



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**RESOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA
CONSIDERANDO NUEVAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS NO
LINEALES PARA MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

NICOLÁS MATÍAS YÉVENES ARANEDA

PROFESOR GUÍA:
ROGER BUSTAMANTE PLAZA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
VIVIANA MERUANE NARANJO
RAFAEL RUIZ GARCÍA

Este trabajo ha sido financiado por FONDECYT-1160030

SANTIAGO DE CHILE
2020

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO
POR: NICOLÁS MATÍAS YÉVENES ARANEDA
FECHA: 2020
PROF. GUÍA: ROGER BUSTAMANTE PLAZA

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA CONSIDERANDO NUEVAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS NO LINEALES PARA MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS

En el presente trabajo se estudian nuevas ecuaciones constitutivas no lineales para cuerpos electroelásticos que no son de Green, donde la deformación y polarización son funciones explícitas del esfuerzo y el campo eléctrico, específicamente para el caso isotrópico y de pequeñas deformaciones. Estas ecuaciones, a diferencia de otras anteriormente planteadas por Rajagopal y Bustamante, consideran el cumplimiento de las leyes de la termodinámica para el caso en que no existe cambio de entropía ni de temperatura en el material.

A estas nuevas relaciones constitutivas se les asocia una función isotrópica, tal que se permita describir tanto el fenómeno de *strain limiting* a grandes esfuerzos, como el de la saturación de la polarización para campos eléctricos elevados. Se procede a realizar un fitting de las ecuaciones con datos experimentales de las curvas de deformación-esfuerzo del compuesto ferroeléctrico $BiFeO_3$, y las curvas de polarización-campo eléctrico del compuesto PLZT 8/60/40, acoplando así los fenómenos mecánicos y eléctricos de ambos materiales. Con esto, se obtienen los valores numéricos de los coeficientes de las ecuaciones constitutivas.

Una vez realizado el ajuste experimental para la obtención de resultados numéricos, se resuelven dos problemas homogéneos (variables independientes de la posición), para luego resolver cuatro problemas de valor de frontera no homogéneos unidimensionales (donde las variables independientes del modelo están en función de la posición): el primero corresponde a una cáscara esférica inflada bajo campo eléctrico radial, y los otros tres para un tubo cilíndrico inflado bajo campo eléctrico radial (i) en ausencia de corte, (ii) con corte axial (iii) y con corte circunferencial. Los problemas anteriores se resuelven usando el solver de ecuaciones diferenciales sobre componentes unidimensionales del programa COMSOL 5.3a.

Los resultados numéricos muestran como las distintas componentes de las variables mecánicas y eléctricas varían a distintas presiones internas y potenciales eléctricos aplicados a las fronteras de las geometrías esféricas y cilíndricas. En los casos con presencia de corte, se varía el corte aplicado a la frontera interna para evaluar el efecto de este en las otras variables. Se observa en el caso esférico que el modelo no converge a presiones mayores de 55[MPa], y para el caso cilíndrico a presiones de 30[MPa], ambas geometrías evaluadas en todo momento con radios internos de 5[cm] y externos de 12[cm]. Por su lado, los problemas convergen para potenciales eléctricos menores a 150[kV].

Se evidencia además el fenómeno de *strain limiting* y de saturación de la polarización en los resultados para cada uno de los problemas planteados, algo que los modelos lineales no logran captar.

Dedicatoria

A mi abuelita Lala, mi abuelito Esteban, mi tía Nayer, quienes ya nos han dejado, a mis padres y a quienes me han apoyado desinteresadamente a lo largo de esta linda etapa.

Agradecimientos

Cuando era chico, aprendí a recibir como recompensa el orgullo de mis padres, y fue quizás una de las razones por las que siempre quise destacar en todo lo que ellos consideraran como admirable. Me tomó hasta poco antes de mi salida del colegio, darme cuenta que la vida no puede estar en función de expectativas ajenas. De ahí nació la primera divergencia con la visión de mis padres, al elegir el camino de la ingeniería. Por primera vez estaba siguiendo un camino por decisión propia y por primera vez sentí incertidumbre sobre lo que hacía. Sin embargo, nunca dejé de sentir el apoyo de ambos; mi papá, hombre a quien siempre he admirado mucho por su energía (excepto frente a la tele) y sus valores de persona, me enseñó a perseguir mis sueños, actuar de forma honesta, tener seguridad en mi mismo y a perderle el miedo a fallar (incluso a reírnos de nuestras propias desgracias cuando las cosas parecen no poder estar peor). Mi mamá por su lado, me enseñó que las cosas que hago, debo siempre hacerlas bien. Ella siempre estuvo ahí cuando necesitaba palabras de cariño, aliento, o simplemente su compañía en momentos difíciles. Faltan palabras para agradecer el amor, preocupación, enseñanzas, herramientas, y valores que ambos me han traspasado. Agradecer también a mi hermano el Bort por ser mi partner de vida, entender mi humor hasta el más mínimo detalle, reprocharme cuando me equivoco, y por haberme visto en todas y siempre seguir estando ahí apoyándome a lo largo de las distintas etapas de mi vida.

Por otro lado agradecer a mis amigos de colegio, Claudio, Diego, Pato, Negro, Javier, Juampi, Camilo y Pelao por las memorias y los buenos momentos: todas suspensiones que vivimos juntos, los numerosos siniestros a las instalaciones del colegio que más de una ocasión, las mochilas dadas vueltas, los lapices bic a pura tripa, mesas y sillas voladoras, las bombas de sonido en la Emanuel y basureros de San Carlos, las legendarias cholgatones, las sobrias y ordenadas juntas en la parcela del negro, entre otras. Podría duplicar en extensión esta tesis con la cantidad de cosas que vivimos juntos. Gracias por estar ahí cuando necesito hablar con cualquiera de ustedes, y por los consejos honestos que a uno le hacen falta de vez en cuando.

La universidad no es ninguna excepción a la aparición de gente muy especial que se cruzó por mi camino. Algunos se han mantenido, y algunos se han alejado, pero cuyas huellas en esta etapa aun quedan. Agradecer a mis primeros amigos de la universidad Richi y Adolfo, innumerables carretes, salidas, trasnochadas de estudio juntos. Gracias Adolfo por salvarme la vida cuando mis intestinos decidieron fallar, y por brindarme el apañe que en momentos necesité. Adentrándome en la ebria, conocí a un querido personaje en su hábitat natural, mi querido Aldito, con quien tuve el gusto de compartir buenas chelitas casuales, tardes de chess junto al Mati Villela, y vivir un buen puñado de locuras. Como olvidar a mi compa de depa

Franco, con quien no faltó su buena conversa, su paliza a Richi (su clásico de huasos), su destrucción de muebles, su pelea sobre quien cresta me sacaba el queso, en fin, gracias por aguantarme tantos años y tu amistad bro. Agradecer a otro grande a quien quiero mucho, Bernard, con quien siempre he sentido la confianza de hablar lo que sea, y de saber que me apaña a todos mis planes repentinos. No puedo ignorar los cumpleaños con el gritón del Árabe, los encuentros espontáneos con Jorge Rivas, los carretes repentinos con el Tomito, los entrenamientos y juntas con el Oscar y el Calama, las juntas donde el Manu Layera, sus partidas de ping pong con los Doña, las invitaciones hogareñas de la Belén, entre vari@s más que seguramente se me quedan en el tintero.

También agradecer los lindos momentos a mis amigos de mecánica, Mati, Vicho, Hodali, Diego el caca (¿dónde están las minas wn?), Álvaro, Ale, Nacho, Eidrian, y por supuesto al crack del Franquito Clandestino. Mención especial también se lleva mi compa el Cris y nuevamente el Richi, a quienes les tengo un enorme cariño. Gracias amigos por sus sinceras amistades y apañe a todas. Ah si, y aprovecho de agradecer a todos los del centro estudiantil de mecánica por no banearme de los paseos mecánicos (grande Juanmi).

Por supuesto también agradecer a Pia por los lindos momentos juntos, haberme apoyado en mis últimos años de carrera, darme el cariño y motivación que me mantuvieron firme no solo en mi vida académica, sino que también en mi día a día.

Finalmente agradecer a mi profesor Roger Bustamante, por su guía, disposición y paciencia a lo largo de esta memoria.

Tabla de Contenido

Resumen	i
Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
1. Introducción	1
1.1. Objetivo general	2
1.2. Objetivos específicos	2
2. Antecedentes	3
2.1. Polarización en Cerámicos Piezoeléctricos	3
2.2. Cinemática del continuo	5
2.3. Tensor de esfuerzos	7
2.4. Ecuaciones de la electrostática	8
2.5. Ecuación de equilibrio	9
2.6. Leyes de la termodinámica	9
2.7. Ecuaciones Constitutivas	10
2.8. Función isotrópica $\check{\Pi}$ para ecuación constitutiva	13
3. Fitting de $\check{\Pi}$ a datos experimentales	15
4. Problemas de valor de frontera unidimensionales	23
4.1. Problemas homogéneos	23
4.1.1. Lámina en tracción axial y bajo campo eléctrico axial	23
4.1.2. Prisma en tracción y bajo campo eléctrico perpendicular	26
4.2. Problemas no homogéneos	32
4.2.1. Inflado de una cáscara esférica bajo campo eléctrico radial	32
4.2.2. Inflado y extensión de tubo cilíndrico y bajo campo eléctrico radial	41
4.2.3. Inflado y extensión de tubo cilíndrico y bajo campo eléctrico radial, con corte telescópico	53
4.2.4. Inflado y extensión de tubo cilíndrico y bajo campo eléctrico radial, con corte circunferencial	69
5. Conclusiones	85
Bibliografía	88

Índice de Figuras

2.1.	<i>Histéresis de la polarización eléctrica ($\mathbb{P} - \mathbb{E}$)</i>	3
2.2.	<i>Curvas de histéresis $\epsilon - \mathbb{E}$ a distintas frecuencias de excitación en muestra de BiFeO_3.</i>	4
2.3.	<i>Curva de histéresis de $\epsilon - \mathbb{E}$ en muestra de $\text{PNZST } 43/6/2$.</i>	5
2.4.	<i>Esquema de la cinemática de un cuerpo continuo</i>	5
2.5.	<i>Vector de densidad de fuerza t en distintos cortes.</i>	7
2.6.	<i>Esquema de esfuerzos en cubo diferencial.</i>	8
3.1.	<i>Deformación porcentual vs esfuerzo en [MPa] en barras de BiFeO_3.</i>	15
3.2.	<i>Polarización de la lámina de PLZT vs campo eléctrico externo aplicado.</i>	16
3.3.	<i>Ajuste de curva $\epsilon - \sigma$ (naranja) a datos experimentales (azul).</i>	18
3.4.	<i>Ajuste de curva $\mathbb{P} - \mathbb{E}$ (naranja) a datos experimentales (azul).</i>	19
3.5.	<i>Curva $\epsilon_{zz} - \sigma_{zz}$ bajo distintos valores del campo eléctrico axial \mathbb{E}_z.</i>	21
3.6.	<i>Curva $\mathbb{P}_z - \mathbb{E}_z$ bajo de influencia de distintos valores del esfuerzo axial σ_{zz}.</i>	22
4.1.	<i>Lámina de sección cuadrada en tracción vertical y bajo campo eléctrico vertical.</i>	24
4.2.	<i>Deformación longitudinal ϵ_{11} y ϵ_{22} en función del esfuerzo perpendicular σ_o, evaluado para distintas magnitudes de campo eléctrico. La línea continua muestra el caso en ausencia de campo eléctrico.</i>	25
4.3.	<i>Prisma en tracción σ_o bajo campo eléctrico perpendicular \mathbb{E}_o, con ángulo $\check{\alpha}$ con respecto a la dirección \mathbf{e}_1.</i>	27
4.4.	<i>Deformación longitudinal ϵ_{11} en función del esfuerzo perpendicular σ_o, y evaluado en distintas magnitudes de campo eléctrico en ángulos $\check{\alpha} = 30^\circ$ (líneas azules) y $\check{\alpha} = 80^\circ$ (líneas rojas). La línea sólida oscura muestra el caso en ausencia de campo eléctrico.</i>	28
4.5.	<i>Deformación longitudinal ϵ_{22} en función del esfuerzo perpendicular σ_o, y evaluado en distintas magnitudes de campo eléctrico en ángulos $\check{\alpha} = 30^\circ$ (líneas azules) y $\check{\alpha} = 80^\circ$ (líneas rojas). La línea sólida oscura muestra el caso en ausencia de campo eléctrico.</i>	28
4.6.	<i>Deformación de corte (o angular) ϵ_{12} en función del campo eléctrico \mathbb{E}_o, evaluado para distintos valores del ángulo $\check{\alpha}$. En rojo aparece la curva cuando $\check{\alpha} = 45^\circ$, donde la deformación de corte es máxima.</i>	29
4.7.	<i>Deformación longitudinal ϵ_{33} en función del esfuerzo σ_o, y evaluado en distintas magnitudes de campo eléctrico. En línea continua está el caso en ausencia de campo eléctrico.</i>	29

4.8.	<i>Polarización \mathbb{P}_1 en función del campo eléctrico \mathbb{E}_o, y evaluado para distintas magnitudes del esfuerzo de tracción σ_o. También se incluye la evaluación en ángulos $\check{\alpha} = 30^\circ$ (líneas azules) y $\check{\alpha} = 80^\circ$ (líneas rojas). Las líneas continuas muestran el caso en ausencia de esfuerzo de tracción.</i>	30
4.9.	<i>Polarización \mathbb{P}_2 en función del campo eléctrico \mathbb{E}_o, y evaluado para distintas magnitudes del esfuerzo de tracción σ_o. También se incluye la evaluación en ángulos $\check{\alpha} = 30^\circ$ (líneas azules) y $\check{\alpha} = 80^\circ$ (líneas rojas). Las líneas continuas muestran el caso en ausencia de esfuerzo de tracción.</i>	30
4.10.	<i>Cáscara esférica de radio interno r_i y externo r_o inflada con presión P. . . .</i>	32
4.11.	<i>Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i, para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $\phi_o = -25[kV]$ con presión (a) $P = 8[MPa]$, (b) $P = 20[MPa]$, (c) $P = 40[MPa]$ y (d) $P = 55[MPa]$.</i>	36
4.12.	<i>Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i, para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $\phi_o = -25[kV]$ con presión (a) $P = 8[MPa]$, (b) $P = 20[MPa]$, (c) $P = 40[MPa]$ y (d) $P = 55[MPa]$.</i>	36
4.13.	<i>Campo eléctrico (azul) y polarización (violeta) en función del radio normalizado r/r_i, para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $\phi_o = -25[kV]$ con presión (a) $P = 8[MPa]$, (b) $P = 20[MPa]$, (c) $P = 40[MPa]$ y (d) $P = 55[MPa]$.</i>	37
4.14.	<i>Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i, para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $P = 30[MPa]$ con voltaje (a) $\phi_o = -25[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -95[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$.</i>	37
4.15.	<i>Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i, para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $P = 30[MPa]$ con voltaje (a) $\phi_o = -25[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -95[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$.</i>	38
4.16.	<i>Campo eléctrico (azul) y polarización (violeta) en función del radio normalizado r/r_i, para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $P = 30[MPa]$ con voltajes (a) $\phi_o = -25[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -95[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$.</i>	38
4.17.	<i>Cáscara esférica de radio interno r_i y externo r_o inflada con presión P. . . .</i>	41
4.18.	<i>Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i, para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 5[MPa]$, (b) $P = 15[MPa]$, (c) $P = 22[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.</i>	46
4.19.	<i>Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i, para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 5[MPa]$, (b) $P = 15[MPa]$, (c) $P = 22[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.</i>	46
4.20.	<i>Campo eléctrico (azul) y polarización (violeta) en función del radio normalizado r/r_i, para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 5[MPa]$, (b) $P = 15[MPa]$, (c) $P = 22[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.</i>	47

4.21. Esfuerzo (rojo) y deformación (azul) axial en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 5[MPa]$, (b) $P = 15[MPa]$, (c) $P = 22[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$	47
4.22. Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$	48
4.23. Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$	48
4.24. Campo eléctrico (azul) y polarización (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$	49
4.25. Esfuerzo (rojo) y deformación (azul) axial en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$	49
4.26. Tubo de radio interno a y externo b con presión interna P , desplazamiento axial restringido en borde externo y corte longitudinal.	53
4.27. Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 3[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 20[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$	58
4.28. Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 3[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 20[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$	58
4.29. Campo eléctrico (azul) y polarización radial (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 3[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 20[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$	59
4.30. Deformación axial (azul) y corte axial (verde) axial en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 3[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 20[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$	59
4.31. Esfuerzo axial (azul) y de corte axial (verde) axial en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 3[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 20[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$	60
4.32. Polarización axial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 3[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 20[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$	60

4.33. Deform. radial (azul) y circunferencial (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 12[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -40[kV]$, (c) $\phi_o = -80[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	61
4.34. Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) vs. el radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 12[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -40[kV]$, (c) $\phi_o = -80[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	61
4.35. \mathbb{E}_r (azul) y \mathbb{P}_r (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 12[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -40[kV]$, (c) $\phi_o = -80[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	62
4.36. Deform. axial (azul) y de corte axial (verde) vs. el radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 12[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -40[kV]$, (c) $\phi_o = -80[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	62
4.37. Esfuerzo axial (azul) y corte axial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 12[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -40[kV]$, (c) $\phi_o = -80[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	63
4.38. Polarización axial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 12[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -40[kV]$, (c) $\phi_o = -80[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	63
4.39. Deform. y esfuerzo radial (azul), Deform. y esfuerzo circunfer. (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$	64
4.40. Polarización axial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$	64
4.41. Deform. y esfuerzo axial (azul), deform. y esfuerzo de corte axial (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$	65
4.42. Tubo de radio interno r_i y externo r_o inflado con presión P , con extensión axial λ y corte de azimutal.	69
4.43. Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $\phi_o = -20[kV]$ con presión (a) $P = 4[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 18[MPa]$ y (d) $P = 24[MPa]$	74
4.44. Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $\phi_o = -20[kV]$ con presión (a) $P = 4[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 18[MPa]$ y (d) $P = 24[MPa]$	74
4.45. Campo eléctrico (azul) y polarización radial (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $\phi_o = -20[kV]$ con presión (a) $P = 4[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 18[MPa]$ y (d) $P = 24[MPa]$	75

4.46. Deform. axial (azul) y de corte circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $\phi_o = -20[kV]$ con presión (a) $P = 4[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 18[MPa]$ y (d) $P = 24[MPa]$	75
4.47. Esfuerzo axial (azul) y de corte circunfer. (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $\phi_o = -20[kV]$ con presión (a) $P = 4[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 18[MPa]$ y (d) $P = 24[MPa]$	76
4.48. Polarización circunferencial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $\phi_o = -20[kV]$ con presión (a) $P = 4[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 18[MPa]$ y (d) $P = 24[MPa]$	76
4.49. Deform. radial (azul) y circunferencial (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -20[kV]$, (b) $\phi_o = -60[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	77
4.50. Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) vs. el radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -20[kV]$, (b) $\phi_o = -60[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	77
4.51. \mathbb{E}_r (azul) y \mathbb{P}_r (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -20[kV]$, (b) $\phi_o = -60[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	78
4.52. Deform. axial (azul) y de corte circunferencial (verde) vs. el radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -20[kV]$, (b) $\phi_o = -60[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	78
4.53. Esfuerzo axial (azul) y corte circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -20[kV]$, (b) $\phi_o = -60[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	79
4.54. Polarización circunferencial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -20[kV]$, (b) $\phi_o = -60[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$	79
4.55. Deform. y esfuerzo radial (azul), Deform. y esfuerzo circunfer. (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$	80
4.56. Polarización circunferencial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$	80
4.57. Deform. y esfuerzo axial (azul), Deform. y esfuerzo de corte circunferencial (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$	81

Capítulo 1

Introducción

Los materiales piezoeléctricos son aquellos que al ser deformados por la aplicación de alguna carga externa (ya sea de tracción o compresión), generan un potencial eléctrico V entre algunas de sus fronteras, dependiendo de la deformación de la microestructura del material, por acumulación de cargas inversas en fronteras opuestas. De manera inversa, al aplicar un campo eléctrico sobre el material (generalmente de bastante intensidad), se pueden observar deformaciones, dependiendo del sentido y dirección del campo aplicado. Esta propiedad fue descubierta por primera vez en 1880 por los hermanos Curie mientras investigaban cristales de cuarzo y turmalina [1], y ha sido ampliamente estudiada experimentalmente. Hoy en día, este tipo de materiales encuentran diversas aplicaciones, como es el “*energy harvesting*” [2, 3, 4] para energizar sistemas autónomos de bajo voltaje, impresiones con tecnología Inkjet [5], detección y producción de sonido [6], entre otras.

Generalmente, los modelos matemáticos utilizados para describir las interacciones electroelásticas de medios continuos (piezoeléctricos en este caso), trabajan partiendo de la base que los esfuerzos y una las variables eléctricas, son funciones explícitas de las deformaciones y otra variable eléctrica [7, 8, 9, 10]. Muchos de estos modelos constitutivos se obtienen de la derivación de un potencial escalar W (energía de deformación), razón por la que estos modelos se les denomina cuerpos elásticos de Green, y tienen la forma:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}},$$

donde \mathbf{S} es el segundo tensor de Piola-Kirschhoff y \mathbf{F} es el tensor gradiente de deformación. No obstante, Rajagopal afirma que no es necesario suponer que los esfuerzos son funciones de las deformaciones, y propone relaciones constitutivas implícitas como un modelo más general [11, 12, 13]. A partir de estas relaciones implícitas y suponiendo que el gradiente de desplazamiento es muy pequeño (y por tanto, también la deformación), se pueden obtener expresiones para la deformación linealizada o infinitesimal en función del esfuerzo [14] (o sea, no son cuerpos elásticos de Green), siendo estos modelos de especial utilidad para modelar materiales frágiles, es decir, que presentan pequeñas deformaciones a un rango arbitrario de cargas. Un claro ejemplo de estos materiales son los policristales ferroeléctricos [15], las cuales son materiales bastante frágiles, por lo que son capaces de soportar solo pequeñas deformaciones antes de llegar a la falla en pruebas de tracción/compresión, a carga relativamente altas.

Las ecuaciones constitutivas no lineales que se estudian en el presente trabajo, planteadas por Bustamente para el caso isotrópico y de pequeñas deformaciones [16], son de la forma:

$$\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \check{\mathfrak{f}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}), \quad \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \check{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}),$$

donde tanto la deformación ε como la polarización del material \mathbf{P} se suponen como funciones del esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ y el campo eléctrico \mathbf{E} . Estas ecuaciones son propuestas considerando el cumplimiento de las leyes de termodinámica aplicadas a materiales no disipativos, y se utilizan en este trabajo para resolver cuatro problemas de valores de frontera unidimensionales: para un caso esférico y tres casos de geometría cilíndrica; uno sin corte, otro con corte telescópico, y otro con corte circunferencial.

1.1. Objetivo general

Resolver de forma numérica cuatro problemas de valor de frontera no homogéneos, utilizando las ecuaciones no lineales propuestas por Bustamante.

1.2. Objetivos específicos

- Encontrar una función isotrópica $\check{\mathfrak{H}}$ tal que permita describir los fenómenos de “*strain limiting*” y de saturación de la polarización.
- Lograr un buen fitting de las ecuaciones constitutivas con datos experimentales.
- Evidenciar los fenómenos de “*strain limiting*” y de saturación de la polarización en los resultados numéricos de los problemas.
- Encontrar los rangos de convergencia para algunos parámetros para la resolución numérica de los problemas de valor de frontera.
- Llegar a posibles aplicaciones prácticas que puedan basarse en algunos de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Polarización en Cerámicos Piezoeléctricos

Un fenómeno que ocurre al aplicar un campo eléctrico a un material con propiedades piezoeléctricas, es la aparición de una polarización eléctrica interna producto de la reorientación de los distintos los dipolos eléctricos dentro del material. Esta presenta una curva de saturación con respecto al campo eléctrico aplicado, por lo que resulta cada vez más difícil seguir polarizando al material (ver figura 2.1 [17]). Por otro lado, esta tiende a mantenerse distinta de cero luego de quitar el campo eléctrico externo, determinada por el nivel de saturación que sufre el material (ver figura 2.1). A este fenómeno se le conoce como histéresis eléctrica. Para eliminar la polarización remanente (P_R) debe invertirse la polaridad del campo eléctrico inicial a un valor determinado E_C [17]. A este campo eléctrico necesario E_C se le denomina campo eléctrico coercitivo. Al superar este campo eléctrico coercitivo, es posible polarizar el material con polaridad opuesta. Sin embargo, lo anterior no es siempre cierto, debido a que se puede revertir la polarización de un material con campos eléctricos menores al campo coercitivo por prolongados periodos de tiempo, por lo que un factor determinante es el tiempo en que E es aplicado [17].

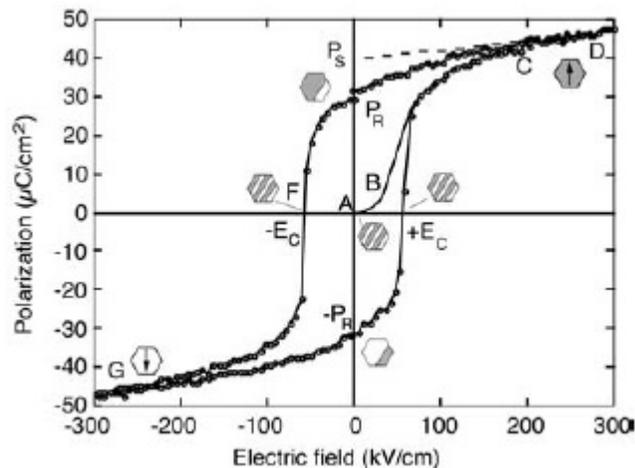


Figura 2.1: Histéresis de la polarización eléctrica ($P - E$)

Asimismo, al aplicar un campo eléctrico externo \mathbb{E} sobre una cerámica piezoeléctrica, se obtienen deformaciones ϵ en forma de extensión y/o compresión dependiendo del estado de polarización en el que el material se encuentra y la magnitud del campo \mathbb{E} . Esta deformación no solo depende de la magnitud del campo eléctrico, sino que también de la prolongación a la que este campo eléctrico se aplica [17]. Esto se debe a que la deformación no ocurre instantáneamente en el momento que se le aplica un campo eléctrico, por lo que toma un tiempo llegar a la deformación de equilibrio correspondiente. Es por esta razón, que cuando se aplican campos eléctricos oscilantes a un piezoeléctrico, la magnitud de las deformaciones disminuyen a medida que aumenta la frecuencia de oscilación del campo eléctrico tal como lo demuestra la figura (2.2).

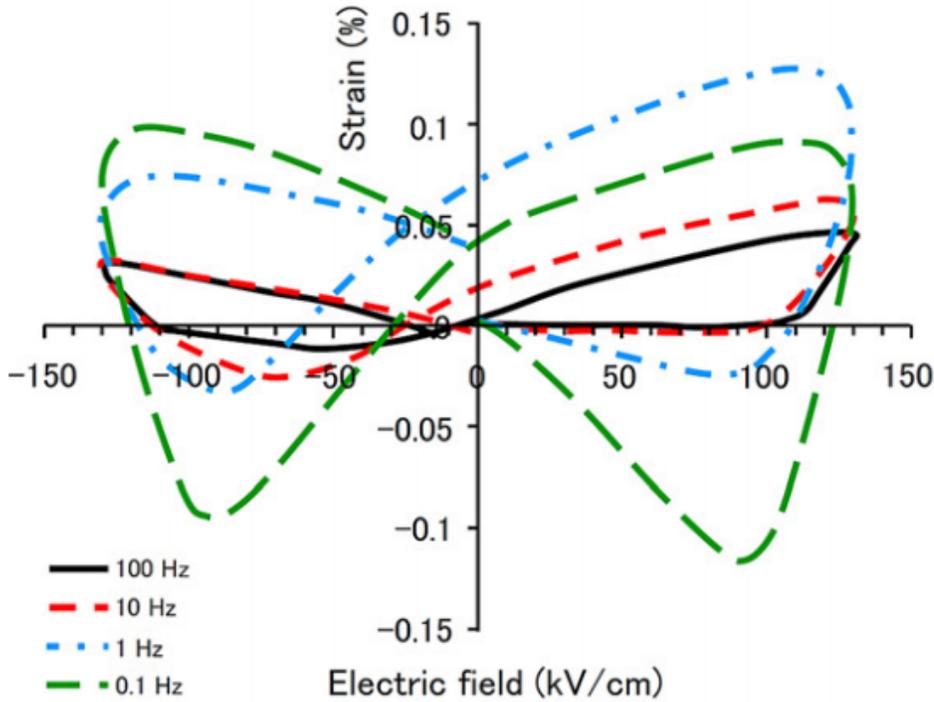


Figura 2.2: Curvas de histéresis $\epsilon - \mathbb{E}$ a distintas frecuencias de excitación en muestra de BiFeO_3 .

Por su lado, las deformaciones de compresión y extensión no son iguales, de hecho, en las curvas de histéresis con forma de mariposa como la de la figura 2.2 [18], se puede observar a 0.1 [Hz] (caso más similar al cuasiestático que se analizan en los problemas de los capítulos posteriores) que cuando la deformación tiene valores negativos (compresión), esta aumenta con una mayor pendiente que cuando la deformación se mueve por valores positivos (expansión), para el caso en particular del BiFeO_3 [18]. Existen algunas cerámicas compuestas, como por ejemplo el PNZST 43/6/2, donde la compresión inducida por campos eléctricos es prácticamente nula, y solo se observa expansión, por lo que la curva de histéresis $\epsilon - \mathbb{E}$ quedaría como la de la figura 2.3 [19].

Cabe destacar que para los alcances de este trabajo, se trabaja solamente con problemas que no tienen oscilaciones, es decir, con el caso cuasiestático, por lo que la aplicación del campo eléctrico se supone a una frecuencia igual a cero.

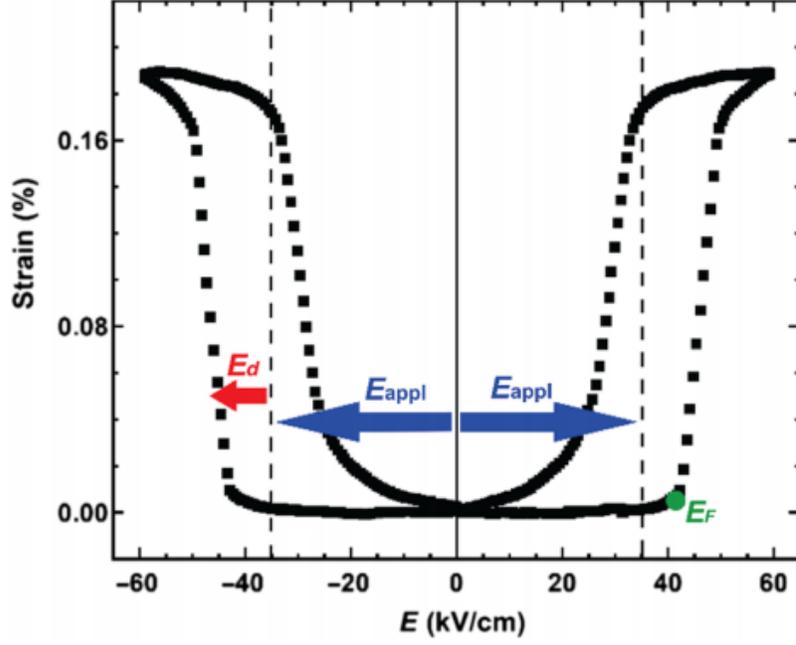


Figura 2.3: Curva de histéresis de $\varepsilon - \mathbb{E}$ en muestra de PNZST 43/6/2.

2.2. Cinemática del continuo

Sea \mathbf{X} el vector de posición inicial de una partícula X en un cuerpo \mathcal{B} con la configuración de referencia $\kappa_r(\mathcal{B})$, y \mathbf{x} el vector de posición de la misma partícula X perteneciente al mismo cuerpo \mathcal{B} en una configuración $\kappa_t(\mathcal{B})$ en un tiempo posterior t , se representa a la cinemática del cuerpo \mathcal{B} en la figura 2.4 [20], donde por simplicidad de notación, $\mathcal{B}_r = \kappa_r(\mathcal{B})$ y $\mathcal{B}_t = \kappa_t(\mathcal{B})$.

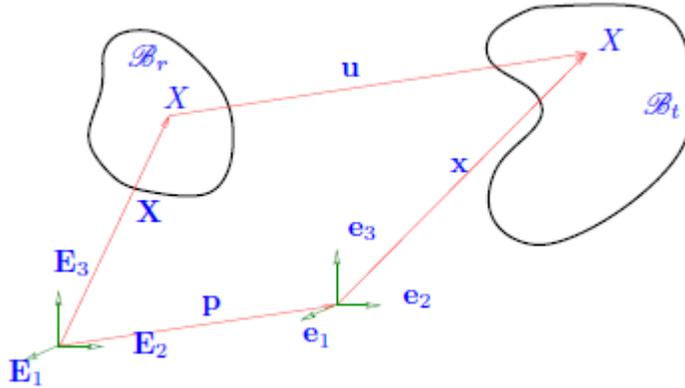


Figura 2.4: Esquema de la cinemática de un cuerpo continuo

Considerando el caso en que \mathbf{x} se mida desde el mismo sistema de coordenadas utilizado para describir la configuración de referencia $\kappa_r(\mathcal{B})$, el vector \mathbf{p} que separa ambos orígenes (E_1, E_2, E_3) y (e_1, e_2, e_3) sería igual a $\mathbf{0}$, lo que permite definir al vector de desplazamiento \mathbf{u} de la forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.1)$$

Bajo el supuesto de que el cuerpo \mathcal{B} se considera como un continuo, se define a la función de mapeo \mathcal{X} de una partícula X en un tiempo \mathbf{t} , o sea, $\mathbf{x} = \mathcal{X}(\mathbf{X}, \mathbf{t})$, y se supone lo suficientemente suave como para que todas sus derivadas existan y sean considerables. La anterior notación de \mathcal{X} es posible suponiendo el carácter biyectivo entre la partícula X y su respectivo vector de posición inicial \mathbf{X} . Con lo anterior, se define al tensor de segundo orden \mathbf{F} , llamado gradiente de deformación, como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.2)$$

Derivando a (2.1) por la posición inicial \mathbf{X} , se obtiene la relación entre el gradiente de desplazamiento $\nabla_r \mathbf{u}$ y el gradiente de deformación \mathbf{F}

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_r \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}, \quad (2.3)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad, y el subíndice r indica que se deriva con respecto a la configuración de referencia. Por último, se define al tensor de segundo orden derecho de Cauchy-Green, tensor de deformación de Lagrange Saint-Venant y a la deformación linealizada [20], respectivamente como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla_r \mathbf{u} + \nabla_r \mathbf{u}^T]. \quad (2.4)$$

Importante es recordar que el tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ está definido por la derivada del vector desplazamiento \mathbf{u} respecto a la configuración de referencia. A partir de la expresión (2.4)₃ nacen las ecuaciones que relacionan las componentes matriciales de la deformación con las componentes vectoriales del desplazamiento, que en coordenadas cilíndricas [21] tendrían la forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

y por su lado en coordenadas esféricas [21], serían

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\phi}{r} \cot \phi, & \varepsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), & \varepsilon_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right), & & \\ \varepsilon_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\theta}{r} \cot \phi \right), & & & & \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde el θ es el ángulo azimutal, y ϕ es el ángulo polar (o colatitud).

2.3. Tensor de esfuerzos

El vector de esfuerzos de Cauchy $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, se define como densidad de fuerza de superficie (medida en MPa) en \mathbf{x} , en una superficie con normal \mathbf{n} . Esta superficie puede ser tanto la frontera $\partial\mathcal{B}$ como un corte de interno de un cuerpo \mathcal{B} . En la figura 2.5 [20] se puede apreciar que para un mismo punto \mathbf{x} , existen diversos vectores \mathbf{t} dependido de la orientación de su respectivo corte, ergo su dependencia de \mathbf{n} es importante.

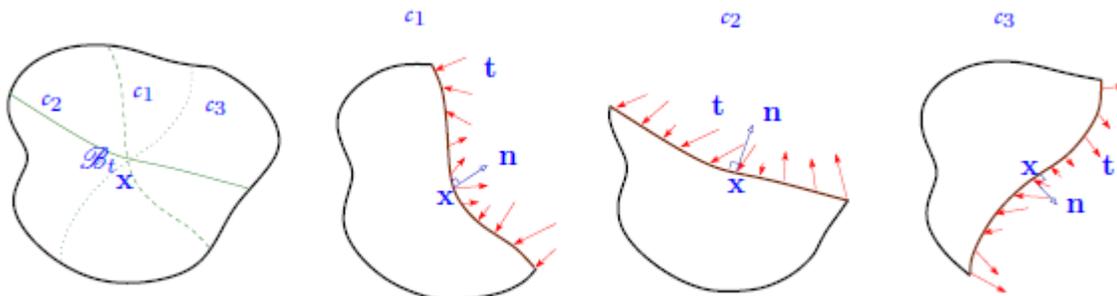


Figura 2.5: Vector de densidad de fuerza \mathbf{t} en distintos cortes.

De esta forma, se define al tensor de esfuerzos de Cauchy \mathbf{T} como:

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}).$$

Se puede escribir este tensor de forma explícita en función de una base vectorial $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de coordenada cartesianas:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix},$$

donde interpretación física de sus componentes queda clara en el volumen diferencial de la figura 2.6 [20], y cuyos componentes T_{ij} con $i = j$ son los esfuerzos normales a las direcciones del sistema de coordenadas, e $i \neq j$ son los esfuerzos de corte sobre las distintas caras del volumen diferencial con normal \mathbf{e}_i .

Por temas de convención en el tema, a partir de este punto se utiliza $\boldsymbol{\sigma}$ para aludir a \mathbf{T} .

En general este tensor es simétrico, pero para cuerpos electroelásticos bajo la influencia de campos eléctricos y polarización, este tiende a ser asimétrico [16], según la ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{E} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{P}, \quad (2.7)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{P} son los vectores de campo eléctrico y polarización eléctrica respectivamente.

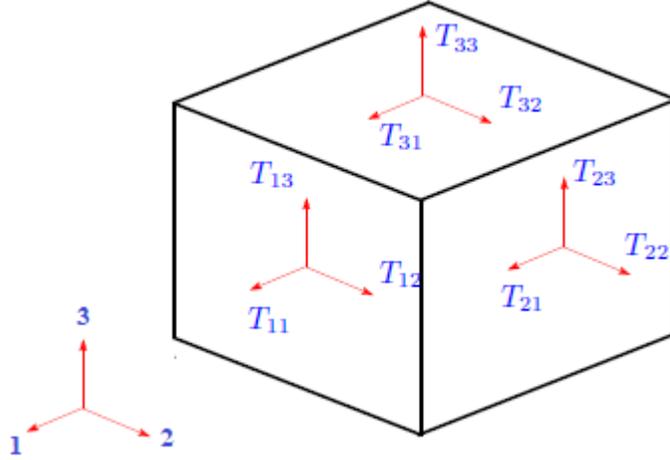


Figura 2.6: Esquema de esfuerzos en cubo diferencial.

2.4. Ecuaciones de la electrostática

Al trabajar con cuerpos electroelásticos, los cuales normalmente poseen propiedades dieléctricas, uno debe verificar que sus interacciones eléctricas con campos electromagnéticos cumplan con las leyes de Maxwell. Para los fines de este trabajo, se supone la no existencia de cargas eléctricas libres q_e , por lo que la densidad de corriente eléctrica $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, y además no se considerará la aplicación de campos magnéticos externos, por lo que el campo magnético \mathbf{B} , la inducción magnética \mathbf{H} y la magnetización \mathbf{M} también se consideran campos vectoriales nulos. Con esto, las ecuaciones de Maxwell quedan resumidas como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0} &\Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{P} + \varepsilon_o \mathbf{E}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde en (2.8)₂ se utiliza la definición vectorial del desplazamiento eléctrico, y ε_o es la permitividad eléctrica del vacío. Por otra parte, cuando se analiza el comportamiento de cuerpos electroelásticos, es importante considerar además las condiciones de continuidad en sus fronteras con el entorno (el cual se supone como vacío), donde que cumple que

$$\mathbf{n} \times [[\mathbf{E}]] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot [[\mathbf{P}]] + \varepsilon_o \mathbf{n} \cdot [[\mathbf{E}]] = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

donde $[[\mathbf{E}]]$ se considera como la diferencia entre el campo eléctrico exterior \mathbf{E}^o y el interior \mathbf{E}^i , y \mathbf{n} es la normal de la superficie de la frontera del cuerpo.

