

VCH-10  
LIC-F  
L827  
C1

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE QUARKS

Profesor Guía: Dr. IGOR SAAVEDRA

MARCELO LOEWE LOBO

SANTIAGO

1977

A mi madre  
y a mi padre en su recuerdo

## I. INTRODUCCION.

En el año 1964 Gell-Mann y Zweig, en forma independiente, observaron que la enorme gama de hadrones conocidos en la naturaleza podía ser reconstruída en términos de tres tipos de entidades fundamentales, objetos a los que Gell-Mann llamó "quarks" y Zweig "aces".

Esto fué posterior a la teoría llamada "camino óctuple", según la cual los hadrones se clasificaron formando supermultipletes asociados a representaciones de  $SU(3)$ , al tomar como entidad fundamental octetos de partículas.

La idea de quarks, sin embargo, permite reobtener los mismos supermultipletes anteriores, con mayor belleza y sencillez, suponiendo para los bariones una estructura ligada de tres quarks y para los mesones una estructura de un par quark-antiquark.

Los tres tipos de quarks, inicialmente sugeridos los llamaremos  $p, n$  y  $\lambda$ . La forma en que los hadrones están constituidos, de acuerdo a este modelo, obliga una asignación de spin  $\frac{1}{2}$  para los quarks. Estas "partículas" están caracterizadas, además, por isospin y extrañeza, números cuánticos que son conservados en las interacciones fuertes. Recordemos brevemente que el isospin ( $I$ ) se define a través de los  $(2I+1)$  subestados de carga de una partícula y, en el espacio de carga, las tres componentes del vector de isospin satisfacen el álgebra de

momento angular. La extrañeza (S), por otra parte, es un número cuántico que se introdujo a fin de dar cuenta del hecho que algunas partículas, precisamente las llamadas partículas extrañas, se presentan siempre en asociación (en pares).

Este simple modelo de quarks adscribe un número bariónico  $\frac{1}{3}$  a cada antiquark. Esto llama la atención, pues no se conocían, con anterioridad, asignaciones fraccionarias de número bariónico.

Como consecuencia de la hipótesis de número bariónico fraccionario, observamos, debido a la relación de Gell-Mann-Nishijima, que los quarks tienen carga eléctrica fraccionaria ( $\frac{2}{3}e$  y  $-\frac{1}{3}e$ ) lo que constituye una propiedad bastante singular del modelo dado que contradice el hecho, experimentalmente comprobado con gran precisión, que la carga eléctrica aparece en la naturaleza siempre como un número entero de veces la carga del electrón, la cual, por lo tanto, debe considerarse como la unidad fundamental de carga en la naturaleza.

Esto motivó que se crearan esquemas alternativos con asignaciones enteras tanto de número bariónico como de carga eléctrica; estos modelos aparecen hoy excluidos por la evidencia experimental.

En resumen, hasta el momento tenemos un esquema teórico en el cual se propone que los ladrillos fundamentales de la población hadrónica serían esos tres objetos, los

quarks, a los cuales asignamos el siguiente conjunto de números cuánticos.

|           | <u>Spin</u> | <u>Número Bariónico</u> | <u>I , I<sub>3</sub></u> | <u>S</u> | <u>Carga(Q/e)</u> |
|-----------|-------------|-------------------------|--------------------------|----------|-------------------|
| P         | 1/2         | 1/3                     | 1/2 1/2                  | 0        | $\frac{2}{3}$     |
| n         | 1/2         | 1/3                     | 1/2 -1/2                 | 0        | -1/3              |
| $\lambda$ | 1/2         | 1/3                     | 0 0                      | -1       | -1/3              |

¿Qué nos dice la evidencia experimental respecto a las afirmaciones del modelo?

En scattering de haces de neutrinos de alta energía con nucleones <sup>(1)</sup> se concluye que la sección eficaz correspondería exactamente a lo que sería el scattering elástico de blancos puntuales. Además, la razón empírica entre las secciones eficaces de scattering neutrino-nucleón y antineutrino-nucleón, muestran claramente que estos constituyentes puntuales dentro del nucleón tienen spin  $\frac{1}{2}$ .

Recientemente <sup>(2)</sup> se tiene evidencia experimental suficiente que permitiría mostrar el deuterón como un objeto en el cual se reconocen seis constituyentes del tipo anteriormente mencionado.

Por otra parte, en el estudio del scattering de electrones con nucleones se obtiene una predicción para el cuadrado medio de la carga de los quarks. Los datos experimentales coinciden con gran precisión con la predicción del modelo de

quarks con carga fraccionaria, con lo cual pierden validez los esquemas de asignación entera a que aludimos.

La teoría proporciona también otra predicción que permite contar experimentalmente el número de quarks presentes en un nucleón. La evidencia experimental, a través de mediciones de secciones eficaces para scattering de neutrino-nucleón y antineutrino-nucleón, experimentos efectuados en 1975, conduce a un valor de  $3,2 \pm 0,6$  para el número de estos constituyentes elementales (quarks), que estarían presentes en los nucleones, en comparación con la predicción de tres quarks que nos da el modelo.

La referencia (1) contiene una excelente revisión de la situación experimental en torno a los quarks, hasta comienzos de 1975, y en ella se muestran y comentan detalladamente los resultados a que hemos hecho alusión.

En resumen, la situación en torno al modelo de quarks, tanto teórica como empírica, es convincente y optimista. Sin embargo, llama la atención el hecho que todos los intentos efectuados, en un rango muy amplio de energías, a fin de detectar quarks aislados no han dado resultados positivos.

Por lo tanto la evidencia fenomenológica parece ser tan sólo indirecta a partir de experimentos como los que hemos mencionados.

El estudio teórico de esta situación, debido

principalmente a Wilson, a Kogut y a Susskind, conduce a una interacción entre quarks dada por un potencial lineal, con lo que la fuerza entre ellos es constante. Esto explica el confinamiento de los quarks, es decir la imposibilidad en principio de observar un quark aislado, ya que antes que esto pueda ocurrir, la energía gastada en el proceso de extracción de un quark sería suficiente para producir un nuevo mesón a través de la creación, de un par quark-antiquark. De acuerdo a esta idea llegaría aquí a su fin la cadena de particiones posibles de la materia, ya que no tendría mayor sentido el asignar una cierta estructura a "partículas" que no podríamos observar ni siquiera en principio.

Debemos mencionar todavía algunas otras dificultades no triviales del modelo de quarks. La suposición de spin semientero para quarks, lo que, según vimos, aparece en acuerdo con la evidencia experimental, obliga a que estos objetos estén sometidos a la estadística de Fermi-Dirac. Según esto, no pueden coexistir dos quarks en un mismo estado, es decir, bajo una igual especificación de todos los números cuánticos.

Sin embargo, el modelo predice que la partícula  $\Omega^-$ , por ejemplo, estaría constituida de tres quarks extraños en igual estado cada uno, a fin de reproducir las propiedades asignadas experimentalmente a la partícula; esto contradice el principio de exclusión de Pauli. La dificultad se ha podido subsanar introduciendo un nuevo número cuántico, llamado "color", tal que cada uno de los quarks mencionados, p, n y  $\lambda$ , pueden encontrarse

en tres estados posibles de color. Este número cuántico que en nuestro país bien puede "asumir los valores" blanco, rojo y azul, permite que el principio de exclusión pueda continuar satisfaciéndose puesto que los quarks presentes en un hadrón no estarían todos en el mismo estado.

