa, por ejemplo, las polaridades ortogonales que forman las cónicas del unital ortogonal de Buekenhout-Metz, con $b = 0$, y las polaridades unitarias que forman el unital ortogonal de Buekenhout-Metz, con $a = 0$. Para esto seguiremos la línea de investigación de Hamilton y de Resmini [5] y Cherowitzo [4], para q potencia de primo impar.

Dada la colineación de orden tres α del plano desarguesiano $PG(2, q^3)$, inducida naturalmente a través del automorfismo de orden tres del cuerpo finito $GF(q^3)$, demostramos que la polaridad ortogonal de $PG(2, q^3)$, representada por la matriz identidad, conmuta con α . Para luego demostrar que tal polaridad es una polaridad ortogonal del Plano de Figueroa $Fig(q^3)$ y que sus puntos absolutos forman un óvalo en $Fig(q^3)$. Además, estudiamos la correspondencia entre los puntos de la cónica formada por los puntos absolutos de la polaridad ortogonal en $PG(2, q^3)$ y los puntos del óvalo formado por los puntos absolutos de la polaridad ortogonal en $Fig(q^3)$.

Por otro lado, dada la colineación de orden tres α del plano desarguesiano $PG(2, q^6)$, inducida naturalmente a través automorfismo de orden tres del cuerpo finito $GF(q^6)$, demostramos que si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$ la polaridad ortogonal del plano desarguesiano $PG(2, q^6)$, representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & r \end{pmatrix},$$

conmuta con α . Para luego demostrar que tal polaridad es una polaridad ortogonal del Plano de Figueroa $Fig(q^6)$ y que sus puntos absolutos forman un óvalo en $Fig(q^6)$. Además, estudiamos la correspondencia entre los puntos de la cónica formada por los puntos absolutos de la polaridad ortogonal en $PG(2, q^6)$ y los puntos del óvalo formado por los puntos absolutos de la polaridad ortogonal en $Fig(q^6)$.

También, dada la colineación α anteriormente mencionada, si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$ la polaridad unitaria de $PG(2, q^6)$, representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \epsilon(b - b^{q^3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix},$$

conmuta con α . Para luego demostrar que tal polaridad es una polaridad unitaria de $Fig(q^6)$ y que sus puntos absolutos forman un unital en $Fig(q^6)$. Además, estudiamos la correspondencia entre los puntos del unital formado por los puntos absolutos de la polaridad unitaria en $PG(2, q^6)$ y los puntos del unital formado por los puntos absolutos de la polaridad unitaria en $Fig(q^6)$.

Adicionalmente, en $Fig(q^6)$ estudiamos el pedal de un punto exterior al Unital de Figueroa, el cual demostramos que está contenido en una recta. En $PG(2, q^2)$ estudiamos el pedal de un punto exterior al unital ortogonal de Buekenhout-Metz, con $b = b^q$, el cual demostramos, de forma alternativa a lo expuesto en [1], que es un arco.

Con la finalidad de comprender las estructuras geométricas, tanto en el plano desarguesiano como en el plano de Figueroa, elaboramos rutinas a través del programa SAGE para obtener ejemplos y no ejemplos de los contenidos que estudiamos en esta tesis.

La tesis se encuentra dividida en 5 capítulos y un anexo. El primer capítulo, llamado *Preliminares*, está compuesto por toda la teoría previa necesaria para entender esta tesis, sea esta: definiciones, teoremas, lemas, corolarios, observaciones, etc. El segundo capítulo, llamado *Óvalos en el Plano de Figueroa*, se separa en dos secciones, la primera donde demostramos que los puntos absolutos de la polaridad representada por la matriz identidad forman un óvalo en el plano de Figueroa, y la segunda donde demostramos que para $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$ los puntos absolutos de la polaridad ortogonal $\rho_{a,r}$ forman un óvalo en el plano de Figueroa. En el tercer capítulo, llamado *Unitales ortogonales de Buekenhout-Metz, con $a = 0$, en el Plano de Figueroa*,

demostramos que para $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$ los puntos absolutos de la polaridad unitaria ρ_b forman un unital en el plano de Figueroa. En el cuarto capítulo, llamado *Pies de tangencia en el Unital de Figueroa*, demostramos que los pies de tangencia de un punto exterior al Unital de Figueroa están contenidos en una recta. Por otro lado, demostramos que existe un caso donde los puntos de tipo III de $\tau_Q(\mathcal{H})$ y los puntos de tipo III de $\tau_Q(\mathcal{U})$ se corresponden bajo la función $\beta\mu$. En el quinto capítulo, llamado *Pies de tangencia en el unital ortogonal de Buekenhout-Metz, con $b = b^q$* , demostramos, de una forma distinta a la expuesta en [1], que los pies de tangencia de un punto exterior al unital ortogonal de Buekenhout-Metz, con $b = b^q$, forman un $(q + 1)$ -arco. Por último, en *Anexo*, a través de rutinas SAGE, elaboramos ejemplos y no ejemplos afines a cada capítulo.

2. Preliminares

En este capítulo se plasman definiciones y teoremas necesarios para el desarrollo de esta tesis. La mayoría de ellos aparecen en [2] y [7] o son enunciados y demostrados por el autor.

2.1. Conceptos Algebraicos

Para este trabajo hemos considerado algunos conceptos algebraicos importantes a usar, como el cuerpo donde nosotros trabajamos, la notación de norma que usamos y lemas que son de utilidad para el desarrollo de la tesis.

Sea $GF(q^a)$, con $a \in \mathbb{N}$, el cuerpo con q^a elementos, donde $q = p^n$ con p primo, y $n \in \mathbb{N}$. En esta tesis trabajamos sobre el cuerpo $GF(q^6)$, que lo representamos de la siguiente forma

$$GF(q^6) = \{a + \epsilon b \mid a, b \in GF(q^3), \epsilon^2 = w \in GF(q^3)\},$$

donde ϵ es el elemento primitivo de la extensión $GF(q^6)/GF(q^3)$.

Es importante recalcar que para esta tesis hemos considerado a p primo impar, lo que implica que q es una potencia de algún primo p , con $p > 2$.

Sea $L = GF(q^n)$ una extensión finita del cuerpo $K = GF(q)$. Como L/K es una extensión de Galois, si x está en L , entonces la *norma* de x es el producto de todos los conjugados de x , es decir,

$$N_{L/K}(x) = x \cdot x^q \cdot x^{q^2} \cdots x^{q^{n-1}} = x^{\frac{q^n-1}{q-1}}.$$

En adelante, para el uso de la norma sólo necesitamos extensiones cuadráticas de los cuerpos anteriormente mencionados, es por esto que para simplificar la notación ocuparemos la siguiente definición.

Definición 2.1. La norma de un elemento $x \in GF(q^2)$ sobre $GF(q)$ la escribiremos como

$$N(x) = x \cdot x^q = x^{q+1}.$$

A partir de la Teoría de Cuerpos Finitos, nosotros hemos demostrados los siguientes lemas.

Lema 2.2. Sea $x \in GF(q^2)$. $(x - x^q)^2$ es un cuadrado de $GF(q)$ si y sólo si $x \in GF(q)$.

Demostración. Sea $x \in GF(q^2)$. Si $(x - x^q)^2$ es un cuadrado de $GF(q)$ entonces existe $y \in GF(q)$ tal que $y^2 = (x - x^q)^2$. Luego, tenemos que $y = \pm(x - x^q)$, entonces $x - x^q \in GF(q)$. Por ende, tenemos que $x - x^q = (x - x^q)^q$, es decir, $x - x^q = x^q - x$, lo que implica que $x = x^q$. Por lo tanto, $x \in GF(q)$.

Si $x \in GF(q)$, tenemos que $(x - x^q)^2 = 0$. Por lo tanto, $(x - x^q)^2$ es un cuadrado de $GF(q)$. □

Lema 2.3. Sea $b \in GF(q^6)$. Si $b - b^{q^3} \notin GF(q^2)$ entonces $(b - b^{q^3})^2$ no es un cuadrado de $GF(q^3)$.

Demostración. Supongamos que $(b - b^{q^3})^2$ es un cuadrado de $GF(q^3)$. Entonces, por Lema 2.2, $b \in GF(q^3)$. Luego, $b - b^{q^3} = 0$, lo cual es una contradicción debido que, por hipótesis, $b - b^{q^3} \notin GF(q^2)$. □

2.2. Planos Projectivos

Para el desarrollo de esta tesis, trabajamos principalmente sobre dos planos proyectivos, sean estos: *Plano Desarguesiano* y *Plano de Figueroa*. Es por esto que previamente definimos lo que es un plano proyectivo y mostramos sus características.

Definición 2.4. Un plano proyectivo π es un conjunto de objetos, llamados puntos, y de subconjuntos de puntos, llamados rectas, tal que

1. dos puntos distintos son incidentes con una única recta común,
2. dos rectas distintas son incidentes con un único punto en común,
3. existen cuatro puntos tal que tres de ellos no son incidentes a una recta común.

A un plano proyectivo π lo podemos denotar por $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, donde \mathcal{P} es el conjunto de puntos de π , \mathcal{L} es el conjunto de rectas de π e I la incidencia en π .

Los planos en los cuales trabajamos se les denomina *Planos Proyectivos Finitos*, es decir, se componen de una cantidad finita de puntos y de rectas. En el siguiente teorema enunciamos la cantidad de puntos y de rectas que contiene este tipo de plano.

Teorema 2.5 (ver [2], Teorema 1.9). Sea π un plano proyectivo finito. Entonces existe un entero $n \geq 2$, llamado orden de π , tal que

1. cada recta de π contiene exactamente $n + 1$ puntos,
2. cada punto de π está en exactamente $n + 1$ rectas,
3. el número de puntos en π es $n^2 + n + 1$,
4. el número de rectas en π es $n^2 + n + 1$.

Definición 2.6. Sean π_1 y π_2 planos proyectivos. Un isomorfismo de π_1 a π_2 es una biyección α de los puntos y rectas de π_1 a los puntos y rectas de π_2 , respectivamente, tal que preserva incidencia, es decir, si P es un punto de π_1 y l una recta de π_1 se tiene que

$$P I_1 l \iff P^\alpha I_2 l^\alpha,$$

donde I_1 e I_2 son las incidencias en π_1 y π_2 , respectivamente.

Si $\pi_1 = \pi_2$, entonces un isomorfismo de π_1 en si mismo es llamado una colineación o un automorfismo de π_1 .

2.2.1. Plano Proyectivo Desarguesiano

Sea $\Pi = PG(2, q)$ el plano proyectivo *desarguesiano* o *clásico* de orden q construido de la siguiente manera.

Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $GF(q)$, donde los puntos de Π son los subespacios de dimensión 1 de V y las rectas de Π son los subespacios de dimensión 2 de V .

Un punto P de Π está denotado por

$$P = [a, b, c],$$

donde $(a, b, c) \in GF(q)^3$ genera el subespacio que define P .

Una recta l de Π está denotada por

$$l = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

donde $(x, y, z) \in GF(q)^3$ es un vector ortogonal (usando el producto punto estándar) al subespacio de dimensión 2 que define l .

Definición 2.7.

1. La recta l que pasa por los puntos P y Q la escribiremos por $l = PQ$, y está dada por el producto vectorial usual $P \times Q$.
2. El punto P que está contenido en las rectas l y m lo escribiremos por $P = l \cap m$, y está dado por el producto vectorial usual $l \times m$.

La incidencia I en Π está dada por la contención natural de la teoría de conjuntos. Así,

$$P I l \iff P \in l \iff [a, b, c] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff ax + by + cz = 0.$$

Observación 2.8. Por Teorema 2.5, las siguientes propiedades de plano proyectivo se mantienen en Π :

1. Cada recta de Π contiene exactamente $q + 1$ puntos.
2. Cada punto de Π está en exactamente $q + 1$ rectas.
3. El número de puntos, y el número de rectas, en Π son $q^2 + q + 1$.

Teorema 2.9 (ver [7], Teorema 2.8). *El grupo de colineaciones de Π es el grupo inducido por las transformaciones semi-lineales no singulares del espacio vectorial de dimensión tres sobre $GF(q)$, denotado por $PGL(3, q)$.*

2.2.2. Plano de Figueroa

Consideremos α la colineación de orden tres de $PG(2, q^3)$ definida por

$$\alpha: [x, y, z] \mapsto [x^q, y^q, z^q]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^q \\ y^q \\ z^q \end{bmatrix}.$$

Usando esto, particionamos los puntos de Π en tres categorías:

- (a) P es de tipo I si $P = P^\alpha = P^{\alpha^2}$,
- (b) P es de tipo II si P, P^α , y P^{α^2} son puntos (distintos) colineales,
- (c) P es de tipo III si P, P^α , y P^{α^2} no son colineales.

Como en [9], para cuestión de cálculos, definimos $m(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x^q & y^q & z^q \\ x^{q^2} & y^{q^2} & z^{q^2} \end{pmatrix}$ y observamos:

- (a) $P = [x, y, z]$ es de tipo I si y sólo si $\det m(x, y, z) = 0$, $x = x^q$, $y = y^q$ y $z = z^q$.
- (b) $P = [x, y, z]$ es de tipo II si y sólo si $\det m(x, y, z) = 0$ y $x \neq x^q$ o $y \neq y^q$ o $z \neq z^q$.
- (c) $P = [x, y, z]$ es de tipo III si y sólo si $\det m(x, y, z) \neq 0$.

Observación 2.10 (ver [5]). *También podemos decir que P es de tipo II si y sólo si*

$$P \neq P^\alpha \quad y \quad P^{\alpha^2} \cdot (P \times P^\alpha) = 0.$$

$$P = P^\alpha = P^{\alpha^2}$$

(a) Puntos de tipo I.

$$P \quad P^\alpha \quad P^{\alpha^2}$$

(b) Puntos de tipo II.

$$P$$

$$P^\alpha \quad P^{\alpha^2}$$

(c) Puntos de tipo III.

Figura 1: Tipos de puntos en Π .

A partir de la categorización de los puntos de Π , denotamos los siguientes conjuntos:

1. $\mathcal{P}_1 = \{P \in \Pi \mid P \text{ de tipo I}\}$,
2. $\mathcal{P}_2 = \{P \in \Pi \mid P \text{ de tipo II}\}$,
3. $\mathcal{P}_3 = \{P \in \Pi \mid P \text{ de tipo III}\}$.

De la misma forma, particionamos las rectas de Π en tres categorías:

- (a) l es de tipo I si $l = l^\alpha = l^{\alpha^2}$,
- (b) l es de tipo II si l, l^α , y l^{α^2} son rectas (distintas) concurrentes,
- (c) l es de tipo III si l, l^α , y l^{α^2} no son concurrentes.

$$l = l^\alpha = l^{\alpha^2}$$

(a) Rectas de tipo I.

$$l \quad l^\alpha \quad l^{\alpha^2}$$

(b) Rectas de tipo II.

$$l \quad l^\alpha \quad l^{\alpha^2}$$

(c) Rectas de tipo III.

Figura 2: Tipos de rectas en Π .

De forma análoga, para cuestión de cálculos, definimos $m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^q & x^{q^2} \\ y & y^q & y^{q^2} \\ z & z^q & z^{q^2} \end{pmatrix}$ y observamos:

- (a) $l = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es de tipo I si y sólo si $\det m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, $x = x^q$, $y = y^q$ y $z = z^q$.

(b) $l = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es de tipo II si y sólo si $\det m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ y $x \neq x^q$ o $y \neq y^q$ o $z \neq z^q$.

(c) $l = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es de tipo III si y sólo si $\det m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$.

Observación 2.11 (ver [5]). *También podemos decir que l es de tipo II si y sólo si*

$$l \neq l^\alpha \quad \text{y} \quad (l \times l^\alpha) \cdot l^{\alpha^2} = 0.$$

A partir de la categorización de las rectas II, denotamos los siguientes conjuntos:

1. $\mathcal{L}_1 = \{l \in \Pi \mid l \text{ de tipo I}\}$,
2. $\mathcal{L}_2 = \{l \in \Pi \mid l \text{ de tipo II}\}$,
3. $\mathcal{L}_3 = \{l \in \Pi \mid l \text{ de tipo III}\}$.

Observación 2.12. *Si $P \perp l$ entonces $P^\alpha \perp l^\alpha$. Esto pues α es una colineación del plano $PG(2, q^3)$, en particular, conserva incidencia.*

En el siguiente lema y teorema, anunciamos la cardinalidad de algunos conjuntos importante para el análisis de nuestro trabajo.

Lema 2.13 (ver [8], Lema 2.1). *La cantidad de puntos, y por ende de rectas, de cada tipo son:*

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_1| &= |\mathcal{L}_1| = q^2 + q + 1, \\ |\mathcal{P}_2| &= |\mathcal{L}_2| = (q^3 - q)(q^2 + q + 1), \\ |\mathcal{P}_3| &= |\mathcal{L}_3| = q^3(q - 1)^2(q + 1). \end{aligned}$$

Observación 2.14 (ver [8]). *La estructura dada por $\Pi_0 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, I)$ es un subplano de $PG(2, q^3)$ de orden q inducido por el conjunto de puntos fijos de α , en otras palabras, $\Pi_0 \cong PG(2, q)$.*

Teorema 2.15 (ver [8], Lema 2.1). *El número de puntos de cada tipo que son incidentes con una recta de cada tipo, está resumido en la siguiente tabla.*

	Recta de tipo I	Recta de tipo II	Recta de tipo III
Puntos de tipo I	$q + 1$	1	0
Puntos de tipo II	$q^3 - q$	q^2	$q^2 + q + 1$
Puntos de tipo III	0	$q^3 - q^2$	$q^3 - q^2 - q$

Tabla 1: Cantidad de puntos de cada tipo que son incidentes con una recta de cada tipo.

Observación 2.16 (ver [8], Lema 2.1). *La dualidad del Teorema 2.15 también es válida.*

Dada la categorización de los puntos y rectas de Π , definimos la siguiente función que relaciona los puntos de tipo III de Π y las rectas de tipo III de Π .

Definición 2.17. *Definimos la biyección involutiva μ entre \mathcal{P}_3 y \mathcal{L}_3 como*

$$\begin{aligned}\mu: P &\mapsto P^\alpha P^{\alpha^2} \\ l &\mapsto l^\alpha \cap l^{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Para cuestión de cálculos, por Definición 2.7, describimos

$$P^\mu = P^\alpha \times P^{\alpha^2} \quad y \quad l^\mu = l^\alpha \times l^{\alpha^2}.$$

A partir de la Definición 2.17, observamos que:

- Todo punto de tipo III está determinado por una recta de tipo III, es decir, si $P \in \mathcal{P}_3$, este está determinado por una $l \in \mathcal{L}_3$ como $P = l \cap l^{\alpha^2}$. De igual forma, toda recta de tipo III está determinada por un punto de tipo III, es decir, si $l \in \mathcal{L}_3$, esta está determinada por un $P \in \mathcal{P}_3$ como $l = PP^\alpha$.
- Si P es un punto de tipo III, entonces las rectas PP^α , $P^\alpha P^{\alpha^2}$ y PP^{α^2} son de tipo III. Si l es una recta de tipo III, entonces los puntos $l \cap l^\alpha$, $l^\alpha \cap l^{\alpha^2}$ y $l \cap l^{\alpha^2}$ son de tipo III.

Definición 2.18. *Sean $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$, definimos la incidencia de Figueroa $I_{\mathcal{F}}$ como*

$$P I_{\mathcal{F}} l \iff \begin{cases} l^\mu I P^\mu, & \text{si } P \text{ y } l \text{ son ambos de tipo III.} \\ P I l, & \text{si } P \text{ o } l \text{ no es de tipo III.} \end{cases}$$

Dada la definición de incidencia de Figueroa, describimos un nuevo conjunto de rectas de tipo III. Para $l \in \mathcal{L}_3$, definimos el conjunto de puntos $l_{\mathcal{F}} = (l \setminus \mathcal{P}_3) \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I_{\mathcal{F}} l\}$ y con esto el conjunto $\mathcal{L}_3^{\mathcal{F}} = \{l_{\mathcal{F}} \mid l \in \mathcal{L}_3\}$. A partir de esto, definimos el siguiente plano proyectivo.

Definición 2.19 (ver [2],[5] o [8]). *Se define el Plano de Figueroa de orden q^3 como $Fig(q^3) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}^{\mathcal{F}}, I_{\mathcal{F}})$, donde el conjunto de rectas es $\mathcal{L}^{\mathcal{F}} = (\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_3) \cup \mathcal{L}_3^{\mathcal{F}}$.*

Notamos que los puntos de tipo III de $PG(2, q^3)$ son también los puntos de tipo III de $Fig(q^3)$. Por otro lado, las rectas de tipo III de $PG(2, q^3)$ son reemplazadas por las rectas de tipo III de $Fig(q^3)$. Por ende, en $Fig(q^3)$ la incidencia cambia para los puntos de tipo III con las rectas de tipo III.

Teorema 2.20 (ver [3]). *El grupo de colineaciones de $Fig(q^3)$ es $PGL(3, q) \rtimes \langle \alpha \rangle$.*

A partir del Teorema 2.9, nos damos cuenta que el Plano desarguesiano y el Plano de Figueroa no tienen el mismo grupo de colineaciones. Luego, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 2.21 (ver [6], Teorema 5). *$Fig(q^3)$ no es un plano proyectivo desarguesiano.*

2.3. Polaridades

Para el desarrollo de esta tesis, trabajamos con dos polaridades en los planos proyectivos anteriormente mencionados, sean estas: *Polaridad Ortogonal* y *Polaridad Unitaria*. Es por esto que previamente definimos lo que es una polaridad y mostramos sus características.

Sea $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ un plano proyectivo. Una *polaridad* ρ de π es una biyección, de orden dos, entre el conjunto de puntos y el conjunto de rectas, y viceversa, tal que para $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$ se cumple que

$$P I l \iff l^\rho I P^\rho.$$

Teorema 2.22 (ver [7], Teorema 2.29). *Si ρ es una polaridad de $PG(2, q)$ entonces ρ puede ser representado como*

$$\begin{aligned}\rho: P &\mapsto A(P^\phi)^t \\ l &\mapsto (l^\phi)^t A^{-1},\end{aligned}$$

donde $A \in PGL(3, q)$ y $\phi \in Aut(GF(q))$ tal que $A = (A^t)^\phi$ y $\phi^2 = 1$.

La polaridad del teorema anterior la podemos clasificar en dos tipos. Si $\phi = 1$, entonces a ρ se le llama *polaridad ortogonal*, y puede ser representada por una matriz simétrica A . Si ϕ es un automorfismo involutivo de $GF(q)$, entonces a ρ se le llama *polaridad unitaria* o *hermitiana*, y puede ser representada por una matriz hermitiana A .

Definición 2.23. *Un punto P es absoluto si y sólo si $P I P^\rho$ y, de la misma forma, una recta l es absoluta si y sólo si $l^\rho I l$.*

Lema 2.24 (ver [7], Lema 12.1). *Sea ρ una polaridad del plano proyectivo π . Entonces un punto absoluto está en exactamente una recta absoluta, dualmente, una recta absoluta tiene exactamente un punto absoluto.*

Proposición 2.25. *Sea P un punto absoluto de una polaridad ρ y $\alpha \in Aut(\pi)$. Si ρ conmuta con α entonces P^α es un punto absoluto de ρ .*

Demostración. Sea P un punto absoluto de una polaridad ρ , es decir, $P I P^\rho$. Luego,

$$\begin{aligned}P I P^\rho &\iff P^\alpha I P^{\rho\alpha} && \text{Observación 2.12} \\ &\iff P^\alpha I P^{\alpha\rho}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, P^α es un punto absoluto de ρ . □

2.4. Cónicas

Para el desarrollo de esta tesis, trabajamos con dos subestructuras geométricas generadas por los puntos absolutos de una polaridad ortogonal, sean estas: *Cónicas*, en el caso de un plano desarguesiano, y *Óvalo*, en el caso del plano de Figueroa. Es por esto que previamente definimos lo que es cada una y mostramos sus características.

Un *k-arco* en un plano proyectivo de orden q , es un conjunto de k puntos donde cualquier trío de puntos no son colineales. A un $(q + 1)$ -arco se le denomina *óvalo*; un óvalo es un arco maximal, es decir, es el arco con la cantidad máxima de puntos.

Teorema 2.26 (ver [7], Teorema 12.6). *Sea ρ una polaridad de un plano proyectivo de orden q . Si ρ tiene exactamente $q + 1$ puntos absolutos entonces los puntos absolutos de ρ forman un óvalo.*

Una *cónica* \mathcal{C} en $PG(2, q)$ es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen alguna ecuación homogénea (no cero) de grado 2.

Teorema 2.27 (ver [10]). *Todo óvalo en $PG(2, q)$ es una cónica.*

Entonces, observamos que si \mathcal{C} es una cónica en $PG(2, q)$, tenemos que toda recta de $PG(2, q)$ intersecta a \mathcal{C} en exactamente 0, 1 o 2 puntos. A partir de esto, definimos lo siguiente.