2.5. Ecuación de equilibrio

Al trabajar con cuerpos electroelásticos, las fuerzas producto de los esfuerzos internos, de las interacciones electro elásticas y las fuerzas de cuerpo, deben coincidir con la fuerza neta del sistema (ver [22]), es decir

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \operatorname{grad}(\mathbf{E})\mathbb{P} + \mathbf{f} - \rho\ddot{\mathbf{x}} = 0,$$

donde div es el operador de divergencia, grad es el gradiente, \mathbf{f} son las fuerzas de cuerpo no eléctricas (peso por ejemplo), $\ddot{\mathbf{x}}$ es el vector aceleración del cuerpo y ρ es la densidad del cuerpo en la configuración actual. Suponiendo que no existen fuerzas de cuerpo y que las deformaciones son cuasi-estáticas, tenemos que \mathbf{f} y $\ddot{\mathbf{x}}$ son nulos por lo que resulta:

$$-\operatorname{grad}(\mathbf{E})\mathbb{P} = \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.10)$$

Para las aplicaciones de esta ecuación de equilibrio en los problemas del siguiente capítulo, es de gran utilidad conocer su forma vectorial de en coordenadas cilíndricas, considerando un campo eléctrico solo radial en función del radio, o sea, $\mathbf{E} = \mathbb{E}_r\mathbf{e}_r$, tal que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\mathbb{E}_r}{\partial r}\mathbb{P}_r &= \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \\ -\frac{\mathbb{E}_r\mathbb{P}_\theta}{r} &= \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}), \\ 0 &= \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

y en esféricas, donde por temas de brevedad, se considera el caso simétrico del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ en las coordenadas r , ϕ y θ

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\mathbb{E}_r}{\partial r}\mathbb{P}_r &= \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\phi r}}{\partial\phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\phi}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}), \\ -\frac{\mathbb{E}_r\mathbb{P}_\phi}{r} &= \frac{\partial\sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\phi\phi}}{\partial\phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial\sigma_{\theta\phi}}{\partial\theta} + \frac{3}{r}\sigma_{r\phi} + \frac{\cos\phi}{r\sin\phi}(\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}), \\ -\frac{\mathbb{E}_r\mathbb{P}_\theta}{r} &= \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\phi\theta}}{\partial\phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{3}{r}\sigma_{r\theta} + \frac{2\cos\phi}{r\sin\phi}\sigma_{\theta\phi}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde ϕ es el ángulo polar, θ es el azimutal, y también se supone un campo eléctrico meramente radial en función solo del radio $\mathbf{E} = \mathbb{E}_r\mathbf{e}_r$.

2.6. Leyes de la termodinámica

Para cuerpos continuos electroelásticos bajo campos eléctricos, la primera ley de la termodinámica es [16]

$$\rho\dot{U} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\nabla\mathbf{v}) - \operatorname{div}\mathbf{Q} + \rho r + \phi_e + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}, \quad (2.13)$$

donde U es la energía interna por unidad de masa, \mathbf{Q} es el campo vectorial del flujo de calor, r es la generación de calor del cuerpo por unidad de masa, \mathbf{v} es el campo de velocidades del

cuerpo, y ϕ_e esta definido por $\phi_e = \rho \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{E}$. Por su lado, la energía libre de Helmholtz ψ se define como

$$\psi = U - \theta s - \mathbf{E} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{P} \right), \quad (2.14)$$

donde θ es el campo escalar de temperatura. Se define al segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, y las contrapartes Lagrangianas del flujo de calor, campo eléctrico y polarización respectivamente como

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{Q}^L = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{E}^L = \mathbf{F}^T \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}^L = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}, \quad (2.15)$$

donde $J = \det(\mathbf{F}) > 0$. Utilizando estas definiciones, junto con (2.4)₂ y (2.14) en (2.13), se puede reformular la primera ley de la termodinámica como

$$\rho_r \left(\dot{\psi} + \dot{\theta} s + \theta \dot{s} \right) - \text{tr} \left(\mathbf{S} \dot{\mathbf{E}} \right) + \text{div} \mathbf{Q}^L - \rho_r r + \mathbf{P}^L \cdot \dot{\mathbf{E}}^L = 0, \quad (2.16)$$

donde $\rho_r = J \rho$ es la densidad del cuerpo en la configuración de referencia. La segunda ley de la termodinámica, utilizando las mismas variables Lagrangianas de (2.15), es

$$- \rho_r \left(\dot{\psi} + \dot{\theta} s \right) - \dot{\mathbf{E}}^L \cdot \mathbf{P}^L + \text{tr} \left(\mathbf{S} \dot{\mathbf{E}} \right) - \frac{1}{\theta} \text{grad} \theta \cdot \mathbf{Q}^L \geq 0. \quad (2.17)$$

2.7. Ecuaciones Constitutivas

Para empezar con el planteamiento de las ecuaciones constitutivas (basado en [16]), es importante recalcar que se supone que no existen cambios de temperatura, que no hay transferencia de calor, ni tampoco generación de calor. Al no haber disipación de energía, la primera y segunda de ley de la termodinámica (2.15) y (2.17) terminan siendo las mismas, o sea

$$\rho_r \dot{\psi} - \text{tr} \left(\mathbf{S} \dot{\mathbf{E}} \right) + \mathbf{P}^L \cdot \dot{\mathbf{E}}^L = 0. \quad (2.18)$$

Una forma bastante general para describir a cuerpos electroelásticos, es la relación constitutiva tensorial implícita de la forma

$$\mathfrak{F}(\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{E}^L, \mathbf{P}^L) = 0, \quad (2.19)$$

donde \mathfrak{F} es una relación implícita de segundo orden. Complementando a la relación de anterior, se tiene a la ecuación constitutiva vectorial implícita

$$\mathfrak{G}(\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{E}^L, \mathbf{P}^L) = 0, \quad (2.20)$$

donde \mathfrak{G} es una relación implícita vectorial.

A partir de la primera ley de la termodinámica, suponiendo que la energía libre de Helmholtz ψ es de la forma $\psi = \psi(\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{E}^L, \mathbf{P}^L)$, y aplicando la regla de la cadena al derivar con respecto al tiempo, (2.18) quedaría en notación indicial como

$$- \rho_r \frac{\partial \psi}{\partial S_{\alpha\beta}} \dot{S}_{\alpha\beta} + \left(S_{\alpha\beta} - \rho_r \frac{\partial \psi}{\partial E_{\alpha\beta}} \right) \dot{E}_{\alpha\beta} - \left(\mathbb{P}_{\alpha}^L + \rho_r \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}_{\alpha}^L} \right) \dot{\mathbb{E}}_{\alpha}^L - \rho_r \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{P}_{\alpha}^L} \dot{\mathbb{P}}_{\alpha}^L = 0. \quad (2.21)$$

Considerando el caso en que el gradiente del desplazamiento es pequeño, es decir, $|\nabla_r \mathbf{u}| \sim O(\delta)$, $\delta \ll 1$, se tiene que por (2.3), $\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{S} \approx \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{E}^L \approx \mathbf{E}$, $\mathbf{P}^L \approx \mathbf{P}$ y $\rho_r \approx \rho$. Lo anterior junto con (2.4)₃ implica además que $|\boldsymbol{\varepsilon}|$ es pequeño, lo que permite modificar a la relación \mathfrak{F} a

$$\mathfrak{A}_{ijkl}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}, \mathbf{P}) \varepsilon_{kl} = \mathfrak{B}_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}, \mathbf{P}). \quad (2.22)$$

Suponiendo que \mathfrak{A}^{-1} existe, se puede llegar a un tensor explícito $\hat{\mathfrak{f}}$ para $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathfrak{f}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}, \mathbf{P}). \quad (2.23)$$

Asimismo, considerando $|\nabla_r \mathbf{u}| \sim O(\delta)$, $\delta \ll 1$ y a (2.23), la relación vectorial implícita \mathfrak{G} pasa a tener la forma

$$\hat{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}, \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Al tomar el caso en que la magnitud de la polarización es pequeña, o sea $|\mathbf{P}| \sim O(\delta)$, $\delta \ll 1$ se puede utilizar el mismo procedimiento utilizado para obtener la relación explícita (2.23) en la relación implícita (2.24), obteniendo así

$$\mathbf{P} = \check{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}), \quad (2.25)$$

con lo que la relación explícita para $\boldsymbol{\varepsilon}$ (2.23) pasa tomar la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \check{\mathfrak{f}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}). \quad (2.26)$$

Por otro lado, al suponer que la magnitud de la polarización es pequeña, la expresión (2.7) puede aproximarse a $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{E} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{P} \approx \boldsymbol{\sigma}$, lo que posibilita la aplicación de simetría en las ecuaciones (2.11) y (2.12) para la ecuación de equilibrio (2.10).

Suponiendo la existencia de los potenciales $\check{\mathfrak{H}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$ y $\check{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$, tales que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \check{\mathfrak{f}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \frac{\partial \check{\mathfrak{H}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{P} = \check{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \frac{\partial \check{\mathfrak{Y}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.27)$$

Con las ecuaciones explícitas (2.25) y (2.26), la energía libre Helmholtz podría expresarse de la forma $\psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$, con lo que la primera ley de la termodinámica expresada en (2.21) se simplificaría en notación indicial a

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \left(\mathbb{P}_i + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}_i} \right) \dot{\mathbb{E}}_i = 0. \quad (2.28)$$

Utilizando (2.27) y la regla de la cadena para obtener $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en términos de $\dot{\mathfrak{H}}$ en (2.28), se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2 \check{\mathfrak{H}}}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}} \right) \dot{\sigma}_{ij} + \left(\frac{\partial^2 \check{\mathfrak{H}}}{\partial \sigma_{kl} \partial \mathbb{E}_i} \sigma_{kl} - \frac{\partial \check{\mathfrak{Y}}}{\partial \mathbb{E}_i} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}_i} \right) \dot{\mathbb{E}}_i = 0, \quad (2.29)$$

cuyas soluciones no triviales salen a partir de

$$\frac{\partial^2 \check{\Pi}}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \check{\Pi}}{\partial \sigma_{kl} \partial \mathbf{E}_i} \sigma_{kl} - \frac{\partial \check{\Upsilon}}{\partial \mathbf{E}_i} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} = 0. \quad (2.30)$$

Integrando (2.30)₂ con respecto al campo eléctrico \mathbf{E} , se obtiene

$$\check{\Upsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \frac{\partial \check{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl} - \rho \psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) + \check{\ell}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.31)$$

Asimismo, integrando a (2.30)₁ con respecto al tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$, se obtiene

$$\rho \psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \sigma_{ij} \frac{\partial \check{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})}{\partial \sigma_{ij}} - \check{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) + \check{\wp}(\mathbf{E}), \quad (2.32)$$

por lo que reemplazando (2.32) en (2.31) se consigue finalmente

$$\check{\Upsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \check{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) + \check{\ell}(\boldsymbol{\sigma}) - \check{\wp}(\mathbf{E}). \quad (2.33)$$

Si consideramos al potencial $\check{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$ como una función isotrópica $\check{\Pi}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$ respecto a las invariantes I_r , $r = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ definidas como

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), & I_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2), & I_3 &= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3), \\ I_4 &= \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}, & I_5 &= \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}), & I_6 &= \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Entonces de (2.27)₁, recordando la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$ y derivando a la función $\check{\Pi}(I_1, \dots, I_6)$ utilizando la regla de la cadena y las invariantes definidas en (2.34), se obtiene la ecuación constitutiva explícita

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \check{\Pi}_1 \mathbf{I} + \check{\Pi}_2 \boldsymbol{\sigma} + \check{\Pi}_3 \boldsymbol{\sigma}^2 + \check{\Pi}_5 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \check{\Pi}_6 [\mathbf{E} \otimes (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}) + (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}) \otimes \mathbf{E}], \quad (2.35)$$

donde los coeficientes $\check{\Pi}_r = \frac{\partial \check{\Pi}}{\partial I_r}$. Con el fin de no imponer que $\check{\Upsilon}$ además sea isotrópica con otras invariantes, se supone que la función $\check{\wp}(\mathbf{E}) = 0$, por lo que de (2.33) se tiene $\frac{\partial \check{\Upsilon}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \check{\Pi}}{\partial \mathbf{E}}$. Por lo anterior, y a partir de (2.27)₂ usando el mismo procedimiento utilizado para obtener (2.35), se llega a la ecuación constitutiva explícita para la polarización

$$\mathbf{P} = 2 \left(\check{\Pi}_4 \mathbf{E} + \check{\Pi}_5 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} + \check{\Pi}_6 \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{E} \right). \quad (2.36)$$

2.8. Función isotrópica $\check{\Pi}$ para ecuación constitutiva

Para que las ecuaciones constitutivas anteriores tengan sentido, es importante elegir una función isotrópica que pueda hacer que estas describan correctamente las interacciones electroelásticas de materiales reales.

Una tendencia común que presentan los materiales piezoeléctricos en general, es la saturación de la polarización con respecto a la aplicación de campo eléctrico sobre ellos. Este comportamiento en una curva $\mathbb{P} - \mathbb{E}$ se aproxima bastante a la forma de $\tanh(x)$. Por tanto, se busca una función que derivada, de la forma de $\tanh(\mathbb{E})$, y que tenga la presencia de algún coeficiente interno y externo que ajuste la amplitud de la curva, como lo sería en este caso $\ln[\cosh(\frac{\mathbb{E}}{m_1})]m_0m_1$. De esta misma forma se buscan las demás relaciones según la forma de las distintas invariantes.

A partir de una función isotrópica propuesta anteriormente por Ortiz y Bustamente [23], y con la adición de unas pequeñas modificaciones (en específico una traslación vertical y horizontal para la polarización con la adición de los coeficiente m_2 y m_3), se utiliza la siguiente función a lo largo del desarrollo de esta memoria:

$$\check{\Pi}(I_1, I_2, I_4, I_5) = \left\{ -\alpha \left[I_1 - \int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega \right] + \frac{\alpha\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right\} (g_0 + g_1 I_4) + \ln \left[\cosh \left(\frac{\sqrt{I_4} - m_2}{m_1} \right) \right] m_0 m_1 + m_3 \sqrt{I_4} + \frac{\zeta_0}{2} I_4 + \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} I_5 \quad (2.37)$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío, $\alpha, \beta, \gamma, \iota, g_0, g_1, m_0, m_1, m_2, m_3, \zeta_0$ y ζ_1 son coeficientes cuyos valores se determinan mediante un fitting con datos experimentales realizado en el próximo capítulo. La expresión anterior además de permitir modelar las curvas de saturación $\mathbb{P} - \mathbb{E}$, posibilita modelar al fenómeno de “strain limiting” a grandes esfuerzos.

Con todo lo anterior, y a partir de la expresión constitutiva explícita (2.35) y de la función isotrópica (2.37), se pueden obtener las expresiones expandidas generales para cada componente de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \alpha (g_0 + g_1 I_4) \left[\frac{1}{1 + \beta(I_1^2)^b} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{11}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right] + \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} \mathbb{E}_1^2, \\ \varepsilon_{22} &= \alpha (g_0 + g_1 I_4) \left[\frac{1}{1 + \beta(I_1^2)^b} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{22}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right] + \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} \mathbb{E}_2^2, \\ \varepsilon_{33} &= \alpha (g_0 + g_1 I_4) \left[\frac{1}{1 + \beta(I_1^2)^b} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{33}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right] + \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} \mathbb{E}_3^2, \\ \varepsilon_{12} &= \alpha (g_0 + g_1 I_4) \frac{\gamma \sigma_{12}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} + \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} \mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2, \\ \varepsilon_{23} &= \alpha (g_0 + g_1 I_4) \frac{\gamma \sigma_{23}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} + \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_3, \\ \varepsilon_{13} &= \alpha (g_0 + g_1 I_4) \frac{\gamma \sigma_{13}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} + \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} \mathbb{E}_1 \mathbb{E}_3. \end{aligned}$$

Por su lado, las expresiones explícitas generales para cada componente de la polarización a partir de la ecuación constitutiva (2.36) y la función isotrópica (2.37), quedan como

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1 &= \mathbb{E}_1 \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\alpha\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \zeta_0 \right\} \\
&\quad + \mathbb{E}_1 \left\{ \frac{m_3}{\sqrt{I_4}} + \frac{m_0}{\sqrt{I_4}} \tanh \left(\frac{\sqrt{I_4} - m_2}{m_1} \right) \right\} + \epsilon_o \zeta_1 (\sigma_{11} \mathbb{E}_1 + \sigma_{12} \mathbb{E}_2 + \sigma_{13} \mathbb{E}_3), \\
\mathbb{P}_2 &= \mathbb{E}_2 \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\alpha\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \zeta_0 \right\} \\
&\quad + \mathbb{E}_2 \left\{ \frac{m_3}{\sqrt{I_4}} + \frac{m_0}{\sqrt{I_4}} \tanh \left(\frac{\sqrt{I_4} - m_2}{m_1} \right) \right\} + \epsilon_o \zeta_1 (\sigma_{12} \mathbb{E}_1 + \sigma_{22} \mathbb{E}_2 + \sigma_{23} \mathbb{E}_3), \\
\mathbb{P}_3 &= \mathbb{E}_3 \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\alpha\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \zeta_0 \right\} \\
&\quad + \mathbb{E}_3 \left\{ \frac{m_3}{\sqrt{I_4}} + \frac{m_0}{\sqrt{I_4}} \tanh \left(\frac{\sqrt{I_4} - m_2}{m_1} \right) \right\} + \epsilon_o \zeta_1 (\sigma_{13} \mathbb{E}_1 + \sigma_{23} \mathbb{E}_2 + \sigma_{33} \mathbb{E}_3).
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Fitting de $\check{\Pi}$ a datos experimentales

Para obtener resultados numéricos en los problemas de valor de frontera del capítulo 4, se necesitan determinar los parámetros de la función $\check{\Pi}$ mediante la realización un fitting de curva con datos experimentales.

Los primeros datos experimentales son facilitados por el Profesor Ali Akbari-Fakhrabadi [24], los cuales relacionan la magnitud de deformación porcentual de unas barras de ferrita de bismuto ($BiFeO_3$) con respecto al esfuerzo aplicado sobre estas en [MPa] (ver figura 3.1). La ferrita de bismuto es conocida por ser un material multiferroicos [25, 26], sin embargo los datos provistos no consideran las interacciones eléctricas que existentes al deformar las barras.

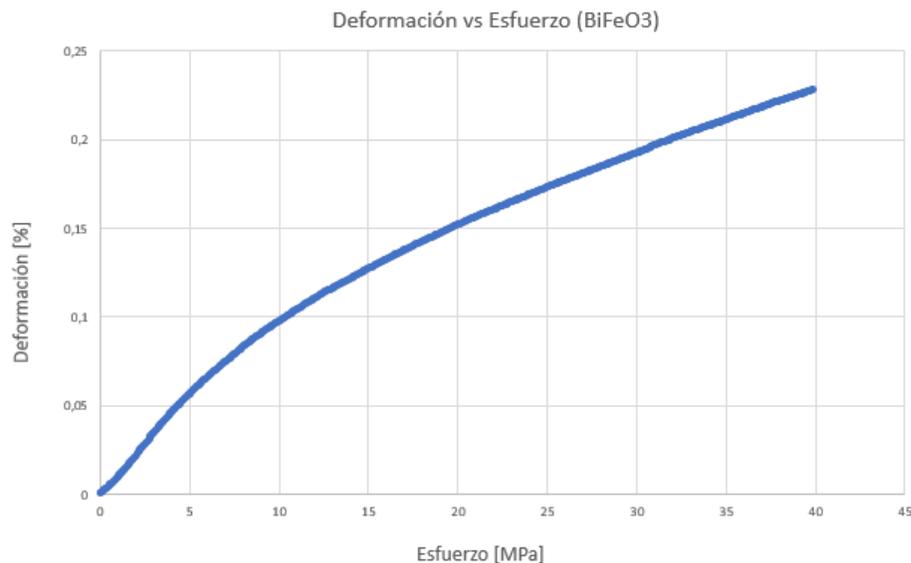


Figura 3.1: *Deformación porcentual vs esfuerzo en [MPa] en barras de $BiFeO_3$.*

Debido a lo anterior, y a la dificultad de encontrar datos experimentales que interrelacionaran las propiedades elásticas y eléctricas del mismo material, se decide conseguir datos de las interacciones eléctricas $\mathbb{P} - \mathbb{E}$ de otro material con propiedades piezoeléctricas, y realizar

un fitting que acople ambos fenómenos. Dicho esto, los segundos datos experimentales son cortesía del Dr. Ajeet Kumar (Universidad de Hyderabad) [27], y relacionan la magnitud de la polarización lograda en $[\mu\text{C}/\text{cm}^2]$ sobre un disco circular del compuesto PLZT 8/60/40 de 1 [mm] de espesor, según la magnitud del campo eléctrico externo aplicado en $[\text{kV}/\text{cm}]$ (figura 3.2).

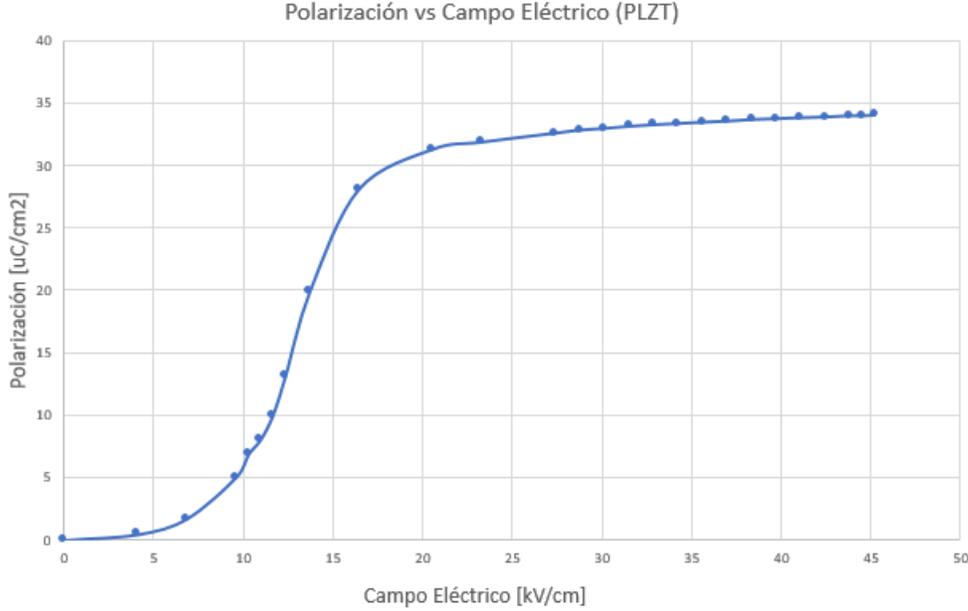


Figura 3.2: Polarización de la lámina de PLZT vs campo eléctrico externo aplicado.

Importante es aclarar que los datos de Kumar se realizaron a partir de una lámina de PLZT 8/40/60 no polarizada inicialmente, esto para eliminar la influencia de campos eléctricos coercitivos y la aparición del fenómeno de histéresis.

Otra acotación importante es que los parámetros que se obtienen del fitting de estos datos no corresponden a los coeficientes de un material real en particular, debido a que derivan del comportamiento eléctrico del PLZT 8/40/60 y de las propiedades ferroelásticas de la ferrita de bismuto. Dado a que este trabajo no tiene como objetivo describir a un material real en específico, lo anterior no es un problema.

Se procede planteando un problema lo suficientemente sencillo como para obtener expresiones explícitas de la deformación y la polarización en función de un esfuerzo y campo eléctrico. Esto requiere que el problema sea homogéneo, es decir, que ni el esfuerzo ni el campo eléctrico estén en función de la posición. Teniendo en cuenta que las condiciones de ambas pruebas experimentales fueron realizadas sobre geometrías cilíndricas, donde la deformación-esfuerzo medidos son axiales, al igual que el campo eléctrico aplicado a los discos en las pruebas de Kumar, se propone como problema homogéneo la extensión axial de una barra, bajo esfuerzo σ_o y campo eléctrico \mathbb{E}_o axiales, con lo que de (2.34)-(2.37) se obtiene la deformación

$$\varepsilon_{zz} = \alpha \left[\left(\frac{1}{(1 + \beta\sigma_o^{2b})} - 1 \right) + \frac{\gamma\sigma_o}{\sqrt{1 + \iota\sigma_o^2}} \right] (g_0 + g_1\mathbb{E}_o^2) + \frac{\epsilon_0\zeta_1}{2}\mathbb{E}_o^2, \quad (3.1)$$

y la polarización

$$\mathbb{P}_z = m_3 + \mathbb{E}_o \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{\sigma_o} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - \sigma_o + \frac{\gamma}{l} \sqrt{1 + \iota \sigma_o^2} \right] + \zeta_0 + \epsilon_0 \zeta_1 \sigma_o \right\} + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_o - m_2}{m_1} \right). \quad (3.2)$$

Notar la inclusión de dos nuevos coeficientes m_2 y m_3 a la función $\check{\Pi}$. Esto se debe a que tal como se puede apreciar en la gráfico de la figura 3.2, la polarización presenta una curva convexa a valores pequeños del campo eléctrico. Esta curva no se puede obtener usando la función \tanh no trasladada, debido a que esta función es convexa solo para valores negativos de su argumento. Debido a esto, para permitir un mejor ajuste, se traslada verticalmente hacia arriba a la función con el coeficiente $m_3 > 0$ y horizontalmente hacia la derecha con el coeficiente $m_2 > 0$.

Debido a que no hay fenómenos de histéresis, una condición que la inclusión de estos parámetros debe cumplir, es que la polarización sea nula cuando no haya un campo eléctrico aplicado. Evaluando la ecuación (3.2) en cero e imponiendo que \mathbb{P}_z , se tiene

$$m_3 = -m_0 \tanh \left(\frac{-m_2}{m_1} \right), \quad (3.3)$$

por lo que en realidad solo se está agregando un parámetro o sea m_2 . Por comodidad, se sigue expresando (3.3) simplemente como m_3 en futuras ecuaciones.

El ajuste anterior sin embargo conlleva a otro problema. En la práctica, la curva $\mathbb{P} - \mathbb{E}$ de materiales piezoeléctricos resulta siempre ser antisimétrica, es decir, que para una misma magnitud del campo eléctrico pero con polaridad opuesta, debiera provocar la misma polarización, pero también con polaridad opuesta. Al agregar los coeficientes anteriores, esta curva deja de ser anitismétrica. Para volverla antisimétrica, se propone

$$\mathbb{P}_z = \mathbb{E}_o \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{\sigma_o} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - \sigma_o + \frac{\gamma}{l} \sqrt{1 + \iota \sigma_o^2} \right] + \zeta_0 + \epsilon_0 \zeta_1 \sigma_o \right\} + \left[m_3 + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_o - m_2}{m_1} \right) \right] r(\mathbb{E}_o) + \left[-m_3 + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_o + m_2}{m_1} \right) \right] r(-\mathbb{E}_o), \quad (3.4)$$

donde $r(x)$ es la función Heavyside (escalón). Notar que la función Heavyside no se aplica a la expresión completa, ya que el primer término de (3.4), al estar todo multiplicado por \mathbb{E}_o , ya cumple la condición de asimetría, y como es sabido, la suma de dos funciones antisimétricas, resulta en una función antisimétrica.

La antisimetría no debe existir necesariamente en la curva de deformación vs. esfuerzo, dado a que los materiales generalmente presentan distintas curvas de compresión y expansión (rocas, cerámicas, cristales, cemento, etc.).

De esta forma, las expresiones a ajustar son (3.1) para los datos de la figura 3.1, y (3.4) para los de la figura 3.2.

Para el caso de la deformación, esta se evalúa en ausencia de campo eléctrico, por lo que la expresión (3.1) se reduce a

$$\varepsilon_{zz} = \alpha g_0 \left[\frac{1}{(1 + \beta \sigma_o^{2b})} - 1 + \frac{\gamma \sigma_o}{\sqrt{1 + \iota \sigma_o^2}} \right]. \quad (3.5)$$

Para el caso en que el esfuerzo en la componente axial σ_o se considera como inexistente, como es el caso para la toma de datos experimentales de la figura 3.2, se tiene que de (3.4), la polarización queda expresada como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_z = & \left(\frac{2\alpha g_1 \gamma}{\iota} + \zeta_0 \right) \mathbb{E}_o + \left[m_3 + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_o - m_2}{m_1} \right) \right] r(\mathbb{E}_o) \\ & + \left[-m_3 + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_o + m_2}{m_1} \right) \right] r(-\mathbb{E}_o). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se procede a realizar un ajuste manual, es decir, probando con numerosas combinaciones de parámetros que permitan minimizar el error del ajuste. Esto en un comienzo no es difícil con las expresiones (3.5) y (3.6) debido a que no consideran los efectos acoplados del esfuerzo y el campo eléctrico. La única dificultad inicial son los parámetros que juegan un rol tanto para (3.5) como para (3.6), como es el caso de α , γ y ι .

Con lo anterior, se llega a las curvas de ajuste azules de las figuras 3.3 y 3.4. En la primera, el ajuste logrado de la curva $\varepsilon - \sigma$ el ajuste de la curva $\mathbb{P} - \mathbb{E}$ presenta una desviación estándar de solo $0.56 \text{ } [\mu\text{C}/\text{cm}^2]$, lo que representa solo un 1.6% de polarización de saturación de la muestra.

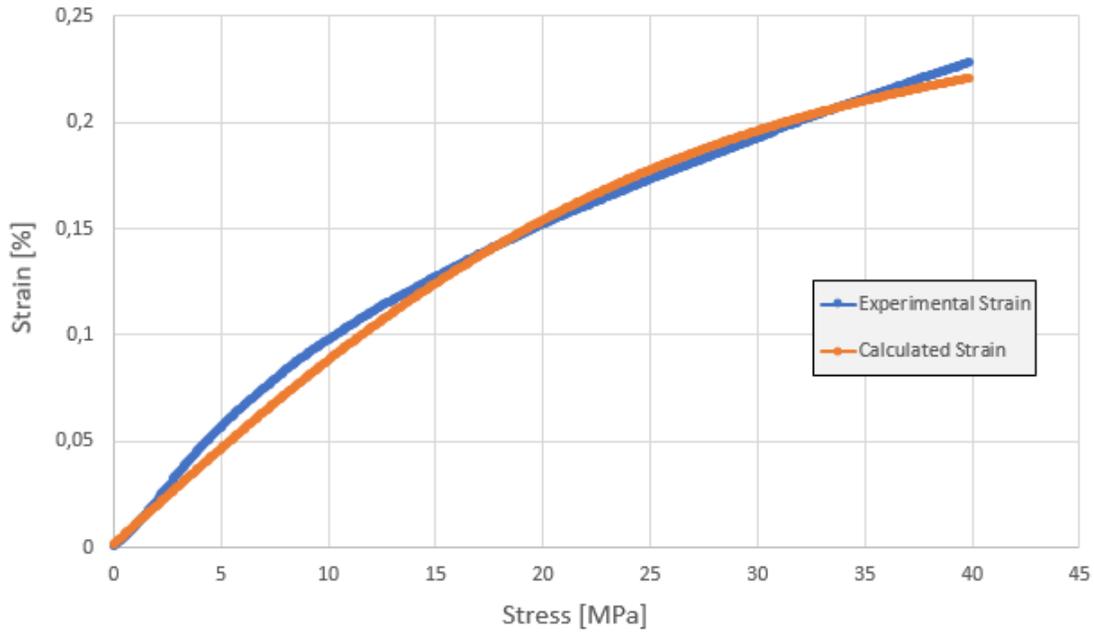


Figura 3.3: Ajuste de curva $\varepsilon - \sigma$ (naranja) a datos experimentales (azul).

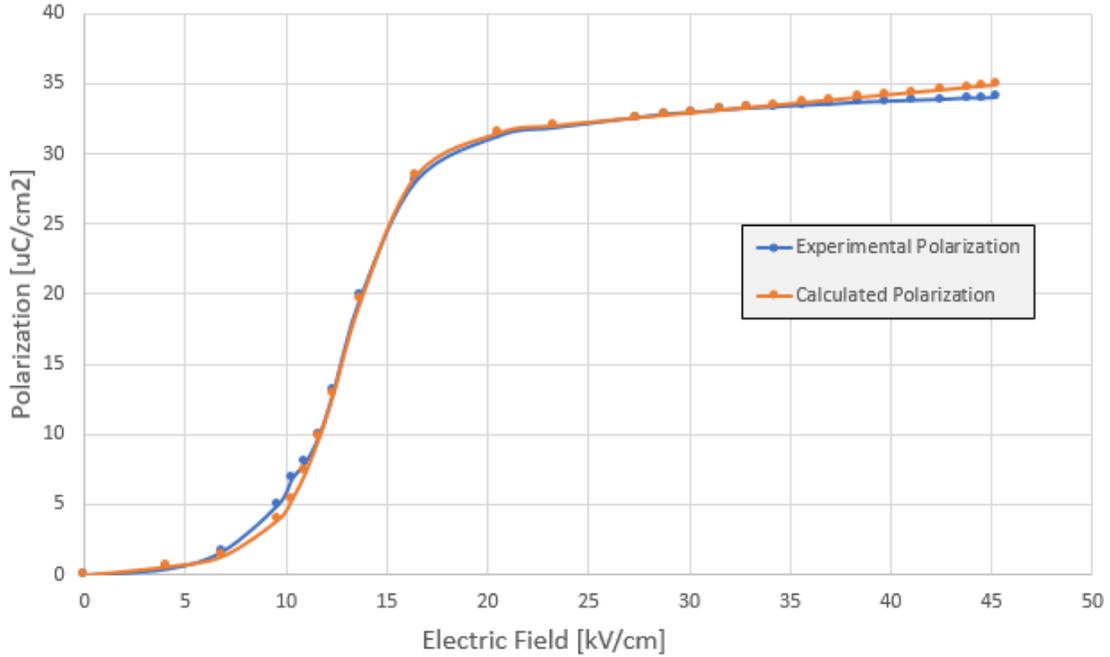


Figura 3.4: Ajuste de curva $\mathbb{P} - \mathbb{E}$ (naranja) a datos experimentales (azul).

Una vez realizado este fitting preliminar de cada curva por separado, se procede a incluir el efecto acoplado de las variables independientes \mathbf{E} y σ . Esto implica la modificación de algunos parámetros ya determinados anteriormente, con el fin de que tanto los efectos del esfuerzo en la curva $\mathbb{P} - \mathbb{E}$, como los del campo eléctrico en la curva $\epsilon - \sigma$, tengan sentido físico en lo posible. Por ejemplo, al existir un campo eléctrico positivo en la curva de deformación, este puede aumentar o disminuir el efecto del esfuerzo (dado a que no se conoce la microestructura de un material isotrópico, por lo que no existen planos de preferencia del efecto piezoeléctrico), por lo que se acepta cualquier de las dos. Sin embargo, este efecto debe tener concordancia entre el que el esfuerzo tiene en la polarización.

Por ejemplo, si el campo eléctrico disminuye la deformación para un determinado esfuerzo, el esfuerzo por su lado debe disminuir la polarización para un campo eléctrico determinado o viceversa, considerando un cuerpo isotrópico.

Por un lado, es sabido que la ferrita de bismuto ($BiFeO_3$) bajo campos eléctricos positivos, resulta en una expansión (o sea en una deformación ϵ_{zz} positiva) de las láminas, por lo que se puede partir de la base que el campo eléctrico contribuye de forma positiva junto con el esfuerzo a la deformación. De la misma forma, se observa que a esfuerzos positivos, la polarización del PLZT 8/40/60 aumenta, por lo que se puede inducir que existe la misma relación constructiva para la polarización eléctrica de ambas variables. Esta contribución se puede regular con un signo positivo del parámetro ζ_1 , el cual según su magnitud, ajusta la incidencia del campo eléctrico en la deformación, y del esfuerzo en la polarización.

Otra consideración importante al momento de interrelacionar los gráficos de fenómenos mecánicos y eléctricos, es que los valores de la deformación o de la polarización no se disparen al probar con campos eléctricos o esfuerzos que se encuentren dentro del rango de operación normal de los materiales. Tal como se puede ver en los datos experimentales de la ferrita de

bismuto de la figura 3.1, el rango de esfuerzos al que se puede someter para este material es hasta los 40 [MPa], por lo que se espera que el gráfico de la polarización tenga un aumento medido en estos niveles de esfuerzo, es decir, que no aumente en más de 5 [$\mu C/cm^2$] la polarización de saturación. Lo mismo para el caso del PLZT, donde la polarización de saturación se alcanza casi por completo a los 25 [kV/cm] de campo eléctrico, por lo que se espera que esto no genere que la curva de deformación se dispare por sobre los 0.66%, máxima deformación alcanzada para el $BiFeO_3$ en la práctica y bajo condiciones especiales.

De esta forma se llega a los siguiente parámetros:

Tabla 3.1: *Parámetros del fitting de datos experimentales.*

Parámetro	Valor
α	22
β	0,01 [1/MPa ^{2b}]
b	0,55
γ	0,13 [1/MPa]
ι	0,001 [1/MPa ²]
g_0	0,0035
g_1	$-1,5 \times 10^{-6}$
m_0	14,5 [$\mu C/cm^2$]
m_1	3 [kV/cm]
m_2	13 [kV/cm]
m_3	14,49500612 [$\mu C/cm^2$]
ζ_0	0,14 [$\mu C/kV cm$]
ζ_1	13
ϵ_o	$8,85 \times 10^{-5}$ [$\mu C/kV cm$]

En cuanto a las unidades de medida de los parámetros cabe destacar que algunos (α , g_0 , g_1 y ζ_1) no permiten que un ajuste dimensional correcto, por la falta de sentido físico que tienen (esto dado a que la función isotrópica es simplemente una ecuación de ajuste), por lo que se pueden crear constantes unitarias de ajuste dimensional para poder adecuar las unidades de medida de las ecuaciones. Notar que la permitividad eléctrica en el vacío ϵ_o está aumentada por 10^7 veces, debido a que el cambio de unidades de medida

$$\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right] \implies 8,85 \times 10^{-5} \left[\frac{\mu C}{kV cm} \right],$$

para que de esta forma, el campo eléctrico puede expresarse en [kV/cm] y la polarización en [$\mu C/cm^2$], que son las medidas utilizadas para medir estos fenómenos en la práctica para estos materiales.

Con todo lo anterior, se logran los gráficos de las figuras 3.5 y 3.6, en lo cuales se puede observar como varían las variables dependientes \mathbb{P}_z y ϵ_{zz} en función de ambos, el campo eléctrico \mathbb{E}_r y el esfuerzo σ_{zz} .

Tal como se puede apreciar en la figura 3.5, la existencia de un campo eléctrico aumenta

el efecto que genera la deformación para un esfuerzo determinado. Este efecto se ve acelerado a medida que aumenta el campo eléctrico llegando rápidamente a una deformación de 0.23 % a los 100 [kV/cm], sin la presencia de esfuerzos aplicado sobre el material. Esta aceleración en el aumento de la deformación a medida que aumenta el campo eléctrico se debe a que en la expresión de la deformación (3.1) al hacer el esfuerzo cero, se obtiene

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} \mathbb{E}_z^2, \quad (3.7)$$

donde la relación $\varepsilon_{zz} - \mathbb{E}_z$ es cuadrática. Esto no coincide con datos experimentales obtenidos bibliografía, ya que las curvas $\varepsilon_{zz} - \mathbb{E}_z$ para cerámicas BiFeO₃, generalmente crean una curva que se asimila a una función de raíz cuadrada cuando la cerámica no está polarizada para deformaciones positivas (ver figura 2.2).

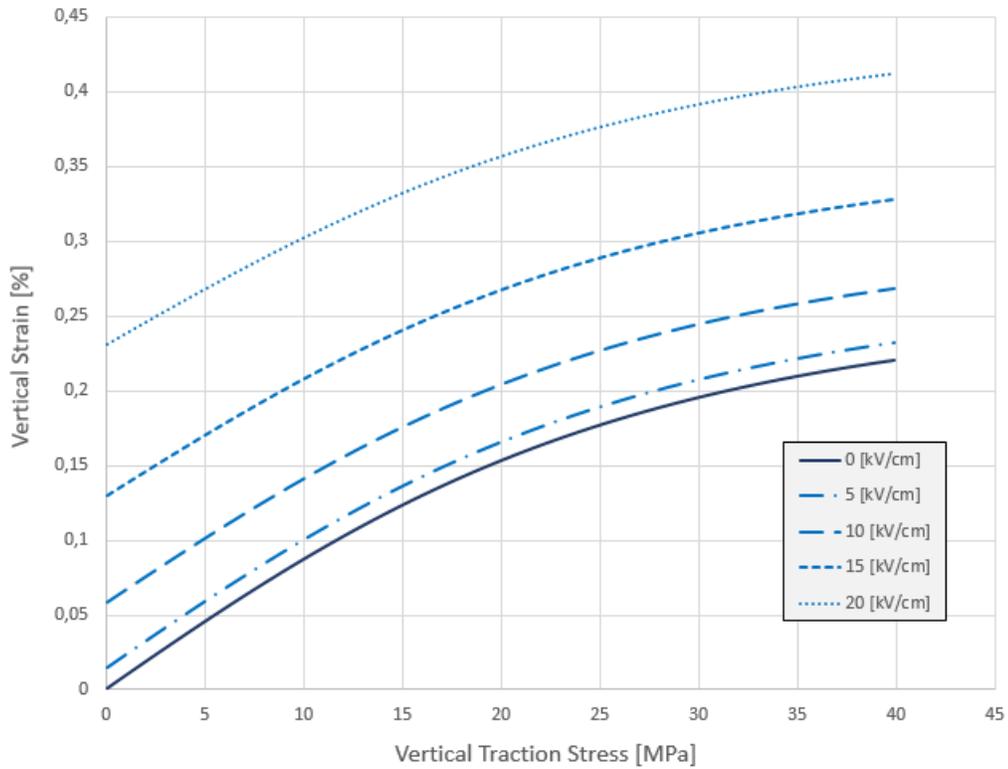


Figura 3.5: Curva $\varepsilon_{zz} - \sigma_{zz}$ bajo distintos valores del campo eléctrico axial \mathbb{E}_z .