La hipótesis de color, introduce reglas adicionales para la combinación de quarks. Primero, los bariones deben estar constituidos por tres quarks cada uno de los cuales con un color distinto. La segunda especificación se refiere a los mesones los cuales serían pares de quark-antiquark con igual contenido de los tres colores, de modo que al efectuar una medición sobre un cierto intervalo de tiempo no obtengamos un valor determinado de color.

Notemos que la introducción del color implica que los tres quarks originales se han convertido en nueve quarks. Esto no significa que el número de bariones pueda crecer veintisiete veces y el número de mesones nueve veces, ya que las reglas de constitución de hadrones a partir de quarks coloreados nos aseguran que ninguna partícula nueva es observable.

Con esta idea se ha trabajado bastante en la literatura y se ha propuesto una simetría  $SU(3)$  de color, la cual, a diferencia de la simetría  $SU(3)$  en la cual las matrices del grupo actúan sobre el triplete fundamental de los tres quarks,  $p$ ,  $n$  y  $\lambda$ , es una simetría exacta; sin el quiebre de masa característico de las representaciones conocidas como el decuplete y el



octeto.

Las reglas de combinación de colores en este nuevo modelo, dentro del marco de  $SU(3)$ , se traduce simplemente en afirmar que los únicos estados posibles de color son estados singuletes.

La evidencia experimental sobre el color ha sido satisfactoria. El experimento más interesante consiste en la determinación de la razón de producción de hadrones a pares muón-antimuón en colisiones de electrones con positrones a alta energía. Cálculos basados en teoría de campos predicen que la razón mencionada se aproximaría a un valor constante igual a la suma de los cuadrados de las cargas de los quarks. En el rango de energía comprendidas entre dos y tres Gev, los resultados son compatibles con lo esperado ya que la razón se encuentra muy cercana al valor predicho(2) por el modelo de color.

Desde los comienzos mismo del modelo de quarks que hemos expuesto, se intentó una generalización del modelo introduciendo cuatro objetos fundamentales, cuatro quarks, a fin de lograr una simetría entre interacciones débiles, en las cuales encontramos cuatro leptones (aparte de sus correspondientes antileptones) y las interacciones fuertes.

Esta idea cobró especial importancia cuando se observó la ausencia completa de decaimientos débiles en los cuales cambia la extrañeza del sistema ( $|\Delta S| \neq 0$ ) dados por corrientes neutras. Una situación como ésta no se puede explicar

con el modelo de tres quarks.

En el año 1970, Glashow, Iliopoulos y Mariani<sup>(3)</sup> propusieron un modelo para explicar ésto, al introducir un cuarto quark, que llamaremos c, con igual carga eléctrica ( $\frac{2}{3}e$ ) que el quark p. Para diferenciar este nuevo objeto de los restantes le asignamos un nuevo número cuántico llamado "encanto". El encanto, al igual que la extrañeza, es conservado en las interacciones fuertes y electromagnéticas.

Con esto el grupo de simetría de los hadrones pasa a convertirse en SU(4). Esto nos permite esperar la posibilidad de observación de nuevos multipletes de estados hadrónicos, al superar el umbral de energía para la aparición del encanto.

Los números cuánticos asignados al ahora cuarteto de quarks serían los siguientes:

|           | <u>Spin</u> | <u>Número Bariónico</u> | <u>I, I<sub>3</sub></u> | <u>S</u> | <u>C</u> | <u>Carga (Q/e)</u> |
|-----------|-------------|-------------------------|-------------------------|----------|----------|--------------------|
| P         | 1/2         | 1/3                     | 1/2 1/2                 | 0        | 0        | 2/3                |
| n         | 1/2         | 1/3                     | 1/2 -1/2                | 0        | 0        | -1/3               |
| $\lambda$ | 1/2         | 1/3                     | 0 0                     | -1       | 0        | -1/3               |
| c         | 1/2         | 1/3                     | 0 0                     | 0        | 1        | 2/3                |

La primera evidencia de encanto en física de partículas la constituye el descubrimiento de la llamada partícula  $\psi$  o J a fines de 1974<sup>(4)</sup>. Inmediatamente después se descubrió otra resonancia, al parecer un estado excitado de la primera.

Posteriormente se descubrieron dos resonancias adicionales.

Esta partícula consistiría de un par quark-anti quark encantados (charmonium) y es muy masiva ( $3.095 \pm 5$  mev). Su vida media es considerablemente larga, del orden de  $10^{-20}$  segundos, y, de hecho, apareció como una resonancia bastante aguda. Las resonancias siguientes se han interpretado como estados excitados del charmonium, en forma tal que el primer estado corresponde a la partícula J.

De acuerdo a esto tendríamos una teoría con doce quarks. La evidencia experimental en base a la razón de producción de hadrones a pares muón-antimuón en colisiones electrón-positrón no es muy conclusiva. Esta razón crece más allá que el valor predicho en el modelo con un quark encantado. La predicción es de 3,3 y la curva parece (por el momento) haberse estabilizado en torno a 5,0. En todo caso esto ha sido materia de discusión intensa en los últimos dos años. Un modelo definitivo al respecto todavía tiene que establecerse.

En este trabajo estudiamos el espectro de masas del charmonium basándonos en la hipótesis del potencial lineal. Además de esto se introduce un potencial de tipo perturbativo cerca del origen.

Este esquema fué desarrollado por Tryon<sup>(5)</sup> (en Marzo de 1976) logrando, a través de un ajuste numérico, una excelente reproducción del espectro de masas de los mesones, en particular del charmonium. Sin embargo Tryon asume un hamiltono-

toniano para el par de quarks que no involucra el spin  $\frac{1}{2}$ . Su expresión equivale a un operador tipo Klein-Gordon que, sabemos, describe partículas de spin cero y, por consiguiente, no es adecuada para una descripción de quarks.

En nuestro trabajo asumimos que la ecuación relativista adecuada es la ecuación de Dirac. De esta forma se introduce naturalmente el spin  $\frac{1}{2}$ .

Por otro lado, dado el ajuste espectacular logrado en la predicción de masas usando una ecuación relativista, es interesante investigar la influencia directa de la relatividad en los resultados obtenidos. Esto significa que se ha de investigar el límite no relativista de la teoría.

Junto con esto, estudiamos el espectro de masas del charmonium desde el punto de vista de la ecuación de Schrödinger, la cual, al equivaler al límite no relativista de la ecuación de Klein-Gordon, implica que no se considerará en este caso la influencia del spin.

En las secciones siguientes desarrollamos el problema con todo detalle.

En la sección II se estudia el límite no relativista de la ecuación de Dirac con un potencial lineal. El hamiltoniano que obtenemos, incluye un término que nos permite efectuar algunas consideraciones sobre Zitterbewegung, lo que se desarrolla en la sección III.

