



**“El impacto de shocks agregados en firmas que tienen  
productividades heterogéneas”**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE**

**Magíster en Economía**

**Alumno: Ignacio Rojas King**

**Profesor Guía: Rodrigo Alfaro Arancibia**

**Santiago 9, septiembre 2020**

# El impacto de *shocks* agregados en firmas que tienen productividades heterogéneas

Ignacio Rojas

9 de septiembre de 2020

## Resumen

En el siguiente trabajo se desarrolla un modelo de empresas con heterogeneidad en las productividades y que se encuentran afectadas por un shock agregado a la productividad. Se encuentra que esta especificación se ajusta de mejor forma a cifras agregadas de inversión y producto. Además, predice que empresas de menor productividad se ven más seriamente afectadas ante *shocks* agregados, tanto en desvíos de su estado estacionario como de la persistencia de estos *shocks*.

# 1. Introducción

Los datos microeconómicos muestran una persistente evidencia sobre la heterogeneidad presente en hogares, tanto en consumo, riqueza, ingreso, por ejemplo, en donde destacan los trabajos de Achdou (2016), Auclert (2017), Buera (2015), Kaplan et al. (2018) y Moll (2014) y en empresas, las que presentan diferencias en sus productividades, niveles de inversión y otros aspectos, en donde destacan trabajos de Bachmann et al. (2013), Khan y Thomas (2008) y (2013), Terry (2017) y Winberry (2018). El enfoque comúnmente utilizado en economía para analizar estas temáticas es el modelamiento en tiempo discreto, el que genera un ambiente más conocido para los economistas, sin embargo, es costoso computacionalmente, porque los vectores de estado tienen que contener la distribución de los agentes o firmas.

Este trabajo desarrolla un modelo para empresas heterogéneas en términos de que estas poseen diferentes productividades idiosincráticas dependientes de su historia. El modelo describe una simplificación de la decisión de las firmas sobre la inversión, contingente a los estados de capital y productividad que posee. En primera instancia se analiza el estado estacionario de la economía y se realiza estática comparativa <sup>1</sup> y posteriormente se discute las respuestas de las firmas con la incorporación de un *shock* agregado a la productividad de la economía, en donde se utiliza el algoritmo de Ahn et al. (2017) logrando una ganancia de eficiencia computacional.

Tanto en el análisis estacionario al realizar estática comparativa con parámetros globales del modelo como en la sección de *shock* agregado a la productividad agregada de la economía destacan diversos efectos no lineales y relevantes a lo largo del continuo de productividades de las firmas, aspecto que no ha sido estudiado en profundidad en la literatura. Este trabajo presenta una forma eficiente de analizar este tipo de efectos heterogéneos en los diferentes puntos del continuo de productividades y capital, en donde se muestra el mayor impacto de las empresas menos productivas a *shocks* agregados.

Trabajos anteriores sobre modelos de agentes heterogéneos en tiempo continuo se han desarrollado en base a los primeros modelos de este tipo Aiyagari (1994), Bewley (1986) y Huggett (1993). Estos modelos son la base de la literatura de agentes heterogéneos con la incorporación de mercados incompletos, en donde esto se entiende como la existencia de un tope máximo a la deuda (activos negativos) que puede poseer un hogar. Los trabajos de Achdou (2016), Buera (2015), Kaplan et al. (2018) y Moll (2014) se enfocan en preguntas de desigualdad, de política monetaria y *misallocation* en este tipo de ambientes. El trabajo reciente de Song et al. (2019) muestra evidencia que la desigualdad de los ingresos laborales se han incrementado principalmente entre salarios medios entre empresas, en donde concluyen que estos efectos son principalmente

---

<sup>1</sup>Basada en diversos momentos obtenidos de la simulación realizada al incorporar el *shock* agregado a la productividad

debido a un aumento en la segregación, por lo que los diferentes efectos de *shock* exógenos a las empresas puede terminar teniendo importantes efectos en términos de desigualdad. Esto último muestra que el análisis desde la modelación de las empresas es igualmente relevante, por lo que se toman los avances realizados por estos autores en términos computacionales y se extienden a un modelo con firmas heterogéneas.

En esta tesis se presenta un modelo simple de las empresas en donde estas enfrentan fricciones en la inversión y una restricción de un capital positivo para cada período. En este modelo se realiza una simplificación de la decisión de inversión al modelar con costos convexos de inversión, y asumir que el resultado de irrelevancia encontrado por Khan y Thomas (2008) se cumple<sup>2</sup>, por lo que la inversión agregada puede ser representada por un modelo con costos convexos. Se modela solo la parte real de la economía por lo que no hay un desequilibrio del precio óptimo como es habitual en la literatura que busca modelar la inversión como Bachmann et al. (2013), Bloom (2007) y Khan y Thomas (2008) que modelan una economía con firmas heterogéneas de forma explícita.

El modelo se encuentra en tiempo continuo, dado que genera una ventaja computacional frente a los modelos en tiempo discreto, ya que al utilizar la formulación en tiempo continuo es posible utilizar los algoritmos presentados por Ahn et al. (2017) para generar un código eficiente y simple de comprender. Esto se produce porque el tiempo continuo permite reducir el problema de las firmas heterogéneas a un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales. En donde en primer lugar se resuelve numéricamente la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para encontrar las funciones de políticas óptimas del problemas de cada uno de las firmas, en donde se consideran los precios como dados, y posteriormente se resuelve la ecuación de Kolmogorov Forward (KFE), también conocida como ecuación de Fokker-Planck que al trabajar con su forma incondicional entrega la función de distribución límite de las firmas como función de los estados, la que se interpreta como la función de distribución de estado estacionario de los agentes, en este caso empresas, para cada una de los posibles variables de estado.

Hasta este punto los niveles de productividad provienen de un proceso de difusión, por lo que existen un continuo de niveles de producción, los que se discretizan formando una grilla lo suficientemente densa. Sin embargo, en la literatura que trata agentes heterogéneos es usual que se modele los tipos de agentes de una forma simplificada, incorporando solo dos tipos de hogares como lo expusieron por primera vez Campbell y Mankiw (1989). A partir de esto último surge la interrogante de si esta es una buena simplificación para el caso del modelamiento de las firmas, por lo que se analiza esto tanto en estado estacionario como al incorporar un *shock* agregado

---

<sup>2</sup>Ellos encuentran que este supuesto sobre las volatilidades de los *shocks* de productividad se cumple en los datos que analizaron para la economía de Estados Unidos y la parametrización realizada en este trabajo sigue la línea del supuesto.

a la productividad. Este modelo, en donde hay solo dos tipos de empresas en en que hay dos niveles de productividad, alta o baja y esta salta siguiendo un proceso de *Poisson*, puede ser comprendido como una economía que modela a las PyMEs y las grandes empresas y el proceso de *Poisson* corresponde a la probabilidad de una PyME de convertirse en una gran empresa y *vice versa*. La segunda modelación tiene un continuo de niveles que sigue un proceso de difusión el cual es discretizado y corresponde a todo el espectro de posibles de productividad y tamaño de capital acumulado. Si bien el proceso de *Poisson* resulta ser una buena aproximación del modelo de difusión en estado estacionario, presenta varias limitaciones cuando se incorpora el *shock* agregado. Estas se materializan a través de un menor ajuste de los datos.

La parametrización utilizada es esencialmente la misma que utilizan Khan y Thomas (2008) y Bachmann et al. (2013), salvo en aquellos parámetros en los que el modelo difiere como es el parámetro de la estructura de costos, ya que en este trabajo se asumen costos cuadráticos y se calibró este parámetro con el objetivo de que se logre tener una inversión media en torno al 20 %, de forma similar a la lógica usada por Khan y Thomas (2008) para ese parámetro. Con esto se logra que las desviaciones estándar y las correlaciones de la simulación con este modelo estén más cerca de los obtenidos en los datos reportados por King y Rebelo (1999). Adicionalmente se logra que la persistencia de las variables agregadas estén cercanas a las reportadas en los datos, en comparación a otros modelos de la literatura. En relación a los cambios en estado estacionario se encuentra la existencia de efectos no lineales a lo largo del continuo de niveles de productividad cuando se realiza un análisis de estática comparativa. Al incluir el *shock* agregado a la productividad de las empresas y analizar los efectos desagregados del *shock* agregado en las empresas según sus niveles de productividad, se encuentran efectos dispares tanto en magnitud y duración para los diferentes tipos de firmas separadas por quintiles.

De este modo, esta tesis contribuye en cuantificar, a través de agregados macroeconómicos, la incorporación de múltiples firmas, acogiendo el hecho empírico de que existen empresas con distintos niveles de productividad. A diferencia de modelos *ad hoc* que imponen la existencia de firmas con alta y baja productividad, en este trabajo las diferencias de productividades se producen mediante la acumulación de sucesivos *shocks* en los niveles de productividad a lo largo del tiempo. Por lo que, *ex-ante* las empresas son iguales, sin embargo, *ex-post* son dependientes de las diferentes trayectorias de *shocks* que han sufrido.

La modelación en tiempo continuo para el problema de una empresa en específico como en la distribución de estas en capital y productividad es por conveniencia. Esto es producto de la dualidad existente entre las ecuaciones de HJB y KFE, reduciendo el problema computacional de forma importante. Cabe señalar que los trabajos iniciales en economía cuantitativa se desarrollaron considerando firmas representativas que resolvían problemas de optimización dinámica a través de control óptimo (Ramsey, 1928). En términos de modelación en tiempo continuo con

firmas heterogéneas Luttmer (2007) analiza la distribución de firmas a través de incrementos en la productividad para empresas que ingresan a la economía. En relación a los análisis de *shocks* agregados en tiempo continuo y diferenciales en la función de distribución del modelo calibrado hasta el mejor de mis conocimientos no conozco literatura relacionada sobre firmas heterogéneas.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma. En la sección 2 se describe el modelo con un continuo de firmas en un continuo de posibles niveles de productividad, en donde el nivel de productividad sigue un proceso de difusión de logaritmo de un proceso Orstein-Uhlenbeck, con el objetivo que en la calibración pueda seguir la forma encontrada en los datos de la distribución de productividad de las firmas y el modelo con dos tipos de productividad. En la sección 3 se detalla la computación de estos modelos y la forma de utilizar el método de diferencias finitas. En la sección 4 se compara un modelo de una firma representativa con los dos casos de modelos de firmas heterogéneas. La sección 5 presenta los efectos de un cambio de parámetros entre estados estacionarios y sus consecuencias en la distribución de las empresas. La sección 6 discute la computación del algoritmo del método de Ahn et al. (2017) para la inclusión del *shock* agregado, la calibración y los efectos de este. Finalmente, la sección 7 concluye.

## 2. El modelo de empresas con diferentes niveles de productividad en estado estacionario

### 2.1. Las empresas con un proceso de difusión

El modelo se realiza en tiempo continuo, en donde hay un continuo de empresas con diferentes niveles de productividad, las cuales deciden que nivel de inversión realizan en el período actual, internalizando la existencia de costos convexos en la inversión y la restricción de un capital positivo como mínimo admisible<sup>3</sup>. A su vez las empresas consideran y conocen que la productividad sigue un proceso estocástico.

Las empresas poseen una función de producción simple, dada por  $F(k_t, z_t) = z_t k_t^\alpha$ , en donde  $z_t$  corresponde a la productividad idiosincrática de la empresa en el período  $t$ ,  $k_t$  es el capital de la firma y  $\alpha$  corresponde al parámetro de rendimiento del capital, solo se requiere de capital positivo para producir, dado que la inclusión de un hogar representativo el trabajo se entregaría de forma inelástica<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>La restricción de capital positivo surge naturalmente desde los fundamentos microeconómicos, sin embargo, computacionalmente surge el problema de la indefinición del problema en el punto de 0 capital, por lo que al discretizar el continuo de capital se impuso un capital mínimo de 0.225 unidades de capital, lo que hace que existan firmas restringidas. La elección del valor mínimo de la grilla se trata más adelante en el trabajo, dado que depende de la discretización tanto del capital como de la productividad

<sup>4</sup>Adicionalmente se estaría incorporando una variable de estado extra lo que ralentizaría la convergencia de los algoritmos sin obtener una ganancia en el análisis.

Formalmente, el problema de una firma  $i$ -ésima cualquiera con un nivel  $z$  de productividad (aleatoria), con un capital  $k$  cualquiera y la función de producción  $F(k_t, z_t)$  definida anteriormente, la cual presenta retornos decrecientes a escala, con el objetivo de que sea óptimo la existencia de más de una firma que produce el mismo bien final en estado estacionario, con un parámetro  $\chi$  de costos convexos a la inversión, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\max_{\{i\}} E_t \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \left[ z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \left( \frac{i_t}{k_t} \right)^2 k_t \right] dt \quad (1)$$

$$s.a \quad \dot{k}_t = i_t - \delta k_t \quad (2)$$

$$dz_t = \mu(z_t)dt + \sigma(z_t)W_t \quad (3)$$

$$k_t > 0 \quad (4)$$

En el problema anterior  $i_t$  corresponde al nivel de inversión que la empresa escoge en el período presente ( $t$ ),  $\chi$  es el costo cuadrático de la inversión o desinversión producida en el período. La ecuación (2) corresponde al movimiento del capital, quedando definido este como la inversión menos la depreciación del *stock* de capital que mantenía la firma. En (3) se define el el proceso de difusión de la productividad idiosincrática de las empresas el que sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck en logaritmos, el cual se define

$$d\log(z_t) = -\theta \log(z_t)dt + \sigma^2 dW_t$$

En donde  $W_t$  corresponde a un proceso de *Wiener*. Si expresamos el proceso de difusión anterior en niveles, utilizando el lema de  $\hat{\text{Ito}}$  en la transformación del proceso en logaritmos a niveles, se obtiene,

$$dz_t = \theta(-\log(z_t) + \frac{\sigma^2}{2})z_t dt + \sigma^2 z_t^2 dW_t \quad (5)$$

este proceso al ser una transformación de un proceso Ornstein-Uhlenbeck en donde  $\log(z_t)$  se distribuye de forma normal, implicando que en niveles, la productividad converge a una distribución lognormal. Por último, (4) corresponde a la necesidad de capital positivo para producir.

### 2.1.1. Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

La ecuación de Bellman del problema presentado en (1-3) se define de la siguiente forma:

$$\rho V(k_t, z_t) = \max_{i_t} \left\{ z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t} + \frac{E_t[dV(k_t, z_t)]}{dt} \right\}$$

en donde  $V(k_t, z_t)$  corresponde a la función valor de la empresa  $i$ -ésima condicional a los estados del capital del período presente y al nivel actual de productividad idiosincrática.

La derivación completa de la ecuación de HJB se encuentra en el apéndice A.1. Sin embargo, la esencia de la derivación es, a partir de la ecuación de Bellman, utilizar el lema de Íto en conjunto al proceso de difusión de la productividad, haciendo tender el tiempo intervalo temporal a 0 se puede obtener la expresión de la ecuación de HJB dada de la siguiente manera:

$$\rho V(k, z) = \max_i \left\{ zk^\alpha - i - \frac{\chi}{2} \left( \frac{i}{k} \right)^2 k + \frac{\partial V(k, z)}{\partial k} (i - \delta k) + \frac{\partial V(k, z)}{\partial z} \mu(z) + \frac{\partial^2 V(k, z)}{\partial z^2} \frac{\sigma^2(z)}{2} \right\} \quad (6)$$

La decisión óptima de inversión en estado estacionario por parte de una firma genérica está dada por la siguiente CPO, en donde se define  $\frac{\partial V(k, z)}{\partial k} \equiv \partial_k V$  para obtener expresiones reducidas en el resto del trabajo.

$$\{i\} : i^* = \frac{(\partial_k V - 1)k}{\chi} \quad (7)$$

Si reemplazamos esta condición de optimalidad (7) en la ecuación (6) de HJB, entonces obtenemos:

$$\rho V(k, z) = \left\{ zk^\alpha - \frac{(\partial_k V - 1)k}{\chi} - \frac{\chi}{2} \left( \frac{(\partial_k V - 1)}{\chi} \right)^2 k + \partial_k V \left( \frac{(\partial_k V - 1)k}{\chi} - \delta k \right) + \partial_z V \mu(z) + \partial_{zz} V \frac{\sigma^2(z)}{2} \right\} \quad (8)$$

La ecuación (8) tiene términos no lineales, lo que hace el método de diferencias finitas implícito o explícito por si solo no sea factible de utilizar para obtener la función valor que se busca. Sin embargo, puede utilizarse un método de diferencias finitas semi-implícito, dado que utiliza tanto el método explícito para simplificar las partes no lineales y luego el método implícito para resolver el resto de la EDP<sup>5</sup>. Un aspecto relevante para emplear este método es que en la parte de la inversión, que es la parte no lineal de la ecuación, no existe una derivada cruzada de la función valor lo que hace que pueda emplearse estos métodos.

