



**“ESTIMACIÓN DE *VALUE AT RISK* CON
MODELOS GARCH: CASO APLICADO A LOS
MULTIFONDOS DE LAS AFP”**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN FINANZAS

**Alumno: Patricio Andrés Torres Raposo
Profesor Guía: José Luis Ruiz Vergara, Ph.D.**

Santiago, Enero de 2020

Agradecimientos

Agradezco a mi esposa Patricia, mis hijas Sofía y Amanda, que me han apoyado en este proceso que no ha sido fácil y ha requerido muchos sacrificios.

Sin ustedes no lo podría haber logrado.

1. Introducción

De acuerdo al informe de inversiones del tercer trimestre del año 2019 emitido por la Superintendencia de Pensiones, los multifondos de las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP) mantenían inversiones por USD MM\$ 216.842.- para un total de 5.538.683 afiliados al sistema. Este monto, que es administrado por estos inversionistas institucionales, es muy relevante para el mercado de capitales debido a que representa aproximadamente el 73 % del PIB de Chile. Los recursos son invertidos en activos de renta fija y variable, en moneda nacional e internacional, de acuerdo a los límites mínimos y máximos de exposición a renta variable establecido por ley para cada uno de sus fondos. La normativa vigente de la Superintendencia de Pensiones, establece que se espera que las Administradoras midan y cuantifiquen el riesgo de mercado al que se ven expuestos sus activos, que se considera una buena práctica el monitoreo permanente del riesgo de mercado y particularmente su evolución, realizando test de *stress* de la cartera de inversiones asumiendo condiciones de mercado de volatilidad extrema, pero plausibles, y estos deben ser comunicados a la alta administración. Si bien el regulador establece que las administradoras deben medir y cuantificar el riesgo de sus carteras de activos en condiciones extremas de mercado, no obliga a las administradoras a utilizar una metodología en particular, sino que establece que es tarea de cada institución definir sus mejores prácticas y los modelos con los que realizarán este tipo de medición y control.

El aumento de la incertidumbre en los mercados y las crisis financieras han producido que las instituciones que participan en el mercado de capitales, busquen herramientas cuantitativas más sofisticadas que permitan estimar y predecir el riesgo de mercado al que se exponen sus instrumentos. Una de las metodologías más utilizadas de medición de riesgo de mercado, es el *Value at Risk*, que se puede definir como la peor pérdida esperada a la que se expone un activo en el mercado de acuerdo a su comportamiento en el pasado y a un nivel de confianza.

Debido a que no existe consenso respecto de cuáles son las mejores metodologías para me-

dir el riesgo de mercado para los fondos de las AFP, el objetivo de este trabajo fue predecir el *Value at Risk* para las series de retornos de los multifondos A, C y E, utilizando modelos de heterocedasticidad condicional (GARCH o *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Se busca determinar si este tipo de modelos de volatilidad entregan predicciones de calidad para estimar las pérdidas potenciales para los distintos fondos de evaluados. Para esto se utilizan nueve tipos de modelos GARCH y se suponen cinco tipos de distribución para el término del error, con el objetivo de determinar de estas 45 combinaciones, cuales son los factores más relevantes a incorporar en la predicción, y las combinaciones de modelo y distribución que entrega mejores resultados para cada uno de los fondos.

Los resultados obtenidos muestran que existen algunas combinaciones de modelo y distribución del error que entregan pronósticos de calidad del *VaR*. Con las pruebas de adecuación estadística y el número de excepciones, se obtiene que algunos modelos que incorporan características especiales de las series de tiempo, como otros que no lo hacen, entregan buenos resultados, por lo que no se podría asumir que un modelo que incorpora estas características particulares tiene un mejor desempeño. Junto con lo anterior, un factor clave es seleccionar correctamente la distribución del término del error, ya que esto es lo que produce diferencias entre modelos de buena y mala calidad predictiva del *VaR*. Una buena forma de determinar la densidad del error, es analizar la distribución empírica de los retornos, ya que esta es un buen *proxy* de cómo se podría comportar la distribución del término del error.

El documento está estructurado de la siguiente forma, luego de esta introducción, en la sección 2 se describe el marco teórico, donde se detallan los distintos modelos auto-regresivos de heterocedasticidad condicional, la metodología de predicción del *VaR*, los distintos tipos de distribución del error, y las pruebas de cobertura o *Backtesting*, posteriormente en la sección 4 mostrar los resultados y principales hallazgos, para finalmente terminar con las conclusiones en la sección 5.

2. Marco Teórico

Una tarea esencial para las instituciones financieras es medir el riesgo de mercado al que se exponen sus activos y portafolios por las variaciones de los precios de mercado. Entre las metodologías más utilizadas para medir este riesgo se encuentra el *Value at Risk* (Valor en riesgo o *VaR*), que se define como la mayor pérdida esperada de un activo en un horizonte de tiempo de acuerdo a condiciones normales de mercado y a un nivel de confianza dado (Jorion, 2001).

De los distintas metodologías de medición del VaR se puede diferenciar entre dos tipos:

- Paramétricos: en esta clasificación se incluyen la familia de los modelos auto-regresivos con heterocedasticidad condicional, asimétricos y no asimétricos.
- No paramétricos: entre estos una de las metodologías más utilizadas es la simulación histórica, que utiliza la distribución real de los retornos como una función de densidad y donde se define el valor del *VaR*, es el cuantil α de la distribución empírica.

En este trabajo se profundizará en los modelos de la familia GARCH, en donde se estiman nueve modelos, que son definidos de acuerdo a las principales características de las series de tiempo.

Entre los modelos de tipo paramétricos, uno de los primeros que fueron desarrollados para la estimación de *VaR* fue *Riskmetrics*, de JP Morgan (1996). Este modelo supone que los retornos de un activo siguen una distribución normal condicional con media cero y varianza que es estimada de acuerdo al promedio móvil de los rendimientos al cuadrado pasados. Los inconvenientes de este modelo es que generalmente los retornos de un activo no se distribuyen normalmente, sino que se caracterizan por tener colas más pesadas que una distribución normal y por la existencia de asimetría, lo que puede generar sesgos al momento de estimar el *VaR* con los cuantiles de los extremos de la distribución.

La evidencia muestra que muchas series de retornos no siguen una distribución normal (Bollerslev, 1987), y más bien presentan asimetría y curtosis, y que su distribución sería

más similar a una t-student. La asimetría o *skewness* se puede describir en términos simples como la existencia mayor cantidad de observaciones a la derecha o izquierda de la media de la distribución, mientras que la curtosis, se refiere a que, dentro de una distribución, existen valores extremos que producen colas más gruesas o anchas que una distribución normal. Lo anterior es particularmente relevante en el pronóstico del *VaR*, considerando que usualmente se busca estimar la probabilidad entre el 1% y 5% de pérdida. Por lo anterior se requiere definir correctamente la distribución del término del error del proceso heterocedástico, con el objetivo de no subestimar el VaR. Por lo anterior, es que en este trabajo, se utilizan cinco supuestos de distribución: normal (NORM), t-student (STD), generalized error distribution (GED), normal-inverse saussian (NIG) y johnson's SU (JSU).

Otra de las características presentes en las series de tiempo es el efecto *leverage* (Black, 1976), que se describe como los cambios en la tendencia de los retornos están correlacionados negativamente con cambios en la volatilidad de los retornos, que en términos prácticos se puede explicar cómo cuando se observa la existencia de malas noticias, la volatilidad tiende a incrementarse, mientras que cuando son buenas, la volatilidad tiende a disminuir. Esta característica también juega un rol clave en la estimación del *VaR*, debido a que se busca estimar las pérdidas, por lo que la incorporación de coeficientes que estimen este efecto podrían entregar mejores pronósticos de las pérdidas potenciales.

Finalmente, otro efecto importante que se ha encontrado en las series de tiempo es el llamado efecto *Taylor* (S.J. Taylor, 1986), que encuentra que los retornos asociados a los valores absolutos de una serie de tiempo tienen mayor auto-correlación serial que los retornos al cuadrado. Es por lo anterior, que algunos de los modelos GARCH incorporan el valor absoluto al estimar en el término del error con el objetivo de mejorar las estimaciones de la volatilidad y, en consecuencia, del *VaR*.

2.1. Value at Risk

Para el cálculo del VaR , primero se estima la media condicional de la serie de tiempo y_t a través de un modelo auto-regresivo integrado de media móvil o ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*), que se descompone por una parte que es auto-regresiva, y por otra, asociada a su media móvil, y que se define como:

$$y_t = \mu_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-p} + \sum_{i=1}^q \theta_i u_{t-q} + \varepsilon_{ti} \quad (1)$$

Este proceso se puede descomponer por una parte predecible, que viene dada por el coeficiente φ_i de los rezagos de la serie y θ_i que está asociado a la media móvil, y por otra que no es predecible, que corresponde al error o las innovaciones del modelo, representados como ε_{ti} . Este proceso de innovaciones en las series de tiempo es en si mismo un proceso de tipo auto-regresivo heterocedastico que se puede definir como $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$, donde z_t una secuencia de variables aleatorias distribuidas de forma independiente e idéntica con media cero y varianza condicional σ_t , que es positiva y medible de acuerdo a la información disponible en $t - 1$.

Para el modelo ARIMA se define el orden (p,d,q) con p rezagos auto-regresivos (AR), d diferencias (I) y q medias móviles (MA).

Luego, para estimar la varianza condicional, se utiliza un modelo de tipo GARCH, que en su versión estándar se expresa como lo definió Bollerslev (1986):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2)$$

Este modelo se compone de σ_{t-j}^2 que corresponde a la varianza condicional de j periodos anteriores, ε_{t-j}^2 es el error al cuadrado o residuo de la innovación con respecto a un proceso medio y ω como el intercepto. Para este se debe cumplir que $\omega > 0$, $\alpha_j \geq 0$ para $i = 1 \dots q$, y $\beta_j \geq 0$ para $i = 1 \dots p$. Si $\alpha_j + \beta_j < 1$, entonces el proceso del error ε tiene covarianza estacionaria y su varianza es no condicional e independiente en el tiempo, definida como $\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$. El orden de este modelo se define como GARCH(p,q), donde p es el orden de

los términos asociados a la varianza, y q el orden asociado a los términos ARCH o del error.

En consecuencia, el pronóstico de VaR en el periodo $t + n$ se puede estimar como el valor del pronóstico de la desviación estándar σ en el cuantil α , $\epsilon(0, 1)$, de acuerdo a una distribución asumida F y la información disponible al periodo t .

$$VaR_{t+n} \parallel \Omega_t = F(\alpha)\hat{\sigma}_{t+n} \quad (3)$$

Por ejemplo, si buscamos estimar el VaR un periodo adelante ($n = 1$), en el cuantil del 1% ($\alpha = 0,01$) y donde F se distribuye *student*, se tiene lo siguiente:

$$VaR_{t+1} \parallel \Omega_t = F(0,01)\hat{\sigma}_{t+1} \quad (4)$$

2.2. Modelos GARCH

A continuación, se detallan y describen los modelos de heterocedasticidad condicional utilizados en este trabajo para la estimación de volatilidad y el VaR . Se comienza desde el modelo estándar desarrollado por Bollerslev (1986) a modelos más avanzados, que incorporen variables que buscan ajustar de mejor forma las características de las series de tiempo descritas previamente, entre ellas, la asimetría, la curtosis, el efecto *leverage* y el efecto *Taylor*.