En la sección IV investigamos el límite no relativista de la ecuación de Dirac con el potencial de Tryon completo. Una vez logrado esto se estudia en la sección V el espectro de masas del charmonium y se dan los resultados numéricos obtenidos.

La sección VI la dedicamos a verificar la validez de una hipótesis introducida por Van Royen y Weisskopf en el año 1967 según la cual la masa de los mesones debe ser proporcional al módulo del cuadrado de la función de onda del par (quark-antiquark) en el origen.

Finalmente, la sección VII es una sección especulativa. Proponemos, dentro del marco de la teoría convencional de SU(3), es decir sin considerar el encanto, un esquema para los supermultipletes basado en la introducción de un objeto que llamaremos superspin isotópico. Con esto predecimos una fórmula de masa que se encuentra en razonable acuerdo con la experiencia.

## II. LIMITE NO RELATIVISTA DE LA ECUACION DE DIRAC CON UN POTENCIAL LINEAL.

Cuando Tryon estudia el espectro de masas de los mesones encantados supone que los quarks obedecen una ecuación tipo Klein-Gordon, a saber.

$$|2(P^2+m^2)^{1/2}+V(r)|\psi(r) = E\psi(r) \quad (1)$$

Una expresión de este tipo comprende a partículas de spin cero y, salvo un factor 2, el límite no relativista de la ecuación (1) viene dado por la ecuación de Schroedinger. Esto será discutido posteriormente.

Sin embargo sabemos que la evidencia experimental indica que los quarks poseen spin 1/2 por lo que la ecuación de onda relativista apropiada a su descripción debe ser la ecuación de Dirac, por incluir está la presencia de spin  $\frac{1}{2}$ .

Nosotros estudiaremos el límite no relativista de la ecuación de Dirac considerando como potencial de interacción entre el par quark-antiquark el propuesto por Tryon. De este modo incluimos la presencia de spin en nuestra discusión e investigamos la influencia de relatividad en la determinación del espectro de masa del charmonium.

Sin embargo, a fin de dilucidar algunos hechos interesantes, efectuaremos inicialmente el paso al límite no relativista considerando sólo el potencial lineal, lo que, al fin y al cabo, parece ser lo esencial en la interacción ya

que el término adicional corresponde a una corrección de suavidad cerca del origen.

Estudiemos, pues, cómo lograr el paso al límite no relativista para el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m + Tr \quad (2)$$

Este Hamiltoniano está escrito en el sistema natural de unidades,  $\hbar = c = 1$ .  $\vec{\alpha}$  y  $\beta$  son las matrices de Dirac y  $T$  es la pendiente del potencial.

En Mecánica Cuántica Relativista existe un procedimiento para estudiar el límite no relativista de la teoría que esencialmente consiste en una transformación a una nueva representación de la ecuación de Dirac en la cual no se mezclan entre sí los estados de energía positiva y negativa. El procedimiento usado se conoce como la transformación de Foldy-Wouthuysen<sup>(6)</sup> (F-W).

Veamos rápidamente cómo es transformada la ecuación libre, esto es, en ausencia de interacciones.

En este caso se tiene,

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m - P_0) \psi = 0 \quad (3)$$

Definamos los siguientes operadores<sup>(7)</sup>

$$J_1 = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{P}}{2|\vec{P}|}, \quad J_2 = -i \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{P}}{2|\vec{P}|}, \quad J_3 = \frac{\beta}{2} \quad (4)$$

Se puede demostrar que los operadores  $J_i$  ( $i=1,2,3$ ) satisfacen el álgebra momento angular (para spin 1/2) en Mecánica Cuántica.

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (5)$$

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = 3/4.$$

Esto se desprende de las propiedades de las matrices de Dirac:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \delta_{ij} \{\beta, \alpha_i\} = 0$$

$$\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1. \quad (6)$$

Entonces podemos escribir la ecuación Hamiltoniana (2) en término del conjunto de operadores  $J_i$  en la siguiente forma:

$$(2|\vec{P}|J_1 + 2mJ_3 - P_0)\psi = 0 \quad (7)$$

Observamos que la ecuación involucra únicamente dos operadores por lo que podemos "rotar" esta ecuación usando  $J_2$  a fin de eliminar  $J_1$ , o  $J_3$  según se desee. La transformación de F-W se logra eliminando  $J_1$ .

$$F = e^{iJ_2\theta} = e^{\beta \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \frac{\theta}{2}} \quad (8)$$

Observamos que  $F$  es un operador unitario.

La ecuación transformada es la siguiente:

$$(2|\vec{P}|FJ_1F^{-1} + 2mFJ_3F^{-1} - P_0)\tilde{\psi} = 0, \quad (9)$$

en que

$$\tilde{\psi} = F\psi = e^{iJ_2\theta} \cdot \psi$$

Pero

$$FJ_1F^{-1} = J_1 \cos\theta + J_3 \operatorname{sen}\theta$$

$$FJ_3F^{-1} = J_3 \cos\theta - J_1 \operatorname{sen}\theta \quad (10)$$

lo que nos permite escribir la ecuación (9) como,



$$|J_1 (2|\vec{P}| \cos\theta - 2m \sin\theta) + J_3 (2m \cos\theta + 2|\vec{P}| \sin\theta) - P_0 |\tilde{\psi} = 0 \quad (11)$$

Entonces, para eliminar  $J_1$  escogemos  $\theta$  como

$$\text{tg}\theta_{FM} = \frac{|\vec{P}|}{m} \quad (12)$$

con lo cual la ecuación (11) se reduce a

$$2J_3 E \psi_{FW} = P_0 \psi_{FW} \quad (13)$$

Esta es la ecuación de Dirac en la representación de Foldy-Wouthuysen.

Se observa que la forma de la ecuación es la misma que la de la ecuación de Dirac en el sistema en reposo de la partícula ( $\vec{P} = 0$ ) lo que sugiere considerar la transformación como el procedimiento correcto para estudiar el límite no relativista de la teoría.

Como segunda observación vemos que, por ser  $\beta$  diagonal, en la nueva representación no se mezclan las componentes grandes y pequeñas, lo que sí ocurre en la representación original debido a la presencia de las matrices no diagonales  $\alpha_i$ . Por consiguiente los estados de energía positiva y negativa se describen separadamente por espinores de dos componentes.

Para efectuar el paso al límite no relativista de un hamiltoniano en presencia de interacciones, como el dado por la ecuación (2) por ejemplo, el procedimiento no es inmediato por la siguiente razón: En el caso de partícula libre los estados se clasifican de acuerdo a valores positivos o negativos

de la energía lo que corresponde a los autovalores  $\pm 1$  respectivamente del operador

$$\frac{1}{E_p}(\beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{P}) = \hat{E} \quad (14)$$

Sin embargo para un hamiltoniano de la forma

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m + f(\vec{r}, t) \quad (15)$$

en que  $f(\vec{r}, t)$  es una interacción dependiente, en general, de la posición y el tiempo (en nuestro caso  $f(\vec{r}, t) = T \cdot r$ ) se verifica

$$[H, \hat{E}] \neq 0 \quad (16)$$

Esto significa que si uno considera el potencial que da cuenta de la interacción como una perturbación, se puede decir que éste induce transiciones entre estados de la partícula con energías positivas y negativas.