Definición 2.28. *Las rectas de $PG(2, q)$ serán llamadas exteriores, tangentes o secantes a la cónica \mathcal{C} dependiendo de si no intersectan a \mathcal{C} , si intersectan a \mathcal{C} en 1 o si intersectan a \mathcal{C} en 2 puntos, respectivamente.*

Lema 2.29. *Los puntos absolutos de una polaridad ortogonal de $PG(2, q)$ forman una cónica.*

Demostración. Sea ρ una polaridad ortogonal de $PG(2, q)$. Por Teorema 2.22 tenemos que si $A = (a_{ij}) \in PGL(3, q)$ es simétrica entonces los puntos absolutos $[x, y, z]$ de ρ satisfacen la ecuación homogénea

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

la cual es de grado 2.

Por lo tanto, los puntos absolutos de ρ forman una cónica. \square

Lema 2.30 (ver [7], Lema 2.35). *Sea \mathcal{C} una cónica formada por los puntos absolutos de una polaridad ortogonal de $PG(2, q)$. Una recta intersecta a \mathcal{C} en exactamente un punto si y sólo si la recta es absoluta.*

Por el lema anterior y Lema 2.24, las rectas tangentes a una cónica \mathcal{C} formada por los puntos absolutos P de una polaridad ortogonal ρ son las rectas P^ρ .

A continuación damos ejemplos de cónicas, las cuales estudiamos en el Capítulo 3.

Ejemplo 2.31. *Dos ejemplos de cónicas son:*

1. *El conjunto*

$$\mathcal{C} = \{[x, y, z] \in PG(2, q) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\},$$

es una cónica en $PG(2, q)$.

2. *Para $a \in GF(q^2)$ tal que $N(a)$ no es un cuadrado en $GF(q)$, el conjunto*

$$\mathcal{C}_r = \{[x, y, z] \in PG(2, q^2) \mid ax^2 - yz + rz^2 = 0\} = \{[x, ax^2 + r, 1] \mid x \in GF(q^2)\} \cup \{[0, 1, 0]\},$$

donde $r \in GF(q)$, es una cónica en $PG(2, q^2)$ (ver [2]).

En el Capítulo 3 también observamos que las cónicas del Ejemplo 2.31 son conjuntos de puntos absolutos de una polaridad ortogonal.

Lema 2.32. *Sea \mathcal{C} una cónica formada por los puntos absolutos de una polaridad ortogonal ρ de $PG(2, q^3)$. Si ρ conmuta con α entonces \mathcal{C} no contiene puntos de tipo II.*

Demostración. Supongamos que existe un punto P de tipo II contenido en \mathcal{C} . Entonces, por Proposición 2.25, P^α y P^{α^2} están contenidos en \mathcal{C} . Luego, existe una recta l tal que P, P^α y $P^{\alpha^2} \in l$, por ser P un punto de tipo II, lo cual es una contradicción ya que \mathcal{C} es una cónica. Por lo tanto, \mathcal{C} no contiene puntos de tipo II. \square

Proposición 2.33. *Una polaridad ortogonal ρ de $PG(2, q^3)$ que conserva puntos y rectas de tipo I, restringida a los puntos y rectas de tipo I, es una polaridad de Π_0 .*

Demostración. Como ρ es una polaridad de $PG(2, q^3)$, tenemos que ρ es una función biyectiva de orden 2 en $PG(2, q^3)$ y $Pll \iff l^\rho I P^\rho$, en particular para P y l de tipo I debido a que conserva puntos y rectas de tipo I. Por lo tanto, ρ es una polaridad en Π_0 . \square

Definición 2.34. *Llamaremos ρ_0 a la polaridad ortogonal ρ restringida a Π_0 .*

Corolario 2.35. *Los puntos absolutos de la polaridad ρ_0 forman una cónica en Π_0 .*

Demostración. Por Observación 2.14 y Lema 2.29, la polaridad ρ_0 genera una cónica en Π_0 . \square

Por Lema 2.32 y Corolario 2.35, podemos observar que una cónica \mathcal{C} contenida en $PG(2, q^3)$ formada por los puntos absolutos de una polaridad ortogonal que conmuta con α tiene $q^2 + 1$ puntos de tipo I y $q^3 - q^2$ puntos de tipo III.

Definición 2.36. Sea \mathcal{C} una cónica contenida en $PG(2, q)$ y Q un punto no contenido en \mathcal{C} . Los puntos de \mathcal{C} que están en una recta tangente que pasa por Q , los llamaremos pies de tangencia de \mathcal{C} .

Lema 2.37 (ver [4]). Sea \mathcal{C} una cónica en $PG(2, q)$. Si dos triángulos, tales que sus lados son tangentes a \mathcal{C} , están en perspectiva desde un punto, entonces los pies de tangencia están en perspectiva desde el mismo punto.

Lema 2.38. Si una cónica \mathcal{C} es el conjunto de los puntos absolutos de una polaridad ortogonal ρ , entonces los pies de tangencia de Q están contenidos en la recta Q^ρ para todo $Q \notin \mathcal{C}$.

Demostración. Sea P un punto absoluto y P^ρ la recta tangente a \mathcal{C} por P . Sea $P \neq Q \in P^\rho$ y m_i las rectas que pasan por Q , distintas de P^ρ , que son tangentes a \mathcal{C} en m_i^ρ . Sea $m_{ij} = m_i^\rho m_j^\rho$, así $m_{ij}^\rho = m_i \cap m_j$. Entonces, $m_{ij} = Q^\rho$, para todo $i \neq j$. Por otro lado, como $Q \in P^\rho$, entonces $P \in Q^\rho$. Por ende, m_i^ρ y $P \in Q^\rho$ para todo i . Por lo tanto, los pies de tangencia de Q están contenidos en la recta Q^ρ . \square

Lema 2.39. Sea $Q \notin \mathcal{C}$. Si la recta Q^ρ es secante, entonces los puntos donde corta a \mathcal{C} son pies de tangencia de Q .

Demostración. Sean P_1 y $P_2 \in Q^\rho \cap \mathcal{C}$, por lo tanto $P_1, P_2 \in Q^\rho$, entonces $P_1 P_2 = Q^\rho \Leftrightarrow P_1^\rho \cap P_2^\rho = Q$. Como $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$, son puntos absolutos de ρ . Luego, P_1^ρ y P_2^ρ son rectas tangentes a \mathcal{C} que pasan por Q . Por lo tanto, P_1 y P_2 son pies de tangencia de Q . \square

Observación 2.40. Dado un punto $Q \notin \mathcal{C}$, los pies de tangencia de Q en \mathcal{C} son dos si Q^ρ es una recta secante a \mathcal{C} .

2.5. Unitales

Para el desarrollo de esta tesis, trabajamos con otras tres subestructuras geométricas, sean estos: *Unital Clásico*, *Unital ortogonal de Buekenhout-Metz* y *Unital de Figueroa*. Es por esto que previamente definimos lo que es cada uno y mostramos sus características.

Un *unital* de orden n , contenido en un plano proyectivo π de orden n^2 , es un conjunto de $n^3 + 1$ puntos tal que toda recta de π lo intersecta en 1 o en $n + 1$ puntos.

Definición 2.41. Sea U un unital contenido en un plano proyectivo π de orden q^2 . Las rectas de π serán llamadas tangentes o secantes al unital U dependiendo de si intersectan a U en 1 o en $q + 1$ puntos, respectivamente.

Teorema 2.42 (ver [7], Teorema 12.12). Sea ρ una polaridad de plano proyectivo de orden n^2 . Si la cantidad de puntos absolutos de ρ es $n^3 + 1$ entonces el conjunto de puntos absolutos forman un unital.

Teorema 2.43 (ver [2], Teorema 2.3). Sea U un unital de $PG(2, q^2)$. Entonces, por cada punto de $PG(2, q^2) \setminus U$ pasan $q + 1$ rectas tangentes a U y $q^2 - q$ rectas secantes a U .

A partir del teorema anterior, definimos los puntos de tangencia de las rectas que pasan por un punto exterior a un unital.

Definición 2.44. Sea U un unital contenido en un plano proyectivo π de orden q^2 y Q un punto no contenido en U . Los $q + 1$ puntos de U , que están en una recta tangente que pasa por Q , son llamados pies de tangencia de Q . Denotamos el conjunto de pies de tangencia de Q por $\tau_Q(U)$ y lo llamaremos el pedal de Q .

Definición 2.45. Sean U_1 y U_2 unitales contenidos en un plano proyectivo π . U_1 es equivalente a U_2 si existe $\alpha \in \text{Aut}(\pi)$ tal que $U_1^\alpha = U_2$.

2.5.1. Unital Clásico

Un unital *clásico* o *hermitiano* \mathcal{U} en $PG(2, q^2)$ es un conjunto de $q^3 + 1$ puntos absolutos de una polaridad unitaria de $PG(2, q^2)$ tal que cada recta de $PG(2, q^2)$ intersecta a \mathcal{U} en exactamente 1 o $q + 1$ puntos.

Ejemplo 2.46. *El conjunto*

$$\mathcal{H} = \{[x, y, z] \in PG(2, q^2) \mid N(x) + N(y) + N(z) = 0\},$$

es un unital clásico en $PG(2, q^2)$.

Teorema 2.47 (ver [7], Teorema 2.48). *Una recta intersecta a \mathcal{U} exactamente en un punto si y sólo si la recta es absoluta (y es la imagen del punto donde intersecta a \mathcal{U}).*

Teorema 2.48 (ver [2], Corolario 2.4). *Sea \mathcal{U} un unital contenido en $PG(2, q^2)$. El pedal de Q está contenido en una recta de $PG(2, q^2)$, para todo $Q \in PG(2, q^2) \setminus \mathcal{U}$.*

2.5.2. Unital ortogonal de Buekenhout-Metz

Para $a, b \in GF(q^2)$ tal que $4N(a) + (b - b^q)^2$ es un no cuadrado de $GF(q)$, el conjunto

$$U_{a,b} = \{[x, ax^2 + bN(x) + r, 1] \mid x \in GF(q^2), r \in GF(q)\} \cup \{[0, 1, 0]\},$$

es un unital, llamado *unital ortogonal de Buekenhout-Metz*, en $PG(2, q^2)$.

Teorema 2.49 (ver [2], Teorema 4.7). *Sea $U_{a,b}$ un unital ortogonal de Buekenhout-Metz. Entonces, $U_{a,b}$ es clásico si y sólo si $a = 0$.*

Teorema 2.50 (ver [2], Teorema 4.19). *Sea $U_{a,0}$ un unital ortogonal de Buekenhout-Metz. Entonces*

$$U_{a,0} = \bigcup_{r \in GF(q)} \mathcal{C}_r,$$

donde $\mathcal{C}_r = \{[x, ax^2 + r, 1] \mid x \in GF(q^2)\} \cup \{[0, 1, 0]\}$.

Teorema 2.51 (ver [2]). *Sean $U_{a,b}$ y $U_{a',b'}$ unilaterales ortogonales de Buekenhout-Metz contenidos en $PG(2, q^2)$. $U_{a,b}$ es equivalente a $U_{a',b'}$ si y sólo si*

$$(a', b') = (a^\tau \gamma^2 v, b^\tau \gamma^{q+1} v + u),$$

donde $v \in GF(q)^*$, $\gamma \in GF(q^2)^*$, $u \in GF(q)$ y $\tau \in \text{Aut}(GF(q^2))$.

Corolario 2.52. *El unital $U_{a,b}$, con $b = b^q$, es equivalente al unital $U_{a,0}$.*

Demostración. Si $b = b^q$, se escoge $v = 1$, $\gamma = 1$, $u = -b$ y $\tau = 1$ y tenemos que $(a, 0) = (a^\tau \gamma^2 v, b^\tau \gamma^{q+1} v + u)$. Por lo tanto, $U_{a,b}$, con $b = b^q$, es equivalente a $U_{a,0}$. \square

Observación 2.53. *Por Teorema 2.51 y Corolario 2.52, $b = b^q$ si y sólo si el unital $U_{a,b}$ es una unión de cónicas.*

Teorema 2.54 (ver [2], Teorema 4.18). *Sea $U_{a,b}$ un unital ortogonal de Buekenhout-Metz no clásico. Sea $Q \in PG(2, q^2) \setminus U_{a,b}$. Entonces, el pedal de Q está contenido en una recta de $PG(2, q^2)$ si y sólo si $Q \in l_\infty$,*

donde l_∞ la denotamos por la recta $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.55 (ver [1], Teorema 4). *Sea $Q \notin l_\infty$ y $a \neq 0$. Entonces, las rectas de $PG(2, q^2)$ intersectan a $\tau_Q(U_{a,b})$ en exactamente 0, 1, 2 o 4 puntos.*

2.5.3. Unital de Figueroa

Para formar el Unital de Figueroa debemos tener una extensión cúbica de cuerpos, para inducir una colineación de orden tres que defina el plano de Figueroa, y a su vez una extensión cuadrática de cuerpos, para inducir una polaridad unitaria. Es por esto que trabajamos sobre el plano proyectivo $PG(2, q^6)$, para definir la colineación α y la polaridad unitaria β .

Consideremos α la colineación de orden tres de $PG(2, q^6)$ definida por

$$\alpha: [x, y, z] \mapsto [x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^{q^2} \\ y^{q^2} \\ z^{q^2} \end{bmatrix},$$

con la que construimos el plano proyectivo de Figueroa $Fig(q^6)$ (ver Subsección 2.2.2).

Sea la polaridad unitaria β de $PG(2, q^6)$ representada por la matriz identidad I_3 , es decir,

$$\beta: [x, y, z] \mapsto \begin{bmatrix} x^{q^3} \\ y^{q^3} \\ z^{q^3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto [x^{q^3}, y^{q^3}, z^{q^3}],$$

donde sus puntos absolutos forman, en $PG(2, q^6)$, el unital clásico

$$\mathcal{H} = \{[x, y, z] \in PG(2, q^6) \mid [x, y, z] \cdot [x, y, z]^\beta = 0\} = \{[x, y, z] \in PG(2, q^6) \mid x^{q^3+1} + y^{q^3+1} + z^{q^3+1} = 0\}.$$

Lema 2.56 (ver [8], Lema 4.1). *La restricción de β a $\Pi_0 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, I)$ es una polaridad unitaria en Π_0 . Sus puntos absolutos forman un unital en Π_0 .*

Lema 2.57 (ver [5], Lema 3).

1. *Todo punto P de $Fig(q^6)$ tiene el mismo tipo que la recta P^β .*
2. *Toda recta l de $Fig(q^6)$ tiene el mismo tipo que el punto l^β .*
3. *Para todo punto P de tipo III, $P^{\beta\mu} = P^{\mu\beta}$.*
4. *Para toda recta l de tipo III, $l^{\beta\mu} = l^{\mu\beta}$.*

Teorema 2.58 (ver [5]). *β es una polaridad unitaria de $Fig(q^6)$. Por lo tanto, $Fig(q^6)$ contiene un unital.*

Definición 2.59 (ver [8]). *Llamaremos a \mathcal{U} el Unital de Figueroa al unital determinado por la polaridad β en $Fig(q^6)$ (usaremos $\beta_{\mathcal{F}}$ cuando sea necesario comentar que estamos viendo la polaridad β en $Fig(q^6)$).*

Observación 2.60 (ver [8]). *El número de puntos de cada tipo en \mathcal{U} son:*

1. $|\mathcal{U} \cap \mathcal{P}_1| = q^3 + 1,$
2. $|\mathcal{U} \cap \mathcal{P}_2| = (q^3 + 1)(q - 1)q^3,$
3. $|\mathcal{U} \cap \mathcal{P}_3| = (q^3 + 1)(q^2 - 1)q^4.$

Lema 2.61 (ver [8], Lema 3.1). *El conjunto de puntos de tipo III de \mathcal{H} y el conjunto de puntos de tipo III de \mathcal{U} son disjuntos.*

Lema 2.62 (ver [8], Lema 3.2). *Sea l una recta de tipo III. Si l es $\beta_{\mathcal{F}}$ -absoluta entonces l es β -no-absoluta, es decir, l intersecta a \mathcal{H} en exactamente $q^3 + 1$ puntos de tipo III.*

2.5.4. Correspondencia entre los puntos de tipo III de \mathcal{H} y los puntos de tipo III de \mathcal{U}

Sea P un punto de tipo III, definimos la función

$$\begin{aligned}\varphi: \mathcal{P}_3 &\rightarrow \mathcal{P}_3 \\ P &\mapsto P^{\beta\mu},\end{aligned}$$

donde la función φ es la composición de las funciones β y μ , es decir, $\varphi = \beta \circ \mu$.

Por otro lado, como β y μ son funciones biyectivas, φ es biyectiva. Además, φ es una función de orden dos ya que β y μ son funciones de orden dos que conmutan.

Teorema 2.63. *Sea P un punto de tipo III de \mathcal{H} , entonces $P^{\beta\mu}$ es un punto de tipo III de \mathcal{U} . En otras palabras, $\varphi(\mathcal{H} \cap \mathcal{P}_3) = \mathcal{U} \cap \mathcal{P}_3$.*

Demostración. Sea P un punto de tipo III contenido en \mathcal{H} , entonces

$$\begin{aligned}P \text{ I } P^\beta &\iff P^{\beta\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} P^\mu && \text{Lema 2.57} \\ &\iff P^{\beta\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} (P^{\mu\beta})^\beta && \beta \text{ es de orden 2} \\ &\iff P^{\beta\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} (P^{\beta\mu})^\beta. && \text{Lema 2.57}\end{aligned}$$

Luego, $P^{\beta\mu}$ está contenido en \mathcal{U} . □

3. Óvalos en el Plano de Figueroa

En este capítulo, a partir de Hamilton y de Resmini [5], complementado con Cherowitzo [4], demostramos que los puntos absolutos de las polaridades ortogonales determinadas por las matrices

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M_{a,r} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & r \end{pmatrix},$$

para $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$ en el caso de $M_{a,r}$, forman un óvalo en el plano proyectivo de Figueroa.

Por otro lado, a través de la herramienta computacional SAGE, para $Fig(3^6)$ elaboramos ejemplos afines a lo que estudiamos en este capítulo. Para la polaridad determinada por I_3 , presentamos y explicamos un ejemplo en Anexo A. Para la polaridad determinada por $M_{a,r}$, exponemos ejemplos al final de este capítulo y también los presentamos en Anexo B.

3.1. Polaridad ortogonal representada por la matriz I_3

Sea ρ la polaridad ortogonal de $PG(2, q^3)$, definida como

$$\rho: [x, y, z] \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto [x, y, z],$$

donde sus puntos absolutos forman, en $PG(2, q^3)$, la cónica

$$\mathcal{C} = \{[x, y, z] \in PG(2, q^3) \mid [x, y, z] \cdot [x, y, z]^\rho = 0\} = \{[x, y, z] \in PG(2, q^3) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}.$$

Teorema 3.1. *La polaridad ρ y la colineación α (ver Subsección 2.2.2) conmutan.*

Demostración. Sea $[x, y, z]$ un punto de $PG(2, q^3)$, entonces

$$\begin{aligned} [x, y, z]^{\rho\alpha} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\alpha \\ &= \begin{bmatrix} x^{q^2} \\ y^{q^2} \\ z^{q^2} \end{bmatrix} \\ &= [x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}]^\rho \\ &= [x, y, z]^{\alpha\rho}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^{\rho\alpha} = [x, y, z]^{\alpha\rho}$.

De manera similar, podemos probar para una recta de $PG(2, q^3)$.

Por lo tanto, ρ y α conmutan. □

Lema 3.2. *La polaridad ortogonal ρ preserva tipo de punto y tipo de recta en $Fig(q^3)$.*

Demostración. Sea $[x, y, z]$ un punto en $Fig(q^3)$.

Si $[x, y, z]$ es un punto del tipo I entonces $[x, y, z] = [x, y, z]^\alpha$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} [x, y, z]^\rho &= [x, y, z]^{\alpha\rho} \\ &= [x, y, z]^{\rho\alpha}. \end{aligned} \quad \text{Por Teorema 3.1}$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^\rho$ es una recta de tipo I.

Si $[x, y, z]$ es un punto del tipo II entonces, por Observación 2.10, tenemos que

$$[x, y, z]^{\alpha^2} \cdot ([x, y, z] \times [x, y, z]^\alpha) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & [x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}] \cdot ([x, y, z] \times [x^q, y^q, z^q]) = 0 \\ \Leftrightarrow & [x^q, y^q, z^q] \cdot \begin{bmatrix} yz^q - zy^q \\ zx^q - xz^q \\ xy^q - yx^q \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} yz^q - zy^q \\ zx^q - xz^q \\ xy^q - yx^q \end{bmatrix}^\rho \cdot [x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}]^\rho = 0 \quad \rho \text{ es una polaridad ortogonal de } PG(2, q^3) \\ \Leftrightarrow & [yz^q - zy^q, zx^q - xz^q, xy^q - yx^q] \cdot \begin{bmatrix} x^{q^2} \\ y^{q^2} \\ z^{q^2} \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & ([x, y, z]^\rho \times [x, y, z]^{\rho\alpha}) \cdot [x, y, z]^{\rho\alpha^2} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^\rho$ es una recta de tipo II.

Dado que ρ es una polaridad del plano $PG(2, q^3)$, en particular es una función biyectiva entre los puntos y las rectas de éste. Por otro lado, con lo demostrado anteriormente, ρ lleva puntos de tipo I en rectas de tipo I y puntos de tipo II en rectas de tipo II. Por lo tanto, ρ lleva puntos de tipo III en rectas de tipo III.

De manera similar podemos probar que toda recta $l \in Fig(q^3)$ es del mismo tipo que el punto l^ρ .

Por lo tanto, la polaridad ortogonal ρ conserva tipo de puntos y tipo de rectas en $Fig(q^3)$. \square

Lema 3.3. *Para todo punto P de tipo III, se tiene que $P^{\mu\rho} = P^{\rho\mu}$.*

Demostración. Sea $[x, y, z]$ un punto de tipo III. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} [x, y, z]^{\mu\rho} &= ([x, y, z]^\alpha \times [x, y, z]^{\alpha^2})^\rho \\ &= ([x^q, y^q, z^q] \times [x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}])^\rho \\ &= \begin{bmatrix} y^q z^{q^2} - z^q y^{q^2} \\ z^q x^{q^2} - x^q z^{q^2} \\ x^q y^{q^2} - y^q x^{q^2} \end{bmatrix}^\rho \\ &= [y^q z^{q^2} - z^q y^{q^2}, z^q x^{q^2} - x^q z^{q^2}, x^q y^{q^2} - y^q x^{q^2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} x^q \\ y^q \\ z^q \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{q^2} \\ y^{q^2} \\ z^{q^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\alpha \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\alpha^2} \\
&= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\mu \\
&= [x, y, z]^{\rho\mu}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^{\mu\rho} = [x, y, z]^{\rho\mu}$. □

Corolario 3.4. *Para toda recta l de tipo III, se tiene que $l^{\mu\rho} = l^{\rho\mu}$.*

Demostración. De manera similar a la demostración del Lema 3.3. □

Teorema 3.5. ρ es una polaridad ortogonal de $Fig(q^3)$.

Demostración. ρ es una función biyectiva ya que es una polaridad ortogonal de $PG(2, q^3)$. Por ende, basta demostrar que para todo punto P y recta l en $Fig(q^3)$ se cumple que

$$P I_{\mathcal{F}} l \iff l^{\rho} I_{\mathcal{F}} P^{\rho}.$$

Sean P un punto y l una recta, tal que por lo menos uno no es de tipo III, entonces

$$\begin{aligned}
P I_{\mathcal{F}} l &\iff P I l && \text{Definición 2.18} \\
&\iff l^{\rho} I P^{\rho} && \rho \text{ es una polaridad en } PG(2, q^3) \\
&\iff l^{\rho} I_{\mathcal{F}} P^{\rho} && \text{Lema 3.2 y Definición 2.18}
\end{aligned}$$

Sean P y l de tipo III, entonces

$$\begin{aligned}
P I_{\mathcal{F}} l &\iff l^{\mu} I P^{\mu} && \text{Definición 2.18} \\
&\iff P^{\mu\rho} I l^{\mu\rho} && \rho \text{ es una polaridad en } PG(2, q^3) \\
&\iff P^{\rho\mu} I l^{\rho\mu} && \text{Lema 3.3 y Corolario 3.4} \\
&\iff l^{\rho} I_{\mathcal{F}} P^{\rho}. && \text{Definición 2.18}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ es una polaridad ortogonal de $Fig(q^3)$. □

Definición 3.6. *El conjunto de puntos absolutos definidos por la polaridad ortogonal ρ en $Fig(q^3)$ lo denominaremos por \mathcal{O} .*

Lema 3.7. \mathcal{O} es el conjunto de los puntos de tipo I y de tipo II de \mathcal{C} y los puntos de tipo III son tales que sus imágenes bajo μ son rectas tangentes a \mathcal{C} .