Sin embargo, para otros materiales como lo es para la cerámica ferroeléctrica compuesta PNZST 43/6/2, esta relación cuadrática puede resultar bastante precisa (ver figura 2.3), considerando lo simétrica que es su curva con respecto al eje de las ordenadas, además de tener exactamente una forma parabólica siempre positiva es decir, que el campo eléctrico no genera compresión en el material, sino que solo extensión, tal como lo describe la expresión (3.7).

Por su lado, en la figura 3.6, se puede apreciar como la curva de polarización en función del campo eléctrico aplicado varía cuando se le aplican esfuerzos externos distintos. Los efectos del esfuerzo en la polarización se pueden ver más en el rango de saturación eléctrica

del material. Esto se debe a que la ecuación constitutiva (2.36) tiene una relación directa con el campo eléctrico, por lo que cuando \mathbb{E}_z es cero, independientemente del esfuerzo que se aplique, el material no se polariza. Es por esto, que a medida que el campo eléctrico aumenta, asimismo lo hace la influencia del esfuerzo σ_{zz} . A diferencia del efecto que genera el campo eléctrico en las curvas $\epsilon - \sigma$, el efecto que genera el esfuerzo en la polarización si depende del signo de σ_o , debido a la expresión (3.4). Es por esto, que a esfuerzos de extensión, se tiene que la polarización aumenta ligeramente en los rangos de saturación, y para esfuerzos de compresión, la polarización disminuye.

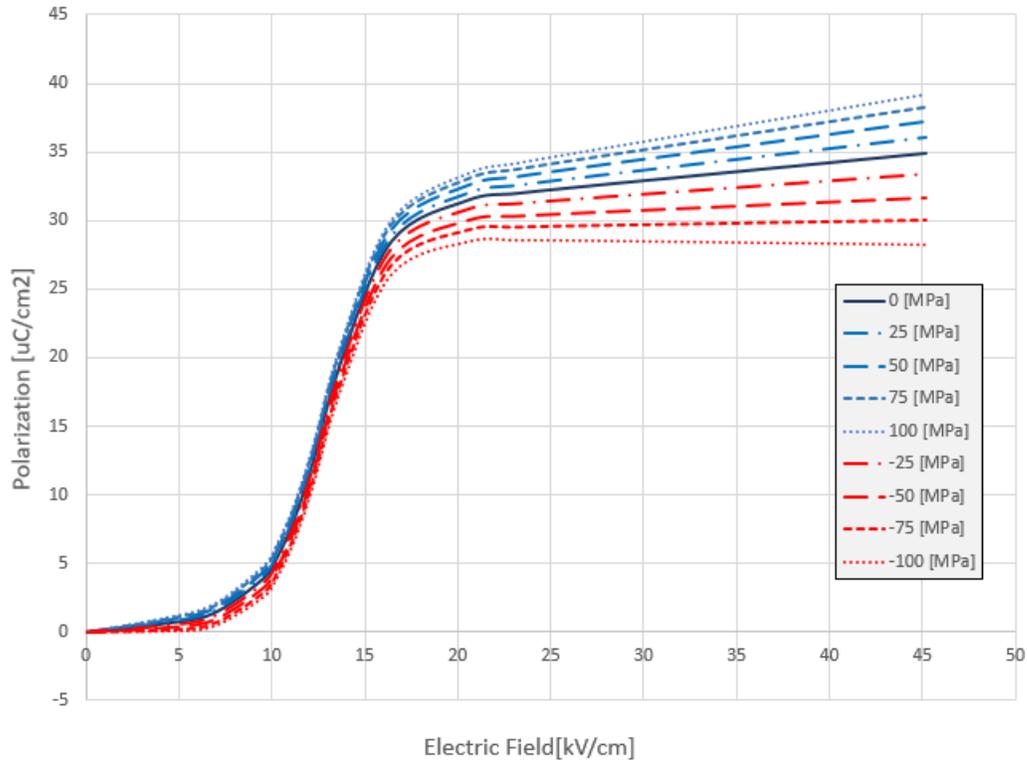


Figura 3.6: Curva $\mathbb{P}_z - \mathbb{E}_z$ bajo de influencia de distintos valores del esfuerzo axial σ_{zz} .

Capítulo 4

Problemas de valor de frontera unidimensionales

En este capítulo se utilizarán las ecuaciones constitutivas postuladas en la sección anterior para la resolución de problemas de valor de frontera unidimensionales, tanto para casos homogéneos, como para problemas no homogéneos. Cuando se habla de un problema homogéneo, se alude al caso en donde los valores de $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{E} no dependen de la posición.

Para todos los problemas de este capítulo se supone el caso isotrópico de las respectivas geometrías, que el gradiente del campo de desplazamiento es pequeño $|\nabla_r \mathbf{u}| \sim O(\delta)$, $\delta \ll 1$ y también la polarización $|\mathbf{P}| \sim O(\delta)$, $\delta \ll 1$, con el fin de que las ecuación constitutivas (2.35) y (2.36) tengan sentido.

4.1. Problemas homogéneos

4.1.1. Lámina en tracción axial y bajo campo eléctrico axial

El primer problema a resolver es el de una lámina de sección cuadrada de lados a y espesor axial h , en tracción axial constante σ_o y bajo un campo eléctrico axial constante \mathbb{E}_o , por lo que el tensor de esfuerzos y el vector del campo eléctrico tendrían respectivamente la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_o \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{E} = \mathbb{E}_o \mathbf{e}_3. \quad (4.1)$$

Utilizando las ecuaciones constitutivas (2.35) y (3.36), el tensor de deformación linealizada y el vector de polarización tendrían la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \check{\check{\Pi}}_1 \mathbf{I} + \left[\check{\check{\Pi}}_2 \sigma_o + \check{\check{\Pi}}_3 \sigma_o^2 + \check{\check{\Pi}}_5 \mathbb{E}_o^2 + 2\check{\check{\Pi}}_6 \sigma_o \mathbb{E}_o^2 \right] \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{P} = 2\mathbb{E}_o \left[\check{\check{\Pi}}_4 + \check{\check{\Pi}}_5 \sigma_o + \check{\check{\Pi}}_6 \sigma_o^2 \right] \mathbf{e}_3, \quad (4.3)$$

por lo que la polarización se genera solo en la orientación \mathbf{e}_3 , y las componentes \mathbb{P}_1 y \mathbb{P}_2 son nulas. La deformación del cuerpo además es solo de compresión y/o extensión, ya que no hay existen deformaciones angulares (de corte) ε_{12} , ε_{13} o ε_{23} .

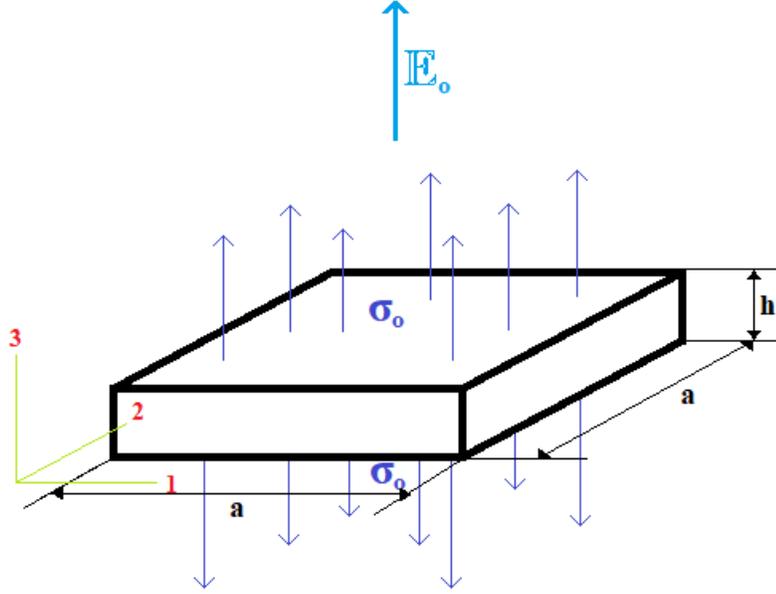


Figura 4.1: Lámina de sección cuadrada en tracción vertical y bajo campo eléctrico vertical.

Ocupando las invariantes clásicas de (2.34), utilizando (4.1), estas tienen la forma:

$$I_1 = \sigma_o, \quad I_2 = \frac{\sigma_o^2}{2}, \quad I_3 = \frac{\sigma_o^3}{3}, \quad I_4 = \mathbb{E}_o^2, \quad I_5 = \sigma_o \mathbb{E}_o^2, \quad I_6 = \sigma_o^2 \mathbb{E}_o^2. \quad (4.4)$$

Considerando la función isotrópica $\check{\Pi}(I_1, I_2, I_4, I_5)$ de (2.37) se puede ignorar de aquí en adelante las invariantes I_3 y I_6 , por lo que los términos de las ecuaciones constitutivas (2.35) y (2.36) que acompañan a los coeficientes $\check{\Pi}_3$ y $\check{\Pi}_6$ se hacen cero. Con lo anterior y utilizando (4.4) se pueden obtener que los componentes explícitos de $\boldsymbol{\varepsilon}$ son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} &= \alpha \left(\frac{1}{(1 + \beta \sigma_o^{2b})} - 1 \right) (g_0 + g_1 \mathbb{E}_o^2), \\ \varepsilon_{33} &= \alpha \left[\left(\frac{1}{(1 + \beta \sigma_o^{2b})} - 1 \right) + \frac{\gamma \sigma_o}{\sqrt{1 + \iota \sigma_o^2}} \right] (g_0 + g_1 \mathbb{E}_o^2) + \frac{\epsilon_0 \zeta_1}{2} \mathbb{E}_o^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

y asimismo, con la polarización se obtiene

$$\mathbb{P}_3 = m_3 + \mathbb{E}_o \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{\sigma_o} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - \sigma_o + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + \iota \sigma_o^2} \right] + \frac{m_0}{\mathbb{E}_o} \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_o - m_2}{m_1} \right) + \zeta_0 + \epsilon_0 \zeta_1 \sigma_o \right\}. \quad (4.6)$$

Para la evaluación de todas estas expresiones de (4.5) y (4.6), se utilizan los valores de parámetros obtenidos del fitting del capítulo anterior, resumidos en la tabla 3.1.

Resultados del problema

En primer lugar, los resultados que se presentan a continuación se muestran evaluando las componentes de la deformación y la polarización de forma gráfica, para así resolver al problema para varios valores del esfuerzo de tracción σ_o y del campo eléctrico aplicado \mathbb{E}_o .

Si se observan de forma detenida las expresiones para la deformación vertical ε_{33} y la polarización vertical \mathbb{P}_3 , es posible percatarse de que los gráficos que se obtendrían, serían idénticos a los conseguidos en las figuras 3.5 y 3.6 del fitting por lo que para evitar redundancia, no se incluirán.

Para la deformación perpendicular al esfuerzo (y campo eléctrico en este caso) ε_{11} y ε_{22} se obtiene el gráfico de la figura 4.2 a partir de la expresión (4.5)₁.

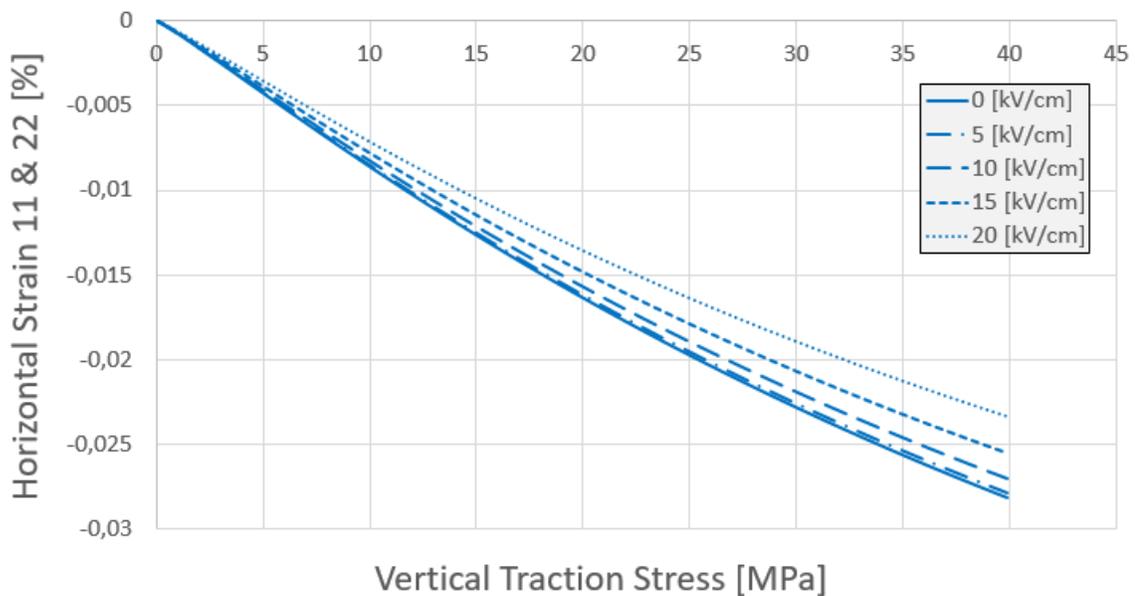


Figura 4.2: Deformación longitudinal ε_{11} y ε_{22} en función del esfuerzo perpendicular σ_o , evaluado para distintas magnitudes de campo eléctrico. La línea continua muestra el caso en ausencia de campo eléctrico.

Análisis de los Resultados

Se puede observar de la figura 4.2, como las deformaciones longitudinales perpendiculares al esfuerzo de tracción σ_o son de compresión, lo cual tiene sentido físico para materiales que posean un coeficiente de Poisson positivo, como es el caso general para la mayor parte de los materiales. Por un lado, la figura 3.5 muestra que las deformaciones verticales ε_{33} son positivas, y mayores a medida que aumenta el campo eléctrico, mientras que en las deformaciones transversales ε_{11} y ε_{22} (figura 4.2), el aumento del campo eléctrico disminuye la compresión transversal del material, por lo que a mayor campo eléctrico \mathbb{E}_o aplicado, mayor es el aumento de volumen de la lámina. Esto se puede comprobar calculando el cambio volumétrico de la lámina en dos campos eléctricos distintos.

El factor de aumento volumétrico para este caso, se obtiene usándose la siguiente expresión:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon_{33}}{100}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{100}\right)^2,$$

donde se divide por 100 dado a que las deformaciones obtenidas son porcentuales (por los datos experimentales ocupados). Por ejemplo, a 35 [MPa] y a 0 [kV/cm], el factor de aumento volumétrico según las deformaciones de los gráficos de las figuras 4.2 y 3.5, es de solo 1.0015, mientras que a la misma magnitud de tracción con un campo eléctrico de 20[kV/cm], se obtiene un factor de aumento volumétrico de 1.0035. Es decir, si la lámina tuviese las siguientes medidas

$$a = 50[cm], \quad y \quad h = 1[cm]$$

esta aumentaría su volumen de 2500 [cm³] a 2503,75 [cm³] sin campos eléctricos, y a 2508,75 [cm³] con la presencia de un campo eléctrico de 20 [kV/cm].

Por otro lado, la polarización se comporta tal como aparece en el gráfico de la figura 3.6, donde se puede apreciar que la tracción σ_o solo empieza a tener efecto en la polarización de la lámina, cuando esta se encuentra bajo el efecto de campos eléctricos cercanos a los de saturación, es decir, por sobre los 18 [kV/cm] aproximadamente. Usando el ejemplo anterior ($\mathbb{E}_o=20$ [kV/cm], $\sigma_o=35$ [MPa]), se alcanza una polarización de 32,5[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$], ligeramente mayor a los 31,5[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$] que se obtendrían sin un esfuerzo externo.

4.1.2. Prisma en tracción y bajo campo eléctrico perpendicular

Se tiene un prisma definido en el volumen descrito por,

$$-\frac{L_1}{2} \leq x_1 \leq \frac{L_1}{2}, \quad -\frac{L_2}{2} \leq x_2 \leq \frac{L_2}{2}, \quad -\frac{L_3}{2} \leq x_3 \leq \frac{L_3}{2}, \quad (4.7)$$

donde L_1, L_2, L_3 son los largos del prisma en las direcciones Cartesianas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ respectivamente. Sobre esta se aplica un esfuerzo de tracción y un campo eléctrico homogéneo perpendicular de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_o \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad \mathbb{E} = \mathbb{E}_o \cos(\check{\alpha}) \mathbf{e}_1 + \mathbb{E}_o \sin(\check{\alpha}) \mathbf{e}_2, \quad (4.8)$$

donde $\check{\alpha}$ (para diferenciarlo del coeficientes α) es un ángulo cualquiera en el plano $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ entre el vector del campo eléctrico y la dirección \mathbf{e}_1 (ver figura 4.3). Utilizando (4.8) en las ecuaciones constitutivas (2.35) y (2.36), se tiene obtiene las siguientes expresiones para la deformación y la polarización respectivamente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \check{\Pi}_1 \mathbf{I} + \check{\Pi}_2 \sigma_o \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \check{\Pi}_5 \mathbb{E}_o^2 [\cos^2(\check{\alpha}) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sin^2(\check{\alpha}) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \cos(\check{\alpha}) \sin(\check{\alpha}) \{ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \}], \quad (4.9)$$

$$\mathbf{P} = 2\check{\Pi}_4 \mathbb{E}_o [\cos(\check{\alpha}) \mathbf{e}_1 + \sin(\check{\alpha}) \mathbf{e}_2]. \quad (4.10)$$

Por su lado las invariantes quedan como:

$$I_1 = \sigma_o, \quad I_2 = \frac{\sigma_o^2}{2}, \quad I_4 = \mathbb{E}_o^2, \quad I_5 = 0. \quad (4.11)$$

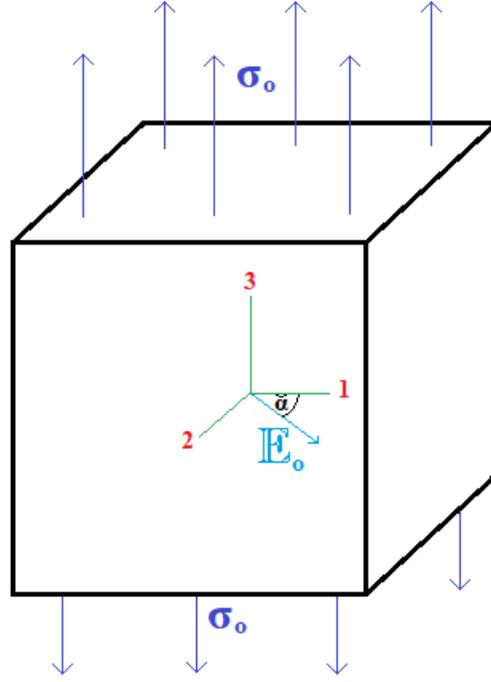


Figura 4.3: Prisma en tracción σ_o bajo campo eléctrico perpendicular \mathbb{E}_o , con ángulo $\check{\alpha}$ con respecto a la dirección \mathbf{e}_1 .

A partir de la expresión tensorial de la deformación ε en (4.9)₁, se pueden obtener las componentes explícitas de la deformación, las cuales quedan como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \alpha \left(\frac{1}{(1 + \beta\sigma_o^{2b})} - 1 \right) (g_0 + g_1\mathbb{E}_o^2) + \frac{\epsilon_0\zeta_1}{2}\mathbb{E}_o^2 \cos^2(\check{\alpha}), \\
 \varepsilon_{22} &= \alpha \left(\frac{1}{(1 + \beta\sigma_o^{2b})} - 1 \right) (g_0 + g_1\mathbb{E}_o^2) + \frac{\epsilon_0\zeta_1}{2}\mathbb{E}_o^2 \sin^2(\check{\alpha}), \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{\epsilon_0\zeta_1}{2}\mathbb{E}_o^2 \cos(\check{\alpha}) \sin(\check{\alpha}), \\
 \varepsilon_{33} &= \alpha \left[\left(\frac{1}{(1 + \beta\sigma_o^{2b})} - 1 \right) + \frac{\gamma\sigma_o}{\sqrt{1 + \iota\sigma_o^2}} \right] (g_0 + g_1\mathbb{E}_o^2).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Igualmente para la polarización \mathbb{P} , a partir su expresión vectorial en (4.9)₂, se obtienen sus dos componentes no nulas:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_1 &= \mathbb{E}_o \cos(\check{\alpha}) \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{\sigma_o} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - \sigma_o + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + \iota\sigma_o^2} \right] + \frac{m_3}{\mathbb{E}_o} + \frac{m_0}{\mathbb{E}_o} \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_o - m_2}{m_1} \right) + \zeta_0 \right\}, \\
 \mathbb{P}_2 &= \mathbb{E}_o \sin(\check{\alpha}) \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{\sigma_o} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - \sigma_o + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + \iota\sigma_o^2} \right] + \frac{m_3}{\mathbb{E}_o} + \frac{m_0}{\mathbb{E}_o} \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_o - m_2}{m_1} \right) + \zeta_0 \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Resultados del problema

A partir de las ecuaciones explícitas de la deformación ε y polarización \mathbf{P} obtenidas en las ecuaciones (4.12) y (4.13) respectivamente, se obtienen los siguientes gráficos:

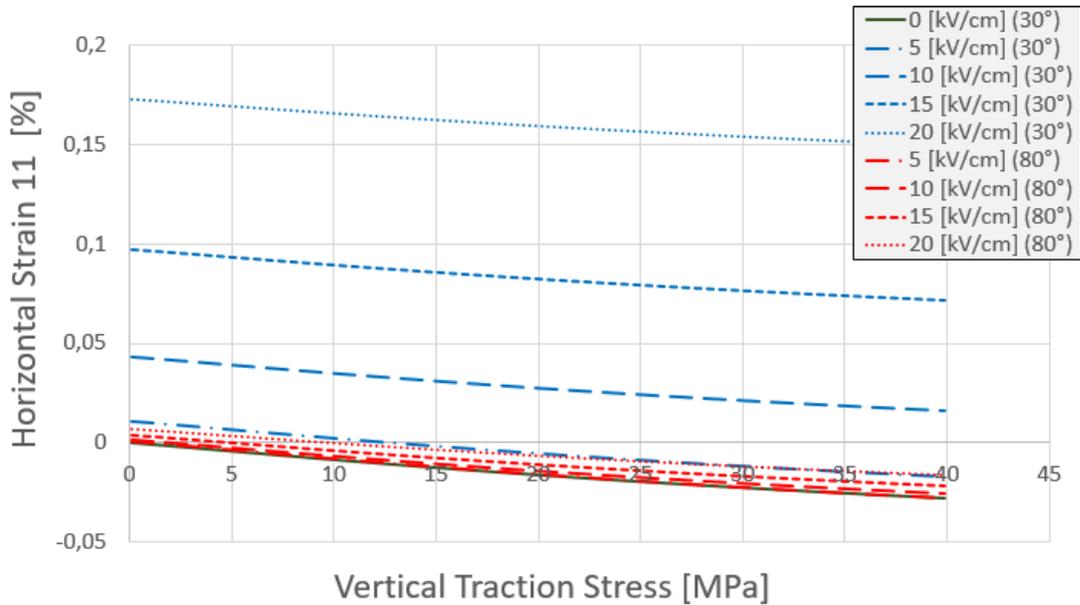


Figura 4.4: Deformación longitudinal ε_{11} en función del esfuerzo perpendicular σ_o , y evaluado en distintas magnitudes de campo eléctrico en ángulos $\alpha = 30^\circ$ (líneas azules) y $\alpha = 80^\circ$ (líneas rojas). La línea sólida oscura muestra el caso en ausencia de campo eléctrico.

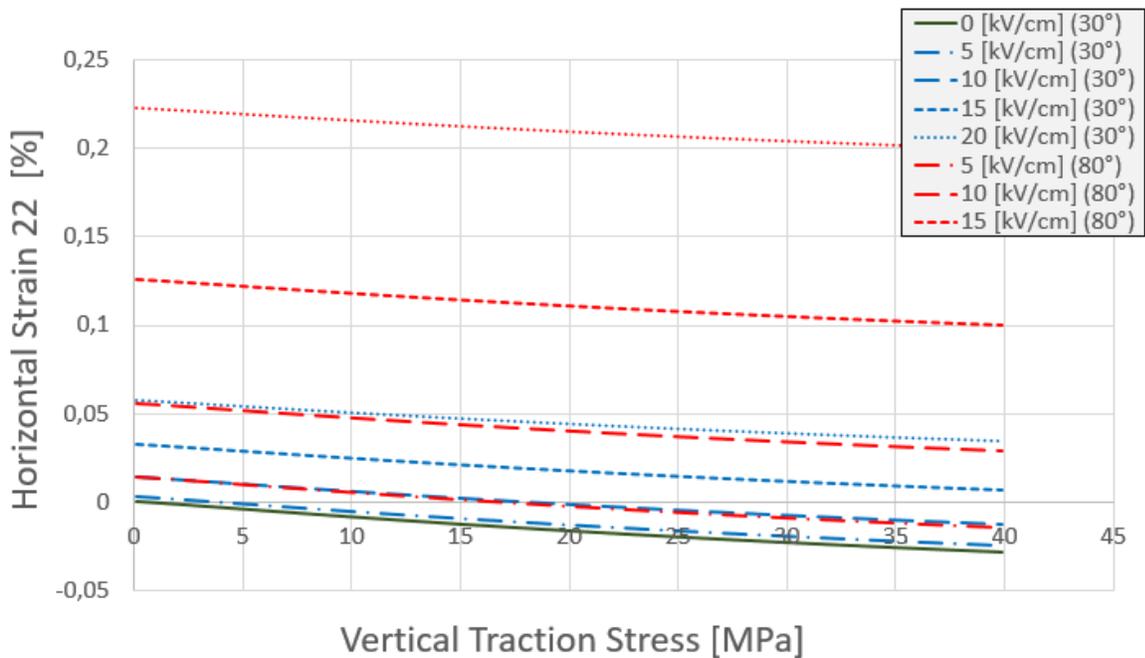


Figura 4.5: Deformación longitudinal ε_{22} en función del esfuerzo perpendicular σ_o , y evaluado en distintas magnitudes de campo eléctrico en ángulos $\alpha = 30^\circ$ (líneas azules) y $\alpha = 80^\circ$ (líneas rojas). La línea sólida oscura muestra el caso en ausencia de campo eléctrico.

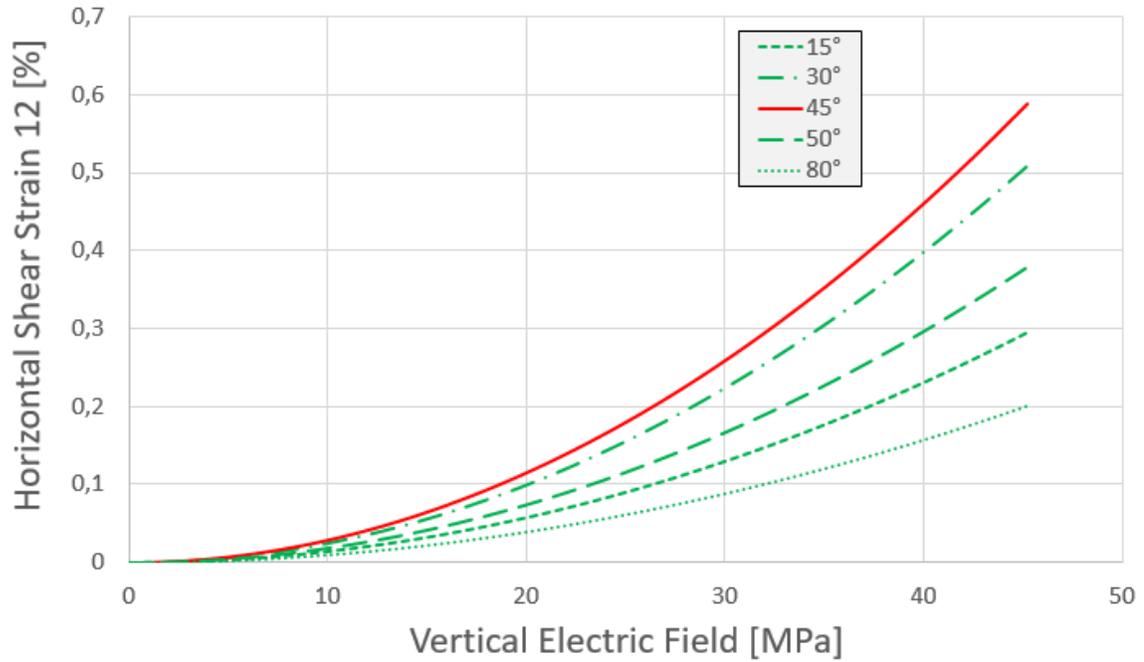


Figura 4.6: Deformación de corte (o angular) ε_{12} en función del campo eléctrico \mathbb{E}_o , evaluado para distintos valores del ángulo α . En rojo aparece la curva cuando $\alpha = 45^\circ$, donde la deformación de corte es máxima.

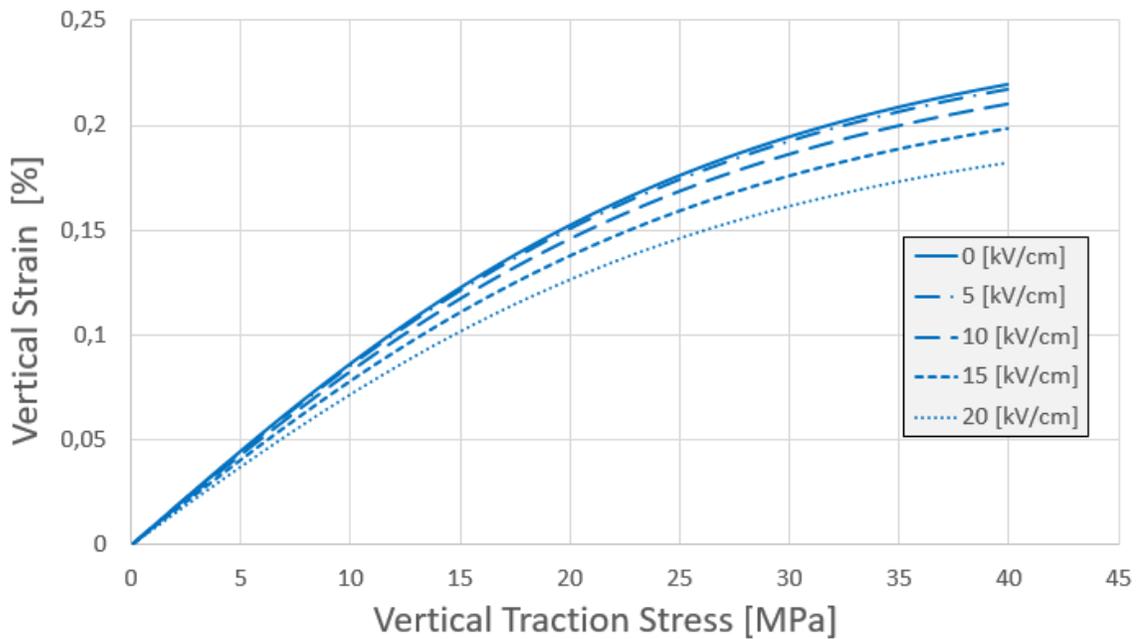


Figura 4.7: Deformación longitudinal ε_{33} en función del esfuerzo σ_o , y evaluado en distintas magnitudes de campo eléctrico. En línea continua está el caso en ausencia de campo eléctrico.

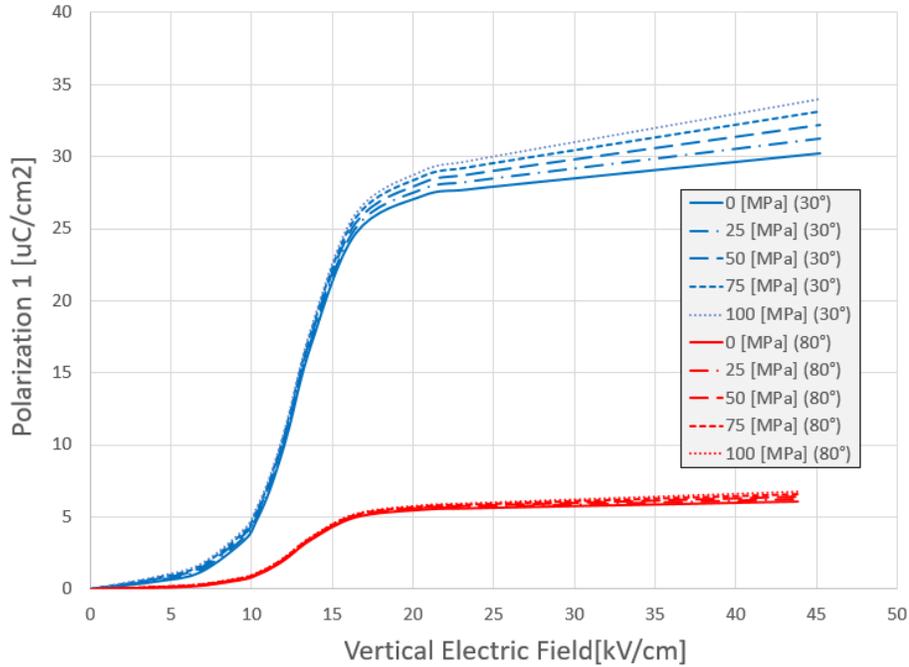


Figura 4.8: Polarización \mathbb{P}_1 en función del campo eléctrico \mathbb{E}_o , y evaluado para distintas magnitudes del esfuerzo de tracción σ_o . También se incluye la evaluación en ángulos $\check{\alpha} = 30^\circ$ (líneas azules) y $\check{\alpha} = 80^\circ$ (líneas rojas). Las líneas continuas muestran el caso en ausencia de esfuerzo de tracción.

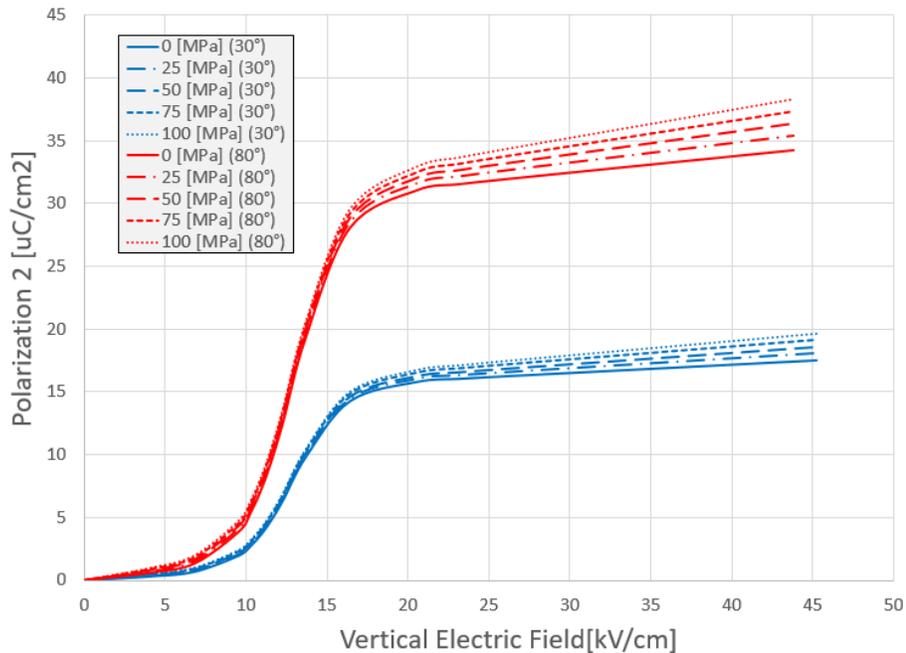


Figura 4.9: Polarización \mathbb{P}_2 en función del campo eléctrico \mathbb{E}_o , y evaluado para distintas magnitudes del esfuerzo de tracción σ_o . También se incluye la evaluación en ángulos $\check{\alpha} = 30^\circ$ (líneas azules) y $\check{\alpha} = 80^\circ$ (líneas rojas). Las líneas continuas muestran el caso en ausencia de esfuerzo de tracción.

Análisis de los Resultados

Observando los gráficos de las figuras (4.4) y (4.5), es claro notar que cuando no hay campo eléctrico, tanto la deformación longitudinal ε_{11} y ε_{22} son negativas, es decir, que en esas direcciones el material se comprime. Esto corresponde lo observado en la mayoría de los materiales, debido a que el material tiende a mantener el mismo volumen, y al estar estirándose en la dirección \mathbf{e}_3 , debe encogerse en las direcciones ortogonales. Sin embargo, a medida que el campo eléctrico aumenta, estas deformaciones transversales al esfuerzo se vuelven paulatinamente positivas, lo cual indica que la aplicación de un campo eléctrico \mathbb{E}_o ortogonal al esfuerzo de tracción σ_o , genera un aumento del volumen del prisma, parecido a lo que ocurría en el problema anterior. Sin embargo, no es igual al caso anterior, dado a que las deformaciones ortogonales al esfuerzo ε_{11} y ε_{22} en este caso aumentan incluso cuando σ_o es cero, lo que evidencia que el campo eléctrico \mathbb{E}_o tiene la capacidad de deformar longitudinalmente un material sin la ayuda de esfuerzos externos, solo en las direcciones paralelas a este.

Prueba de lo anterior es que en el gráfico de la figura 4.7, la deformación longitudinal ε_{33} (ortogonal al campo eléctrico \mathbb{E}_o), no se ve afectado por el campo eléctrico en ausencia de esfuerzos externos σ_o . No obstante, algo interesante ocurre al ver el efecto que tiene el campo eléctrico en la deformación ortogonal ε_{33} ; al aumentar el campo eléctrico, la deformación longitudinal transversal ε_{33} disminuye su magnitud. También ocurre lo mismo en el problema anterior en las direcciones ortogonales, pero en ese caso reduciendo la deformación de compresión. De esta forma se puede deducir que en las direcciones ortogonales al campo

De las figuras (4.4) y (4.5) también se puede ver que mientras mayor sea el alineamiento del campo eléctrico \mathbb{E}_o en una determinada dirección, mayor será el aumento de la extensión longitudinal en esa dirección. Podemos ver como a medida que el ángulo $\check{\alpha}$ aumenta, disminuye el aumento de la deformación longitudinal en la dirección \mathbf{e}_1 , y aumenta en la dirección \mathbf{e}_2 .

Por otro lado, se evidencia la presencia de una deformación angular (o de corte) ε_{12} la cual solo está en función del campo eléctrico \mathbb{E}_o , o sea, es completamente independiente del esfuerzo aplicado. Se ve que esta deformación de corte alcanza su máximo cuando el ángulo $\check{\alpha}$ es igual a 45° y disminuye hacia cero se acerca a 0° o 90° . El aumento de esta deformación de corte es cuadrático con respecto al aumento de la magnitud del campo eléctrico \mathbb{E}_o a un ángulo fijo distinto de 0° o 90° .

Por último, en los gráficos de las figuras 4.8 y 4.9, se aprecia el paralelismo que existen entre el campo eléctrico \mathbf{E} y la polarización \mathbf{P} ; cuando el ángulo $\check{\alpha}$ disminuye, la componente del campo eléctrico en \mathbf{e}_1 aumenta, en la misma proporción que la polarización \mathbb{P}_1 , y disminuye en la dirección \mathbf{e}_2 y viceversa. Bajo estas condiciones entonces, el campo eléctrico es incapaz de crear una componente del polarización en la dirección ortogonal (\mathbf{e}_3 en este caso).