En presencia de interacciones se puede afirmar que persiste la validez de la descripción a través de un conjunto completo de autoestados con autovalores de energías positivas y negativas separadamente si las interacciones son suficientemente débiles, de modo de evitar que se induzcan transiciones que superen el salto de energía que separa los dos conjuntos mencionados.

Si esto se cumple podemos afirmar que se tiene un problema no relativista el cual vendrá resuelto en términos de espinores de dos componentes.

Para pasar a una representación en la cual no

existan operadores impares presentes, esto es, que conecten los espinores superior e inferior dentro del espinor de cuatro componentes, se efectúa una secuencia de transformaciones en la que cada cual elimina operadores impares del hamiltoniano a un orden superior en el parámetro de expansión, que se escoge como  $\frac{1}{m}$ .

Nosotros trabajaremos, en analogía a lo que se hace para el caso electromagnético<sup>(6)</sup>, hasta el orden  $\frac{1}{m^2}$ .

En general se tiene que el hamiltoniano es transformado sucesivamente a través de

$$e^{iS} H e^{-iS} = H + i [S, H] + \frac{i^2}{2!} [S, [S, H]] + \dots + \frac{i^n}{n!} [S, [S, \dots [S, H] \dots]] + \dots \quad (17)$$

Esta es la serie de F-W en potencias de  $\frac{1}{m}$ .

Consideremos, pues, nuestro hamiltoniano con potencial lineal, dado por la ecuación (2), y transformémoslo de modo de no tener operadores impares hasta el orden  $(\frac{1}{m})^2$ .

Conviene escoger como la transformación generatriz:

$$S = - \frac{i\beta}{2m} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \quad (18)$$

Entonces,

$$H' = H + i [S, H] + \frac{i^2}{2} [S, [S, H]] + \text{etc} \quad O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Los resultados obtenidos son:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad i [S, H] &= \frac{\beta P^2}{m} - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \frac{iT\beta}{2m} \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \\ \text{b)} \quad - \frac{1}{2} [S, [S, H]] &= - \frac{1}{2m^2} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \cdot P^2 - \frac{1}{2m} \beta P^2 \frac{T\vec{S} \cdot \vec{L}}{4m^2 r} + \frac{T}{4m^2 r} \quad (19) \end{aligned}$$

$$c) -\frac{i}{6} [\vec{S}, [\vec{S}, [\vec{S}, \hat{H}]]] = -\frac{\beta P^4}{6m^3} + \frac{i\beta T}{24m^3} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{6m^2} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} p^2 +$$

$$+ \frac{T}{12m^3} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{r} - \frac{T}{24m^3} \gamma^5 \frac{\vec{r} \cdot \vec{L}}{r^3} - \frac{T}{24m^3} \vec{\alpha} \cdot (\vec{r} \times \vec{L})$$

Notemos que, por completitud, hemos llegado a algunos términos que no nos interesan en el orden en que estamos trabajando.

$\vec{S}$  es el operador de spin en la teoría de Dirac

$$\vec{S} = -\frac{i}{2} \vec{\alpha} \times \vec{\alpha},$$

y es un operador par, en tanto que

$$\gamma^5 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

es un operador impar.

Por consiguiente el hamiltoniano transformado al orden  $(\frac{1}{m})^2$  es

$$H' = \frac{\beta P^2}{2m} + \beta_m + \text{Tr} - \frac{iT\beta}{2m} \frac{\vec{\alpha} \cdot \hat{r}}{r} - \frac{P^2 \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{3m^2} + \frac{T}{4m^2 r} + T \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{4m^2 r} \quad (20)$$

Observamos que en  $H'$  existen operadores impares presentes a un orden  $(\frac{1}{m})$ . Estos los podemos eliminar mediante una nueva transformación generada por:

$$S' = -\frac{i\beta}{2m} \left( \frac{-iT\beta \vec{\alpha} \cdot \hat{r}}{2m} - \frac{P^2 \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{3m^2} \right) \quad (21)$$

Dentro del orden que nos interesa nos bastan solamente dos términos dentro del primer commutador, por lo que:

$$i[S', H'] = \frac{P^2 \vec{\alpha} \cdot \vec{P}}{3m} + \frac{iT\beta}{2m} \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \quad (22)$$

Esto implica que el hamiltoniano en el límite no relativista, al orden  $(\frac{1}{m})^2$ , está dado por

$$H_{NR} = \beta(m + \frac{P^2}{2m}) + T\hat{r} + \frac{T}{4m^2 r} + \frac{T\vec{S} \cdot \vec{L}}{4m^2 r} \quad (23)$$

Notemos, en primer lugar, que si escribimos esto en el sistema de unidades en que  $\hbar = 1$  y  $c = 1$  entonces asume la forma

$$H_{NR} = \beta(mc^2 + \frac{P^2}{2m}) + \frac{T}{\hbar c} \hat{r} + \frac{T\hbar}{4m^2 c^3 r} + \frac{T}{\hbar c^3} \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{4m^2 r} \quad (23')$$

Es decir corresponde a una expansión en potencias de  $\frac{1}{c}$ , como debe ser cuando se obtiene el límite no relativista a través de un procedimiento perturbativo.

Debemos anotar, como un hecho interesante, que a este orden de perturbación no aparece un término de interacción spin-spin. Sí existe, sin embargo, una contribución al hamiltoniano de tipo spin-órbita, la cual podría esperarse en base a la discusión usual para el problema de Coulomb.

El penúltimo término de la ecuación (23) no parece tener una conexión directa con nada conocido. Trataremos de entender mejor el significado físico de esto en la sección siguiente.

### III. ALGO SOBRE ZITTERBEWEGUNG.

Se sabe de mecánica cuántica relativista que la integración de las ecuaciones de movimiento en el cuadro de Heisenberg, para una partícula de Dirac libre, nos da la siguiente expresión para  $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \frac{\vec{p}t}{H} + i\left(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{p}}{H}\right) \frac{e^{-2iHt}}{2H} \quad (24)$$

Los dos primeros términos son los equivalentes del movimiento clásico. Se puede ver que superpuesto al movimiento de traslación existe una oscilación muy rápida. De hecho la frecuencia de oscilación debe ser del orden de  $10^{21}$  ciclos. Este tipo de efecto se conoce como Zitterbewegung y lo encontramos siempre presente en la teoría. El origen físico del efecto proviene de una interferencia entre estados de energía positiva y negativa.

Volvamos a lo que se estaba haciendo. Si se efectúa el mismo cálculo que hicimos para el potencial lineal en el caso Coulumbiano de un campo electrostático obtenemos:

$$H_{NR} = \beta \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) - \frac{e^2}{r} + \frac{e^2 \vec{L} \cdot \vec{S}}{4m^2 r^3} + \frac{\pi e^2}{2m^2} \delta(\vec{r}) \quad (25)$$

La última expresión se conoce como el término de Darwin. En el caso del potencial lineal esto corresponde exactamente al término  $\frac{T}{4m^2 r}$ .