En la sección 3 se discutirá el algoritmo a emplear y sus condiciones de estabilidad y convergencia.

---

<sup>5</sup>El utilizar este método semi-implícito es semejante al algoritmo de *Hopscotch* propuesto por Gourlay (1970) y esta adaptación para simplificar la resolución de la no linealidad es empleada por Hartley (2010), en donde muestra que este algoritmo converge y Achdou et al. (2020) lo utilizan para su modelo de agentes heterogéneos.



### 2.1.2. Kolmogorov Forward Equation (KFE)

Para poder caracterizar el equilibrio general de este modelo necesitamos conocer la función de densidad para las firmas según sus variables de estado. Esta función de densidad puede ser obtenida mediante dos diferentes ecuaciones parciales diferenciales conocidas en economía como Kolmogorov Forward Equation y Kolmogorov Backward Equation, en donde la primera de estas es útil para la caracterización de la distribución límite, como explica Stockey (2009).

El proceso de difusión de la productividad en niveles definida por (5), puede escribirse de manera genérica como se mostró en la definición inicial del problema de la empresa dada por la ecuación (3) con la forma

$$dz_t = \mu(z_t)dt + \sigma(z_t)dW$$

Dado que el proceso de difusión de la productividad en niveles dado en (5),  $\mu(z_t)$  y  $\sigma(z_t)$  se definen como  $\mu(z_t) \equiv \theta(\overline{\log(z_t)} - \log(z_t) + \frac{\sigma^2}{2})z_t$  y  $\sigma(z_t) \equiv \sigma^2 z_t^2$ .

Como se mencionó anteriormente la función de distribución de las firmas se puede encontrar al resolver alguna de las ecuaciones de *Kolmogorov*, sin embargo, como estamos interesados en la distribución de estado estacionario ( $g(z, t)$ ) se utiliza la KFE, que se define a continuación.

$$\frac{\partial g(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\mu(z)g(z, t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma^2 g(z, t)) \quad (9)$$

Si estamos enfocados en la distribución de estado estacionario, entonces la ecuación anterior dada por la definición de una distribución en estado estacionario ( $g(z, \tau) = g(z), \forall t > \tau$ ). Esto hace que la ecuación se transforme en

$$0 = -\frac{d}{dz}(\mu(z)g(z)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dz^2}(\sigma^2 g(z)) \quad (10)$$

Al tener una función de distribución que depende no solo de  $z$ , sino que de la otra variable de estado  $k$ , entonces hay que utilizar la ecuación de *Kolmogorov* en su versión multivariada con la que se obtiene que la distribución de las firmas ( $g(k, z)$ ) sigue la siguiente EDP,

$$0 = -\frac{\partial}{\partial k}((i^*(k, z) - \delta k)g(k, z)) - \frac{\partial}{\partial z}(\mu(z)g(k, z)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma^2 g(k, z)) \quad (11)$$

## 2.2. Hogar representativo

La economía está habilitada por un hogar representativo, el cual recibe un ingreso  $y_t$ , en que puede estar compuesto por una parte endógena (los beneficios de las firmas) y una exógena, el hogar decide cuanto consumir y ahorrar condicional a los activos que poseen, por lo que resuelve el siguiente problema,

$$\max_{c_t, s_t} E_t \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt \quad (12)$$

$$s.a. \dot{a}_t = r_t a_t + y_t - c_t \quad (13)$$

$$a_t \geq 0; c_t \geq 0 \quad (14)$$

Un aspecto importante es el supuesto de que el hogar representativo está considerado como uno con activos positivos, ya que en el equilibrio el activo de este hogar representativo corresponde al capital acumulado presente en la economía, el cual por estructura del sector de las empresas es positivo.

Para tener una forma cerrada de este problema del hogar representativo, asumiremos que la función de utilidad es una función CRRA, que tiene la siguiente forma funcional:

$$u(c_t) = \begin{cases} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \gamma \geq 0, \neq 1 \\ \ln(c_t), & \gamma = 1 \end{cases} \quad (15)$$

Si consideramos el caso en que  $\gamma \neq 1$  entonces la solución cerrada de consumo que se obtiene es la siguiente,

$$c^* = \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} r + \frac{\rho}{\gamma} \right) \left( a + \frac{y}{r} \right) \quad (16)$$

Por lo que el ahorro en equilibrio de estado estacionario ( $s^*$ ) del hogar será,

$$s^* = Y - c^* \quad (17)$$

### 2.3. Cerrando el modelo

El equilibrio de estado estacionario se logra al vaciar el mercado de la inversión agregada de las empresas con el mercado del ahorro del hogar representativo, encontrando de esta forma el precio de equilibrio que corresponde a la tasa de interés. La definición del equilibrio del modelo se encuentra en la siguiente igualdad.

$$0 = s - \int_0^{k_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} i_{i,j}^* g_{i,j}(k, z) dz dk \quad (18)$$

De esta ecuación de vaciamiento del mercado de ahorro-inversión se encuentra el precio que corresponde a la tasa de interés de la economía en estado estacionario.

Para poder igualar la tasa de ahorro del hogar con la inversión agregada es necesario la resolución del sistema de ecuaciones de las dos EDP discutidas en las secciones anteriores, HJB y KFE, definidas por las ecuaciones (8) y (11). El método por el cual se realiza esto se discute en la sección 3.

A partir del equilibrio encontrado anteriormente, en donde, se encuentra la función de densidad de las empresas en términos de capital y productividad (adicionalmente a los agregados y precio de la economía), se puede encontrar el nivel de capital acumulado de la economía (ya que se tiene  $g(k, z)$ ), el que se define como, el total de activos en posesión del hogar representativo en estado estacionario y la cantidad de capital que las empresas tienen disponibles para producir deben ser iguales para que el mercado del capital esté vaciado en este equilibrio. Esto se define formalmente por la siguiente ecuación

$$0 = a - \int_0^{k_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} K_{i,j} g_{i,j}(k, z) dz dk \quad (19)$$

La forma de obtención de este equilibrio se desarrolla en la siguiente sección en donde se discute la utilización del método de las diferencias finitas semi-implícitas que al poseer EDP no lineales requiere de una iteración de las funciones valor, método desarrollado por Achdou et al. (2014) y Moll (2014) a lo largo de su literatura.

## 2.4. Firmas con dos posibles niveles de productividad en estado estacionario

En la literatura de agentes heterogéneos, una simplificación utilizada frecuentemente es la de dos tipos de agentes como en Campbell y Mankiw (1989). En el caso de las firmas esta puede ser una alternativa válida por lo que a continuación se desarrolla el modelo presentado en la sección anterior para un ambiente de dos tipos de empresas.

A continuación se desarrolla el sistema de ecuaciones del lado de las empresas cuando solo existen dos niveles posibles de productividad, en este entorno hay un continuo de empresas de alta y baja productividad, con el que se puede encontrar el equilibrio de estado estacionario con la presencia de un hogar representativo. La interpretación que se puede realizar de este tipo de modelo es la transición de una empresa pequeña-mediana a una grande y *vice versa*.

Consideremos nuevamente el problema de inversión de una firma cualquiera con productividad  $z_t$  definido en (1-2) sin considerar la ecuación (3) que en este problema pasa a ser un proceso de *Poisson*. El problema al igual que en la sección anterior está definido por

$$\max_{\{i_t\}} E_t \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \left[ z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \left( \frac{i_t}{k_t} \right)^2 k_t \right] dt$$

$$s.a \quad \dot{k}_t = i_t - \delta k_t$$

En donde el nivel de productividad de la firma  $z_t^j$  tiene solo dos posibles nivel, productividad alta ( $z_t^h$ ) y productividad baja ( $z_t^l$ ), estos niveles de productividad son aleatorios para firma y siguen un proceso de *Poisson* con una intensidad de cambio dada por  $\lambda^j$ , dependiendo del estado en que se encuentre.

Para poder obtener el equilibrio de estado estacionario se requiere en primer lugar la ecuación de HJB sobre la decisión óptima de las empresas condicional a sus estados, la cual procede de la siguiente ecuación de Bellman en tiempo discreto y haciendo tender la fracción de tiempo a 0.

La ecuación de Bellman en tiempo discreto se define se la siguiente forma:

$$V(k_t, z_t) = \max_{i_t} \left\{ (z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t}) dt + \beta(dt) E_t[V(k_{t+dt}, z_{t+dt})] \right\}$$

$$s.a \quad k_{t+dt} = (i_t - \delta k_t) k_t dt$$

En el apéndice A.2 se encuentra la derivación completa de la obtención de la ecuación de HJB, que representa la ecuación de la solución del problema definido anteriormente en estado estacionario, como es la ecuación de estado estacionario ya no es relevante el período temporal, por lo que para simplificación de la notación se dejaron fuera estos sub-índices. Adicionalmente, la función valor es dependiente del nivel de productividad en cada uno de los períodos, esto producto de la diferente probabilidad de salto entre estados de productividad, por lo que existirán dos ecuaciones de HJB dependiendo del estado actual en el que se encuentre la empresa  $i$ -ésima, dadas por,

$$\rho V^h(k, z^h) = \max_i \left\{ \pi(k, z^h) + \partial_k V^h(k)(i - \delta k) + \lambda^h [V^l(k, z^l) - V^h(k, z^h)] \right\} \quad (20)$$

$$\rho V^l(k, z^l) = \max_i \left\{ \pi(k, z^l) \right\} + \partial_k V^l(k)(i - \delta k) + \lambda^l [V^h(k, z^h) - V^l(k, z^l)] \quad (21)$$

en donde  $\pi(k, z^h) \equiv z^h k^\alpha - i - \frac{\chi}{2} \frac{i^2}{k}$ .

Lo anterior es producido por el proceso de *Poisson* no simétrico que siguen los niveles de productividad de las firmas, ya que si el estado actual de una de las empresas es un nivel de

productividad alto, entonces la función valor cuenta con un parámetro  $\lambda^h$  (parámetro de intensidad del proceso de *Poisson*), y como contraparte debe existir una ecuación de HJB cuando la empresa tiene un nivel de productividad bajo condicional a tener una productividad menor y un parámetro  $\lambda^l$ , el cual dada la asimetría del parámetro de intensidad  $\lambda^p$  (con  $p \in \{l, h\}$ ) es que existen dos ecuaciones de HJB.

De forma análoga a lo realizado para el modelo con el proceso de difusión es necesario obtener la función de densidad del continuo de firmas para cada uno de los dos niveles de productividad, para poder obtener los niveles agregados de inversión y capital del lado de las empresas para poder vaciar los mercados con el hogar representativo. Para esto se necesita la ecuación KFE, ya que estamos interesados en la distribución límite de las firmas dado que buscamos el equilibrio de estado estacionario.

Formalmente, la función de densidad para cada nivel de productividad se obtiene a partir de la siguiente KFE, que es para un proceso de *Poisson*. La derivación de esta ecuación de Kolmogorov se encuentra en el apéndice A.3<sup>6</sup>.

$$0 = -\partial_k(i^* - \delta k)g(k, z^p) - \lambda^p g(k, z^p) + \lambda^{-p} g(k, z^{-p}) \quad (22)$$

Con la EDP (22) en conjunto con las ecuaciones de HJB de este problema dadas por (20) y (21) el sistema de ecuaciones de las empresas queda completo y puede resolverse el agregado de inversión y capital agregado por parte de las empresas de la economía, para cerrar el modelo necesitamos del otro sector de la economía que permitirá vaciar los mercados y poder encontrar el precio de equilibrio en estado estacionario (tasa de interés).

Para lo anterior hay que definir el problema del hogar representativo, el que cumple los mismos supuestos que en el caso en donde la variable de productividad seguía un proceso de difusión. Para cerrar el modelo es necesario definir el elemento de vaciamiento de mercado de la siguiente forma:

$$S_{hogar} = \int_0^\infty i^* dG^h(k) + \int_0^\infty i^* dG^l(k) = Y_{hogar} - C_{hogar} \quad (23)$$

Una vez encontrado el precio de equilibrio y por ende el nivel de inversión agregada de equilibrio en estado estacionario se obtiene la función de densidad de las firmas y puede obtenerse el capital agregado de la economía dado por

$$K = \int_0^\infty k dG^h(k) + \int_0^\infty k dG^l(k) \quad (24)$$

El cual en equilibrio tiene que ser igual a la riqueza del hogar denotada por  $a$ , completando de

---

<sup>6</sup>Esta derivación puede resultar más intuitiva.

esta forma el equilibrio en estado estacionario de la economía con dos niveles de productividad.

### 3. Computación

El modelo se realizó en tiempo continuo por las ventajas computacionales que entrega, ya que es posible realizar un algoritmo eficiente y de rápida resolución numérica como lo han mostrado Achdou et al. (2017), en donde se utiliza el método de diferencias finitas con iteraciones para resolver este tipo de modelos con agentes heterogéneos.

Como se mencionó en la sección 2.1.1 al reemplazar la función de inversión óptima, ecuación (7), en la ecuación de HJB definida en (6) se obtiene (8) que resulta ser una ecuación diferencial parcial que es no lineal, por lo que no puede ser resuelta en una sola iteración como lo hace el método de diferencias finitas usualmente. Esto nos lleva a la utilización del algoritmo desarrollado por Achdou et al. (2017), el cual se enumera a continuación.

- Obtención de un *guess* de la función valor lo suficientemente cercana al estado estacionario. El cual puede obtenerse al considerar  $(i - \delta k = 0)$ , lo que corresponde a considerar el punto en que  $V_k$  no es relevante. Adicionalmente hay que considerar un precio fijo (tasa de interés) para que la función valor pueda converger.
- Utilizar dos discretizaciones de las diferencias finitas para evitar la necesidad de conocer las condiciones de borde, lo que se conoce como método de *Upwind*.
- Ocupar la función valor condicional al precio dado para encontrar la distribución de las firmas con la KFE.
- Encontrar los agregados y corroborar si se vacían los mercados en la economía. Si no se vacían, buscar un nuevo precio (tasa de interés) hasta que se vacíen los mercados.

Como se ve en (8) la EDP no es lineal por lo que es necesario utilizar iteraciones de la función valor para poder encontrar la función valor límite. Por esto el primer paso es obtener un *guess* inicial, ya que con este se puede obtener un valor de la inversión óptima siguiendo  $V^n$  cuando  $n = 0$ , como se ve en (25); con este nivel de inversión óptima ( $i^0$  es un valor fijo) transforma la EDP en un problema de diferencias finitas lineal y puede emplearse el método de las diferencias finitas implícito, como se muestra a continuación.

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta} + \rho V^{n+1} = zk^\alpha - i^n - \frac{\chi_1}{2} \left( \frac{i^n}{k} \right)^2 k + \partial_k V^{n+1} (i^n - \delta k) + \partial_z V^{n+1} \mu(z) + \partial_{zz} V^{n+1} \frac{\sigma^2(z)}{2} \quad (25)$$

La ecuación (25) tiene componentes con supra-índices  $n$  y  $n + 1$ , en donde  $V^n$  corresponde a la función valor conocida en la iteración actual,  $i^n$  es el nivel de inversión que se obtiene a partir de la función valor  $V^n$  con lo que (25) queda en forma tal que se puede utilizar el método de diferencias finitas implícito para encontrar la función valor de la siguiente iteración denotada por  $V^{n+1}$  hasta converger<sup>7</sup>. Lo que se explica en lo que resta de esta sección.

### 3.1. Método del *Upwind*

Para no tener que utilizar las condiciones de borde y obtener una solución más exacta, se puede utilizar el método de *Upwind*, el cual utiliza la discretización hacia adelante y hacia atrás de la función valor siguiendo el método de las diferencias finitas.

Las derivadas de la función valor pueden ser definidas en términos de una discretización en forma de grilla de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{Backward difference: } \partial_k V &\approx \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{dk} \\ \text{Forward difference: } \partial_k V &\approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{dk} \end{aligned}$$

en donde  $dk$  es la distancia entre cada unidad de capital discretizado. Adicionalmente, en  $V_{i,j}$  el primer componente del sub-índice indica la posición en la discretización del capital y el segundo sub-índice la posición en la discretización del nivel de productividad.