4.2. Problemas no homogéneos

4.2.1. Inflado de una cáscara esférica bajo campo eléctrico radial

Se tiene una cáscara esférica de radio interno r_i y externo r_o se infla con presión interna P , donde para este problema, el tensor de esfuerzos se supone como:

$$\boldsymbol{\sigma}(r) = \sigma_{rr}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{\phi\phi}(r)\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi. \quad (4.14)$$

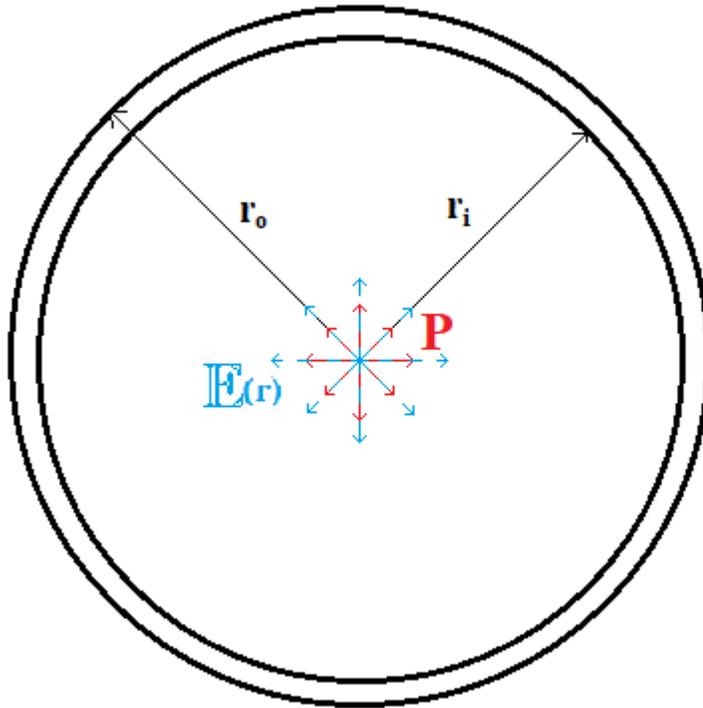


Figura 4.10: Cáscara esférica de radio interno r_i y externo r_o inflada con presión P .

Por su lado, el campo eléctrico aplicado es meramente radial, por lo que su forma sería:

$$\mathbf{E}(r) = E_r(r)\mathbf{e}_r, \quad (4.15)$$

y el vector desplazamiento también se supone como meramente radial:

$$\mathbf{u}(r) = u_r(r)\mathbf{e}_r. \quad (4.16)$$

A partir de las ecuaciones (2.5), de la forma del esfuerzo en (4.14) y del desplazamiento en (4.16), las componentes del tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ cumplen

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \quad (4.17)$$

y las ecuaciones de equilibrio en coordenadas esféricas (2.11) quedan como:

$$-\frac{dE_r}{dr}\mathbb{P}_r = \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta}, \quad (4.18)$$

Implementación en COMSOL

Para la solución del problema usando COMSOL 5.3a, es necesario tener en cuenta que para la solución del problema estacionario, deben definirse cuales serán las variables independientes a utilizar. En lo posible, es importante poder definir todas las variables en función de estas variables independientes para poder definir las como output en el programa. Para este problema, es conveniente utilizar a σ_{rr} y \mathbb{E}_r como variables independientes, debido a que (4.22) deja a $\sigma_{\theta\theta}$ en función de ambas, con lo que el resto de las variables ($I_1, I_2, I_4, \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$ y \mathbb{P}_r) también quedan correctamente definidas en función de las mismas.

Por otro lado, es importante considerar que el PDE solver (Partial Differential Equation Solver) requiere que la ecuaciones a resolver se formulen de la siguiente forma

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = f$$

donde u es la variable independiente, e_a y d_a son los coeficientes de masa y de amortiguamiento respectivamente, Γ es una función a la que se le aplica el operador de divergencia, y f es una función cualquiera en función de la variable independiente o dimensional r de forma explícita.

Para las aplicaciones de este problema, la ecuación anterior se simplifica, ya que se trata de un caso estacionario cuasi-estático, por lo que las derivadas temporales son iguales a cero. Por otro lado, al tratarse de un problema unidimensional, la divergencia de Γ pasa a ser simplemente la derivada de Γ con respecto a la única variable dimensional del problema, o sea, el radio r . Por lo que la ecuación a aplicar quedaría de la forma:

$$\frac{d\Gamma}{dr} = f.$$

Además, dado a que se tienen dos incógnitas (σ_{rr} y \mathbb{E}_r), se requieren de dos ecuaciones de la forma anterior. Una resulta ser bastante directa a partir de (4.17), obteniéndose

$$\frac{d(\varepsilon_{\theta\theta} r)}{dr} = \varepsilon_{rr}$$

por lo que se tiene que $\Gamma = \varepsilon_{\theta\theta} r$ y que $f = \varepsilon_{rr}$.

La segunda ecuación nace a partir de las dos expresiones de la polarización obtenidas es decir igualando a (4.26) con (4.21)₂, de lo cual se obtiene

$$\frac{C}{r^2} = \mathbb{E}_r \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\gamma}{l} \sqrt{1 + 2lI_2} \right] + \zeta_0 + \varepsilon_o \zeta_1 \sigma_{rr} + \varepsilon_o \right\} + m_3 + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_r - m_2}{m_1} \right).$$

Si igualamos el lado derecho de la expresión a Γ , entonces la derivada del lado izquierdo debiera ser f , es decir

$$f = -\frac{2C}{r^3}.$$

Otra consideración que debe tomarse en cuenta al ingresar el problema a COMSOL es que el solver PDE interno de COMSOL presenta problemas para resolver ecuaciones diferenciales menores al segundo orden. Por tanto, se supone la existencia de un potencial $\phi(r)$ (potencial eléctrico medido en [kV]) en función meramente del radio, tal que

$$\mathbb{E}_r = -\frac{d\phi(r)}{dr},$$

con lo que se asegura una la formulación de una ED de segundo orden. De este forma, la segunda variable independiente $\mathbb{E}_r(r)$, pasa a ser $\phi(r)$.

Por otro lado, se necesitan de dos valores de frontera para cada incógnita. Para el caso del esfuerzo radial σ_{rr} se usan dos condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\sigma_{rr}(r_i) = -P, \quad \sigma_{rr}(r_o) = 0,$$

donde en el interior, la presión es P , y provoca un esfuerzo de compresión. Para el caso del esfuerzo en la frontera exterior de la cáscara, se supone que la esfera se encuentra en el vacío, por lo que no existe ninguna distribución de fuerza, y por tanto, el esfuerzo normal radial es cero.

Para el caso del campo eléctrico (o ϕ para esta implementación), es importante suponer que los electrodos que lo generan están completamente adheridos a las superficies interna y externa de la cáscara esférica, para de este modo, evitar la consideración de las ecuaciones de Maxwell de frontera en vacío. Para controlar las magnitudes del campo eléctrico de la misma forma que se haría, es decir controlando el voltaje de los electrodos, se deben proponer dos condiciones de Dirichlet:

$$\phi(r_i) = 0, \quad \phi(r_o) = \phi_o,$$

donde el valor en sí de cada una no influye en el comportamiento de \mathbb{E}_r , ya que importa el cambio (diferencia de potencial) entre los valores de ambas fronteras. Al fijar en el manto interno del tubo un potencial nulo, la diferencia de potencial será simplemente el valor ϕ_o que se le asigne la frontera externa. De esta forma se deja al problema completo bien definido para el solver.

Finalmente, para la evaluación de los resultados, se usan los siguientes parámetros geométricos y eléctricos fijos:

$$r_i = 5[cm], \quad r_o = 12[cm], \quad C = 20[\mu C].$$

Al fijarse en la ecuación (4.21) la constante de integración C dividida por el radio al cuadrado debiese ser igual al desplazamiento eléctrico \mathbb{D} . Por tratarse de un campo radial en coordenadas esféricas, por ley de Gaus, C tiene la forma:

$$C = \frac{Q\epsilon}{4\pi\epsilon_o},$$

donde Q es la carga libre, y $\epsilon = 8,85 \times 10^{-3}[\mu C/kVcm]$ es la permitividad eléctrica del $BiFeO_3$ [26].

Resultados del Problema

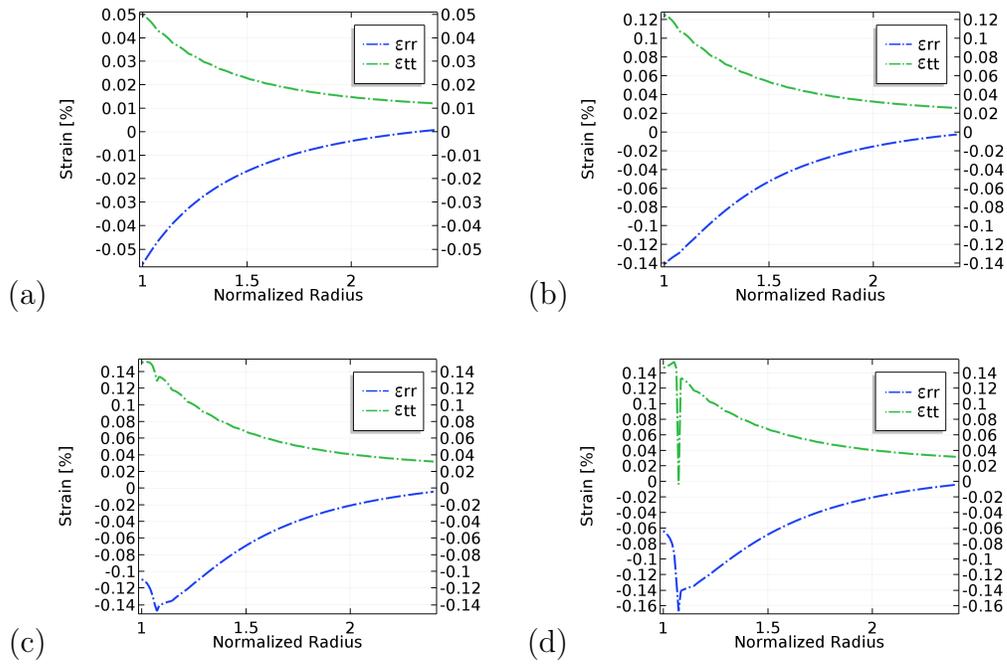


Figura 4.11: Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $\phi_o = -25[kV]$ con presión (a) $P = 8[MPa]$, (b) $P = 20[MPa]$, (c) $P = 40[MPa]$ y (d) $P = 55[MPa]$.

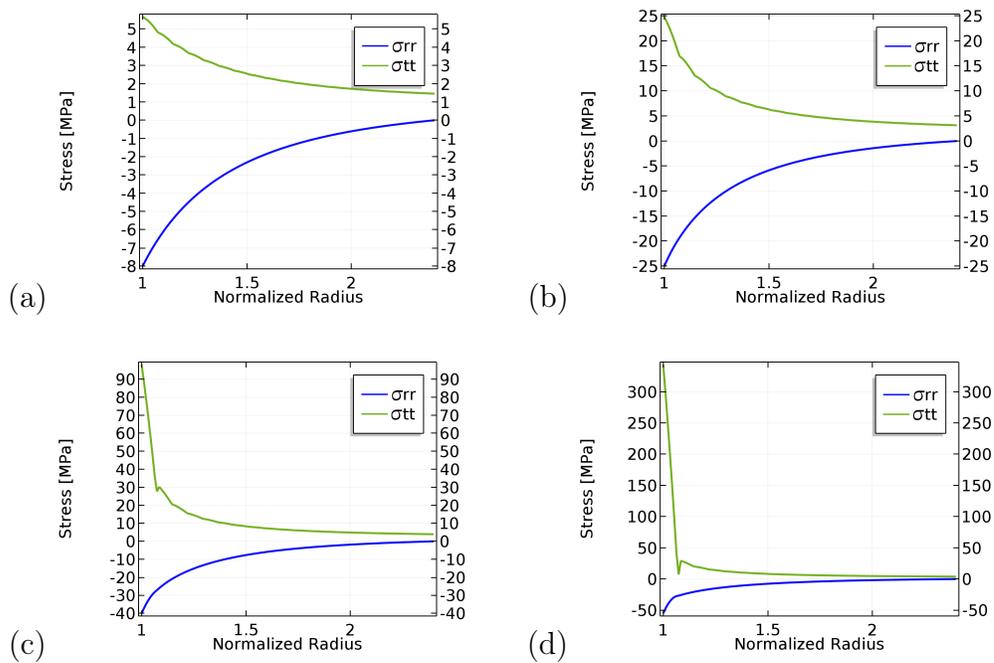


Figura 4.12: Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $\phi_o = -25[kV]$ con presión (a) $P = 8[MPa]$, (b) $P = 20[MPa]$, (c) $P = 40[MPa]$ y (d) $P = 55[MPa]$.

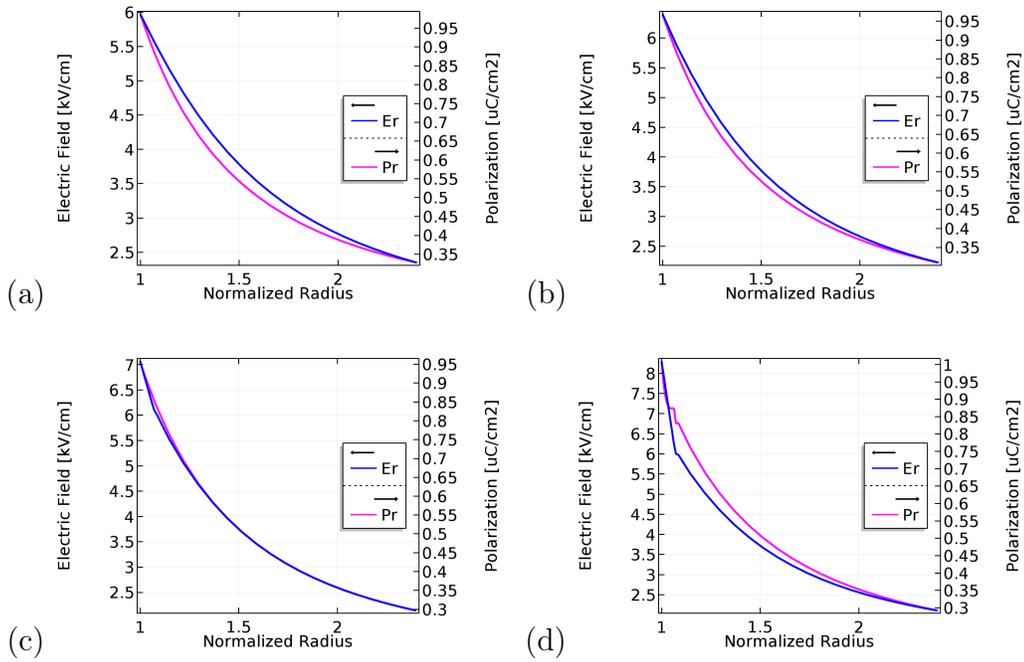


Figura 4.13: Campo eléctrico (azul) y polarización (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 20[\mu\text{C}]$, $\phi_o = -25[\text{kV}]$ con presión (a) $P = 8[\text{MPa}]$, (b) $P = 20[\text{MPa}]$, (c) $P = 40[\text{MPa}]$ y (d) $P = 55[\text{MPa}]$.

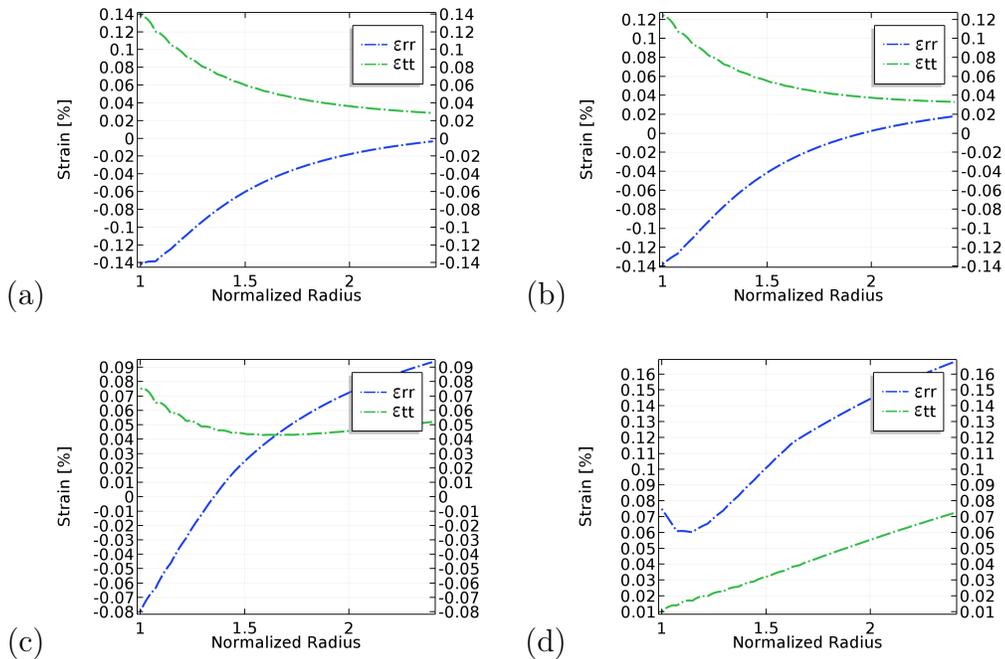


Figura 4.14: Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 20[\mu\text{C}]$, $P = 30[\text{MPa}]$ con voltaje (a) $\phi_o = -25[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -50[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -95[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -150[\text{kV}]$.

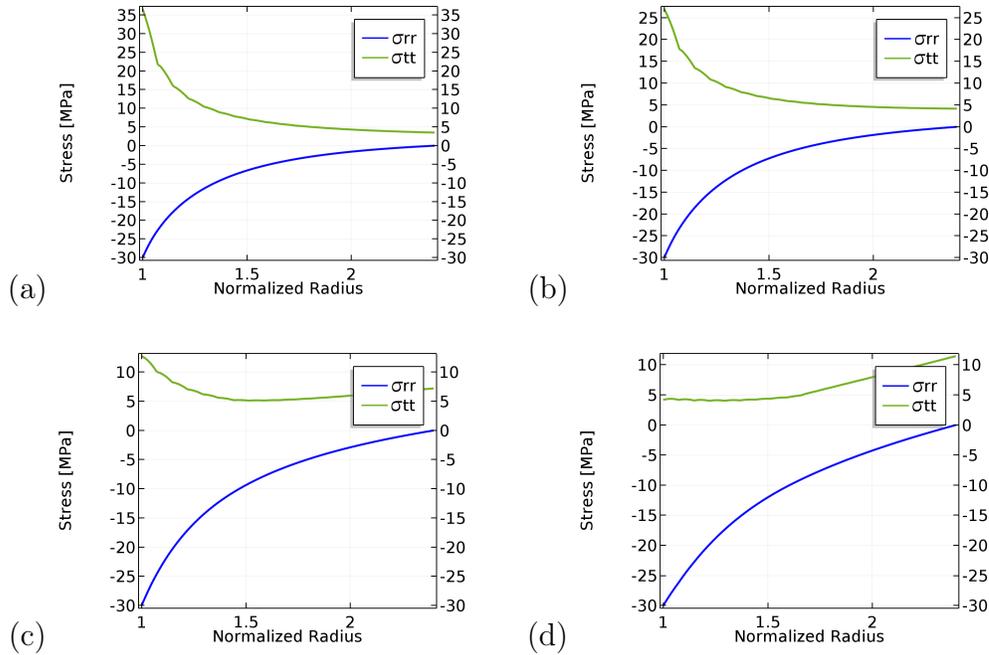


Figura 4.15: Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $P = 30[MPa]$ con voltaje (a) $\phi_o = -25[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -95[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$.

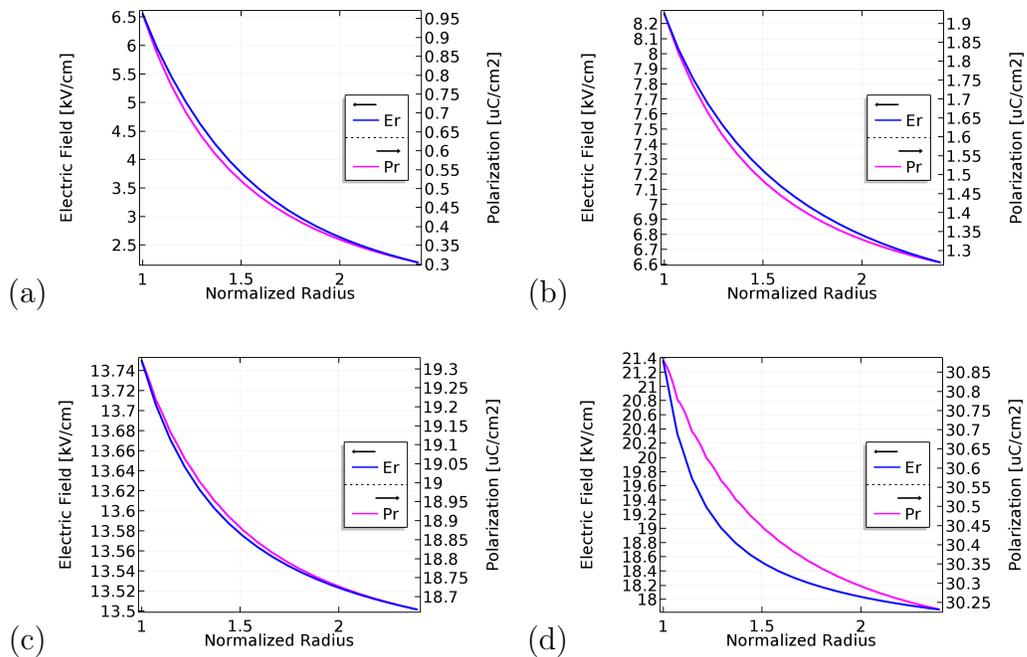


Figura 4.16: Campo eléctrico (azul) y polarización (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 20[\mu C]$, $P = 30[MPa]$ con voltajes (a) $\phi_o = -25[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -95[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$.

Análisis de los resultados

Efectos de la variación de la presión interna P

En los gráficos de las figuras 4.11-4.13, se muestra como se ven afectadas distintas componentes de la deformación, esfuerzo y variables eléctricas (campo eléctrico y polarización) a medida que aumenta la presión interna P de la cáscara, estando expuesta a un voltaje fijo de 25[kV].

Al observar los gráficos de la figura 4.12, se puede observar como la componente radial del esfuerzo σ_{rr} se ajusta a los parámetros de frontera impuestos como condiciones de borde, es decir, cuando la presión P aumenta, de la misma forma lo hace la compresión radial en $r = r_i$ adoptando la misma magnitud, y aproximándola suavemente a cero a medida que llega al radio externo de la cáscara. Por su lado, la componente circunferencial del esfuerzo $\sigma_{\theta\theta}$, toma en todo momento valores positivos, lo que indica que el material en todo momento está en tracción tangencial. Esto coincide con la analogía de un globo que esta siendo inflado, donde la tracción tangencial $\sigma_{\theta\theta}$ “quiere” disminuir la superficie del globo (“quiere” contraer el globo). A medida que la presión interna P aumenta, lo hace cada vez en mayor medida la tracción circunferencial, empezando en 5,9[MPa] a presión interna inicial $P = 8$ [MPa], y llegando rápidamente a los 98[MPa] a una presión interna $P = 40$ [MPa]. En el gráfico (d) de hecho, la tracción se dispara a magnitudes de los 350[MPa] para $P = 55$ [MPa], momento en el cual el programa empieza ya a tener problemas de convergencia para llegar al la curva suave de $\sigma_{\theta\theta}$. A mayores magnitudes de la presión, el problema no converge (muy probablemente por el aumento explosivo de $\sigma_{\theta\theta}$). Se ve sin embargo, que a cualquier presión P el esfuerzo circunferencial a medida que se aproxima al radio externo de la cáscara, se aproxima suavemente a una presión distinta de cero, menores a ~ 5 [MPa]. Esto tiene sentido, ya que en la realidad, tanto las superficies externas como las internas se encuentran en constante tracción.

Interesante son los resultados expuestos en los gráficos de la figura 4.11, en los cuales tanto la deformación radial ε_{rr} como la circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ muestran un comportamiento de *strain limiting*. La deformación radial toma valores negativos (lo que significa que el espesor de la cáscara disminuye), como es de esperar, debido al esfuerzo radial de compresión. A medida que aumenta el esfuerzo de compresión debido al aumento en la presión interna, la deformación de compresión radial también aumenta, hasta llegar a -0.14%, valor que alcanza a presiones de 20[MPa] y mantiene incluso hasta llegar a presiones de 55[MPa]. Por su lado, la deformación circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ también alcanza su valor máximo de 0.14% a presiones de 40[MPa], manteniéndolo también a los 55[MPa], considerando incluso el explosivo aumento del esfuerzo circunferencial para radios cercanos a “ r_i ”. En cuanto al comportamiento de las deformaciones ε_{rr} y $\varepsilon_{\theta\theta}$ a lo largo del espesor de la cáscara, es bastante análogo al sus respectivos esfuerzos; ambos disminuyen suavemente a medida que se aproximan al radio externo.

En los gráficos de la figura 4.13, puede observarse que las variables eléctricas del problema, \mathbb{E}_r y \mathbb{P}_r no se ven mayormente afectadas por el aumento de la presión. A medida que aumenta la presión, el campo eléctrico radial aumenta ligeramente, desde los 6[kV/cm] a unos 8[kV/cm], y consecuentemente, también lo hace la polarización radial, desde 0,95[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$] a 1[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$], todo esto a un mismo voltaje externo aplicado $\phi = -25kV$. A pesar de que

esto sea un aumento muy pequeño, es interesante ver que una variable independiente del modelo como es el esfuerzo radial σ_{rr} , puede afectar en el comportamiento de otra variable independiente, como el campo eléctrico, hecho que ocurre en la realidad para cerámicas piezoeléctricas. Esto es algo que en los problemas homogéneos no es posible apreciar. Notar que la relación $\mathbb{P}_r - \mathbb{E}_r$ de los gráficos corresponden a los ordenes de magnitud obtenidos en el fitting (ver figura 3.6).

Efectos de la variación del voltaje aplicado ϕ_o

Los gráficos de las figuras 4.14-4.16 muestran como varían las distintas componentes de la deformación, esfuerzo y variables eléctricas (campo eléctrico y polarización) a medida se aumenta el voltaje aplicado a directamente a las caras internas y externas de la cáscara esférica, estando inflada a una presión 30[MPa].

Al observar los gráficos de la figura 4.15, el esfuerzo radial σ_{rr} no se ve afectado mayormente afectado por el aumento del voltaje, debido a que sus valores de frontera están fijos, por lo que solo disminuye ligeramente la concavidad de con la que une ambos valores. El caso del esfuerzo circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ por su lado muestra un cambio bastante más notorio, disminuyendo drásticamente su magnitud en la cara interna de la cáscara (de 35,5[MPa] para $\phi_o = -25$ [kV] a 5[MPa] para $\phi_o = -150$ [kV]), y aumentando ligeramente sus valores en la cara externa de la cáscara (de 4,8[MPa] para $\phi_o = -25$ [kV] a 11[MPa] para $\phi_o = -150$ [kV]).

Como era de esperar al aumentar el voltaje, se aumenta también el campo eléctrico radial aplicado \mathbb{E}_r , y por tanto los valores de la polarización radial \mathbb{P}_r . De esta forma se puede apreciar como claramente se llega a saturar la polarización del material, dado a que a -95 [kV] el campo eléctrico varia entre las caras de la cáscara solo 0,24[kV/cm] (de 13,5[kV/cm] a 13,74[kV/cm]) para generar una variación de 0,6[μ C/cm²] en la polarización, mientras que a -150 [kV], el campo eléctrico debe variar 3,4[kV/cm] (de 18[kV/cm] a 21,4[kV/cm]) para generar el mismo cambio en la polarización. Esto guarda concordancia con lo visto en los datos experimentales del PLZT, ya que a los -150 [kV] se alcanzan los 21,4[kV/cm] de campo eléctrico, niveles a los cuales la polarización del material debiese empezar a saturarse (con valores por sobre los 30[μ C/cm²]), tal como ocurre en el gráfico (d). Por otro lado, el hecho que la polarización varíe siempre exactamente 0,6[μ C/cm²] a lo largo del espesor de la cáscara, esta completamente determinado por el valor de la constante C , dado a la ecuación (4.21).

Debido a este aumento en el campo eléctrico causado por el aumento del voltaje aplicado, las deformaciones de compresión radial σ_{rr} disminuye y pasan paulatinamente a ser de extensión (pasan a ser positivas), esto a pesar de que los esfuerzos radiales sean de compresión (ver figura 4.14). Esto concuerda con lo observado en los problemas homogéneos, donde las deformaciones paralelas al esfuerzo pasan a aumentar en extensión sobreponiéndose al efecto del mismo esfuerzo en esa dirección. Para el caso de la deformación circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$, se puede ver que la deformación de extensión disminuye, sin embargo, sin pasar a ser negativa, o sea, de compresión (ver figura 4.14). Esto también concuerda con lo observado en el problema homogéneo del prisma en extensión (ver figura 4.7), donde el campo eléctrico disminuye las deformaciones de extensión ortogonales a él, sin llevarlas a ser negativas.

4.2.2. Inflado y extensión de tubo cilíndrico y bajo campo eléctrico radial

Se define a un tubo de radio interior r_i y exterior r_o , bajo una presión interna P , y sufriendo una extensión axial lineal como muestra la figura (4.17)

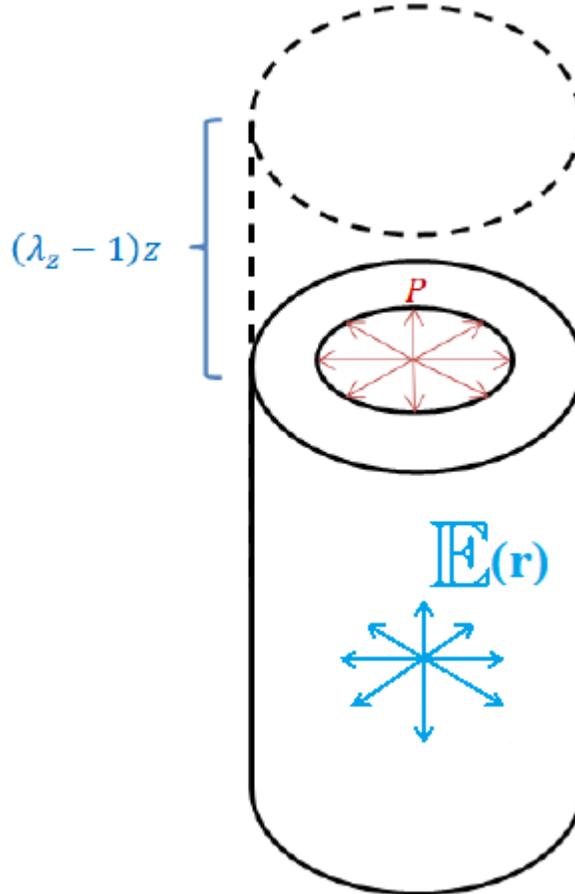


Figura 4.17: Cáscara esférica de radio interno r_i y externo r_o inflada con presión P .

donde se supone que el largo del tubo L es mucho mayor a su diámetro exterior r_o , es decir, $r_o \ll L$. Con esto se mantiene unidimensional al problema, dado que al considerar L como comparable con las otras dimensiones del tubo, implicaría la consideración de las condiciones de frontera de las caras planas del tubo, incorporando a z como segunda variable dimensional.

Con lo anterior, se puede suponer que el vector desplazamiento tiene la forma:

$$\mathbf{u}(r, z) = u_r(r)\mathbf{e}_r + (\lambda - 1)z\mathbf{e}_z, \quad (4.27)$$

donde λ es la razón entre el largo final y el inicial, por lo que debe ser mayor a cero y mayor a la unidad en el caso de una extensión. Suponiendo que no existen esfuerzos de corte y que el tensor de esfuerzos solo depende de la posición radial, entonces $\boldsymbol{\sigma}$ queda

$$\boldsymbol{\sigma}(r) = \sigma_{rr}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{zz}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (4.28)$$

Además, se supone para este problema también un campo eléctrico radial, definido como:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbb{E}_r(r)\mathbf{e}_r. \quad (4.29)$$

Considerando las ecuaciones de relación deformación-desplazamiento (2.5), se tiene que las componentes de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ se relacionarían con el desplazamiento de la forma

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \lambda - 1. \quad (4.30)$$

En base a las ecuaciones de equilibrio en cilíndricas (2.11) y al tensor de esfuerzos de (4.26), se obtiene

$$-\frac{d\mathbb{E}_r}{dr}\mathbb{P}_r = \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \quad (4.31)$$

y despejando $\sigma_{\theta\theta}$ de (4.31) se obtiene

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{d(r\sigma_{rr})}{dr} + r\frac{d\mathbb{E}_r}{dr}\mathbb{P}_r. \quad (4.32)$$

Utilizando la ecuación de la divergencia del desplazamiento eléctrico de Maxwell (2.8)₂ en coordenadas cilíndricas, se tiene que

$$\frac{1}{r}\frac{d[r(\mathbb{P}_r + \varepsilon_o\mathbb{E}_r)]}{dr} = 0 \quad \implies \quad \mathbb{P}_r = \frac{C}{r} - \varepsilon_o\mathbb{E}_r, \quad (4.33)$$

donde C es una constante que se determina con condiciones de borde de \mathbb{E}_r . Al reemplazar (4.33) en (4.32), se obtienen el esfuerzo normal circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ en función de σ_{rr} y \mathbb{E}_r :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{d(r\sigma_{rr})}{dr} + r\frac{d\mathbb{E}_r}{dr}\left(\frac{C}{r} - \varepsilon_o\mathbb{E}_r\right). \quad (4.34)$$

Las invariantes relevantes de (2.34), es decir I_1, I_2 y I_4 quedan como:

$$I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2), \quad I_4 = \mathbb{E}_r^2. \quad (4.35)$$

Con la ecuación constitutiva para la deformación (2.35) y la función isotrópica (2.37), se llega a que las componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ son

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \alpha (g_0 + g_1\mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma\sigma_{rr}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right] + \frac{\varepsilon_o\zeta_1}{2}\mathbb{E}_r^2, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \alpha (g_0 + g_1\mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma\sigma_{\theta\theta}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right], \\ \varepsilon_{zz} &= \alpha (g_0 + g_1\mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma\sigma_{zz}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

y realizando lo mismo con (2.36) se llega la expresión de la única componente de la polarización:

$$\mathbb{P}_r = m_3 + \mathbb{E}_r \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \tanh\left(\frac{\mathbb{E}_r - m_2}{m_1}\right) \frac{m_0}{\mathbb{E}_r} + \zeta_0 + \varepsilon_o\zeta_1\sigma_{rr} \right\}. \quad (4.37)$$

Implementación en COMSOL

Para este problema la cantidad de variables independientes serán tres, debido a que en este caso se considera además el esfuerzo axial. Por tanto, se tiene al esfuerzo radial σ_{rr} , al campo eléctrico \mathbb{E}_r y al esfuerzo axial σ_{zz} como las variables independientes. En estricto rigor, σ_{zz} podría dejarse como función explícita de σ_{rr} y \mathbb{E}_r , despejándola a partir de la ecuación (4.36)₃ y (4.30)₃, y así, dejar el problema con dos variables independientes. Sin embargo, debido a que el despeje algebraico puede resultar un poco engorroso como para ingresarlo al programa, se opta por la opción de dejarlo como tercera variable independiente. Debido a esto se requiere de la incorporación de una tercera ecuación diferencial para definir de forma completa al problema.

Para la determinación del esfuerzo radial σ_{rr} , se trabaja la ecuación (4.30)₂ multiplicando ambos lados por r y derivando en r . Esto se iguala a (4.30)₁, con lo que se obtiene la primera ecuación diferencial

$$\varepsilon_{rr} = \frac{d(\varepsilon_{\theta\theta}r)}{dr}.$$

Considerando la formulación de las ecuaciones que impone el PDE solver,

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = f,$$

y no olvidando que el problema es uno cuasi-estático (derivadas temporales nulas) y unidimensional (operador de divergencia $\nabla \cdot$ pasa a actuar como derivada en r), se asignan las igualdades

$$\Gamma = \varepsilon_{\theta\theta}r, \quad f = \varepsilon_{rr}.$$

Las condiciones de borde para σ_{rr} deben considerar las presiones a las que está sometido el tubo, es decir, la presión manométrica P del interior, y la presión atmosférica, la cual es cero al también considerarla manométrica. Dado a que la presión actúa sobre las superficies de forma perpendicular a estas, por equilibrio de Cauchy en la frontera se debe cumplir que

$$\sigma_{rr}(r_i) = -P, \quad \sigma_{rr}(r_o) = 0,$$

donde ambas son condiciones de borde de Dirichlet. Nuevamente, es importante notar que el signo negativo de la cara interior, debido a que la presión interna tiende a comprimir al tubo.

Para el caso del campo eléctrico, se supone nuevamente la existencia de un potencial eléctrico ϕ tal que

$$\mathbb{E}_r(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr},$$

con el fin de usar este potencial como variable independiente (en vez de \mathbb{E}_r), para asegurar que la ecuación diferencial resultante para su determinación, quede de segundo orden o superior. Este potencial $\phi(r)$ además de tener un propósito matemático para la determinación del campo eléctrico \mathbb{E}_r , puede interpretarse como la diferencia de potencial eléctrico medido en [kV] entre ambas caras.

La ecuación se obtiene igualando (4.33) a (4.37), y pasando sumando el término $\epsilon_o \mathbb{E}_r$ de (4.33) hacia el otro lado

$$\frac{C}{r} = \mathbb{E}_r \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \zeta_0 + \epsilon_o \zeta_1 \sigma_{rr} + \epsilon_o \right\} + m_3 + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_r - m_2}{m_1} \right).$$

Si se iguala Γ a todo el lado derecho de esta ecuación, la derivada del lado izquierdo de la misma debería igualarse a f , es decir

$$f = -\frac{C}{r^2},$$

con lo que quedaría lista la ecuación de diferencial para el campo eléctrico.

Se supone, al igual que en el problema anterior, que los electrodos causantes del campo eléctrico externo \mathbb{E}_r están completamente adheridos a las caras del tubo, ya que en caso contrario, se debería entrar a utilizar las ecuaciones de frontera de Maxwell. Con lo anterior en mente, se parte suponiendo que el potencial ϕ en el manto interno del tubo pasa a ser nulo, es decir,

$$\phi(r_i) = 0,$$

donde el valor que toma en esta frontera no importa en mayor medida, dado a que lo que realmente afecta al valor del campo eléctrico \mathbb{E}_r es la diferencia de potencial entre dos puntos. Para el borde externo también se utiliza una condición de borde de Dirichlet, con el fin de que el potencial eléctrico ϕ_o pueda usarse como parámetro, evaluando la respuesta del material para distintos voltajes:

$$\phi(r_o) = \phi_o.$$

En el caso del esfuerzo axial σ_{zz} , la ecuación diferencial se obtiene de a igualar los valores de ε_{zz} de las ecuaciones (4.30)₃ y (4.36)₃, es decir,

$$\lambda - 1 = \alpha (g_0 + g_1 \mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{zz}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right].$$

Si se deriva esta ecuación a ambos lados, pueden relacionar directamente los términos de la fórmula cuasi-estática y unidimensional del programa de la forma

$$\Gamma = \alpha (g_0 + g_1 \mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{zz}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right], \quad f = 0,$$

donde en otras palabras Γ es simplemente igual a la deformación axial ε_{zz} . Por último, para el esfuerzo axial σ_{zz} , al igual que para el campo eléctrico, es útil suponer la existencia de un potencial Ω (que no tiene ninguna interpretación física real, sino que representa una magnitud meramente matemática para la determinación numérica de σ_{zz}) tal que

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{d\Omega(r)}{dr},$$

debido a que solo así, la ecuación diferencial resultante para el esfuerzo axial pasa a ser de segundo orden. De esta forma, la tercera variable independiente del problema pasaría a ser el potencial auxiliar $\Omega(r)$.

Al igual que para el campo eléctrico, se debe asociar a este potencial una condición de frontera de Dirichlet, y otra de Neumann, de la forma

$$\Omega(r_i) = 0, \quad \Gamma(r_o) = \varepsilon_{zz}(r_o) = \lambda - 1,$$

donde es indispensable que la segunda tenga esta forma, debido a que sino, el parámetro de λ quedaría inutilizado, dejando mal definido al problema. Para la sección de resultados, se utiliza una extensión

$$\lambda = 1,0003,$$

lo que implica una deformación de extensión porcentual ε_{zz} de un 0.03% fijo para toda la extensión del radio.