Lo interesante es que esta contribución al hamiltoniano la podemos atribuir al Zitterbewegung.

Como resultado de este rápido movimiento oscilatorio, la partícula de Dirac en cuestión, en nuestro caso quarks, no "observa" un potencial bien definido sino mas bien el promedio espacial del potencial de interacción sobre la amplitud de oscilación del Zitterbewegung. Es así como el potencial modificado por oscilación está dado por:

$$\langle \delta v \rangle = \langle v(\vec{r}_0 + \delta \vec{r}) \rangle - \langle v(\vec{r}_0) \rangle \quad (26)$$

$\delta \vec{r}$  es proporcional esencialmente a  $\frac{1}{m}$  y corresponde a la desviación del movimiento clásico el cual lo indicamos con  $\vec{r}_0$ .

$$\begin{aligned} \langle \delta v \rangle &= \langle \delta \vec{r} \cdot \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta r_i \delta r_j \left. \frac{\partial^2 v}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \rangle \\ &= \frac{1}{6} \delta r^2 \nabla^2 v \approx \frac{1}{6m^2} \nabla^2 v(r) \end{aligned} \quad (26')$$

La última línea se obtiene al promediar espacialmente sobre todas las direcciones posibles en torno a  $\vec{r}_0$ .

Notemos que el resultado está de acuerdo, excepto un factor numérico, con el término de Darwin, ya que:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (27)$$

Lo mismo ocurre en nuestro caso, ya que para el potencial lineal se tiene.

$$\nabla^2(r) = \frac{2}{r} \quad (28)$$

lo que explica físicamente el término Coulombiano de la ecuación (23).

Es importante destacar el signo positivo con que aparece este término en nuestro hamiltoniano, lo que no está de acuerdo con los potenciales adicionales con que se ha perturbado el potencial lineal cuando se desea estudiar espectros de masas, por ejemplo, ya que estos son de tipo atractivo.

En resumen, como consecuencia del Zitterbewegung la partícula de Dirac "observa" un potencial deformado de algún modo lo que se manifiesta en el límite no relativista de la teoría. Por consiguiente no es inmediato el paso a este límite ya que involucra términos que no podemos adivinar a priori.

Esto lo destacamos en contraposición a lo que sucede con el límite no relativista de una partícula de spin cero, descrita por la ecuación de Klein-Gordon, el cual, al orden en que estamos trabajando, coincide exactamente con la ecuación de Schroedinger como se verá más adelante.

Veamos cuando afecta la corrección de Darwin, presente en la ecuación (25), en el caso del átomo de hidrógeno. Observamos que solamente son afectados los estados S ya que todos los otros se anulan en el origen.

Para  $n = 1$  se tiene que la corrección a primer orden viene dada por

$$E_1^{(1)} = \langle 1 | \frac{\pi e^2}{2m^2} \delta(\vec{r}) | 1 \rangle \frac{\pi e^2}{2m^2} |\psi_1(0)|^2 \quad (30)$$

Obtenemos:

$$E_1^{(1)} = \frac{e^8 m}{2c^2 \hbar^4} = 7,24 \cdot 10^{-6} \quad |\text{ev}|$$



en tanto que

$$E_1^{(0)} = - \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,60 \quad |ev|$$

De esto vemos que el término de Darwin afecta en una forma absolutamente despreciable el valor de la energía.

Para terminar estas consideraciones sobre Zitterbewegung veremos la influencia del término "Coulombiano", considerando a este como un efecto perturbativo, sobre los autoestados esféricos del potencial lineal (ecuación (23)). Esto se describe con mayor detalle en la sección siguiente. Por el momento daremos los resultados obtenidos numéricamente.

Los parámetros empleados en esta estimación son los mismos dados por Tryon en su trabajo. (Ver próxima sección).

T A B L A 1

| Autoenergías del potencial líneal | Primera Corrección | Segunda Corrección | Tercera Corrección |
|-----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| a <sub>1</sub> ) 0.5746 meV       | 0.02965 meV        | -0.000432 meV      | 0.0000044 meV      |
| a <sub>2</sub> ) 1.004 "          | 0.02055 "          | -0.000121 "        | -0.0000025 meV     |
| a <sub>3</sub> ) 1.356 "          | 0.01674 "          | -0.000032 "        | -0.0000027 "       |
| a <sub>4</sub> ) 1.668 "          | 0.01431 "          | -0.0000088 "       | -0.0000024 "       |
| a <sub>5</sub> ) 1.952 "          | 0.01293 "          | +0.000014 "        | -0.0000026 "       |
| a <sub>6</sub> ) 2.217 "          | 0.01165 "          | 0.000038 "         | -0.0000024 "       |

Observamos que la influencia del Zitterbewegung sobre los autoestados de energía del potencial lineal es del orden de un 5% de corrección, lo cual no es despreciable, en contraposición a lo que ocurre en el caso del átomo de Hidrógeno.

IV. LIMITE NO RELATIVISTA DE LA ECUACION  
DE DIRAC CON EL POTENCIAL DE TRYON.

El potencial usado por Tryon en su trabajo es el siguiente:

$$V(r) = T \cdot r + \frac{\alpha_S}{r} \left( e^{-\frac{r}{r_0}} - 1 \right) \quad (30)$$

Los cálculos del paso al límite no relativista con este potencial se efectúan nuevamente mediante la serie de F-W. En lo que sigue solamente daremos los conmutadores asociados al segundo término presente en el potencial de Tryon, ya que la parte del potencial lineal se obtuvo en la sección II.

Llamando

$$U(r) = \frac{\alpha_S}{r} \left( e^{-\frac{r}{r_0}} - 1 \right),$$

se obtiene los siguientes resultados:

$$[S, U(r)] = \frac{\beta \alpha_S (\vec{\alpha} \cdot \vec{r})}{2m r^3} \left| \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0} (r+r_0) - 1 \right|, \quad y$$

$$-\frac{1}{2} [S, [S, U(r)]] = -\frac{\alpha_S}{8m^2 r^2} \left[ \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0} (r+r_0) - 1 \right] \left( 3 - \frac{3}{r} + \frac{2}{r_0^2} \vec{S} \cdot \vec{L} - \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0^2} \right)$$

en que

$$S = -\frac{i\beta}{2m} \vec{\alpha} \cdot \vec{P}$$

A partir de estos conmutadores podemos concluir que el hamiltoniano no relativista a orden  $\left(\frac{1}{m}\right)^2$  es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 H_{NR} = & \beta \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) + Tr + \frac{\alpha_s}{r} \left( e^{-\frac{r}{r_0}} - 1 \right) + \frac{T}{4m^2 r} (1 + \vec{S} \cdot \vec{L}) + \\
 & + \left[ \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0} (r + r_0) - 1 \right] \left[ \frac{3\alpha_s}{8m^2 r^3} - \frac{3\alpha_s}{8m^2 r^2} - \frac{\alpha_s}{4m^2 r^3} \vec{S} \cdot \vec{L} \right] + \frac{\alpha_s e^{-\frac{r}{r_0}}}{8m^2 r_0^2 r} . \quad (31)
 \end{aligned}$$

$\alpha_s$  denota el equivalente a la constante de estructura fina en el caso de las interacciones fuertes.