Demostración. Dado que \mathcal{O} es el conjunto de los puntos absolutos de la polaridad ρ en $Fig(q^3)$, lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \{P \in Fig(q^3) \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho}\} \\
&= \{P \in Fig(q^3) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P I_{\mathcal{F}} P^{\rho}\} \cup \{P \in Fig(q^3) \mid P \in \mathcal{P}_3, P I_{\mathcal{F}} P^{\rho}\} \\
&= \{P \in Fig(q^3) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P I P^{\rho}\} \cup \{P \in Fig(q^3) \mid P \in \mathcal{P}_3, P^{\rho\mu} I P^{\mu}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{P \in \text{Fig}(q^3) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P \in \mathcal{C}\} \cup \{P \in \text{Fig}(q^3) \mid P \in \mathcal{P}_3, P^{\mu\rho} \text{ I } P^\mu\} \\
&= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P \in \mathcal{C}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P^\mu \text{ tangente a } \mathcal{C}\}.
\end{aligned}$$

Entonces, los puntos de tipo I y de tipo II de \mathcal{O} son los punto de tipos I y de tipo II de \mathcal{C} y los puntos de tipo III de \mathcal{O} son tales que sus imágenes bajo μ son rectas tangentes a \mathcal{C} . \square

Corolario 3.8. *Si P es un punto de tipo III contenido en \mathcal{O} , entonces $P^\alpha P^{\alpha^2}$ es una recta tangente a \mathcal{C} .*

Demostración. Si $P \in \mathcal{O}$ es un punto de tipo III, entonces P^μ es una recta tangente a \mathcal{C} . Por Definición 2.17, $P^\mu = P^\alpha P^{\alpha^2}$ es una recta tangente a \mathcal{C} . \square

Corolario 3.9. *El conjunto \mathcal{O} no contiene puntos de tipo II.*

Demostración. Por Teorema 3.1 y Lema 2.32, la polaridad ρ no tiene puntos absolutos de tipo II, por lo cual la cónica \mathcal{C} no contiene puntos de tipo II. Por Lema 3.7, \mathcal{O} no tiene puntos de tipo II. \square

Observación 3.10. *Por Teorema 3.7, \mathcal{O} y \mathcal{C} comparten los puntos de tipo I y sus puntos de tipo III están en correspondencia (ver la Subsección 3.1.1). Por lo tanto, $|\mathcal{O}| = |\mathcal{C}| = q^3 + 1$.*

Lema 3.11. *Toda recta de $\text{Fig}(q^3)$ intersecta a \mathcal{O} en a lo más dos puntos.*

Demostración. Por Teorema 2.15, las rectas de tipo I de $\text{Fig}(q^3)$ sólo contienen puntos de tipo I y de tipo II. Por Corolario 3.9, las rectas de tipo I intersectan a \mathcal{O} sólo en puntos de tipo I, pero los puntos de tipo I de \mathcal{O} son los mismos puntos de tipo I de \mathcal{C} , entonces una recta de tipo I de $\text{Fig}(q^3)$ intersecta a \mathcal{O} en a lo más dos puntos.

Supongamos que existe una recta l de tipo II de $\text{Fig}(q^3)$ que intersecta a \mathcal{O} en tres puntos, sean estos P_1 , P_2 y P_3 .

Supongamos que P_1 es de tipo I y P_2, P_3 de tipo III. Entonces, $P_2^\alpha, P_2^{\alpha^2}, P_3^\alpha$ y $P_3^{\alpha^2}$ también son puntos de \mathcal{O} . Como P_2 y P_3 están en l , P_2^α y P_3^α están en l^α y $P_2^{\alpha^2}$ y $P_3^{\alpha^2}$ están en l^{α^2} . Por otro lado, l, l^α y l^{α^2} concurren en P_1 . Por lo tanto, los triángulos $[P_2, P_2^\alpha, P_2^{\alpha^2}]$ y $[P_3, P_3^\alpha, P_3^{\alpha^2}]$ están en perspectiva desde P_1 . Por Corolario 3.8, los lados de los triángulos son tangentes a \mathcal{C} , sean estos puntos de tangencia $P_2^{\mu\rho}, (P_2^\alpha)^{\mu\rho}, (P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho}, P_3^{\mu\rho}, (P_3^\alpha)^{\mu\rho}$ y $(P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho}$. Luego, por Lema 2.37, los triángulos $[P_2^{\mu\rho}, (P_2^\alpha)^{\mu\rho}, (P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho}]$ y $[P_3^{\mu\rho}, (P_3^\alpha)^{\mu\rho}, (P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho}]$ están en perspectiva desde el punto P_1 , es decir, P_1 es colineal con $P_2^{\mu\rho}$ y $P_3^{\mu\rho}, (P_2^\alpha)^{\mu\rho}$ y $(P_3^\alpha)^{\mu\rho}$, y con $(P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho}$ y $(P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho}$, por lo que es una contradicción debido que una recta intersecta a \mathcal{C} en a lo más dos puntos.

Supongamos ahora que P_1, P_2 y P_3 son puntos de tipo III. Entonces, $P_1^\alpha, P_1^{\alpha^2}, P_2^\alpha, P_2^{\alpha^2}, P_3^\alpha$ y $P_3^{\alpha^2}$ también son puntos de \mathcal{O} . Como P_1, P_2 y P_3 están en l , P_1^α, P_2^α y P_3^α están en l^α , y $P_1^{\alpha^2}, P_2^{\alpha^2}$ y $P_3^{\alpha^2}$ están en l^{α^2} . Por otro lado, l, l^α y l^{α^2} concurren a un punto Q de tipo I, por ser l una recta de tipo II (suponemos $Q \notin \mathcal{C}$ sino estamos en el caso anterior). Por lo tanto, los triángulos $[P_1, P_1^\alpha, P_1^{\alpha^2}]$, $[P_2, P_2^\alpha, P_2^{\alpha^2}]$ y $[P_3, P_3^\alpha, P_3^{\alpha^2}]$ están en perspectiva desde Q . Por Corolario 3.8, los lados de los triángulos son tangentes a \mathcal{C} , sean estos puntos de tangencia $P_1^{\mu\rho}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho}, (P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho}, P_2^{\mu\rho}, (P_2^\alpha)^{\mu\rho}, (P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho}, P_3^{\mu\rho}, (P_3^\alpha)^{\mu\rho}$ y $(P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho}$. Luego sin perder generalidad, por Lema 2.37, los triángulos $[P_1^{\mu\rho}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho}, (P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho}]$ y $[P_2^{\mu\rho}, (P_2^\alpha)^{\mu\rho}, (P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho}]$ están en perspectiva desde el punto Q , y los triángulos $[P_1^{\mu\rho}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho}, (P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho}]$ y $[P_3^{\mu\rho}, (P_3^\alpha)^{\mu\rho}, (P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho}]$ están en perspectiva desde el punto Q , es decir, Q es colineal con $P_1^{\mu\rho}$ y $P_2^{\mu\rho}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho}$ y $(P_2^\alpha)^{\mu\rho}, (P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho}$ y $(P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho}, P_1^{\mu\rho}$ y $P_3^{\mu\rho}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho}$ y $(P_3^\alpha)^{\mu\rho}$, y con $(P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho}$ y $(P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho}$. Así, tenemos que $Q, P_1^{\mu\rho}$ y $P_2^{\mu\rho}$ son colineales al igual que $Q, P_1^{\mu\rho}$ y $P_3^{\mu\rho}$, entonces $P_1^{\mu\rho}, P_2^{\mu\rho}$ y $P_3^{\mu\rho}$ son colineales, por lo que es una contradicción debido que una recta intersecta a \mathcal{C} en a lo más dos puntos. Por lo tanto, una recta de tipo II de $\text{Fig}(q^3)$ intersecta a \mathcal{O} en a lo más dos puntos.

Supongamos que existe una recta l de tipo III en $\text{Fig}(q^3)$ que intersecta a \mathcal{O} en tres puntos de tipo III, sean estos P_1, P_2 y P_3 , entonces

$$P_i \text{ I}_{\mathcal{F}} l, \text{ con } i \in \{1, 2, 3\} \iff l^\mu \text{ I } P_i^\mu, \text{ con } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Luego, l^μ tiene tres pies de tangencia en \mathcal{C} , debido a que P_i^μ son rectas tangentes a \mathcal{C} , lo cual, por el Lema 2.39, es una contradicción. Por lo tanto, una recta del tipo III en $Fig(q^3)$ intersecta a \mathcal{O} en a lo más dos puntos.

Por lo tanto, toda recta de $Fig(q^3)$ intersecta a \mathcal{O} en a lo más dos puntos. \square

Teorema 3.12. \mathcal{O} es un óvalo en $Fig(q^3)$.

Demostración. Por Lema 3.11 o Teorema 2.26, y Observación 3.10, el conjunto \mathcal{O} es un óvalo en $Fig(q^3)$. \square

Proposición 3.13. No hay puntos en común entre los puntos de tipo III de \mathcal{C} y los puntos de tipo III de \mathcal{O} .

Demostración. Supongamos que existe un punto P de tipo III contenido en \mathcal{C} y \mathcal{O} . Como $P \in \mathcal{O}$, tenemos que P^μ es una recta tangente a \mathcal{C} . Por otro lado, como $P \in \mathcal{C}$, tenemos que P^α, P^{α^2} pertenecen a \mathcal{C} . Luego, por Definición 2.17, $P^\mu = P^\alpha P^{\alpha^2}$. Por lo tanto, P^μ es una recta secante a \mathcal{C} , lo cual es una contradicción. \square

3.1.1. Correspondencia entre los puntos de tipo III de \mathcal{C} y los puntos de tipo III de \mathcal{O}

Definición 3.14. Sea P un punto de tipo III, definimos la función

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{P}_3 &\rightarrow \mathcal{P}_3 \\ P &\mapsto P^{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Observación 3.15. Como ρ y μ son funciones biyectivas, φ es biyectiva.

Teorema 3.16. La función φ lleva los puntos de tipo III de \mathcal{C} en los puntos de tipo III de \mathcal{O} .

Demostración. Sea P un punto de tipo III contenido en \mathcal{C} , entonces

$$\begin{aligned} P \text{ I } P^\rho &\iff P^{\rho\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} P^\mu && \text{Lema 3.2} \\ &\iff P^{\rho\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} (P^{\mu\rho})^\rho && \rho \text{ es de orden 2} \\ &\iff P^{\rho\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} (P^{\rho\mu})^\rho. && \text{Lema 3.3} \end{aligned}$$

Luego, $P^{\rho\mu}$ está contenido en \mathcal{O} . \square

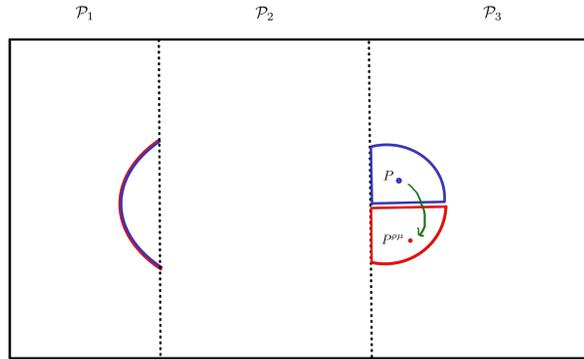


Figura 3: Correspondencia entre los puntos de tipo III de \mathcal{C} (azul) y los puntos de tipo III de \mathcal{O} (rojo).

Corolario 3.17. $\mathcal{O} = \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P \in \mathcal{C}\} \cup \{P^{\rho\mu} \in Fig(q^3) \mid P \in \mathcal{P}_3 \text{ contenido en } \mathcal{C}\}$.

Demostración. Por Teorema 3.16, los puntos de tipo III de \mathcal{O} son los puntos $P^{\rho\mu}$ tales que P es un punto de tipo III de \mathcal{C} . \square

Definición 3.18. Sea $\bar{\varphi}: PG(2, q^3) \rightarrow Fig(q^3)$ la función definida por

$$\bar{\varphi}|_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2} = Id \quad y \quad \bar{\varphi}|_{\mathcal{P}_3} = \varphi.$$

Observación 3.19. Por Teorema 3.16, obtenemos que $\bar{\varphi}(\mathcal{C}) = \mathcal{O}$.

3.2. Polaridad ortogonal representada por la matriz $M_{a,r}$

De forma similar a lo que hemos expuesto en la Sección 3.1, analizamos la siguiente polaridad.

Sea $\rho_{a,r}$ la polaridad ortogonal de $PG(2, q^6)$, definida por

$$\rho_{a,r}: [x, y, z] \mapsto M_{a,r} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto [x, y, z] \cdot M_{a,r}^{-1},$$

donde $a \in GF(q^6)^*$ y $r \in GF(q^6)$.

Los puntos absolutos de la polaridad $\rho_{a,r}$ forman, en $PG(2, q^6)$, la cónica

$$\mathcal{C}_{a,r} = \{[x, y, x] \in PG(2, q^6) \mid [x, y, x] \cdot [x, y, x]^{\rho_{a,r}} = 0\} = \{[x, ax^2 + r, 1] \mid x \in GF(q^6)\} \cup \{[0, 1, 0]\}.$$

Teorema 3.20. La polaridad $\rho_{a,r}$ y la colineación α (ver Subsección 2.5.3) conmutan si y sólo si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$.

Demostración. Sea $[x_1, y_1, z_1]$ un punto y $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ una recta, contenidas $PG(2, q^6)$. Si $\alpha\rho_{a,r} = \rho_{a,r}\alpha$, tenemos las siguientes dos igualdades:

$$\begin{bmatrix} ax_1^{q^2} \\ -\frac{z_1^{q^2}}{2} \\ rz_1^{q^2} - \frac{y_1^{q^2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{q^2} x_1^{q^2} \\ -\frac{z_1^{q^2}}{2} \\ r^{q^2} z_1^{q^2} - \frac{y_1^{q^2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_2^{q^2}}{a}, -4ry_2^{q^2} - 2z_2^{q^2}, -2y_2^{q^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2^{q^2}}{a^{q^2}}, -4r^{q^2}y_2^{q^2} - 2z_2^{q^2}, -2y_2^{q^2} \end{bmatrix}.$$

Entonces, $a = a^{q^2}$, con $a \neq 0$, y $r = r^{q^2}$. Por lo tanto, $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$.

Ahora asumimos que $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$, en este caso tenemos que

$$[x_1, y_1, z_1]^{\alpha\rho_{a,r}} = [x_1^{q^2}, y_1^{q^2}, z_1^{q^2}]^{\rho_{a,r}}$$

$$= \begin{bmatrix} ax_1^{q^2} \\ -\frac{z_1^{q^2}}{2} \\ rz_1^{q^2} - \frac{y_1^{q^2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{q^4} x_1 \\ -\frac{z_1}{2} \\ r^{q^4} z_1 - \frac{y_1}{2} \end{bmatrix}^{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} ax_1 \\ -\frac{z_1}{2} \\ rz_1 - \frac{y_1}{2} \end{bmatrix}^\alpha \\
&= [x_1, y_1, z_1]^{\rho_{a,r}\alpha}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\alpha\rho_{a,r}} &= \begin{bmatrix} \frac{x_2^{q^2}}{a}, -4ry_2^{q^2} - 2z_2^{q^2}, -2y_2^{q^2} \end{bmatrix} \\
&= \left[\frac{x_2}{a^{q^4}}, -4r^{q^4}y_2 - 2z_2, -2y_2 \right]^\alpha \\
&= \left[\frac{x_2}{a}, -4ry_2 - 2z_2, -2y_2 \right]^\alpha \\
&= \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\rho_{a,r}\alpha}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho_{a,r}$ y α conmutan. □

Lema 3.21. Si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$, entonces la polaridad ortogonal $\rho_{a,r}$ preserva tipo de punto y tipo de recta en $Fig(q^6)$.

Demostración. Sea $[x, y, z]$ un punto en $Fig(q^6)$.

Si $[x, y, z]$ es un punto de tipo I entonces $[x, y, z] = [x, y, z]^\alpha$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned}
[x, y, z]^{\rho_{a,r}} &= [x, y, z]^{\alpha\rho_{a,r}} \\
&= [x, y, z]^{\rho_{a,r}\alpha}.
\end{aligned}
\quad \text{Por Teorema 3.20}$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^{\rho_{a,r}}$ es una recta de tipo I.

Si $[x, y, z]$ es un punto del tipo II entonces, por Observación 2.10, tenemos que

$$[x, y, z]^{\alpha^2} \cdot ([x, y, z] \times [x, y, z]^\alpha) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&[x^{q^4}, y^{q^4}, z^{q^4}] \cdot ([x, y, z] \times [x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}]) = 0 \\
\iff &[x^{q^4}, y^{q^4}, z^{q^4}] \cdot \begin{bmatrix} yz^{q^2} - zy^{q^2} \\ zx^{q^2} - xz^{q^2} \\ xy^{q^2} - yx^{q^2} \end{bmatrix} = 0 \\
\iff &\begin{bmatrix} yz^{q^2} - zy^{q^2} \\ zx^{q^2} - xz^{q^2} \\ xy^{q^2} - yx^{q^2} \end{bmatrix}^{\rho_{a,r}} \cdot [x^{q^4}, y^{q^4}, z^{q^4}]^{\rho_{a,r}} = 0 \quad \rho_{a,r} \text{ es una polaridad de } PG(2, q^6) \\
\iff &\left[\frac{yz^{q^2} - zy^{q^2}}{a}, -4r(zx^{q^2} - xz^{q^2}) - 2(xy^{q^2} - yx^{q^2}), -2(zx^{q^2} - xz^{q^2}) \right] \cdot \begin{bmatrix} ax^{q^4} \\ -\frac{z^{q^4}}{2} \\ rz^{q^4} - \frac{y^{q^4}}{2} \end{bmatrix} = 0 \\
\iff &\left[-\frac{z}{2} \left(rz^{q^2} - \frac{y^{q^2}}{2} \right) - \left(-\frac{z^{q^2}}{2} \right) \left(rz - \frac{y}{2} \right), ax^{q^2} \left(rz - \frac{y}{2} \right) - ax \left(rz^{q^2} - \frac{y^{q^2}}{2} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$ax \left(-\frac{z^{q^2}}{2} \right) - ax^{q^2} \left(-\frac{z}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} ax^{q^4} \\ -\frac{z^{q^4}}{2} \\ rz^{q^4} - \frac{y^{q^4}}{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff ([x, y, z]^{\rho_{a,r}} \times [x, y, z]^{\rho_{a,r\alpha}}) \cdot [x, y, z]^{\rho_{a,r\alpha^2}} = 0.$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^{\rho_{a,r}}$ es una recta de tipo II.

Dado que $\rho_{a,r}$ es una polaridad del plano $PG(2, q^6)$, en particular es una función biyectiva entre los puntos y las rectas de éste. Por otro lado, con lo demostrado anteriormente, $\rho_{a,r}$ lleva puntos de tipo I en rectas de tipo I y puntos de tipo II en rectas de tipo II. Por lo tanto, $\rho_{a,r}$ lleva puntos de tipo III en rectas de tipo III.

Sea $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ una recta en $Fig(q^6)$.

Si $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es una recta de tipo I entonces $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\alpha$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_{a,r}} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\alpha\rho_{a,r}} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_{a,r\alpha}}. \end{aligned} \quad \text{Por Teorema 3.20}$$

Por lo tanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_{a,r}}$ es un punto de tipo I.

Si $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es una recta de tipo II entonces, por Observación 2.11, tenemos que

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\alpha \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\alpha^2} = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{q^2} \\ y^{q^2} \\ z^{q^2} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x^{q^4} \\ y^{q^4} \\ z^{q^4} \end{bmatrix} = 0 \\ \iff &[yz^{q^2} - zy^{q^2}, zx^{q^2} - xz^{q^2}, xy^{q^2} - yx^{q^2}] \cdot \begin{bmatrix} x^{q^4} \\ y^{q^4} \\ z^{q^4} \end{bmatrix} = 0 \\ \iff &\begin{bmatrix} x^{q^4} \\ y^{q^4} \\ z^{q^4} \end{bmatrix}^{\rho_{a,r}} \cdot [yz^{q^2} - zy^{q^2}, zx^{q^2} - xz^{q^2}, xy^{q^2} - yx^{q^2}]^{\rho_{a,r}} = 0 \quad \rho_{a,r} \text{ es una polaridad de } PG(2, q^6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[\frac{x^{q^4}}{a}, -4ry^{q^4} - 2z^{q^4}, -2y^{q^4} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} a(yz^{q^2} - zy^{q^2}) \\ \frac{(xy^{q^2} - yx^{q^2})}{2} \\ r(xy^{q^2} - yx^{q^2}) - \frac{(zx^{q^2} - xz^{q^2})}{2} \end{array} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\frac{x^{q^2}}{a}, -4ry^{q^4} - 2z^{q^4}, -2y^{q^4} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} (-4ry - 2z)(-2y^{q^2}) - (-4ry^{q^2} - 2z^{q^2})(-2y) \\ \frac{x^{q^2}}{a}(-2y) - \frac{x}{a}(-2y^{q^2}) \\ \frac{x}{a}(-4ry^{q^2} - 2z^{q^2}) - \frac{x^{q^2}}{a}(-4ry - 2z) \end{array} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right]^{\rho_{a,r}\alpha^2} \cdot \left(\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right]^{\rho_{a,r}} \times \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right]^{\rho_{a,r}\alpha} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right]^{\rho_{a,r}}$ es un punto de tipo II.

Dado que $\rho_{a,r}$ es una polaridad del plano $PG(2, q^6)$, en particular es una función biyectiva entre las rectas y los puntos de éste. Por otro lado, por lo demostrado anteriormente, $\rho_{a,r}$ lleva rectas de tipo I en puntos de tipo I y lleva rectas de tipo II en puntos de tipo II. Por lo tanto, $\rho_{a,r}$ lleva rectas de tipo III en puntos de tipo III.

Por lo tanto, si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$, entonces la polaridad $\rho_{a,r}$ conserva tipo de puntos y de rectas en $Fig(q^6)$. \square

Lema 3.22. Si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$ entonces, para todo punto P de tipo III, se tiene que $P^{\mu\rho_{a,r}} = P^{\rho_{a,r}\mu}$.

Demostración. Sea $[x, y, z]$ un punto de tipo III. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
[x, y, z]^{\mu\rho_{a,r}} &= ([x, y, z]^\alpha \times [x, y, z]^{\alpha^2})^{\rho_{a,r}} \\
&= ([x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}] \times [x^{q^4}, y^{q^4}, z^{q^4}])^{\rho_{a,r}} \\
&= \left[\begin{array}{c} y^{q^2}z^{q^4} - z^{q^2}y^{q^4} \\ z^{q^2}x^{q^4} - x^{q^2}z^{q^4} \\ x^{q^2}y^{q^4} - y^{q^2}x^{q^4} \end{array} \right]^{\rho_{a,r}} \\
&= \left[\frac{y^{q^2}z^{q^4} - z^{q^2}y^{q^4}}{a}, -4r(z^{q^2}x^{q^4} - x^{q^2}z^{q^4}) - 2(x^{q^2}y^{q^4} - y^{q^2}x^{q^4}), -2(z^{q^2}x^{q^4} - x^{q^2}z^{q^4}) \right] \\
&= \left[\begin{array}{c} ax^{q^2} \\ -\frac{z^{q^2}}{2} \\ rz^{q^2} - \frac{y^{q^2}}{2} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} ax^{q^4} \\ -\frac{z^{q^4}}{2} \\ rz^{q^4} - \frac{y^{q^4}}{2} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c} ax \\ -\frac{z}{2} \\ rz - \frac{y}{2} \end{array} \right]^\alpha \times \left[\begin{array}{c} ax \\ -\frac{z}{2} \\ rz - \frac{y}{2} \end{array} \right]^{\alpha^2} \\
&= \left[\begin{array}{c} ax \\ -\frac{z}{2} \\ rz - \frac{y}{2} \end{array} \right]^\mu \\
&= [x, y, z]^{\rho_{a,r}\mu}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^{\mu\rho_{a,r}} = [x, y, z]^{\rho_{a,r}\mu}$. \square

Lema 3.23. Si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$ entonces, para toda recta l de tipo III, se tiene que $l^{\mu\rho_{a,r}} = l^{\rho_{a,r}\mu}$.

Demostración. Sea $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ una recta de tipo III. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mu\rho_{a,r}} &= \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\alpha} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\alpha^2} \right)^{\rho_{a,r}} \\
&= \left(\begin{bmatrix} x^{q^2} \\ y^{q^2} \\ z^{q^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{q^4} \\ y^{q^4} \\ z^{q^4} \end{bmatrix} \right)^{\rho_{a,r}} \\
&= \left[y^{q^2} z^{q^4} - z^{q^2} y^{q^4}, z^{q^2} x^{q^4} - x^{q^2} z^{q^4}, x^{q^2} y^{q^4} - y^{q^2} x^{q^4} \right]^{\rho_{a,r}} \\
&= \begin{bmatrix} a \left(\frac{y^{q^2} z^{q^4} - z^{q^2} y^{q^4}}{(x^{q^2} y^{q^4} - y^{q^2} x^{q^4})} \right) \\ r \left(x^{q^2} y^{q^4} - y^{q^2} x^{q^4} \right) - \frac{(z^{q^2} x^{q^4} - x^{q^2} z^{q^4})}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{x^{q^2}}{a}, -4ry^{q^2} - 2z^{q^2}, -2y^{q^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{x^{q^4}}{a}, -4ry^{q^4} - 2z^{q^4}, -2y^{q^4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{x}{a}, -4ry - 2z, -2y \end{bmatrix}^{\alpha} \times \begin{bmatrix} \frac{x}{a}, -4ry - 2z, -2y \end{bmatrix}^{\alpha^2} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{x}{a}, -4ry - 2z, -2y \end{bmatrix}^{\mu} \\
&= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_{a,r}\mu}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mu\rho_{a,r}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_{a,r}\mu}$. \square

Teorema 3.24. Si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$, entonces $\rho_{a,r}$ es una polaridad ortogonal de $Fig(q^6)$.