El método de *Upwind* es la utilización de la Forward difference cuando el diferencial de capital es positivo y la Backward difference, cuando el diferencial de capital es negativo. Esto hace que  $V_k^{n+1}(i^n - \delta k)$  pueda ser expresado de la siguiente forma,

$$V_k^{n+1}(i^n - \delta k) = \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{dk} (i^n - \delta k) \mathbb{1}_{\{i^n - \delta k \leq 0\}} + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{dk} (i^n - \delta k) \mathbb{1}_{\{i^n - \delta k \geq 0\}}$$

Una vez completado este proceso, se utiliza el método implícito de la diferencias finitas junto a la bisección para encontrar la próxima función valor, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta} + \rho V^{n+1} = x^n + &\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{dk} (i^n - \delta k) \mathbb{1}_{\{i^n - \delta k \leq 0\}} + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{dk} (i^n - \delta k) \mathbb{1}_{\{i^n - \delta k \geq 0\}} + \\ &\frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{dz} (\mu(z)) \mathbb{1}_{\{\mu(z_t) \geq 0\}} + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{dz} (\mu(z_t)) \mathbb{1}_{\{\mu(z_t) \leq 0\}} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{dz} \frac{\sigma^2(z)}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

<sup>7</sup>Adicionalmente, como se viene denotando desde secciones anteriores,  $V_k^{n+1}$  corresponde a la derivada parcial de la función valor con respecto a  $k$ , análogamente  $V_z^{n+1}$  y  $V_{zz}^{n+1}$  son la primera y segunda derivada parcial de la función valor de la iteración  $n + 1$  con respecto a la productividad.

En donde  $x^n \equiv zk^\alpha - i^n - \frac{\chi_1}{2} \left(\frac{i^n}{k}\right)^2 k$ , y en la derivada parcial de segundo grado con respecto a la productividad ( $z$ ) se puede utilizar solo la discretización central.

En Candler (1999) se muestra mediante ejemplos numéricos con un problema con solución analítica que dependiendo del signo de  $a$  en su notación lo que corresponde a  $i^n - \delta k$  en el problema presentado en este trabajo, la Backward difference converge a la solución exacta de la función valor cuando  $i^n - \delta k < 0$  y la Forward difference converge a la solución exacta de la función valor cuando  $i^n - \delta k > 0$ , logrando de esta forma consistencia mediante la utilización del *Upwind*. Achdou (2020) muestra que este algoritmo es estable incondicionalmente siguiendo la propiedad del método de diferencias finitas implícitas en donde se basan en condiciones presentadas por Barles y Souganidis (1991).

### 3.2. Matrices diagonales

El problema anterior, descrito en (26), puede ser escrito en una notación más simple definiendo una matriz cuadrada que transforma a la función valor en una matriz diagonal cuadrada de dimensión  $(I \times K)$ , en donde  $I$  es el número de puntos de capital que se tienen en la grilla y  $K$  en la cantidad de posibles estados de productividad que se utilizó en la discretización.

Es importante notar que en las matrices  $K$  y  $Z$  presentadas a continuación poseen dos columnas de condiciones de borde que son  $\vec{0}$  correspondientes a  $(x_{1,1}, 0, \dots, 0)'$  y  $(0, \dots, 0, z_{I,K})'$  las cuales son necesarias para encontrar  $V_{0,1}^{n+1}$  y  $V_{I+1,K}^{n+1}$ , como no se conocen estas condiciones de borde y se utilizó el método del *Upwind* para no utilizarlas podemos fijar  $x_{1,j} = 0$  y  $z_{I,j} = 0$ , con  $j \in (1, \dots, K)$ . Utilizando de esta forma las diferencias finitas de forma tal que se asegura que estos elementos no sean necesarios para la existencia de una  $V^{n+1}$ , por lo que se pueden fijar en 0.

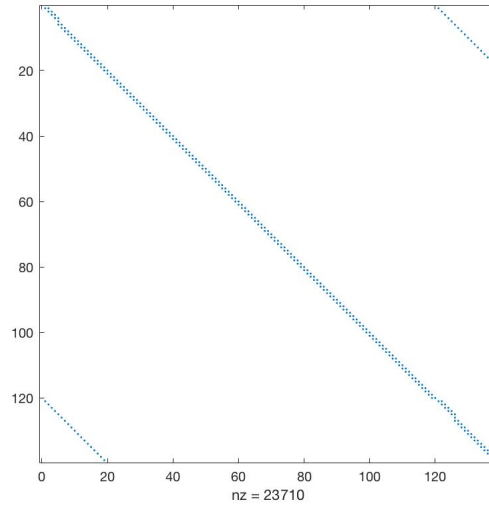
De la derivada con respecto al capital se puede formar una matriz que tiene la siguiente forma:





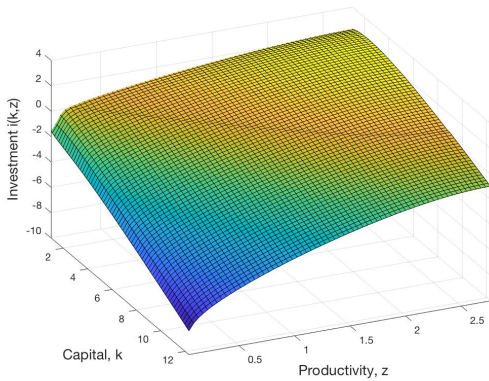


Figura 1: Visualización matriz  $K^n + Z^n$

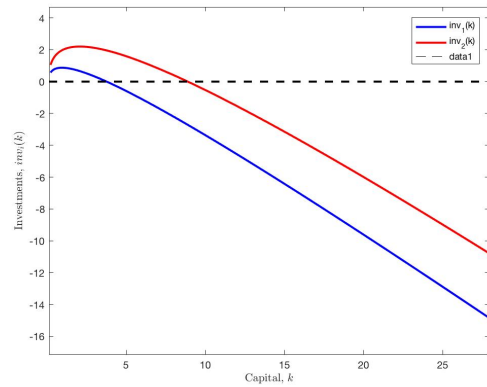


empresa la cual tiene se encuentra en la figura 2 panel (a).

Figura 2: Distribución ergódica de empresas según nivel de productividad, para modelos



((a)) Difusión



((b)) Poisson

La función de política para el problema con dos tipos de productividades sigue de la resolución del mismo algoritmo, solo que la matriz para los cambios de productividad de las empresas es más fácil de formar, ya que son solo dos posibles estados, por lo que el sistema queda conformado por una gran matriz de  $(2I \times 2I)$ , convergiendo de manera más rápida. Luego, al igual que con el modelo anterior se puede obtener la función de política, la que se encuentra en la figura 2 panel (b).

Como existe una restricción de capital mínimo se puede ver que para los niveles más bajos

de productividad la función de política ( $i(k|z)$ ) sigue un patrón más lineal, ya que la empresa no puede desinvertir todo lo que quisiera dado que tiene que tener un capital mínimo.

### 3.3. Distribuciones de las empresas

Para poder encontrar la distribución de las empresas en estado estacionario es necesario recordar la KFE dada por la ecuación (11).

$$0 = -\frac{\partial}{\partial k}((i^*(k, z) - \delta k)g(k, z)) - \frac{\partial}{\partial z}(\mu(z)g(k, z)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma^2 g(k, z))$$

Esta ecuación anterior puede ser escrita en términos de las matrices  $K^n$  y  $Z^n$  de la siguiente forma al discretizar el problema.

$$0 = (K^n + Z^n)^T g(k, z) \quad (34)$$

en donde  $(K^n + Z^n)^9$  son los términos descritos en las ecuación (26-32).

Para el cálculo numérico de esta última ecuación se puede expresar  $g(k, z)$  de la siguiente forma

$$g(k, z) = (K^n + Z^n)^{T-1} \vec{0}$$

El problema de expresar la distribución de esta forma es que la matriz  $(K^n + Z^n)^T$  no es invertible por ser singular, lo que hace que el problema anterior no se pueda resolver. Para poder encontrar una solución a esto Achdou et al. (2017) propone un reemplazo 'sucio' de uno de los componentes del  $\vec{0}$  por un valor arbitrario, y realizar una posterior normalización del  $\hat{g}$  encontrado con este ejercicio, con en objetivo que se cumpla la integral presentada a continuación sea 1, dado que es una función acumulada de probabilidad. <sup>10</sup>

$$1 = \int_{k_{min}}^{k_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} g(k, z) dz dk \quad (35)$$

## 4. Calibración

La elección de los principales parámetros se hizo siguiendo los valores presentes en la literatura de modelación de la inversión en donde se realizan modelos con empresas heterogéneas en tiempo discreto como es el caso de Khan y Thomas (2008) de los cuales Bachmann et al. (2013) utiliza básicamente la misma parametrización, la cual se presenta en la tabla a continuación.

<sup>9</sup>El término traspuesto se obtiene por los negativos presentes a lo largo de la expresión, en donde es fácil ver que al "abrir" la matriz, los términos con una primera derivada parcial tienen una función indicador, la que se da vuelta por los signos negativos llevando a esta matriz ser la traspuesta de la presentada en (33).

<sup>10</sup>Es importante que la suma de densidad que se da en  $\hat{g}$  sea mayor a 0, ya que de esta forma se puede normalizar correctamente la densidad verdadera, evitando posibles valores negativos de algunos puntos de la función de densidad.

Tabla 1: Parámetros de Khan y Thomas (2008)

$\alpha$	$\delta$	$\rho$
0.256	0.069	0.235

Con relación a los parámetros de la distribución se obtuvo la información de productividad de las firmas del Reino Unido a partir de la *Annual Business Survey* (ABS) de la oficina nacional de estadísticas del Reino Unido (ONS) de donde se trabajó con la base de datos *Firm-level labour productivity estimates from the Annual Business Survey*, en donde se presentan las densidades de *Kernel* para la masa de empresas entre los años 2006-2017. Para la distribución de productividad idiosincrática de las empresas se consideró la distribución de *Kernel* de los que en la base se llama productividad laboral por empleado, ponderado por el tamaño de la empresa a precios constantes de 2016. Esta función de densidad está definida por el valor añadido en libras por trabajador en las empresas. Como los puntos de la distribución de *Kernel* están separados uniformemente estos se reescalaron para hacerlos coincidir con las funciones de probabilidades de una función lognormal, ya que como se ve en las figuras presentadas en el apéndice (A.4) estas distribuciones empíricas siguen la forma de una función lognormal.

Dado que la función lognormal se define en los reales positivos, se tuvo que buscar que la función con los datos escalados esté entre valores positivos, y que los momentos de esta función coincida con los momentos con la función a la que convergerá el proceso de difusión de la productividad en niveles.

Los momentos de la función límite del proceso de difusión y de los momentos de las funciones estimadas entre los años 2010-2017 se muestran en la tabla a continuación.

Tabla 2: Momentos de las funciones de distribución de empresas para simulación y datos

	Media	Varianza	Asimetría	Kurtosis
Proceso	1.1921	0.256	1.2186	1.7520
Datos	[1.12, 1.16]	[0.254, 0.285]	[1.31, 1.37]	[1.53, 1.99]

Esta parametrización tiene un supuesto importante, el cual es que la distribución de las economías tiene una forma muy similar. Este supuesto se apoya en la evidencia sobre la estimación de las funciones de distribución de las productividades de las empresas en las economías en donde Vanhala (2017), Di Mauro (2015) y Gouin-Bononfant (2018) encuentran que las distribuciones de productividades para Finlandia, Alemania, España, Italia y Canadá siguen la forma de una función lognormal, por lo que parece razonable asumir este supuesto.

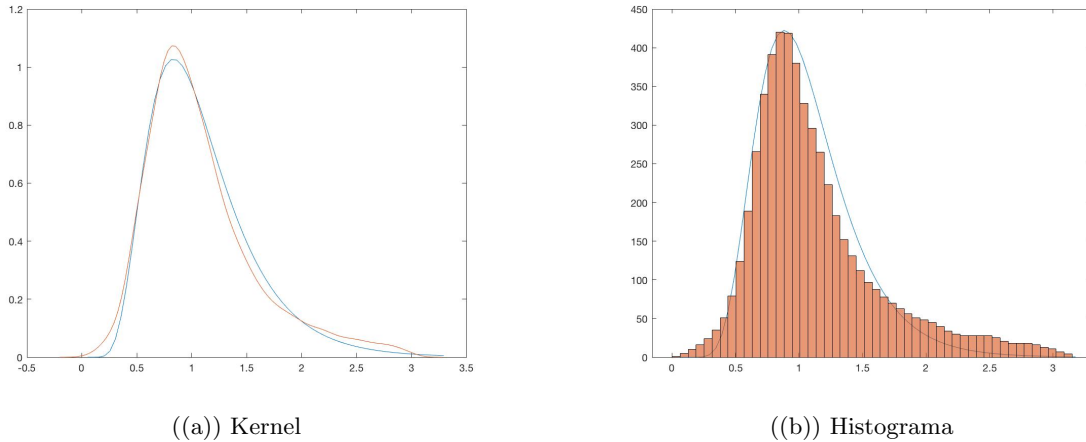
La forma del proceso de difusión se realizó con el objetivo de que tenga una distribución límite de una lognormal, y se buscó los parámetros del proceso de difusión que nos entregue los

momentos más cercanos a los de la distribución de los datos<sup>11</sup>. La tabla siguiente muestra estos parámetros y además incluye los parámetros del costo cuadrático de la inversión, el cual se eligió con el objetivo de que la inversión media de una simulación entregara un valor lo más cercano a un 20% del producto.

Tabla 3: Parámetros

$\theta$	$\sigma^2$	$\chi$
0.1985	0.1395	0.265

Figura 3: Kernel y Histograma distribución limite proceso de difusión y datos



Para ver de forma gráfica la distribución límite del proceso de difusión y la función entregada por los datos, estas se encuentran en la figura 3, en forma de densidad de *kernel* (panel (a)) y en forma de histograma (panel(b)).

Los parámetros del hogar representativo se encuentran en la tabla 4, en donde la tasa de descuento es un poco mayor a la que transformaría el problema del hogar en una utilidad logarítmica; la tasa de descuento es la misma que la de las firmas, ya que los hogares son los dueños de estas y el ingreso exógeno se considera 0, por lo que el hogar tiene como ingreso el *Profit* de las firmas.

Tabla 4: Parámetros del hogar representativo

$\gamma$	$\rho$	$Y$
1.05	0.0235	0

<sup>11</sup>La gran diferencia con la parametrización propuesta por Khan y Thomas (2008) es sobre  $\theta$ , en este trabajo se considera un  $\theta$  bastante menor lo que hace que la distribución de la productividad se acumule en la zona inferior al 1, ya que con un *theta* cercano a 1 como es el que presentan en Khan y Thomas (2008) esto hace que la distribución esté mucho más centrada, acercándose a la forma de una función normal.

Siguiendo el algoritmo descrito en la sección anterior, el cual es una modificación del algoritmo presentado en Achdou et al. (2013) se puede obtener la función de distribución de las empresas y los momentos en estado estacionario. Finalmente, en la economía que se simula en el código de Matlab las variables de estado -capital y productividad- toman valores  $k \in [0,225; 35]$ <sup>12</sup> y  $z \in [0,053; 2,985]$ .

#### 4.1. Modelo con proceso de difusión

El equilibrio de estado estacionario para el modelo con un proceso de difusión está dado en términos de momentos por una tasa de interés de  $r = 3,47\%$ , una inversión total de  $I = 0,2937$  y el capital total es  $K = 4,2702$ , los beneficios que las empresas le entregan al hogar representativo es  $D = 1,2912$ , el consumo es  $C = 0,9975$ .

Con relación a la distribución de densidad de las firmas en estado estacionario en el continuo de capital y productividad se puede analizar en la figura 4, la que se presenta en dos paneles para poder distinguir diferentes aspectos de esta.

En las figura 4 se puede apreciar que la mayoría de la masa de las empresas se concentra en el cuadrante de baja productividad y bajo capital, en donde fijando el nivel de productividad la distribución del capital de estado estacionario sigue una forma de distribución lognormal presentada antes.

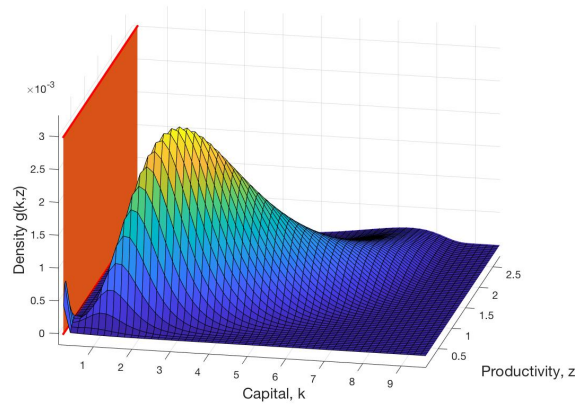
Adicionalmente, en el sector de capital bajo, cercano al nivel mínimo (marcado por el plano naranja) de este, las empresas con menor productividad presentan un punto de acumulación de densidad, producido por la imposibilidad de estas firmas de tener un capital menor al mínimo capital factible dada la discretización realizada del capital discutida en la sub-sección anterior. Esto se produce en los niveles de menor productividad exclusivamente, ya que para los niveles de productividad mayor la restricción de capital no se encuentra activa, por lo que endógenamente no existe ninguna empresa con capital tan bajo.