Para cada modelo se define el orden (p,q) , donde p es el número de rezago de los términos asociados a la varianza, y q el orden asociado a los términos del error.

- **Estándar GARCH (sGARCH)**: el modelo estándar generalizado de heterocedasticidad condicional desarrollado por Engle (1982) y generalizado por Bollerslev (1986) que propone que la varianza se puede estimar de acuerdo a las innovaciones del error y el rezago de la varianza.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (5)$$

Donde $\omega > 0$, $\alpha_j \geq 0$ y $\beta_j \geq 0$.

- **Exponencial GARCH (eGARCH)**: Nelson's (1991) incorpora una variable que busca capturar el efecto de asimetría de las series de tiempo, que se define como:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q [\alpha_j \varepsilon_{t-j} + \gamma_j (|\varepsilon_{t-j}| - E(|\varepsilon_{t-j}|))] + \sum_{j=1}^p \ln \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (6)$$

Donde $\omega > 0$, $\alpha_j + \beta_j < 1$, $-1 \leq \gamma_i \leq 1$.

Se espera que el α_j capture el efecto del signo del error y γ_j el efecto del tamaño de acuerdo a una distribución asumida.

- **Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH (gjrGARCH)**: este modelo desarrollado por los autores Glosten, Jagannathan, Runkle (1993), incorpora el efecto *leverage*. Se estima de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q (\alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \gamma_j I_{t-j} \varepsilon_{t-j}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (7)$$

Donde $\omega > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\gamma_j \geq 0$, $-1 \leq \gamma_i \leq 1$.

Se define la variable I_{t-j} que toma un valor igual a 1 solo cuando $\varepsilon_{t-j} < 0$ y valor 0 $\varepsilon_{t-j} \geq 0$. Esto denota el efecto de cuando el error es negativo, por lo que el término γ_j busca capturar el efecto *leverage*.

- **Asymmetric Power ARCH (apARCH)**: este modelo fue presentado por los autores Ding, Granger y Engle (1993), y es una extensión del modelo GARCH estándar que incorpora el enfoque asimétrico de la volatilidad. Considera que las innovaciones del error positivas y negativas, no tienen el mismo efecto sobre la volatilidad.

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j (|\varepsilon_{t-j}| - \gamma_i \varepsilon_{t-j})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (8)$$

Donde $\omega > 0$, $\delta \geq 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $-1 \leq \gamma_i \leq 1$.

El efecto *leverage* se denota por el parámetro γ_i y δ es una transformación de Box-Cox de la desviación estándar condicional. La principal diferencia es que este efecto de apalancamiento distingue entre los *shocks* positivos y negativos del proceso ARCH. Por lo tanto, las innovaciones positivas tienen un impacto de α_j , mientras que las innovaciones negativas tienen un impacto de $\alpha_j + \gamma_i$.

- **Integrated GARCH (iGARCH)**: corresponde a una versión restringida del modelo estándar GARCH, donde los autores Engle y Bollerslev (1986) establecen que coeficientes de las variables asociada a la varianza condicional y el término del error deben sumar 1.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (9)$$

Donde $\omega \geq 0$, $\alpha_j + \beta_j = 1$.

En la versión de *riskmetrics* se establece que $\omega = 0$ y el valor de $\beta_j = 0,94$, y en consecuencia $\alpha_j = 0,06$. Sin embargo, para este análisis se utiliza el modelo integrado estándar y no la versión definida por *riskmetrics*.

- **Threshold GARCH (TGARCH)**: modelo desarrollado por Zakoian (1994), con una estructura similar al modelo apARCH, pero que especifica el uso de la desviación estándar en vez de la varianza condicional.

$$\sigma_t = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j (|\varepsilon_{t-j}| + \gamma_i \varepsilon_{t-j}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j} \quad (10)$$

Donde $\omega > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $-1 \leq \gamma_i \leq 1$.

- **Absolute Value GARCH (AVGARCH)**: este modelo fue desarrollado por Taylor (1986), y también corresponde a una variación del modelo apARCH, ya que utiliza la

desviación estándar y el valor absoluto del error.

$$\sigma_t = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j |\varepsilon_{t-j}| + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j} \quad (11)$$

Donde $\omega > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$.

- **Nonlinear GARCH (NGARCH)**: desarrollado por Higgins y Bera (1992), el modelo no lineal, que estima la desviación estándar condicional elevada a δ , en función de los rezagos de la desviación estándar y los errores elevados a la misma potencia δ .

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j |\varepsilon_{t-j}|^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \quad (12)$$

Donde $\delta > 0$, $\omega > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$.

- **Nonlinear Asymmetric GARCH (NAGARCH)**: desarrollado por Engle y Ng (1993), es un modelo no lineal que incorpora el efecto *leverage* de acuerdo a la siguiente estructura:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j (\varepsilon_{t-j} - \gamma_i \sigma_{t-j})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (13)$$

Donde $\omega > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $[\alpha_j(1 + \gamma_i^2) + \beta_j] < 1$.

Lo que se busca es incorporar el efecto *leverage* a través del coeficiente γ_i , que generalmente debería ser positivo en el caso de existir apalancamiento en la serie de tiempo.

2.3. Distribución Condicional del Error

Un requisito clave de los procesos GARCH es que distribución condicional se auto descomponga, debido a la necesidad de que esta pueda hacer la transformación lineal para centrar la media y escalar las innovaciones (ε_t/σ_t). Cuando Engle (1982) introdujo el modelo GARCH estándar utilizó como supuesto que el término del error ε_t se distribuía normal, con media condicional 0 y varianza condicional σ_t^2 . Debido a la existencia de asimetría y curtosis en las series de retornos y los resultados obtenidos en la literatura, se asumirán cinco tipos de distribuciones, que permiten probar de distinta forma la densidad del error en los nueve tipos de modelos antes descritos:

- **Normal (NORM):** la distribución normal propuesta inicialmente por Engle (1982) para los modelos GARCH se especifica de la siguiente forma:

$$D(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{z_t^2}{\sigma_t^2}\right]} \quad (14)$$

- **T-student estandarizada (STD):** introducida por Bollerslev (1987), describe que esta distribución tiene media 0, varianza 1 y asimetría 0, donde incorpora un exceso de curtosis con dos grados de libertad ($v > 2$). Se formula de la siguiente forma:

$$D(z_t; v) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{\pi(v-2)}} \left(1 + \frac{z_t^2}{v-2}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad (15)$$

En este caso, $\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-x} x^{v-1} dx$, es la función gamma y v son los grados de libertad. Esta distribución es simétrica en 0 y cuando $v > 4$ la curtosis condicional excede el valor normal de tres, mientras que cuando $v \rightarrow \infty$, la distribución t-student converge a una distribución condicional normal estándar.

- **Generalized Error Distribution (GED):** Nelson (1991) sugirió el uso de esta distribución como alternativa, de acuerdo a la siguiente definición:

$$D(z_t; v) = \frac{v \exp(-0,5|z_t/\lambda|)}{2^{1+1/v} \Gamma(v^{-1}) \lambda} \quad (16)$$

En esta se establece que el parámetro v es el parámetro de densidad de las colas de la distribución mayor a cero. Cuando $v = 2$, Z_t se distribuye de forma normal estandarizada. En el caso de $v < 2$, tiene colas más gruesas que la distribución normal, mientras que en el caso de $v > 2$, la distribución tiene colas más delgadas que la normal estandarizada.

- **Normal-inverse Gaussian Distribution (NIG):** desarrollado por Barndorff-Nielsen (1978) y posteriormente por Jensen y Lunde (2001), esta se define como una distribución de probabilidad continua de varianza media normal y donde la mezcla de densidad es una distribución gaussiana inversa. Se denota de la siguiente forma:

$$D(z_t; a, b, \mu, \delta) = \frac{a}{\pi \delta} \exp(\sqrt{a^2 - b^2} + b \frac{(z - \mu)}{\delta}) q(\frac{x - u}{\delta})^{-1} K(aq(\frac{x - \mu}{\delta})) \quad (17)$$

En esta, $K(*)$ es un función modificada Bessel de tercer orden y $q(z) = \sqrt{1 + z^2}$, en donde es necesario que $a \geq |b| \geq 0$ y $\delta > 0$. Podemos interpretar a y b como parámetros donde el primero define la determinación de la pendiente y b la simetría. Si $a \rightarrow \infty$ y $b = 0$ la distribución es simétrica y se obtiene una distribución gaussiana en el límite. Mientras que μ es un parámetro de ubicación y δ de escala.

- **Johnson's SU-distribution (JSU):** N. L. Johnson (1949) y que posteriormente fue reparametrizada por Rigby and Stasinopoulos (2005), que corresponde a una transformación de la distribución normal, y se define como:

$$D(z_t; a, b, \mu, \delta) = \frac{a}{\delta \sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}} \theta \left[b + a \sinh^{-1} \left(\frac{x-\mu}{\delta} \right) \right] \quad (18)$$

Donde, $\theta(*)$ es la función de probabilidad de densidad de una distribución normal, μ es el parámetro de ubicación, δ de escala, b simetría y a la curtosis.

2.4. Estimador de Máxima Verosimilitud

La metodología de estimación de máxima verosimilitud es utilizada comúnmente para estimar modelos de tipo GARCH. Bajo el supuesto de que las innovaciones del error son aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) para la distribución z_t , se denota su función de densidad como $D(z_t; \eta)$, la función de máxima verosimilitud para la serie y_t con una muestra de T observaciones está dada por:

$$L(y_t; \eta) = \sum_{t=1}^T [\ln[D(z_t(\eta); v)] - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2(\eta))] \quad (19)$$

Donde η es el vector de los parámetros que deben estimarse para la media condicional, varianza condicional y densidad. El estimador de máxima verosimilitud $\hat{\eta}$ se obtiene al maximizar la ecuación $L(y_t; \eta)$.

2.5. Backtesting

Considerando que el objetivo es probar los pronósticos de VaR como una metodología de gestión de riesgos, buscamos medir la calidad de nuestro pronóstico de VaR , el que se basa en la calidad de nuestros pronósticos de volatilidad. Por lo anterior, es necesario seleccionar las métricas que midan esta calidad de forma más adecuada. Por una parte, se debe asumir que los pronósticos de volatilidad y el VaR son segados por varias razones, entre estas, problemas de muestreo o datos, modelos o especificaciones inapropiadas, y segundo porque se está pronosticando una variable inherentemente no observable, ya que no se observan valores del VaR una vez realizado el evento.

Es por lo anterior, que se busca evaluar que los pronósticos del VaR sean consistentes con las proyecciones realizadas de acuerdo al intervalo de confianza con que estos pronósticos fueron estimados. Adicionalmente, un modelo supuestamente adecuado no solo debe generar pronósticos estadísticos confiables del VaR , sino que también debe tener un mejor poder predictor que el resto de los modelos.

Se utilizarán dos medidas de adecuación estadística, una de cobertura no condicional, desarrollada por Kupiec (1995), y otra medida de cobertura condicional desarrollada por Christoffersen (1998).

- **Test de Cobertura No Condicional (Kupiec):** se debe calcular la suma de veces en que el retorno observado fue menor al pronóstico del VaR . Para esto se debe utilizar la variable I_{t+1} , que se puede calcular como la suma de veces que el retorno en el periodo fue menor que el VaR , en una muestra de tamaño T .