Demostración. $\rho_{a,r}$ es una función biyectiva ya que es una polaridad ortogonal de $PG(2, q^6)$. Por ende, basta demostrar que para todo punto P y recta l en $Fig(q^6)$ se cumple que

$$P I_{\mathcal{F}} l \iff l^{\rho_{a,r}} I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}.$$

Sea P un punto y l una recta, tal que por lo menos uno no es de tipo III, entonces

$$\begin{aligned}
P I_{\mathcal{F}} l &\iff P I l && \text{Definición 2.18} \\
&\iff l^{\rho_{a,r}} I P^{\rho_{a,r}} && \rho_{a,r} \text{ es una polaridad en } PG(2, q^6) \\
&\iff l^{\rho_{a,r}} I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}. && \text{Lema 3.21 y Definición 2.18}
\end{aligned}$$

Sean P y l de tipo III, entonces

$$P I_{\mathcal{F}} l \iff l^{\mu} I P^{\mu} \quad \text{Definición 2.18}$$

$$\begin{aligned}
&\iff P^{\mu\rho_{a,r}} I l^{\mu\rho_{a,r}} && \rho_{a,r} \text{ es una polaridad en } PG(2, q^6) \\
&\iff P^{\rho_{a,r}\mu} I l^{\rho_{a,r}\mu} && \text{Lema 3.22 y Lema 3.23} \\
&\iff l^{\rho_{a,r}} I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}. && \text{Definición 2.18}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho_{a,r}$ es una polaridad ortogonal de $Fig(q^6)$. \square

Definición 3.25. El conjunto de puntos absolutos definidos por la polaridad ortogonal $\rho_{a,r}$ en $Fig(q^6)$ lo denominaremos por $\mathcal{O}_{a,r}$.

Lema 3.26. $\mathcal{O}_{a,r}$ es el conjunto de los puntos de tipo I y de tipo II de $\mathcal{C}_{a,r}$ y los puntos de tipo III son tales que sus imágenes bajo μ son rectas tangentes a $\mathcal{C}_{a,r}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{a,r} &= \{P \in Fig(q^6) \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}\} \\
&= \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}\} \cup \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_3, P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}\} \\
&= \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P I P^{\rho_{a,r}}\} \cup \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_3, P^{\rho_{a,r}\mu} I P^{\mu}\} \\
&= \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P \in \mathcal{C}_{a,r}\} \cup \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_3, P^{\mu\rho_{a,r}} I P^{\mu}\} \\
&= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P \in \mathcal{C}_{a,r}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P^{\mu} \text{ tangente a } \mathcal{C}_{a,r}\}.
\end{aligned}$$

Entonces, los puntos de tipo I y de tipo II de $\mathcal{O}_{a,r}$ son los puntos de tipo I y de tipo II de $\mathcal{C}_{a,r}$ y los puntos de tipo III de $\mathcal{O}_{a,r}$ son tales que sus imágenes bajo μ son rectas tangentes a \mathcal{C} . \square

Corolario 3.27. Si P es un punto de tipo III contenido en $\mathcal{O}_{a,r}$, entonces $P^{\alpha}P^{\alpha^2}$ es una recta tangente a $\mathcal{C}_{a,r}$.

Demostración. Si $P \in \mathcal{O}_{a,r}$ es un punto de tipo III, entonces P^{μ} es una recta tangente a $\mathcal{C}_{a,r}$. Por Definición 2.17, $P^{\mu} = P^{\alpha}P^{\alpha^2}$ es una recta tangente a $\mathcal{C}_{a,r}$. \square

Corolario 3.28. El conjunto $\mathcal{O}_{a,r}$ no contiene puntos de tipo II.

Demostración. Por Teorema 3.20 y Lema 2.32, la polaridad $\rho_{a,r}$ no tiene puntos absolutos de tipo II, por lo cual la cónica $\mathcal{C}_{a,r}$ no contiene puntos de tipo II. Por Lema 3.26, $\mathcal{O}_{a,r}$ no contiene puntos de tipo II. \square

Observación 3.29. Por Lema 3.26, $\mathcal{C}_{a,r}$ y $\mathcal{O}_{a,r}$ comparten los puntos de tipo I y sus puntos de tipo III están en correspondencia (ver la Subsección 3.2). Por lo que $|\mathcal{O}_{a,r}| = |\mathcal{C}_{a,r}| = q^6 + 1$.

Lema 3.30. Toda recta de $Fig(q^6)$ intersecta a $\mathcal{O}_{a,r}$ en a lo más dos puntos.

Demostración. Por Teorema 2.15, las rectas de tipo I de $Fig(q^6)$ sólo contienen puntos de tipo I y de tipo II. Por Corolario 3.28, las rectas de tipo I intersectan a $\mathcal{O}_{a,r}$ sólo en puntos de tipo I, pero los puntos de tipo I de $\mathcal{O}_{a,r}$ son los mismos puntos de tipo I de $\mathcal{C}_{a,r}$, entonces una recta de tipo I de $Fig(q^6)$ intersecta a $\mathcal{O}_{a,r}$ en a lo más dos puntos.

Supongamos que existe una recta l de tipo II de $Fig(q^6)$ que intersecta a $\mathcal{O}_{a,r}$ en tres puntos, sean estos P_1, P_2 y P_3 .

Supongamos que P_1 es de tipo I y P_2, P_3 de tipo III. Entonces, $P_2^{\alpha}, P_2^{\alpha^2}, P_3^{\alpha}$ y $P_3^{\alpha^2}$ también son puntos de $\mathcal{O}_{a,r}$. Como P_2 y P_3 están en l , P_2^{α} y P_3^{α} están en l^{α} y $P_2^{\alpha^2}$ y $P_3^{\alpha^2}$ están en l^{α^2} . Por otro lado, l, l^{α} y l^{α^2} concurren en P_1 . Por lo tanto, los triángulos $[P_2, P_2^{\alpha}, P_2^{\alpha^2}]$ y $[P_3, P_3^{\alpha}, P_3^{\alpha^2}]$ están en perspectiva desde P_1 . Por Corolario 3.27, los lados de los triángulos son tangentes a $\mathcal{C}_{a,r}$, sean estos puntos de tangencia $P_2^{\mu\rho_{a,r}}, (P_2^{\alpha})^{\mu\rho_{a,r}}, (P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}, P_3^{\mu\rho_{a,r}}, (P_3^{\alpha})^{\mu\rho_{a,r}}$ y $(P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}$. Luego, por Lema 2.37, los triángulos $[P_2^{\mu\rho_{a,r}}, (P_2^{\alpha})^{\mu\rho_{a,r}}, (P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}]$ y $[P_3^{\mu\rho_{a,r}}, (P_3^{\alpha})^{\mu\rho_{a,r}}, (P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}]$ están en perspectiva desde el punto P_1 , es

decir, P_1 es colineal con $P_2^{\mu\rho_{a,r}}$ y $P_3^{\mu\rho_{a,r}}$, $(P_2^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}$ y $(P_3^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}$, y con $(P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}$ y $(P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}$, por lo que es una contradicción debido que una recta intersecta a $\mathcal{C}_{a,r}$ en a lo más dos puntos.

Supongamos ahora que P_1, P_2 y P_3 son puntos de tipo III. Entonces, $P_1^\alpha, P_1^{\alpha^2}, P_2^\alpha, P_2^{\alpha^2}, P_3^\alpha$ y $P_3^{\alpha^2}$ también son puntos de $\mathcal{O}_{a,r}$. Como P_1, P_2 y P_3 están en l , P_1^α, P_2^α y P_3^α están en l^α , y $P_1^{\alpha^2}, P_2^{\alpha^2}$ y $P_3^{\alpha^2}$ están en l^{α^2} . Por otro lado, l, l^α y l^{α^2} concurren a un punto Q de tipo I, por ser l una recta de tipo II (suponemos $Q \notin \mathcal{C}_{a,r}$ sino estamos en el caso anterior). Por lo tanto, los triángulos $[P_1, P_1^\alpha, P_1^{\alpha^2}]$, $[P_2, P_2^\alpha, P_2^{\alpha^2}]$ y $[P_3, P_3^\alpha, P_3^{\alpha^2}]$ están en perspectiva desde Q . Por Corolario 3.27, los lados de los triángulos son tangentes a $\mathcal{C}_{a,r}$, sean estos puntos de tangencia $P_1^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}, P_2^{\mu\rho_{a,r}}, (P_2^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}, (P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}, P_3^{\mu\rho_{a,r}}, (P_3^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}, (P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}$. Luego sin perder generalidad, por Lema 2.37, los triángulos $[P_1^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}]$ y $[P_2^{\mu\rho_{a,r}}, (P_2^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}, (P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}]$ están en perspectiva desde el punto Q , y los triángulos $[P_1^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}]$ y $[P_3^{\mu\rho_{a,r}}, (P_3^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}, (P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}]$ están en perspectiva desde el punto Q , es decir, Q es colineal con $P_1^{\mu\rho_{a,r}}$ y $P_2^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}$ y $(P_2^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}$ y $(P_2^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}, P_1^{\mu\rho_{a,r}}$ y $P_3^{\mu\rho_{a,r}}, (P_1^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}$ y $(P_3^\alpha)^{\mu\rho_{a,r}}$, y con $(P_1^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}$ y $(P_3^{\alpha^2})^{\mu\rho_{a,r}}$. Así, tenemos que $Q, P_1^{\mu\rho_{a,r}}$ y $P_2^{\mu\rho_{a,r}}$ son colineales al igual que $Q, P_1^{\mu\rho_{a,r}}$ y $P_3^{\mu\rho_{a,r}}$, entonces $P_1^{\mu\rho_{a,r}}, P_2^{\mu\rho_{a,r}}$ y $P_3^{\mu\rho_{a,r}}$ son colineales, por lo que es una contradicción debido que una recta intersecta a $\mathcal{C}_{a,r}$ en a lo más dos puntos. Por lo tanto, una recta de tipo II de $Fig(q^6)$ intersecta a $\mathcal{O}_{a,r}$ en a lo más dos puntos.

Supongamos que existe un recta l de tipo III en $Fig(q^3)$ que intersecta a $\mathcal{O}_{a,r}$ en tres puntos de tipo III, sean estos P_1, P_2 y P_3 , entonces

$$P_i I_{\mathcal{F}} l, \text{ con } i \in \{1, 2, 3\} \iff l^\mu I P_i^\mu, \text{ con } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Luego, l^μ tiene tres pies de tangencia en $\mathcal{C}_{a,r}$, debido a que P_i^μ son rectas tangentes a $\mathcal{C}_{a,r}$, lo cual, por el Lema 2.39, es una contradicción. Por lo tanto, una recta de tipo III de $Fig(q^6)$ intersecta a $\mathcal{O}_{a,r}$ en a lo más dos puntos.

Por lo tanto, toda recta de $Fig(q^6)$ intersecta a $\mathcal{O}_{a,r}$ en a lo más dos puntos. \square

Teorema 3.31. $\mathcal{O}_{a,r}$ es un óvalo en $Fig(q^6)$.

Demostración. Por Lema 3.30 o Teorema 2.26, y Observación 3.29, el conjunto $\mathcal{O}_{a,r}$ es un óvalo en $Fig(q^6)$. \square

Proposición 3.32. No hay puntos en común entre los puntos de tipo III de $\mathcal{C}_{a,r}$ y los puntos de tipo III de $\mathcal{O}_{a,r}$.

Demostración. Supongamos que existe un punto P de tipo III contenido en $\mathcal{C}_{a,r}$ y $\mathcal{O}_{a,r}$. Como $P \in \mathcal{O}_{a,r}$, tenemos que P^μ es una recta tangente a $\mathcal{C}_{a,r}$.

Por otro lado, como $P \in \mathcal{C}_{a,r}$, tenemos que P^α, P^{α^2} pertenecen a $\mathcal{C}_{a,r}$. Luego, por Definición 2.17, $P^\mu = P^\alpha P^{\alpha^2}$. Por lo tanto, P^μ es una recta secante a $\mathcal{C}_{a,r}$, lo cual es una contradicción. \square

Definición 3.33. Sea ρ_r la polaridad ortogonal $\rho_{a,r}$ con $a \in GF(q^6)$ tal que $N(a)$ no es un cuadrado en $GF(q^3)$ y $r \in GF(q^3)$.

Observación 3.34. Los puntos absolutos de las polaridades ρ_r forman las cónicas \mathcal{C}_r (ver Teorema 2.50 o Ejemplo 2.31).

Corolario 3.35. Si $a \in GF(q^2)^*$ tal que $N(a)$ no es un cuadrado en $GF(q^3)$ y $r \in GF(q)$, entonces los puntos absolutos de la polaridad ortogonal ρ_r forman un óvalo en $Fig(q^6)$.

Demostración. Por Teorema 3.31, si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$ los puntos absolutos de la polaridad $\rho_{a,r}$ forman un óvalo en $Fig(q^6)$. Por Definición 3.33, ρ_r está caracterizado por $a \in GF(q^6)$ tal que $N(a)$ no es un cuadrado en $GF(q^3)$ y $r \in GF(q^3)$, entonces si $a \in GF(q^2)^*$ tal que $N(a)$ no es un cuadrado en $GF(q^3)$ y $r \in GF(q)$, los puntos absolutos de ρ_r forman un óvalo en $Fig(q^6)$. \square

3.2.1. Correspondencia entre los puntos de tipo III de $\mathcal{C}_{a,r}$ y los puntos de tipo III de $\mathcal{O}_{a,r}$

Definición 3.36. Sea $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$. Sea P un punto de tipo III, definimos la función

$$\begin{aligned} \varphi_{a,r}: \mathcal{P}_3 &\rightarrow \mathcal{P}_3 \\ P &\mapsto P^{\rho_{a,r}\mu}. \end{aligned}$$

Observación 3.37. Como $\rho_{a,r}$ y μ son funciones biyectivas, $\varphi_{a,r}$ es biyectiva.

Teorema 3.38. La función $\varphi_{a,r}$ lleva los puntos de tipo III de $\mathcal{C}_{a,r}$ en los puntos de tipo III de $\mathcal{O}_{a,r}$.

Demostración. Sea P un punto de tipo III contenido en $\mathcal{C}_{a,r}$, entonces

$$\begin{aligned} P \text{ I } P^{\rho_{a,r}} &\iff P^{\rho_{a,r}\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} P^{\mu} && \text{Lema 3.21} \\ &\iff P^{\rho_{a,r}\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} (P^{\mu\rho_{a,r}})^{\rho_{a,r}} && \rho_{a,r} \text{ es de orden 2} \\ &\iff P^{\rho_{a,r}\mu} \text{ I}_{\mathcal{F}} (P^{\rho_{a,r}\mu})^{\rho_{a,r}}. && \text{Lema 3.22} \end{aligned}$$

Luego, $P^{\rho_{a,r}\mu}$ está contenido en $\mathcal{O}_{a,r}$. □

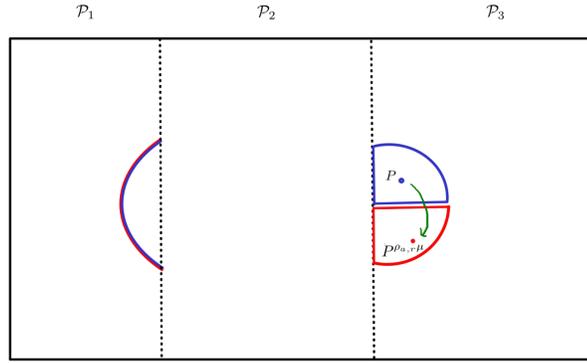


Figura 4: Correspondencia entre los puntos de tipo III de $\mathcal{C}_{a,r}$ (azul) y los puntos de tipo III de $\mathcal{O}_{a,r}$ (rojo).

Corolario 3.39. $\mathcal{O}_{a,r} = \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P \in \mathcal{C}_{a,r}\} \cup \{P^{\rho_{a,r}\mu} \in \text{Fig}(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_3 \text{ contenido en } \mathcal{C}_{a,r}\}$.

Demostración. Por Teorema 3.38, los puntos de tipo III de $\mathcal{O}_{a,r}$ son los puntos $P^{\rho_{a,r}\mu}$ tales que P es un punto de tipo III de $\mathcal{C}_{a,r}$. □

Definición 3.40. Sea $\overline{\varphi_{a,r}}: PG(2, q^6) \rightarrow \text{Fig}(q^6)$ la función definida por

$$\overline{\varphi_{a,r}}|_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2} = Id \quad \text{y} \quad \overline{\varphi_{a,r}}|_{\mathcal{P}_3} = \varphi_{a,r}.$$

Observación 3.41. Por Teorema 3.38, podemos obtener que $\overline{\varphi_{a,r}}(\mathcal{C}_{a,r}) = \mathcal{O}_{a,r}$.

3.3. Ejemplos

En este capítulo hemos demostrado que si $a \in GF(q^2)^*$ y $r \in GF(q^2)$, los puntos absolutos de la polaridad $\rho_{a,r}$ forman un óvalo en $\text{Fig}(q^6)$, pero ¿qué sucede cuando la polaridad $\rho_{a,r}$ está definida a partir $a \notin GF(q^2)$ o $r \notin GF(q^2)$?

En base la programación en SAGE del Anexo B, presentamos dos ejemplos en $PG(2, 3^6)$, uno donde la polaridad $\rho_{a,r}$ esté definida por un $a \notin GF(3^2)$ y otro donde esté definida por un $r \notin GF(3^2)$.

La cantidad de a que no están contenidas en $GF(3^2)$ es de 720 y la cantidad de a que no están contenidas en $GF(3^2)$, pero donde $N(a)$ no es un cuadrado de $GF(3^3)$, es de 360. Por otro lado, la cantidad de r que no están contenidos en $GF(3^2)$ es de 720.

3.3.1. Para $r \notin GF(3^2)$, los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$

Por efecto de la cantidad de posibilidades a y r , de forma aleatoria elegimos un $a \in GF(3^2)^*$, pero con $N(a)$ no cuadrado de $GF(3^3)$, y un $r \in GF(3^3) \setminus GF(3)$, para presentar lo que sucede con las polaridades asociadas a las cónicas vistas en el Teorema 2.50 y Ejemplo 2.31.

La cantidad de $a \in GF(3^2)^*$, pero con $N(a)$ no cuadrado de $GF(3^3)$, es 4 y de $r \in GF(3^3) \setminus GF(3)$ es 24. Luego, a partir de lo anterior, definimos las polaridades ortogonales $\rho_{a,r}$ donde $a = 2c^5 + 2c^3 + c^2 + 2c + 2$ (c es el elemento primitivo de la extensión $GF(3^6)/GF(3)$) y $r \in GF(3^3) \setminus GF(3)$, por lo que tenemos 24 polaridades $\rho_{a,r}$ distintas. En la siguiente tabla resumimos la cantidad de los puntos de cada tipo contenidos en $\mathcal{C}_{a,r}$.

Cantidad de r	Puntos de tipo I en $\mathcal{C}_{a,r}$	Puntos de tipo II en $\mathcal{C}_{a,r}$	Puntos de tipo III en $\mathcal{C}_{a,r}$
18	1	45	684
6	1	117	612

Tabla 2: Cantidad de los puntos de cada tipo contenidos en $\mathcal{C}_{a,r}$.

Dado lo anterior, observamos que hay dos tipos de r donde la estructura de tipo de punto de $\mathcal{C}_{a,r}$ es distinta.

Para observar la primera clase de la tabla, definimos la polaridad ortogonal $\rho_{a,r}$ donde a es el mismo que escogimos anteriormente y $r = c^4 + 2c^3 + 1$.

$$\mathcal{C}_{a,r} = \{[x, (2c^5 + 2c^3 + c^2 + 2c + 2) \cdot x^2 + (c^4 + 2c^3 + 1), 1] \mid x \in GF(3^6)\} \cup \{[0, 1, 0]\},$$

la cual contiene:

1. 1 punto de tipo I.
2. 45 puntos de tipo II.
3. 684 puntos de tipo III.

A partir de lo anterior, obtuvimos los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ en $Fig(3^6)$, los cuales forman el conjunto

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}_{a,r}} &= \{P \in Fig(3^6) \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P I P^{\rho_{a,r}}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \notin \mathcal{L}_3\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \in \mathcal{L}_3\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P I P^{\rho_{a,r}}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \notin \mathcal{L}_3\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P^{\rho_{a,r}} I P^{\mu} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \in \mathcal{L}_3\}, \end{aligned}$$

el cual contiene:

1. 1 punto de tipo I.
2. 45 puntos de tipo II.
3. 36 puntos de tipo III tales que su imagen bajo $\rho_{a,r}$ no es una recta de tipo III.
4. 288 puntos de tipo III tales que su imagen bajo $\rho_{a,r}$ es una recta de tipo III.

Por ende, $\rho_{a,r}$ no preserva puntos de tipo III y $|\overline{\mathcal{C}_{a,r}}| = 370$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ no es un óvalo en $Fig(3^6)$ al no tener la cantidad de $3^6 + 1$ puntos.

Por otro lado, observamos que la cantidad de rectas de tipo I y de tipo II que intersectan en más de dos puntos a $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ es de 8694, lo cual también justifica que $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ no es un óvalo en $Fig(3^6)$ debido a que si fuera óvalo, toda recta de $Fig(3^6)$ no debe intersectarlo en más de 2 puntos.

Para observar la segunda clase de la tabla, definimos la polaridad ortogonal $\rho_{a,r}$ donde a es el mismo que elegimos anteriormente y $r = 2c^5 + 2c^4 + 1$.

$$\mathcal{C}_{a,r} = \{[x, (2c^5 + 2c^3 + c^2 + 2c + 2) \cdot x^2 + (2c^5 + 2c^4 + 1), 1] \mid x \in GF(3^6)\} \cup \{[0, 1, 0]\},$$

la cual contiene:

1. 1 punto de tipo I.
2. 175 puntos de tipo II.
3. 612 puntos de tipo III.

A partir de lo anterior, obtuvimos los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ en $Fig(3^6)$, los cuales forman el conjunto

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}_{a,r}} &= \{P \in Fig(3^6) \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P I P^{\rho_{a,r}}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \notin \mathcal{L}_3\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \in \mathcal{L}_3\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P I P^{\rho_{a,r}}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \notin \mathcal{L}_3\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P^{\rho_{a,r}\mu} I P^{\mu} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \in \mathcal{L}_3\}, \end{aligned}$$

el cual contiene:

1. 1 punto de tipo I.
2. 117 puntos de tipo II.
3. 108 puntos de tipo III tales que su imagen bajo $\rho_{a,r}$ no es una recta de tipo III.
4. 720 puntos de tipo III tales que su imagen bajo $\rho_{a,r}$ es una recta de tipo III.

Por ende, $\rho_{a,r}$ no preserva puntos de tipo III y $|\overline{\mathcal{C}_{a,r}}| = 946$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ no es un óvalo en $Fig(3^6)$ al no tener la cantidad de $3^6 + 1$ puntos.

Por otro lado, observamos que la cantidad de rectas de tipo I y de tipo II que intersectan en más de dos puntos a $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ es de 1044, lo cual también justifica que $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ no es un óvalo en $Fig(3^6)$ debido a que si fuera óvalo, toda recta de $Fig(3^6)$ no debe intersectarlo en más de 2 puntos.

3.3.2. Para $a \notin GF(3^2)$, los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$

Por efecto de la cantidad de posibilidades a y r , de forma aleatoria elegimos un $a \in GF(3^6) \setminus GF(3^2)$ pero con $N(a)$ no cuadrado de $GF(3^3)$ y un $r \in GF(3)$, para presentar lo que sucede con las polaridades asociadas a las cónicas vistas en el Teorema 2.50 y Ejemplo 2.31.

A partir de lo anterior, definimos la polaridad ortogonal $\rho_{a,r}$ donde $a = 2c^5 + 2c^4 + c^3 + c^2 + 2c$ (c es el elemento primitivo de la extensión $GF(3^6)/GF(3)$) y $r = 2$.

Los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ forman la cónica

$$\mathcal{C}_{a,r} = \{[x, (2c^5 + 2c^4 + c^3 + c^2 + 2c) \cdot x^2 + 2, 1] \mid x \in GF(3^6)\} \cup \{[0, 1, 0]\},$$

la cual contiene:

1. 2 puntos de tipo I.
2. 40 puntos de tipo II.
3. 688 puntos de tipo III.

A partir de lo anterior, obtuvimos los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ en $Fig(3^6)$, los cuales forman el conjunto

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{C}_{a,r}} &= \{P \in Fig(3^6) \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}}\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P I P^{\rho_{a,r}}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \notin \mathcal{L}_3\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \in \mathcal{L}_3\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P I P^{\rho_{a,r}}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I P^{\rho_{a,r}} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \notin \mathcal{L}_3\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P^{\rho_{a,r}} I P^{\mu} \text{ y } P^{\rho_{a,r}} \in \mathcal{L}_3\},\end{aligned}$$

el cual contiene:

1. 2 puntos de tipo I.
2. 40 puntos de tipo II.
3. 48 puntos de tipo III tales que su imagen bajo $\rho_{a,r}$ no es una recta de tipo III.
4. 544 puntos de tipo III tales que su imagen bajo $\rho_{a,r}$ es una recta de tipo III.