Nosotros efectuamos teoría de perturbaciones para obtener los niveles de energía, es decir el espectro de masas para el par quark-antiquark encantados. Nos restringiremos a autoestados esféricos ( $L=0$ ) del potencial lineal perturbados por el término:

$$V(r) = \frac{\alpha \left( e^{-\frac{r}{r_0}} - 1 \right)}{r} + \frac{T}{4m^2 r} + \left[ \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0} (r + r_0) - 1 \right] \left[ \frac{3\alpha_s}{8m^2 r^3} - \frac{3\alpha_s}{8m^2 r^2} \right] + \frac{\alpha_s}{8m^2} \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r_0^2 r} .$$

Observamos que debemos ajustar cuatro parámetros. Inicialmente ocuparemos los usados por Tryon, recordando que él obtuvo estos valores a partir de un ajuste numérico. A continuación variaremos la masa para lograr una mejor concordancia con los datos experimentales; aunque nuestra intención primaria no es la de hacer un ajuste numérico, sino la de explorar la influencia de la inclusión del spin y de la relatividad en el cálculo del espectro.

V. CALCULO DEL ESPECTRO DE MASA.

Obtengamos primero los autoestados esféricos del potencial lineal.

En este caso tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + 2m(E - Tr)u = 0 \quad (32)$$

en que  $\psi(\vec{r}) = \psi(r) = \frac{u(r)}{r}$

Si efectuamos el cambio de variable:

$$\xi = -(2mT)^{1/3} \left( r - \frac{E}{T} \right),$$

la ecuación (32) se reduce a

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \xi u = 0 \quad (33)$$

Esta ecuación diferencial se conoce con el nombre de ecuación de Airy. Tiene dos soluciones linealmente independientes. Nos quedaremos con la solución regular en el origen de modo que no diverga la probabilidad en torno a este punto.

De la exigencia que  $u(r)$  tienda a cero cuando nos acercamos al origen concluimos que

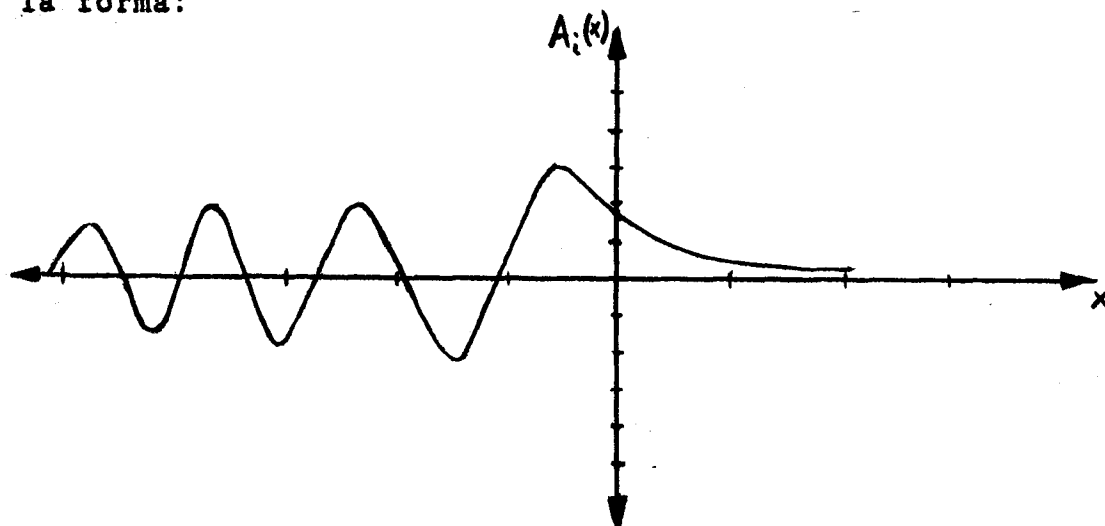
$$\psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi} N_n} \frac{A_i(a_n + \beta r)}{r}, \quad (34)$$

en que  $\beta = (2mT)^{1/3}$  y  $a_n$  es el  $n$ -ésimo cero de la función de Airy.  $N_n$  es una constante de normalización.

Los niveles de energía están dados por

$$E_n = - \left( \frac{T}{2m} \right)^{1/3} \cdot a_n, \quad (35)$$

con lo que, siendo los ceros de la función números negativos, las energías son todas positivas. Vemos que los autoestados y los niveles de energía se rotulan por un índice correspondiente al cero de la función. Gráficamente <sup>(8)</sup> la función de Airy tiene la forma:



Usando resultados recientes de Leal Ferreira <sup>(9)</sup> para ciertas integrales de la función de Airy podemos calcular la constante  $N_n$ . La función de onda normalizada resulta ser:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{(2mT)^{1/3}}{4\pi}} \cdot \frac{1}{A_i'(a_n)} \cdot \frac{A_i(a_n + (2mT)^{1/3} \cdot r)}{r} \quad (34)$$

en que  $A_i'(a_n)$  es la derivada de  $A_i(r)$  evaluada en el enésimo cero de la función.

Sobre estos autoestados efectuamos teoría de perturbaciones. El método seguido es el de Rayleigh-Schroedinger

para estados no degenerados. En particular nos interesan los niveles de energía corregidos y la función de onda corregida en el origen, por efecto del potencial  $V(r)$  dado por la ecuación (31')

El cálculo se realizó hasta tercer orden para los niveles de energía y hasta segundo orden para la función de onda, por medio del computador IBM 370 de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. Para integrar y obtener la matriz de perturbación  $V_{ij}$  utilizamos el método parabólico de Simpson. El programa de computación correspondiente se incluye en el Apéndice para la corrección de la energía en este método están dada por

$$\begin{aligned}
 E_n^{(1)} &= V_{nn} = \int \psi_n^{(0)*} \hat{V} \psi_n^{(0)} dq \\
 E_n^{(2)} &= \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \\
 E_n^{(3)} &= \sum_{k \neq n} \sum_{m \neq n} \frac{V_{nm} V_{mk} V_{kn}}{(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) (E_k^{(0)} - E_n^{(0)})} - \quad (35) \\
 &\quad - V_{nn} \sum_{m \neq n} \frac{|V_{nm}|^2}{(E_m^{(0)} - E_n^{(0)})^2}
 \end{aligned}$$

en que se integra sobre el espacio de configuración.

Por supuesto el aspecto técnicamente complicado es obtener la matriz de perturbaciones ya que ésta involucra conocer en general,

$$V_{nm} = \int_0^{\infty} A_i(a_n + \beta r) A_i(a_m + \beta r) V(r) dr \quad (35')$$

en que  $V(r)$  está dado por la ecuación (31').

Estas integrales no se conocen analíticamente. Afortunadamente para valores positivos grandes de su argumento la función de Airy converge fuertemente como

$$A_i(z) \sim e^{-z^{3/2}},$$

lo que nos permitió, para los efectos de la integración numérica, reducir apreciablemente el intervalo de integración. Como conjunto de funciones bases no perturbadas  $\psi_n^{(0)}$  trabajamos con las diez primeras funciones de Airy, esto es los diez primeros ceros.