Primero, se utiliza una variable dicotómica para determinar las excepciones:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{si } y_{t+1} < VaR_{t+1|T} \\ 0, & \text{si } y_{t+1} \geq VaR_{t+1|T} \end{cases} \quad (20)$$

Se calcula la suma observada de excepciones en la muestra:

$$N = \sum_{t=1}^T I_t \quad (21)$$

Como lo describió el autor, el número de excepciones sigue una distribución binomial, $N \sim B(T, p)$, por lo que en consecuencia, el ratio estadístico apropiado de máxima verosimilitud, bajo la hipótesis nula de que $N/T = p$, se calcula como:

$$2\ln \left[\left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N} \left(\frac{N}{T}\right)^N \right] - 2\ln [(1-p)^{T-N} p^N] \quad (22)$$

Esta prueba se distribuye x^2 (chi cuadrado) con un grado de libertad por ser de características asintóticas. Esta puede rechazar modelos por tener muy pocas y muchas excepciones, pero de acuerdo a lo que indica el autor, su poder es relativamente más pobre, por lo que se complementa con el siguiente test.

- **Test de Cobertura Condicional (Christoffersen)**: el autor desarrolló un estadístico de prueba para probar un supuesto conjunto de cobertura no condicional e independencia de fallas. Su ventaja sobre el estadístico de Kupiec, es que incorpora condicionalidad en el pronóstico, que se puede describir como si las volatilidades son bajas en un período y altas en otros, el pronóstico debería responder a esta agrupación de eventos. Lo anterior, permite distinguir entre el efecto de agrupación y a los efectos asociados a los supuestos de distribución. El estadístico se calcula como:

$$-2\ln [(1-p)^{T-N} p^N] + 2\ln [(1-\pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1-\pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}] \sim x_2^2 \quad (23)$$

Donde, n_{ij} es el número de observaciones con valor i seguido de j , con $i, j = 0, 1$, y $\pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$, es la probabilidad correspondiente.

Si la secuencia de I_t es independiente, entonces las probabilidades de observar o no

observar una excepción del VaR en el próximo período estimado debe ser igual, lo que se denota como $\pi_{01} = \pi_{11} = p$. La principal ventaja de este estadístico de prueba es que puede rechazar un modelo que produce demasiadas o muy pocas excepciones de forma agrupadas, pero para que tenga poder informativo, debe tener una gran cantidad de observaciones.

Los valores críticos para los estadísticos de Kupiec y Christoffersen al 1% de confianza son de 6,63 y 9,21 respectivamente. Estos valores de referencia serán utilizados de manera de evaluar los pronósticos del VaR en la sección empírica.

3. Sección Empírica

3.1. Los Multifondos

El sistema de fondos de pensiones de Chile fue creado en el año 1980 como un mecanismo de capitalización individual donde cada afiliado posee una cuenta individual que es gestionada por una Administradora de Fondo de Pensiones (AFP). En esta cuenta se abonan periódicamente sus cotizaciones previsionales correspondientes al 10% de su remuneración imponible. Estos recursos son invertidos por las AFP con el objetivo de generar un retorno en un horizonte de tiempo, para que al momento de que el afiliado cumpla con la edad de jubilación pueda solicitar una pensión vitalicia o retiro programado con cargo al ahorro de su cuenta previsional.

Los afiliados tienen cinco alternativas de inversión o multifondos en las que puedes elegir invertir los aportes obligatorios a sus cuentas en sus AFP. Estos Fondos se les denominan alfabéticamente A, B, C, D y E, y su principal característica distintiva es el límite máximo y mínimo de exposición a renta variable que tiene cada uno, siendo el fondo A denominado como más riesgoso y el E el más conservador. El detalle por fondo, clasificación, exposición mínima y máxima a instrumentos de renta variable se muestra en el cuadro 1:

| Multifondo | Clasificación | Mínimo RV | Máximo RV |
|------------|-----------------|-----------|-----------|
| A | Más riesgoso | 40 % | 80 % |
| B | Riesgoso | 25 % | 60 % |
| C | Intermedio | 15 % | 40 % |
| D | Conservador | 5 % | 20 % |
| E | Más conservador | 0 % | 5 % |

Cuadro 1: Límites de exposición a Renta Variable por Fondo
Fuente: Superintendencia de Pensiones

De acuerdo al informe de inversiones de la Superintendencia de Pensiones del tercer trimestre de 2019, los multifondos alcanzaron un valor total de activos invertidos de USD

MM\$ 216.842.- (CLP MM 155.042.030.-) distribuidos en 59,6 % en instrumentos nacionales y 40,4 % en activos en el extranjero. Por una parte, el fondo A tiene una mayor exposición a instrumentos en el extranjero, llegando a 79,4 %, mientras que para el fondo C y E, la exposición a activos en el extranjero llegó a 45,4 % y 5,1 %. Al analizar su composición por tipo de instrumento, vemos que el fondo A tiene un total de 80,1 % en renta variable nacional y extranjera, y los fondos C y E, se componen de 39 % y 4,4 % en activos de acciones, fondos de inversión y fondos mutuos en ambas monedas. El detalle por fondo y tipo de instrumento se detalla a continuación en el cuadro 2:

| Tipo de instrumento / Fondo | A | C | E | TOTAL |
|-----------------------------|---------|---------|---------|---------|
| Nacional | 20.6 % | 54.6 % | 94.9 % | 59.6 % |
| Renta Variable | 18.5 % | 10.5 % | 2.4 % | 9.5 % |
| Renta Fija | 2.6 % | 44.5 % | 92.6 % | 50.5 % |
| Otros Nacionales | -0.5 % | -0.4 % | -0.1 % | -0.4 % |
| Extranjera | 79.4 % | 45.4 % | 5.1 % | 40.4 % |
| Renta Variable | 61.6 % | 28.5 % | 2.0 % | 26.7 % |
| Renta Fija | 17.4 % | 16.7 % | 3.0 % | 13.5 % |
| Otros Extranjeros | 0.4 % | 0.2 % | 0.1 % | 0.2 % |
| Total | 100.0 % | 100.0 % | 100.0 % | 100.0 % |

Cuadro 2: Composición de las carteras de los Fondos, junio 2019
Fuente: Superintendencia de Pensiones

Para dimensionar la importancia de los activos que gestionan los multifondos, de acuerdo a información de la Superintendencia de AFPs, estos representan aproximadamente el 73 % del PIB de Chile, con número de afiliados alcanzó un total de 5.538.683 al cierre de septiembre de 2019. Podemos observar que estos representan una proporción importante de recursos invertidos tanto en el país y extranjero, y que también afectan a una cantidad relevante de beneficiarios o inversionistas que son los propietarios de sus ahorros. Si bien son las administradoras las responsables de gestionar los cinco tipos de fondos disponibles, a cambio

del cobro de una comisión, deben cumplir con los límites definidos por la Ley de inversión en renta variable y fija, enmarcado dentro de la regulación establecida por la Comisión para el Mercado Financiero (CMF) y la Superintendencia de Pensiones, son los afiliados los que seleccionan el riesgo al que se quieren exponer al seleccionar el fondo que más les acomoda de acuerdo a su perfil de riesgo o edad.

Debido a la importancia de estos fondos y las distintas exposiciones a renta variable que presentan, es que se utilizarán las series de retornos de los multifondos A, C y E para estimar el *VaR* a través de los modelos GARCH descritos previamente. Con estos se podrá determinar cuál o cuáles serían los modelos y supuestos de distribución del error que entregan mejor calidad predictiva para pronosticar el *Value at Risk* y también entregar información a los afiliados respecto del riesgo de pérdida máxima de acuerdo a las opciones de inversión disponible.

3.2. Datos

Las series de tiempo utilizadas para estimar el *VaR* fueron los valores cuota diarios de los multifondos A, C y E, desde el 30 de septiembre del año 2002, año en que fueron creados, hasta el 29 de julio de 2019, los que fueron descargados de la página web de la Superintendencia de Pensiones. De estas, se eliminaron los días feriados y no hábiles con el objetivo de tener solo días en los cuales los valores cuota tuvieron variación. A junio del año 2019 se puede ver que el Fondo C es el que tiene mayor monto invertido con MM\$ 53.075.505.- de pesos chilenos, en comparación con el A y E, que alcanzaron MM\$ 19.559.059.- y MM\$ 28.662.690.- respectivamente. La evolución del valor patrimonial de estos fondos en el periodo evaluado se puede ver en el gráfico 1:

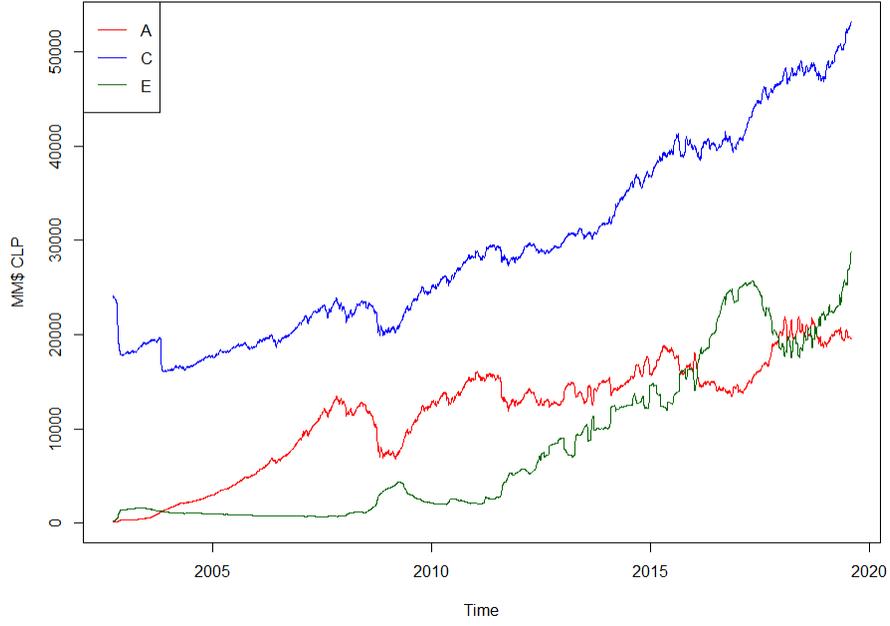


Figura 1: Valor Patrimonial Fondos A, C y E 30/09/2002 al 29/07/2019
Fuente: Elaboración Propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones

De lo anterior se calculó el retorno diario real logarítmico de cada fondo (A, C y E), en la cual y es el retorno real diario del fondo i , calculado como la variación del valor cuota (vc) de cada una de las AFP denominada como j , deflactada por la variación de la UF (uf) en el mismo periodo, ponderado por peso relativo del valor patrimonial del fondo de cada AFP sobre el valor patrimonial total de cada fondo (w_{ij}).

$$y_{t,i} = \sum_{t=1}^n \ln\left(\frac{vc_{t,f_{ij}}}{vc_{t-1,f_{ij}}} \frac{uf_{t-1}}{uf_t}\right) w_{ij} \quad (24)$$

La visualización de los retornos calculados se muestra en el gráfico 2:

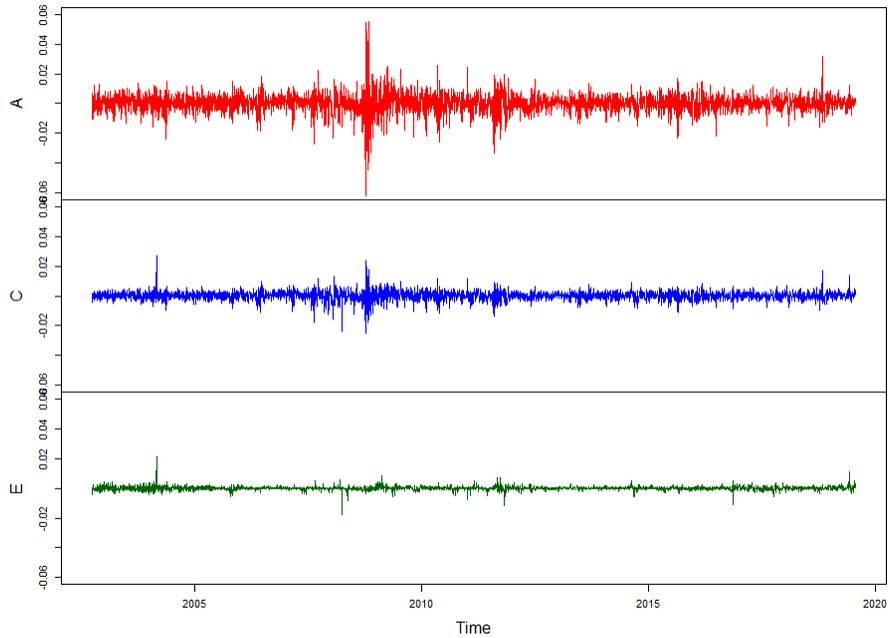


Figura 2: Retorno real diario de los Fondos A, C y E entre 30/09/2002 al 29/07/2019
Fuente: Elaboración Propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones

Gráficamente se puede apreciar las diferencias que tienen estos fondos, por una parte el retorno del fondo A tiene mayor volatilidad que el C y E, lo que tiene sentido por la composición entre renta fija y variable que tiene definido como límite cada fondo invertir, y por el tipo de instrumentos en los que tienen colocados sus activos de acuerdo a lo descrito en el cuadro 2.

A continuación, en el cuadro 3, se muestra la tabla descriptiva de las series diarias de retornos de los tres fondos utilizados en el periodo antes descrito.

| | A | C | E |
|--------------------|------------|------------|------------|
| media | 0.0002424 | 0.0002059 | 0.0001650 |
| desv. est. | 0.0062618 | 0.0030258 | 0.0012526 |
| mediana | 0.0006023 | 0.0003494 | 0.0001724 |
| mínimo | -0.062316 | -0.025196 | -0.017690 |
| máximo | 0.0551865 | 0.0270377 | 0.0215737 |
| asimetría | -0.608908 | -0.492393 | 0.1860513 |
| curtosis | 10.10688 | 7.94375 | 38.19164 |
| n | 4169 | 4169 | 4169 |
| Jarque-Bera | 18024*** | 11145*** | 253660*** |
| Dickey-Fuller Aug. | -14.035*** | -14.098*** | -12.979*** |

***Significativo al 1 %

Cuadro 3: Tabla descriptiva retornos reales diarios para los Fondos A, C y E entre 30/09/2002 y 29/07/2019
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

Al analizar las series de retornos de cada fondo, es relevante destacar que en las tres series presentan asimetría y curtosis, pero con diferencias entre sí. Por una parte, los fondos A y C, tienen asimetría negativa, es decir su distribución de retornos está ligeramente más inclinada hacia la derecha, mientras que para el fondo E se presenta asimetría positiva. Respecto de la curtosis, se puede ver que el fondo E es el que tiene las colas más largas, debido a que sus retornos se concentran más en la media, mientras que para el fondo A y C, se puede observar una menor cantidad de observaciones en las colas, este tipo de características se le conoce como leptocurtosis. El histograma de las series se puede ver en el anexo 2.

El fondo A, en promedio, es el que ha presentado mayor retorno y mayor volatilidad, mientras que el fondo C y E muestran menor retorno y menor volatilidad, lo que se puede explicar con los límites de exposición a renta variable de cada Fondo. Lo mismo sucede al

ver los mínimos y máximos, el fondo A es el que presenta mayor brecha, mientras que el C y E tienen disminuyen su diferencia.

Luego de determinar el proceso ARIMA óptimo de cada serie, se prueba la existencia de estacionariedad, lo que se realizó a través de un test de Dickey Fuller aumentado, cuyos resultados muestran que las series son estacionarias.

El proceso ARIMA de cada serie de retorno se definió utilizando el criterio de información Schwarz (SBIC), que permite seleccionar entre modelos, que entregó como resultado para cada serie el orden óptimo ARIMA(p,d,q) en el periodo evaluado sería, para el fondo A de (0,0,1), fondo C (0,0,1) y fondo E (1,0,2). Los resultados de la determinación del proceso ARIMA óptimo se pueden ver en el Anexo 3.

Finalmente, para cada serie y modelo ARIMA seleccionado, se revisa la existencia de procesos auto-regresivos de heterocedasticidad condicional, a través de un test de Ljung-Box, en el que se analizan los residuos del proceso ARIMA en búsqueda auto-correlación serial de los errores. De acuerdo a los resultados entregados, que se pueden revisar en el Anexo 4, se rechaza la hipótesis nula de no existencia de autocorrelación, y por lo tanto sería conveniente incorporar un proceso GARCH para modelar la volatilidad de las series.

4. Estimación y Resultados

El pronóstico del *VaR* se realiza a un día, es decir a $(n+1)$, con un $\alpha = 1\%$. Para todos los modelos se utiliza un orden $(1,1)$, iniciando en la observación 247, que corresponde a un año a partir del inicio de la muestra, con una ventana móvil y re-estimación de los coeficientes cada 25 observaciones. Considerando que son nueve modelos, cinco distribuciones del término del error y 157 re-estimaciones, se estimaron en total 16.956 modelos. Lo anterior se puede resumir en el esquema de la figura 3:

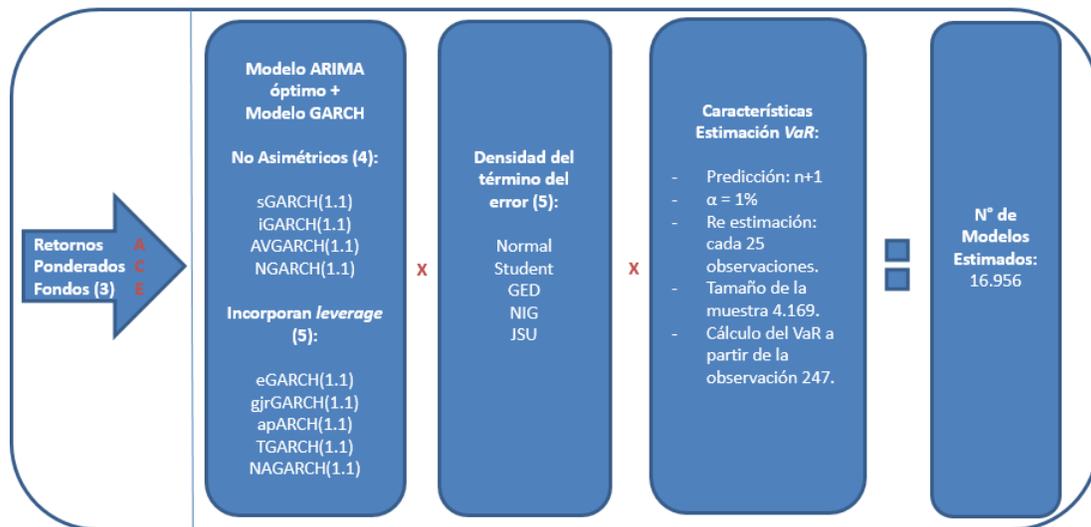


Figura 3: Esquema de estimación del *VaR*
Fuente: Elaboración Propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones

Utilizando los criterios de *Backtesting* del pronóstico del *VaR*, se utilizan los estadísticos de prueba de Cobertura Condicional (Kupiec) y No condicional (Christoffersen) para verificar la calidad de estas estimaciones, evaluando si estos son consistentes con las proyecciones realizadas de acuerdo al intervalo de confianza con que estos pronósticos fueron estimados, y luego se ordenan por el número de excepciones, que corresponde al número de veces que el retorno observado supera el pronóstico del *VaR*, y que de acuerdo al α de 1% sería de 39 excepciones. Los resultados obtenidos son disimiles entre cada serie de retorno, por lo que se analizan por separado.

Para la serie del fondo A, que presenta mayor volatilidad, los modelos apARCH y NA-

GARCH con distribución del error t-student y que incorporan el efecto *leverage* dentro de su formulación, tiene un poder predictivo de mejor calidad que el resto de los modelos, con 25 excepciones y aprobando con los test de cobertura Condicional y No Condicional. También los modelos GARCH y NGARCH con distribución t-student, tienen una calidad predictiva similar a los modelos anteriores con 26 excepciones, pero con la la diferencia que estos dos modelos no incorporan el efecto *leverage* en su predicción. Algo que se puede apreciar consistentemente es que la distribución condicional asumida del término del error t-student sería la más adecuada para esta serie, lo que se puede atribuir a que cuando se busca estimar el cuantil al 1 % de la volatilidad, esta distribución tiene colas más largas que el resto de las distribuciones e incorpora las características particulares de leptocurtosis y asimetría de la serie de retornos del fondo A. También existen otras combinaciones y modelos que presentan menos excepciones, pero que de acuerdo a los test de cobertura tienden a sobre estimar el *VaR*, como lo es el gjrGARCH, iGARCH, apARCH y NAGARCH, todas con distribución Johnson's SU, que corresponde a una transformación de la distribución normal. En la tabla 4 se muestran los resultados de los catorce mejores modelos, ordenados primero por los con mejorar calidad predictiva y luego por el número de excepciones. Los resultados de todas las combinaciones de modelos y distribuciones se pueden ver en el Anexo 1 tabla 10.

| Fondo A | | | | | | | |
|---------------------|----------|-------------|-------------------|---------------------|-------------------|----------|----------|
| Modelo-Distribución | N Excep. | UC (Kupiec) | H0 UC | CC (Christoffersen) | H0 CC | % Excep. | VaR loss |
| apARCH(1,1)-std | 25 | 5.976 | Fail to Reject H0 | 6.297 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 74.28 |
| NAGARCH(1,1)-std | 25 | 5.976 | Fail to Reject H0 | 6.297 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 74.56 |
| GARCH(1,1)-std | 26 | 5.108 | Fail to Reject H0 | 5.455 | Fail to Reject H0 | 0,7 % | 74.70 |
| NGARCH(1,1)-std | 26 | 5.108 | Fail to Reject H0 | 5.455 | Fail to Reject H0 | 0,7 % | 74.75 |
| iGARCH(1,1)-std | 23 | 7.957 | Reject H0 | 8.229 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 75.75 |
| eGARCH(1,1)-nig | 29 | 2.957 | Fail to Reject H0 | 26.56 | Reject H0 | 0,7 % | 75.75 |
| gjrGARCH(1,1)-jsu | 8 | 37.25 | Reject H0 | 37.28 | Reject H0 | 0,2 % | 85.38 |
| iGARCH(1,1)-jsu | 9 | 34.17 | Reject H0 | 34.22 | Reject H0 | 0,2 % | 87.61 |
| apARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 86.37 |
| NAGARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 86.47 |
| GARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 86.53 |
| NGARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 86.60 |
| gjrGARCH(1,1)-nig | 16 | 17.88 | Reject H0 | 18.01 | Reject H0 | 0,4 % | 75.39 |
| gjrGARCH(1,1)-std | 19 | 13.00 | Reject H0 | 13.18 | Reject H0 | 0,5 % | 72.46 |