Este modelo con un proceso de difusión puede ser simplificado en dos niveles, el primero es suponiendo que existen solo dos niveles de productividades con un continuo de empresas en cada nivel de productividad, en el cual los cambios en el nivel de productividad de cada empresa depende de un proceso de *Poisson*, y el segundo nivel de simplificación es asumir que existe una firma representativa en la economía. En las dos sub-secciones a continuación se comparan estos

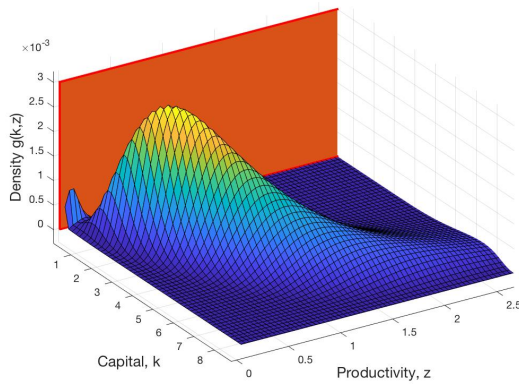
---

<sup>12</sup>Como se mencionó anteriormente, el capital de las firmas solo tiene la restricción de positividad, sin embargo, numéricamente comenzar la grilla desde un valor muy cercano a 0 implica que para capturar niveles de capital cercanos a 0.2 unidades de capital el  $dk$  tiene que ser bajo lo que logra con 2000 puntos o más en la grilla de capital, lo que genera un alto costo computacional en el algoritmo del *shock* agregado, por lo que para compensar esto se tendría que disminuir los puntos de productividad. Con esta configuración se cree capturar de mejor forma ambos aspectos.

Figura 4: Distribución ergódica de empresas con proceso de difusión



((a))



((b))

dos niveles de simplificación del modelo con un proceso de difusión y se discuten las ganancias que se obtienen y los problemas que crean.

#### 4.2. Modelo con dos tipos de firmas

Como se mencionó anteriormente el primer nivel de simplificación del modelo presentado anteriormente es asumir que las empresas pueden tener solo dos estados del nivel de productividad, uno alto y uno bajo, en donde en cada estado hay un continuo de empresas, a su vez la forma de cambio en el nivel de productividad viene dada por una variable de salto no simétrica de la productividad de una función de *Poisson*. Por lo que la elección de esa tasa de cambio en los niveles de productividad no es trivial de obtener.

Al trabajar con solo dos niveles de productividad es necesario la definición de empresa con



productividad alta y baja. Para este contexto se consideró como empresa con productividad alta, todas aquellas empresas que tengan una productividad igual o superior al 50 % por sobre la productividad media, que en el caso anterior fue fijada en 1.19, por lo que las empresas con un nivel de alta productividad serán en este caso aquellas empresas que tengan un nivel de productividad mayor o igual a 1.58. Considerando la distribución de estado estacionario esta masa de empresas corresponde a aproximadamente a un 25 % del total de las empresas por lo que se buscará que en estado estacionario en el modelo en donde el nivel de productividad sigue un proceso de *Poisson* la masa de empresas con baja productividad sea un 75 % del total y las de alta productividad sean un 25 % del total de la masa.

Para lograr lo anterior se eligieron los tasas de salto del proceso de *Poisson* de forma tal que  $\lambda^l$  fuera 1/3 del de  $\lambda^h$ , dado que los  $\lambda$  en los procesos de *Poisson* pueden ser interpretados como la probabilidad de cambio de estado, entonces la probabilidad de pasar del nivel bajo de productividad al nivel de productividad alto es un tercio de la probabilidad de pasar de un nivel alto al nivel de productividad bajo. Con lo anterior la elección de la tasa fue realizada fijándose en la probabilidad dada por  $\lambda^l$ , los cuales se encuentran en la siguiente tabla.

Tabla 5: Parámetros

$\lambda^l$	$\lambda^h$	$\chi$	$\alpha$	$\delta$	$\rho$	$\gamma$	$Y$
0.1	0.3	0.28	0.256	0.069	0.235	1.05	0

El resto de los parámetros se mantienen invariantes con relación al modelo con un proceso de difusión. Adicionalmente, los niveles de las productividades necesarias para que la productividad media en estado estacionario fuera la del proceso de difusión es un continuo de opciones. Frente a este escenario se realizó una serie de calibraciones para los niveles de las productividades. En la siguiente tabla se encuentran los resultados de los principales, precio y agregados de la economía según diferentes proporciones de  $z^h/z^l$ .

Tabla 6: Precio y agregados según diferentes ratios de productividad alta/baja

$z^h/z^l$	$\approx 4$ (2.452/0.613)	$\approx 3.5$ (2.31/0.66)	$\approx 3$ (2.145/0.716)	$\approx 2.5$ (1.951/0.78)
$r$	3.44 %	3.45 %	3.47 %	3.48 %
Inversión total	0.2910	0.2913	0.2921	0.2922
Capital acumulado	4.2167	4.2214	4.2338	4.2353
<i>Profits</i>	1.3000	1.2915	1.2843	1.2751
Consumo	1.0090	1.0002	0.9921	0.9829

Como se puede apreciar en los resultados de la tabla 6 el precio de equilibrio, la tasa de interés, del modelo con solo dos niveles de productividad es una buena aproximación del modelo en donde la productividad sigue un proceso de difusión. Sin embargo, los agregados de la economía

son menores a los del modelo con un continuo de niveles de productividades. En relación a la inversión agregada extraída de estos modelos, se obtiene que a lo largo de todas las proporciones examinadas los niveles agregados son estables y no relevantemente diferentes a los del nivel del modelo con un continuo de niveles de productividad. El capital acumulado sigue una tendencia muy similar a la de la inversión agregada en términos de estabilidad en los ratios de productividades, sin embargo, presentan alrededor de un 2% menos de capital en la economía. Finalmente, los beneficios de las empresas y el consumo del hogar representativo se mueven entre valores muy cercanos a los del modelo de difusión.

Los resultados anteriores pueden ser bastante similares a los del modelo con difusión, pero esto se puede deber a que el modelo con un proceso de *Poisson* es realmente una buena aproximación del modelo con un proceso de difusión o debido a la parametrización de la proporción de las empresas de alta y baja productividad. Para esto se realiza un análisis de robustez del modelo con dos niveles de productividad, el que consiste en analizar si otra proporción de la distribución de empresas entre alto y bajo nivel de productividad puede realizar una mejor aproximación a los niveles agregados de la economía, tomando como referencia el modelo con un continuo de niveles de productividad.

En las tablas 7-10 se encuentran los *outputs* de los modelos parametrizados de la misma forma que en los casos anteriores, solo que se las intensidades de los procesos de *Poisson* son diferentes para ver la robustez del modelo con dos tipos de firmas. De esta forma en la tabla 7 se encuentran los resultados para una proporción fija (10-90) de empresas bajas-altas en estado estacionario y las columnas se encuentran los diferentes ratios de  $z^h/z^l$ .

Tabla 7: Precio y agregados según diferentes ratios de productividad alta/baja, para una proporción de 90-10

$z^h/z^l$	$\approx 4$ (3.33/0.825)	$\approx 3.5$ (3/0.858)	$\approx 3$ (2.685/0.895)	$\approx 2.5$ (2.333/0.933)
$r$	3.46 %	3.47 %	3.48 %	3.49 %
Inversión total	0.292	0.2917	0.2933	0.2931
Capital acumulado	4.2322	4.2277	4.2505	4.2473
<i>Profits</i>	1.2915	1.2827	1.2782	1.2696
Consumo	0.9995	0.9910	0.9849	0.9766

Tabla 8: Precio y agregados según diferentes ratios de productividad alta/baja, para una proporción de 85-15

$z^h/z^l$	$\approx 4$ (2.96/0.74)	$\approx 3.5$ (2.744/0.784)	$\approx 3$ (2.481/0.825)	$\approx 2.5$ (2.189/0.876)
$r$	3.45 %	3.46 %	3.47 %	3.48 %
Inversión total	0.2916	0.2936	0.2928	0.2924
Capital acumulado	4.2265	4.2547	4.2435	4.2379
<i>Profits</i>	1.2981	1.2973	1.2816	1.2725
Consumo	1.0065	1.0038	0.9888	0.9800

Tabla 9: Precio y agregados según diferentes ratios de productividad alta/baja, para una proporción de 80-20

$z^h/z^l$	$\approx 4$ (2.68/0.67)	$\approx 3.5$ (2.503/0.715)	$\approx 3$ (2.3/0.766)	$\approx 2.5$ (2.063/0.825)
$r$	3.44 %	3.45 %	3.47 %	3.48 %
Inversión total	0.2909	0.2914	0.2920	0.2925
Capital acumulado	4.2155	4.2239	4.2321	4.2384
<i>Profits</i>	1.2987	1.2911	1.2827	1.2739
Consumo	1.0079	0.9996	0.9907	0.9815

Tabla 10: Precio y agregados según diferentes ratios de productividad alta/baja, para una proporción de 70-30

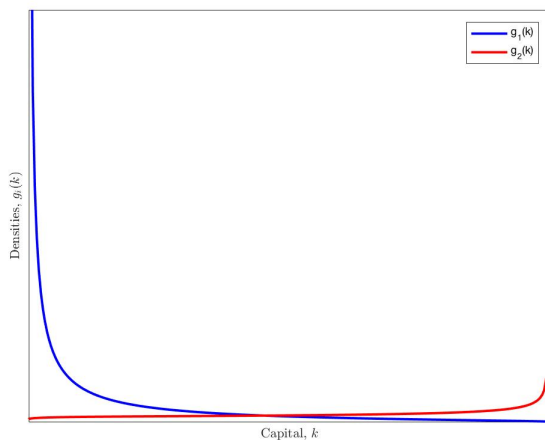
$z^h/z^l$	$\approx 4$ (2.26/0.565)	$\approx 3.5$ (2.146/0.613)	$\approx 3$ (2.012/0.671)	$\approx 2.5$ (1.85/0.74)
$r$	3.44 %	3.45 %	3.47 %	3.48 %
Inversión total	0.2914	0.2915	0.2919	0.2923
Capital acumulado	4.2227	4.2245	4.2310	4.2358
<i>Profits</i>	1.2999	1.2916	1.2843	1.2758
Consumo	1.0085	1.0001	0.9924	0.9835

En las tablas anteriores se puede notar en primer lugar que el nivel de equilibrio de la tasa de interés es estable a lo largo de todas las parametrizaciones realizadas, al igual que en el primer análisis realizado. Con relación a los agregados en el equilibrio estacionario de la economía podemos notar que en algunos aspectos especialmente en el consumo del hogar el ratio de  $z^h/z^l = 4$  en todas las especificaciones obtiene un nivel de consumo más cercano al nivel del modelo completo, sin embargo, en el resto de los agregados incluida la tasa de interés los hace peor que el resto de las parametrizaciones. Con relación a los modelos con un ratio de  $z^h/z^l = 2,5$  se logra un peor resultado en los beneficios de las empresa y en el consumo del hogar. Finalmente, el ratio de  $z^h/z^l = 3,5$  es el que obtiene los resultados en general más cercanos a los del modelo con un continuo de niveles de productividad, y la masa de empresas 75-25 en estado estacionario es la que presenta los agregados más cercanos al modelo anterior, por lo que realizaremos los análisis

siguientes con esta parametrización.

En la figura 5 se puede apreciar las dos funciones de distribución para cada uno de los continuos de empresas (alta y baja productividad) en estado estacionario del modelo de *Poisson*. En la función de distribución para el continuo de empresas de baja productividad representado por  $g_1(k)$  (función azul) se presenta un punto de acumulación, sin embargo este punto no necesariamente corresponde con el nivel mínimo de capital admisible, sino que corresponde con un nivel endógeno al nivel de productividad de las empresas con el nivel bajo de productividad. Por lo que cambia según el ratio de productividades utilizado anteriormente.

Figura 5: Distribución ergódica de empresas con alto y bajo  $z$



Con relación a la distribución del continuo de empresas con alta productividad, se puede decir que una mayor proporción de empresas se acumula en la parte superior del continuo de capital, por otra parte se empieza a presentar una densidad positiva de empresas desde el punto de acumulación de las empresas de baja productividad.

El modelo de *Poisson* en el equilibrio de estado estacionario podemos obtener momentos similares a los del modelo de difusión, sin embargo, no es capaz de representar a las empresas que se encuentran en la restricción del capital mínimo, ya que bajo esta parametrización esas empresas no presentan una densidad positiva<sup>13</sup>. Por lo que esta simplificación puede ser buena en términos de los momentos entregados, sin embargo, no es capaz de representar a las empresas con alguna restricción adicional.

<sup>13</sup>Para poder representar esto hay que asumir unos ratios de productividad excesivamente altos, cercanos a 70, lo que entrega momentos muy alejados a los del modelo con difusión.

### 4.3. Modelo con una firma representativa

Finalmente para evaluar si es razonable realizar una simplificación más fuerte del modelo de difusión en esta sección se discute un modelo con una empresa representativa y como compararla con los dos modelos presentados en los apartados anteriores.

La utilización de un modelo con un continuo de firmas con diferentes niveles de productividad puede ser más realista y de por sí proveer al modelo de una distribución de empresas que puede ser empleado para analizar *shocks* y políticas, sin embargo, presenta otras ventajas que se discuten a continuación.

Consideremos una economía en donde existe un hogar representativo y una firma representativa, en donde esta última tiene un nivel de productividad dado y fijo. Para tener una comparación entre estos dos modelos es necesario fijar un nivel de resultado que entrega cada modelo, por lo que igualar el nivel de ingresos totales que recibe el hogar representativo en ambos modelos es similar a comparar economías con el mismo nivel de riqueza, dado que se fijó el ingreso exógeno en 0, entonces los beneficios que obtienen las empresas corresponde al ingreso total del hogar. La idea de fijar los niveles de ingreso del hogar es semejante a comparar las tasas de interés y los niveles de inversión y de capital acumulado en una economía del mismo nivel de riqueza.

Para poder realizar una comparación justa el set de parámetros es aquel fijado en las secciones anteriores para los modelos de difusión (un continuo de diferentes niveles de productividad) y para el modelo con el proceso de *Poisson* (dos niveles de productividad). Además se fijó el nivel de productividad ( $z$ ) en aquel del modelo con un proceso de difusión con la función de distribución obtenida de los datos.

Para tener una noción de los tres casos presentados hasta el momento, en donde se puede entender al modelo con un continuo de niveles de productividad (y muchas firmas dentro de cada nivel de productividad) como el más completo, luego el que posee dos niveles de productividades (y en cada uno de los niveles de productividad hay muchas empresas) y finalmente el modelo con un solo tipo de empresas; a continuación en la tabla 11 se presentan los momentos de estos tres modelos con los precios y agregados obtenidos de estos con el objetivo de hacer la comparación más simple.

Tabla 11: Comparación agregados entre modelos

	Representativo	Poisson	Difusión
$r$	3.15 %	3.47 %	3.47 %
Inversión total	0.2230	0.2921	0.2937
Capital acumulado	3.9373	4.2338	4.2702
Beneficios	1.2912	1.2843	1.2912
Consumo	1.0839	0.9921	0.9975

De la tabla de comparación anterior podemos notar que la tasa de interés es significativamente inferior en el modelo con una firma representativa, siendo 32 puntos base (o un 9.25 %) menor que en el modelo con un continuo de niveles de productividad y con el modelo con dos niveles de productividad.

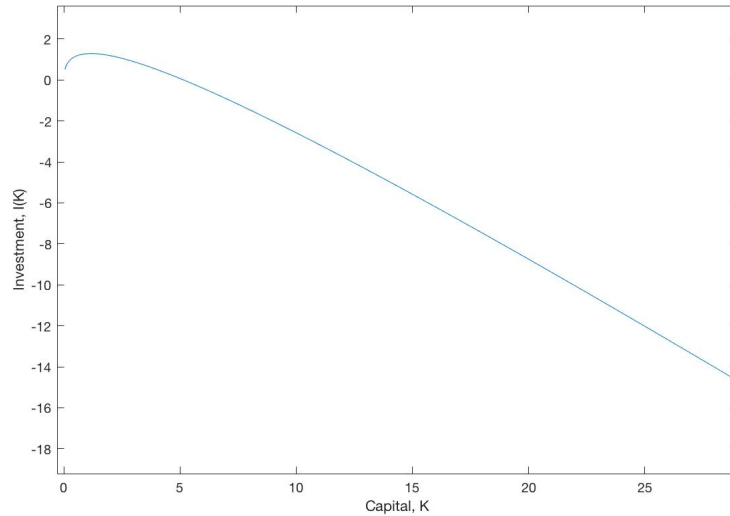
Con relación al modelo de empresas heterogéneas simplificado podemos apreciar que este realiza una buena aproximación del modelo con un proceso de difusión al tener la comparación entre el modelo con una empresa representativa y el modelo completo.