Finalmente, para la evaluación de los resultados, se usan los siguientes parámetros geométricos y eléctricos fijos:

$$r_i = 5[cm], \quad r_o = 12[cm], \quad C = 5[\mu C/cm].$$

Al fijarse en la ecuación (4.33) la constante de integración C dividida por el radio debiese ser igual al desplazamiento eléctrico \mathbb{D} . Por tratarse de un campo radial en coordenadas cilíndricas, por ley de Gaus, C tiene la forma:

$$C = \frac{\lambda_o \epsilon}{2\pi \epsilon_o},$$

donde λ_o es la carga por unidad de longitud, y $\epsilon = 8,85 \times 10^{-3}[\mu C/kVcm]$ es la permitividad eléctrica del $BiFeO_3$ [26].

Resultados del Problema

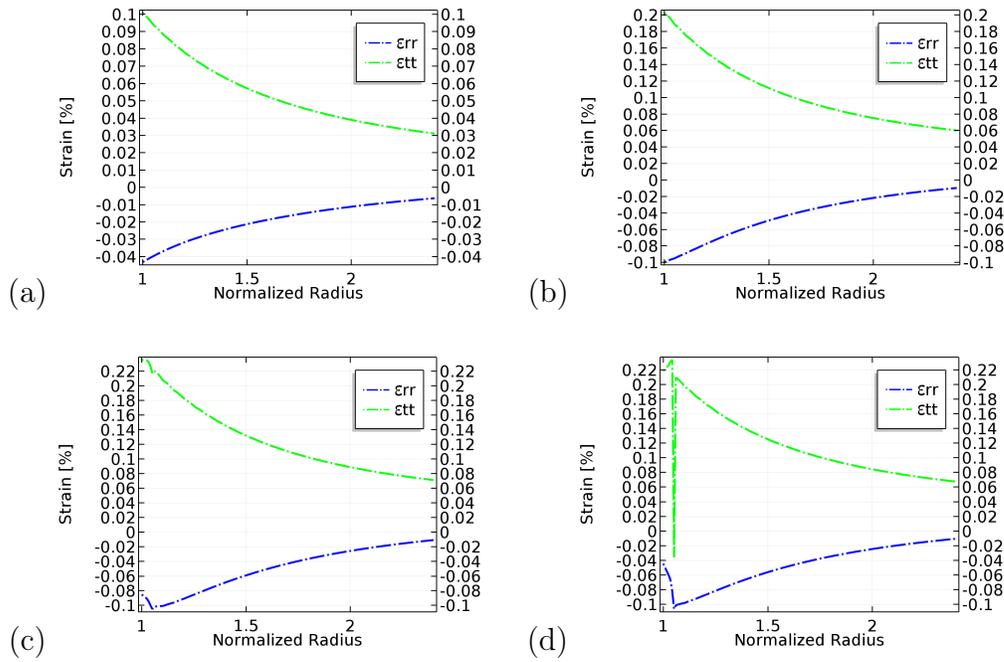


Figura 4.18: Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 5[MPa]$, (b) $P = 15[MPa]$, (c) $P = 22[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.

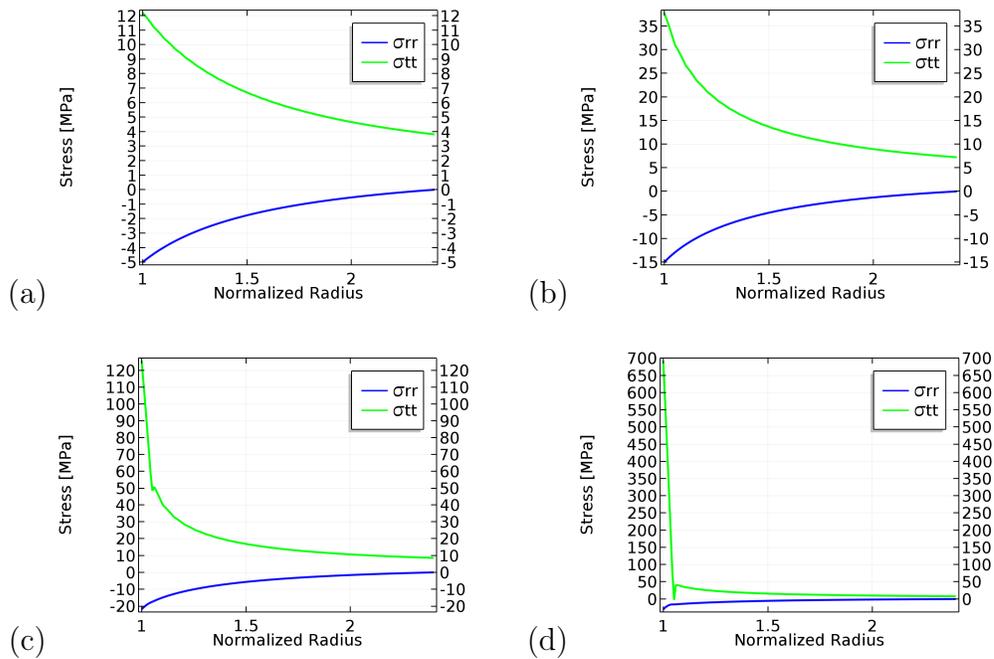


Figura 4.19: Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 5[MPa]$, (b) $P = 15[MPa]$, (c) $P = 22[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.

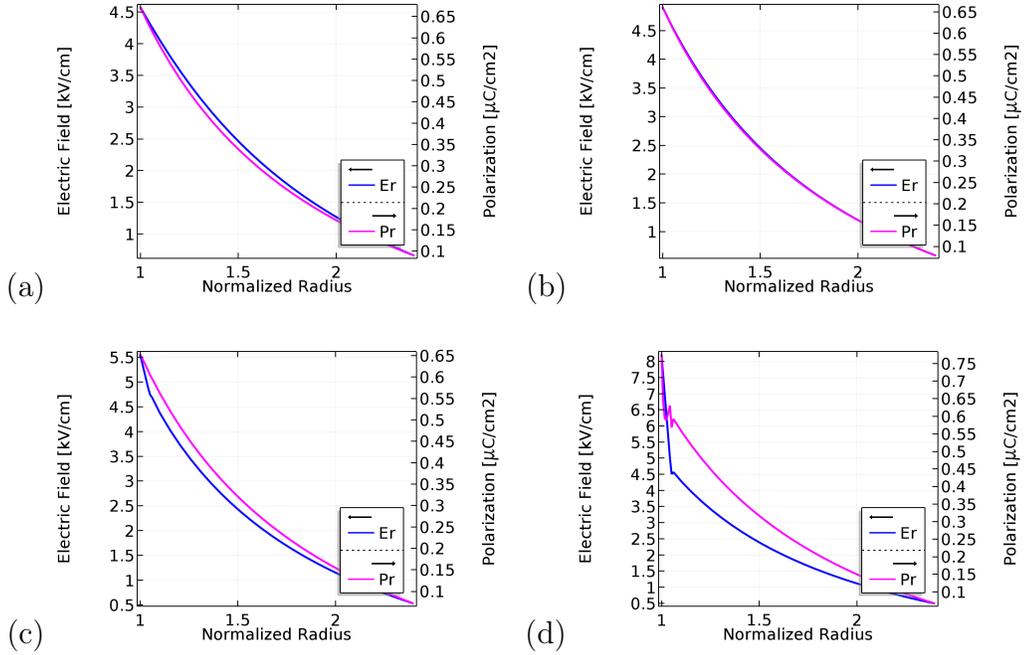


Figura 4.20: Campo eléctrico (azul) y polarización (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 5[MPa]$, (b) $P = 15[MPa]$, (c) $P = 22[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.

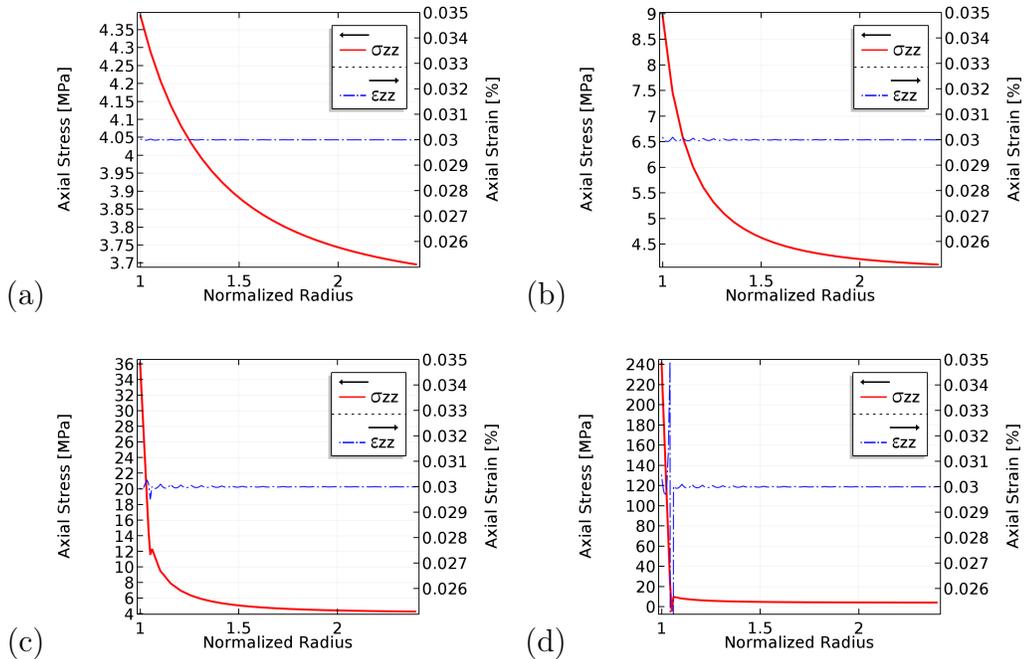


Figura 4.21: Esfuerzo (rojo) y deformación (azul) axial en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 5[MPa]$, (b) $P = 15[MPa]$, (c) $P = 22[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.

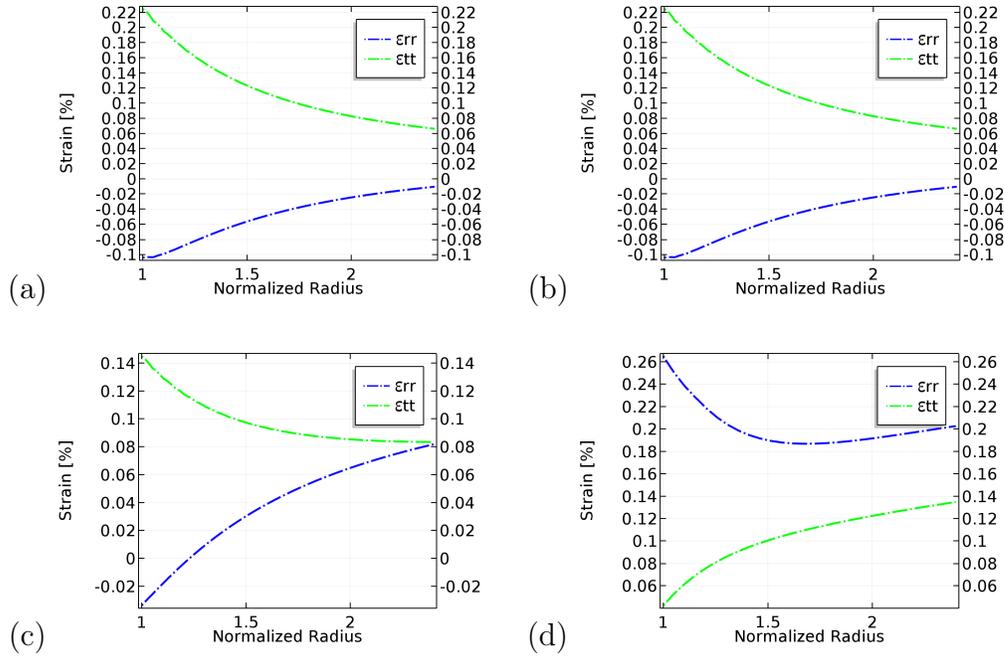


Figura 4.22: Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 16[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -10[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -50[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -90[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -150[\text{kV}]$.

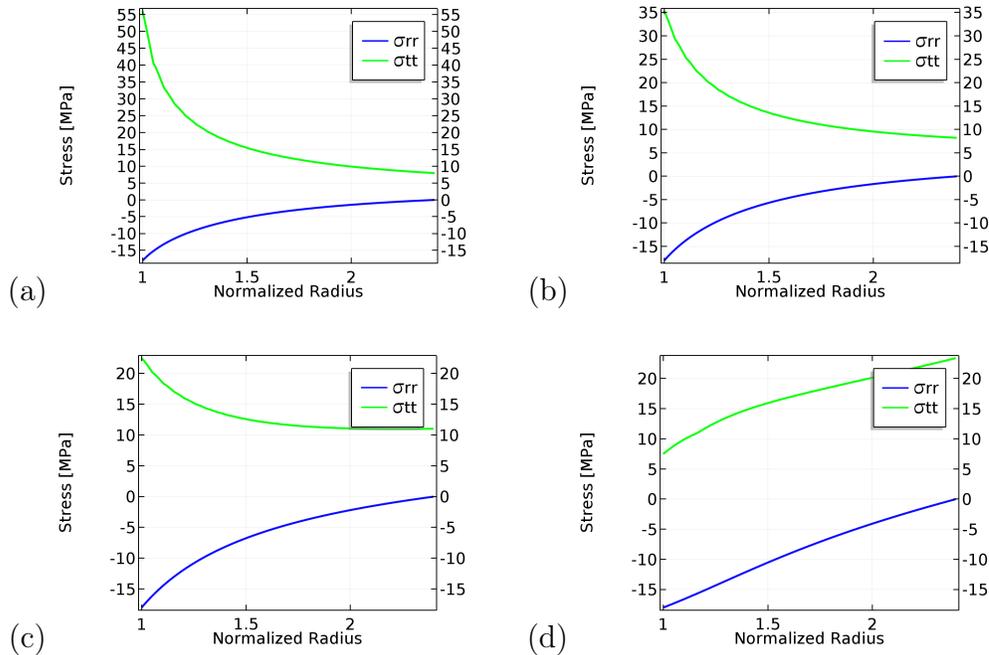


Figura 4.23: Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 16[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -10[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -50[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -90[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -150[\text{kV}]$.

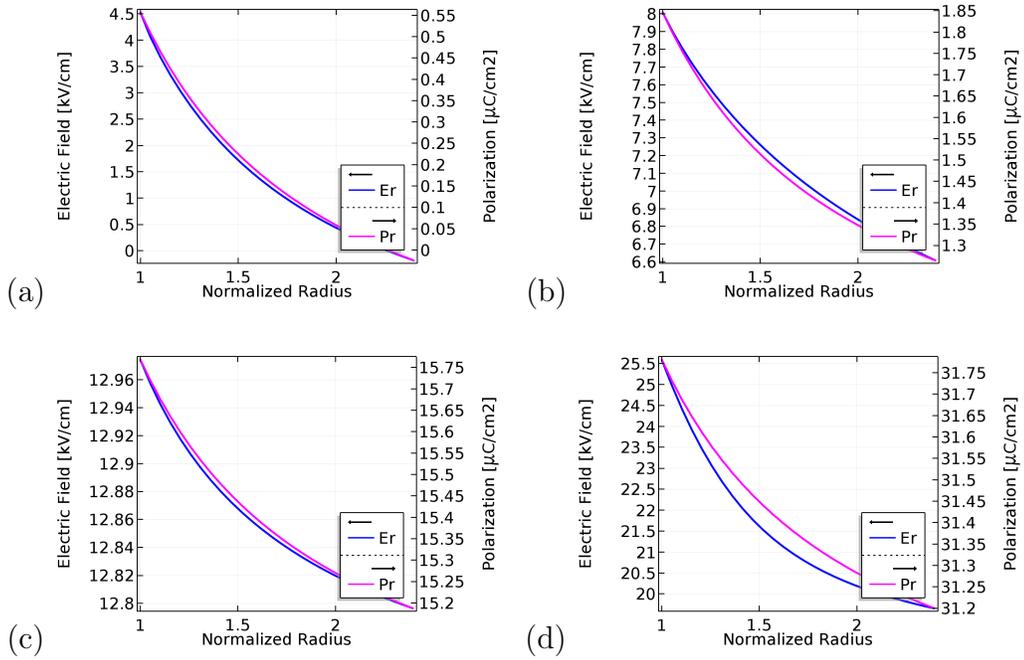


Figura 4.24: Campo eléctrico (azul) y polarización (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$.

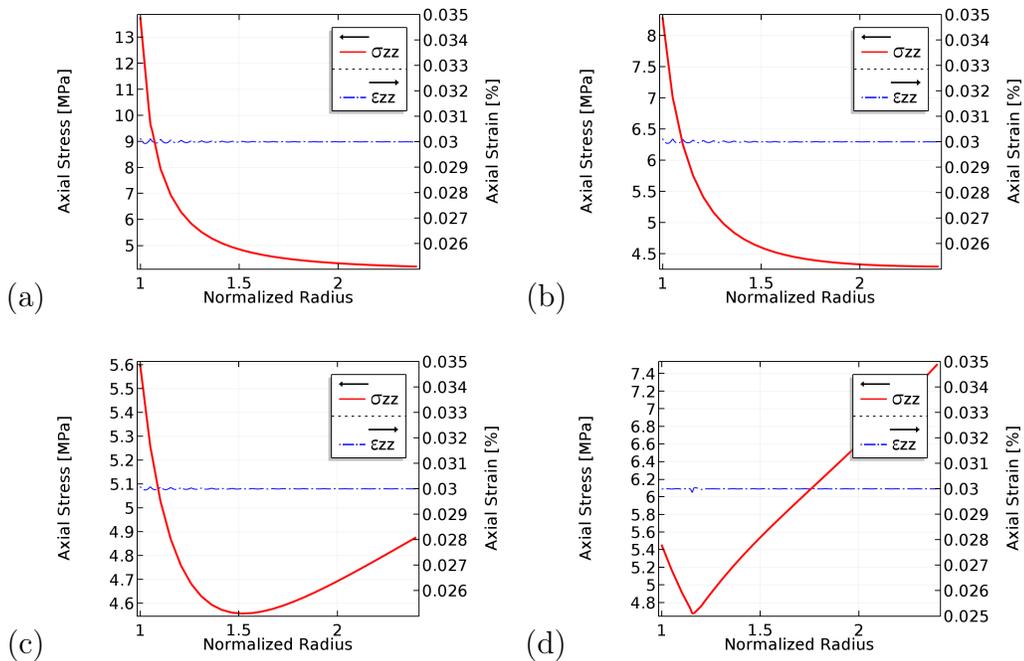


Figura 4.25: Esfuerzo (rojo) y deformación (azul) axial en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -50[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -150[kV]$.

Análisis de los resultados

Efectos de la variación de la presión interna P

En los gráficos de las figuras 4.18-4.21, se muestra como se ven afectadas distintas componentes de la deformación, esfuerzo y variables eléctricas (campo eléctrico y polarización) a medida que aumenta la presión interna P del tubo, estando expuesta a un voltaje fijo de 15[kV].

Al ver las figuras 4.18 y 4.19, se puede afirmar que el comportamiento de las componentes radiales y circunferenciales del esfuerzo y de la deformación se comportan de forma bastante similar a los aumentos de presión. Por un lado, el esfuerzo radial σ_{rr} en la cara interna del tubo, adopta la misma magnitud de la presión interna y disminuye suavemente hasta cero a medida que se acerca al manto externo del tubo, tal como se le impone en como condiciones de frontera. Por su lado, el esfuerzo circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ en la cara interna del tubo aumenta explosivamente a medida que aumenta la presión interna, tanto así, que a solo una presión interna de 30[MPa], se llega a los 700[MPa]. A presiones mayores que 30[MPa], el problema deja de converger probablemente a este aumento radical. Sin embargo, estos valores para el esfuerzo circunferencial son muy probablemente errores de convergencia, por lo que sus valores reales se esperarían mucho menores (del orden de magnitud de $\sim 100[MPa]$ en la cara interna del tubo a una presión de 30 [MPa], siguiendo la parte suave de la curva en (d)). Análogamente, las deformaciones radial ε_{rr} y circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ de la figura 4.18, muestran nuevamente un comportamiento de “*strain limiting*”, ya que sus respectivas magnitudes aumentan hasta un -0.1 % para el caso de la compresión radial, y un 0.22 % para la extensión circunferencial, valores que alcanzan ya a presiones internas de 15[MPa], manteniéndolos hasta los 30[MPa], a pesar del drástico aumento de $\sigma_{\theta\theta}$.

Si se comparan las presiones requeridas para lograr que el programa no converja, entre el caso de la cáscara esférica y del tubo, se puede afirmar que claramente el caso de la cáscara esférica soporta mayores presiones considerando los mismos radios r_i y r_o .

Observando los gráficos de la figura 4.20, se puede ver como tanto el campo eléctrico \mathbb{E}_r como la polarización radial \mathbb{P}_r solo sufren un muy ligero aumento a medida que crece la presión interna P , para radios cercanos a la cara interna del tubo. En la cara externa del tubo las variables eléctricas se mantienen prácticamente iguales, debido a que cerca del manto exterior, los esfuerzos radiales σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$ son bastante bajos, independientemente de la presión P . Es muy similar a lo ocurrido en el caso de la cáscara esférica, demostrando nuevamente, que el modelo es capaz de permitir que el esfuerzo aplicado, inflencie el campo eléctrico, a pesar de que el voltaje que lo genere, se mantenga constante (en 15[kV] para este caso).

En la figura 4.21 puede verse como la deformación axial ε_{zz} se mantiene fija en un 0.03 % independientemente de la presión interna P , tal como se le impone en el planteamiento del problema. Sin embargo, para que esta deformación se mantenga fija, el esfuerzo axial σ_{zz} debe ser distinto de cero, y en efecto, se puede apreciar como la tracción axial aumenta drásticamente de 4,39[MPa] para $P = 5$ [MPa], a 36[MPa] para $P = 22$ [MPa], para mantener la extensión axial porcentual del tubo invariante en radios cercanos al manto interno. Esta tracción disminuye a medida que se acerca a la cara externa del tubo, debido a que los esfuerzos radiales y circunferenciales para esos radios, son bastante menores.

Efectos de la variación del voltaje aplicado ϕ_o

Los gráficos de las figuras 4.22-4.25 muestran como varían las distintas componentes de la deformación, esfuerzo y variables eléctricas (campo eléctrico y polarización) a medida se aumenta el voltaje aplicado a directamente a los mantos interno y externo del tubo, estando inflado a una presión interna de 16[MPa].

Prestando atención a los gráficos de la figura 4.23, puede verse que a medida que el voltaje ϕ_o aumenta, el esfuerzo radial σ_{rr} mantiene los mismo valores impuestos como condiciones de borde (de 16[MPa] para la cara interna y de 0[MPa] para la cara externa), sin embargo, la concavidad con la que une estos valores de borde a través del espesor del tubo disminuye. De hecho, a un voltaje de 150[kV], la variación del esfuerzo radial en función del radio, es casi lineal. Para el caso de la esfuerzo circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$, se ve que a mayor voltaje ϕ_o , menor es la tracción en la cara interna del tubo (siendo de 55[MPa] para $\phi_o = 10$ [kV], y llegando a 7,5[MPa] para $\phi_o = 150$ [kV]), y mayor lo es en la cara externa (siendo de 8[MPa] para $\phi_o = 10$ [kV], y llegando a 24[MPa] para $\phi_o = 150$ [kV]). Esto implica que a mayor voltaje aplicado, la tracción circunferencial del tubo se “traslada” a hacia afuera del tubo.

Por su lado, en la figura 4.22 se observa como la deformación radial ε_{rr} pasa gradualmente de ser de compresión, a extensión, esto debido a que es la dirección paralela en la que aumenta el campo eléctrico aplicado a medida que crece el voltaje (ver desarrollo del campo eléctrico en figura 4.24). Lo anterior concuerda con lo analizado en los problemas anteriores. Por su lado, la deformación circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ disminuye para radios cercanos a r_i (de un estiramiento de un 0.22 % para $\phi_o = 10$ [kV], a un 0.04 % para $\phi_o = 150$ [kV]) debido a que se encuentra ortogonal al aumento del campo eléctrico. En contraste con esto, para radios cercanos a r_o , la deformación de tracción se mantiene fija en 0.08 % para voltajes menores a 90[kV], y aumenta fuertemente a 0.14 % cuando el voltaje es de 150[kV]. A voltajes por sobre los 90[kV], tanto la deformación radial como la deformación circunferencial son positivas, por lo que el aumento del voltaje (y consecuentemente el aumento del campo eléctrico), generan que el volumen del tubo aumente, hecho que ratifica lo descrito en el análisis del problema de la lámina en tracción (ver sección 4.1.1).

Tal como era de esperar, un aumento en el voltaje implica un aumento en el campo eléctrico \mathbb{E}_r , y por tanto también un aumento en la polarización radial \mathbb{P}_r del tubo, lo cual se evidencia en la figura 4.24. Nuevamente, se puede ver como el modelo logra devolver una clara saturación de la polarización radial del material cuando el campo eléctrico alcanza magnitudes por sobre los 20[kV/cm], donde a $\phi = 150$ [kV], una variación del campo eléctrico de 5,5[kV/cm] varía a la polarización en 0,55[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$], mientras que a $\phi = 90$ [kV], una variación del campo eléctrico de tan solo 0,16[kV/cm] (de 12,8[kV/cm] en el radio externo a 12,96[kV/cm] en el radio interno), genera la misma variación en la polarización del material. Los niveles de la polarización cuando esta saturada en el gráfico (d), coincide con los niveles obtenidos del fitting realizado en la figura 3.6, es decir, por sobre los 31[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$].

En la figura 4.25, se puede apreciar como la deformación axial ε_{zz} se mantiene fija en 0.03 % como se le impuso. Lo interesante, sin embargo, es la forma en que cambia el esfuerzo axial σ_{zz} para mantener fijo ese estiramiento, a medida que aumenta el potencial eléctrico. A bajos voltajes, el esfuerzo axial alcanza los 14[MPa] en el radio interior, y disminuye rápidamente hasta 4,1[MPa] a medida que se acerca al radio exterior. A medida que aumenta

el voltaje a 90[kV], por ejemplo, se observa como el esfuerzo axial en la cara interna disminuye a 5,6[MPa] en la cara interior, y en la cara externa aumenta a 4,9[MPa], un comportamiento muy similar a lo observado en el esfuerzo circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$. Es similar, pero no idéntico, ya que el esfuerzo axial alcanza un mínimo de 4.6[MPa] (a 90[kV]) dentro del espesor del tubo, específicamente a un radio normalizado de 1.5. La razón de esto se debe probablemente a la influencia compartida que tienen los esfuerzos ortogonales en las invariantes I_1 e I_2 , junto con la del campo eléctrico en la deformación axial, la cual σ_{zz} trabaja por mantener.

4.2.3. Inflado y extensión de tubo cilíndrico y bajo campo eléctrico radial, con corte telescópico

Tomando la misma geometría anterior, se considera el caso en que, además del inflado con presión P , exista corte longitudinal debido a un esfuerzo de corte por arrastre τ_o en el manto interior del tubo (ver figura 4.26), por lo que se supone esta vez un tensor de la forma

$$\boldsymbol{\sigma}(r) = \sigma_{rr}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{zz}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \sigma_{rz}(r)(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r), \quad (4.38)$$

donde también se supone un campo eléctrico radial, definido por un potencial $\Phi(r)$ tal que

$$\mathbf{E}(r) = \mathbb{E}_r(r)\mathbf{e}_r. \quad (4.39)$$

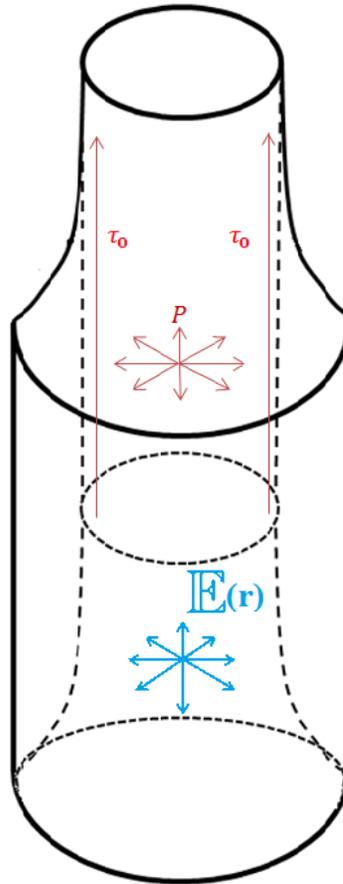


Figura 4.26: Tubo de radio interno a y externo b con presión interna P , desplazamiento axial restringido en borde externo y corte longitudinal.

Para este caso tampoco supone un desplazamiento azimutal u_θ , y la extensión deja de suponerse lineal como el caso anterior, tal que

$$\mathbf{u}(r) = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_z(r)\mathbf{e}_z. \quad (4.40)$$

Según las ecuaciones de la deformación linealizada para cilíndricas (2.5), se tiene que las componentes de la deformación cumplen que

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{du_z}{dr}. \quad (4.41)$$

Por su lado, usando (4.38) y (4.39) en las ecuaciones de equilibrio para coordenadas cilíndricas (2.11), se llega a

$$\begin{aligned} -\frac{d\mathbb{E}_r}{dr} \mathbb{P}_r &= \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \\ 0 = \frac{d\sigma_{rz}}{dr} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} &\implies \frac{d(\sigma_{rz}r)}{dr} = 0 \implies \sigma_{rz} = \frac{K}{r}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde K es una constante que puede determinarse fácilmente utilizando la condición de borde $\sigma_{rz}(r = a) = \tau_o$, obteniendo a partir de (4.42)₂:

$$\sigma_{rz}(r) = \tau_o \frac{r_i}{r}. \quad (4.43)$$

A su vez, para dejar $\sigma_{\theta\theta}$ en función de \mathbb{E}_r y σ_{rr} , lo despejamos de la ecuación (4.42)₁, y reordenando algunos de sus términos se llega a

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{d(\sigma_{rr}r)}{dr} + r \frac{d\mathbb{E}_r}{dr} \mathbb{P}_r. \quad (4.44)$$

Usando la ecuación de Maxwell de la divergencia del desplazamiento eléctrico (2.8)₂ para coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d[r(\mathbb{P}_r + \varepsilon_o \mathbb{E}_r)]}{dr} = 0 \implies \mathbb{P}_r = \frac{C}{r} - \varepsilon_o \mathbb{E}_r, \quad (4.45)$$

donde C es una constante de integración, a la cual más adelante se le puede asignar algún valor arbitrario, al igual que en los problemas anteriores. Reemplazando (4.45) en (4.44), se obtiene la finalmente la expresión para $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{d(\sigma_{rr}r)}{dr} + r \frac{d\mathbb{E}_r}{dr} \left(\frac{C}{r} - \varepsilon_o \mathbb{E}_r \right). \quad (4.46)$$

A partir de las invariantes (2.34), las relevantes para este caso quedan como

$$I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}, \quad I_2 = \frac{\sigma_{rr}^2}{2} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^2}{2} + \frac{\sigma_{zz}^2}{2} + \sigma_{rz}^2, \quad I_4 = \mathbb{E}_r^2. \quad (4.47)$$

Con la ecuación constitutiva para la deformación (2.35) y las función isotrópica $\check{\Pi}$, las expresiones para cada componente de ε quedan como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \alpha (g_0 + g_1 \mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{rr}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right] + \frac{\epsilon_o \zeta_1}{2} \mathbb{E}_r^2, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \alpha (g_0 + g_1 \mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{\theta\theta}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right], \\ \varepsilon_{zz} &= \alpha (g_0 + g_1 \mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{zz}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right], \\ \varepsilon_{rz} &= \alpha (g_0 + g_1 \mathbb{E}_r^2) \frac{\gamma \sigma_{rz}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}},\end{aligned}\tag{4.48}$$

donde, a diferencia del caso sin ningún tipo de corte, se puede apreciar la aparición de la deformación angular ε_{rz} . Asimismo, y bajo el mismo procedimiento, las componentes de la polarización quedan como:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_r &= m_3 + \mathbb{E}_r \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_r - m_2}{m_1} \right) \frac{m_0}{\mathbb{E}_r} + \zeta_0 + \epsilon_o \zeta_1 \sigma_{rr} \right\}, \\ \mathbb{P}_z &= \epsilon_o \zeta_1 \sigma_{rz} \mathbb{E}_r,\end{aligned}\tag{4.49}$$

donde se puede ver la aparición de una polarización axial, no vista antes en el caso sin corte.

Implementación en COMSOL

Este problema requiere de la utilización las mismas tres variables independientes que el problema anterior, es decir, el esfuerzo radial σ_{rr} , el campo eléctrico \mathbb{E}_r , y el esfuerzo axial σ_{zz} , donde estos dos últimos requieren de la utilización de un potencial auxiliar que permita que sus respectivas ecuaciones diferenciales sean de segundo orden para su resolución. Lo anterior se debe a que la adición del corte axial (o telescópico), no implica la adición de una nueva variable independiente, dado a que a partir de las ecuaciones de equilibrio dinámico y el dato de frontera del planteamiento del problema permiten llegar a la expresión explícita de σ_{rz} en (4.43). De esta forma, la componente axial de la polarización \mathbb{P}_z en (4.49)₂ queda solo en función del campo eléctrico \mathbb{E}_r a determinar.

De la misma manera que en los problemas anteriores, la forma cuasiestática y unidimensional del problema en la cual se ingresan las ecuaciones diferenciales al programa queda como

$$\frac{d\Gamma}{dr} = f,$$

donde r es la única variable dimensional del problema.

Para el esfuerzo radial σ_{rr} , se usan las ecuaciones (4.41)₁ y (4.41)₂, a partir de las cuales se obtiene la relación

$$\frac{d(\varepsilon_{\theta\theta} r)}{dr} = \varepsilon_{rr},$$

de donde directamente se puede obtener $\Gamma = \varepsilon_{\theta\theta} r$ y $f = \varepsilon_{rr}$, con lo que queda lista la ecuación diferencial para la determinación del esfuerzo radial σ_{rr} . Las expresiones explícitas para la

deformación radial ε_{rr} y circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ que se ingresan, están en las ecuaciones (4.48)₁ y (4.48)₂ respectivamente. De esta forma, la ecuación diferencial queda completamente en función de las variables independientes ya mencionadas desde un comienzo.

Considerando por su lado las condiciones de frontera planteadas para el problema, se imponen las siguientes condiciones de borde de Dirichlet para el esfuerzo radial

$$\sigma_{rr}(r_i) = -P, \quad \sigma_{rr}(r_o) = 0,$$

donde a la presión interna P se le antepone el signo negativo, debido a que los vectores de fuerza superficial apuntan hacia dentro del material. Por su lado, en el exterior del tubo se supone que la presión simplemente es cero.

Para el campo eléctrico se supone la existencia de un potencial eléctrico ϕ radial, tal que

$$\mathbb{E}_r(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr},$$

donde el signo negativo antepuesto es para que este potencial tenga la misma definición física del potencial eléctrico medido en [kV] a partir del campo eléctrico. Este potencial se utiliza por tanto como variable independiente en vez del campo eléctrico, para que las ecuaciones diferenciales resultante quede de segundo orden. Igualando las expresiones para la polarización radial \mathbb{P}_r (4.45) y (4.49), se llega a la siguiente expresión

$$\frac{C}{r} = \mathbb{E}_r \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \zeta_0 + \epsilon_o \zeta_1 \sigma_{rr} + \epsilon_o \right\} + m_3 + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_r - m_2}{m_1} \right).$$

Si se deriva a ambos lados en r , se puede designar a todo lo del lado derecho como Γ , y la derivada del lado izquierdo como f , o sea

$$f = -\frac{C}{r^2},$$

con lo que quedaría definida la segunda ecuación diferencial para la resolución del problema. Tal como en los problemas anteriores, dado a que la variable independiente se trata de un potencial, se define una condición de borde de tipo Dirichlet para el radio interno del tubo, donde el potencial lo definimos nulo, es decir,

$$\phi(r_i) = 0,$$

donde el valor no importa, sino que la tasa de cambio de este valor a lo largo del radio r . Para el borde externo se define otra condición de borde de tipo Dirichlet, para así poder manipular los voltajes a los que se somete al tubo como un parámetro de evaluación, de la forma

$$\phi(r_o) = \phi_o.$$

Estas condiciones de borde para el potencial eléctrico ϕ están planteadas bajo la misma suposición de los problemas anteriores, es decir, que los electrodos que aplican el campo

eléctrico al material, están completamente adheridos a las caras interna y externa del tubo, evitando así los efectos de borde cuando campos eléctricos cambian de medio. Bajo este supuesto, el problema ya queda bien definido para las variables eléctricas.

Por último, para la determinación del esfuerzo axial σ_{zz} , también es necesaria la utilización de un potencial auxiliar Ω (carente de significado físico relevante), tal que

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{d\Omega(r)}{dr},$$

lo cual permite que la ED resultante termine siendo de segundo orden. De esta forma, Ω queda definida como la tercera variable independiente.

Igualando las expresiones para la deformación axial ε_{zz} de (4.41)₃ y (4.48)₃, se obtiene que

$$0 = \alpha (g_0 + g_1 \mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{zz}}{\sqrt{1 + 2t I_2}} \right],$$

la cual al derivar a ambos lados en r , se puede igualar a Γ (lado derecho) y $f = 0$. En otras palabras Γ se iguala a la deformación axial ε_{zz} . Al igual que para el caso del potencial eléctrico ϕ , a Ω se le impone en la frontera interior del tubo una condición de borde de Dirichlet nula:

$$\Omega(r_i) = 0.$$

Para el manto externo del tubo se impone una condición de borde de Neumann, tal que

$$\Gamma(r_o) = \varepsilon_{zz}(r_o) = 0,$$

en donde claramente se toma en cuenta la inexistencia de deformación axial para el problema. Con esto, se define por completo la tercera ED necesaria para la resolución numérica del problema.

Finalmente, para la evaluación de los resultados, se usan los siguientes parámetros geométricos y eléctricos fijos:

$$r_i = 5[cm], \quad r_o = 12[cm], \quad C = 5[\mu C/cm].$$

Resultados del problema

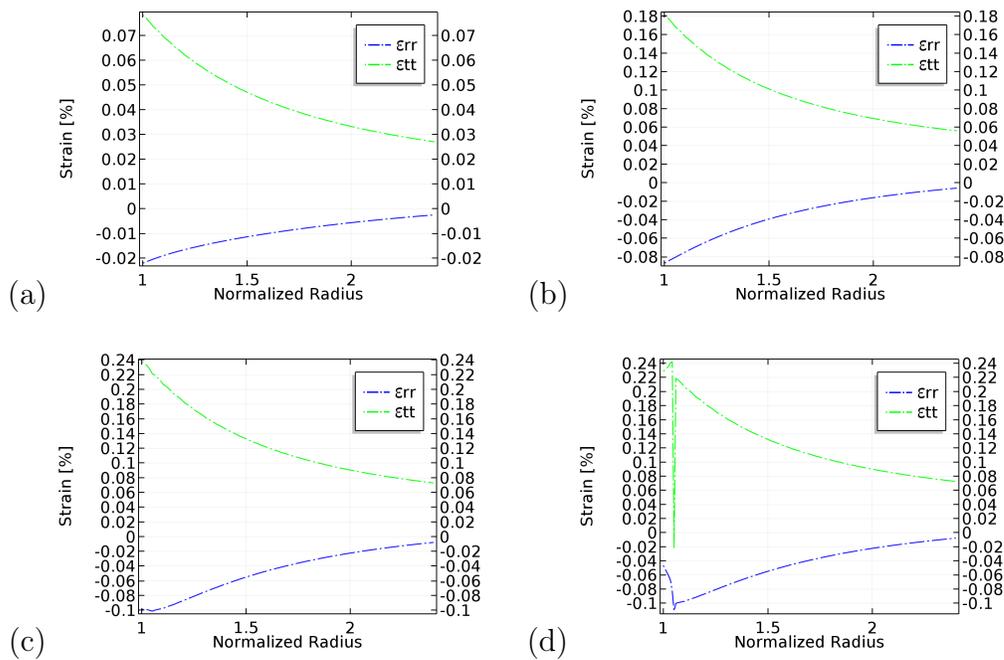


Figura 4.27: Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 3[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 20[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.