Cuadro 4: Combinación modelos y distribuciones con mejor calidad predictiva del *VaR* para Fondo A de acuerdo al *Backtesting*

Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

Los pronósticos del VaR para la serie del fondo C, son similares al fondo A, muestran que en 7 de los 14 modelos, una distribución asumida t-student para el término del error, sería la más adecuada para realizar las estimaciones. Lo anterior atribuible a que sus retornos también muestran la existencia de leptocurtosis y asimetría, por lo que sería adecuado suponer la misma distribución para el término del proceso ARCH. Con respecto a los modelos que tienen menor número de excepciones, el que tiene mejor resultado es el iGARCH con 29 excepciones, luego el apARCH y NGARCH, ambos con 31 excepciones y cumpliendo con las medidas de adecuación estadística en el proceso de *Backtesting*. Nuevamente, hay modelos como el gjrGARCH, apARCH y NAGARCH con distribución asumida Johnson's SU que tienen 5, 9 y 9 excepciones respectivamente, pero que no cumplen con las pruebas de cobertura y tienden sobre-estimar los pronósticos del VaR . Los resultados de las 45 combinaciones de modelos y distribuciones se pueden ver en el Anexo 1 tabla 11, mientras que los catorce mejores se presentan en cuadro 5.

| Fondo C | | | | | | | |
|---------------------|----------|-------------|-------------------|---------------------|-------------------|----------|----------|
| Modelo-Distribución | N Excep. | UC (Kupiec) | H0 UC | CC (Christoffersen) | H0 CC | % Excep. | VaR loss |
| iGARCH(1,1)-std | 29 | 2.957 | Fail to Reject H0 | 3.389 | Fail to Reject H0 | 0,7 % | 38,23 |
| apARCH(1,1)-std | 31 | 1.875 | Fail to Reject H0 | 2.369 | Fail to Reject H0 | 0,8 % | 38,13 |
| NGARCH(1,1)-std | 31 | 1.875 | Fail to Reject H0 | 2.369 | Fail to Reject H0 | 0,8 % | 38,33 |
| TGARCH(1,1)-std | 49 | 2.282 | Fail to Reject H0 | 3.522 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 35,85 |
| iGARCH(1,1)-jsu | 49 | 2.282 | Fail to Reject H0 | 4.322 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 38,32 |
| gjrGARCH(1,1)-std | 50 | 2.753 | Fail to Reject H0 | 4.045 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 35,78 |
| GARCH(1,1)-std | 55 | 5.700 | Fail to Reject H0 | 7.265 | Fail to Reject H0 | 1,4 % | 37,06 |
| NGARCH(1,1)-nig | 56 | 6.403 | Fail to Reject H0 | 8.025 | Fail to Reject H0 | 1,4 % | 37,27 |
| AVGARCH(1,1)-std | 50 | 2.753 | Fail to Reject H0 | 11.19 | Reject H0 | 1,3 % | 37,48 |
| GARCH(1,1)-nig | 24 | 6.925 | Reject H0 | 7.220 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 39,48 |
| apARCH(1,1)-nig | 24 | 6.925 | Reject H0 | 7.220 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 39,23 |
| NAGARCH(1,1)-nig | 24 | 6.925 | Reject H0 | 7.220 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 39,35 |
| gjrGARCH(1,1)-jsu | 5 | 48.14 | Reject H0 | 48.15 | Reject H0 | 0,1 % | 42,87 |

Cuadro 5: Combinación modelos y distribuciones con mejor calidad predictiva del VaR para Fondo C de acuerdo al *Backtesting*

Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

A diferencia del fondo A y C, los retornos del fondo E presentan mayor curtosis, es decir, su distribución tiene mayor concentración de retornos cercano a la media y colas muy largas, lo que se podría describir como una distribución similar a una gaussiana normal inversa (NIG). Como se muestra en los resultados presentados en el cuadro 6, los modelos que asumen

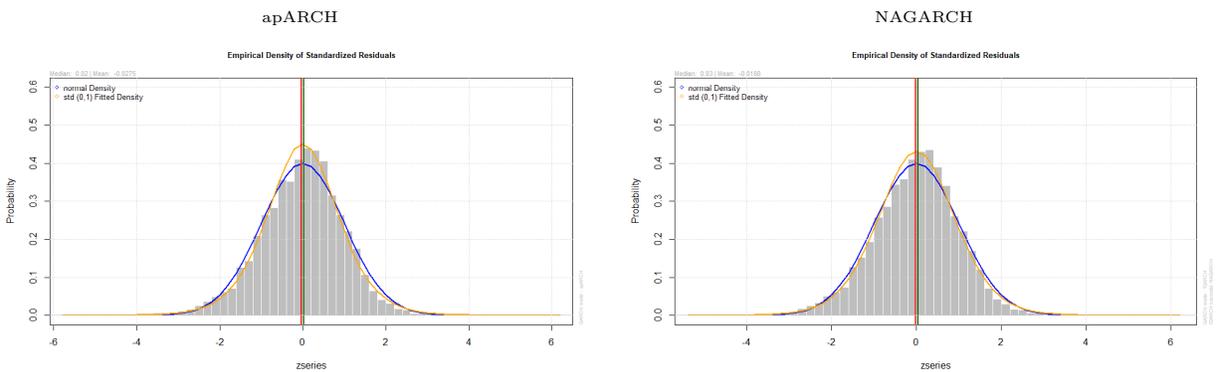
distribuciones NIG, son los que tienen mejor calidad predictiva de acuerdo a las medidas de adecuación estadística (Kupiec y Christoffersen), con un número de excepciones menor al 1% de la muestra, pero la distribución t-student también muestra resultados satisfactorios respecto de los *test* de cobertura condicional y no condicional, pero con un mayor número de excepciones. Entre los modelos a analizar, se pueden encontrar modelos que incluyen el efecto *leverage*, como lo son gjrGARCH, NAGARCH y apARCH, y también aquellos que no lo hacen, como GARCH y NGARCH. La predicción obtenida de los modelos gjrGARCH, apARCH y NAGARCH en combinación con distribución asumida del error Johnson's SU generan 19 excepciones, pero no cumplen con las pruebas de cobertura condicional y no condicional de Kupiec y Christoffersen respectivamente. Los resultados completos para la serie de este fondo se puede ver en el Anexo 1 tabla 12.

| Fondo E | | | | | | | |
|---------------------|----------|-------------|-------------------|---------------------|-------------------|----------|----------|
| Modelo-Distribución | N Excep. | UC (Kupiec) | H0 UC | CC (Christoffersen) | H0 CC | % Excep. | VaR loss |
| gjrGARCH(1,1)-nig | 33 | 1.053 | Fail to Reject H0 | 2.203 | Fail to Reject H0 | 0,8 % | 29.65 |
| GARCH(1,1)-nig | 35 | 0.475 | Fail to Reject H0 | 4.694 | Fail to Reject H0 | 0,9 % | 26.96 |
| NGARCH(1,1)-nig | 35 | 0.475 | Fail to Reject H0 | 4.694 | Fail to Reject H0 | 0,9 % | 26.97 |
| NAGARCH(1,1)-nig | 35 | 0.475 | Fail to Reject H0 | 4.694 | Fail to Reject H0 | 0,9 % | 26.99 |
| apARCH(1,1)-nig | 36 | 0.274 | Fail to Reject H0 | 4.295 | Fail to Reject H0 | 0,9 % | 27.05 |
| iGARCH(1,1)-nig | 40 | 0.015 | Fail to Reject H0 | 3.320 | Fail to Reject H0 | 1,0 % | 30.35 |
| gjrGARCH(1,1)-std | 42 | 0.194 | Fail to Reject H0 | 0.706 | Fail to Reject H0 | 1,1 % | 30.42 |
| GARCH(1,1)-std | 44 | 0.566 | Fail to Reject H0 | 3.255 | Fail to Reject H0 | 1,1 % | 27.46 |
| iGARCH(1,1)-std | 44 | 0.566 | Fail to Reject H0 | 3.255 | Fail to Reject H0 | 1,1 % | 30.61 |
| apARCH(1,1)-std | 45 | 0.821 | Fail to Reject H0 | 3.370 | Fail to Reject H0 | 1,2 % | 27.54 |
| NGARCH(1,1)-std | 49 | 2.282 | Fail to Reject H0 | 4.322 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 27.71 |
| gjrGARCH(1,1)-ged | 51 | 3.264 | Fail to Reject H0 | 5.078 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 28.26 |
| apARCH(1,1)-ged | 51 | 3.264 | Fail to Reject H0 | 7.867 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 25.96 |
| gjrGARCH(1,1)-norm | 51 | 3.264 | Fail to Reject H0 | 5.078 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 28.26 |

Cuadro 6: Combinación modelos y distribuciones con mejor calidad predictiva del *VaR* para Fondo E de acuerdo al *Backtesting*

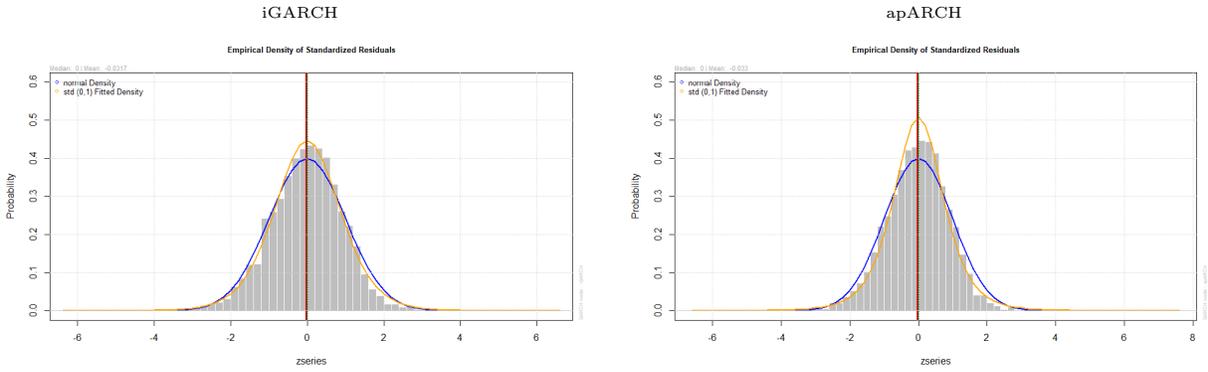
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

Como se describió previamente, la distribución asumida de las innovaciones que ajusta mejor el modelo para las series de retornos del fondo A es la t-student. Al analizar gráficamente la distribución empírica del término del error comparada con una distribución normal y la estimada t-student, es esta última la que tiene más similitud a la observada, y por lo tanto nos podría entregar información relevante respecto de que es la más adecuada a utilizar al momento de realizar los pronósticos del *VaR*. En la tabla 7 se muestran los modelos con mejor poder predictor: apARCH y NAGARCH a modo de ejemplo.