Para poder encontrar una explicación a los resultados dispares del modelo con una empresa representativa con los modelos con productividades diferentes entre las empresas es necesario pensar en la forma de las funciones de política de las empresas, para esto se presenta la función de política de la firma representativa en la figura 6. Al comparar la figura 6 con las funciones de política del modelo con un proceso de difusión en la figura 2 panel (a), se puede apreciar que las empresas con un alto nivel de productividad tienen una mayor curvatura, por lo tanto pueden alcanzar un mayor nivel de inversión el cual la simplificación de una firma representativa no es capaz de capturar.

Lo anterior se refleja en los niveles de inversión agregada total en los diferentes modelos, ya que la inversión del modelo con una firma representativa es sustancialmente menor a la de ambos modelos con firmas heterogéneas. Esto a su vez causa que el consumo del modelo representativo sea mayor dado que el ahorro necesario debe ser menor al de un hogar en el ambiente que enfrentan los hogares en los modelos con diferentes niveles de productividad, implicando que la tasa de interés sea menor en equilibrio, todo esto considerando que se fijó el nivel de beneficios de las firmas.

Si nos referimos solamente al precio y niveles agregados del estado estacionario para la parametrización de los modelos podemos concluir que si consideramos al modelo con un proceso de difusión como punto de comparación el modelo con solo dos niveles de productividad para las empresas es una muy buena aproximación del modelo con firmas heterogéneas, al considerar los supuestos sobre la distribución de las empresas de alta y baja productividad en estado esta-

Figura 6: Función de política de empresa representativa ( $z = 1,19$ )



cionario. En relación al modelo con una empresa representativa no ocurre lo mismo, ya que en relación al precio de equilibrio este es significativamente menor, provocado por una sub-inversión por parte de la firma y por ende una menor acumulación del capital agregado de la economía.

## 5. Estática comparativa

Un aspecto final en el que se puede diferenciar un modelo con firmas heterogéneas frente a un modelo con una empresa representativa es la posibilidad de observar la distribución de las empresas tanto en el nivel de capital como en la productividad de estas. Por lo que se puede generar una economía contrafactual con un parámetro diferente y evaluar cuales serían en términos de distribución y de política los cambios producidos entre estados estacionarios.

En los apartados siguientes se presentan los diferenciales de distribución entre estados estacionarios cuando hay un aumento o disminución en el parámetro de curvatura en la función de producción ( $\alpha$ ) y en parámetro de costos en la inversión ( $\chi$ ).

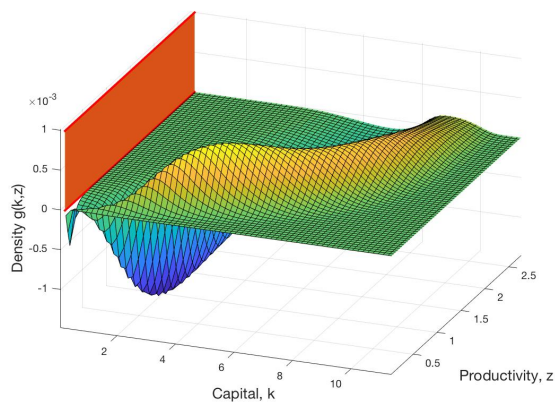
### 5.1. Cambio en $\alpha$

En este apartado se discute las diferencias que se producen en la función de política de las empresas y de distribución de densidad en estados estacionarios diferentes con el objetivo de enfatizar aspectos no lineales presentes en un modelo con empresas que poseen diferentes niveles de productividad con el objetivo de enfatizar las ganancias de utilizar un modelo heterogéneo

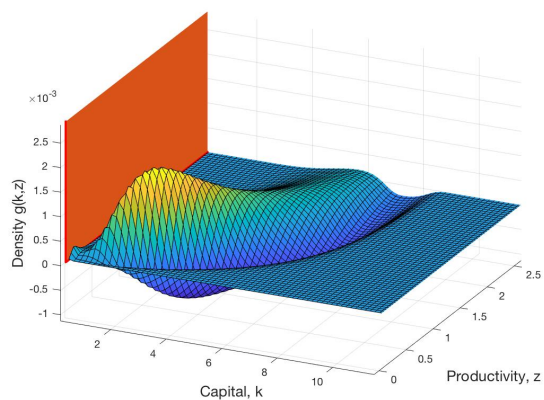
frente a uno con una empresa representativa.

Una pregunta interesante de responder es qué pasaría si el parámetro de rendimiento del capital aumentara (disminuyera) en un 10% del valor utilizado en las secciones anteriores. El parámetro  $\alpha$  se aumentó (redujo) en la misma proporción para evaluar la posibilidad de efectos no lineales de estos cambios, además de ser un valor lo suficientemente significativo para ver efectos, tanto en la función de política de las empresas como en la distribución de estas en el continuo de posibilidades de capital y productividad idiosincrática.

Figura 7: Cambio en la distribución de estado estacionario con una parametrización diferente de  $\alpha$



((a))  $\alpha$  aumentado en 10%



((b))  $\alpha$  reducido en 10%

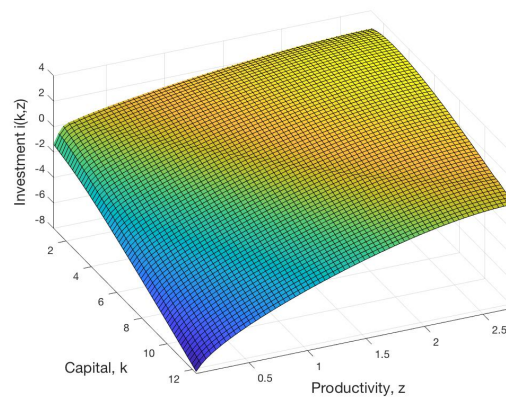
En la figura (7) se presenta el manto del diferencial en la función de distribución entre el estado estacionario con los parámetros originales presentados en las secciones anteriores y la función de distribución de las empresas cuando el parámetro de rendimiento del capital de las



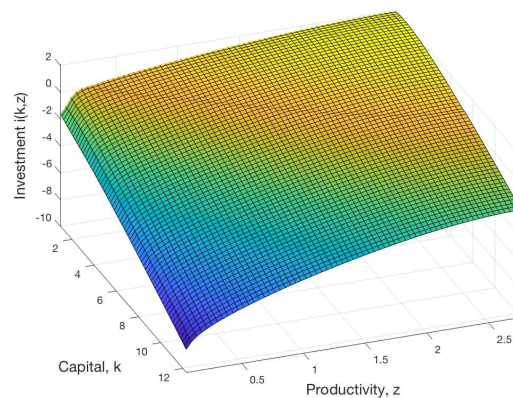
empresas es un 10% mayor que en el *setting* original (panel (a)) y un 10% menor que en la parametrización original en el panel (b).

Con relación al panel (a) como era de esperarse dado el aumento en el retorno del capital las empresas acumulan más capital en todos los niveles de productividad, por lo que se genera un manto positivo en niveles mayores de capital. Sin embargo, la masa que disminuye se encuentra concentrada en la zona de productividad baja y capital bajo, pero el aumento de empresas se nota de forma más uniforme en todo el rango de los niveles de productividades. Adicionalmente, punto de acumulación de masa dado por la restricción de capital mínimo disminuye de forma significativa.

Figura 8: Funciones de política para diferentes del problema de las empresas con  $\alpha$  diferentes



((a))  $\alpha$  aumentado en 10%



((b))  $\alpha$  reducido en 10%

Del panel (a) de la figura (7) rescatar que los efectos en estos cambios agregados no son uniformes a lo largo del continuo de productividades, lo que se ve reflejado en que la disminu-

ción de empresas se encuentra concentrada en el cuadrante de las empresas menos productivas y con poco capital y el aumento de la masa de empresas se encuentra distribuido de manera más uniforme en a lo largo del continuo de niveles de producción. Por lo que termina habiendo una mayor proporción de empresas más productivas en la economía.

En relación al panel (b) de la figura (7) se puede ver una mayor concentración de empresas en la zona de baja productividad y bajo capital. A pesar que los efectos son en la forma básicamente los opuestos a los obtenidos en el panel (a) las magnitudes en el caso del panel (b) son mayores, por lo que la acumulación en la zona de baja productividad y bajo capital se produce de forma más rápida de lo que disminuye frente a un aumento del retorno del capital. Con relación a la acumulación en el punto de restricción este no aumenta de forma tan pronunciada como si pasa con la desacumulación del panel (a).

Con relación a las funciones de política de la figura 8 y su contraparte la función de política original (figura 2 panel(a)), podemos ver que en el panel (a) en comparación a la función de política original hay menos efectos de la restricción de capital mínimo, por lo que las funciones de política de las empresas con niveles de productividad menor tienden a mantener la forma de sus funciones de política, caso contrario ocurre con la parametrización del panel (b) en donde se puede ver que las funciones de política para las empresas con menores niveles de productividad estas son más planas convergiendo a un nivel de inversión dado cuando el capital comienza a acercarse al nivel de restricción por lo que esas empresas no puede desinvertir todo lo que quisieran en caso de no existir esta restricción.

## 5.2. Cambio en $\chi$

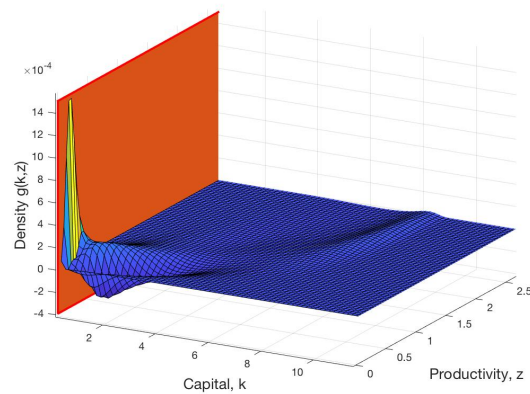
En este apartado se discutirá una disminución (aumento) de 10% del parámetro de costo cuadrático a la inversión en el modelo de firmas heterogéneas, con difusión con el objetivo de ejemplificar las ventajas de utilizar un modelo más complejo y realista de las firmas con relación a un modelo con una empresa representativa.

En la figura 9 se presenta la diferencia entre las distribuciones de estado estacionario bajo la parametrización cambiada de  $\chi$  menos la original. En el panel (a) se presenta esta diferencia cuando el costo de la inversión se disminuyó en un 10%, en el panel (b) se presenta la diferencia cuando  $\chi$  fue aumentado en un 10%.

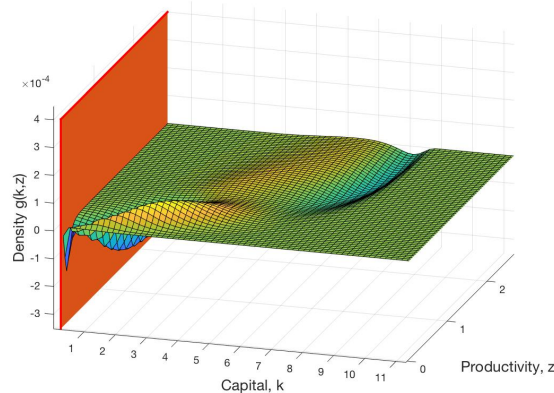
Uno de los principales puntos a destacar del cambio en las funciones de densidad de estado estacionario en cada uno de los cambios de  $\chi$  es sobre el signo del cambio en densidad de capital es dependiente del nivel de productividad de las empresas. En el caso del panel (a), en donde el costo cuadrático de la inversión cae, las empresas más productivas acumulan una mayor cantidad

de capital para cada nivel de productividad. Por otra parte, la mitad inferior de las empresas en términos de productividad disminuyen la cantidad de capital que acumulan en el nuevo estado estacionario. Esto se debe a que la fricción que hace que el nivel de inversión no sea siempre aquel que se desearía instalar para cada nivel de productividad cae, por lo que el (des)instalar capital sea menos costoso, lo que causa que una empresa que se encuentra con un nivel de productividad menor que en el instante anterior acumula menos capital, lo que es más cercano a su óptimo sin fricción; lo contrario ocurre para la mitad superior de los niveles de productividad.

Figura 9: Cambio en la distribución de estado estacionario con una parametrización diferente de  $\chi$



((a))  $\chi$  reducido en 10 %



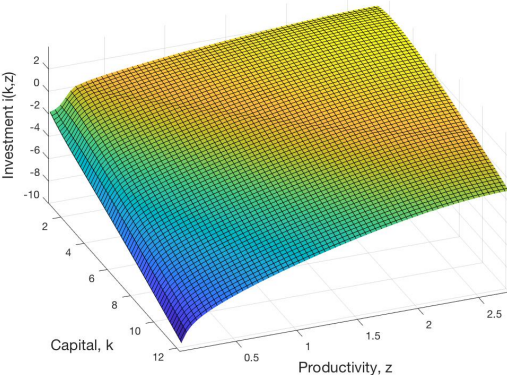
((b))  $\chi$  aumentado en 10 %

En la figura 9 panel (b) podemos ver la diferencia de la función de densidad cuando el costo cuadrático (fricción) de la inversión aumenta en un 10 %. Al igual que en el panel (a) los efectos sobre la función de densidad depende del nivel de productividad de las firmas, en este caso al aumentar la costo de la fricción a la inversión las empresas de mayor productividad acumulan

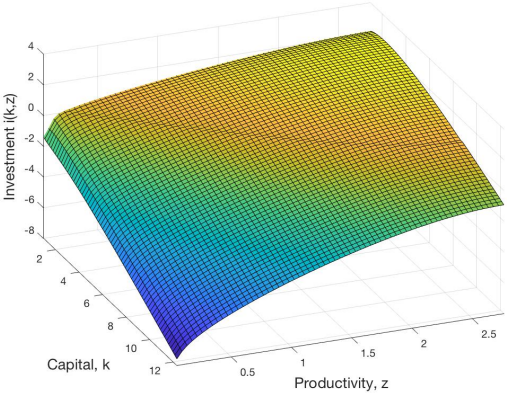
una menor cantidad de capital en estado estacionario, esto se debe a que al tener la posibilidad de tener un nivel de productividad menor en el futuro, el costo de llevar a cabo esta desinversión sea mayor que en el caso original, por lo que mantiene menos capital en los estados con mayor productividad. Lo contrario ocurre cuando se analizan las empresas con un nivel de productividad bajo, en donde tienden a acumular más capital que en el caso original.

Finalmente, se puede observar que los efectos de un aumento o disminución de los costos a la inversión tiene un efecto de escala diferente para cambios positivos o negativos de este parámetro, teniendo un mayor impacto en la distribución de las empresas una caída de  $\chi$ .

Figura 10: Distribución ergódica de empresas con proceso de difusión



((a))



((b))

Con relación a las funciones de políticas de las empresas según su nivel de productividad y capital se puede ver el efecto de un cambio en el parámetro  $\chi$  en la figura 10. En el panel (a) en donde el costo es menor, se puede ver que hay más empresas que tienen su función de política

( $i(k|z)$ ) de inversión "aplanada", es decir restringida por el nivel mínimo de capital que se puede tener acumulado, esto viene a reafirmar la explicación entregada anteriormente sobre el efecto de la baja del costo de fricción en la inversión sobre la mayor inversión (desinversión) de acorde al estado de productividad en el que se encuentre. Lo contrario ocurre cuando este costo aumenta, en donde se ve que las funciones de política restringidas son menos.

Estas dos últimas sub-secciones tienen con objetivo enfatizar las diferencias que se pueden llegar a analizar con un modelo de empresas heterogéneas en contraposición a un modelo con una empresa representativa, en el que no es posible obtener en primer lugar una función de distribución de la firmas.

Sin embargo, surge la interrogante si el modelo con un proceso de *Poisson* o el de difusión es capaz de replicar los momentos en un contexto en donde hay un *shock* agregado en la productividad de las firmas en la economía modelada. Esto se analizará en la sección 6 considerando el algoritmo desarrollado por Ahn et al. (2017) y adaptándolo a nuestro contexto, adicionalmente se compara con los momentos obtenidos de los datos y modelos explorados por King y Rebelo (1999), Khan y Thomas (2008) y Bachmann et al. (2013).

## 6. Shock agregado

Como se vió en la sección anterior, cambios en parámetros globales como lo son  $\chi$ , el costo cuadrático de la inversión, y  $\alpha$ , la tasa de rendimiento del capital, tienen efectos diferenciados en magnitud si el cambio es positivo o negativo. Adicionalmente, existen cambios no lineales a lo largo de todo el espectro de productividades, considerando esto en estado estacionario, se puede intuir que existen efectos diferenciados en el continuo de productividades frente a *shocks* agregados a la productividad agregada de las firmas de la economía. Esto es lo que se busca en la presente sección.