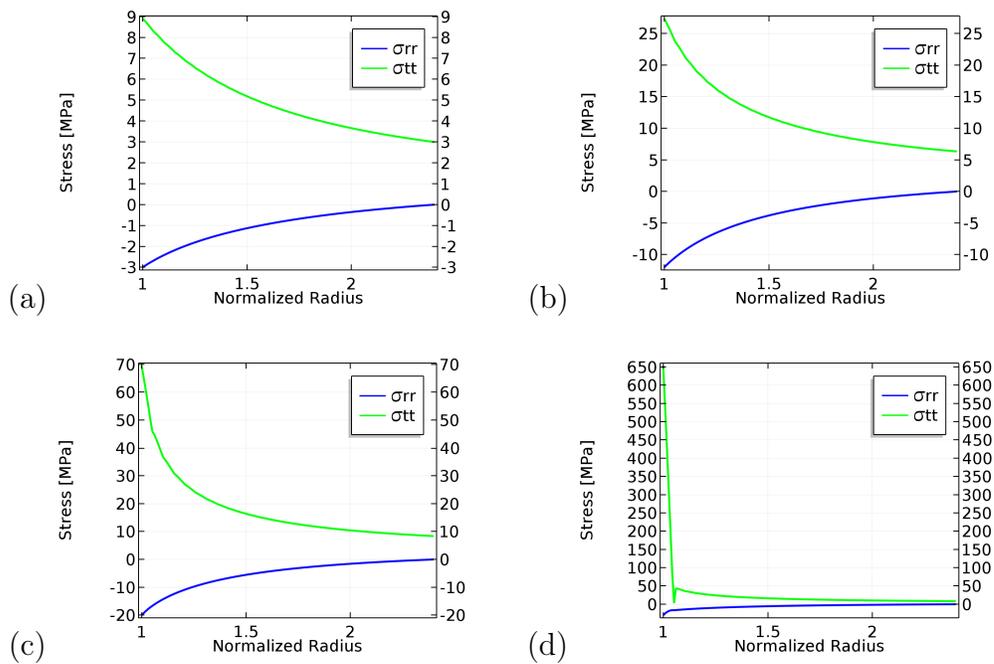


Figura 4.28: Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $\phi_o = -15[kV]$ con presión (a) $P = 3[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 20[MPa]$ y (d) $P = 30[MPa]$.

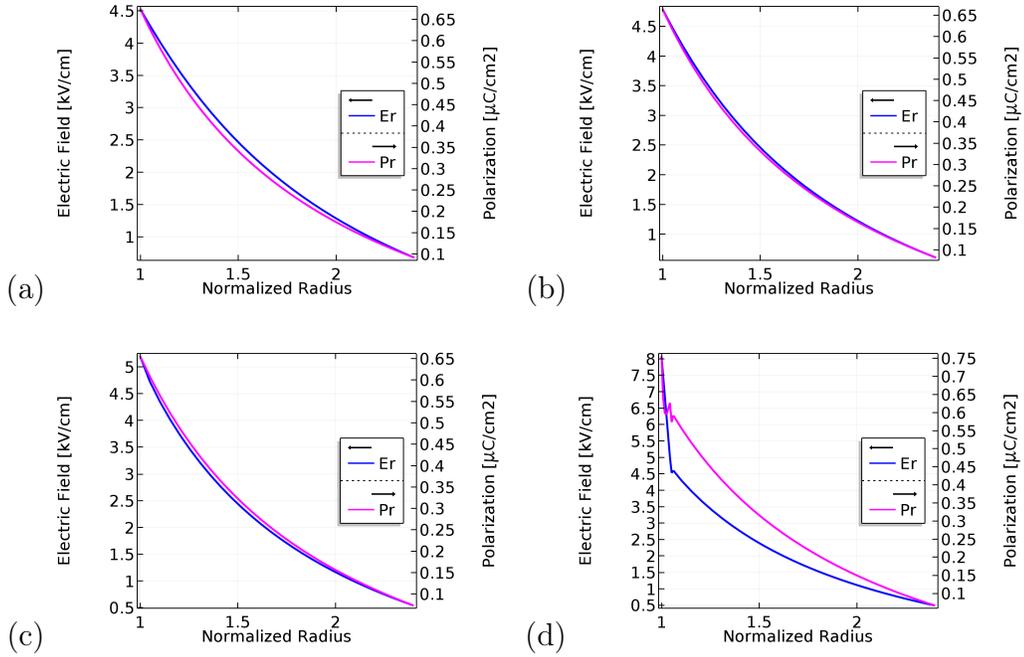


Figura 4.29: Campo eléctrico (azul) y polarización radial (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $\phi_o = -15[\text{kV}]$ con presión (a) $P = 3[\text{MPa}]$, (b) $P = 12[\text{MPa}]$, (c) $P = 20[\text{MPa}]$ y (d) $P = 30[\text{MPa}]$.

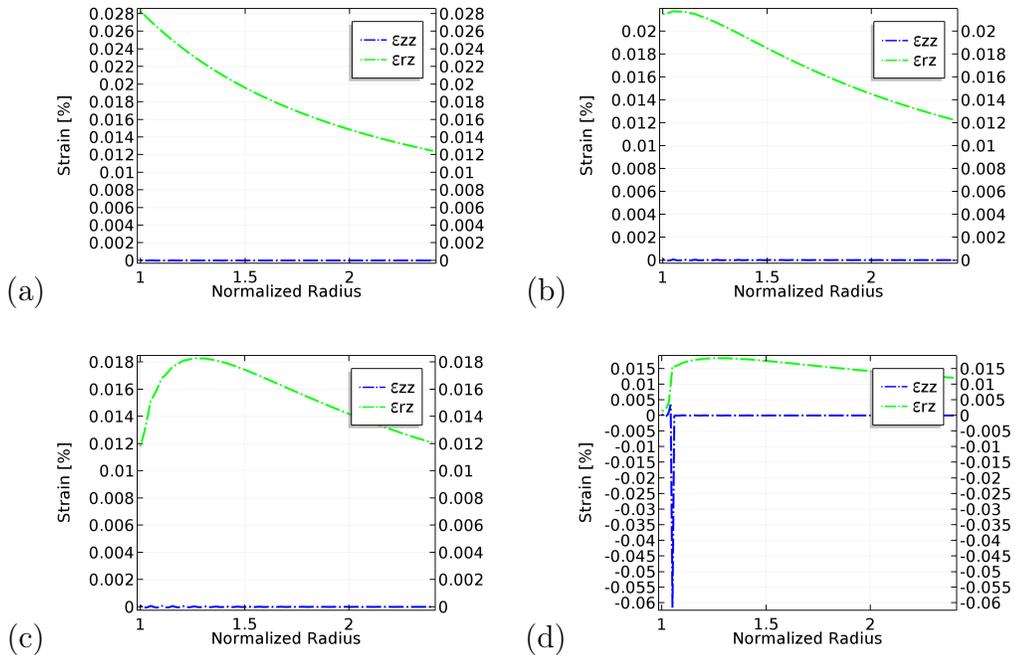


Figura 4.30: Deformación axial (azul) y corte axial (verde) axial en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $\phi_o = -15[\text{kV}]$ con presión (a) $P = 3[\text{MPa}]$, (b) $P = 12[\text{MPa}]$, (c) $P = 20[\text{MPa}]$ y (d) $P = 30[\text{MPa}]$.

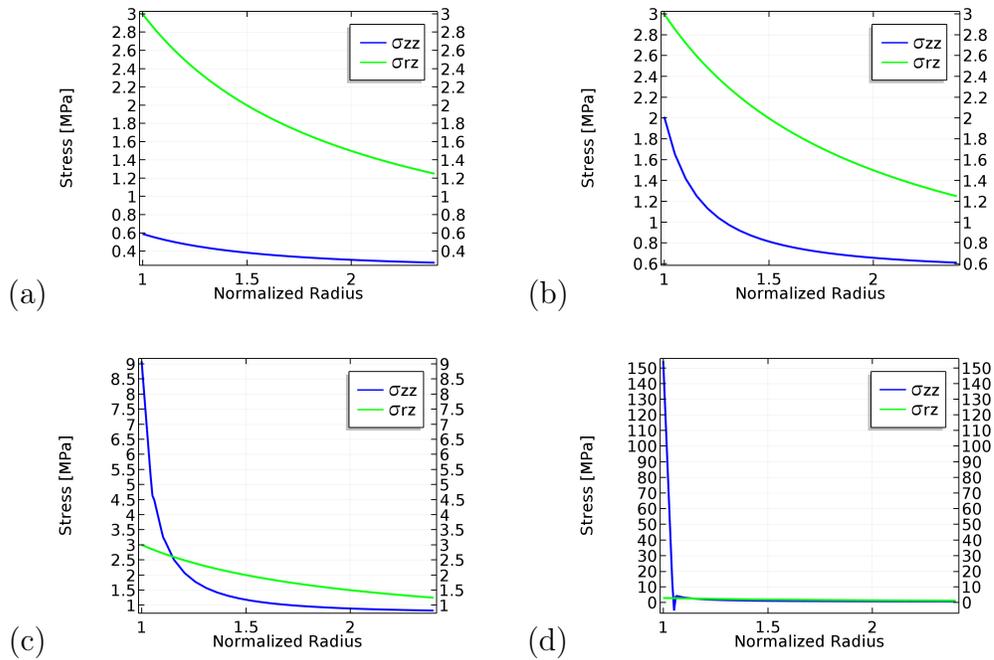


Figura 4.31: Esfuerzo axial (azul) y de corte axial (verde) axial en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5$ [cm] y $r_o = 12$ [cm], con $C = 5$ [$\mu\text{C}/\text{cm}$], $\phi_o = -15$ [kV] con presión (a) $P = 3$ [MPa], (b) $P = 12$ [MPa], (c) $P = 20$ [MPa] y (d) $P = 30$ [MPa].

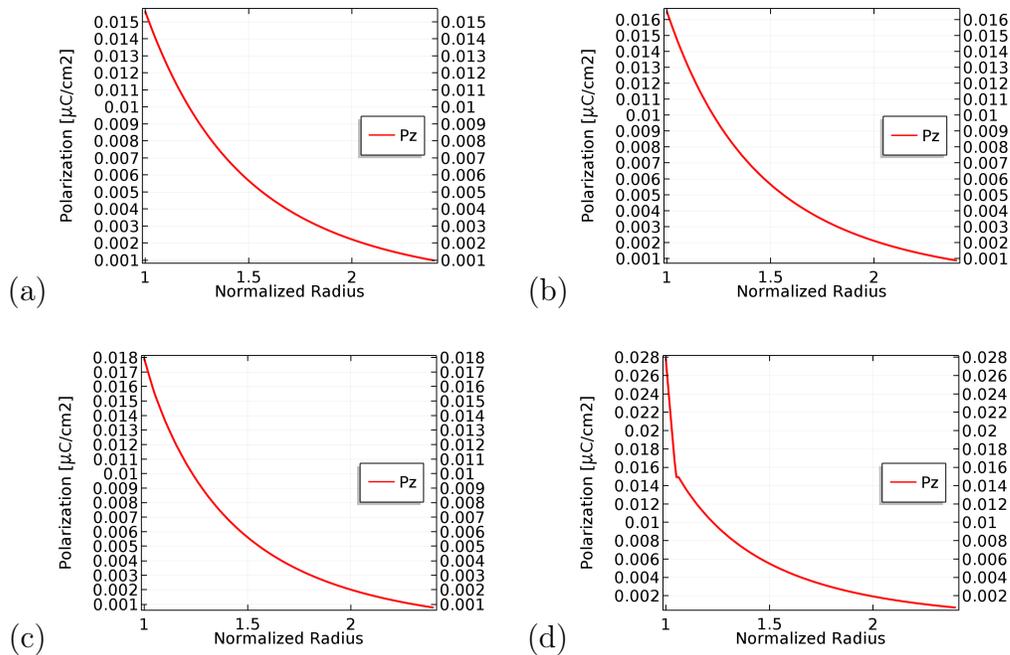


Figura 4.32: Polarización axial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5$ [cm] y $r_o = 12$ [cm], con $C = 5$ [$\mu\text{C}/\text{cm}$], $\phi_o = -15$ [kV] con presión (a) $P = 3$ [MPa], (b) $P = 12$ [MPa], (c) $P = 20$ [MPa] y (d) $P = 30$ [MPa].

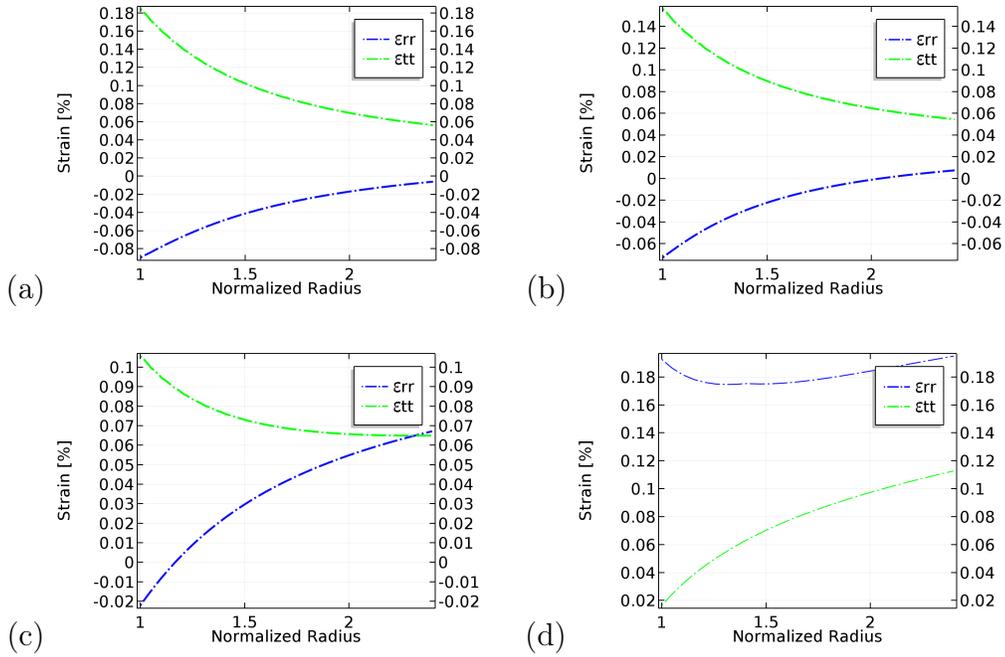


Figura 4.33: Deform. radial (azul) y circunferencial (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 12[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -40[kV]$, (c) $\phi_o = -80[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$.

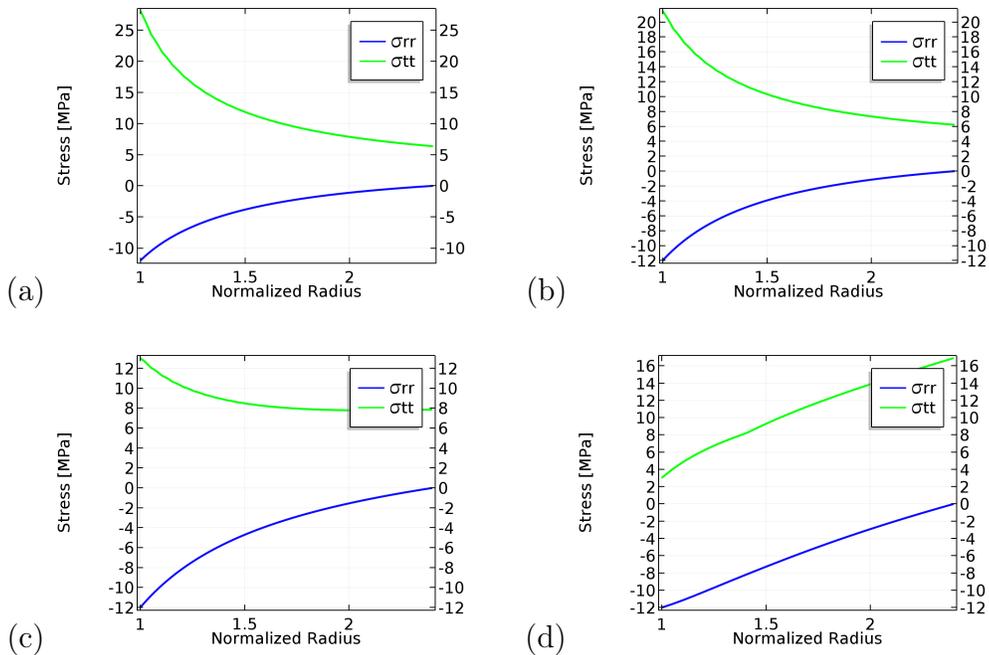


Figura 4.34: Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) vs. el radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 12[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -10[kV]$, (b) $\phi_o = -40[kV]$, (c) $\phi_o = -80[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$.

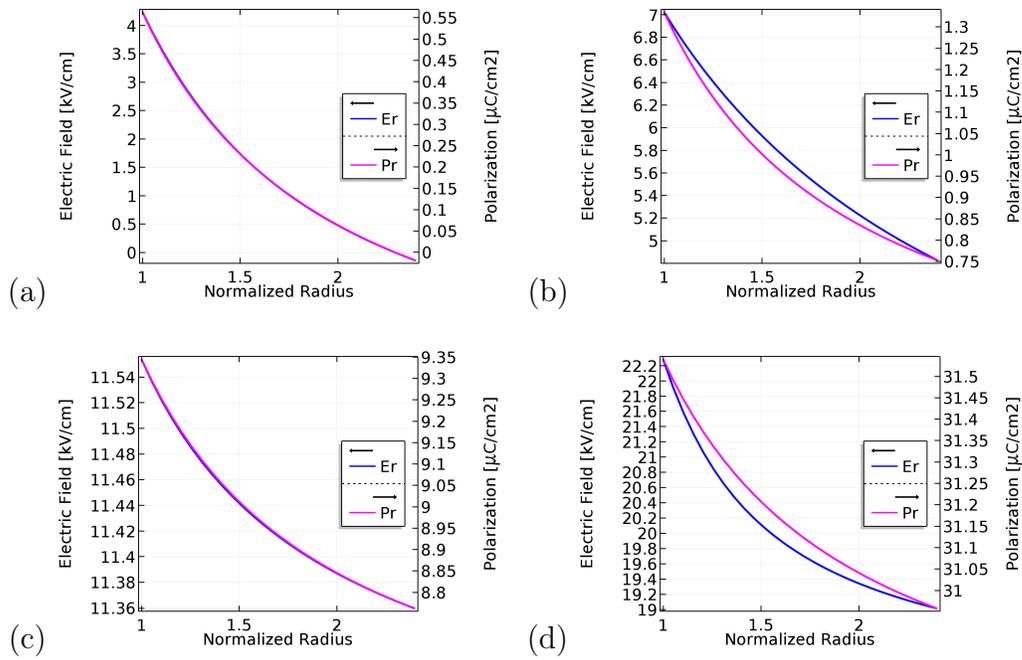


Figura 4.35: \mathbb{E}_r (azul) y \mathbb{P}_r (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 12[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -10[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -40[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -80[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -140[\text{kV}]$.

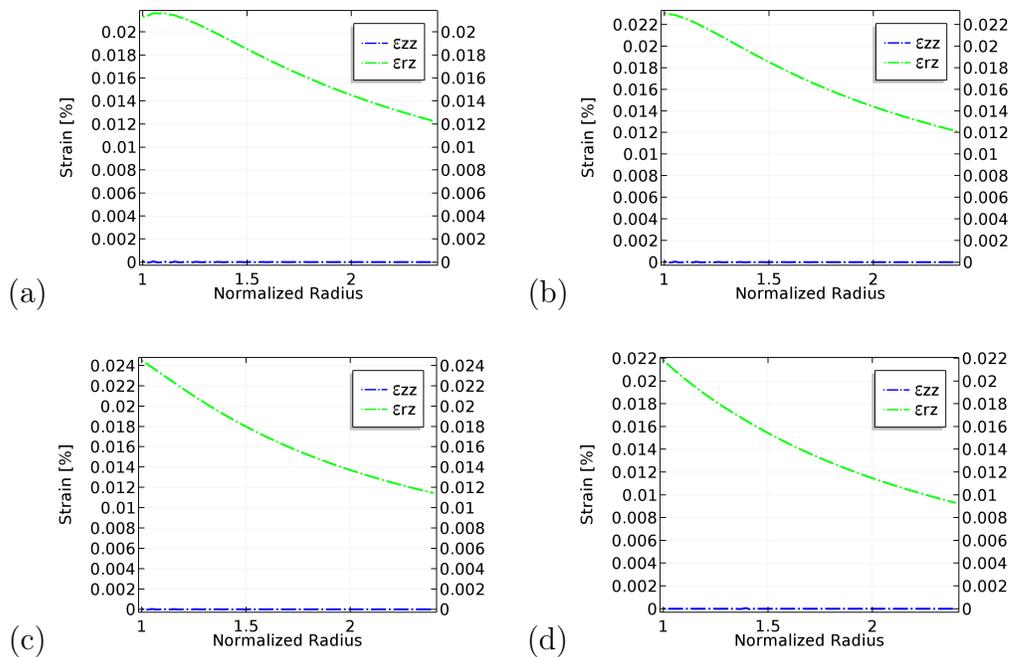


Figura 4.36: Deform. axial (azul) y de corte axial (verde) vs. el radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 12[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -10[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -40[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -80[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -140[\text{kV}]$.

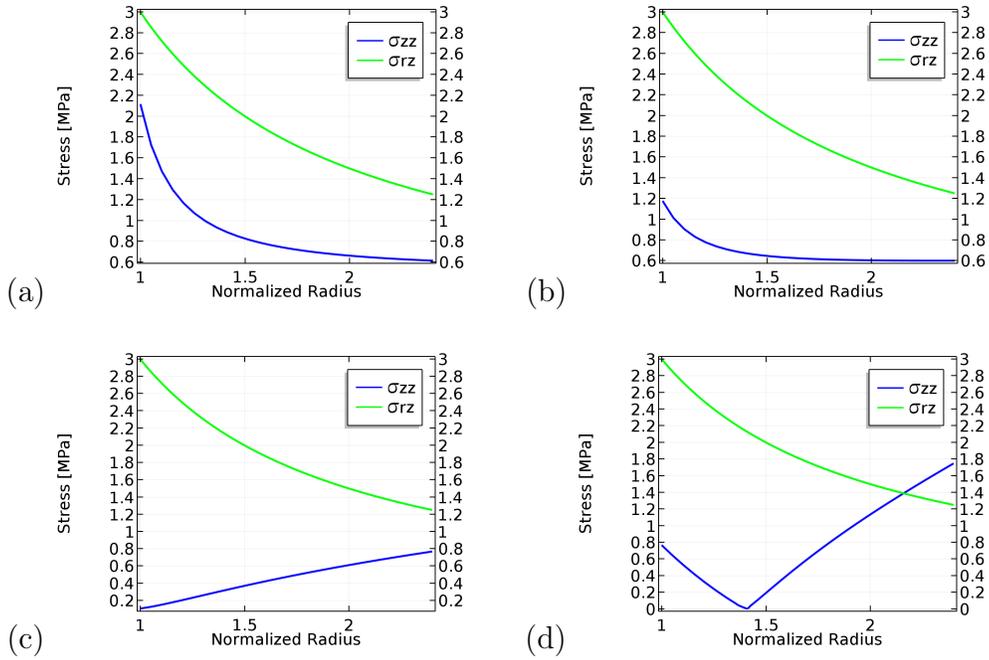


Figura 4.37: Esfuerzo axial (azul) y corte axial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 12[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -10[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -40[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -80[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -140[\text{kV}]$.

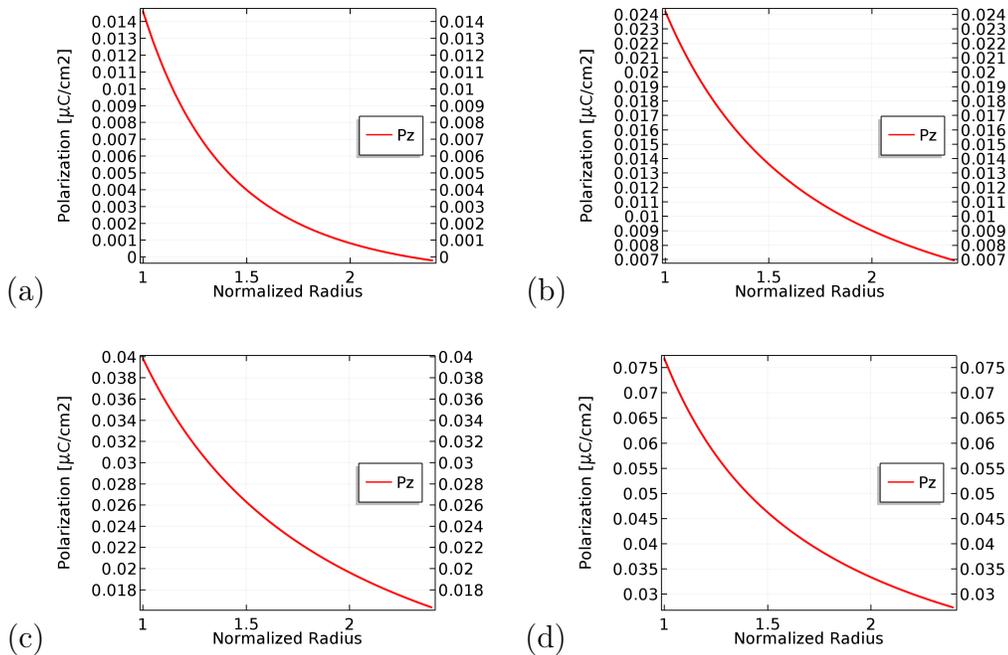


Figura 4.38: Polarización axial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 12[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -10[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -40[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -80[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -140[\text{kV}]$.

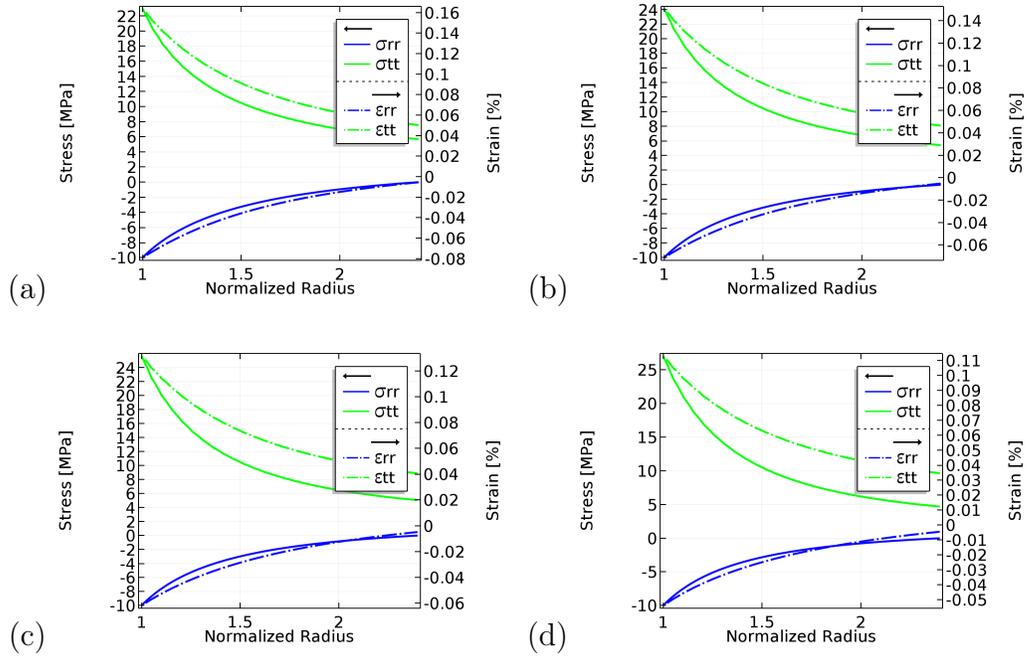


Figura 4.39: *Deform. y esfuerzo radial (azul), Deform. y esfuerzo circurf. (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$.*

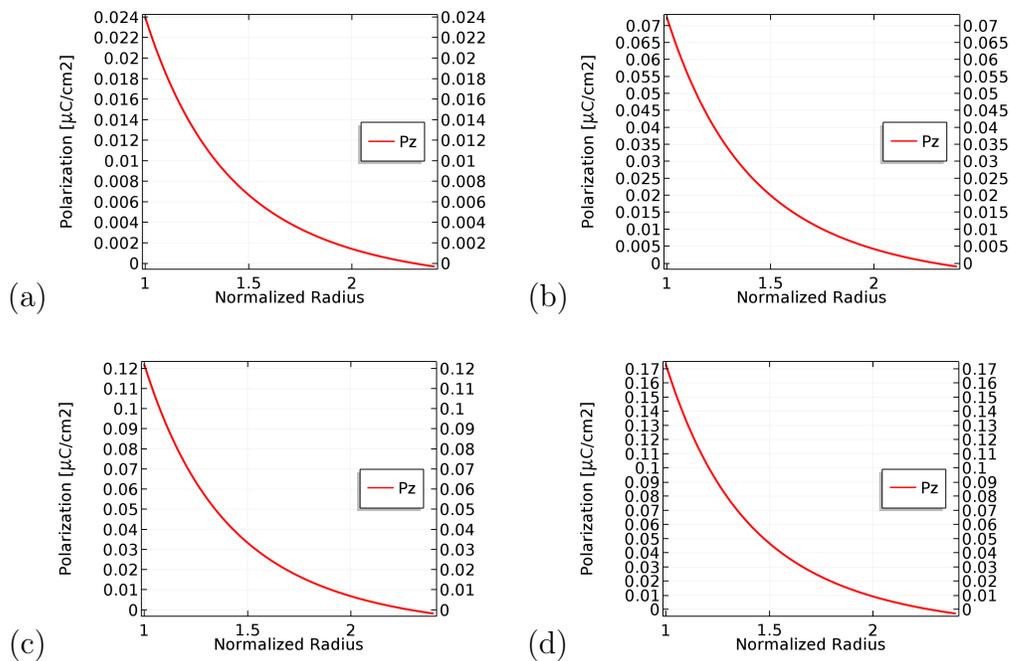


Figura 4.40: *Polarización axial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$.*

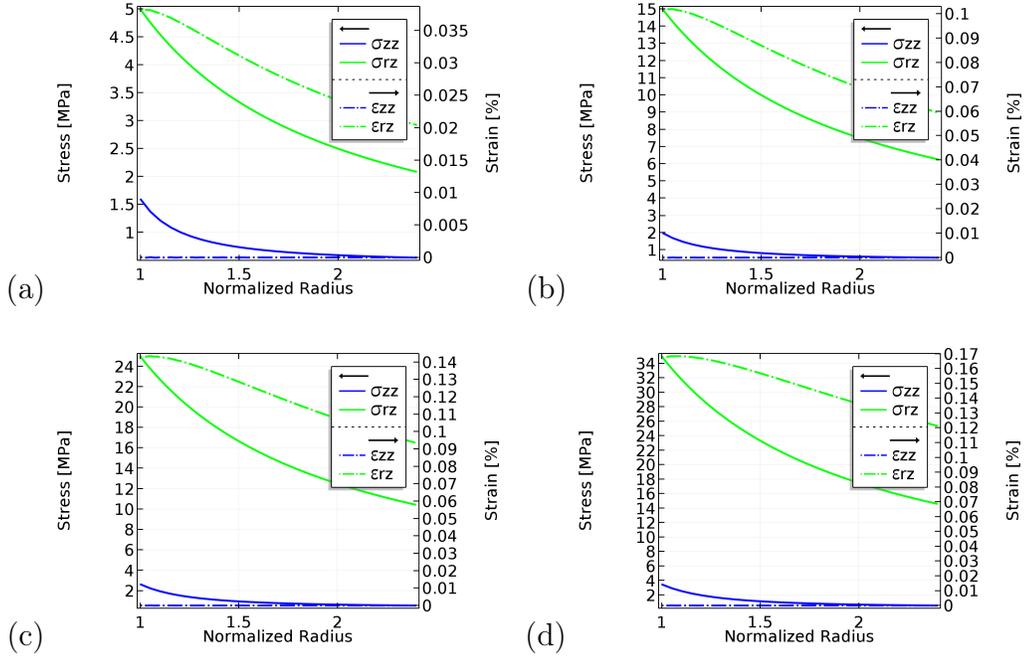


Figura 4.41: *Deform. y esfuerzo axial (azul), deform. y esfuerzo de corte axial (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$.*

Análisis de los resultados

Efectos de la variación de la presión interna P

En los gráficos de las figuras 4.27-4.32, se muestra como se ven afectadas distintas componentes de la deformación, esfuerzo y variables eléctricas (campo eléctrico y polarización) a medida que aumenta la presión interna P del tubo, estando expuesta a un voltaje fijo de $15[kV]$ y a un esfuerzo de corte axial interno $\tau_o = 3[MPa]$.

Al ver las gráficos de las figuras 4.27 y 4.28, el aumento de la presión interna P tiene el mismo efecto en las deformaciones y esfuerzos radiales y circunferenciales observado para el caso del tubo inflado sin la presencia de corte axial τ_o ; a medida que la aumenta a presión, el esfuerzo de compresión radial σ_{rr} aumenta en la misma magnitud en el radio interno, y la tracción circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ lo hace en mayor medida, aumentando drásticamente para radios cercanos al manto interior del tubo. Las deformaciones radiales y circunferenciales obtenidas en la figura 4.27, dejan en evidencia un claro efecto de “strain limiting”, ya que, por una lado la deformación de compresión radial ϵ_{rr} no supera el -0.1% a partir que alcanza a los $12[MPa]$ de presión interna, y por otro lado, la deformación de estiramiento circunferencial no supera el 0.18% que alcanza a la misma presión, a pesar del radical aumento del esfuerzo circunferencial.

En los gráficos de la figura 4.29, se puede ver como tanto el campo eléctrico \mathbb{E}_r , como la polarización \mathbb{P}_r aumentan ligeramente a medida que aumenta de la presión interna P del tubo, a pesar de mantener un potencial eléctrico constante ($\phi_o = 15[kV]$). Cuando la presión

interna es de 3[MPa], el campo eléctrico en la cara interna del tubo es de 4,5[kV/cm] y con una polarización radial de 0,65[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$], valores que, cuando la presión interna llega a 30[MPa], aumentan a 8[kV/cm] para campo eléctrico, y 0,65[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$] para la polarización. Este pequeño aumento de la polarización en comparación con el del campo eléctrico, se debe a que a pequeños campos eléctricos (menores a los 10 [kV/cm]), al material le cuesta polarizarse (ver gráfico de la figura 3.6). No menos importante es el hecho de como el esfuerzo aplicado, puede influir en las magnitudes del campo eléctrico, a pesar de que ambas son variables independientes en el modelo constitutivo de planteado en las ecuaciones (2.35) y (2.36). Esto es un hecho importante, dado a que en la práctica esto es algo que ocurre.

Por su lado, viendo las figuras 4.30 y 4.31, la deformación ε_{zz} el esfuerzo axial σ_{zz} se comportan también muy similar a lo observado en el caso del tubo inflado en ausencia de corte; la deformación axial se mantiene nula a cualquier presión (figura 4.30), tal como el planteamiento lo indica, y el esfuerzo axial de tracción aumenta a medida que en drásticamente cerca de la cara interna del tubo (figura 4.31), con tal de evitar que el material se estire longitudinalmente. Tal como se dedujo del problema en ausencia de corte, se observa que el esfuerzo axial σ_{zz} reacciona de forma muy similar al esfuerzo circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$, tanto a los cambios de presión como a los del potencial eléctrico (como también se verá en este problema). Esto ocurre debido a que ambos esfuerzo longitudinales son ortogonales tanto al campo eléctrico aplicado \mathbb{E}_r y al esfuerzo radial σ_{rr} generado por P . Es similar a lo observado en el caso homogéneo de la lámina en tracción, pero no idéntico, dado que que en este caso $\varepsilon_{zz} \neq \varepsilon_{\theta\theta}$, ya que la geometría del problema es distinta.

También en las figuras 4.30 y 4.31, se puede apreciar como las variables mecánicas de corte del problema, es decir, la deformación de corte axial ε_{rz} (figura 4.30) y el esfuerzo de corte telescópico σ_{rz} (figura 4.31), se ven afectadas por una presión creciente en el material. El esfuerzo de corte σ_{rz} , como es de esperar, se mantiene invariante, debido a que su expresión analítica (4.43), está solo en función del radio r y del corte interno del tubo τ_o . Más interesante es la variación de la deformación de corte axial, la cual disminuye a radios cercanos al manto interno a medida que la presión P aumenta (de 0.028 % para una presión de 3[MPa] a 0.012 % para $P = 20$ [MPa]). Específicamente a partir de una presión interna de 20[MPa] puede verse como la deformación de corte alcanza un máximo de 0.018 % a $r/r_i = 1,25$.

Por último, en la figura 4.32, se aprecia la existencia de una muy pequeña polarización axial \mathbb{P}_z , la cual solo es provocada por la existencia del esfuerzo de corte axial en el tubo, dado a que en el caso anterior, esta componente de la polarización es inexistente. Esto lleva a deducir, que la aparición de una componente de la polarización ortogonal al campo eléctrico que lo crea, es solo posible en la presencia de algún esfuerzo de corte en la geometría. Al aumentar la presión interna de 3[MPa] a 30[MPa], la polarización axial \mathbb{P}_z aumenta ligeramente de 0,015[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$] a 0,028[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$], debido únicamente al hecho de que el campo eléctrico también crece ligeramente, dado a la ecuación (4.49).

Efectos de la variación del voltaje aplicado ϕ_o

Los gráficos de las figuras 4.33-4.38 muestran como varían las distintas componentes de la deformación, esfuerzo y variables eléctricas (campo eléctrico y polarización) a medida se aumenta el voltaje aplicado a directamente a los mantos interno y externo del tubo, estando inflado a una presión interna de 12[MPa] y a un esfuerzo de corte axial interno $\tau_o = 3$ [MPa].

Tal como ocurre en el caso sin corte telescópico, al aumentar el potencial eléctrico aplicado al manto interno y externo del tubo de 10[kV] a 150[kV], puede verse (en la figura 4.35) como el campo eléctrico \mathbb{E}_r aumenta como consecuencia directa, de 4,5[kV/cm] a 22,2[kV/cm] en el radio interno del tubo. Así como aumenta el campo eléctrico \mathbb{E}_r , también lo hace la polarización, la cual llega a saturarse a los 31,5[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$], cuando el campo eléctrico sobrepasa los 19[kV/cm] (ver gráfico (d) de la figura 4.35), a un potencial eléctrico de 140[kV].

Debido a este aumento en el campo eléctrico, en la figura 4.33, la deformación radial ε_{rr} pasa de ser de compresión ($-0,08\%$ a $\phi_o = 10[\text{kV}]$), a una de tracción ($0,19\%$ a $\phi_o = 140[\text{kV}]$), dado a que esta deformación es paralela a dirección de aumento del campo eléctrico, tal como ha ocurrido en los casos anteriores. Por su parte, la deformación de tracción circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ disminuye de 0,18% para un potencial eléctrico $\phi_o = 10[\text{kV}]$, a 0,02% a un voltaje $\phi_o = 140[\text{kV}]$. Esto se debe a que esta deformación es ortogonal al aumento del campo eléctrico, al igual como ha ocurrido tanto en los casos homogéneos, como en los no homogéneos ya analizados. De hecho en el gráfico (d) de la figura 4.34, la deformación circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ cercana al manto interior del tubo, disminuye por debajo de la que se alcanza en el borde externo de 0,12%, donde el campo eléctrico es menor.

En la figura 4.34, se puede apreciar como el esfuerzo radial de compresión σ_{rr} se mantiene con sus respectivos valores impuestos a pesar del creciente voltaje aplicado, pero disminuye la concavidad con la que llega desde los $-12[\text{MPa}]$ en el borde interno de tubo, a $0[\text{MPa}]$ en el externo. El esfuerzo de tracción circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ en cambio, disminuye en el borde interno del tubo (de 28[MPa] para $\phi_o = 10[\text{kV}]$, a 3[MPa] para $\phi_o = 140[\text{kV}]$) y aumenta en el externo (de 6[MPa] para $\phi_o = 10[\text{kV}]$, a 17,5[MPa] para $\phi_o = 140[\text{kV}]$). Se puede decir en otras palabras, que el aumento del voltaje (y por ende del campo eléctrico), que “traslada” tanto el esfuerzo de tracción circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$, como la deformación de estiramiento circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ hacia el exterior del tubo.

De las figuras 4.36 y 4.37, se observa que la deformación axial ε_{zz} se mantiene en cero como se le impone por enunciado del problema, mientras que el esfuerzo de tracción axial σ_{zz} , disminuye de 2,1[MPa] a 0,2[MPa] en la cara interna del tubo, al crecer el potencial eléctrico de 10[kV] a 80[kV]. Sin embargo, aumenta sus valores a radios cercanos al borde exterior del tubo (de 0,6[MPa] para $\phi_o = 10[\text{kV}]$, a 1,8[MPa] para $\phi_o = 140[\text{kV}]$). Esto efecto que tiene el incremento del potencial eléctrico sobre el esfuerzo axial es bastante similar al que tiene sobre el esfuerzo circunferencial, que es el de “trasladar” la magnitud de los esfuerzos de tracción ortogonales al campo eléctrico hacia afuera del tubo.