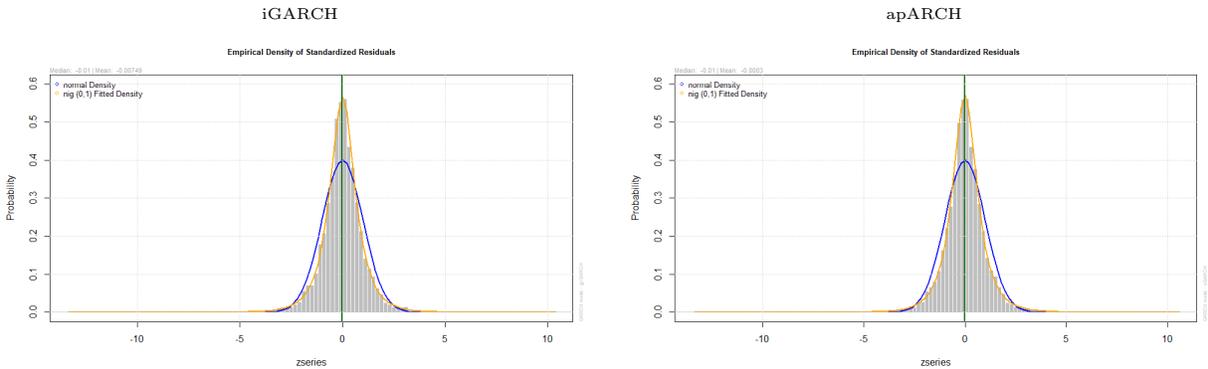
Cuadro 7: Distribución residuos estandarizados por modelo - Fondo A
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

Lo mismo sucede para las series de retorno del fondo C, la distribución asumida de las innovaciones con mejor poder predictor, es la t-student. En el cuadro 8 se muestra la comparación de las distribuciones utilizando dos de los modelos con mejor poder predictor: iGARCH y apARCH.



Cuadro 8: Distribución residuos estandarizados por modelo - Fondo C
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

Finalmente, para la serie de retornos del fondo E la distribución asumida para los modelos sería la normal inversa gaussiana o NIG, ya que es la que mejor ajusta la densidad empírica del término ARCH. Lo anterior se puede apreciar en cuadro 9, que muestra los modelos con mejor calidad de pronóstico.



Cuadro 9: Distribución residuos estandarizados por modelo - Fondo E
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

5. Conclusiones

En este trabajo se analizó empíricamente los pronósticos del *VaR* con un α de 1 % para las series de retorno real de los multifondos A, C y E de las Administradoras de Fondos de Pensiones utilizando distintos modelos de heterocedasticidad condicional (GARCH, eGARCH, gjrGARCH, apARCH, iGARCH, TGARCH, AVGARCH, NGARCH, NGARCH) y asumiendo distintas distribuciones de densidad para el término del error (Normal, T-student, GED, NIG y JSU).

Los resultados obtenidos de los *test* de adecuación estadística permiten concluir que algunas combinaciones de modelo y distribución del error entregan pronósticos de calidad al momento de estimar pérdidas potenciales para las series utilizadas, por lo que esta metodología podría ser utilizada por los administradores de fondos, reguladores o afiliados para medir el riesgo de mercado al que se ven expuestos los activos de los fondos de las AFP.

La selección de la combinación de modelo y distribución del término del error es un proceso importante al momento de definir cuáles son aquellas combinaciones que entregarán pronósticos de mejor calidad. De acuerdo a los resultados obtenidos para las tres series de retornos A, C y E, existen modelos que incluyen el efecto *leverage* que presentan buenos resultados, como es el caso de apARCH, NAGARCH y gjrGARCH, y los modelos GARCH, NGARCH e iGARCH que no incluyen el efecto del apalancamiento, por lo no se podría suponer que un modelo que incorpore el efecto *leverage* en su estimación sea potencialmente mejor que otro que no lo agregue en su formulación. Junto a lo anterior, es muy relevante seleccionar correctamente la distribución del término del error, ya que, de acuerdo a los resultados obtenidos, es esto lo que produce las diferencias entre modelos de buena y mala calidad predictiva considerando los resultados del *Backtesting* y el número de excepciones.

Las series de retornos de los fondos A, C y E presentan asimetría y leptocurtosis, que es una característica presente en la mayoría de las series de retornos. Los resultados nos indican que para las series del fondo A y C, sería más adecuado asumir una distribución del error de tipo t-student, mientras para el fondo E, sería más conveniente suponer una distribución

de tipo normal gaussiana inversa como primera opción y t-student como segunda.

Analizando las características de las series de tiempo y las combinaciones de modelo que presentan mejores resultados en su pronóstico, podemos inferir que el proceso clave es determinar cuál es la distribución del error más adecuada para cada serie, para lo que sería conveniente analizar la distribución empírica de los retornos de cada una, ya que esta parece ser un buen *proxy* de cómo sería la distribución del término del error. Al analizar los histogramas de las series de tiempo (Anexo 2, gráficos 4, 5 y 6) y la distribución estimada de los errores podemos ver la similitud entre ambas distribuciones (cuadro 7, 8 y 9).

Finalmente, el no encontrar una combinación adecuada de modelo-distribución podría llevar a sub-estimar o sobre-estimar las pérdidas potenciales con este tipo de modelos, por lo que no necesariamente un tipo de combinación modelo-distribución que es adecuada para una serie de tiempo podría tener los mismos resultados en otra serie que tiene características distintas.

Referencias

- [1] Angelidis, T., Benos, A., Degiannakis, S., 2004. The use of GARCH models in VaR estimation. *Statistical Methodology*. 1. 105-128.
- [2] Abada P., Benitob, S., López, C., 2014. A comprehensive review of Value at Risk methodologies. *The Spanish Review of Financial Economics*, Vol. 12 Issue 1, 15-32.
- [3] Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics* 21, 307–327.
- [4] Bollerslev, T., 1987. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *Review of Economics and Statistics* 69, 542–547.
- [5] Black, F., 1976. Studies in stock price volatility changes. In: *Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economics Statistics Section, American Association*, pp. 177–181.
- [6] Christoffersen, P., 1998. Evaluating interval forecasting. *International Economic Review* 39, 841–862.
- [7] Ding, Z., Granger, C.W.J., Engle, R.F., 1993. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance* 1, 83–106.
- [8] Engle, R., T. Bollerslev, 1986, Modelling the persistence of conditional variances, *Econometric Review* 5, 1-50.
- [9] Engle, R., Ng, V.K., 1993. Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*. 48 (5): 1749–1778.
- [10] Engle, R., 1982. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica* 50, 987–1008.

- [11] Glosten, L. R., R. Jagannathan, and D. E. Runkle, 1993. On the relation between the expected value and the volatility of nominal excess return on stocks. *Journal of Finance* 48: 1779-1801
- [12] Higgins, M. L., Bera, A. K., 1992. A class of nonlinear arch models. *International Economic Review*, 33, 137–158.
- [13] Jorion, P., 2001. *Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk*. McGraw-Hill.
- [14] Jensen, M. B., Lunde, A., 2001. The NIG-S & ARCH model: a fat-tailed, stochastic, and autoregressive conditional heteroskedastic volatility model, *Econometrics Journal* 4, 319—342.
- [15] Johnson, N. L., 1949, Systems of frequency curves generated by methods of translation, in *Biometrika*, Vol. 36, pp. 149–176.
- [16] Kupiec, P., 1995. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives* 2, 73–84.
- [17] Morgan, J.P., 1996. *Riskmetrics technical document*, 4th ed. J.P. Morgan, New York.
- [18] Nelson, D., 1991. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica* 59, 347–370.
- [19] R.A. Rigby and D.M. Stasinopoulos, 2005. Generalized additive models for location, scale and shape. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 54, 507-554.
- [20] So, Mike KP, and L. H. Philip, 2006. Empirical analysis of GARCH models in value at risk estimation. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* 16.2, 180-197.

- [21] So, M.K.P., 2000. Long-term memory in stock market volatility. *Applied Financial Economics* 10, 519–524.
- [22] Taylor, S., 1986. *Modeling financial time series*. John Wiley and Sons, Chichester, UK.
- [23] Zakoian, Jean-Michel, 1994. Threshold heteroskedastic models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, vol. 18, 931-955.
- [24] Superintendencia de Pensiones, 2019. *Inversión de los Fondos de Pensiones: Segundo Trimestre 2019*

Anexos

Anexo 1: Resultados *Backtesting VaR* Fondos A, C y E

| Modelo-Distribución | Fondo A | | | | | | |
|---------------------|----------|-------------|-------------------|---------------------|-------------------|----------|----------|
| | N Excep. | UC (Kupiec) | H0 UC | CC (Christoffersen) | H0 CC | % Excep. | VaR loss |
| apARCH(1,1)-std | 25 | 5.976 | Fail to Reject H0 | 6.297 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 74.28 |
| NAGARCH(1,1)-std | 25 | 5.976 | Fail to Reject H0 | 6.297 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 74.56 |
| GARCH(1,1)-std | 26 | 5.108 | Fail to Reject H0 | 5.455 | Fail to Reject H0 | 0,7 % | 74.70 |
| NGARCH(1,1)-std | 26 | 5.108 | Fail to Reject H0 | 5.455 | Fail to Reject H0 | 0,7 % | 74.75 |
| iGARCH(1,1)-std | 23 | 7.957 | Reject H0 | 8.229 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 75.75 |
| eGARCH(1,1)-nig | 29 | 2.957 | Fail to Reject H0 | 26.56 | Reject H0 | 0,7 % | 75.75 |
| gjrGARCH(1,1)-jsu | 8 | 37.25 | Reject H0 | 37.28 | Reject H0 | 0,2 % | 85.38 |
| iGARCH(1,1)-jsu | 9 | 34.17 | Reject H0 | 34.22 | Reject H0 | 0,2 % | 87.61 |
| apARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 86.37 |
| NAGARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 86.47 |
| GARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 86.53 |
| NGARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 86.60 |
| gjrGARCH(1,1)-nig | 16 | 17.88 | Reject H0 | 18.01 | Reject H0 | 0,4 % | 75.39 |
| gjrGARCH(1,1)-std | 19 | 13.00 | Reject H0 | 13.18 | Reject H0 | 0,5 % | 72.46 |
| iGARCH(1,1)-nig | 19 | 13.00 | Reject H0 | 13.18 | Reject H0 | 0,5 % | 78.15 |
| apARCH(1,1)-nig | 22 | 9.077 | Reject H0 | 9.326 | Reject H0 | 0,6 % | 77.12 |
| NAGARCH(1,1)-nig | 22 | 9.077 | Reject H0 | 9.326 | Reject H0 | 0,6 % | 77.38 |
| GARCH(1,1)-nig | 22 | 9.077 | Reject H0 | 9.326 | Reject H0 | 0,6 % | 77.57 |
| NGARCH(1,1)-nig | 22 | 9.077 | Reject H0 | 9.326 | Reject H0 | 0,6 % | 77.62 |
| gjrGARCH(1,1)-ged | 63 | 12.30 | Reject H0 | 12.30 | Reject H0 | 1,6 % | 70.73 |
| gjrGARCH(1,1)-norm | 63 | 12.30 | Reject H0 | 12.30 | Reject H0 | 1,6 % | 70.77 |
| apARCH(1,1)-norm | 74 | 24.71 | Reject H0 | 24.95 | Reject H0 | 1,9 % | 75.59 |
| apARCH(1,1)-ged | 74 | 24.71 | Reject H0 | 24.95 | Reject H0 | 1,9 % | 75.61 |
| iGARCH(1,1)-ged | 75 | 26.01 | Reject H0 | 26.22 | Reject H0 | 1,9 % | 76.23 |
| NAGARCH(1,1)-ged | 76 | 27.34 | Reject H0 | 27.52 | Reject H0 | 1,9 % | 75.97 |
| NAGARCH(1,1)-norm | 77 | 28.70 | Reject H0 | 28.84 | Reject H0 | 2,0 % | 76.04 |
| NGARCH(1,1)-norm | 77 | 28.70 | Reject H0 | 28.84 | Reject H0 | 2,0 % | 76.37 |
| NGARCH(1,1)-ged | 77 | 28.70 | Reject H0 | 28.84 | Reject H0 | 2,0 % | 76.42 |
| GARCH(1,1)-ged | 78 | 30.08 | Reject H0 | 30.20 | Reject H0 | 2,0 % | 76.40 |
| GARCH(1,1)-norm | 78 | 30.08 | Reject H0 | 30.20 | Reject H0 | 2,0 % | 76.48 |
| iGARCH(1,1)-norm | 81 | 34.38 | Reject H0 | 36.84 | Reject H0 | 2,1 % | 77.33 |
| eGARCH(1,1)-jsu | 89 | 46.94 | Reject H0 | 116.3 | Reject H0 | 2,3 % | 1836. |
| eGARCH(1,1)-norm | 116 | 99.54 | Reject H0 | 155.2 | Reject H0 | 3,0 % | 2446. |
| eGARCH(1,1)-std | 124 | 117.7 | Reject H0 | 176.2 | Reject H0 | 3,2 % | 107.5 |
| eGARCH(1,1)-ged | 126 | 122.5 | Reject H0 | 202.8 | Reject H0 | 3,2 % | 15804 |
| TGARCH(1,1)-std | 377 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 9,6 % | 157.1 |
| TGARCH(1,1)-jsu | 385 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 9,8 % | 158.0 |
| AVGARCH(1,1)-jsu | 394 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 10,1 % | 162.6 |
| TGARCH(1,1)-norm | 443 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 11,3 % | 181.7 |
| AVGARCH(1,1)-std | 447 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 11,4 % | 180.0 |
| TGARCH(1,1)-nig | 470 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 12,0 % | 188.1 |
| TGARCH(1,1)-ged | 470 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 12,0 % | 192.9 |
| AVGARCH(1,1)-nig | 479 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 12,2 % | 190.5 |
| AVGARCH(1,1)-norm | 479 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 12,2 % | 191.5 |
| AVGARCH(1,1)-ged | 544 | >123 | Reject H0 | >203 | Reject H0 | 13,9 % | 214.6 |