Al momento de incorporar el *shock* agregado a la producción de las empresas este se puede expresar de la siguiente forma

$$Y_t = A_t z_t k_t^\alpha \tag{36}$$

en donde el nivel de productividad agregado siguiendo a la literatura previa sigue un proceso AR(1) en tiempo continuo, por lo que sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck como se muestra en la ecuación (37), y se utilizan los parámetros utilizados tanto en Khan y Thomas (2008), Bachmann et al. (2006) y Winberry (2018), que son  $\eta_A = 0,8254$  y  $\sigma_A = 0,00953$ .

$$dA_t = -\eta_A A_t dt + \sigma_A dW_t \quad (37)$$

A diferencia del algoritmo de Winberry (2018) en donde se perturba el estado estacionario, en este algoritmo se lineariza el equilibrio.

El algoritmo presentado por Ahn et al. (2017) consiste en los siguientes pasos:

1. Resolver el estado estacionario del modelo sin considerar los *shocks* agregados.
2. Linealizar las condiciones de equilibrio, utilizando una expansión de Taylor de primer orden (entorno al estado estacionario).
3. Reducir el modelo en las dimensiones de la función valor y la distribución, si el modelo es lo suficientemente grande.
4. Resolver el sistema lineal creado.
5. Simular el modelo y obtener las funciones impulso respuesta y los momentos simulados.

Para el primer punto se realiza todo lo desarrollado en las secciones anteriores, tomando en consideración el tipo de incertidumbre idiosincrática que enfrenta la empresa, ya sea solo dos niveles de productividad o muchos. Como se mostró en secciones anteriores el estado estacionario estará caracterizado por un sistema matricial que se resume en:

$$\rho V(k, z) = \pi(V(k, z)) + A(v(k, z)|p)V(k, z) \quad (38)$$

$$0 = A(v(k, z)|p)'g(k, z) \quad (39)$$

$$p = F(g(k, z)) \quad (40)$$

En donde el precio en este modelo reducido es solo la tasa de interés, la cual como se pone en la ecuación (40) es una función que depende de la función de distribución de las empresas dada por  $g(k, z)$ . El sistema anterior contiene un total de  $K \cdot N + 1$  ecuaciones, ya que el precio es uno solo y tanto la función valor  $V$  como  $g$  están definidas por  $N$  entradas para la discretización del capital y  $K$  entradas para la discretización de los niveles de productividad.

Para el estado estacionario de estas economías la grilla de los estados de la función valor fueron discretizados en  $K = 65$  y  $z = 70$  puntos para el modelo en donde la productividad idiosincrática sigue un proceso de difusión. En tanto, para el modelo simplificado, en donde la productiividad sigue un proceso de *Poisson* la discretización del espacio del capital es idéntica al modelo anterior y el espacio de productividades naturalmente es de  $z = 2$ .

Para el paso 2 del algoritmo, se lineariza el estado estacionario entorno a los niveles y precio del estado estacionario, agregando la condicionalidad del *shock* agregado, por lo que el sistema de ecuaciones queda dependiendo del tiempo y un estado adicional como lo es el nivel de productividad agregado.

La mayor discusión de esta metodología se encuentra en el paso 3, ya que no hay una forma óptima para la reducción de las dimensiones de la función valor de las empresas y de tampoco de las función de distribución. Dado esto los autores desarrollaron un código el cual verifica que las variables simuladas sean internamente consistentes, cuyo gráfico puede encontrarse en el apéndice (A.5).

En el caso del modelo con un proceso de difusión se redujo el espacio de 5200 puntos, considerando los puntos de ambos estados (capital y nivel de productividad), para la función valor a  $k = 960$  y  $z = 254$  logrando de esta forma que el los errores *ex-post* de la consistencia interna sean lo suficientemente bajos, como se ve el la figura en el apéndice (A.5). Esto logra que el algoritmo para obtener las IRF corra en el entorno de 16 segundos, logrando obtener estos resultados en un lapso similar al algoritmo presentado por Winberry (2018).

Para el modelo simplificado con dos niveles de productividad el algoritmo simula el modelo de forma más rápida, ya que posee menos puntos en la función de distribución, lo que hace que la reducción sea menos necesaria, por lo que se redujo el espacio de 130 puntos a 58 puntos en la función de distribución y 24 puntos en la función valor. El algoritmo toma un poco más de 1 segundo.

## 6.1. Momentos de los modelos

En este apartado se discuten los momentos obtenidos por los modelos al realizar simulaciones sobre el nivel de productividad agregado obteniendo innovaciones al proceso de *Wiener* del proceso de la productividad agregada con la parametrización presentada en los trabajos con los que se compara este modelo.

Para realizar la obtención de los momentos de estos modelos se realizan innovaciones a la productividad agregada por un tiempo largo de 10000 períodos, con 4 sub períodos ( $dt$ ) para cada uno de los períodos, por lo que son 40000 simulaciones. Luego se puede comparar los diferentes momentos con los obtenidos en los datos.

King y Rebelo (1999) obtuvieron diferentes momentos para la economía de Estados Unidos entre los años 1947 y 1996 (por trimestres), adicionalmente quitaron la estacionalidad con el filtro *HP*. Estos momentos se presentan en la tabla 12.

Tabla 12: Momentos de los datos de la economía de EEUU

	$\sigma_j$	$\sigma_j$ relativa	correlación	Persistencia
Y	1.81	1	1	0.84
C	1.35	0.74	0.88	0.80
I	5.30	2.93	0.80	0.87
r	0.30	0.16	-0.35	0.60

Tabla 13: Momentos del modelo con difusión con shock agregado linealizado

	$\sigma_j$	$\sigma_j$ relativa	correlación	Persistencia
Y	2.11	1	1	0.90
C	1.64	0.77	0.89	0.98
I	6.27	2.97	0.94	0.93
r	0.35	0.17	-0.83	0.97

En la tabla 13 se presentan los momentos del modelo con un proceso de difusión, tanto en su desviaciones estándar absolutas<sup>14</sup>, en la primera columna, las desviaciones estándar relativas a la desviación estándar del producto, en la segunda columna, la correlación de las  $\sigma_j$  con respecto al  $\sigma_Y$ , en la tercera columna y finalmente en la cuarta columna están las primeras autocorrelaciones de cada una de las series generadas.

El otro algoritmo de simplificación de un *shock* agregado es el presentado por Winberry (2018), el cual presenta una perturbación del estado estacionario. Este modelo se resuelve utilizando como base el modelo de Khan y Thomas (2008) con costos no convexos de ajuste en la inversión y la base de parametrización usada en este modelo, con la diferencia de los parámetros de la productividad idiosincrática de las firmas y el costo de inversión, como se discutió anteriormente.

Tanto King y Rebelo (1999) como Winberry (2018) presentan los momentos que entregan las simulaciones de sus modelos por largos períodos, los que se comparan en la tabla a continuación, para tener una mejor noción de los resultados obtenidos con este método de linealización.

---

<sup>14</sup>El valor de la desviación estándar del producto puede ser ajustado disminuyendo la varianza del proceso de difusión de la productividad agregada, sin embargo, para hacer comparables los momentos entre los modelos esto no se presenta.



Tabla 14: Comparación momentos entre modelos

	$\sigma_j$				$\sigma_j$ relativa ( $\sigma_j/\sigma_Y$ )			
	Y	C	I	r	Y	C	I	r
Data	1.81	1.35	5.30	0.30	1	0.74	2.93	0.16
King y Rebelo	1.39	0.61	4.09	0.05	1	0.44	2.95	0.04
Winberry	2.16	1.02	8.48	0.17	1	0.47	3.93	0.08
Modelo <i>Poisson</i>	1.85	1.95	2.76	0.63	1	1.05	1.49	0.34
Modelo Difusión	2.11	1.64	6.27	0.35	1	0.77	2.97	0.17

Un primer aspecto a destacar de los momentos del modelo con difusión es la cercanía de las desviaciones estándar relativas con relación a aquellos encontrados en los datos. Estos momentos son logran mejorar aquellos obtenidos en los modelos de King y Rebelo (1999) en el consumo y la tasa de interés y también a los obtenidos en Winberry (2018) en los tres agregados analizados. Con relación a la desviación estándar relativa de la sobre inversión sobre la desviación estándar del producto es un punto importante, ya que en este trabajo se utilizó el supuesto de costos convexos en la inversión, el hecho que se logre un  $\sigma_I/\sigma_Y$  es similar a los datos logra respaldar el resultado de Khan y Thomas (2008) y no resulta un problema para este modelo.

Sin embargo, el modelo con un proceso de *Poisson* no logra lo mismo que el modelo de difusión en términos de desviaciones estándar relativa, ya que el consumo y la tasa de interés presenta una variación excesiva en relación a todos los demás modelos y una muy baja variación en el agregado de inversión.

Tabla 15: Comparación momentos entre modelos

	Persistencia				Correlación Contemporánea			
	Y	C	I	r	Y	C	I	r
Data	0.84	0.8	0.87	0.6	1	0.88	0.80	-0.35
King y Rebelo	0.72	0.79	0.71	0.71	1	0.94	0.99	0.95
Winberry	-	-	-	-	1	0.90	0.97	0.79
Modelo <i>Poisson</i>	0.97	0.93	0.76	0.98	1	0.98	0.94	-0.99
Modelo Difusión	0.90	0.98	0.93	0.97	1	0.89	0.94	-0.83

En la tabla 15 se presentan las diferentes persistencias de cada variable entre los modelos, entregada por la primera autocorrelación de las desviaciones estándar y las correlaciones contemporáneas entre los  $\sigma_j$  y el  $\sigma_Y$ , en términos de la persistencia se puede los modelos con costos convexos presentan una mayor persistencia con relación a los datos, sin embargo, la persistencia de la inversión resulta ser más cercana a la de los datos que el modelo de King y Rebelo (1999). Al enfocarnos en la correlación de los modelos resalta que este modelo logra a diferencia de los otros dos modelos comparados una correlación negativa en la tasa de interés y el producto. Al

analizar el resto de las correlaciones se observa que el modelo de difusión logra una buena aproximación de este momento en la variable del consumo agregado y una correlación más cercana en la inversión a la obtenida en el resto de los modelos.

Si buscamos analizar comparativamente los modelos con dos y muchos niveles de productividad, en primer lugar hay que referirse a las desviaciones estándar obtenidas de los modelos. En este punto el modelo con dos niveles de productividad genera momentos muy diferentes a los encontrados en los datos, teniendo una variación de la inversión sorpresivamente baja, ya sea en términos absolutos como relativos, adicionalmente la variación de la tasa de interés es del doble al obtenido de los datos y del modelo con difusión, el consumo agregado sigue el mismo patrón.

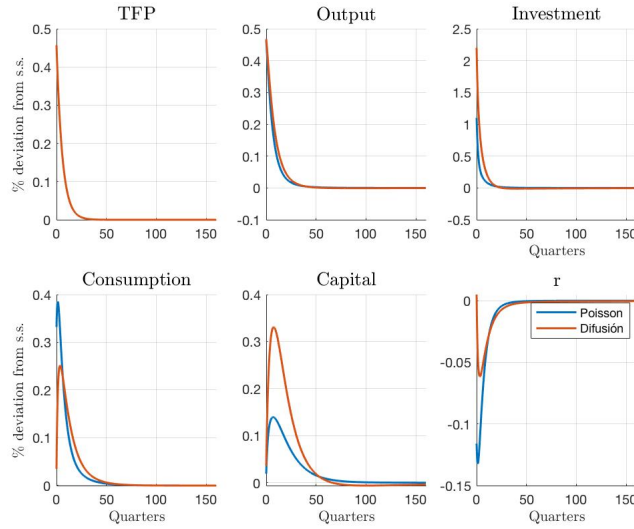
En segundo lugar, en términos de la persistencia de los modelos, en ambos modelos se ve una mayor persistencia a la hallada por King y Rebelo (1999) en los datos con la excepción de la persistencia de la inversión en el modelo de *Poisson*. Con relación al resto de estos momentos, no es claro que un modelo genere persistencias mejores al otro en cada una de los puntos de comparación. Finalmente, en la comparación de las correlaciones obtenidas a partir del modelo con muchos niveles de difusión en los momentos de la tasa de interés y el consumo este entrega correlaciones mucho más cercanas al vista en los datos y en relación a la correlación de la inversión esta es indistinguible entre los modelos.

Tomando en consideración que en el análisis de estado estacionario el modelo con un proceso de *Poisson* era una buena aproximación del modelo con un continuo de niveles de productividad, en el caso de incorporar un *shock* agregado, el modelo de *Poisson* entrega momentos significativamente diferentes al del modelo de difusión, el cual si logra una buena representación de los momentos obtenidos de los datos. Todo lo anterior hace que en presencia de un *shock* agregado en modelo con dos tipos de productividades no sea una buena aproximación del modelo con muchos niveles diferentes de productividades.

Una forma diferente de analizar los dos modelos presentados en este trabajo es mediante las funciones impulso respuestas (IRF) obtenidas a partir de un *shock* único de una amplitud de una desviación estándar del nivel de estado estacionario de la productividad agregada, definido anteriormente.

En la figura 11 se puede ver las IRF para los dos modelos frente al mismo *shock* agregado, en términos de desviación porcentual con relación al estado estacionario. Como se podía concluir a partir de los momentos se ve naturalmente reflejado en las IRF, ya que la inversión en el modelo del proceso de *Poisson* (líneas azules) reacciona de una forma mucho menor que en el modelo con el proceso de difusión. Esto hace que el capital agregado reaccione en una menor medida también.

Figura 11: IRF shock agregado único, una desviación estándar



En términos de la persistencia en el modelo de *Poisson* la inversión no tiene un período por debajo del nivel de inversión agregado de estado estacionario, lo que impacta en la mayor persistencia del *shock* agregado en el capital agregado de la economía.

Al estar analizando una pregunta que involucra a un *shock* agregado se puede concluir que el modelo con dos niveles de productividades no realiza una buena aproximación del modelo con muchos niveles de productividades. Por lo que para este tipo de análisis es necesario utilizar el modelo con difusión para poder obtener mejores conclusiones.

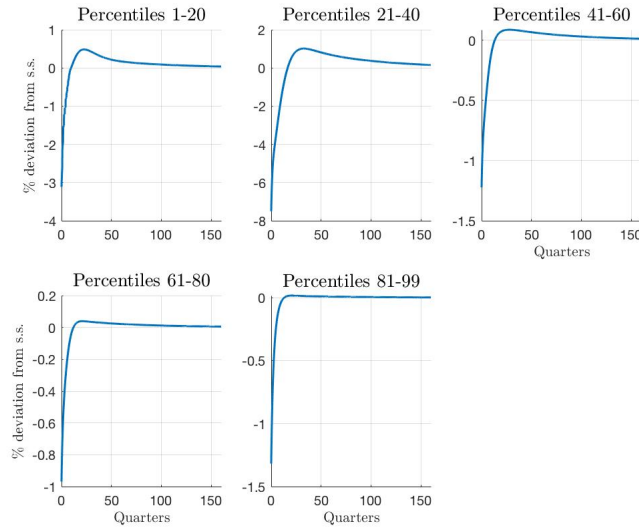
## 6.2. Desagregación del shock agregado

Una pregunta importante y natural que surge a partir de un *shock* agregado que puede enfrentar una economía tiene que ver con los diferentes impactos que este tiene sobre diferentes tipos de empresas, y las posibles implicancias de estos efectos. En este apartado se analiza a partir de unas pseudo-IRF de un *shock* único, negativo, de las variables agregadas y la simulación de la función de distribución. Estas funciones no son exactamente IRFs, ya que en cada momento del tiempo diferentes empresas tienen diferentes niveles de productividad, por lo que a lo largo de los períodos simulados una empresa en específico se encuentre en diferentes quintiles en casa uno de los períodos.

En primer lugar hay que recordar que se está trabajando en un ambiente en donde hay una restricción de capital mínimo, por lo que las empresas con menor capital pueden tener una restricción activa. La forma de dividir el continuo de empresas es por quintiles de productividad,

es decir, en el primer quintil está la suma de las inversiones de todas las empresas que en ese período pertenecen al quintil más bajo de la función de distribución de las empresas.