Por ende, $\rho_{a,r}$ no preserva puntos de tipo III y $|\overline{\mathcal{C}_{a,r}}| = 634$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ no es un óvalo en $Fig(3^6)$ al no tener la cantidad de $3^6 + 1$ puntos.

Por otro lado, observamos que la cantidad de rectas de tipo I y de tipo II que intersectan en más de dos puntos a $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ es de 4024, lo cual también justifica que $\overline{\mathcal{C}_{a,r}}$ no es un óvalo en $Fig(3^6)$ debido a que si fuera óvalo, toda recta de $Fig(3^6)$ no debe intersectarlo en más de 2 puntos.

4. Unitales ortogonales de Buekenhout-Metz, con $a = 0$, en el Plano de Figueroa

En este capítulo, a partir de Hamilton y de Resmini [5], hemos demostrado que los puntos absolutos de la polaridad unitaria determinada por la matriz

$$M_b = \begin{pmatrix} \epsilon(b - b^{q^3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix},$$

donde ϵ es elemento primitivo de la extensión $GF(q^6)/GF(q^3)$ y $b \in GF(q^6) \setminus GF(q^3)$, forman un unital en el plano proyectivo de Figueroa si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$.

Por otro lado, a través de la herramienta computacional SAGE, para $Fig(3^6)$ elaboramos un ejemplo afín a lo que estudiamos, el cual exponemos al final de este capítulo y también lo presentamos en Anexo C.

4.1. Polaridad unitaria representada por la matriz M_b

Sea ρ_b la polaridad unitaria de $PG(2, q^6)$, definida como

$$\rho_b: [x, y, z] \mapsto M_b \cdot \begin{bmatrix} x^{q^3} \\ y^{q^3} \\ z^{q^3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto [x^{q^3}, y^{q^3}, z^{q^3}] \cdot M_b^{-1}.$$

Por el Lema 2.2, los puntos absolutos de la polaridad ρ_b forman, en $PG(2, q^6)$, el siguiente unital ortogonal de Buekenhout-Metz

$$U_{0,b} = \{[x, y, z] \in PG(2, q^6) \mid [x, y, z] \cdot [x, y, z]^{\rho_b} = 0\} = \{[x, bx^{q^3+1} + r, 1] \mid x \in GF(q^6) \text{ y } r \in GF(q^3)\} \cup \{[0, 1, 0]\}.$$

Teorema 4.1. *La polaridad ρ_b y la colineación α (ver Subsección 2.5.3) conmutan si y sólo si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$.*

Demostración. Sea $[x_1, y_1, z_1]$ un punto y $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ una recta, contenidas $PG(2, q^6)$. Si $\alpha\rho_b = \rho_b\alpha$, tenemos las siguientes dos igualdades:

$$\begin{bmatrix} \epsilon(b - b^{q^3}) \cdot (x_1^{q^2})^{q^3} \\ -\epsilon \cdot (z_1^{q^2})^{q^3} \\ \epsilon \cdot (y_1^{q^2})^{q^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon(b - b^{q^3})^{q^2} \cdot (x_1^{q^2})^{q^3} \\ -\epsilon \cdot (z_1^{q^2})^{q^3} \\ \epsilon \cdot (y_1^{q^2})^{q^3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(x_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon(b - b^{q^3})}, \frac{(z_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon}, \frac{(y_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon(b - b^{q^3})^{q^2}}, \frac{(z_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon}, \frac{(y_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon} \end{bmatrix}.$$

Entonces, $b - b^{q^3} = (b - b^{q^3})^{q^2}$ con $b - b^{q^3} \neq 0$. Por lo tanto, $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$.

Ahora asumimos que $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[x_1, y_1, z_1]^{\alpha\rho_b} &= [x_1^{q^2}, y_1^{q^2}, z_1^{q^2}]^{\rho_b} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) \cdot (x_1^{q^2})^{q^3} \\ -\epsilon \cdot (z_1^{q^2})^{q^3} \\ \epsilon \cdot (y_1^{q^2})^{q^3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) \cdot (x_1^{q^3})^{q^2} \\ -\epsilon \cdot (z_1^{q^3})^{q^2} \\ \epsilon \cdot (y_1^{q^3})^{q^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3})^{q^4} x_1^{q^3} \\ -\epsilon z_1^{q^3} \\ \epsilon y_1^{q^3} \end{bmatrix}^{\alpha} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) x_1^{q^3} \\ -\epsilon z_1^{q^3} \\ \epsilon y_1^{q^3} \end{bmatrix}^{\alpha} \\
&= [x_1, y_1, z_1]^{\rho_b \alpha}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\alpha\rho_b} &= \begin{bmatrix} \frac{(x_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon (b - b^{q^3})}, \frac{-(z_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon}, \frac{(y_2^{q^2})^{q^3}}{\epsilon} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(x_2^{q^3})^{q^2}}{\epsilon (b - b^{q^3})}, \frac{-(z_2^{q^3})^{q^2}}{\epsilon}, \frac{(y_2^{q^3})^{q^2}}{\epsilon} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{x_2^{q^3}}{\epsilon (b - b^{q^3})^{q^4}}, \frac{-z_2^{q^3}}{\epsilon}, \frac{y_2^{q^3}}{\epsilon} \end{bmatrix}^{\alpha} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{x_2^{q^3}}{\epsilon (b - b^{q^3})}, \frac{-z_2^{q^3}}{\epsilon}, \frac{y_2^{q^3}}{\epsilon} \end{bmatrix}^{\alpha} \\
&= \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\rho_b \alpha}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ_b y α conmutan. □

Lema 4.2. Si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$ entonces la polaridad unitaria ρ_b preserva tipo de punto y tipo de recta en $Fig(q^6)$.

Demostración. Sea $[x, y, z]$ un punto en $Fig(q^6)$.

Si $[x, y, z]$ es un punto de tipo I entonces $[x, y, z] = [x, y, z]^\alpha$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} [x, y, z]^{\rho_b} &= [x, y, z]^{\alpha\rho_b} \\ &= [x, y, z]^{\rho_b\alpha}. \end{aligned} \quad \text{Por Teorema 4.1}$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^{\rho_b}$ es una recta de tipo I.

Si $[x, y, z]$ es un punto de tipo II entonces, por Observación 2.10, tenemos que

$$[x, y, z]^{\alpha^2} \cdot ([x, y, z] \times [x, y, z]^\alpha) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & [x^{q^4}, y^{q^4}, z^{q^4}] \cdot ([x, y, z] \times [x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}]) = 0 \\ \Leftrightarrow & [x^{q^4}, y^{q^4}, z^{q^4}] \cdot \begin{bmatrix} yz^{q^2} - zy^{q^2} \\ zx^{q^2} - xz^{q^2} \\ xy^{q^2} - yx^{q^2} \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} yz^{q^2} - zy^{q^2} \\ zx^{q^2} - xz^{q^2} \\ xy^{q^2} - yx^{q^2} \end{bmatrix}^{\rho_b} \cdot [x^{q^4}, y^{q^4}, z^{q^4}]^{\rho_b} = 0 \quad \rho_b \text{ es una polaridad de } PG(2, q^6) \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{(yz^{q^2} - zy^{q^2})^{q^3}}{\epsilon(b - bq^3)}, -\frac{(xy^{q^2} - yx^{q^2})^{q^3}}{\epsilon}, \frac{(zx^{q^2} - xz^{q^2})^{q^3}}{\epsilon} \right] \cdot \begin{bmatrix} \epsilon(b - bq^3)(x^{q^4})^{q^3} \\ -\epsilon(z^{q^4})^{q^3} \\ \epsilon(y^{q^4})^{q^3} \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{y^{q^3}(z^{q^2})^{q^3} - z^{q^3}(y^{q^2})^{q^3}}{\epsilon(b - bq^3)}, -\frac{x^{q^3}(y^{q^2})^{q^3} - y^{q^3}(x^{q^2})^{q^3}}{\epsilon}, \frac{z^{q^3}(x^{q^2})^{q^3} - x^{q^3}(z^{q^2})^{q^3}}{\epsilon} \right] \\ & \cdot \begin{bmatrix} \epsilon(b - bq^3)(x^{q^4})^{q^3} \\ -\epsilon(z^{q^4})^{q^3} \\ \epsilon(y^{q^4})^{q^3} \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\epsilon^2 \left(y^{q^3} (z^{q^2})^{q^3} - z^{q^3} (y^{q^2})^{q^3} \right), -\epsilon^2 (b - bq^3) \left(x^{q^3} (y^{q^2})^{q^3} - y^{q^3} (x^{q^2})^{q^3} \right), \right. \\ & \left. \epsilon^2 (b - bq^3) \left(z^{q^3} (x^{q^2})^{q^3} - x^{q^3} (z^{q^2})^{q^3} \right) \right] \cdot \begin{bmatrix} \epsilon(b - bq^3)(x^{q^3})^{q^4} \\ -\epsilon(z^{q^3})^{q^4} \\ \epsilon(y^{q^3})^{q^4} \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{bmatrix} \epsilon(b - bq^3)x^{q^3} \\ -\epsilon z^{q^3} \\ \epsilon y^{q^3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon(b - bq^3)(x^{q^3})^{q^2} \\ -\epsilon(z^{q^3})^{q^2} \\ \epsilon(y^{q^3})^{q^2} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \epsilon(b - bq^3)(x^{q^3})^{q^4} \\ -\epsilon(z^{q^3})^{q^4} \\ \epsilon(y^{q^3})^{q^4} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\iff ([x, y, z]^{\rho_b} \times [x, y, z]^{\rho_b \alpha}) \cdot [x, y, z]^{\rho_b \alpha^2} = 0.$$

Por lo tanto, $[x, y, z]^{\rho_b}$ es una recta de tipo II.

Dado que ρ_b es una polaridad del plano $PG(2, q^6)$, en particular es una función biyectiva entre los puntos y rectas de éste. Por otro lado, por lo demostrado anteriormente, ρ_b lleva puntos de tipo I en rectas de tipo I y puntos de tipo II en rectas de tipo II. Por lo tanto, ρ_b lleva puntos de tipo III en rectas de tipo III.

Sea $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ una recta en $Fig(q^6)$.

Si $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es una recta de tipo I entonces $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\alpha$. Luego,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_b} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\alpha \rho_b} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_b \alpha} \end{aligned}$$

Por Teorema 4.1

Por lo tanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_b}$ es un punto de tipo I.

Si $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es una recta de tipo II entonces l^{ρ_b} , por Observación 2.11, tenemos que

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\alpha \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\alpha^2} = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{q^2} \\ y^{q^2} \\ z^{q^2} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x^{q^4} \\ y^{q^4} \\ z^{q^4} \end{bmatrix} = 0 \\ \iff &[yz^{q^2} - zy^{q^2}, zx^{q^2} - xz^{q^2}, xy^{q^2} - yx^{q^2}] \cdot \begin{bmatrix} x^{q^4} \\ y^{q^4} \\ z^{q^4} \end{bmatrix} = 0 \\ \iff &\begin{bmatrix} x^{q^4} \\ y^{q^4} \\ z^{q^4} \end{bmatrix}^{\rho_b} \cdot [yz^{q^2} - zy^{q^2}, zx^{q^2} - xz^{q^2}, xy^{q^2} - yx^{q^2}]^{\rho_b} = 0 \quad \rho_b \text{ es una polaridad de } PG(2, q^6) \\ \iff &\begin{bmatrix} \frac{(x^{q^4})^{q^3}}{\epsilon(b-b^{q^3})}, -\frac{(z^{q^4})^{q^3}}{\epsilon}, \frac{(y^{q^4})^{q^3}}{\epsilon} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon(b-b^{q^3})(yz^{q^2} - zy^{q^2})^{q^3} \\ -\epsilon(xy^{q^2} - yx^{q^2})^{q^3} \\ \epsilon(zx^{q^2} - xz^{q^2})^{q^3} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[\frac{(x^{q^3})^{q^4}}{\epsilon(b-b^{q^3})}, -\frac{(z^{q^3})^{q^4}}{\epsilon}, \frac{(y^{q^3})^{q^4}}{\epsilon} \right] \cdot \left[\frac{\frac{y^{q^3}(z^{q^2})^{q^3} - z^{q^3}(y^{q^2})^{q^3}}{x^{q^3}(y^{q^2})^{q^3} - y^{q^3}(x^{q^2})^{q^3}}{\epsilon^2(b-b^{q^3})}}{\frac{z^{q^3}(x^{q^2})^{q^3} - x^{q^3}(z^{q^2})^{q^3}}{\epsilon^2(b-b^{q^3})}} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\frac{(x^{q^3})^{q^4}}{\epsilon(b-b^{q^3})}, -\frac{(z^{q^3})^{q^4}}{\epsilon}, \frac{(y^{q^3})^{q^4}}{\epsilon} \right] \cdot \left(\left[\frac{x^{q^3}}{\epsilon(b-b^{q^3})}, -\frac{z^{q^3}}{\epsilon}, \frac{y^{q^3}}{\epsilon} \right] \times \left[\frac{(x^{q^3})^{q^2}}{\epsilon(b-b^{q^3})}, -\frac{(z^{q^3})^{q^2}}{\epsilon}, \frac{(y^{q^3})^{q^2}}{\epsilon} \right] \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_b \alpha^2} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_b} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_b \alpha} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_b}$ es una recta de tipo II.

Dado que ρ_b es una polaridad del plano $PG(2, q^6)$, en particular es una función biyectiva entre las rectas y los puntos de éste. Por otro lado, por lo demostrado anteriormente, ρ_b lleva rectas de tipo I en puntos de tipo I y rectas de tipo II en puntos de tipo II. Por lo tanto, ρ_b lleva rectas del tipo III en puntos del tipo III.

Por lo tanto, si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$ la polaridad ρ_b conserva tipo de punto y tipo de recta en $Fig(q^6)$. \square

Lema 4.3. Si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$ entonces, para todo punto P de tipo III, se tiene que $P^{\mu\rho_b} = P^{\rho_b\mu}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
[x, y, z]^{\mu\rho_b} &= ([x, y, z]^\alpha \times [x, y, z]^{\alpha^2})^{\rho_b} \\
&= \left([x^{q^2}, y^{q^2}, z^{q^2}] \times [x^{q^4}, y^{q^4}, z^{q^4}] \right)^{\rho_b} \\
&= \left[\begin{array}{c} y^{q^2} z^{q^4} - z^{q^2} y^{q^4} \\ z^{q^2} x^{q^4} - x^{q^2} z^{q^4} \\ x^{q^2} y^{q^4} - y^{q^2} x^{q^4} \end{array} \right]^{\rho_b} \\
&= \left[\frac{(y^{q^2} z^{q^4} - z^{q^2} y^{q^4})^{q^3}}{\epsilon(b-b^{q^3})}, -\frac{(x^{q^2} y^{q^4} - y^{q^2} x^{q^4})^{q^3}}{\epsilon}, \frac{(z^{q^2} x^{q^4} - x^{q^2} z^{q^4})^{q^3}}{\epsilon} \right] \\
&= \left[\frac{(y^{q^2})^{q^3} (z^{q^4})^{q^3} - (z^{q^2})^{q^3} (y^{q^4})^{q^3}}{\epsilon(b-b^{q^3})}, -\frac{(x^{q^2})^{q^3} (y^{q^4})^{q^3} - (y^{q^2})^{q^3} (x^{q^4})^{q^3}}{\epsilon}, \right. \\
&\quad \left. \frac{(z^{q^2})^{q^3} (x^{q^4})^{q^3} - (x^{q^2})^{q^3} (z^{q^4})^{q^3}}{\epsilon} \right] \\
&= \left[\epsilon^2 \left((y^{q^3})^{q^2} (z^{q^3})^{q^2} - (z^{q^3})^{q^2} (y^{q^3})^{q^2} \right), -\epsilon^2 (b-b^{q^3}) \left((x^{q^3})^{q^2} (y^{q^3})^{q^2} - (y^{q^3})^{q^2} (x^{q^3})^{q^2} \right), \right. \\
&\quad \left. \epsilon^2 (b-b^{q^3}) \left((z^{q^3})^{q^2} (x^{q^3})^{q^2} - (x^{q^3})^{q^2} (z^{q^3})^{q^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) (x^{q^3})^{q^2} \\ -\epsilon (z^{q^3})^{q^2} \\ \epsilon (y^{q^3})^{q^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) (x^{q^3})^{q^4} \\ -\epsilon (z^{q^3})^{q^4} \\ \epsilon (y^{q^3})^{q^4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) x^{q^3} \\ -\epsilon z^{q^3} \\ \epsilon y^{q^3} \end{bmatrix}^\alpha \times \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) x^{q^3} \\ -\epsilon z^{q^3} \\ \epsilon y^{q^3} \end{bmatrix}^{\alpha^2} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) x^{q^3} \\ -\epsilon z^{q^3} \\ \epsilon y^{q^3} \end{bmatrix}^\mu \\
&= [x, y, z]^{\rho_b \mu}.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.4. Si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$ entonces, para toda recta l de tipo III, se tiene que $l^{\mu \rho_b} = l^{\rho_b \mu}$.

Demostración. Sea $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ una recta de tipo III. Entonces,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mu \rho_b} &= \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\alpha \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\alpha^2} \right)^{\rho_b} \\
&= \left(\begin{bmatrix} x^{q^2} \\ y^{q^2} \\ z^{q^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{q^4} \\ y^{q^4} \\ z^{q^4} \end{bmatrix} \right)^{\rho_b} \\
&= [y^{q^2} z^{q^4} - z^{q^2} y^{q^4}, z^{q^2} x^{q^4} - x^{q^2} z^{q^4}, x^{q^2} y^{q^4} - y^{q^2} x^{q^4}]^{\rho_b} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) (y^{q^2} z^{q^4} - z^{q^2} y^{q^4})^{q^3} \\ -\epsilon (x^{q^2} y^{q^4} - y^{q^2} x^{q^4})^{q^3} \\ \epsilon (z^{q^2} x^{q^4} - x^{q^2} z^{q^4})^{q^3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon (b - b^{q^3}) \left((y^{q^3})^{q^2} (z^{q^3})^{q^4} - (z^{q^3})^{q^2} (y^{q^3})^{q^4} \right) \\ -\epsilon \left((x^{q^3})^{q^2} (y^{q^3})^{q^4} - (y^{q^3})^{q^2} (x^{q^3})^{q^4} \right) \\ \epsilon \left((z^{q^3})^{q^2} (x^{q^3})^{q^4} - (x^{q^3})^{q^2} (z^{q^3})^{q^4} \right) \end{bmatrix} \\
&= \left[\epsilon (b - b^{q^3}) (x^{q^3})^{q^2}, -\epsilon (z^{q^3})^{q^2}, \epsilon (y^{q^3})^{q^2} \right] \times \left[\epsilon (b - b^{q^3}) (x^{q^3})^{q^4}, -\epsilon (z^{q^3})^{q^4}, \epsilon (y^{q^3})^{q^4} \right] \\
&= \left[\epsilon (b - b^{q^3}) x^{q^3}, -\epsilon z^{q^3}, \epsilon y^{q^3} \right]^\alpha \times \left[\epsilon (b - b^{q^3}) x^{q^3}, -\epsilon z^{q^3}, \epsilon y^{q^3} \right]^{\alpha^2} \\
&= \left[\epsilon (b - b^{q^3}) x^{q^3}, -\epsilon z^{q^3}, \epsilon y^{q^3} \right]^\mu
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\rho_b \mu}.$$

□

Teorema 4.5. Si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$ entonces ρ_b es una polaridad unitaria de $Fig(q^6)$.

Demostración. ρ_b es una función biyectiva ya que es una polaridad unitaria de $PG(2, q^6)$. Por ende, basta demostrar que para todo punto P y recta l en $Fig(q^6)$ se cumple que

$$P I_{\mathcal{F}} l \iff l^{\rho_b} I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b}.$$

Sea P un punto y l una recta, tal que por lo menos uno no es de tipo III, entonces

$$\begin{aligned} P I_{\mathcal{F}} l &\iff P I l && \text{Definición 2.18} \\ &\iff l^{\rho_b} I P^{\rho_b} && \rho_b \text{ es una polaridad en } PG(2, q^6) \\ &\iff l^{\rho_b} I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b}. && \text{Lema 4.2 y Definición 2.18} \end{aligned}$$

Sean P y l de tipo III, entonces

$$\begin{aligned} P I_{\mathcal{F}} l &\iff l^{\mu} I P^{\mu} && \text{Definición 2.18} \\ &\iff P^{\mu \rho_b} I l^{\mu \rho_b} && \rho_b \text{ es una polaridad en } PG(2, q^6) \\ &\iff P^{\rho_b \mu} I l^{\rho_b \mu} && \text{Lema 4.3 y Lema 4.4} \\ &\iff l^{\rho_b} I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b}. && \text{Definición 2.18} \end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ_b es una polaridad unitaria de $Fig(q^6)$. □

Definición 4.6. El conjunto de puntos absolutos definidos por la polaridad unitaria ρ_b en $Fig(q^6)$ lo denominaremos por $\mathcal{U}_{0,b}$.

Lema 4.7. $\mathcal{U}_{0,b}$ es el conjunto de los puntos de tipo I y de tipo II de $U_{0,b}$ y los puntos de tipo III son tales que sus imágenes bajo μ son rectas tangentes a $U_{0,b}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{0,b} &= \{P \in Fig(q^6) \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b}\} \\ &= \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b}\} \cup \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_3, P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b}\} \\ &= \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b}\} \cup \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_3, P^{\rho_b \mu} I P^{\mu}\} \\ &= \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, P \in U_{0,b}\} \cup \{P \in Fig(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_3, P^{\mu \rho_b} I P^{\mu}\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P \in U_{0,b}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P^{\mu} \text{ tangente a } U_{0,b}\}. \end{aligned}$$

Entonces, los puntos de tipo I y de tipo II de $\mathcal{U}_{0,b}$ son los puntos de tipo I y de tipo II de $U_{0,b}$ y los puntos de tipo III de $\mathcal{U}_{0,b}$ son tales que sus imágenes bajo μ son rectas tangentes a $U_{0,b}$. □

Observación 4.8. Por Lema 4.7, $U_{0,b}$ y $\mathcal{U}_{0,b}$ comparten los puntos de tipo I y de tipo II, y sus puntos de tipo III están en correspondencia (ver la Sección 4.1.1). Por lo que $|\mathcal{U}_{0,b}| = |U_{0,b}| = q^9 + 1$.

Teorema 4.9. $\mathcal{U}_{0,b}$ es un unital en $Fig(q^6)$.

Demostración. Por Observación 4.8, tenemos que $|\mathcal{U}_{0,b}| = q^9 + 1$. Luego, por Teorema 2.42, tiene la cantidad máxima de puntos absolutos de una polaridad unitaria. Por lo tanto, $\mathcal{U}_{0,b}$ es un unital en $Fig(q^6)$. □

Proposición 4.10. No hay puntos en común entre los puntos de tipo III de $U_{0,b}$ y los puntos de tipo III de $\mathcal{U}_{0,b}$.

Demostración. Supongamos que existe un punto P de tipo III contenido en $U_{0,b}$ y $\mathcal{U}_{0,b}$. Como $P \in \mathcal{U}_{0,b}$, tenemos que P^μ es una recta tangente a $U_{0,b}$.

Por otro lado, como $P \in U_{0,b}$, tenemos que P^α , P^{α^2} pertenecen a $U_{0,b}$. Luego, por Definición 2.17, $P^\mu = P^\alpha P^{\alpha^2}$. Por lo tanto, P^μ es una recta secante a $U_{0,b}$, lo cual es una contradicción. \square

4.1.1. Correspondencia entre los puntos de tipo III de $U_{0,b}$ y los puntos de tipo III de $\mathcal{U}_{0,b}$

Definición 4.11. Sea $b - b^3 \in GF(q^2)^*$. Sea P un punto de tipo III, definimos la función

$$\begin{aligned} \varphi_b: \mathcal{P}_3 &\rightarrow \mathcal{P}_3 \\ P &\mapsto P^{\rho_b \mu}. \end{aligned}$$

Observación 4.12. Como ρ_b y μ son funciones biyectivas, φ_b es biyectiva.

Teorema 4.13. La función φ_b lleva los puntos de tipo III de $U_{0,b}$ en los puntos de tipo III de $\mathcal{U}_{0,b}$.

Demostración. Sea P un punto de tipo III contenido en $U_{0,b}$, entonces

$$\begin{aligned} P \text{ I } P^{\rho_b} &\iff P^{\rho_b \mu} \text{ I }_{\mathcal{F}} P^\mu && \text{Lema 4.2} \\ &\iff P^{\rho_b \mu} \text{ I }_{\mathcal{F}} (P^{\mu \rho_b})^{\rho_b} && \rho_b \text{ es de orden 2} \\ &\iff P^{\rho_b \mu} \text{ I }_{\mathcal{F}} (P^{\rho_b \mu})^{\rho_b}. && \text{Lema 4.3} \end{aligned}$$

Luego, $P^{\rho_b \mu}$ está contenido en $\mathcal{U}_{0,b}$. \square

Corolario 4.14. $\mathcal{U}_{0,b} = \{ P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P \in U_{0,b} \} \cup \{ P^{\rho_b \mu} \in \text{Fig}(q^6) \mid P \in \mathcal{P}_3 \text{ contenido en } U_{0,b} \}$.