En la figura 4.36 se ve también como a medida que aumenta el potencial eléctrico aplicado, la deformación de corte axial ε_{rz} aumenta ligeramente en $r/r_i = 1$, desde 0,02% a un 0,024% para potenciales eléctricos de 10[kV] a 80[kV] respectivamente, no obstante, manteniéndose igual en el borde exterior del tubo a 0,012%. Esta tendencia cambia sin embargo, cuando el potencial eléctrico llega a los 150[kV] se ve que tanto en el borde externo como en el interno, la deformación de corte disminuye ligeramente. Se desconoce la razón de este cambio de tendencia. Por su lado, el esfuerzo de corte axial σ_{rz} en la figura 4.37 no cambia, debido su expresión analítica está solo en función del radio r y del corte axial interno τ_o .

Por último, de la figura 4.38, se aprecia que la polarización axial \mathbb{P}_z aumenta a medida que crece el potencial eléctrico aplicado, de 0,015[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$] para $\phi_o = 10[\text{kV}]$ a 0,075[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$]

para $\phi_o = 140[kV]$ para el borde interno del tubo. Este aumento es entendible, ya que la polarización axial \mathbb{P}_z es directamente proporcional el campo eléctrico aplicado.

Efectos de la variación del corte axial interno aplicado τ_o

En los gráficos de las figuras 4.39-4.41, se muestra como se ven afectadas distintas componentes de la deformación, esfuerzo y polarización axial \mathbb{P}_z a medida que aumenta la presión interna P del tubo, estando expuesta a un voltaje fijo de 20[kV] y a una presión interna $P = 10[MPa]$. Se debe notar que los valores a los que se varia τ_o son extremos para este tipo de materiales, por lo que solo se evalúan para ver como responden las otras variables en función del corte telescópico.

En la figura 4.39, se puede ver como el aumento del corte τ_o no genera prácticamente ningún cambio apreciable en el esfuerzo de compresión radial σ_{rr} , y genera una leve disminución de la deformación de compresión radial ε_{rr} (de $-0,08\%$ para $\tau_o = 5[MPa]$ a $-0,05\%$ para $\tau_o = 35[MPa]$). Para el caso del esfuerzo de tracción circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$, se contempla un aumento desde los 23[MPa] a los 27[MPa] para el borde interno del tubo, en contraste con la ligera disminución de la deformación circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ de $0,16\%$ a $0,11\%$ para el radio interno del tubo.

Por su lado, la polarización axial \mathbb{P}_z vista en la figura 4.40 sufre un claro aumento en su magnitud (la cual sigue siendo bastante pequeña incluso a $\tau_o = 35[MPa]$) desde los $0,024[\mu C/cm^2]$ para $\tau_o = 5[MPa]$ hasta $0,17[\mu C/cm^2]$ para $\tau_o = 35[MPa]$. Esto era claro, considerando que esta componente de la polarización es directamente proporcional al esfuerzo de corte σ_{rz} , el cual, debido a su forma analítica, también aumenta de forma proporcional al esfuerzo de corte interno τ_o , tal como se puede observar en la figura 3.41.

Finalmente, en la figura 4.41 permite ver como el esfuerzo axial σ_{zz} aumenta ligeramente a medida que crece τ_o , desde $1,5[MPa]$ a $3,9[MPa]$. esto se debe a que al crecer el esfuerzo de corte σ_{rz} el valor de la invariante I_1 , lo que tiene a hacer negativa a la deformación axial ε_{zz} , y por otro lado, la invariante I_2 también aumenta, lo que disminuye la contribución de σ_{zz} para mantener a la deformación axial fija en cero (ver ecuación (4.48)₃). Es por esto que σ_{zz} debe aumentar para evitar que el tubo se estire longitudinalmente.

4.2.4. Inflado y extensión de tubo cilíndrico y bajo campo eléctrico radial, con corte circunferencial

Se tiene un tubo de las mismas geometrías anteriores, bajo la misma presión P , bajo una extensión axial lineal y el mismo campo eléctrico radial (4.50) para los casos anteriores, pero esta vez considerando un esfuerzo de corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$ debido a una torsión τ_o en el manto interior (ver figura (4.42)), con lo que el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(r)$ queda como:

$$\boldsymbol{\sigma}(r) = \sigma_{rr}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{zz}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \sigma_{r\theta}(r)(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) \quad (4.50)$$

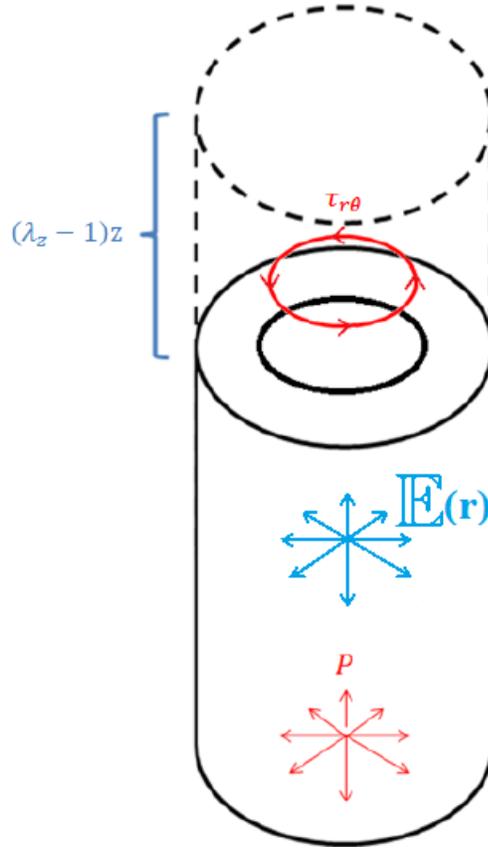


Figura 4.42: Tubo de radio interno r_i y externo r_o inflado con presión P , con extensión axial λ y corte de azimutal.

Por su lado, al considerar un corte circunferencial, se debe tener en cuenta la existencia del desplazamiento en la dirección de \mathbf{e}_θ , por lo que el desplazamiento \mathbf{u} queda como:

$$\mathbf{u}(r, z) = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + (\lambda - 1)z\mathbf{e}_z, \quad (4.51)$$

por lo que utilizando las ecuaciones de relación deformación-desplazamiento (2.5) en (4.51), se obtiene que las componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ quedan descritas como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = \lambda - 1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad (4.52)$$

Usando las ecuaciones de equilibrio en coordenadas cilíndricas (2.11) con la expresión general del esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ (4.50) y la forma radial del campo eléctrico, se tiene

$$-\frac{d\mathbb{E}_r}{dr}\mathbb{P}_r = \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \quad -\frac{\mathbb{E}_r\mathbb{P}_\theta}{r} = \frac{d\sigma_{r\theta}}{dr}r + 2\sigma_{r\theta}. \quad (4.53)$$

De (4.53)₁ se puede despejar $\sigma_{\theta\theta}$, y reordenando algunos términos, se llega a

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{d(\sigma_{rr}r)}{dr} + r\frac{d\mathbb{E}_r}{dr}\mathbb{P}_r. \quad (4.54)$$

Asimismo, usando la ecuación de Maxwell de la divergencia del desplazamiento eléctrico, se tiene que

$$\frac{1}{r}\frac{d[r(\mathbb{P}_r + \varepsilon_o\mathbb{E}_r)]}{dr} = 0 \quad \implies \quad \mathbb{P}_r = \frac{C}{r} - \varepsilon_o\mathbb{E}_r, \quad (4.55)$$

donde C, al igual que en casos anteriores, se puede asignar algún valor para obtener resultados en COMSOL. Reemplazando (4.55) en (4.54), se obtiene finalmente la expresión de $\sigma_{\theta\theta}$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{d(\sigma_{rr}r)}{dr} + r\frac{d\mathbb{E}_r}{dr}\left(\frac{C}{r} - \varepsilon_o\mathbb{E}_r\right). \quad (4.56)$$

Observar que, a diferencia del problema anterior, donde el esfuerzo de corte era en dirección axial, en este caso el corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$ no se puede expresar analíticamente como una función explícita de la variable dimensional r , debido a que en (4.53)₂ el lado derecho de la ecuación tiene como término a una componente circunferencial de la polarización, la cual no es nula. Debido a esto, será necesario relacionar esta ecuación con la expresión para la polarización circunferencial \mathbb{P}_θ que resulte de la ecuación constitutiva (2.36).

Las invariantes relevantes de (2.34) para este caso quedan como:

$$I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}, \quad I_2 = \frac{\sigma_{rr}^2}{2} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^2}{2} + \frac{\sigma_{zz}^2}{2} + \sigma_{r\theta}^2, \quad I_4 = \mathbb{E}_r^2. \quad (4.57)$$

En base a estos cambios, las expresiones constitutivas para la deformación (2.35), resultarían en las mismas a las llegadas para el caso sin corte (4.36), solo con la adición de las componentes de deformación angular

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \alpha (g_0 + g_1\mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma\sigma_{rr}}{\sqrt{1 + 2\ell I_2}} \right] + \frac{\epsilon_o\zeta_1}{2}\mathbb{E}_r^2, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \alpha (g_0 + g_1\mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma\sigma_{\theta\theta}}{\sqrt{1 + 2\ell I_2}} \right], \\ \varepsilon_{zz} &= \alpha (g_0 + g_1\mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma\sigma_{zz}}{\sqrt{1 + 2\ell I_2}} \right], \\ \varepsilon_{r\theta} &= \alpha (g_0 + g_1\mathbb{E}_r^2) \frac{\gamma\sigma_{r\theta}}{\sqrt{1 + 2\ell I_2}}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Para la polarización, se tiene que la componente radial resulta tener la misma expresión a la del caso sin corte (4.37), sin embargo con distinto valor, ya que I_2 es distinta. Además,

debido a la existencia de corte circunferencial, aparece una componente de la polarización en esta misma dirección, tal que

$$\mathbb{P}_r = m_3 + \mathbb{E}_r \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_r - m_2}{m_1} \right) \frac{m_0}{\mathbb{E}_r} + \zeta_0 + \epsilon_o \zeta_1 \sigma_{rr} \right\},$$

$$\mathbb{P}_\theta = \epsilon_o \zeta_1 \sigma_{r\theta} \mathbb{E}_r.$$
(4.59)

Al reemplazar la expresión para la polarización circunferencial (4.59)₂ en (4.53)₂, y trabajando un poco la ecuación resultante, se obtiene

$$- \epsilon_o \zeta_1 \sigma_{r\theta} \mathbb{E}_r^2 = \frac{d(\sigma_{r\theta} r^2)}{dr}.$$
(4.60)

Implementación en COMSOL

Para este problema, se hace necesario agregar una variable independiente más, además de las utilizadas en los problemas anteriores, siendo esta el esfuerzo de corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$. Es así como se pasa a tener cuatro variables independientes; el esfuerzo radial σ_{rr} , el campo eléctrico \mathbb{E}_r , el esfuerzo axial σ_{zz} y el corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$, todas en función del radio r .

Para determinar el esfuerzo radial σ_{rr} , al igual que en todos problemas anteriores, las ecuaciones de la relación deformación-desplazamiento (4.52)₁ y (4.52)₂, de las cuales, al igualar la derivada del desplazamiento radial u_r con respecto al radio r , se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\varepsilon_{rr} = \frac{d(\varepsilon_{\theta\theta} r)}{dr},$$

donde las expresiones explícitas para la deformación radial ε_{rr} y la circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ están descritas en (4.58)₁ y (4.58)₂ respectivamente. Con esto la ED queda definida en función solo de las variables independientes ya mencionadas. De esta forma, se asocia a las entradas COMSOL, Γ y f , como

$$\Gamma = \varepsilon_{\theta\theta} r \qquad f = \varepsilon_{rr}.$$

Para los valores de frontera del esfuerzo radial, se ocupan dos condiciones de borde de Dirichlet:

$$\sigma_{rr}(r_i) = -P, \qquad \sigma_{rr}(r_o) = 0,$$

dado que la presión interna P genera un esfuerzo de compresión en el manto interno del tubo, y se supone que en el exterior no existe presión.

Para el campo eléctrico se supone la existencia de un potencial eléctrico ϕ , el cual posee la interpretación de potencial eléctrico clásico medido en [kV] y que se define como:

$$\mathbb{E}_r(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr},$$

donde el signo negativo se adiciona para coincidir con la definición clásica del potencial eléctrico como el negativo de la integral de camino del campo eléctrico. Para llegar a la

segunda ecuación diferencial del problema, se igualan ambas expresiones para la polarización radial \mathbb{P}_r (4.55) y (4.59)₁, con lo que se obtiene

$$\frac{C}{r} = \mathbb{E}_r \left\{ 2\alpha g_1 \left[\int_0^{I_1} \frac{1}{1 + \beta(\omega^2)^b} d\omega - I_1 + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2} \right] + \zeta_0 + \epsilon_o \zeta_1 \sigma_{rr} + \epsilon_o \right\} + m_3 + m_0 \tanh \left(\frac{\mathbb{E}_r - m_2}{m_1} \right).$$

Al derivar ambos lados, se obtiene la ecuación diferencial unidimensional estática de para COMSOL, donde el lado derecho de la ecuación iguala a Γ y f queda igual a la derivada del lado izquierdo, es decir

$$f = -\frac{C}{r^2}.$$

Al potencial eléctrico ϕ se le asocian dos condiciones de borde de Dirichlet de la forma:

$$\phi(r_i) = 0, \quad \phi(r_o) = \phi_o,$$

donde ϕ_o es un valor de potencial eléctrico en la cara externa del material en [kV] el cual se utiliza como parámetro para obtener distintos campos eléctricos. Para que las condiciones de borde eléctricas anteriores tengan sentido, debe suponerse que los electrodos, que generan el voltaje aplicado al tubo, están completamente adheridos al manto exterior e interior, para así evitar la utilización de condiciones que impliquen el cambio del vector de desplazamiento eléctrico al pasar de un medio a otro (donde la susceptibilidad eléctrica varía).

Para el esfuerzo axial σ_{zz} también se utiliza un potencial auxiliar (carente de sentido físico relevante), con el fin de dejar su respectiva ecuación diferencial como de segundo orden. Este potencial supone de la forma

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{d\Omega(r)}{dr},$$

con lo que se asegura que la ED resultante a continuación, termine siendo de segundo orden. Para llegar a esta ecuación, se iguala la definición de la deformación axial ε_{zz} obtenida a partir de las ecuaciones de relación deformación-desplazamiento (4.52), a la expresión explícita obtenida desde las ecuaciones constitutivas (4.58)₃, con lo que se llega a

$$0 = \alpha (g_0 + g_1 \mathbb{E}_r^2) \left[\frac{1}{1 + \beta I_1^{2b}} - 1 + \frac{\gamma \sigma_{zz}}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right].$$

Derivando a ambos lados, obtenemos la tercera ED del problema, donde el lado derecho puede designarse como Γ (por lo que sería igual a deformación axial ε_{zz}), y f quedaría igual a 0. En cuanto a las condiciones de borde de la ecuación para el potencial Ω , se designa una de Dirichlet para la cara interna del tubo igual a cero, y una de Neumann para el manto exterior del tubo, tal que

$$\Omega(r_i) = 0, \quad \Gamma(r_o) = \varepsilon_{zz} = 0,$$

con lo que queda completamente definida la tercera ecuación necesaria para la resolución del problema.

Por último, para la determinación del esfuerzo de corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$, se deben utilizar la expresión obtenida en (4.60). Al pasar sumando lo de al lado izquierdo de la igualdad, hacia el derecho se obtiene

$$0 = \frac{d(\sigma_{r\theta}r)}{dr} + \epsilon_o\zeta_1\sigma_{r\theta}\mathbb{E}_r^2.$$

Al derivar a ambos lados, se obtiene la cuarta y última ED del problema, donde las entradas de COMSOL, Γ y f , quedan como

$$\Gamma = \frac{d(\sigma_{r\theta}r)}{dr} + \epsilon_o\zeta_1\sigma_{r\theta}\mathbb{E}_r^2, \quad f = 0.$$

Notar que la ED diferencial resultante ya es de segundo orden, por lo que la utilización de un potencial auxiliar no es necesaria. En cuanto a las ecuaciones de borde del problema, se usan dos condiciones de borde de Dirichlet, tales que

$$\sigma_{r\theta}(r_i) = \tau_o, \quad \sigma_{r\theta}(r_o) = 0,$$

donde τ_o es un esfuerzo de corte circunferencial conocido, el cual se usa como parámetro de evaluación en la sección de resultados.

Finalmente, para la evaluación de los resultados, se usan las siguientes parámetros geométricos y eléctricos fijos:

$$r_i = 5[cm], \quad r_o = 12[cm], \quad C = 1[\mu C].$$

Una excepción ocurre en los tres últimos gráficos, donde se usa $C = 5[\mu C/cm]$, con el fin de comparar el efecto del aumento de τ_o con el problema anterior en igualdad de condiciones.

Resultados del Problema

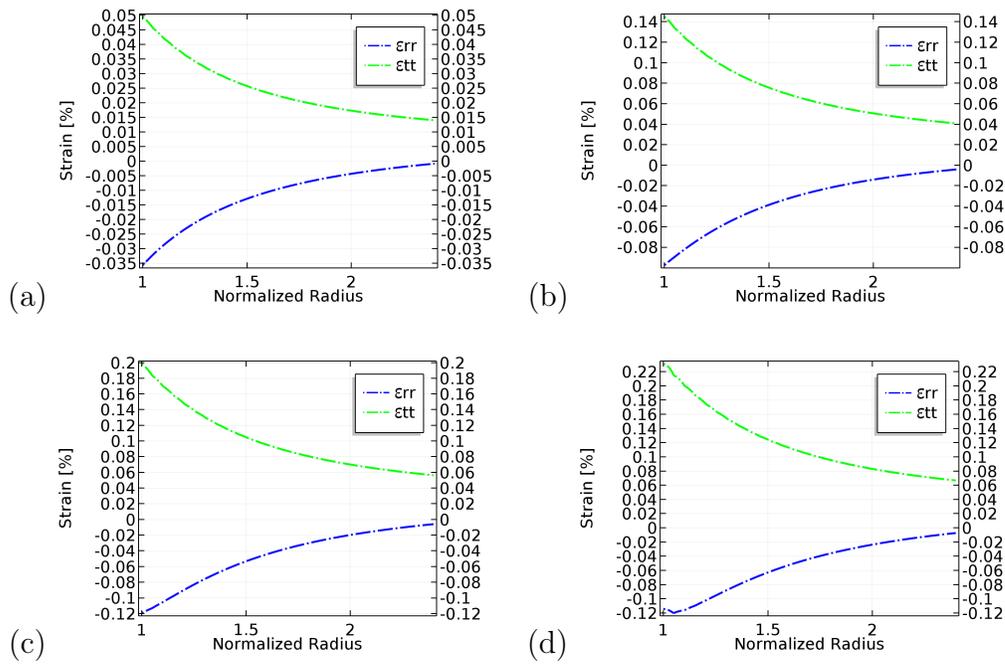


Figura 4.43: Deformación radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5\text{[cm]}$ y $r_o = 12\text{[cm]}$, con $C = 1\text{[}\mu\text{C/cm]}$, $\phi_o = -20\text{[kV]}$ con presión (a) $P = 4\text{[MPa]}$, (b) $P = 12\text{[MPa]}$, (c) $P = 18\text{[MPa]}$ y (d) $P = 24\text{[MPa]}$.

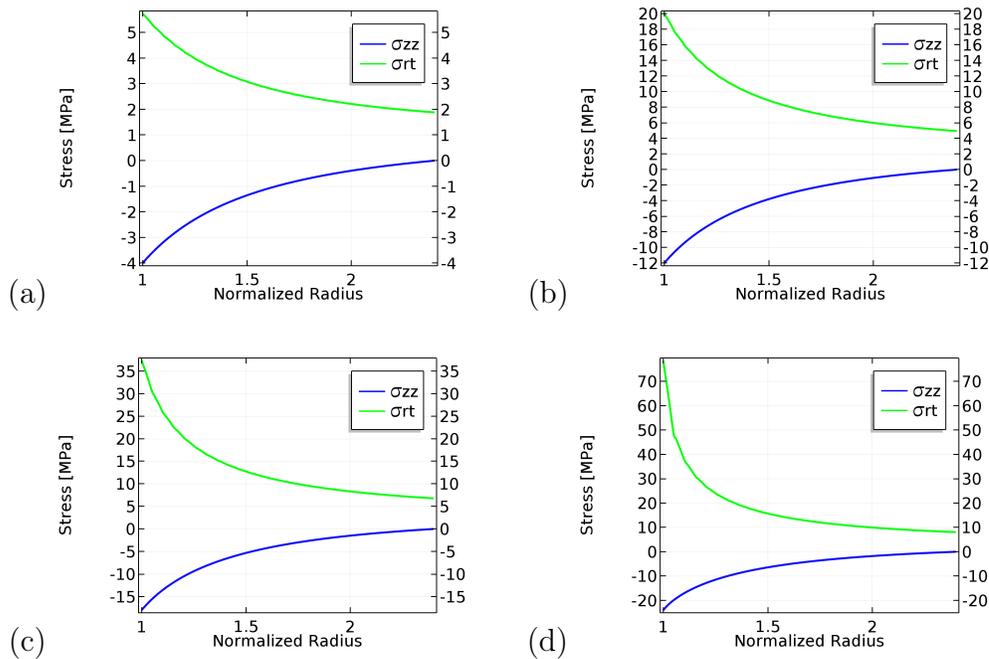


Figura 4.44: Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5\text{[cm]}$ y $r_o = 12\text{[cm]}$, con $C = 1\text{[}\mu\text{C/cm]}$, $\phi_o = -20\text{[kV]}$ con presión (a) $P = 4\text{[MPa]}$, (b) $P = 12\text{[MPa]}$, (c) $P = 18\text{[MPa]}$ y (d) $P = 24\text{[MPa]}$.

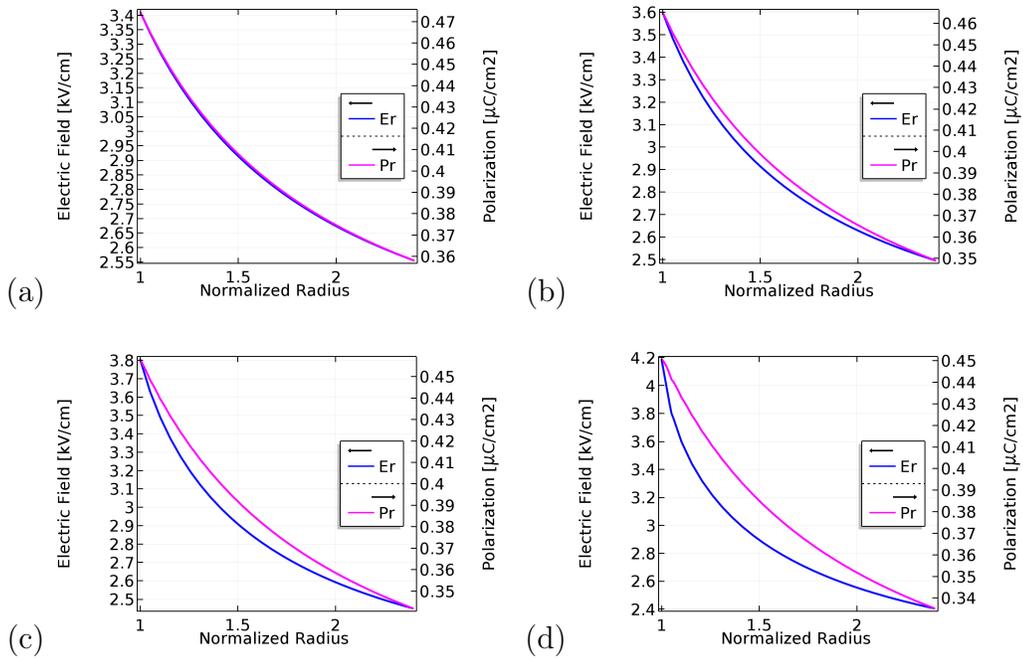


Figura 4.45: Campo eléctrico (azul) y polarización radial (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 1[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $\phi_o = -20[\text{kV}]$ con presión (a) $P = 4[\text{MPa}]$, (b) $P = 12[\text{MPa}]$, (c) $P = 18[\text{MPa}]$ y (d) $P = 24[\text{MPa}]$.

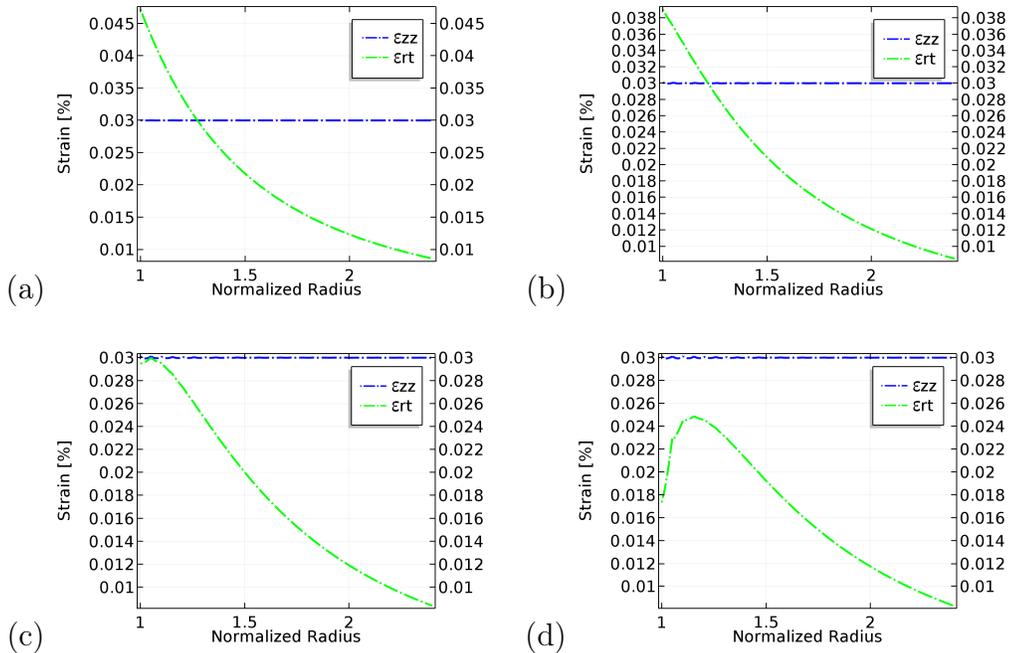


Figura 4.46: Deform. axial (azul) y de corte circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 1[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $\phi_o = -20[\text{kV}]$ con presión (a) $P = 4[\text{MPa}]$, (b) $P = 12[\text{MPa}]$, (c) $P = 18[\text{MPa}]$ y (d) $P = 24[\text{MPa}]$.

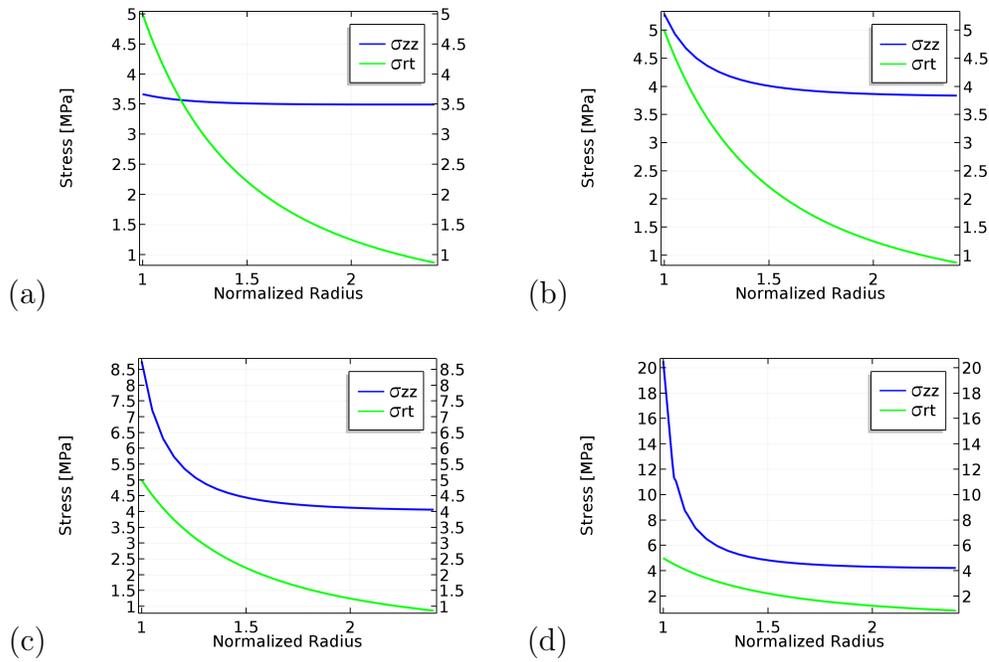


Figura 4.47: Esfuerzo axial (azul) y de corte circunfer. (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $\phi_o = -20[kV]$ con presión (a) $P = 4[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 18[MPa]$ y (d) $P = 24[MPa]$.

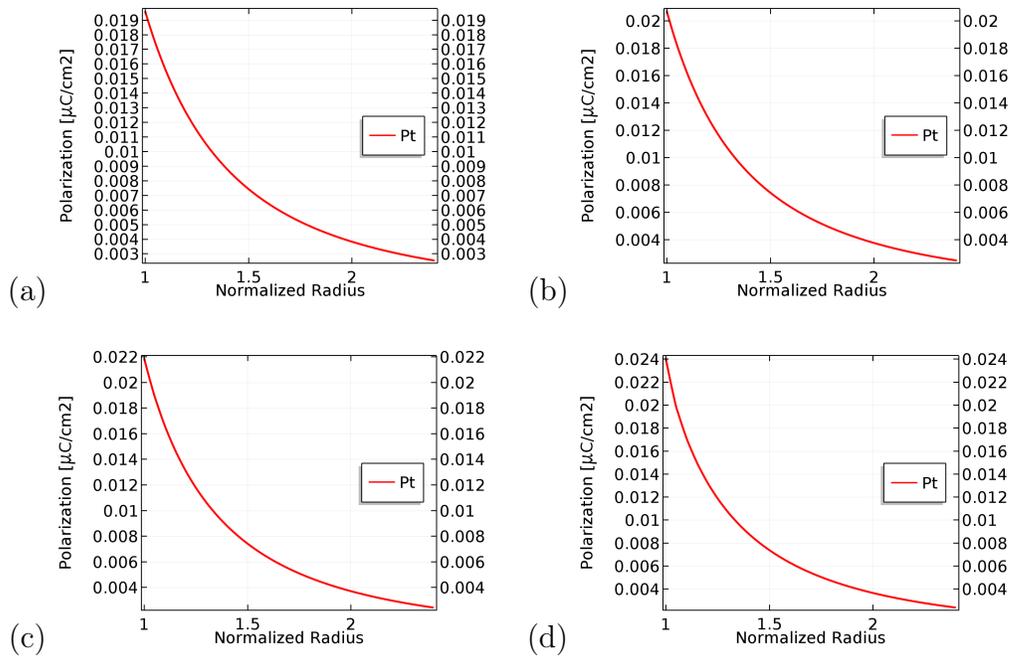


Figura 4.48: Polarización circunferencial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para cáscara de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $\phi_o = -20[kV]$ con presión (a) $P = 4[MPa]$, (b) $P = 12[MPa]$, (c) $P = 18[MPa]$ y (d) $P = 24[MPa]$.

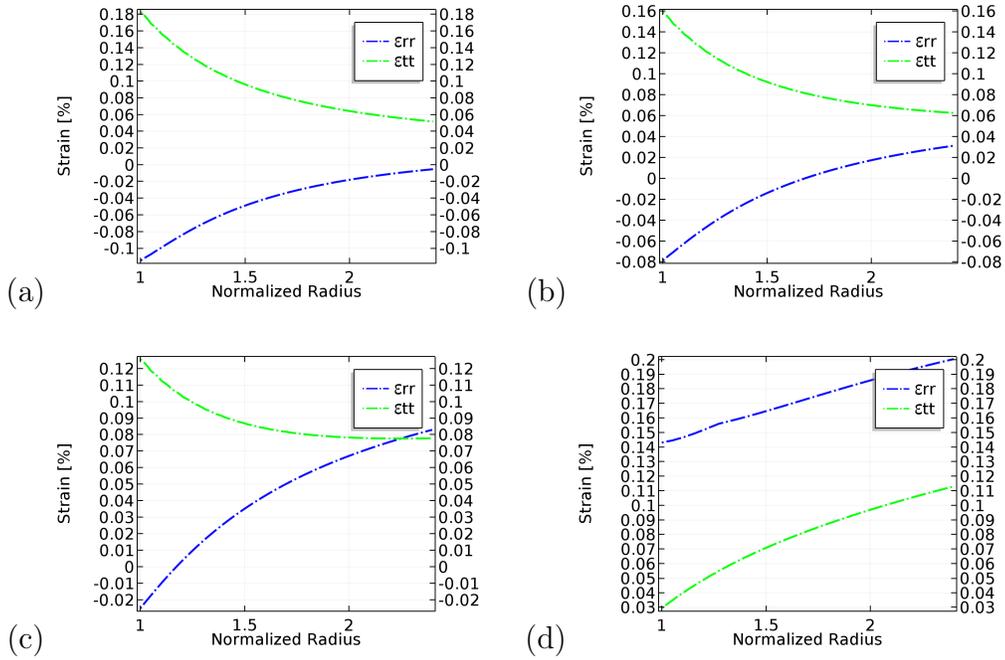


Figura 4.49: Deform. radial (azul) y circunferencial (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -20[kV]$, (b) $\phi_o = -60[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$.

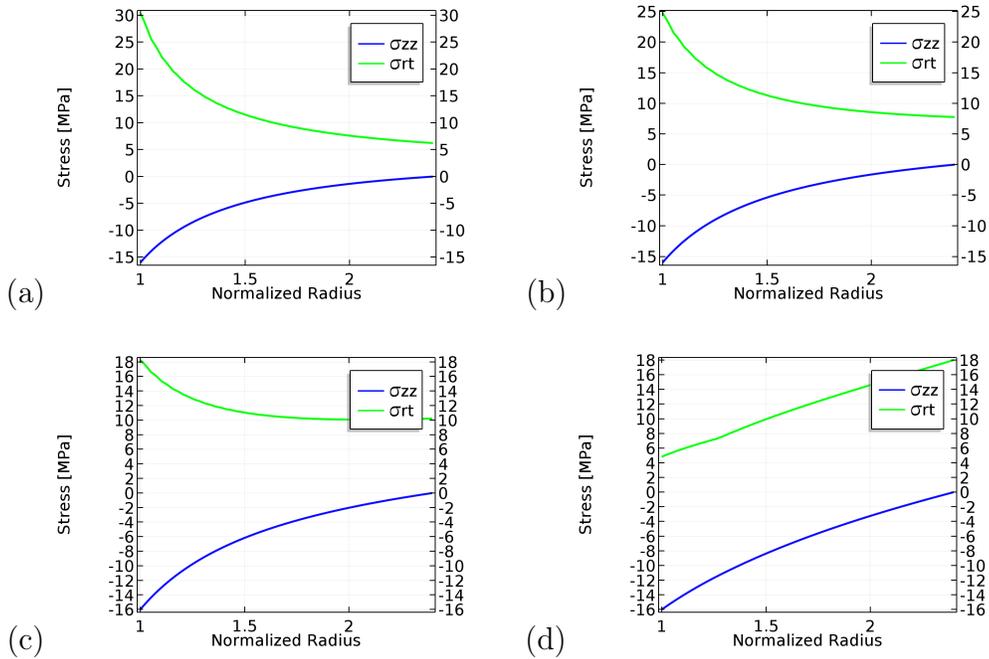


Figura 4.50: Esfuerzo radial (azul) y circunferencial (verde) vs. el radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 1[\mu C/cm]$, $P = 16[MPa]$ con presión (a) $\phi_o = -20[kV]$, (b) $\phi_o = -60[kV]$, (c) $\phi_o = -90[kV]$ y (d) $\phi_o = -140[kV]$.

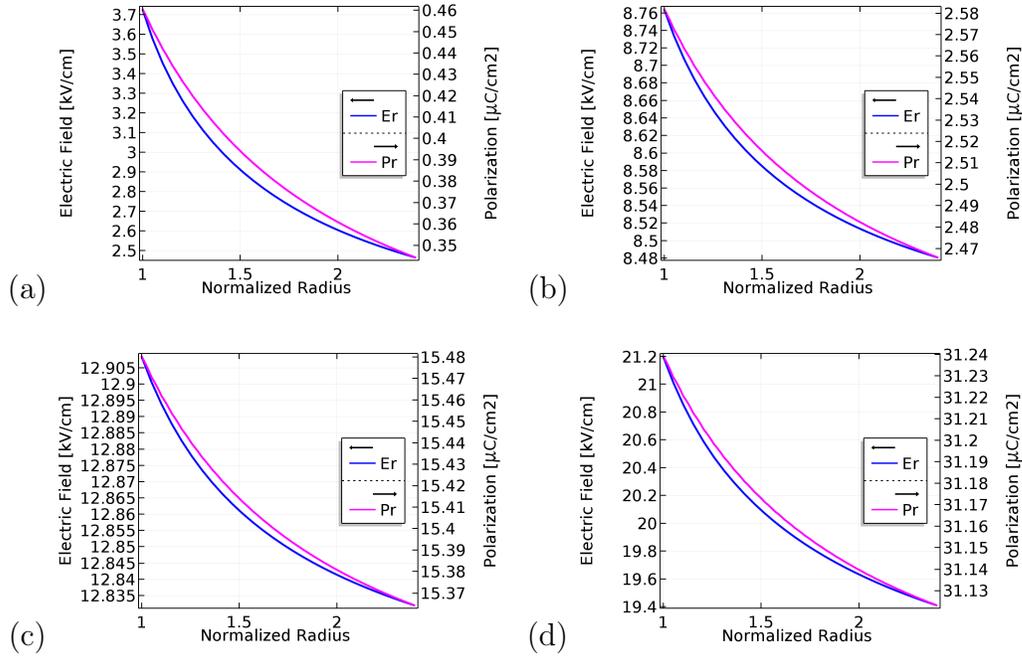


Figura 4.51: \mathbb{E}_r (azul) y \mathbb{P}_r (violeta) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 1[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 16[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -20[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -60[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -90[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -140[\text{kV}]$.

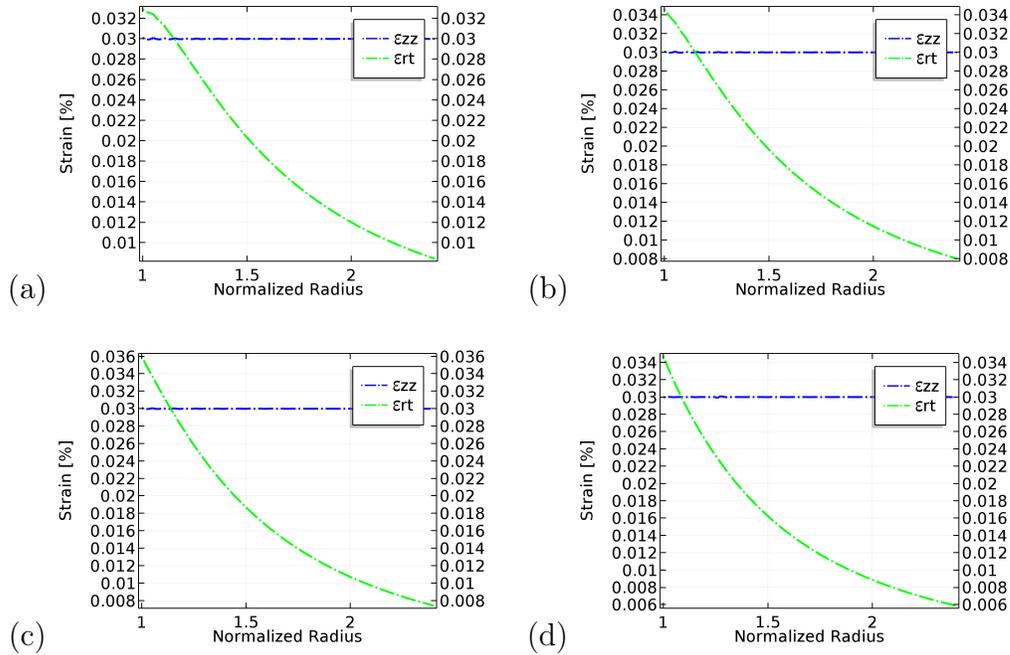


Figura 4.52: Deform. axial (azul) y de corte circunferencial (verde) vs. el radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 1[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 16[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -20[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -60[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -90[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -140[\text{kV}]$.