La fórmula de masa es:

$$m_n = 2m + E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)} \quad (36)$$

en que  $m$  es la masa del quark.

Notemos que en el cálculo hay que substituir  $m$  por  $\frac{m}{2}$  ya que se trata de la masa reducida asociada al problema de los dos quarks.

Inicialmente utilizamos el conjunto de parámetros usados por Tryon, a saber:

$$\begin{aligned} T &= 0.1585 \text{ Gev}^2, & r_0 &= 2.0 \text{ Gev}^{-1} \\ m &= 1.692 \text{ Gev}, & \alpha_s &= 2.685, \end{aligned}$$

y obtuvimos los siguientes valores:

TABLA 2

| Partícula | Valor Observado (mev) | Valor de Tryon (mev) | Límite no Relativista (mev) | Orden del Cero |
|-----------|-----------------------|----------------------|-----------------------------|----------------|
| $\psi$    | $3.095 \pm 4$         | 3.086                | 3.186                       | n=1            |
| $\psi'$   | $3.684 \pm 5$         | 3.694                | 3.792                       | n=2            |
| $\psi''$  | $\approx 4.100$       | 4.131                | 4.244                       | n=3            |
| $\psi'''$ | $\approx 4.450$       | 4.485                | 4.619                       | n=4            |

Los valores obtenidos son mayores que los observados y que los de Tryon. Podemos corregir estos resultados haciendo un nuevo ajuste de parámetros. Para esto observamos que en el paso al límite no relativista la cantidad de importancia es la masa.

Nosotros logramos el siguiente conjunto de valores trabajando con  $m=1.61$ (Mev) y el resto de los parámetros fijos.

TABLA 3

| Orden del cero | Partícula | Masa (mev) |
|----------------|-----------|------------|
| n=1            | $\psi$    | 3.073      |
| n=2            | $\psi'$   | 3.684      |
| n=3            | $\psi''$  | 4.136      |
| n=4            | $\psi'''$ | 4.512      |

Observamos que, si bien, el primer valor es un poco inferior al observado, (aunque dentro de un 1%) el resultado obtenido es bastante satisfactorio; las cuatro resonancias apa-



recen así como sucesivos estados radiales del potencial lineal perturbados por los otros términos.

En este punto hay que destacar que nuestra estimación de masa del quark resulta más cercana que la Tryon a la utilizada por Eichten<sup>(10)</sup> (en un trabajo en que también se analiza el espectro de masas del charmonium, pero desde otro punto de vista), así como por otros autores, y que es el comunmente aceptado. Además de los resultados ya señalados se calcularon otros niveles, a saber:

TABLA 3'

|     |           |      |          |
|-----|-----------|------|----------|
| n=5 | 4.843 mev | n=8  | 5.697mev |
| n=6 | 5.146 mev | n=9  | 5.959mev |
| n=7 | 5.428 mev | n=10 | 6.204mev |

Hay evidencia experimental<sup>(11)</sup> que alrededor de 5.000 mev se tiene el umbral de energía por sobre el cual se producirían pares de mesones, lo que significa que los estados anteriores no corresponderían a ninguna nueva resonancia observable.

Notemos que esto conceptualmente se entiende bien a través del modelo con potencial lineal pues, de acuerdo a esto, nunca podríamos observar libremente los quarks. Antes que esto ocurra se tiene energía suficiente para la formación de nuevos pares.

Finalmente, variando ahora  $T$  y  $m$  obtuvimos los siguientes valores:

TABLA 4

| Orden del<br>cero | Partícula | Masa (Mev) |
|-------------------|-----------|------------|
| n=1               | $\psi$    | 3.076      |
| n=2               | $\psi'$   | 3.690      |
| n=3               | $\psi''$  | 4.144      |
| n=4               | $\psi'''$ | 4.522      |
| n=5               | ?         | 4.855      |
| n=6               | ?         | 5.160      |
| n=7               | ?         | 5.443      |
| n=8               | ?         | 5.713      |
| n=9               | ?         | 5.977      |
| n=10              | ?         | 6.224      |

$$T=0,16 \text{ Gev}^2, M=1.61 \text{ Mev}$$

Observamos que este ajuste es, en principio, tan bueno como el anterior.

Se puede estudiar el límite no relativista de un sistema físico descrito por la ecuación de Klein-Gordon, pasando a una descripción de dos componentes conocida como el hamiltoniano de Taketani-Sakata (ver referencia (12)), efectuando posteriormente un procedimiento tipo F-W, el cual, recordemos, fue construido para el caso específico de la ecuación de Dirac.

Como resultado de este proceso se concluye que el límite no relativista en este caso viene dado por:

$$H_{NR} = \eta \left( m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} + \dots \right) + V(r) + \frac{1}{32m^4} \left[ p^2, \left[ p^2, V(r) \right] \right] + \dots \quad (37)$$

donde  $\eta$  es la matriz

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso observamos que el último término, correspondiente por analogía al término de Darwin, aparece como corrección solamente al orden  $\left(\frac{1}{m}\right)^4$ , por lo que lo podemos despreciar en nuestra discusión.

Vemos, pues, que el límite no relativista de la ecuación de Klein-Gordon al orden que nos interesa es la ecuación de Schroedinger,

$$\left[ \frac{p^2}{2m} + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (38)$$

Por completitud hicimos el cálculo perturbativo en el caso de la ecuación de Schroedinger con el potencial de Tryon, trabajando con los parámetros dados por él. Los resultados obtenidos son:

TABLA 5

| Orden del cero | Partícula | Masa (Mev) |
|----------------|-----------|------------|
| n=1            | $\psi$    | 3.112      |
| n=2            | $\psi'$   | 3.750      |
| n=3            | $\psi''$  | 4.214      |
| n=4            | $\psi'''$ | 4.596      |

Estos valores corresponden, como ya se ha dicho, a tercer orden de perturbaciones.

Observamos, en comparación con la tabla número dos, que los valores obtenidos en el caso de Schroedinger, al trabajar con el conjunto de parámetros obtenidos por Tryon, constituyen un mejor ajuste en relación con los resultados obtenidos en el límite no relativista de la ecuación de Dirac. Esto era de esperar puesto que los parámetros fueron ajustados para la ecuación de Klein-Gordon.

A fin de lograr una mejor concordancia con los resultados experimentales vemos que cabe un nuevo ajuste de parámetros.

Al tomar los parámetros que nos permitieron un buen ajuste en el caso del límite no relativista ( $T = 0.1585 \text{ Gev}^2$ ,  $M = 1.61 \text{ Gev}$ ) obtuvimos los siguientes resultados:

TABLA 6

| Orden del<br>cero | Partícula | Masa (Mev) |
|-------------------|-----------|------------|
| n=1               | $\psi$    | 2.967      |
| n=2               | $\psi'$   | 3.594      |
| n=3               | $\psi''$  | 4.072      |
| n=4               | $\psi'''$ | 4.465      |
| n=5               | ?         | 4.804      |
| n=6               | ?         | 5.112      |
| n=7               | ?         | 5.399      |

Estos resultados son los más bajos que los observados experimentalmente dando el límite no relativista de Dirac una concordancia muy superior.