Demostración. Por Teorema 4.13, los puntos de tipo III de $\mathcal{U}_{0,b}$ son los puntos $P^{\rho_b \mu}$ tales que P es un punto de tipo III de $U_{0,b}$. \square

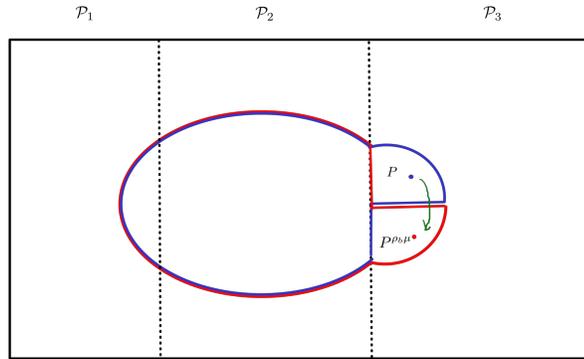


Figura 5: Correspondencia entre los puntos de tipo III de $U_{0,b}$ (azul) y los puntos de tipo III de $\mathcal{U}_{0,b}$ (rojo).

Definición 4.15. Sea $\overline{\varphi}_b: PG(2, q^6) \rightarrow \text{Fig}(q^6)$ la función definida por

$$\overline{\varphi}_b|_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2} = Id \text{ y } \overline{\varphi}_b|_{\mathcal{P}_3} = \varphi_b.$$

Observación 4.16. Por Teorema 4.13, podemos obtener que $\overline{\varphi}_b(U_{0,b}) = \mathcal{U}_{0,b}$.

4.2. Ejemplo

En este capítulo hemos demostrado que si $b - b^{q^3} \in GF(q^2)^*$ los puntos absolutos de la polaridad ρ_b forman un unital en $Fig(q^6)$, pero ¿qué sucede cuando la polaridad ρ_b está definida a partir $b - b^{q^3} \notin GF(q^2)$?

En base a la programación en SAGE del Anexo C, presentamos un ejemplo en $PG(2, 3^6)$ donde una polaridad ρ_b esté definida por un $b - b^{q^3} \notin GF(q^2)$.

La cantidad de b tales que $b - b^{3^3}$ no está contenido en $GF(3^2)$ es 648 que, por Lema 2.3, son los mismos b tales que $b - b^{3^3}$ no está contenido en $GF(3^2)$, pero donde $(b - b^{3^3})^2$ no es un cuadrado de $GF(3^3)$ (también comprobamos mediante programación).

4.2.1. Para $b - b^{3^3} \notin GF(3^2)$ los puntos absolutos de ρ_b no forman un unital en $Fig(3^6)$

Por efecto de la cantidad de posibilidades b , elegimos de forma aleatoria un b tal que $b - b^{3^3}$ no está contenido en $GF(3^2)$ y así observamos lo que sucede con las polaridades asociadas a los unitales ortogonales de Buekenhout-Metz $U_{0,b}$.

A partir de lo anterior, definimos la polaridad unitaria ρ_b donde $b = c^5 + 2c^4 + c^3 + c$ (c es el elemento primitivo de la extensión $GF(3^6)/GF(3)$).

Los puntos absolutos de ρ_b forman el unital

$$U_{0,b} = \{[x, (c^5 + 2c^4 + c^3 + c) \cdot x^{3^3+1} + r, 1] \mid x \in GF(3^6) \text{ y } r \in GF(3^3)\} \cup \{[0, 1, 0]\},$$

la cual contiene:

1. 4 puntos de tipo I.
2. 2400 puntos de tipo II.
3. 17280 puntos de tipo III.

A partir de lo anterior, obtuvimos los puntos absolutos de ρ_b en $Fig(3^6)$, los cuales forman el conjunto

$$\begin{aligned} \overline{U_{0,b}} &= \{P \in Fig(3^6) \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b}\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P I P^{\rho_b}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I P^{\rho_b} \text{ y } P^{\rho_b} \notin \mathcal{L}_3\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I_{\mathcal{F}} P^{\rho_b} \text{ y } P^{\rho_b} \in \mathcal{L}_3\} \\ &= \{P \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \mid P I P^{\rho_b}\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P I P^{\rho_b} \text{ y } P^{\rho_b} \notin \mathcal{L}_3\} \cup \{P \in \mathcal{P}_3 \mid P^{\rho_b \mu} I P^{\mu} \text{ y } P^{\rho_b} \in \mathcal{L}_3\}, \end{aligned}$$

el cual contiene:

1. 4 puntos de tipo I.
2. 2400 puntos de tipo II.
3. 1920 puntos de tipo III tales que su imagen bajo ρ_b no es una recta de tipo III.
4. 384 puntos de tipo III tales que su imagen bajo ρ_b es una recta de tipo III.

Por lo que tenemos que $|\overline{U_{0,b}}| = 4708$. Por lo tanto, $\overline{U_{0,b}}$ no es un unital en $Fig(3^6)$ al no tener la cantidad de $3^9 + 1$ puntos.

Por otro lado, observamos que la cantidad de rectas de tipo I y de tipo II que no intersectan ni en 1 ni en $3^3 + 1$ puntos a $\overline{U_{0,b}}$ es de 63520, lo cual también justifica que $\overline{U_{0,b}}$ no es un unital en $Fig(3^6)$ debido a que si fuera unital, toda recta de $Fig(3^6)$ debe intersectarlo en 1 o en $3^3 + 1$ puntos.

5. Pies de tangencia en el Unital de Figueroa

En este capítulo demostramos que los pies de tangencia de un punto en el Unital de Figueroa están contenidos en una recta. Además, determinamos bajo qué circunstancias los pies de tangencia de un punto en los unitales \mathcal{H} y \mathcal{U} están en correspondencia bajo $\beta\mu$.

Por otro lado, a través de la herramienta computacional SAGE, para $Fig(3^6)$ elaboramos ejemplos afines a lo que estudiamos en este capítulo, los cuales presentamos y explicamos en Anexo D.

Lema 5.1. *Si un unital \mathcal{U} contenido en un plano proyectivo π de orden q^2 es el conjunto de los puntos absolutos de una polaridad unitaria β , entonces los pies de tangencia de Q están contenidos en la recta Q^β para todo $Q \notin \mathcal{U}$.*

Demostración. Para demostrar el lema basta probar que los puntos que están en $Q^\beta \cap \mathcal{U}$ son pies de tangencia de Q .

Sea Q un punto no contenido en el unital \mathcal{U} . Por lo tanto, Q^β es una recta secante a \mathcal{U} en $q+1$ puntos. Sean P_1 y P_2 dos puntos distintos de $Q^\beta \cap \mathcal{U}$, por ende $P_1P_2 = Q^\beta$, entonces $P_1^\beta \cap P_2^\beta = Q$. Como $P_1, P_2 \in \mathcal{U}$, tenemos que son puntos absolutos de β , por lo tanto P_1^β y P_2^β son rectas tangente a \mathcal{U} en P_1 y P_2 respectivamente. Luego, P_1 y P_2 son pies de tangencia de Q . \square

Observación 5.2. *Como \mathcal{U} es el conjunto de puntos absolutos de la polaridad unitaria β de $Fig(q^6)$ (ver Subsección 2.5.3), los pies de tangencia de un punto $Q \notin \mathcal{U}$ están contenidos en la recta Q^β .*

Teorema 5.3. *Si Q un punto exterior tanto del unital clásico \mathcal{H} como del unital de Figueroa \mathcal{U} , entonces la recta que contiene a los pies de tangencia de Q , tanto los pies contenidos en \mathcal{H} como los pies contenidos en \mathcal{U} , está representada por Q^β .*

Demostración. Sea $Q \notin \mathcal{H} \cup \mathcal{U}$. Por Lema 5.1, los pies de tangencia de Q en \mathcal{H} están contenidos en la recta Q^β . Por otro lado, por Lema 5.1, los pies de tangencia de Q en \mathcal{U} están contenidos en la recta Q^β . \square

Observación 5.4. $\tau_Q(\mathcal{U})$ está contenida en la recta $Q^{\beta\mathcal{F}}$ de $Fig(q^6)$ para todo $Q \notin \mathcal{H} \cup \mathcal{U}$.

Observación 5.5. *La recta que contiene los pies de tangencias de Q que están en \mathcal{H} y que contiene los pies de tangencia de Q que están en \mathcal{U} , están representadas cada una por Q^β pero son rectas distintas ya que la incidencia de puntos es distinta. Es por esto que las diferenciaremos por Q^β y $Q^{\beta\mathcal{F}}$, respectivamente.*

Observación 5.6. *Los puntos de tipo I y de tipo II de Q^β son los mismos puntos de tipo I y de tipo II de $Q^{\beta\mathcal{F}}$.*

Proposición 5.7. *Si l es una recta β -absoluta de tipo III entonces l es una recta $\beta\mathcal{F}$ -no-absoluta.*

Demostración. Sea l es una recta β -absoluta de tipo III, por ende l es una recta tangente a \mathcal{H} .

Por otro lado, l tiene dos opciones:

- (1) ser una recta tangente a \mathcal{U} ,
- (2) ser una recta secante a \mathcal{U} .

Supongamos que se cumple la opción (1), esto quiere decir que l es una recta $\beta\mathcal{F}$ -absoluta. Por Lema 2.62, entonces l es una recta β -no-absoluta, lo cual es una contradicción. Luego, l es una recta secante a \mathcal{U} , es decir, l es una recta $\beta\mathcal{F}$ -no-absoluta. \square

Proposición 5.8. *Sea $P \in \tau_Q(\mathcal{H})$ punto de tipo III. $P^{\beta\mu} \in \tau_Q(\mathcal{U})$ si y sólo si $Q I_{\mathcal{F}} P^\mu$.*

Demostración. Si $P^{\beta\mu} \in \tau_Q(\mathcal{U})$ entonces $P^{\beta\mu}$ es pie de tangencia de Q , pero $(P^{\beta\mu})^\beta$ es tangente a \mathcal{U} en $P^{\beta\mu}$. Por lo tanto, $Q I_{\mathcal{F}} P^\mu$.

Como $P \in \tau_Q(\mathcal{H})$, en particular $P \in \mathcal{H}$. Por Teorema 2.63, tenemos que $P^{\beta\mu} \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $P^\mu = (P^{\beta\mu})^\beta$ es tangente a \mathcal{U} en $P^{\beta\mu}$ y como $Q I_{\mathcal{F}} P^\mu$, tenemos que $P^{\beta\mu} \in \tau_Q(\mathcal{U})$. \square

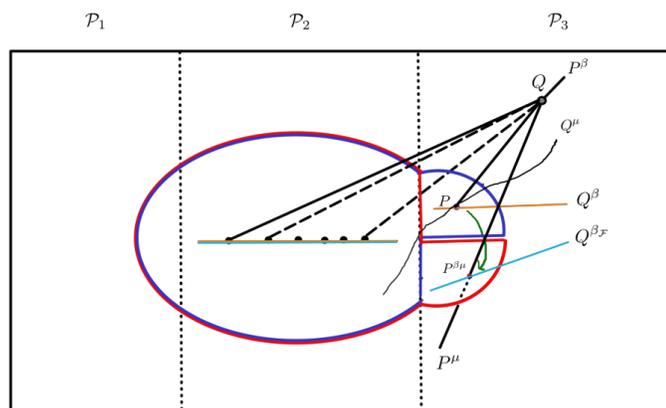


Figura 6: Proposición 5.8.

Observación 5.9. *Los pies de tangencia de tipo III de Q contenidos en \mathcal{H} y \mathcal{U} están en correspondencia por $\beta\mu$ siempre y cuando se cumpla Proposición 5.8.*

6. Pies de tangencia en el unital ortogonal de Buekenhout-Metz, con $b = b^q$

En este capítulo demostramos, de forma alternativa a la realizada por Abarzúa, Pomareda y Vega [1], que los pies de tangencia de un punto exterior al unital ortogonal de Buekenhout-Metz $U_{a,b}$, con $a \neq 0$ y $b = b^q$, forman un $(q+1)$ -arco.

Por otro lado, a través de la herramienta computacional SAGE, para $PG(2, 3^6)$ elaboramos un ejemplo afín a lo que estudiamos en este capítulo, el cual presentamos y explicamos en Anexo E.

Teorema 6.1. *Sea $Q \notin U_{a,0} \cup l_\infty$. Las rectas de $PG(2, q^2)$ no intersectan a $\tau_Q(U_{a,0})$ en 4 puntos.*

Demostración. Por Teorema 2.50, tenemos que $U_{a,0} = \bigcup_{r \in GF(q)} \mathcal{C}_r$. Sean \mathcal{C}_{r_1} y \mathcal{C}_{r_2} cónicas distintas contenidas en $U_{a,0}$ tal que $Q \notin U_{a,0} \cup l_\infty$ tenga pies de tangencia tanto en la cónica \mathcal{C}_{r_1} como en la cónica \mathcal{C}_{r_2} .

Sea ρ_r la polaridad ortogonal asociada a \mathcal{C}_r , donde $r \in GF(q)$. Por Observación 2.40, tenemos que $Q^{\rho_{r_1}} \cap \mathcal{C}_{r_1} = \{P_1, P_2\}$ y $Q^{\rho_{r_2}} \cap \mathcal{C}_{r_2} = \{P_3, P_4\}$. Supongamos que P_1, P_2, P_3 y P_4 son puntos colineales. Por lo tanto, $P_1P_2 = P_3P_4$. Luego, si $Q = [x, y, z]$ tenemos que

$$\begin{aligned} Q^{\rho_{r_1}} = Q^{\rho_{r_2}} &\iff [x, y, z]^{\rho_{r_1}} = [x, y, z]^{\rho_{r_2}} \\ &\iff \begin{bmatrix} ax \\ -\frac{z}{2} \\ r_1z - \frac{y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ -\frac{z}{2} \\ r_2z - \frac{y}{2} \end{bmatrix} \\ &\iff r_1 = r_2 \\ &\iff \mathcal{C}_{r_1} = \mathcal{C}_{r_2}. \end{aligned}$$

Lo cual contradice la suposición de que $\mathcal{C}_{r_1} \neq \mathcal{C}_{r_2}$. Por lo tanto, P_1, P_2, P_3 y P_4 no son colineales. \square

Corolario 6.2. *Sea $Q \notin U_{a,0} \cup l_\infty$. Las rectas de $PG(2, q^2)$ intersectan a $\tau_Q(U_{a,0})$ en 0, 1 o 2 puntos.*

Demostración. Por Teorema 2.55, si $Q \notin U_{a,0} \cup l_\infty$, entonces las rectas de $PG(2, q^2)$ intersectan a $\tau_Q(U_{a,0})$ en exactamente 0, 1, 2 o 4 puntos. Por Teorema 6.1, las rectas no pueden intersectar en 4 puntos a $\tau_Q(U_{a,0})$. Luego, las rectas intersectan a $\tau_Q(U_{a,0})$ en 0, 1 o 2 puntos. \square

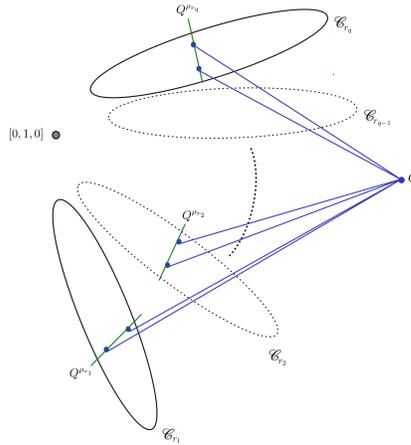


Figura 7: Pies de tangencias de Q sobre las cónicas \mathcal{C}_r de $U_{a,0}$.

Observación 6.3. Como existen $q + 1$ rectas tangentes que pasan por un punto exterior a $U_{a,0}$, $\tau_Q(U_{a,0})$ es un $(q + 1)$ -arco en $PG(2, q^2)$, para todo $Q \notin U_{a,0} \cup l_\infty$.

Observación 6.4. $\tau_Q(U_{a,0})$ no está contenida en \mathcal{C}_r , para cualquier $r \in GF(q)$.

Teorema 6.5. $\tau_Q(U_{a,b})$, con $b = b^q$, es un $(q + 1)$ -arco para todo $Q \notin U_{a,b} \cup l_\infty$.

Demostración. Por Teorema 2.51, $U_{a,b}$ es equivalente a $U_{a,0}$ ya que $b = b^q$. Luego, por Corolario 6.2, $\tau_Q(U_{a,b})$, con $b = b^q$, es un $(q + 1)$ -arco para todo $Q \notin U_{a,b} \cup l_\infty$. \square

A. Ejemplo Sección 3.1

En este anexo presentamos un código de programación en SAGE que muestra para $Fig(3^6)$ un ejemplo de la Sección 3.1.

A.1. Los puntos absolutos de ρ forman un óvalo en $Fig(3^6)$

En la siguiente secuencia demostramos que los puntos absolutos de la polaridad ρ en $Fig(3^6)$, como observamos en el Teorema 3.12, forman un óvalo.

Para iniciar la programación definimos el cuerpo donde trabajamos. Sea $K6 := GF(3^6)$ y c es el elemento primitivo de la extensión $GF(3^6)/GF(3)$.

```
sage: q=3
sage: K6.<c>=GF(q^6)
```

Definimos $PGI := \mathcal{P}_1$, $PGII := \mathcal{P}_2$ y $PGIII := \mathcal{P}_3$.

```
sage: PGI=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if x==x^(q^2) and y==y^(q^2)]+[(x,1,0) for
x in K6 if x==x^(q^2)]+[(1,0,0)]
sage: PGII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))== (y-y^(q^2))*(x
-x^(q^4)) and (x!=x^(q^2) or y!=y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x!=x^(q^2)]
sage: PGIII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))!= (y-y^(q^2))*(
x-x^(q^4))]
```

Definimos $C := \mathcal{C}$. Se definen CI , CII y $CIII$ como los puntos de tipo I, de tipo II y de tipo III de \mathcal{C} , respectivamente.

```
sage: C=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if x^2+y^2+1==0]+[(x,1,0) for x in K6 if x^2+
1==0]
sage: CI=[p for p in C if p[0]==p[0]^(q^2) and p[1]==p[1]^(q^2)]
sage: CII=[p for p in C if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))== (p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0
]-p[0]^(q^4)) and (p[0]!=p[0]^(q^2) or p[1]!=p[1]^(q^2))]
sage: CIII=[p for p in C if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))!= (p[1]-p[1]^(q^2))*(p[
0]-p[0]^(q^4))]
sage: len(CI),len(CII),len(CIII)

(10, 0, 720)
```

A partir de lo anterior, observamos que:

1. La cónica \mathcal{C} contiene 10 puntos de tipo I.
2. La cónica \mathcal{C} no contiene puntos de tipo II.
3. La cónica \mathcal{C} contiene 720 puntos de tipo III.

Definimos μ y ρ como las funciones μ y ρ , respectivamente.

```
sage: def mu(v):
...     u=vector((v[0]^(q^2),v[1]^(q^2),1))
...     w=vector((v[0]^(q^4),v[1]^(q^4),1))
...     uw=u.cross_product(w)
...     return (uw[0]/uw[2],uw[1]/uw[2],1)
```

```

...
sage: def pol(p):
...     return p

```

Definimos CFI, CFII y CFIII como los conjuntos de puntos absolutos de ρ de tipo I, de tipo II y de tipo III en $Fig(3^6)$, respectivamente. Definimos $CF := \mathcal{O}$.

```

sage: CFI=[p for p in PGI if pol(p)[0]*p[0]+pol(p)[1]*p[1]+pol(p)[2]*p[2]==0]
sage: CFII=[p for p in PGII if pol(p)[0]*p[0]+pol(p)[1]*p[1]+pol(p)[2]*p[2]==0]
sage: CFIII=[p for p in PGIII if mu(pol(p))[0]*mu(p)[0]+mu(pol(p))[1]*mu(p)[1]+mu(pol(p))[2]*mu(p)[2]==0]
sage: CF=CFI+CFII+CFIII
sage: len(CF)

```

730

A partir de lo anterior, observamos que \mathcal{O} contiene 730 puntos.

Definimos rectas como el conjunto de rectas de tipo I y de tipo II que intersectan en más de dos puntos a \mathcal{O} .

```

sage: rectas=[]
sage: for l in PGI+PGII:
...     CFIinterl=[p for p in CFI if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CFIIinterl=[p for p in CFII if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CFIIIinterl=[p for p in CFIII if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     if len(CFIinterl)+len(CFIIinterl)+len(CFIIIinterl)>2:
...         rectas.append((l,len(CFIinterl),len(CFIIinterl),len(CFIIIinterl)))
sage: len(rectas)

```

0

Dado lo anterior, observamos que no existen rectas de tipo I y de tipo II que intersecten en más de dos puntos a \mathcal{O} .

Definimos rectasF como el conjunto de rectas de tipo III que intersectan en más de dos puntos a \mathcal{O} .

```

sage: rectasF=[]
sage: for l in PGIII:
...     CFIIinterlF=[p for p in CFII if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CFIIIinterlF=[p for p in CFIII if mu(l)[0]*mu(p)[0]+mu(l)[1]*mu(p)[1]+mu(l)[2]*mu(p)[2]==0]
...     if len(CFIIinterlF)+len(CFIIIinterlF)>2:
...         rectasF.append((l,len(CFIIinterlF),len(CFIIIinterlF)))
sage: len(rectasF)

```

0

A partir de lo anterior, observamos que no existen rectas de tipo III que intersecten en más de dos puntos a \mathcal{O} .

Dado que \mathcal{O} tiene $3^6 + 1$ puntos y que no existe recta en $Fig(3^6)$ que lo corte en más de dos puntos, queda demostrado que \mathcal{O} es un óvalo en $Fig(3^6)$.

A.2. No hay puntos en común entre \mathcal{C} y \mathcal{O} en $Fig(3^6)$

En la siguiente parte de la programación demostramos que no existen puntos de tipo III en común entre \mathcal{C} y \mathcal{O} , como observamos en el Lema 3.13.

Definimos `Inter` como los elementos que tienen en común \mathcal{C} y \mathcal{O} .

```
sage: Inter=[p for p in CFIII if p in CIII]
sage: len(Inter)
```

```
0
```

A partir de lo anterior, observamos que no existen puntos de tipo III en común entre \mathcal{C} y \mathcal{O} .

A.3. Los puntos de tipo III de \mathcal{C} están en correspondencia con los puntos de tipo III de \mathcal{O} en $Fig(3^6)$

En la siguiente parte de la programación demostramos que los puntos de tipo III de \mathcal{O} son imágenes de los puntos de tipo III de \mathcal{C} bajo $\mu\rho$, como observamos en el Teorema 3.16.

```
sage: set(CFIII)==set([mu(pol(p)) for p in CIII])
```

```
True
```

Dado lo anterior, observamos que los puntos de tipo III de \mathcal{C} están en correspondencia bajo $\mu\rho$ con los puntos de tipo III de \mathcal{O} .

B. Ejemplos Sección 3.2

En este anexo presentamos un código de programación en SAGE que muestra para $Fig(3^6)$ un “no ejemplo”, donde no se cumple $a \in GF(3^2)^*$ y $r \in GF(3)$, los cuales exponemos en la Sección 3.3.

B.1. Para un $r \in GF(3^3) \setminus GF(3)$, los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$

En la siguiente secuencia mostramos que los puntos absolutos de la polaridad $\rho_{a,r}$, con $a \in GF(3^2)^*$ y $r \notin GF(3)$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$.

Para iniciar la programación definimos el cuerpo y sus subcuerpos en los cuales trabajamos. Sean $K6 := GF(3^6)$, $K3 := GF(3^3)$, $K2 := GF(3^2)$ y $K1 := GF(3)$. Donde $GF(3^6) \cong GF(3^3)/(x^2 + 1)$.

```
sage: q=3
sage: K6.<c>=GF(q^6)
sage: R.<x>=K6[]
sage: (x^2+1).factor()
sage: L=K6.subfields()
sage: K2,f2=L[1]
sage: K3,f3=L[2]
sage: K2.inject_variables()
sage: K3.inject_variables()
sage: K1=[x for x in K6 if x==x^q]
sage: PGI=[[x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x==x^(q^2) and y==y^(q^2))]+[(x,1,0) for
r x in K6 if x==x^(q^2)]+[(1,0,0)]
sage: PGII=[[x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))==(y-y^(q^2))*(x
-x^(q^4)) and (x!=x^(q^2) or y!=y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x != x^(q^2)]
sage: PGIII=[[x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))!=(y-y^(q^2))*(
x-x^(q^4))]
```

Defining c2

Defining c3

Definimos noc como el conjunto de todos los elementos no cuadrados de $GF(3^3)$.

```
sage: def nocuadrados(F):
...     C=[k^2 for k in F]
...     return [k for k in F if not k in C]
sage: noc=[f3(k) for k in nocuadrados(K3)]
```

Definimos I como el conjunto determinado por los pares ordenados (a, b) tal que a^{3^3+1} no es cuadrado de $GF(3^3)$, $a \in GF(3^2)$ y $b = 0$.

```
sage: I=[(a,0) for a in K6 if a==a^(q^2) and a^(q^3+1) in noc]
sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(I))
sage: print(I[random_index])
sage: a=I[random_index][0]
sage: b=I[random_index][1]
```

```
(2*c^5 + 2*c^3 + c^2 + 2*c + 2, 0)
```

A partir de lo anterior, el programa de forma aleatoria escoge $a = 2c^5 + 2c^3 + c^2 + 2c + 2$.