Figura 12: Desagregación de la inversión, shock agregado 1 desviación estándar



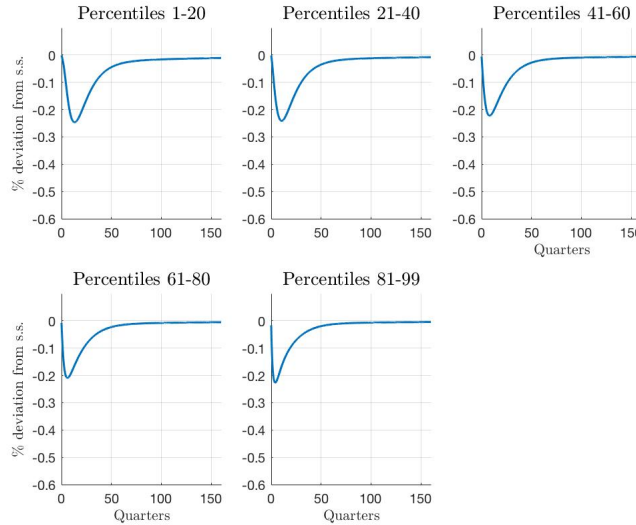
En la figura 12 podemos observar como se mueve la inversión para cada quintil de empresas que en cada período pertenece a cada uno de los 5 quintiles de los niveles de productividad idiosincrática de la economía, como desviación porcentual con relación al estado estacionario.

Uno de los principales aspectos a destacar es el gran efecto negativo que el *shock* agregado tiene sobre las empresas en los 2 quintiles inferiores, en donde se encuentran unos efectos inmediatos entre 3-8% en los primeros períodos, siendo que el mayor desequilibrio del resto de quintiles es un poco superior al 1% con relación al estado estacionario.

Con relación a la duración del *shock* agregado, podemos decir que esta es mayor para la empresas menos productivas, siendo el efecto más corto en aquellas empresas que se encuentran en el quintil superior de productividad. De esta forma no solo en términos de intensidad, sino que en términos de duración temporal las empresas menos productivas se ven más afectadas.

En la figura 13 se presentan los movimientos del capital desagregado de las firmas por quintil de productividad en cada período posterior al *shock* agregado. De forma similar al análisis anterior los mayores efectos se ven en las empresas que les toca estar en los quintiles de menor productividad, sin embargo, a diferencia de la inversión, el largo del desequilibrio y su *peak* es lo más relevante.

Figura 13: Desagregación del capital, shock agregado 1 desviación estándar



Las empresas que se encuentran en los quintiles superiores de productividad presentan una desacumulación superior del capital en períodos más cercanos al momento del *shock* agregado, y de igual forma que en la inversión vuelve de manera más rápida al nivel de estado estacionario.

En el caso de los quintiles de menor nivel de productividad idiosincrática el efecto del *shock* tarda unos períodos más en alcanzar su máxima desacumulación para luego comenzar a retorar al valor de estado estacionario. El *shock* agregado de igual forma que en la inversión tiene un efecto mucho más prolongado en los quintiles inferiores.

## 7. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se mostró que bajo la utilización de un modelo en donde las empresas presentan diferentes niveles de productividades idiosincráticas diferentes es posible analizar un mayor número de aspectos sobre las firmas, tales como diferencias no lineales en la función de distribución estacionaria al enfrentar parámetros globales diferentes. Adicionalmente, se ilustra las diferencias y limitaciones de un modelo con una empresa representativa en estado estacionario frente a modelos con empresas heterogéneas, en donde incluso en un análisis de estado estacionario el precio de equilibrio se encuentra muy por debajo del logrado por los modelos heterogéneos, esto como consecuencia de la incapacidad de representar los diferentes niveles de inversión de cada tipo de empresa condicional a sus estados de  $k$  y  $z$ .

Al avalarse en el resultado encontrado por Khan y Thomas (2008) sobre las variaciones de los *shocks* idiosincráticos y agregados podemos asumir una simplificación sobre la forma de los costos de inversión que enfrentan las empresas en una economía con diferentes niveles de productividad. En base a esto se puede utilizar el algoritmo de Ahn et al. (2017) para realizar un análisis de un modelo RBC en tiempo continuo y obtener de forma eficiente y relativamente sencilla de analizar un *shock* a la productividad agregada de las empresas, el cual logra generar momentos similares a los datos analizados por King y Rebelo (1999).

Esto se logra utilizando la mayoría de los parámetros utilizados en la literatura de tiempo discreto que poseen empresas heterogéneas como lo son Bachmann et al. (2013), Khan y Thomas (2008) y Winberry (2018), en este trabajo solo se cambiaron los parámetros de costos cuadráticos de la inversión por razones de la estructura de los costos y también se utilizó una parametrización levemente diferente a para los *shocks* idiosincráticos para obtener una función de distribución de la productividad más similar a la encontrada en los datos.

Adicionalmente, se mostró bajo que escenarios un modelo con empresas heterogéneas en donde existe un gran número de niveles de productividad puede ser simplificado para trabajar con un modelo en donde solo existan dos niveles diferentes de productividad idiosincrática, en donde se concluye que esto es una buena simplificación para preguntas sobre el estado estacionario de la economía y en donde no se esté interesado en responder preguntas sobre restricciones sobre alguna variable de estado. Posteriormente, se analizó los efectos no lineales del modelo con un proceso de difusión frente a escenarios en donde en estado estacionario las empresas enfrentan parámetros globales distintos, en donde existen efectos diversos según productividad tanto en magnitud como en la dirección de estos.

Con el objetivo de clarificar bajo que escenarios es razonable utilizar un modelo con un proceso de *Poisson* se incorporó un *shock* agregado a la productividad de las empresas. Si se busca responder este tipo de preguntas basandose en los momentos e IRF obtenidas la simplificación sobre los niveles de productividad deja de ser válida, para la economía como un todo, dado que los momentos obtenidos son muy diferentes a aquellos de los datos y el modelo con muchos niveles de productividad.

El resultado central se encuentra al desagregar los efectos de un *shock* agregado de una desviación estándar las empresas que se encuentran en los quintiles más bajos se ven más afectadas en términos de inversión y enfrentan una reacción más duradera en el tiempo, lo que puede traer consecuencias importantes en términos de desigualdad dentro de la economía si consideramos el resultado de Song et al. (2019), en donde se muestra la tendencia de la concentración de tipos de asalariados por tipo de empresas.

Finalmente, pensando en posibles extensiones de esta tesis, una teórica sería la inclusión de imperfecciones de mercado pensando en restricciones al crédito. Esto podría desarrollarse a través de: (i) un requisito de necesidades de financiamiento como en el acelerador financiero de Bernanke et al. (1999), (ii) a través de una restricción adicional a la dinámica de capital ó (iii) a una restricción de no-negatividad en las utilidades. Por el lado empírico, diversos estudios han explotado cortes transversales o paneles cortos de firmas. En este caso, el modelo permite relacionar una identificación conjunta de series de tiempo y panel. Esto puede ser muy relevante en el caso de diseño de políticas macro-prudenciales.

## 8. Bibliografia

- Achdou, Yves, Jiequn Han, Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, and Benjamin Moll. 2017. "Income and Wealth Distribution in Macroeconomics: A Continuous-Time Approach." Unpublished.
- Achdou Y, Buera FJ, Lasry J-M, Lions P-L, Moll B. 2014. "Partial differential equation models in macroeconomics". *Phil. Trans. R. Soc. A* 372: 20130397.
- Ahn, SeHyoun, Greg Kaplan, Benjamin Moll, Thomas Winberry, and Christian Wolf. Forthcoming. "When Inequality Matters for Macro and Macro Matters for Inequality." In *NBER Macroeconomics Annual 2017*, Vol. 32, edited by Martin S. Eichenbaum and Jonathan Parker. Chicago: University of Chicago Press.
- Aiyagari, S. R. 1994. "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving," *The Quarterly Journal of Economics*, 109(3), 659–84.
- Auclert, Adrien. 2019. "Monetary Policy and the Redistribution Channel." *American Economic Review*, 109 (6): 2333-67.
- Bachmann, Rüdiger, Ricardo J. Caballero, and Eduardo M. R. A. Engel. 2013. "Aggregate Implications of Lumpy Investment: New Evidence and a DSGE Model." *American Economic Journal: Macroeconomics*, 5 (4): 29-67.
- Barles, G., and P. E. Souganidis. 1991. "Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations." *Asymptotic Analysis*, 4: 271–283.
- Bernanke B.S., M. Gertler and S. Gilchrist. 1999. "The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework," *Handbook of Macroeconomics (Vol.1)*, eds. J.B. Taylor and M. Woodford.
- Bloom, N. 2007 "The Impact of Uncertainty Shocks," Working Paper, Stanford University.
- Campbell J., G. Mankiw. 1989. "Consumption, Income, and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence". *NBER Macroeconomics Annual* 4: 185-216.
- Candler, Graham V. 1999. "Finite-Difference Methods for Dynamic Programming Problems." In *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Di Mauro, Filippo and Maddalena Ronchi. 2015. *CompNet Report Assessing European competitiveness: the contribution of CompNet research.* European Central Bank.
- Gouin-Bonenfant Emilien. 2018. "Productivity Dispersion, Between-Firm Competition, and the Labor Share". Working Paper.



- Gourlay A.R. 1970. "Hopscotch: a fast second order partial differential equation solver". *J. Inst. Math. Appl.* 6. 375–390.
- Groth, Lecture notes in macroeconomics Chapter 9, "The intertemporal consumption-saving problem indiscrete and continuous time." Mimeo. 2015.
- Harley C. 2010. "Hopscotch method: The numerical solution of the Frank-Kamenetskii partial differential equation". *Applied Mathematics and Computation*. Volume 217, Issue 8. Pages 4065-4075.
- Hopenhayn, H. 1992. "Entry, Exit, and firm Dynamics in Long Run Equilibrium". *Econometrica*, 60(5), 1127-1150.
- Kaplan, G., B. Moll, and G. L. Violante. 2018. "Monetary Policy According to HANK," *American Economic Review*, 108(3), 697–743.
- Khan, Aubhik, Julia Thomas. March 2008. "Idiosyncratic Shocks and the Role of Nonconvexities in Plant and Aggregate Investment Dynamics." *Econometrica*.
- Khan, Aubhik, Julia Thomas. 2013. "Credit Shocks and Aggregate Fluctuations in an Economy with Production Heterogeneity". *Journal of Political Economy*.
- King, R.G. and S.T. Rebelo, 1999, "Resuscitating Real Business Cycles," in Taylor and Woodford, eds, *Handbook of Macroeconomics North Holland*, Ch 14, 927–1007.
- Krusell, P. and A. Smith. 1998. "Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy", *J. of Political Economy*, 106(5), 867-896.
- Luttmer, E. G. J. 2007. "Selection, Growth, and the Size Distribution of Firms". *The Quarterly Journal of Economics*, 122(3), 1103–1144.
- Moll, Benjamin. 2014. "Productivity Losses from Financial Frictions: Can Self-Financing Undo Capital Misallocation?". *American Economic Review*, 104 (10): 3186-3221.
- Olivi, Alan. 2019. "Revealed Preferences and Beliefs from Consumption-Savings Decisions. Identification Results and an Empirical Investigation." Unpublished.
- Piketty, T., E. Saez, and G. Zucman. 2016. "Distributional National Accounts: Methods and Estimates for the United States." NBER Working Paper no. 22945, Cambridge, MA.
- Ramsey, F.P. 1928. "A mathematical theory of saving". *Economic Journal*, vol. 38(152), pp. 543–59.
- Song Jae, David J Price, Fatih Guvenen, Nicholas Bloom, Till von Wachter. 2019. "Firming Up Inequality". *The Quarterly Journal of Economics*, Volume 134, Issue 1, February 2019, Pages 1–50.

- Stokey, Nancy L. *The Economics of Inaction: Stochastic Control Models with Fixed Costs*. Princeton University Press, 2009. JSTOR.
- Terry, S. J. 2017. Alternative Methods for Solving Heterogeneous Firm Models. *Journal of Money, Credit and Banking*, 49(6), 1081–1111.
- Terry, S. 2017. The Macro Impact of Short-Termism. Submitted in *Econometrica*.
- Vanhala, Juuso and M. Virén 2017. "Profitable firms generate employment and pay higher wages." *Bank of Finland Bulletin* 3/2017, Economic outlook.
- Winberry, Thomas. 2018. A method for solving and estimating heterogeneous agent macro models. *Quantitative Economics* 9 (2018), 1123–1151.

## A. Apéndice

### A.1. HJB proceso de difusión

El problema de la firma definido en (1-3) puede ser representado en tiempo discreto mediante la siguiente ecuación Bellman:

$$v(k_t, z_t) = \max \left\{ (z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t}) dt + \beta(dt) E_t[v(k_{t+dt}, z_{t+dt})] \right\}$$

$$k_{t+dt} = dt(i_t - \delta k_t) k_t$$

Tomando en cuenta que la tasa de descuento intertemporal puede ser representarse como  $\beta(\Delta) = e^{-\rho\Delta}$ , el segundo término puede ser representado por una aproximación de Taylor de primer orden a la siguiente expresión  $1 - \rho\Delta$ . Por lo que

$$v(k_t, z_t) = \max \left\{ z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t} \right\} dt + (1 - \rho dt) E_t[v(k_{t+dt}, z_{t+dt})]$$

Si abrimos el término de la expectativa y reordenamos se puede obtener:

$$v(k_{t+dt}, z_{t+dt}) \rho dt = \max \left\{ z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t} \right\} dt + E_t[v(k_{t+dt}, z_{t+dt}) - v(k_t, z_t)]$$

Dividimos todo por  $dt$  obteniendo de esta forma

$$\rho v(k_{t+dt}, z_{t+dt}) = \max \left\{ z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t} \right\} + \frac{E_t[v(k_{t+dt}, z_{t+dt}) - v(k_t, z_t)]}{dt}$$

Ahora se hace tender  $\Delta \rightarrow 0$  para obtener la siguiente expresión:

$$\rho v(k_t, z_t) = \max_{i_t} \left\{ z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t} \right\} + \frac{E_t[dv(k_t, z_t)]}{dt} \quad (41)$$

Si consideramos el proceso de difusión y utilizamos el lema de Ito generalizado tenemos:

$$dv(k_t, z_t) = [\partial_k v(k_t, z_t)(i_t - \delta k_t) + \partial_z v(k_t, z_t)\mu(z_t) + \frac{1}{2}\partial_{zz}v(k_t, z_t)\sigma^2(z_t)]dt + \partial_z v(k_t, z_t)\sigma(z_t)dW_t$$

Si obtenemos la esperanza de este término, utilizamos que  $E[dW_t] = 0$  ya que es la esperanza de un movimiento Browniano estándar,

$$E[dv(k_t, z_t)] = [\partial_k v(k_t, z_t)(i_t - \delta k_t) + \partial_z v(k_t, z_t)\mu(z_t) + \frac{1}{2}\partial_{zz}v(k_t, z_t)\sigma^2(z_t)]dt$$

Sustituyendo en (41) se obtiene

$$\rho V(k, z) = \max_i \left\{ z k^\alpha - i - \frac{\chi}{2} \left( \frac{i}{k} \right)^2 k \right\} + \partial_k V(k, z)(i - \delta k) + \partial_z V(k, z)\mu(z) + \partial_{zz} V(k, z) \frac{\sigma^2(z)}{2} \quad (42)$$

## A.2. HJB proceso de *Poisson*

De forma similar a la realizada en el apéndice anterior se puede obtener la versión de la ecuación de HJB cuando la productividad de las firmas puede tomar dos valores y el proceso aleatorio sigue un proceso de *Poisson*.