Cuadro 10: Combinación modelos y distribuciones con mejor calidad predictiva del *VaR* para Fondo A de acuerdo al *Backtesting*

Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

| Fondo C | | | | | | | |
|---------------------|----------|-------------|-------------------|---------------------|-------------------|----------|----------|
| Modelo-Distribución | N Excep. | UC (Kupiec) | H0 UC | CC (Christoffersen) | H0 CC | % Excep. | VaR loss |
| iGARCH(1,1)-std | 29 | 2.957 | Fail to Reject H0 | 3.389 | Fail to Reject H0 | 0,7 % | 38,23 |
| apARCH(1,1)-std | 31 | 1.875 | Fail to Reject H0 | 2.369 | Fail to Reject H0 | 0,8 % | 38,13 |
| NGARCH(1,1)-std | 31 | 1.875 | Fail to Reject H0 | 2.369 | Fail to Reject H0 | 0,8 % | 38,33 |
| TGARCH(1,1)-std | 49 | 2.282 | Fail to Reject H0 | 3.522 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 35,85 |
| iGARCH(1,1)-jsu | 49 | 2.282 | Fail to Reject H0 | 4.322 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 38,32 |
| gjrGARCH(1,1)-std | 50 | 2.753 | Fail to Reject H0 | 4.045 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 35,78 |
| GARCH(1,1)-std | 55 | 5.700 | Fail to Reject H0 | 7.265 | Fail to Reject H0 | 1,4 % | 37,06 |
| NGARCH(1,1)-nig | 56 | 6.403 | Fail to Reject H0 | 8.025 | Fail to Reject H0 | 1,4 % | 37,27 |
| AVGARCH(1,1)-std | 50 | 2.753 | Fail to Reject H0 | 11.19 | Reject H0 | 1,3 % | 37,48 |
| GARCH(1,1)-nig | 24 | 6.925 | Reject H0 | 7.220 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 39,48 |
| apARCH(1,1)-nig | 24 | 6.925 | Reject H0 | 7.220 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 39,23 |
| NAGARCH(1,1)-nig | 24 | 6.925 | Reject H0 | 7.220 | Fail to Reject H0 | 0,6 % | 39,35 |
| gjrGARCH(1,1)-jsu | 5 | 48.14 | Reject H0 | 48.15 | Reject H0 | 0,1 % | 42,87 |
| apARCH(1,1)-jsu | 9 | 34.17 | Reject H0 | 34.22 | Reject H0 | 0,2 % | 43,06 |
| NAGARCH(1,1)-jsu | 9 | 34.17 | Reject H0 | 34.22 | Reject H0 | 0,2 % | 43,13 |
| GARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 43,18 |
| eGARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 100,9 |
| NGARCH(1,1)-jsu | 10 | 31.32 | Reject H0 | 31.37 | Reject H0 | 0,3 % | 43,20 |
| eGARCH(1,1)-nig | 20 | 11.59 | Reject H0 | 11.80 | Reject H0 | 0,5 % | 43,18 |
| gjrGARCH(1,1)-nig | 21 | 10.28 | Reject H0 | 10.51 | Reject H0 | 0,5 % | 38,12 |
| iGARCH(1,1)-nig | 21 | 10.28 | Reject H0 | 10.51 | Reject H0 | 0,5 % | 39,21 |
| eGARCH(1,1)-std | 22 | 9.077 | Reject H0 | 11.58 | Reject H0 | 0,6 % | 27,1 |
| NAGARCH(1,1)-std | 58 | 7.916 | Reject H0 | 9.658 | Reject H0 | 1,5 % | 36,04 |
| gjrGARCH(1,1)-ged | 59 | 8.726 | Reject H0 | 10.52 | Reject H0 | 1,5 % | 36,54 |
| gjrGARCH(1,1)-norm | 59 | 8.726 | Reject H0 | 10.52 | Reject H0 | 1,5 % | 36,52 |
| apARCH(1,1)-ged | 64 | 13.27 | Reject H0 | 13.28 | Reject H0 | 1,6 % | 36,53 |
| NAGARCH(1,1)-ged | 66 | 15.32 | Reject H0 | 15.92 | Reject H0 | 1,7 % | 39,18 |
| NAGARCH(1,1)-norm | 66 | 15.32 | Reject H0 | 15.92 | Reject H0 | 1,7 % | 39,18 |
| apARCH(1,1)-norm | 67 | 16.39 | Reject H0 | 16.94 | Reject H0 | 1,7 % | 39,01 |
| NGARCH(1,1)-ged | 68 | 17.49 | Reject H0 | 17.98 | Reject H0 | 1,7 % | 39,38 |
| GARCH(1,1)-norm | 68 | 17.49 | Reject H0 | 17.98 | Reject H0 | 1,7 % | 39,37 |
| GARCH(1,1)-ged | 69 | 18.62 | Reject H0 | 19.07 | Reject H0 | 1,8 % | 38,05 |
| iGARCH(1,1)-ged | 71 | 20.97 | Reject H0 | 27.53 | Reject H0 | 1,8 % | 39,51 |
| iGARCH(1,1)-norm | 72 | 22.19 | Reject H0 | 28.53 | Reject H0 | 1,8 % | 39,41 |
| NGARCH(1,1)-norm | 75 | 26.01 | Reject H0 | 26.22 | Reject H0 | 1,9 % | 38,31 |
| eGARCH(1,1)-norm | 145 | 170.5 | Reject H0 | 229.8 | Reject H0 | 3,7 % | 50,45 |
| eGARCH(1,1)-ged | 153 | 192.3 | Reject H0 | 261.9 | Reject H0 | 3,9 % | 50,98 |
| TGARCH(1,1)-jsu | 442 | >193 | Reject H0 | >261 | Reject H0 | 11,3 % | 86,10 |
| AVGARCH(1,1)-jsu | 447 | >193 | Reject H0 | >261 | Reject H0 | 11,4 % | 87,26 |
| TGARCH(1,1)-norm | 528 | >193 | Reject H0 | >261 | Reject H0 | 13,5 % | 101,4 |
| TGARCH(1,1)-nig | 536 | >193 | Reject H0 | >261 | Reject H0 | 13,7 % | 101,2 |
| AVGARCH(1,1)-nig | 540 | >193 | Reject H0 | >261 | Reject H0 | 13,8 % | 101,9 |
| AVGARCH(1,1)-norm | 566 | >193 | Reject H0 | >261 | Reject H0 | 14,4 % | 107,6 |
| TGARCH(1,1)-ged | 569 | >193 | Reject H0 | >261 | Reject H0 | 14,5 % | 107,0 |
| AVGARCH(1,1)-ged | 612 | >193 | Reject H0 | >261 | Reject H0 | 15,6 % | 114,1 |

Cuadro 11: Combinación modelos y distribuciones con mejor calidad predictiva del *VaR* para Fondo C de acuerdo al *Backtesting*

Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

| Fondo E | | | | | | | |
|---------------------|----------|-------------|-------------------|---------------------|-------------------|----------|----------|
| Modelo-Distribución | N Excep. | UC (Kupiec) | H0 UC | CC (Christoffersen) | H0 CC | % Excep. | VaR loss |
| gjrGARCH(1,1)-nig | 33 | 1.053 | Fail to Reject H0 | 2.203 | Fail to Reject H0 | 0,8 % | 29.65 |
| GARCH(1,1)-nig | 35 | 0.475 | Fail to Reject H0 | 4.694 | Fail to Reject H0 | 0,9 % | 26.96 |
| NGARCH(1,1)-nig | 35 | 0.475 | Fail to Reject H0 | 4.694 | Fail to Reject H0 | 0,9 % | 26.97 |
| NAGARCH(1,1)-nig | 35 | 0.475 | Fail to Reject H0 | 4.694 | Fail to Reject H0 | 0,9 % | 26.99 |
| apARCH(1,1)-nig | 36 | 0.274 | Fail to Reject H0 | 4.295 | Fail to Reject H0 | 0,9 % | 27.05 |
| iGARCH(1,1)-nig | 40 | 0.015 | Fail to Reject H0 | 3.320 | Fail to Reject H0 | 1,0 % | 30.35 |
| gjrGARCH(1,1)-std | 42 | 0.194 | Fail to Reject H0 | 0.706 | Fail to Reject H0 | 1,1 % | 30.42 |
| GARCH(1,1)-std | 44 | 0.566 | Fail to Reject H0 | 3.255 | Fail to Reject H0 | 1,1 % | 27.46 |
| iGARCH(1,1)-std | 44 | 0.566 | Fail to Reject H0 | 3.255 | Fail to Reject H0 | 1,1 % | 30.61 |
| apARCH(1,1)-std | 45 | 0.821 | Fail to Reject H0 | 3.370 | Fail to Reject H0 | 1,2 % | 27.54 |
| NGARCH(1,1)-std | 49 | 2.282 | Fail to Reject H0 | 4.322 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 27.71 |
| gjrGARCH(1,1)-ged | 51 | 3.264 | Fail to Reject H0 | 5.078 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 28.26 |
| apARCH(1,1)-ged | 51 | 3.264 | Fail to Reject H0 | 7.867 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 25.96 |
| gjrGARCH(1,1)-norm | 51 | 3.264 | Fail to Reject H0 | 5.078 | Fail to Reject H0 | 1,3 % | 28.26 |
| NAGARCH(1,1)-std | 56 | 6.403 | Fail to Reject H0 | 6.450 | Fail to Reject H0 | 1,4 % | 18.30 |
| apARCH(1,1)-norm | 53 | 4.406 | Fail to Reject H0 | 12.02 | Reject H0 | 1,4 % | 25.96 |
| NAGARCH(1,1)-ged | 55 | 5.700 | Fail to Reject H0 | 16.61 | Reject H0 | 1,4 % | 25.95 |
| GARCH(1,1)-ged | 56 | 6.403 | Fail to Reject H0 | 21.20 | Reject H0 | 1,4 % | 25.93 |
| NGARCH(1,1)-ged | 56 | 6.403 | Fail to Reject H0 | 25.83 | Reject H0 | 1,4 % | 25.90 |
| NAGARCH(1,1)-norm | 56 | 6.403 | Fail to Reject H0 | 16.99 | Reject H0 | 1,4 % | 25.96 |
| eGARCH(1,1)-jsu | 112 | 90.85 | Reject H0 | 241.3 | Reject H0 | 2,9 % | 24.37 |
| eGARCH(1,1)-norm | 140 | 157.3 | Reject H0 | 243.4 | Reject H0 | 3,6 % | Inf |
| gjrGARCH(1,1)-jsu | 19 | 13.00 | Reject H0 | 13.18 | Reject H0 | 0,5 % | 32.58 |
| apARCH(1,1)-jsu | 19 | 13.00 | Reject H0 | 16.04 | Reject H0 | 0,5 % | 29.40 |
| NAGARCH(1,1)-jsu | 19 | 13.00 | Reject H0 | 16.04 | Reject H0 | 0,5 % | 29.39 |
| GARCH(1,1)-jsu | 21 | 10.28 | Reject H0 | 12.96 | Reject H0 | 0,5 % | 29.29 |
| NGARCH(1,1)-jsu | 21 | 10.28 | Reject H0 | 12.96 | Reject H0 | 0,5 % | 29.28 |
| iGARCH(1,1)-jsu | 22 | 9.077 | Reject H0 | 11.58 | Reject H0 | 0,6 % | 32.86 |
| NGARCH(1,1)-norm | 57 | 7.142 | Reject H0 | 26.09 | Reject H0 | 1,5 % | 25.89 |
| GARCH(1,1)-norm | 58 | 7.916 | Reject H0 | 21.93 | Reject H0 | 1,5 % | 25.94 |
| iGARCH(1,1)-norm | 59 | 8.726 | Reject H0 | 22.36 | Reject H0 | 1,5 % | 28.91 |
| iGARCH(1,1)-ged | 60 | 9.570 | Reject H0 | 22.83 | Reject H0 | 1,5 % | 28.96 |
| eGARCH(1,1)-ged | 76 | 27.34 | Reject H0 | 55.09 | Reject H0 | 1,9 % | 21.60 |
| TGARCH(1,1)-norm | 85 | 40.47 | Reject H0 | 42.47 | Reject H0 | 2,2 % | 18.69 |
| eGARCH(1,1)-nig | 90 | 48.61 | Reject H0 | 147.0 | Reject H0 | 2,3 % | 22.52 |
| eGARCH(1,1)-std | 93 | 53.78 | Reject H0 | 174.0 | Reject H0 | 2,4 % | 24.18 |
| ARCH(1,1)-std | 259 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 6,6 % | 34.20 |
| AVGARCH(1,1)-std | 317 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 8,1 % | 37.62 |
| TGARCH(1,1)-jsu | 364 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 9,3 % | 40.29 |
| AVGARCH(1,1)-jsu | 398 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 10,2 % | 41.56 |
| TGARCH(1,1)-nig | 462 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 11,8 % | 45.07 |
| TGARCH(1,1)-ged | 466 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 11,9 % | 48.58 |
| AVGARCH(1,1)-nig | 484 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 12,3 % | 46.10 |
| AVGARCH(1,1)-ged | 486 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 12,4 % | 50.07 |
| AVGARCH(1,1)-norm | 523 | >54 | Reject H0 | >175 | Reject H0 | 13,3 % | 51.60 |

Cuadro 12: Combinación modelos y distribuciones con mejor calidad predictiva del *VaR* para Fondo E de acuerdo al *Backtesting*

Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

Anexo 2: Histograma de retornos ponderados fondo A, C y E

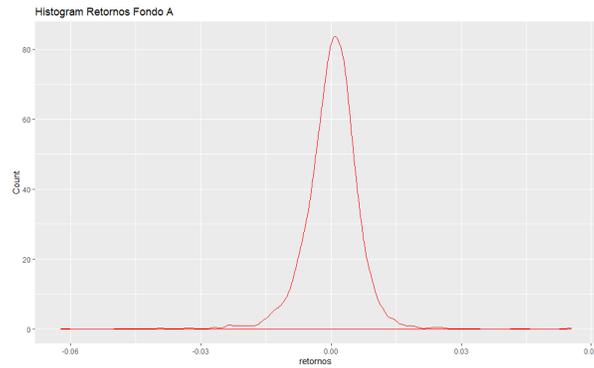


Figura 4: Histograma retorno ponderado fondo A entre 30/09/2002 al 29/07/2019
Fuente: Elaboración Propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones

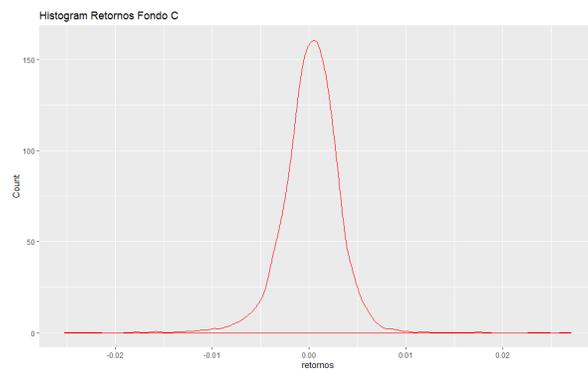


Figura 5: Histograma retorno ponderado fondo C entre 30/09/2002 al 29/07/2019
Fuente: Elaboración Propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones

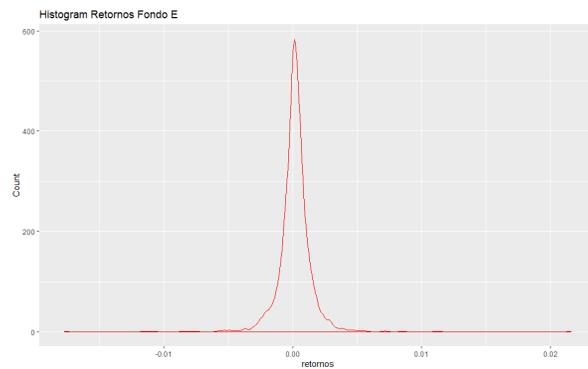


Figura 6: Histograma retorno ponderado fondo E entre 30/09/2002 al 29/07/2019
Fuente: Elaboración Propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones

Anexo 3: Resultados Selección ARIMA óptimo para retornos Fondo A, C y E

| ARIMA Fondo A | SBIC |
|--|------------------|
| ARIMA(2,0,2) with non-zero mean | -30774.80 |
| ARIMA(0,0,0) with non-zero mean | -30454.23 |
| ARIMA(1,0,0) with non-zero mean | -30781.00 |
| ARIMA(0,0,1) with non-zero mean | -30789.80 |
| ARIMA(0,0,0) with zero mean | -30456.31 |
| ARIMA(1,0,1) with non-zero mean | -30786.01 |
| ARIMA(0,0,2) with non-zero mean | -30785.88 |
| ARIMA(1,0,2) with non-zero mean | -30778.28 |
| ARIMA(0,0,1) with zero mean | -30793.99 |
| ARIMA(1,0,1) with zero mean | -30790.56 |
| ARIMA(0,0,2) with zero mean | -30790.33 |
| ARIMA(1,0,0) with zero mean | -30785.86 |
| ARIMA(1,0,2) with zero mean | -30782.73 |

Cuadro 13: Resultado determinación proceso ARIMA óptimo retornos Fondo A
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

| ARIMA Fondo C | SBIC |
|--|------------------|
| ARIMA(2,0,2) with non-zero mean | -36796.49 |
| ARIMA(0,0,0) with non-zero mean | -36518.37 |
| ARIMA(1,0,0) with non-zero mean | -36809.90 |
| ARIMA(0,0,1) with non-zero mean | -36817.50 |
| ARIMA(0,0,0) with zero mean | -36507.44 |
| ARIMA(1,0,1) with non-zero mean | -36811.41 |
| ARIMA(0,0,2) with non-zero mean | -36811.73 |
| ARIMA(1,0,2) with non-zero mean | -36803.02 |
| ARIMA(0,0,1) with zero mean | -36812.94 |

Cuadro 14: Resultado determinación proceso ARIMA óptimo retornos Fondo C
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

| ARIMA Fondo E | SBIC |
|--|------------------|
| ARIMA(2,0,2) with non-zero mean | -44053.75 |
| ARIMA(0,0,0) with non-zero mean | -43872.15 |
| ARIMA(1,0,0) with non-zero mean | -43999.81 |
| ARIMA(0,0,1) with non-zero mean | -43984.16 |
| ARIMA(0,0,0) with zero mean | -43808.70 |
| ARIMA(1,0,2) with non-zero mean | -44062.64 |
| ARIMA(0,0,2) with non-zero mean | -43994.16 |
| ARIMA(1,0,1) with non-zero mean | -44057.10 |
| ARIMA(1,0,3) with non-zero mean | -44054.83 |
| ARIMA(0,0,3) with non-zero mean | -44025.85 |
| ARIMA(2,0,1) with non-zero mean | -44045.05 |
| ARIMA(2,0,3) with non-zero mean | -44045.61 |
| ARIMA(1,0,2) with zero mean | -44052.88 |

Cuadro 15: Resultado determinación proceso ARIMA óptimo retornos Fondo E
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central

Anexo 3: Resultados prueba de residuos Ljung-Box para procesos ARIMA seleccionado series de retornos fondos A, C y E

| Serie fondo | Ljung-Box test para residuos proceso ARIMA 12 rezagos |
|-------------|---|
| A (0,0,1) | X-squared = 3899.5, df = 12, p-value <2e-16 |
| C (0,0,1) | X-squared = 1585.1, df = 12, p-value <2e-16 |
| E (1,0,2) | X-squared = 34.082, df = 12, p-value = 0.0006548 |

Cuadro 16: Ljung-Box test para residuos proceso ARIMA series fondos A, C y E
Fuente: Elaboración propia en base a datos de Superintendencia de Pensiones y Banco Central