Definimos $K := GF(3^3) \setminus GF(3)$.

```
sage: K=[f3(x) for x in K3 if x!=x^q]
```

En la siguiente parte de la secuencia analizamos la cantidad de puntos (por tipo) en $\mathcal{C}_{a,r}$ por cada $r \in GF(3^3) \setminus GF(3)$.

Definimos $Cr := \mathcal{C}_{a,r}$. Definimos CrI, CrII y CrIII como el conjunto de puntos de tipo I, de tipo II y de tipo III de $\mathcal{C}_{a,r}$, respectivamente.

```
sage: for r in K:
...     Cr=[(x,a*x^2+b*x^(q^3+1)+r,1) for x in K6]+[(0,1,0)]
...     CrI=[p for p in Cr if p[0]==p[0]^(q^2) and p[1]==p[1]^(q^2)]
...     CrII=[p for p in Cr if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))==p[1]-p[1]^(q^2)
...     CrIII=[p for p in Cr if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))!=(p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0]-p[0]^(q^4))]
...     (r,len(CrI),len(CrII),len(CrIII))
```

```
(2*c^5 + 2*c^4 + 2, 1, 117, 612)
(c^4 + 2*c^3 + 2, 1, 45, 684)
(2*c^5 + 2*c^4 + 1, 1, 117, 612)
(c^5 + 2*c^4 + 2*c^3, 1, 45, 684)
(2*c^5 + c^4 + c^3 + 2, 1, 45, 684)
(2*c^5 + 2*c^3 + 2, 1, 45, 684)
(c^5 + 2*c^4 + 2*c^3 + 2, 1, 45, 684)
(2*c^4 + c^3, 1, 45, 684)
(2*c^5 + 2*c^4, 1, 117, 612)
(2*c^5 + 2*c^3 + 1, 1, 45, 684)
(2*c^5 + 2*c^3, 1, 45, 684)
(c^4 + 2*c^3 + 1, 1, 45, 684)
(c^5 + c^4 + 1, 1, 117, 612)
(2*c^4 + c^3 + 1, 1, 45, 684)
(c^5 + c^4 + 2, 1, 117, 612)
(2*c^5 + c^4 + c^3, 1, 45, 684)
(c^5 + 2*c^4 + 2*c^3 + 1, 1, 45, 684)
(c^5 + c^3 + 1, 1, 45, 684)
(2*c^5 + c^4 + c^3 + 1, 1, 45, 684)
(c^4 + 2*c^3, 1, 45, 684)
(c^5 + c^4, 1, 117, 612)
(c^5 + c^3 + 2, 1, 45, 684)
(c^5 + c^3, 1, 45, 684)
(2*c^4 + c^3 + 2, 1, 45, 684)
```

Definimos polpunto como la función $\rho_{a,r}$ (para punto).

```

sage: def mu(v):
...     u=vector((v[0]^(q^2),v[1]^(q^2),1))
...     w=vector((v[0]^(q^4),v[1]^(q^4),1))
...     uw=u.cross_product(w)
...     return (uw[0]/uw[2],uw[1]/uw[2],1)
sage: def polpunto(p):
...     if K6((r*p[2])-K6(p[1]/2))!=0:
...         return (K6((a*p[0]*2)/(2*r*p[2]-p[1])),K6((-p[2])/(2*r*p[2]-p[1]))
,1)
...     else:
...         if K6(-p[1]/2)!=0:
...             return (K6((a*p[0]*2)/(-p[1])),1,0)
...         else:
...             return (1,0,0)

```

```

from random import randrange
random_index = randrange(len(K))
r=K[random_index]
r

```

$c^4 + 2*c^3 + 1$

A partir de lo anterior, el programa de forma aleatoria escoge $r = c^4 + 2c^3 + 1$, el cual es un r de la primera clase.

Definimos N como el conjunto de $P \in \mathcal{P}_3$ tales que $P^{\rho_{a,r}} \in \mathcal{L}_3$ y NN como el conjunto $P \in \mathcal{P}_3$ tales que $P^{\rho_{a,r}} \notin \mathcal{L}_3$.

```

sage: N=[p for p in PGIII if polpunto(p) in PGIII]
sage: NN=[p for p in PGIII if p not in N]

```

Definimos $CrF1$, $CrF2$, $CrF3$ y $CrF4$ como los conjuntos de puntos $\rho_{a,r\mathcal{F}}$ -absolutos de tipo I, de tipo II, que están en N y que están en NN , respectivamente. También definimos CrF como el conjunto de puntos $\rho_{a,r\mathcal{F}}$ -absolutos.

```

sage: CrF4=[p for p in N if mu(polpunto(p))[0]*mu(p)[0]+mu(polpunto(p))[1]*mu(p)[1]+mu
(polpunto(p))[2]*mu(p)[2]==0]
sage: CrF3=[p for p in NN if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p[
2]==0]
sage: CrF2=[p for p in PGII if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*
p[2]==0]
sage: CrF1=[p for p in PGI if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p
[2]==0]
sage: CrF=CrF1+CrF2+CrF3+CrF4
sage: len(CrF1),len(CrF2),len(CrF3),len(CrF4),len(CrF)==q^6+1

```

$(1, 45, 36, 288, False)$

Definimos **rectas** como el conjunto de todas las rectas de tipo I y de tipo II tales que cortan al conjunto de puntos $\rho_{a,r\mathcal{F}}$ -absolutos en más de dos puntos.

```

sage: rectas=[]
sage: for l in PGI+PGII:
...     CrFIinterl=[p for p in CrF1 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CrFIIinterl=[p for p in CrF2 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CrFIIIinterl=[p for p in CrF3+CrF4 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     if len(CrFIinterl)+len(CrFIIinterl)+len(CrFIIIinterl)>2:
...         rectas.append((l,len(CrFIinterl),len(CrFIIinterl),len(CrFIIIinterl)))
...
sage: len(rectas)

```

1044

Por otro lado, observamos la segunda clase.

```

from random import randrange
random_index = randrange(len(K))
r=K[random_index]
r

```

$2c^5 + 2c^4 + 1$

A partir de lo anterior, el programa de forma aleatoria escoge $r = 2c^5 + 2c^4 + 1$, el cual es un r de la segunda clase. Luego, repetimos el algoritmo anterior.

```

sage: N=[p for p in PGIII if polpunto(p) in PGIII]
sage: NN=[p for p in PGIII if p not in N]

```

```

sage: CrF4=[p for p in N if mu(polpunto(p))[0]*mu(p)[0]+mu(polpunto(p))[1]*mu(p)[1]+mu
(polpunto(p))[2]*mu(p)[2]==0]
sage: CrF3=[p for p in NN if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p[
2]==0]
sage: CrF2=[p for p in PGII if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*
p[2]==0]
sage: CrF1=[p for p in PGI if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p
[2]==0]
sage: CrF=CrF1+CrF2+CrF3+CrF4
sage: len(CrF1),len(CrF2),len(CrF3),len(CrF4),len(CrF)==q^6+1

```

(1, 117, 108, 720, False)

```

sage: rectas=[]
sage: for l in PGI+PGII:
...     CrFIinterl=[p for p in CrF1 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CrFIIinterl=[p for p in CrF2 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CrFIIIinterl=[p for p in CrF3+CrF4 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     if len(CrFIinterl)+len(CrFIIinterl)+len(CrFIIIinterl)>2:
...         rectas.append((l,len(CrFIinterl),len(CrFIIinterl),len(CrFIIIinterl)))
...
sage: len(rectas)

```

B.2. Para un $a \in GF(3^6) \setminus GF(3^2)$, los puntos absolutos de $\rho_{a,r}$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$

En el siguiente ejemplo demostramos que los puntos absolutos de la polaridad $\rho_{a,r}$, con un $a \notin GF(3^2)$ y un $r \in GF(3)$ no forman un óvalo en $Fig(3^6)$.

```
sage: q=3
sage: K6.<c>=GF(q^6)
sage: R.<x>=K6[]
sage: (x^2+1).factor()
sage: L=K6.subfields()
sage: K2,f2=L[1]
sage: K3,f3=L[2]
sage: K2.inject_variables()
sage: K3.inject_variables()
sage: K1=[x for x in K6 if x==x^q]
sage: PGI=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x==x^(q^2) and y==y^(q^2))]+[(x,1,0) for
r x in K6 if x == x^(q^2)]+[(1,0,0)]
sage: PGII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))==(y-y^(q^2))*(x
-x^(q^4)) and (x != x^(q^2) or y != y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x != x^(q^2)]
sage: PGIII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))!=(y-y^(q^2))*(
x-x^(q^4))]
sage: def nocuadrados(F):
...     C=[k^2 for k in F]
...     return [k for k in F if not k in C]
sage: noc=[f3(k) for k in nocuadrados(K3)]

Defining c2
Defining c3
```

Definimos I como el conjunto determinado por los pares ordenados (a, b) tal que a^{3^3+1} no es cuadrado de $GF(3^3)$, $a \notin GF(3^2)$ y $b = 0$.

```
sage: I=[(a,0) for a in K6 if a!=a^(q^2) and a^(q^3+1) in noc]
sage: len(I)
```

360

A partir de lo anterior, observamos que la cantidad de a que cumplen las condiciones anteriormente mencionadas es 360.

```
sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(I))
sage: print(I[random_index])
sage: a=I[random_index][0]
sage: b=I[random_index][1]

(2*c^5 + 2*c^4 + c^3 + c^2 + 2*c, 0)
```

```

sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(K1))
sage: r=K1[random_index]
sage: r

```

2

Dado lo anterior, el programa de forma aleatoria escoge $a = 2c^5 + 2c^4 + c^3 + c^2 + 2c$ y $r = 2$.

```

sage: Cr=[(x,alpha*x^2+r,1) for x in K6]+[(0,1,0)]
sage: CrI=[p for p in Cr if p[0] == p[0]^(q^2) and p[1] == p[1]^(q^2)]
sage: CrII=[p for p in Cr if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))==(p[1]-p[1]^(q^2))*(p
[0]-p[0]^(q^4)) and (p[0] != p[0]^(q^2) or
p[1] != p[1]^(q^2))]
sage: CrIII=[p for p in Cr if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))!=(p[1]-p[1]^(q^2))*(
p[0]-p[0]^(q^4))]
sage: (len(CrI),len(CrII),len(CrIII))

```

(2, 40, 688)

Definimos `polpunto` como la función $\rho_{a,r}$ (para punto).

```

sage: def mu(v):
...     u=vector((v[0]^(q^2),v[1]^(q^2),1))
...     w=vector((v[0]^(q^4),v[1]^(q^4),1))
...     uw=u.cross_product(w)
...     return (uw[0]/uw[2],uw[1]/uw[2],1)
sage: def polpunto(p):
...     if K6((r*p[2])-K6(p[1]/2))!=0:
...         return (K6((a*p[0]*2)/(2*r*p[2]-p[1])),K6((-p[2])/(2*r*p[2]-p[1])),1
)
...     else:
...         if K6(-p[1]/2)!=0:
...             return (K6((a*p[0]*2)/(-p[1])),1,0)
...         else:
...             return (1,0,0)

```

Definimos N como el conjunto de $P \in \mathcal{P}_3$ tales que $P^{\rho_{a,r}} \in \mathcal{L}_3$ y NN como el conjunto $P \in \mathcal{P}_3$ tales que $P^{\rho_{a,r}} \notin \mathcal{L}_3$.

```

sage: N=[p for p in PGIII if polpunto(p) in PGIII]
sage: NN=[p for p in PGIII if p not in N]

```

Definimos $CrF1$, $CrF2$, $CrF3$ y $CrF4$ como los conjuntos de puntos $\rho_{a,r,\mathcal{F}}$ -absolutos de tipo I, de tipo II, que están en N y que están en NN , respectivamente. También definimos CrF como el conjunto de puntos $\rho_{a,r,\mathcal{F}}$ -absolutos.

```

sage: CrF4=[p for p in N if mu(polpunto(p))[0]*mu(p)[0]+mu(polpunto(p))[1]*mu(p)[1]+mu
(polpunto(p))[2]*mu(p)[2]==0]
sage: CrF3=[p for p in NN if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p[
2]==0]

```

```

sage: CrF2=[p for p in PGII if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*
p[2]==0]
sage: CrF1=[p for p in PGI if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p
[2]==0]
sage: CrF=CrF1+CrF2+CrF3+CrF4
sage: len(CrF1),len(CrF2),len(CrF3),len(CrF4),len(CrF)==q^6+1

(2, 40, 48, 544, False)

```

```

sage: rectas=[]
sage: for l in PGI+PGII:
...     CrFIinterl=[p for p in CrF1 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CrFIIinterl=[p for p in CrF2 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     CrFIIIinterl=[p for p in CrF3+CrF4 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     if len(CrFIinterl)+len(CrFIIinterl)+len(CrFIIIinterl)>2:
...         rectas.append((l,len(CrFIinterl),len(CrFIIinterl),len(CrFIIIinterl)))
sage: len(rectas)

4024

```

C. Ejemplo Capítulo 4

En este anexo presentamos un código de programación en SAGE que muestra para $Fig(3^6)$ un “no ejemplo” donde no se cumple que $b - b^{3^3} \in GF(3^2)^*$, el cual exponemos en la Sección 4.2.

C.1. Para un $b - b^{3^3} \notin GF(3^2)$, los puntos absolutos de ρ_b no forman un unital en $Fig(3^6)$

En la siguiente secuencia mostramos que los puntos absolutos de la polaridad ρ_b , con b tal que $b - b^{3^3} \notin GF(3^2)$, no forman un unital en $Fig(3^6)$.

Definimos e como el elemento primitivo de la extensión $GF(3^6)/GF(3^3)$, en otras palabras $e := \epsilon$.

```
sage: q=3
sage: K6.<c>=GF(q^6)
sage: R.<x>=K6[]
sage: (x^2+1).factor()
sage: e=(c^5 + c^3 + 2*c^2 + c)
sage: L=K6.subfields()
sage: K2,f2=L[1]
sage: K3,f3=L[2]
sage: K2.inject_variables()
sage: K3.inject_variables()
sage: K1=[x for x in K6 if x==x^q]
sage: PGI=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x==x^(q^2) and y==y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x==x^(q^2)]+[(1,0,0)]
sage: PGII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))== (y-y^(q^2))*(x-x^(q^4)) and (x!=x^(q^2) or y!=y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x!=x^(q^2)]
sage: PGIII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))!= (y-y^(q^2))*(x-x^(q^4))]
sage: def nocuadrados(F):
...     C=[k^2 for k in F]
...     return [k for k in F if not k in C]
sage: noc=[f3(k) for k in nocuadrados(K3)]
```

[Defining c2](#)

[Defining c3](#)

Definimos I como el conjunto determinado por los pares ordenados (a, b) tal que $(b - b^{3^3})^2$ no es cuadrado de $GF(3^3)$, $b - b^{3^3} \notin GF(3^2)$ y $a = 0$. Se define II como el conjunto determinado por los pares ordenados (a, b) tal que $b - b^{3^3} \notin GF(3^2)$ y $a = 0$.

```
sage: I=[(0,b) for b in K6 if (b-b^(q^3))!=(b-b^(q^3))^(q^2) and (b-b^(q^3))^2 in noc]
sage: II=[(0,b) for b in K6 if (b-b^(q^3))!=(b-b^(q^3))^(q^2)]
sage: (len(I),len(II),I==II)
```

[\(648, 648, True\)](#)

A partir de lo anterior, observamos que la cantidad de b que cumplen las condiciones anteriormente mencionadas es 648 y son los mismos b quienes las cumplen. Esto era de esperar por Lema 2.3.

```

sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(I))
sage: print(I[random_index])
sage: a=I[random_index][0]
sage: b=I[random_index][1]
sage: es_admisible(I[random_index][0],I[random_index][1])

(0, c^5 + 2*c^4 + c^3 + c)

```

Dado lo anterior, de forma aleatoria el programa escoge $b = c^5 + 2c^4 + c^3 + c$.

Definimos $U := U_{0,b}$. Definimos UI, UII y UIII como el conjunto de puntos de tipo I, de tipo II y de tipo III de $U_{0,b}$, respectivamente.

```

sage: U=[(x,a*x^2+b*x^(q^3+1)+f3(r),1) for x in K6 for r in K3]+[(0,1,0)]
sage: UI=[p for p in U if p[0]==p[0]^(q^2) and p[1]==p[1]^(q^2)]
sage: UII=[p for p in U if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))==(p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0]-p[0]^(q^4)) and (p[0]!=p[0]^(q^2) or p[1]!=p[1]^(q^2))]
sage: UIII=[p for p in U if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))!=(p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0]-p[0]^(q^4))]
sage: (len(UI),len(UII),len(UIII))

(4, 2400, 17280)

```

Definimos polpunto como la función ρ_b (para punto).

```

sage: def mu(v):
...     u=vector((v[0]^(q^2),v[1]^(q^2),1))
...     w=vector((v[0]^(q^4),v[1]^(q^4),1))
...     uw=u.cross_product(w)
...     return (uw[0]/uw[2],uw[1]/uw[2],1)
sage: def polpunto(p):
...     if (e*p[1]^(q^3))!=0:
...         return ((e*(b-b^(q^3))*p[0]^(q^3))/(e*p[1]^(q^3)),(-e*p[2]^(q^3))/(e*p[1]^(q^3)),1)
...     else:
...         if (-e*p[2]^(q^3))!=0:
...             return ((e*(b-b^(q^3))*p[0]^(q^3))/(-e*p[2]^(q^3)),1,0)
...         else:
...             return (1,0,0)

```

Definimos N como el conjunto de $P \in \mathcal{P}_3$ tales que $P^{\rho_b} \in \mathcal{L}_3$ y NN como el conjunto $P \in \mathcal{P}_3$ tales que $P^{\rho_b} \notin \mathcal{L}_3$.

```

sage: N=[p for p in PGIII if polpunto(p) in PGIII]
sage: NN=[p for p in PGIII if p not in N]

```

Definimos UF1, UF2, UF3 y UF4 como los conjuntos de puntos $\rho_{b\mathcal{F}}$ -absolutos de tipo I, de tipo II, que están en N y que están en NN , respectivamente. Definimos UF como el conjunto de puntos absolutos de ρ_b en $Fig(3^6)$.

```

sage: UF4=[p for p in N if mu(polpunto(p))[0]*mu(p)[0]+mu(polpunto(p))[1]*mu(p)[1]+mu(
polpunto(p))[2]*mu(p)[2]==0]
sage: UF3=[p for p in NN if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p[2]
]==0]
sage: UF2=[p for p in PGI if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p[2]
]==0]
sage: UF1=[p for p in PGI if polpunto(p)[0]*p[0]+polpunto(p)[1]*p[1]+polpunto(p)[2]*p[2]
]==0]
sage: UF=UF1+UF2+UF3+UF4
sage: (len(UF)==q^9+1,len(UF1),len(UF2),len(UF3),len(UF4))

(False, 4, 2400, 1920, 384)

```

Definimos rectas como el conjunto de todas las rectas de tipo I y de tipo II tales que no cortan al conjunto de puntos $\rho_{b\mathcal{F}}$ -absolutos ni en 1 y ni en $3^3 + 1$ puntos.

```

sage: rectas=[]
sage: for l in PGI+PGII:
...     UF1interl=[p for p in UF1 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     UF2interl=[p for p in UF2 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     UF3interl=[p for p in UF3 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     UF4interl=[p for p in UF4 if l[0]*p[0]+l[1]*p[1]+l[2]*p[2]==0]
...     if len(UF1interl)+len(UF2interl)+len(UF3interl)+len(UF4interl)!=1 and len(UF
1interl)+len(UF2interl)+len(UF3interl)+len(UF4interl)!=q^3+1:
...         rectas.append((l,len(UF1interl),len(UF2interl),len(UF3interl),len(UF4int
erl)))
sage: len(rectas)

63520

```

D. Ejemplos Capítulo 5

En este anexo presentamos un código de programación en SAGE que muestra ejemplos de la colinealidad de pies de tangencia en \mathcal{H} y \mathcal{U} , dado un punto exterior Q de tipo I, de tipo II y de tipo III.

D.1. Los pies de tangencia de un punto Q , de tipo I, sobre \mathcal{U} son colineales en $PG(2, 3^6)$

En la siguiente secuencia mostramos que los pies de tangencia de un punto Q , de tipo I, en \mathcal{U} son colineales en $Fig(3^6)$ y la recta que contiene a tales puntos es $Q^{\beta\mathcal{F}}$.

```
sage: q=3
sage: K6.<c>=GF(q^6)
sage: PGI=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x==x^(q^2) and y==y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x==x^(q^2)]+[(1,0,0)]
sage: PGII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))== (y-y^(q^2))*(x-x^(q^4)) and (x!=x^(q^2) or y!=y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x!=x^(q^2)]
sage: PGIII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))!=(y-y^(q^2))*(x-x^(q^4))]
```

Definimos $U := \mathcal{H}$. Se definen UI, UII y UIII como el conjunto de puntos de tipo I, de tipo II y de tipo III de \mathcal{H} , respectivamente.

```
sage: U=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if x^(q^3+1)+y^(q^3+1)+1==0]+[(x,1,0) for x in K6 if x^(q^3+1)+1==0]
sage: UI=[p for p in U if (p[0]==p[0]^(q^2) and p[1]==p[1]^(q^2))]
sage: UII=[p for p in U if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))== (p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0]-p[0]^(q^4)) and (p[0]!=p[0]^(q^2) or p[1]!=p[1]^(q^2))]
sage: UIII=[p for p in U if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))!=(p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0]-p[0]^(q^4))]
```

Definimos `polpunto` como la función β (para punto).

```
sage: def polpunto(p):
...     if p[2]^(q^3)!=0:
...         return (K6(p[0]^(q^3)/p[2]^(q^3)),K6(p[1]^(q^3)/p[2]^(q^3)),1)
...     else:
...         if p[1]^(q^3)!=0:
...             return (K6(p[0]^(q^3)/p[1]^(q^3)),1,0)
...         else:
...             return (1,0,0)
sage: def mu(v):
...     u=vector((v[0]^(q^2),v[1]^(q^2),1))
...     w=vector((v[0]^(q^4),v[1]^(q^4),1))
...     uw=u.cross_product(w)
...     return (uw[0]/uw[2],uw[1]/uw[2],1)
```

Definimos UIIIF como el conjunto de puntos de tipo III en \mathcal{U} . Definimos $UF := \mathcal{U}$.

```

sage: UIIIF=[mu(polpunto(p)) for p in UIII]
sage: UF=UI+UII+UIIIF
sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(PGI))
sage: p=PGI[random_index]
sage: p not in U+UIIIF,p

(True, (c^5 + c^3 + 2*c^2 + c + 2, c^5 + c^3 + 2*c^2 + c + 2, 1))

```

De forma aleatoria, el programa escoge como punto exterior de tipo I a $Q = (c^5 + c^3 + 2c^2 + c + 2, c^5 + c^3 + 2c^2 + c + 2, 1)$.

Definimos H_1 , H_2 y H_3 como el conjunto de rectas de tipo I, de tipo II y de tipo III que pasan por Q , respectivamente.

```

sage: H1=[l for l in PGI if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
sage: H2=[l for l in PGII if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
sage: H3=[l for l in PGIII if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
sage: len(H1),len(H2),len(H3)

(10, 720, 0)

```

A partir de lo anterior, observamos que:

1. Existen 10 rectas de tipo I que pasan por Q .
2. Existen 720 rectas de tipo II que pasan por Q .
3. No existen rectas de tipo III que pasan por Q (esto es claro pues no hay rectas de tipo III que pasen por un punto de tipo I).

Definimos T_1 , T_2 y T_3 como el conjunto de las rectas de H_1 , H_2 y H_3 que son tangentes a \mathcal{H} , respectivamente.

```

sage: T1=[l for l in H1 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: T2=[l for l in H2 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: T3=[l for l in H3 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: len(T1),len(T2),len(T3)

(4, 24, 0)

```

Dado lo anterior, observamos que:

1. Existen 4 rectas de tipo I que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{H} .
2. Existen 24 rectas de tipo II que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{H} .
3. Como no existen rectas de tipo III que pasan por Q , no existen rectas de tipo III que pasan por Q y que sean tangentes a \mathcal{H} .

Definimos A_1 , A_2 y A_3 como el conjunto de pies de tangencia de las rectas de T_1 , T_2 y T_3 , respectivamente. Definimos $A := \tau_Q(\mathcal{H})$.

```

sage: A1=[p for p in U for t in T1 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A2=[p for p in U for t in T2 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A3=[p for p in U for t in T3 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A=A1+A2+A3
sage: len(A1),len(A2),len(A3)

```

(4, 24, 0)

A partir de lo anterior, observamos que:

1. Existen 4 puntos de tipo I que son pies de tangencia de Q en \mathcal{H} .
2. Existen 24 puntos de tipo II que son pies de tangencia de Q en \mathcal{H} .
3. No existen puntos de tipo III que sean pies de tangencia de Q en \mathcal{H} .

```

sage: PGI=set(PGI)
sage: T1=set(T1)
sage: for t in PGI-T2:
...     S=[p for p in A if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
...     if len(S)>2:
...         print(t,len(S))

```

((2*c^5 + 2*c^3 + c^2 + 2*c + 2, 2*c^5 + 2*c^3 + c^2 + 2*c + 2, 1), 28)

Dado lo anterior, observamos que la única recta que contiene a todos los puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$ es

$$\begin{bmatrix} 2c^5 + 2c^3 + c^2 + 2c + 2 \\ 2c^5 + 2c^3 + c^2 + 2c + 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y que no existe otra recta que contenga más de 2 puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$.