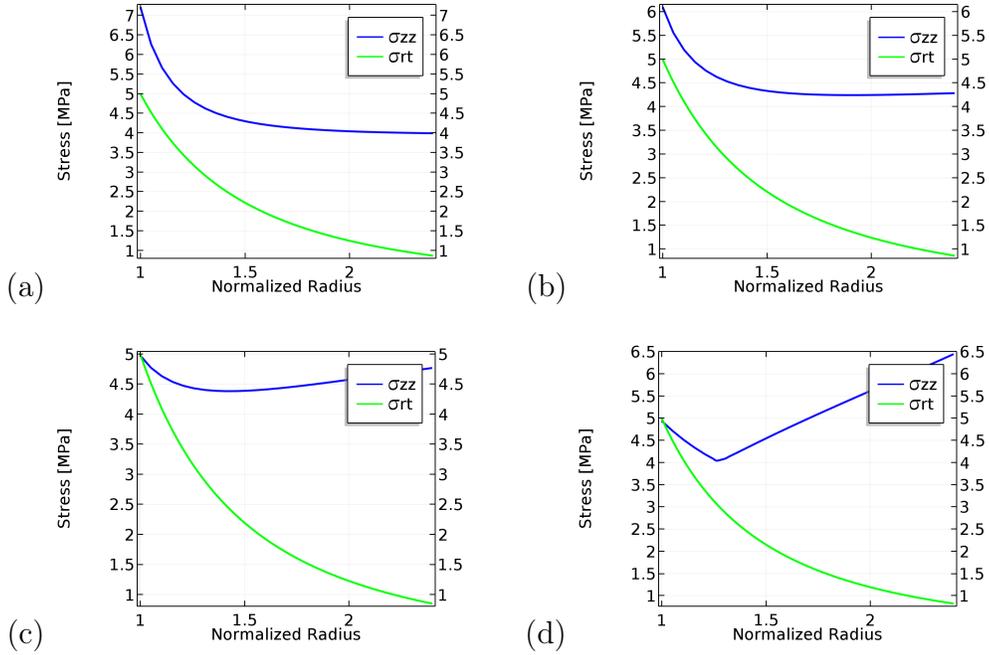


Figura 4.53: Esfuerzo axial (azul) y corte circunferencial (verde) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 1[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 16[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -20[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -60[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -90[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -140[\text{kV}]$.

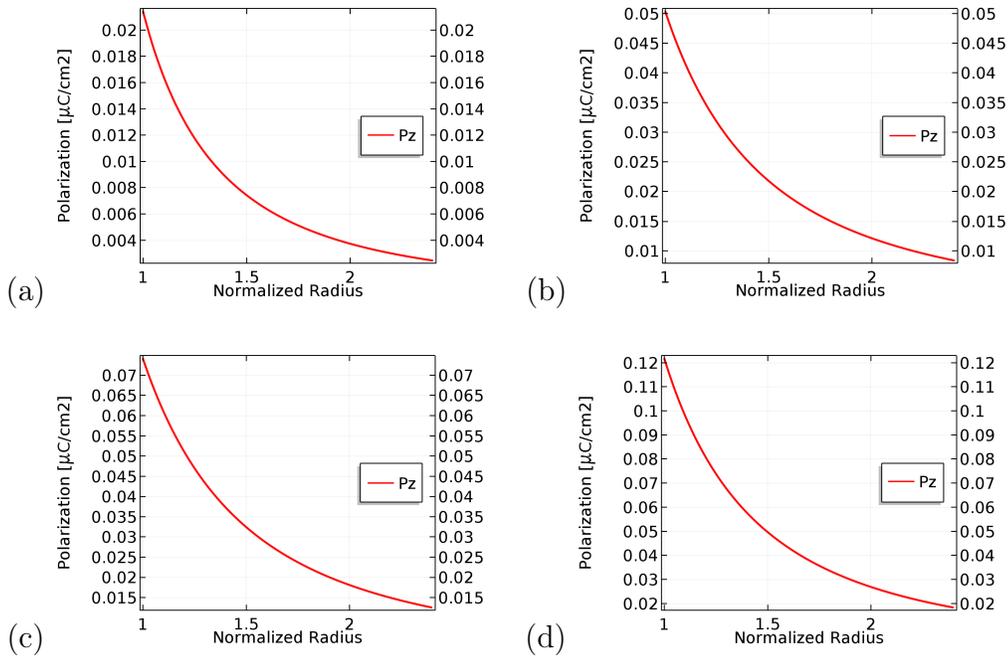


Figura 4.54: Polarización circunferencial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 1[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 16[\text{MPa}]$ con presión (a) $\phi_o = -20[\text{kV}]$, (b) $\phi_o = -60[\text{kV}]$, (c) $\phi_o = -90[\text{kV}]$ y (d) $\phi_o = -140[\text{kV}]$.

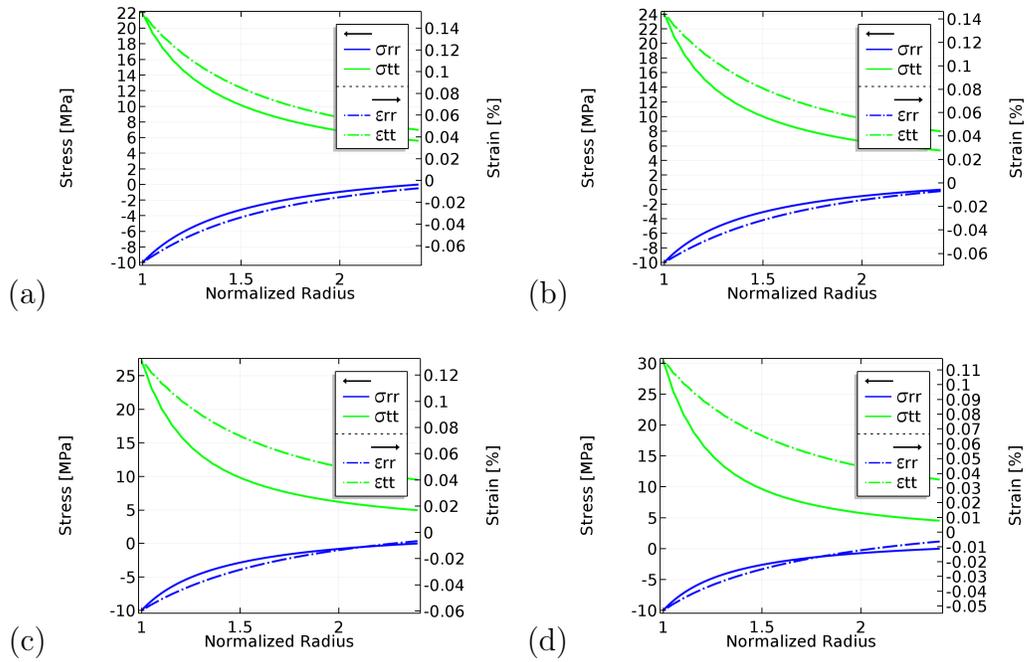


Figura 4.55: *Deform. y esfuerzo radial (azul), Deform. y esfuerzo circurf. (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$.*

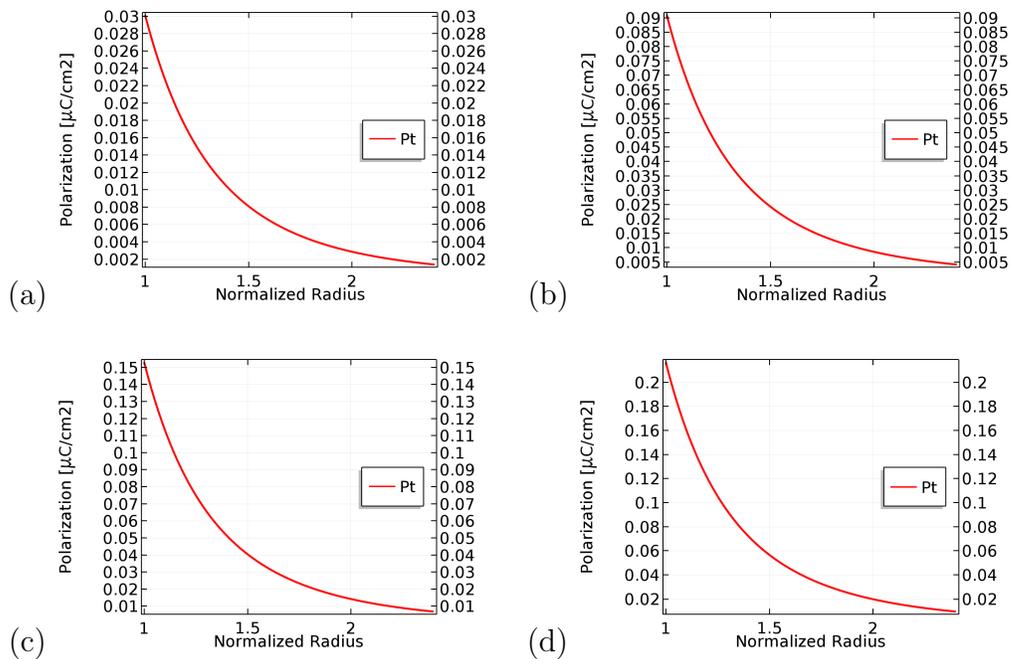


Figura 4.56: *Polarización circunferencial (rojo) en función del radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[cm]$ y $r_o = 12[cm]$, con $C = 5[\mu C/cm]$, $P = 10[MPa]$ con presión (a) $\tau_o = 5[MPa]$, (b) $\tau_o = 15[MPa]$, (c) $\tau_o = 25[MPa]$ y (d) $\tau_o = 35[MPa]$.*

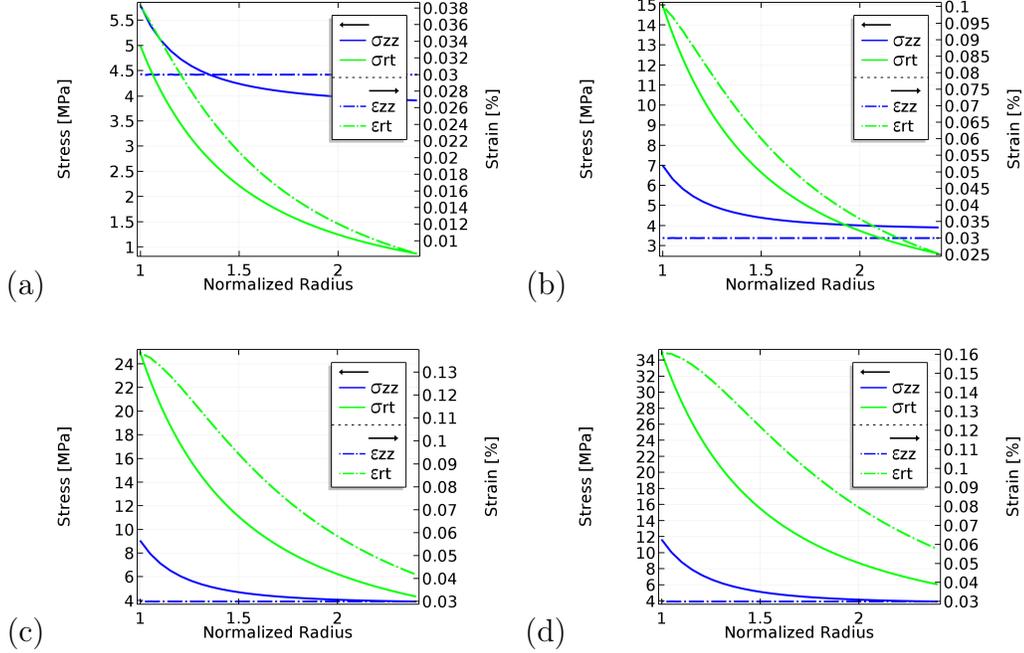


Figura 4.57: Deform. y esfuerzo axial (azul), Deform. y esfuerzo de corte circunferencial (verde) vs. radio normalizado r/r_i , para tubo de radios $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, con $C = 5[\mu\text{C}/\text{cm}]$, $P = 10[\text{MPa}]$ con presión (a) $\tau_o = 5[\text{MPa}]$, (b) $\tau_o = 15[\text{MPa}]$, (c) $\tau_o = 25[\text{MPa}]$ y (d) $\tau_o = 35[\text{MPa}]$.

Análisis de los resultados

Efectos de la variación de la presión interna P

En los gráficos de las figuras 4.43-4.48, se muestra como se ven afectadas distintas componentes de la deformación, esfuerzo y variables eléctricas (campo eléctrico y polarización) a medida que aumenta la presión interna P del tubo, estando expuesta a un voltaje fijo de $20[\text{kV}]$ y a un corte circunferencial interno de $5[\text{MPa}]$.

Al observar la figura 4.44, el tanto el esfuerzo de compresión radial σ_{rr} como el de tracción circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ aumentan en magnitud a medida que la presión interna del tubo crece tal como en los problemas anteriores. La compresión radial σ_{rr} aumenta con los mismos valores de la presión interna dado a las condiciones de frontera impuestas por el problema, mientras que la tracción circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ crece en mayor medida (desde los $6[\text{MPa}]$ para $P = 4[\text{MPa}]$ hasta $78[\text{MPa}]$ para $P = 24[\text{MPa}]$), especialmente para radios cercanos al manto interior del tubo. A pesar de este explosivo aumento de tracción tangencial, la deformación circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ no aumenta de $0,2\%$, valor que alcanza ya una presión interna de solo $18[\text{MPa}]$ (ver figura 4.43), lo que es clara evidencia una vez más de que el modelo puede describir el fenómeno de “*strain limiting*” para materiales cerámicos. Lo mismo ocurre con la deformación de compresión radial ε_{rr} , la cual empieza aumentando desde un $-0,035\%$ para $P = 4[\text{MPa}]$ hasta los $-0,12\%$ para $P = 18[\text{MPa}]$, valor que no supera en magnitud incluso a $P = 24[\text{MPa}]$.

Exactamente como en los casos anteriores para el tubo, el aumento de presión interna

provoca un leve crecimiento en la magnitudes de las variables eléctricas \mathbb{E}_r y \mathbb{P}_r a pesar de que el potencial eléctrico tenga un valor fijo de 20[kV] (ver gráficos de la figura 4.45). Este aumento sin embargo no es suficiente como para elevar el campo eléctrico lo suficiente como para que la polarización radial del material llegue a saturarse. Sin embargo, esta interdependencia incluso de las variables “independientes” del modelo constitutivo σ y \mathbb{E} , son importantes, ya que es un fenómeno típico de materiales ferroeléctricos en la práctica.

Por otro lado, dado a que la deformación axial ε_{zz} está fija en 0,03 % (figura 4.46), un aumento de la presión interna P , implica necesariamente un aumento en el esfuerzo de tracción axial σ_{zz} , tal como se puede ver en la figura 4.47. Este aumento se debe a que, al aumentar la presión interna, aumentan también los esfuerzos radiales y circunferenciales, lo que aumenta tanto a la invariante I_1 como I_2 . El aumento de la primera invariante tiende a hacer que la deformación axial ε_{zz} se haga de compresión, mientras que el incremento de la segunda invariante, pondera cada vez menos la contribución positiva de la tracción axial σ_{zz} sobre ε_{zz} , es por esto que el esfuerzo axial necesariamente debe aumentar para los radios donde el los otros esfuerzos longitudinales aumentan, con el fin de evitar que la extensión longitudinal del tubo aumente (ver ecuación (4.58)₃).

Observando la figura 4.47, el efecto que tiene el incremento de la presión interna P en el esfuerzo de corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$ es prácticamente inexistente. Sin embargo, en la figura 4.46, se ve como la deformación de corte circunferencial $\varepsilon_{r\theta}$ disminuye de 0,045 % para $P = 4$ [MPa], a 0,018 % para $P = 24$ [MPa], en el radio interior del tubo. Para esta última presión, la deformación de corte alcanza un máximo de 0,025 % dentro del espesor del tubo, aproximadamente a $r/r_i = 1,2$. Se desconoce la razón de esta anomalía en el corte circunferencial del tubo.

Finalmente, dado a que un aumento de la presión genera un ligero crecimiento en la magnitud del campo eléctrico \mathbb{E}_r , la polarización circunferencial \mathbb{P}_θ también aumenta ligeramente, tal como se puede observar en los gráficos de la figura 4.48. Esta componente de la polarización es bastante pequeña, aumentando desde los 0,019[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$] para $P = 4$ [MPa], a los 0,024[$\mu\text{C}/\text{cm}^2$] para $P = 24$ [MPa]. Generalmente, un campo eléctrico es incapaz de generar una polarización en un sentido ortogonal en al mismo, siendo esto solo posible en presencia de un esfuerzo de corte perpendicular al campo eléctrico, como lo es $\sigma_{r\theta}$ en este caso.

Efectos de la variación del voltaje aplicado ϕ_o

Los gráficos de las figuras 4.49-4.54 muestran como varían las distintas componentes de la deformación, esfuerzo y variables eléctricas (campo eléctrico y polarización) a medida se aumenta el voltaje aplicado a directamente a los mantos interno y externo del tubo, estando inflado a una presión interna de 16[MPa], y a sometido a un corte circunferencial en la cara interna del tubo de $\tau_o = 5$ [MPa]

Al igual que en los problemas anteriores, la figura 4.49 evidencia una vez más, que a medida que se incrementa el potencial eléctrico ϕ_o , la deformación de radial ε_{rr} pasa de ser de compresión a ser de tracción (de -0,1 % para $\phi_o = 20$ [kV], a 0,14 % para $\phi_o = 140$ [kV] en $r = r_i$), a pesar de los valores negativos (de compresión) del esfuerzo radial σ_{rr} (ver figura 4.50). Para el caso de la deformación circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$, se puede ver como su magnitud de tracción también disminuye, drásticamente, desde 0,18 % a $\phi_o = 20$ [kV], a 0,03 % para

$\phi_o = 140[\text{kV}]$ en el radio interior del tubo. Sin embargo, nunca pasa de ser un esfuerzo de compresión. Por otra parte, la deformación circunferencial cerca del borde externo del tubo r_o , experimenta un aumento en la deformación desde 0,06 % para $\phi_o = 20[\text{kV}]$, a 0,11 % para $\phi_o = 140[\text{kV}]$. Dado a que, ambas deformaciones son positivas (junto con la deformación axial ε_{zz} fija en 0,03 %), se puede confirmar que al aumentar el voltaje al que se somete al tubo, aumenta el volumen del tubo.

En la figura 4.50, se puede apreciar como el esfuerzo radial σ_{rr} no se ve mayormente afectado por el aumento del voltaje aplicado. Lo único que cambia, es la que la concavidad de la curva con la que la compresión σ_{rr} llega de $-P = -16[\text{MPa}]$ a $0[\text{MPa}]$ (desde la cara interna hasta la externa del tubo) disminuye, asimilándose cada vez mas a una recta. El esfuerzo circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ en cambio, disminuye drásticamente para radios cercanos a r_i , desde $30[\text{MPa}]$ para $\phi_o = 20[\text{kV}]$, a $5[\text{MPa}]$ para $\phi_o = 140[\text{kV}]$, y aumenta su magnitud para radios cercanos al borde externo r_o , desde $6[\text{MPa}]$ a $18 [\text{MPa}]$. De esta forma, y al igual que en los problemas no homogéneos anteriores, se puede afirmar que el aumento del voltaje, desplaza hacia el borde externo, tanto la deformación circunferencial, como el esfuerzo de tracción circunferencial.

Lógicamente, un aumento en el potencial eléctrico ϕ_o , genera un directamente un incremento directo en la magnitud del campo eléctrico \mathbb{E}_r (dado a que las distancias de las caras internas y externas del tubo se mantienen prácticamente iguales) el cual pasa desde los $3,7[\text{kV/cm}]$ para $\phi_o = 20[\text{kV}]$, a unos $21,2[\text{kV/cm}]$ para $\phi_o = 140[\text{kV}]$ en $r = r_i$, aumentando consigo a la polarización radial \mathbb{P}_r desde valores cercanos a cero, hasta magnitudes donde se satura, es decir, por sobre los $31[\mu\text{C/cm}^2]$ (ver figura 4.51). Esta saturación se hace evidente, al ver que para conseguir un cambio de $0,11[\mu\text{C/cm}^2]$ para la polarización a $\phi_o = 140[\text{kV}]$, se requiere de una variación de $2,8[\text{kV/cm}]$ por parte del campo eléctrico, mientras que a $\phi_o = 90[\text{kV}]$, para generar un mismo cambio en la polarización \mathbb{P}_r , se requiere de un cambio de solo $0,07[\text{kV/cm}]$ en el campo eléctrico.

Al contemplar los gráficos de la figura 4.52, tanto la deformación axial ε_{zz} como la deformación de corte circunferencial $\varepsilon_{r\theta}$ se mantienen invariantes al aumentar el potencial eléctrico ϕ_o . El primero debido a que se impone como condición de borde que sea igual 0,03 %.

Por su parte, en la figura 4.53, se observa que a medida que aumenta el potencial eléctrico ϕ_o , el esfuerzo de tracción axial se traslada hacia el borde externo, al igual que el otro esfuerzo ortogonal al campo eléctrico, el circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$. Es decir, que disminuye para radios cercanos a r_i (de $7[\text{MPa}]$ para $\phi_o = 20[\text{kV}]$, a $5[\text{MPa}]$ para $\phi_o = 140[\text{kV}]$), y aumenta para radios cercanos al manto externo del tubo en r_o (de $4[\text{MPa}]$ para $\phi_o = 20[\text{kV}]$, a $6,5[\text{MPa}]$ para $\phi_o = 140[\text{kV}]$). Lo anterior permite deducir, que un aumento en el campo eléctrico genera un traslado de los esfuerzos longitudinales ortogonales al mismo, hacia el borde externo del tubo. Por su lado, el esfuerzo de corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$ se mantiene invariante, al igual que su respectiva deformación de corte $\varepsilon_{r\theta}$ frente a cambios en el voltaje aplicado. Este esfuerzo de corte toma el valor de τ_o impuesto en la frontera interior, y se aproxima suavemente hacia $0[\text{MPa}]$.

Finalmente, en la figura 4.54, se puede ver como la polarización circunferencial \mathbb{P}_θ aumenta a medida que el voltaje aplicado ϕ_o se incrementa (de $0,02[\mu\text{C/cm}^2]$ para $\phi_o = 20[\text{kV}]$, a $0,12[\mu\text{C/cm}^2]$ para $\phi_o = 140[\text{kV}]$). Lo anterior se debe a que la polarización circunferencial

es directamente proporcional al campo eléctrico radial (ver ecuación (4.59)₂).

Efectos de la variación del corte circunferencial interno aplicado τ_o

En los gráficos de las figuras 4.55-4.57, se muestra como se ven afectadas distintas componentes de la deformación, esfuerzo y polarización circunferencial \mathbb{P}_θ a medida que aumenta la presión interna P del tubo, estando expuesta a un voltaje fijo de 20[kV] y a una presión interna $P = 10$ [MPa]. Para la evaluación, se utilizan valores de τ_o fuera de los límites aplicables en la práctica para cerámicas piezoeléctricas, y tiene como objetivo ver el efecto que tiene su aumento en las distintas variables del problema únicamente.

En la figura 4.55, se aprecia como el esfuerzo y deformación radial, σ_{rr} y ε_{rr} , no presentan mayores efectos frente al aumento del esfuerzo de corte τ_o circunferencial interno. En contraste con lo anterior, se ve como las componentes circunferenciales de la deformación y del esfuerzo, $\sigma_{\theta\theta}$ y $\varepsilon_{\theta\theta}$ si se ven ligeramente afectadas. La deformación circunferencial decrece de 0,14 % para $\tau_o = 5$ [MPa] a 0,11 % para $\tau_o = 35$ [MPa] en $r = r_i$. Por su parte, el esfuerzo circunferencial aumenta de 22[MPa] para $\tau_o = 5$ [MPa] a 30[MPa] para $\tau_o = 35$ [MPa] en $r = r_i$. Todo esto debido más que nada al aumento de las invariantes I_1 e I_2 .

Como era de esperar, en la figura 4.56, la polarización circunferencial \mathbb{P}_θ aumenta a medida que el esfuerzo de corte circunferencial interno τ_o crece (de $0,03[\mu\text{C}/\text{cm}^2]$ para $\tau_o = 5$ [MPa], a $0,22[\mu\text{C}/\text{cm}^2]$ para $\tau_o = 35$ [kV]), dado a que por la ecuación (4.59)₂, \mathbb{P}_θ es directamente proporcional al esfuerzo de corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$. Este esfuerzo claramente aumenta en la figura 4.57, a medida que crece τ_o , debido a la condición de borde impuesta en la implementación del problema.

Por último, en la figura 4.57, dado a que la deformación axial ε_{zz} se mantiene fija en un 0,03 %, el aumento del esfuerzo τ_o genera un aumento del esfuerzo de tracción axial σ_{zz} (de 5,5[MPa] para $\tau_o = 5$ [MPa], a 12 [MPa] para $\tau_o = 35$ [MPa], en $r = r_i$). Esto se debe a la misma razón que para el problema anterior (para el caso donde τ_o era un esfuerzo de corte axial interno), donde un incremento de τ_o genera un aumento en la magnitud del esfuerzo de corte circunferencial $\sigma_{r\theta}$, y por ende, un aumento de las invariantes I_1 e I_2 . La primera invariante hace que ε_{zz} tienda a ser negativo, y la segunda hace que la contribución de σ_{zz} para mantener a la deformación ε_{zz} fija, sea menor, lo que obliga al esfuerzo axial a aumentar cuando aumenta τ_o , con el fin de evitar que el tubo se siga estirando.

Si se observa bien, en los dos últimos problemas, para el caso en que se varía el esfuerzo de corte interno τ_o , se utilizan los mismo parámetros de presión interna P , de coeficiente C y de voltaje ϕ_o , con el fin de diferenciar los efectos del aumento de τ_o cuando es de corte circunferencial, a cuando es de corte axial. Sin embargo, no se encuentran mayores diferencias entre los efectos de una y la otra.

Capítulo 5

Conclusiones

Tal como se propone desde el comienzo del trabajo, las nuevas ecuaciones constitutivas planteadas en 2.35 y 2.36, fueron utilizadas para la resolución por métodos numéricos de diversos problemas para materiales que no son de Green elásticos, considerando tanto deformaciones y campos homogéneos, como no homogéneos en geometrías esféricas y cilíndricas.

En los problemas homogéneos 4.1.1 (lámina en tracción paralela al campo eléctrico) y 4.1.2 (prisma en tracción ortogonal al campo eléctrico), se puede ver como los campos eléctricos tienden a disminuir las magnitudes de las deformaciones ortogonales a este (ver figuras 4.2 y 4.7). Es decir, cuando las deformaciones ortogonales a \mathbb{E} son de compresión, disminuye la compresión, y lo mismo cuando son de tracción. Dado que disminuye la magnitud, cuando la deformación ortogonal es 0 (debido a la ausencia de esfuerzos σ_o), el campo eléctrico es incapaz de generar un cambio en la deformación del material en esa dirección. Sin embargo, el campo eléctrico es capaz de aumentar las deformaciones paralelas a este, trasladando las curvas de deformación de forma positiva incluso en ausencia de esfuerzos σ_o de tracción o compresión (ver figuras 3.5, 4.4 y 4.5). Por tanto, el campo eléctrico puede por si solo, estirar al material solo en las direcciones paralelas a este.

Tanto en el caso esférico como en los cilíndricos, al aumentar la presión interna P , tanto los esfuerzos de compresión radial σ_{rr} , como los de tracción circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ aumentan, especialmente para radios cercanos al borde internos de las geometrías esféricas y cilíndricas. Sin embargo el aumento de la tracción circunferencial a radios cercanos a r_i se disparan drásticamente a medida que aumenta la presión, siendo este aumento más pronunciado en las geometrías cilíndricas. Por lo mismo, los problema para el tubo dejan de converger a presiones por sobre los 30[MPa], mientras que para el caso esférico, esto ocurre recién a los 55[MPa] (ver figuras 4.12, 4.19, 4.28 y 4.44).

A pesar del aumento explosivo en los esfuerzos circunferenciales $\sigma_{\theta\theta}$ y el aumento gradual pero no despreciable de los esfuerzos radiales σ_{rr} a medida que aumenta la presión interna P , tanto en el caso esférico como en los cilíndricos, las magnitudes de las deformaciones radiales ε_{rr} y circunferenciales $\varepsilon_{\theta\theta}$ a partir de valores de P medios, dejan de aumentar, evidenciando un claro comportamiento de *strain limiting* (ver figuras 4.11, 4.18, 4.28 y 4.43). Esto es un resultado bastante relevante considerando que modelos lineales clásicos para este

tipo de materiales no logran describir este tipo de comportamientos.

Un resultado que se ve también tanto en geometrías esféricas como cilíndricas, y que quizás pueda pasar desapercibido, es que el aumento de presión interna P genera también un ligero pero apreciable aumento del campo eléctrico a un potencial eléctrico fijo (ver figuras 4.13, 4.20, 4.29 y 4.45). Esto resalta la interdependencia que tienen variables del esfuerzo (generado por P) y el campo eléctrico, a pesar de que en el modelo sean las variables “independientes” del modelo. Esto tiene sentido, ya que el material en la realidad no distingue entre causalidades o consecuencias, sino que todas las variables van de la mano, y se interrelacionan. Por otro lado, este resultado podría tener aplicaciones bastantes interesantes, como por ejemplo la de manómetros para *piping* sin parte móviles, donde aumentos en la presión hidrostática dentro de la cañería generarían una variación en el potencial medido por electrodos adheridos al manto externo e interno del tubo.

Dado a que en los problemas del tubo cilíndrico se les impone una deformación axial ε_{zz} fija, el esfuerzo axial σ_{zz} debe aumentar a radios cercanos a r_i a medida que la presión interna P crece (ver figuras 4.21, 4.31 y 4.47), dado a que el esfuerzo de compresión radial σ_{zz} también aumenta, y este tiende a estirar axialmente al material, por lo que σ_{zz} crece para evitar eso.

Ahora bien, el aumento del potencial eléctrico aplicado ϕ_o sea cual sea el problema, siempre resulta en un aumento de la intensidad del campo eléctrico \mathbb{E}_r (dado a que el espesor de la cáscara esférica o del tubo no varía). Esto implica que la polarización radial \mathbb{P}_r también aumente (ver figuras 4.16, 4.24, 4.35 y 4.51). Sin embargo, lo más importante de estos resultados, es que puede apreciarse como a potenciales de $\phi_o = 140[\text{kV}]$, la polarización radial muestra una clara saturación, hecho que con modelos constitutivos lineales no es posibles percibir.

El efecto que tiene el aumento del potencial en las componentes del esfuerzo depende si son ortogonales al campo eléctrico \mathbb{E}_r o no. Por ejemplo, los esfuerzos de tracción circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ (caso esférico y cilíndricos) y axial σ_{zz} (solo caso cilíndrico), los cuales son ortogonales al aumento del campo eléctrico, disminuyen sus magnitudes en el borde interno r_i , y aumentan para la frontera externa r_o . Es otras palabras, el aumento del potencial ϕ_o , “traslada” los esfuerzos de tracción ortogonales al campo eléctrico hacia el exterior de la cáscara o tubo (ver figuras 4.15, 4.23, 4.25, 4.34, 4.37, 4.50 y 4.53). Para el esfuerzo paralelo al aumento del campo eléctrico, es decir la compresión radial σ_{rr} , se tiene que sus valores extremos no varían debido a las imposiciones del problema, no obstante, la curva con la que une ambas condiciones de frontera disminuye en concavidad, volviéndose cada vez más recta a medida que ϕ_o aumenta (ver figuras 4.15, 4.23, 4.34, y 4.50).

Por su lado, las deformaciones de compresión radial ε_{rr} y elongación circunferencial $\varepsilon_{\theta\theta}$ varían tal como ocurre con los problemas homogéneos a medida que el voltaje, y por ende, el campo eléctrico aumenta: las deformaciones ortogonales al campo eléctrico, o sea los estiramientos $\varepsilon_{\theta\theta}$ en este caso, disminuyen de magnitud sin pasar a ser de compresión. Por su parte, las deformaciones paralelas al aumento del campo eléctrico, o sea las compresiones radiales ε_{rr} en este caso, aumentan su valor, trasladándose a valores positivos, o sea de estiramiento a partir de voltajes de $90[\text{kV}]$ (ver figuras 4.14, 4.22, 4.33 y 4.49). Esto significa que el incremento del voltaje sobre el tubo o cáscara, aumenta el volumen del cuerpo.

Por último, bastante obvia (por las expresiones analíticas), pero a la vez, interesante es la aparición de componentes de la polarización ortogonales al campo eléctrico radial aplicado \mathbb{E}_r , solo en los casos donde se incluye una componente de corte en la cara interna al tubo cilíndrico. Para el caso en que el corte es telescópico (o axial), aparece una componente de polarización axial \mathbb{P}_z y para cuando el corte el circunferencial, aparece una componente \mathbb{P}_θ ambas aumentando cuando el potencial eléctrico o el corte interno τ_o aumenta (ver figuras 4.38, 4.40, 4.54 y 4.56). A pesar de que las magnitudes de estas componentes son muy pequeñas (incluso a presiones internas P y potenciales eléctrico muy elevados), estos resultados podrían tener interesantes aplicaciones en caso de que en la práctica puedan ser detectados o más bien, medidos. Por ejemplo al poder medir la polarización axial \mathbb{P}_z en una cañería de un material piezoeléctrico, podría calcularse el caudal que genera el esfuerzo de corte telescópico τ_o correspondiente a la polarización medida. Para el caso, de la polarización circunferencial \mathbb{P}_θ , en caso de poder medirse, podrían calcularse torsiones de ejes ajustados en el manto interno de una camisa piezoeléctrica concéntrica.

Para terminar, a modo de síntesis, se puede concluir el presente trabajo afirmando que:

- La totalidad de los problemas de valores de frontera fueron resueltos por métodos numéricos en el solver unidimensional de COMSOL 5.3a, donde en algunos casos particulares se observan problemas numéricos a altas presiones.
- Se logra llegar a un fitting acoplado que se ajusta bastante bien a los datos experimentales tanto para fenómenos mecánicos del $BiFeO_3$, como para fenómenos eléctricos del PLZT 8/60/40.
- Dada una geometría de $r_i = 5[\text{cm}]$ y $r_o = 12[\text{cm}]$, los límites de convergencia están definidos por presiones internas de 55[MPa] para el caso esférico, y de 30[MPa] para los problemas del tubo cilíndrico. Para el caso del potencial eléctrico, todas las intensidades bajo 150[kV] convergen sin problemas.
- Los resultados obtenidos variando la presión interna P , demuestran tanto en las geometrías cilíndricas como esféricas, un claro comportamiento de “strain limiting” en las deformaciones radiales de compresión σ_{rr} , y en las de estiramiento circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ a medida se disparan sus esfuerzos internos respectivos, algo que modelos lineales no logran plasmar en resultados.
- Por su parte, el aumento del potencial eléctrico permite apreciar como el aumento de la polarización radial se satura, fenómeno que no puede ser captado por modelos constitutivos lineales.
- El aumento del potencial eléctrico, y por tanto, del campo eléctrico, provoca en todas las geometrías una expansión volumétrica del material.
- Al aumentar la presión interna de un tubo, se incrementa levemente la intensidad del campo eléctrico, lo cual puede ser aplicado para el uso de manómetros sin piezas móviles para la medición de presión hidrostática en sistemas de *piping*.
- En caso de poder medir la polarización circunferencial generada por el corte circunferencial interno de un tubo, los resultados obtenidos podrían ser utilizados para el cálculo de torsiones de ejes ajustados al interior de un tubo piezoeléctrico.
- En caso de poder medir la polarización axial creada por un corte telescópico interno, los resultados podrían ser utilizados para el calculo de caudales dentro de una cañería.

Bibliografía

- [1] R. G. Ballas, “Elektrische Polarisierung und piezoelektrischer Effekt - eine anschauliche Darstellung am Beispiel von Alpha-Quarz,” in *Wissenschaftsforum 2017 an der Wilhelm Büchner Hochschule*, 2017.
- [2] P. Peralta, R. O. Ruiz, and A. A. Taflanidis, “Bayesian identification of electromechanical properties in piezoelectric energy harvesters,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 141, p. 106506, 2020.
- [3] S. P. Beeby, M. J. Tudor, and N. M. White, “Energy harvesting vibration sources for microsystems applications,” *Measurement Science and Technology*, vol. 17, pp. 175–195, 2006.
- [4] X. Wang, “Piezoelectric nanogenerators-harvesting ambient mechanical energy at the nanometer scale,” *Nano Energy*, vol. 1, pp. 13–24, 2012.
- [5] L. F. Deravi, A. E. Gerdon, D. E. Cliffler, D. W. Wright, and J. L. Sumerel, “Output analysis of materials inkjet printer,” *Applied Physics Letters*, vol. 91, no. 11, p. 113114, 2007.
- [6] S. Benchabane, A. Khelif, J. Y. Rauch, L. Robert, and V. Laude, “Evidence for complete surface wave band gap in a piezoelectric phononic crystal,” *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, pp. 1541–1556, 2006.
- [7] G. A. Maugin and A. C. Eringen, “Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56, p. 986, 1989.
- [8] A. Dorfmann and R. W. Ogden, “Nonlinear electroelasticity,” *Acta Mechanica*, vol. 174, pp. 167–183, 2005.
- [9] A. Dorfmann and R. W. Ogden, “Nonlinear electroelastic deformations,” *Journal of Elasticity*, vol. 82, no. 2, pp. 99–127, 2006.
- [10] C. Truesdell and W. Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Berlin: Springer, 1 ed., 1965.
- [11] K. R. Rajagopal, “On implicit constitutive theories,” *Applications of Mathematics*, vol. 48, no. 4, pp. 279–319, 2003.

- [12] K. R. Rajagopal, “The elasticity of elasticity,” *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, vol. 58, no. 2, pp. 309–317, 2007.
- [13] K. R. Rajagopal, “On a new class of models in elasticity,” *Mathematical and Computational Applications*, vol. 15, no. 4, pp. 506–528, 2010.
- [14] K. R. Rajagopal, “Non-linear elastic bodies exhibiting limiting small strain,” *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 16, no. 1, pp. 122–139, 2011.
- [15] S. C. Hwang and R. M. McMeeking, “A finite element model of ferroelastic polycrystals,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, pp. 1541–1556, 1999.
- [16] R. Bustamante, “New classes of electro-elastic and thermo-electro-elastic bodies that are not Green elastic,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 152, pp. 10–13, 2020.
- [17] D. Damjanovic, *Hysteresis in piezoelectric and ferroelectric materials*, vol. 3. Lausanne: Elsevier Inc., 1 ed., 2006.
- [18] M. I. Morozov, M. A. Einarsrud, and T. Grande, “Control of conductivity and electric field induced strain in bulk Bi_{0.5}K_{0.5}TiO₃-BiFeO₃ ceramics,” *Applied Physics Letters*, vol. 104, p. 122905, 2014.
- [19] Z. Fan, F. Xue, G. Tutuncu, L. Q. Chen, and X. Tan, “Interaction Dynamics between Ferroelectric and Antiferroelectric Domains in a PbZrO₃-Based Ceramic,” *Physical Review Applied*, vol. 11, no. 6, pp. 1–5, 2019.
- [20] R. Bustamante, “Apuntes de Clases: Mecánica de Medios Continuos,” 2009.
- [21] W. Slaughter and J. Petrolito, *Linearized Theory of Elasticity*. Cambridge: Birkhauser, 2002.
- [22] R. Bustamante and K. R. Rajagopal, “On a new class of electroelastic bodies. I,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 469, pp. 2149–2165, 2013.
- [23] A. Ortiz, R. Bustamante, and K. R. Rajagopal, “A numerical study of a plate with a hole for a new class of elastic bodies,” *Acta Mechanica*, vol. 223, pp. 1971–1981, 2012.
- [24] M. Muneeswaran, A. Akbari-Fakhrabadi, M. A. Gracia, and J. C. Denardin, “Structural, electrical, ferroelastic behavior, and multiferroic properties of BiFeO₃,” *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, vol. 31, no. 16, pp. 13141–13149, 2020.
- [25] R. Ramesh, “Electric field control of ferromagnetism using multi-ferroics: The bismuth ferrite story,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 372, no. 20120437, 2014.
- [26] J. H. Lohr, *Propiedades eléctricas y magnéticas en óxidos multiferroicos y en materiales nanoestructurados*. Tesis de doctorado en física, Universidad Nacional de Cuyo, 2017.

- [27] A. Kumar, V. V. Bhanu Prasad, K. C. James Raju, and A. R. James, "Optimization of poling parameters of mechanically processed PLZT 8/60/40 ceramics based on dielectric and piezoelectric studies," *European Physical Journal B*, vol. 88, pp. 287–295, 2015.