Plantemos el problema de las firmas en períodos de longitud  $dt$ , en donde las firmas poseen una tasa de descuento intertemporal igual a la de sus dueños  $\beta(dt) = e^{-\rho dt}$ , las firmas pueden tener dos niveles de productividad,  $z^h$  o  $z^l$ , las firmas mantienen su nivel de productividad con probabilidad  $p^h(dt) = e^{-\lambda^h dt}$  ( $p^l(dt) = e^{-\lambda^l dt}$ ) y cambian su nivel de productividad con probabilidad  $1 - p^h(dt)$  ( $1 - p^l(dt)$ ).

$$v(k_t, z_t) = \max \left\{ z_t k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t} \right\} dt + \beta(dt) E_t[v(k_{t+dt}, z_{t+dt})]$$

$$k_{t+dt} = (i_t - \delta k_t) k_t dt$$

El término de la expectativa puede ser escrito en términos de probabilidades dado que existen solo dos estados posibles para el nivel de la productividad,

$$v^h(k_t, z_t^h) = \max \left\{ z_t^h k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t} \right\} dt + \beta(dt) [p^h(dt) v^h(k_{t+dt}, z_{t+dt}^h) + (1 - p^h(dt)) v^l(k_{t+dt}, z_{t+dt}^l)]$$

$$k_{t+dt} = (i_t - \delta k_t) k_t dt$$

Tanto la tasa de descuento intertemporal como la probabilidad de mantener el nivel de productividad pueden ser denotados en una forma alternativa la cual se puede aproximar mediante una aproximación de Taylor de primer orden,

$$\beta(dt) = e^{-\rho dt} \approx 1 - \rho dt, \quad p^h(dt) = e^{-\lambda^h dt} \approx 1 - \lambda^h dt$$

Reemplazando esto en la ecuación de Bellman,

$$v^h(k_t, z_t^h) = \max \left\{ z_t^h k_t^\alpha - i_t - \frac{\chi}{2} \frac{i_t^2}{k_t} \right\} dt + (1 - \rho dt) [(1 - \lambda^h dt) v^h(k_{t+dt}, z_{t+dt}^h) + \lambda^h dt v^l(k_{t+dt}, z_{t+dt}^l)]$$

Reordenando,

$$[(1-\lambda^h dt)v^h(k_{t+dt}, z_{t+dt}^h) + \lambda^h dt v^l(k_{t+dt}, z_{t+dt}^l)] \rho dt = \max\{\pi(k_t, z_t^h)\} dt + [(1-\lambda^h dt)v^h(k_{t+dt}, z_{t+dt}^h) + \lambda^h dt v^l(k_{t+dt}, z_{t+dt}^l)] - v^h(k_t, z_t^h)$$

Dividiendo en ambas partes por  $dt$ ,

$$\rho v^h(k_{t+dt}, z_{t+dt}^h) = \max\{\pi(k_t, z_t^h)\} + \frac{v^h(k_{t+dt}, z_{t+dt}^h) - v^h(k_t, z_t^h)}{dt} + \lambda^h [v^l(k_{t+dt}, z_{t+dt}^l) - v^h(k_{t+dt}, z_{t+dt}^h)]$$

Reemplazando la restricción de  $k_{t+dt}$  en la función valor de las firmas y tomando  $dt \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{v^h(k_{t+dt}) - v^h(k_t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{v^h(dt(i_t - \delta k_t) + k_t) - v^h(k_t)}{dt} = \partial_k v^h(k_t)(i_t - \delta k_t)$$

Reemplazando esto último en la ecuación de Bellman y recordando que tomamos el límite de  $dt \rightarrow 0$ , entonces la HJB queda:

$$\rho v^h(k_t, z_t^h) = \max_{i_t} \{\pi(k_t, z_t^h)\} + \partial_k v^h(k_t)(i_t - \delta k_t) + \lambda^h [v^l(k_t, z_t^l) - v^h(k_t, z_t^h)]$$

### A.3. KFE proceso de *Poisson*

Esta demostración es una adaptación de la demostración de la ecuación de Kolmogorov con un proceso de *Poisson* en Ahn(2017).

En primer lugar hay un continuo de firmas que tienen un nivel diferente de capital  $k$  y productividad  $z^p$ . En donde el nivel de productividad es una variable aleatoria que puede tomar dos valores  $z^h$  y  $z^l$ , y sigue un proceso de *Poisson* con intensidades  $\lambda^h$  y  $\lambda^l$ .

La evolución del capital de una empresa cualquiera puede definirse de la siguiente forma en tiempo discretizado:

$$k_{t+dt} - k_t = (i_t - \delta k_t) dt \iff k_t = k_{t+dt} - (i_t - \delta k_t) dt$$

Luego de la decisión de inversión y por ende de la decisión de cambio en el capital, se conoce el nivel de producción,  $z_{t+dt}$ , que es una variable aleatoria. En donde, cambia de nivel de productividad con probabilidad  $\lambda^p dt$ .

Es necesario definir la función de densidad acumulada en relación a la acumulación de capital (CDF), dada por:

$$G^p(k, t) = Pr(k_t \leq k, z_t = z^p)$$

Esta CDF representa el porcentaje de empresas que en  $t$  tienen un nivel de productividad  $z^p$  y un capital para producir en ese período menor o igual a  $k$ . Esta CDF cumple con propiedades clásicas de una función de densidad acumulada de una variable aleatoria, como

$$G^h(0, t) + G^l(0, t) = 0$$

$$G^h(\infty, t) + G^l(\infty, t) = 1$$

La función de densidad se define a partir de la función acumulada,  $g^p(k, t) \equiv \partial_k G^p(k, t)$ .

Para obtener la ley de movimiento de la CDF sobre el capital acumulado hay que tomar la ecuación de movimiento del capital, fijar un punto cualquiera de  $k$  y preguntarse cual es la probabilidad de que  $k_{t+dt}$  sea menor o igual que ese nivel  $k$  fijado. De la ecuación de movimiento del capital tenemos que esto depende del nivel actual de capital  $k_t$  y de si la inversión neta, la cual puede ser positiva o negativa. Hay tres posibles alternativas para que en  $t + dt$  el capital del próximo período esté bajo el  $k$  fijado, en donde solo se pueden presentar dos casos simultáneamente:

$$Pr(k_{t+dt} \leq k | z_{t+dt}^p = z_t^p) = Pr(k_t \leq k) + Pr(k \leq k_t \leq k - (i_t - \delta k_t)dt)$$

(Si  $i_t - \delta k_t)dt$  es  $< 0$ ) y no se cambia el nivel de productividad.

$$Pr(k_{t+dt} \leq k | z_{t+dt}^p = z_t^p) = Pr(k_t \leq k) + Pr(k - (i_t - \delta k_t)dt \leq k_t \leq k)$$

(Si  $i_t - \delta k_t)dt$  es  $> 0$ ) y no se cambia el nivel de productividad.

La interpretación de las probabilidades anteriores son, la primera probabilidad corresponde a las empresas que ya estaban bajo el umbral, dado que la inversión es una función de política continua y suave que depende del nivel actual de capital, por lo que la inversión condicional al nivel de productividad es o positiva o negativa. Esto hace que el capital acumulado de las empresas se mueva en una sola dirección. Entonces el segundo término de las probabilidades anteriores corresponden a todas aquellas firmas que estaban entre el umbral y el diferencial de inversión (negativo en la ecuación superior y positivo en la ecuación inferior), por lo que en  $t + dt$  estarán bajo el umbral fijado  $k$ .

Para simplicidad de la derivación nos enfocaremos en el caso en que la inversión neta es

negativa, usando que  $Pr(k \leq k_t) = (1 - Pr(k_t \leq k))$  se obtiene

$$Pr(k_{t+dt} \leq k) = Pr(k_t \leq k - (i_t - \delta k_t)dt)$$

Si consideramos que en el siguiente  $t + dt$  instante el nivel de productividad de las firmas puede ser tanto  $z^p$  como  $z^{-p}$  en forma genérica, entonces en el período  $t$  hay una probabilidad de  $(1 - dt\lambda^p)$  que haya mantenido su nivel de productividad y una probabilidad  $dt\lambda^{-p}$  que haya cambiado de productividad, por lo que reemplazando la definición de probabilidad e incorporando esto último podemos obtener:

$$G^p(k, t + dt) = (1 - dt\lambda^p)G^p(k - (i_t - \delta k_t)dt, t) + dt\lambda^{-p}(k - (i_t - \delta k_t)dt, t)$$

Si restamos en ambos lados por  $G^p(k, t)$  y dividimos todo por  $dt$  se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{G^p(k, t + dt) - G^p(k, t)}{dt} &= \frac{G^p(k - (i_t - \delta k_t)dt, t) - G^p(k, t)}{dt} - \lambda^p G^p(k - (i_t - \delta k_t)dt, t) \\ &\quad + \lambda^{-p} G^p(k - (i_t - \delta k_t)dt, t) \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $dt \rightarrow 0$

$$\partial_t G^p(k, t) = \partial_k G^p(k, t)(k - (i_t - \delta k_t)) - \lambda^p G^p(k, t) + \lambda^{-p} G^{-p}(k, t)$$

Para obtener la ecuación de Kolmogorov hay que diferenciar los términos  $G^p(k, t)$  y  $G^{-p}(k, t)$  con respecto a  $k$  ya que lo que importa es  $Pr(k_t) = k, z_{t=z^p}$  lo que es la derivada parcial de la CDF con respecto a  $k$ , por lo que la ecuación de Kolmogorov es:

$$\partial_t G^p(k, t) = \partial_k G^p(k, t)(k - (i_t - \delta k_t)) - \lambda^p \partial_k G^p(k, t) + \lambda^{-p} \partial_k G^{-p}(k, t)$$

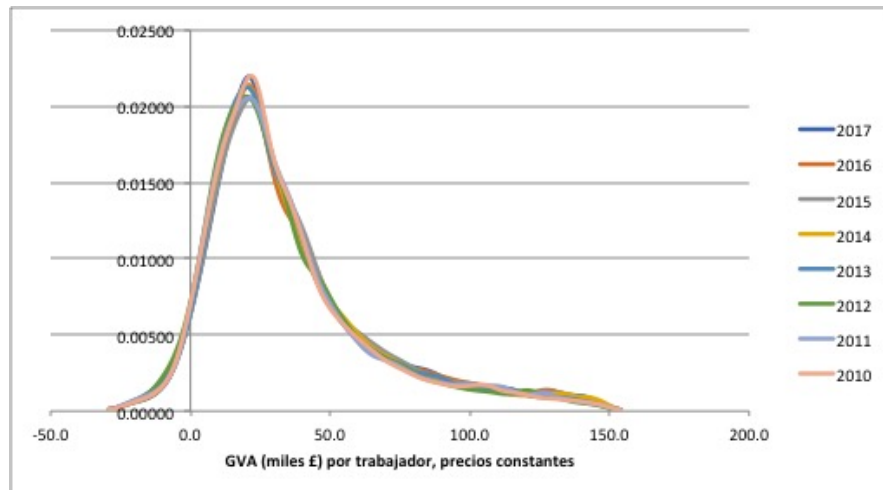
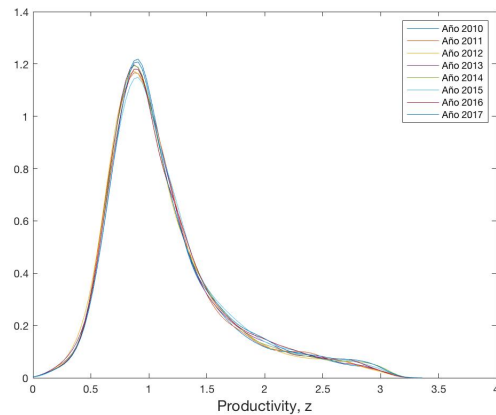
Si consideramos que estamos en el estado estacionario, entonces la derivada con respecto a  $t$  se hace 0, quedando finalmente

$$0 = g^p(k, t)(k - (i_t - \delta k_t)) - \lambda^p g^p(k, t) + \lambda^{-p} g^{-p}(k, t)$$

#### A.4. Distribuciones de productividad

En el gráfico presentado a continuación corresponde a la distribuciones de *Kernel* de los datos reescalados de las empresas entre los años 2010 hasta 2017.

En donde puede apreciarse que la distribución de estas empresas a lo largo de los diferentes años tiene en primer lugar la misma forma, la cual se asemeja a una distribución lognormal. Adicionalmente, las colas inferiores de las distribuciones aparentan no tener un cambio significativo, mientras que la cola superior posee algo más de volatilidad a lo largo del período estudiado.



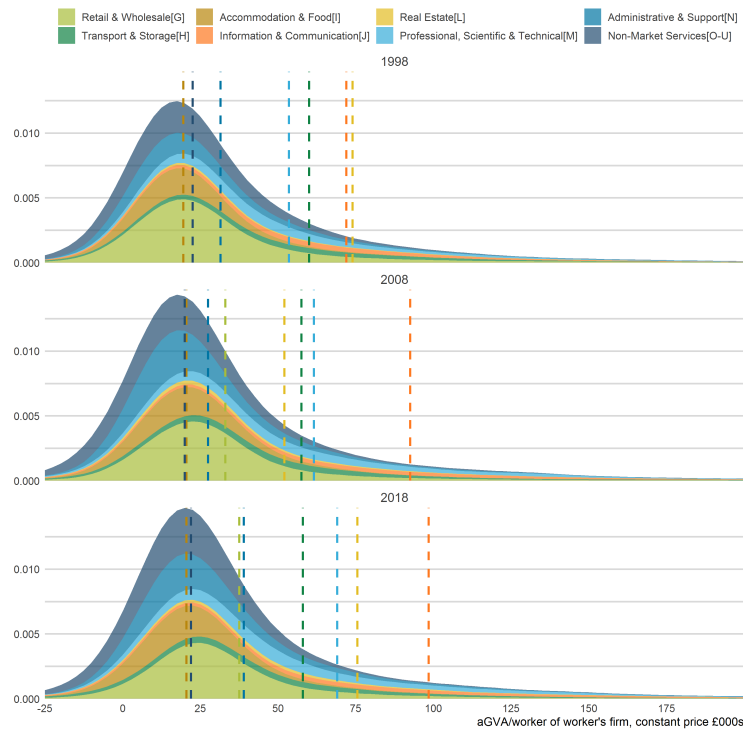
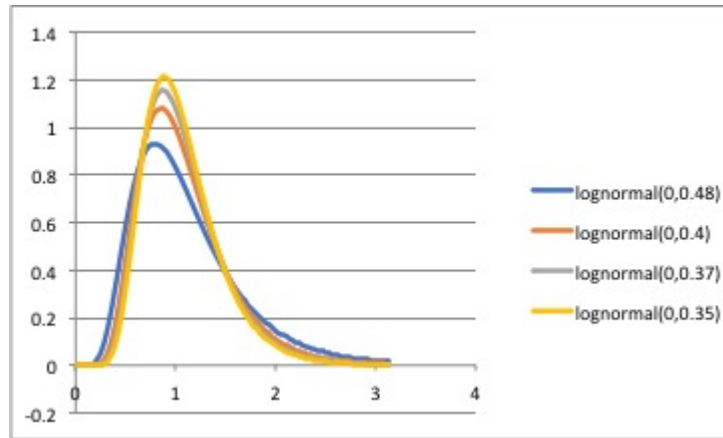
El gráfico anterior corresponde a la distribución de *kernel* original, en miles de £ por trabajador, en donde naturalmente la forma sigue la misma forma que la distribución reescalada. Ya que tiene una sección en los negativos tuvo que ser reescalada por la definición de la distribución lognormal en los positivos.

En la figura anterior se ve la distribución de empresas por tipo de empresas para 3 años de la base de datos explicada en la sección principal del trabajo.

### A.5. Gráfico de Consistencia interna de la simulación

A continuación se presenta el gráfico presente en el código de Ahn et al. (2017) en donde se comprueba que los errores de las variables linealizadas no sean grandes, lo que se presenta en el gráfico siguiente.

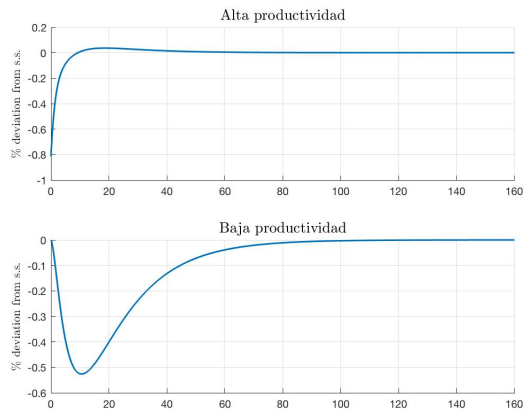
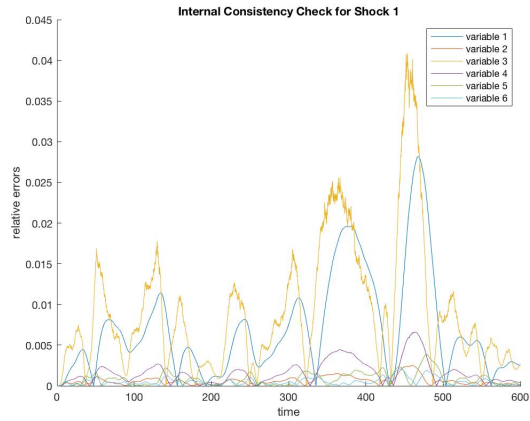




Fuente: Office for National Statistics - Annual Business Survey (ABS), Inter-Departmental Business Register (IDBR)

### A.6. Desagregación Inversión modelo *Poisson*

La figura siguiente se muestra el efecto desagregado de un *shock* positivo agregado a la productividad, en donde está el cambio de la inversión para las empresas que en cada período se encuentra en baja o alta productividad.



### A.7. Desagregación movimiento función distribución modelo difusión

En la figura siguiente se presenta la variación de la distribución de los diferentes percentiles a lo largo del tiempo, en donde se ve que los cambios en la distribuciones de las empresas es casi nulo frente a un *shock* agregado.