Como Q es un punto exterior de $\mathcal{H} \cup \mathcal{U}$ que no tiene pies de tangencia de tipo III, entonces $\tau_Q(\mathcal{H}) = \tau_Q(\mathcal{U})$.

```

sage: polpunto((2*c^5 + 2*c^3 + c^2 + 2*c + 2, 2*c^5 + 2*c^3 + c^2 + 2*c + 2, 1))

```

(c^5 + c^3 + 2c^2 + c + 2, c^5 + c^3 + 2c^2 + c + 2, 1)

A partir de lo anterior, observamos que Q^β es la recta que contiene los puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$ y $Q^{\beta\mathcal{F}}$ es la recta que contiene los puntos de $\tau_Q(\mathcal{U})$.

D.2. Los pies de tangencia de un punto Q , de tipo II, sobre \mathcal{U} son colineales en $PG(2, 3^6)$

En la siguiente secuencia mostramos que los pies de tangencia de un punto Q , de tipo II, en \mathcal{U} son colineales en $Fig(3^6)$ y la recta que contiene a tales puntos es $Q^{\beta\mathcal{F}}$.

```

sage: q=3
sage: K6.<c>=GF(q^6)
sage: PGI=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x==x^(q^2) and y==y^(q^2))]+[(x,1,0) fo

```

```

r x in K6 if x==x^(q^2)]+[(1,0,0)]
sage: PGII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))== (y-y^(q^2))*(x-x^(q^4)) and (x!=x^(q^2) or y!=y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x!=x^(q^2)]
sage: PGIII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))!= (y-y^(q^2))*(x-x^(q^4))]
sage: U=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if x^(q^3+1)+y^(q^3+1)+1==0]+[(x,1,0) for x in K6 if x^(q^3+1)+1==0]
sage: UI=[p for p in U if (p[0]==p[0]^(q^2) and p[1]==p[1]^(q^2))]
sage: UII=[p for p in U if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))== (p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0]-p[0]^(q^4)) and (p[0]!=p[0]^(q^2) or p[1]!=p[1]^(q^2))]
sage: UIII=[p for p in U if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))!= (p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0]-p[0]^(q^4))]
sage: def polpunto(p):
...     if p[2]^(q^3)!=0:
...         return (K6(p[0]^(q^3)/p[2]^(q^3)),K6(p[1]^(q^3)/p[2]^(q^3)),1)
...     else:
...         if p[1]^(q^3)!=0:
...             return (K6(p[0]^(q^3)/p[1]^(q^3)),1,0)
...         else:
...             return (1,0,0)
sage: def mu(v):
...     u=vector((v[0]^(q^2),v[1]^(q^2),1))
...     w=vector((v[0]^(q^4),v[1]^(q^4),1))
...     uw=u.cross_product(w)
...     return (uw[0]/uw[2],uw[1]/uw[2],1)
sage: UIIIF=[mu(polpunto(p)) for p in UIII]
sage: UF=UI+UII+UIIIF
sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(PGII))
sage: p=PGII[random_index]
sage: p not in U+UIIIF,p

(True, (c^4 + c^3 + 2*c^2 + c, 2*c^5 + c^3 + 2*c^2, 1))

```

De forma aleatoria, el programa escoge como punto exterior de tipo II a $Q = (c^4 + c^3 + 2c^2 + c, 2c^5 + c^3 + 2c^2, 1)$.

```

sage: H1=[l for l in PGI if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
sage: H2=[l for l in PGII if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
sage: H3=[l for l in PGIII if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
sage: len(H1),len(H2),len(H3)

(1, 81, 648)

```

A partir de lo anterior, observamos que:

1. Existe 1 recta de tipo I que pasa por Q .
2. Existen 81 rectas de tipo II que pasan por Q .
3. Existen 648 rectas de tipo III que pasan por Q .

```

sage: T1=[l for l in H1 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: T2=[l for l in H2 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: T3=[l for l in H3 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: len(T1),len(T2),len(T3)

```

(0, 0, 28)

Dado lo anterior, observamos que existen sólo 28 rectas de tipo III que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{H} .

```

sage: A1=[p for p in U for t in T1 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A2=[p for p in U for t in T2 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A3=[p for p in U for t in T3 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A=A1+A2+A3
sage: len(A1),len(A2),len(A3)

```

(0, 0, 28)

A partir de lo anterior, observamos que existen sólo 28 puntos de tipo III que son pies de tangencia en \mathcal{H} .

```

sage: PGII=set(PGII)
sage: T2=set(T2)
sage: for t in PGII-T2:
...     S=[p for p in A if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
...     if len(S)>2:
...         print(t,len(S))

```

((2*c^5 + 2*c^4 + c^3 + c^2 + 2*c, 2*c^5 + 2*c^4 + c^3 + c^2 + 2, 1), 28)

Dado lo anterior, observamos que la única recta que contiene a todos los puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$ es

$$\begin{bmatrix} 2c^5 + 2c^4 + c^3 + c^2 + 2c \\ 2c^5 + 2c^4 + c^3 + c^2 + 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y que no existe otra recta que contenga más de 2 puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$.

Definimos TF1, TF2 y TF3 con TF3F como el conjunto de las rectas de H1, H2 y H3 que son tangentes a \mathcal{U} , respectivamente.

```

sage: TF1=[l for l in H1 if len([s for s in UF if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: TF2=[l for l in H2 if len([s for s in UF if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: TF3=[l for l in H3 if len([s for s in UI+UII if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: TF3F=[l for l in H3 if len([s for s in UIIIF if mu(1)[0]*mu(s)[0]+mu(1)[1]*mu(s)[1]+mu(1)[2]*mu(s)[2]==0])==1]
sage: len(TF1),len(TF2),len(TF3),len(TF3F)

```

(0, 0, 0, 28)

A partir de lo anterior, observamos que existen sólo 28 rectas de tipo III que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{U} .

Definimos AF1, AF2, AF3 y AF3 como el conjunto de pies de tangencia de las rectas de TF1, TF2, TF3 y TF3F, respectivamente. Definimos AF:= $\tau_Q(\mathcal{U})$.

```
sage: AF1=[p for p in UF for k in TF1 if p[0]*k[0]+p[1]*k[1]+p[2]*k[2]==0]
sage: AF2=[p for p in UF for k in TF2 if p[0]*k[0]+p[1]*k[1]+p[2]*k[2]==0]
sage: AF3=[p for p in UI+UII for k in TF3 if p[0]*k[0]+p[1]*k[1]+p[2]*k[2]==0]
sage: AF3F=[p for p in UIIIF for k in TF3F if mu(k)[0]*mu(p)[0]+mu(k)[1]*mu(p)[1]+mu(k)
) [2]*mu(p)[2]==0]
sage: AF=AF1+AF2+AF3+AF3F
sage: len(AF1),len(AF2), len(AF3), len(AF3F)

(0, 0, 0, 28)
```

Dado lo anterior, observamos que existen sólo 28 puntos de tipo III pies de tangencia de \mathcal{U} .

```
sage: TF2=set(TF2)
sage: for t in PGII-TF2:
...     SF=[p for p in A if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
...     if len(SF)>2:
...         print (t,len(SF))

((2*c^5 + 2*c^4 + c^3 + c^2 + 2*c, 2*c^5 + 2*c^4 + c^3 + c^2 + 2, 1), 28)
```

A partir de lo anterior, observamos que la única recta que contiene a todos los puntos de $\tau_Q(\mathcal{U})$ es

$$\begin{bmatrix} 2c^5 + 2c^4 + c^3 + c^2 + 2c \\ 2c^5 + 2c^4 + c^3 + c^2 + 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y que no existe otra recta que contenga más de 2 puntos de $\tau_Q(\mathcal{U})$.

```
sage: polpunto((2*c^5 + 2*c^4 + c^3 + c^2 + 2*c, 2*c^5 + 2*c^4 + c^3 + c^2 + 2, 1))

(c^4 + c^3 + 2*c^2 + c, 2*c^5 + c^3 + 2*c^2, 1)
```

Dado lo anterior, observamos que Q^β es la recta que contiene los puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$ y $Q^{\beta\mathcal{F}}$ es la recta que contiene los puntos de $\tau_Q(\mathcal{U})$.

```
sage: set(AF3F)==set([mu(polpunto(s)) for s in A3])

False
```

A partir de lo anterior, observamos que los puntos de tipo III de $\tau_Q(\mathcal{H})$ no están en correspondencia bajo μ^β con los puntos de tipo III de $\tau_Q(\mathcal{U})$.

D.3. Los pies de tangencia de un punto Q , de tipo III, sobre \mathcal{U} son colineales en $PG(2, 3^6)$

En la siguiente secuencia mostramos que los pies de tangencia de un punto Q , de tipo III, en \mathcal{U} son colineales en $Fig(3^6)$ y la recta que contiene a tales puntos es $Q^{\beta\mathcal{F}}$.

```

sage: q=3
sage: K6.<c>=GF(q^6)
sage: PGI=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x==x^(q^2) and y==y^(q^2))]+[(x,1,0) for
x in K6 if x==x^(q^2)]+[(1,0,0)]
sage: PGII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))==y-y^(q^2)*(x
-x^(q^4)) and (x!=x^(q^2) or y!=y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x!=x^(q^2)]
sage: PGIII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))!=(y-y^(q^2))*(
x-x^(q^4))]
sage: U=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if x^(q^3+1)+y^(q^3+1)+1==0]+[(x,1,0) for x in
K6 if x^(q^3+1)+1==0]
sage: UI=[p for p in U if (p[0]==p[0]^(q^2) and p[1]==p[1]^(q^2))]
sage: UII=[p for p in U if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))==(p[1]-p[1]^(q^2))*(p[0
]-p[0]^(q^4)) and (p[0]!=p[0]^(q^2) or p[1]!=p[1]^(q^2))]
sage: UIII=[p for p in U if (p[0]-p[0]^(q^2))*(p[1]-p[1]^(q^4))!=(p[1]-p[1]^(q^2))*(p[
0]-p[0]^(q^4))]
sage: def polpunto(p):
...     if p[2]^(q^3)!=0:
...         return (K6(p[0]^(q^3)/p[2]^(q^3)),K6(p[1]^(q^3)/p[2]^(q^3)),1)
...     else:
...         if p[1]^(q^3)!=0:
...             return (K6(p[0]^(q^3)/p[1]^(q^3)),1,0)
...         else:
...             return (1,0,0)
sage: def mu(v):
...     u=vector((v[0]^(q^2),v[1]^(q^2),1))
...     w=vector((v[0]^(q^4),v[1]^(q^4),1))
...     uw=u.cross_product(w)
...     return (uw[0]/uw[2],uw[1]/uw[2],1)
sage: UIIIF=[mu(polpunto(p)) for p in UIII]
sage: UF=UI+UII+UIIIF
sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(PGIII))
sage: p=PGIII[random_index]
sage: p not in U+UIIIF,p

(True, (c^5 + 2*c^2 + c + 1, 2*c^5 + 2*c^3 + 2*c^2 + c + 2, 1))

```

De forma aleatoria, el programa escoge como punto exterior de tipo III a $Q = (c^5 + 2c^2 + c + 1, 2c^5 + 2c^3 + 2c^2 + c + 2, 1)$.

Definimos H3F como el conjunto de rectas de tipo III incidentes a Q en $Fig(3^6)$.

```

sage: H1=[l for l in PGI if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
sage: H2=[l for l in PGII if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
sage: H3=[l for l in PGIII if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]

```

```
sage: H3F=[l for l in PGIII if mu(l)[0]*mu(p)[0]+mu(l)[1]*mu(p)[1]+mu(l)[2]*mu(p)[2]==0]
sage: len(H1),len(H2),len(H3),len(H3F)
```

(0, 91, 639, 639)

A partir de lo anterior, observamos que:

1. No existen rectas de tipo I que pasan por Q .
2. Existen 91 rectas de tipo II que pasan por Q , con la incidencia usual.
3. Existen 639 rectas de tipo III que pasan por Q , con la incidencia de Figueroa.

```
sage: T1=[l for l in H1 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: T2=[l for l in H2 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: T3=[l for l in H3 if len([s for s in U if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: len(T1),len(T2),len(T3)
```

(0, 3, 25)

Dado lo anterior, observamos que:

1. No existen rectas de tipo I que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{H} (esto es claro pues no hay rectas de tipo I que pasen por un punto de tipo III).
2. Existen 3 rectas de tipo II que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{H} .
3. Existen 25 rectas de tipo III que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{H} .

```
sage: A1=[p for p in U for t in T1 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A2=[p for p in U for t in T2 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A3=[p for p in U for t in T3 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
sage: A=A1+A2+A3
sage: len(A1),len(A2),len(A3)
```

(0, 3, 25)

Dado lo anterior, observamos que:

1. No existen puntos de tipo I que sean pies de tangencia de Q en \mathcal{H} .
2. Existen 3 puntos de tipo II que son pies de tangencia de Q en \mathcal{H} .
3. Existen 25 puntos de tipo III que son pies de tangencia de Q en \mathcal{H} .

```
sage: PGIII=set(PGIII)
sage: T3=set(T3)
sage: for t in (PGIII-T3):
...     S=[p for p in A if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
...     if len(S)>2:
...         print(t,len(S))
```

```
((c^4 + c^2 + 2*c + 1, c^2 + 2*c + 2, 1), 28)
```

Dado lo anterior, observamos que la única recta que contiene a todos los puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$ es

$$\begin{bmatrix} c^4 + c^2 + 2c + 1 \\ c^2 + 2c + 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y que no existe otra recta que contenga más de 2 puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$.

Definimos TF3 como el conjunto de rectas de H3F que son tangentes en puntos de tipo I o de tipo II a \mathcal{U} y TF3F como el conjunto de rectas de H3F que son tangentes en puntos de tipo III a \mathcal{U} .

```
sage: TF1=[l for l in H1 if len([s for s in UF if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: TF2=[l for l in H2 if len([s for s in UF if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: TF3=[l for l in H3F if len([s for s in UI+UII if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])==1]
sage: TF3F=[l for l in H3F if len([s for s in UIIIF if mu(l)[0]*mu(s)[0]+mu(l)[1]*mu(s)[1]+mu(l)[2]*mu(s)[2]==0])==1]
sage: len(TF1),len(TF2),len(TF3),len(TF3F)
```

```
(0, 3, 0, 25)
```

Dado lo anterior, observamos que:

1. No existen rectas de tipo I que pasan por Q y sean tangentes a \mathcal{U} (esto es claro pues no hay rectas de tipo I que pasen por un punto de tipo III).
2. Existen 3 rectas de tipo II que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{U} .
3. No existen rectas de tipo III que pasan por Q y sean tangentes en puntos de tipo I o tipo II a \mathcal{U} .
4. Existen 25 rectas de tipo III que pasan por Q y son tangentes a \mathcal{U} .

```
sage: AF1=[p for p in UF for k in TF1 if p[0]*k[0]+p[1]*k[1]+p[2]*k[2]==0]
sage: AF2=[p for p in UF for k in TF2 if p[0]*k[0]+p[1]*k[1]+p[2]*k[2]==0]
sage: AF3=[p for p in UI+UII for k in TF3 if p[0]*k[0]+p[1]*k[1]+p[2]*k[2]==0]
sage: AF3F=[p for p in UIIIF for k in TF3F if mu(k)[0]*mu(p)[0]+mu(k)[1]*mu(p)[1]+mu(k)[2]*mu(p)[2]==0]
sage: AF=AF1+AF2+AF3+AF3F
sage: len(AF1),len(AF2), len(AF3), len(AF3F)
```

```
(0, 3, 0, 25)
```

Dado lo anterior, observamos que:

1. No existen puntos de tipo I que sean pies de tangencia de Q en \mathcal{U} .
2. Existen 3 puntos de tipo II que son pies de tangencia de Q en \mathcal{U} .
3. No existen puntos de tipo I o II que sean pies de tangencia, de Q , de rectas de tipo III.
4. Existen 25 puntos de tipo III que son pies de tangencia de Q en \mathcal{U} .

```

sage: TF2=set(TF2)
sage: TF3F=set(TF3F)
sage: for t in (PGIII-TF3F):
...     S2=[p for p in AF2 if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
...     S3F=[p for p in AF3F if mu(t)[0]*mu(p)[0]+mu(t)[1]*mu(p)[1]+mu(t)[2]*mu(p)[2]
...     ]==0]
...     if len(S2)+len(S3F)>2:
...         print (t,len(S2)+len(S3F))

((c^4 + c^2 + 2*c + 1, c^2 + 2*c + 2, 1), 28)

```

A partir de lo anterior, observamos que la única recta que contiene a todos los puntos de $\tau_Q(\mathcal{U})$ es

$$\begin{bmatrix} c^4 + c^2 + 2c + 1 \\ c^2 + 2c + 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y que no existe otra recta que contenga más de 2 puntos de $\tau_Q(\mathcal{U})$.

```

sage: polpunto((c^4 + c^2 + 2*c + 1, c^2 + 2*c + 2, 1))

(c^5 + 2*c^2 + c + 1, 2*c^5 + 2*c^3 + 2*c^2 + c + 2, 1)

```

Dado lo anterior, observamos que Q^β es la recta que contiene los puntos de $\tau_Q(\mathcal{H})$ y $Q^{\beta\mathcal{F}}$ es la recta que contiene los puntos de $\tau_Q(\mathcal{U})$.

```

sage: set(AF3F)==set([mu(polpunto(s)) for s in A3])

False

```

A partir de lo anterior, observamos que los puntos de tipo III de $\tau_Q(\mathcal{H})$ no están en correspondencia bajo μ^β con los puntos de tipo III de $\tau_Q(\mathcal{U})$.

E. Ejemplo Capítulo 6

En este anexo presentamos un código de programación en SAGE que muestra un ejemplo donde los pies de tangencia de un punto Q en un unital $U_{a,b}$, con $b = b^{3^3}$, como demostramos en el Teorema 6.5, forman un arco en $PG(2, 3^6)$.

E.1. Pies de tangencia de sobre un $U_{a,0}$ en $PG(2, 3^6)$

En el siguiente ejemplo mostramos que los pies de tangencia sobre un unital $U_{a,0}$ de un punto exterior Q forman un 28-arco en $PG(2, 3^6)$.

```
sage: q=3
sage: K6.<c>=GF(q^6)
sage: R.<x>=K6[]
sage: (x^2+1).factor()
sage: b=c^5 + c^3 + 2*c^2 + c
sage: L=K6.subfields()
sage: K2,f2=L[1]
sage: K3,f3=L[2]
sage: K2.inject_variables()
sage: K3.inject_variables()
sage: K1=[x for x in K6 if x==x^(q)]
sage: def nocuadrados(F):
...     C=[k^2 for k in F]
...     return [k for k in F if not k in C]
sage: noc=[f3(k) for k in nocuadrados(K3)]
sage: I=[(a,0) for a in K6 if (4*a^(q^3+1)) in noc]
sage: len(I)
sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(I))
sage: print(I[random_index])
sage: a=I[random_index][0]
sage: b=I[random_index][1]
sage: def polpunto(p):
...     if K6((f3(r)*p[2])-K6(p[1]/2))!=0:
...         return (K6((a*p[0]*2)/(2*f3(r)*p[2]-p[1])),K6((-p[2])/(2*f3(r)*p[2]-
p[1])),1)
...     else:
...         if K6(-p[1]/2)!=0:
...             return (K6((a*p[0]*2)/(-p[1])),1,0)
...         else:
...             return (1,0,0)
sage: def mu(v):
...     u=vector((v[0]^(q^2),v[1]^(q^2),1))
...     w=vector((v[0]^(q^4),v[1]^(q^4),1))
...     uw=u.cross_product(w)
...     return (uw[0]/uw[2],uw[1]/uw[2],1)
...
sage: PGI=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x==x^(q^2) and y==y^(q^2))]+[(x,1,0) fo
r x in K6 if x==x^(q^2)]+[(1,0,0)]
sage: PGII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))==(y-y^(q^2))*(x
```

```
-x^(q^4)) and (x!=x^(q^2) or y!=y^(q^2))]+[(x,1,0) for x in K6 if x!=x^(q^2)]
sage: PGIII=[(x,y,1) for x in K6 for y in K6 if (x-x^(q^2))*(y-y^(q^4))!=(y-y^(q^2))*(x-x^(q^4))]
```

```
Defining c2
Defining c3
(c^5 + c^2 + 2, 0)
```

De forma aleatoria, el programa escoge $a = c^5 + c^2 + 2$ y forzamos $b = 0$.

Definimos $U = U_{a,0}$.

```
sage: U=[(x,a*x^2+b*x^(q^3+1)+f3(r),1) for x in K6 for r in K3]+[(0,1,0)]
sage: from random import randrange
sage: random_index = randrange(len(PGII))
sage: p=PGII[random_index]
sage: p not in U,p

(True, (2*c^5 + c^4 + 2*c^3 + 2, 2*c^5 + 2*c^4 + 2*c^3 + 2*c^2 + c + 1, 1))
```

De forma aleatoria, el programa escoge como punto exterior de tipo II a $Q = (2c^5 + c^4 + 2c^3 + 2, 2c^5 + 2c^4 + 2c^3 + 2c^2 + c + 1, 1)$.

Definimos H1, H2 y H3 como el conjunto las rectas de tipo I, de tipo II y de tipo III que pasan por Q , respectivamente.

Definimos T1, T2 y T3 como el conjunto de las rectas de H1, H2 y H3 que son tangentes a $U_{a,0}$, respectivamente.

Definimos A1, A2 y A3 como el conjunto de pies de tangencia de las rectas de H1, H2 y H3, respectivamente. Definimos F como el conjunto de todos los pies de tangencias de Q en $U_{a,0}$.

```
sage: F=[]
sage: for r in K3:
...     Cr=[(x,a*x^2+f3(r),1) for x in K6]+[(0,1,0)]
...     H1=[l for l in PGI if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
...     H2=[l for l in PGII if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
...     H3=[l for l in PGIII if p[0]*l[0]+p[1]*l[1]+p[2]*l[2]==0]
...     T1=[l for l in H1 if len([s for s in Cr if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])
...     ]==1]
...     T2=[l for l in H2 if len([s for s in Cr if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])
...     ]==1]
...     T3=[l for l in H3 if len([s for s in Cr if s[0]*l[0]+s[1]*l[1]+s[2]*l[2]==0])
...     ]==1]
...     A1=[e for e in Cr for t in T1 if e[0]*t[0]+e[1]*t[1]+e[2]*t[2]==0]
...     A2=[e for e in Cr for t in T2 if e[0]*t[0]+e[1]*t[1]+e[2]*t[2]==0]
...     A3=[e for e in Cr for t in T3 if e[0]*t[0]+e[1]*t[1]+e[2]*t[2]==0]
...     len(A1),len(A2),len(A3)
...     for f in A1+A2+A3:
...         F.append(f)
...
sage: len(F)
```

28

A partir de lo anterior, observamos que $|\tau_Q(U_{a,0})| = 28 = 3^3 + 1$.

```
sage: rectas=[]
sage: for t in PGIII or PGII or PGI:
...     S=[p for p in F if p[0]*t[0]+p[1]*t[1]+p[2]*t[2]==0]
...     if len(S)>2:
...         rectas.append((t,len(S)))
sage: len(rectas)
```

0

Dado lo anterior, observamos que las rectas que intersectan a $\tau_Q(U_{a,0})$ no lo hacen en más de dos puntos.

Por lo tanto, $\tau_Q(U_{a,0})$ es un 28-arco en $PG(2, 3^6)$.

Referencias

- [1] N. Abarzúa, R. Pomareda, and O. Vega. Feet in orthogonal-Buekenhout-Metz unitals. *Adv. Geom.*, 18(2):229–236, 2018.
- [2] Susan Barwick and Gary Ebert. *Unitals in projective planes*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2008.
- [3] Lynn M. Batten and Peter M. Johnson. The collineation groups of Figueroa planes. *Canad. Math. Bull.*, 36(4):390–397, 1993.
- [4] William E. Cherowitzo. Ovals in Figueroa planes. *J. Geom.*, 37(1-2):84–86, 1990.
- [5] Marialuisa J. de Resmini and Nicholas Hamilton. Hyperovals and unitals in Figueroa planes. *European J. Combin.*, 19(2):215–220, 1998.
- [6] Raúl Figueroa. A family of not (V, l) -transitive projective planes of order q^3 , $q \not\equiv 1 \pmod{3}$ and $q > 2$. *Math. Z.*, 181(4):471–479, 1982.
- [7] Daniel R. Hughes and Fred C. Piper. *Projective planes*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 6.
- [8] Man Wa Hui and Philip P. W. Wong. Non-classical polar unitals in finite Figueroa planes. *J. Geom.*, 103(2):263–273, 2012.
- [9] Julia M. Nowlin Brown. Some partitions in Figueroa planes. *Note Mat.*, 29(suppl. 1):33–43, 2009.
- [10] Beniamino Segre. Ovals in a finite projective plane. *Canadian J. Math.*, 7:414–416, 1955.