Sin embargo concluimos que los valores obtenidos por el tratamiento de Schroedinger también corresponden a sucesivos estados radiales del potencial lineal perturbados por el término no lineal en el potencial de Tryon.

De lo anterior concluimos que no es necesario una descripción relativista a fin de obtener el espectro de masas, lo que concuerda con lo hecho por Eichten et al(10); Harrington et al (13) y otros. En todo caso el tratamiento físicamente correcto de acuerdo con las propiedades experimentalmente asignadas a los quarks, consiste en investigar el límite no relativista de la ecuación de Dirac y efectuar entonces un tratamiento perturbativo. Los parámetros determinados mediante este procedimiento deben ser entonces más significativos que los obtenidos por Tryon, en particular el valor obtenido para la masa del quark con encanto.

## VI. FUNCIONES DE ONDA CORREGIDAS EN EL ORIGEN.

Nos interesó obtener el valor de las funciones de onda perturbadas en el origen en razón de una suposición hecha por Van Royen y Weisskopf<sup>(14)</sup> el año 1967 al estudiar el decaimiento de mesones. La proposición consiste en afirmar que  $|\psi_m(0)|^2$  es proporcional a la masa del mesón, siendo  $\psi_m$  la función de onda del sistema reducido. Van Royen y Weisskopf necesitan introducir esto como suposición ad-hoc, con objeto de lograr acuerdo con los datos experimentales en razones de decaimiento. Para esto no tienen justificación alguna, ya que ellos trabajan con un potencial de pozo cuadrado como interacción entre el quark-anti quark. La situación cambia si el potencial es lineal puesto que todas las funciones de onda dan un valor constante para la probabilidad en el origen como consecuencia de las propiedades de la función de Airy. Al tomar un término perturbativo, como el que obtenemos en el límite no relativista de la ecuación de Dirac, podemos esperar una buena correlación entre las probabilidades corregidas en el origen y las masas de los estados correspondientes. Con esto la proposición de Van Royer y Weisskopf encuentra una justificación.

Por consiguiente interesa determinar proporciones como:

$$\frac{\text{masa}\psi^+}{\text{masa}\psi}$$

y comparar con:

$$\frac{|\psi(0)|^2}{|\psi(0)|^2}$$

a fin de verificar la proposición de Van Royen Weisskopf.

Observamos, a partir de la función de onda no perturbada para el meson encantado, dada por la ecuación (34), que la probabilidad de localizar el "quark reducido" en el origen es constante para todos los autoestados esféricos en que el par se puede encontrar y viene dada por:

$$|\psi_n(0)|^2 = \frac{2mT}{4\pi} \quad (39)$$

Queremos ver como se comportan las proporciones señaladas tanto en el caso del límite no relativista de la ecuación de Dirac con el potencial de Tryon como en el caso de Schroendiger con el mismo potencial al tomar probabilidades corregidas. Por consiguiente hay que perturbar la función de onda, lo cual, hasta el segundo orden que en este caso trabajamos, viene dado por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= \sum_m' \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)} \\ \psi_n^{(2)} &= \sum_m' \sum_k' \frac{V_{mk} V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)}) (E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} - \sum_m' \frac{V_{mn} V_{nn}}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2} \psi_m^{(0)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \psi_n^{(0)} \sum_m' \frac{|V_{mn}|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2} \end{aligned} \quad (40)$$

En el caso del potencial obtenido a través del límite no relativista trabajando con nuestros parámetros

( $T = 0.1585$  Gev) y  $M=1,61$  Gev) obtuvimos para las probabilidades corregidas en el origen hasta segundo orden los siguientes valores:

TABLA 7

| Orden del cero | Partículas | Probabilidad en el origen | Razón entre probabilidades consecutivas. |
|----------------|------------|---------------------------|--|
| n=1            | $\psi$     | 0,254061                  | 1,2850                                   |
| n=2            | $\psi'$    | 0,326475                  | 1,0975                                   |
| n=3            | $\psi''$   | 0,358330                  | 1,0607                                   |
| n=4            | $\psi'''$  | 0,380107                  | 1,0243                                   |
| n=5            | ?          | 0,389360                  | 1,0088                                   |
| n=6            | ?          | 0,397803                  | 0,9804                                   |
| n=7            | ?          | 0,385127                  |  |

La proporción entre las masas sucesivas, en que las masas aparecen señaladas en la tabla N°3 son las siguientes

TABLA 8

| Orden del cero | Partículas | Razón entre probabilidades consecutivas. |
|----------------|------------|--|
| n=1            | $\psi$     | 1,1988                                   |
| n=2            | $\psi'$    | 1,1226                                   |
| n=3            | $\psi''$   | 1,0909                                   |
| n=4            | $\psi'''$  | 1,0733                                   |
| n=5            | ?          | 1,0625                                   |
| n=6            | ?          | 1,0547                                   |
| n=7            | ?          |  |



Observamos que el acuerdo entre los dos conjuntos de proporciones es válido dentro de un 5% de ajuste en promedio.

El mismo cálculo lo efectuamos para el caso de Schroedinger con los mismos parámetros, perturbando con el potencial original de Tryon.

En este caso los resultados obtenidos para las probabilidades corregidas y las razones consecutivas entre ellas fueron las siguientes:

TABLA 9

| Orden del Cero | Partícula | Probabilidad corregida en el origen. | Razón consecutiva. |
|----------------|-----------|--------------------------------------|--------------------|
| n=1            | $\psi$    | 0,29940                              |                    |
| n=2            | $\psi'$   | 0,40279                              | 1,34531            |
| n=3            | $\psi''$  | 0,44710                              | 1,11001            |
| n=4            | $\psi'''$ | 0,47551                              | 1,06355            |
| n=5            | ?         | 0,48599                              | 1,06355            |
| n=6            | ?         | 0,48777                              | 1,02188            |
| n=7            | ?         | 0,47402                              | 0,97181            |

Las masas correspondientes, vienen dadas por la tabla N°6 con lo que la relación entre masas consecutivas viene dada por:

TABLA 10

| Orden del<br>cero | Partícula | Razón consecutiva<br>de las masas |
|-------------------|-----------|-----------------------------------|
| n=1               | $\psi$    |                                   |
| n=2               | $\psi'$   | 1,211                             |
| n=3               | $\psi''$  | 1,132                             |
| n=4               | $\psi'''$ | 1,096                             |
| n=5               | ?         | 1,075                             |
| n=6               | ??        | 1,064                             |
| n=7               | ?         | 1,056                             |

La concordancia de proporciones es válido dentro de un 5,2% señalando sin embargo que la discrepancia entre los dos primeros valores es de un 10%.

Teniendo presente que las probabilidades de los autoestados no perturbados es constante en el origen concluimos que la validez de la hipótesis de Weisskopf depende exclusivamente del potencial perturbativo a que están sometidos los quarks cerca del origen. Nuestros resultados, sin embargo, muestran que la afirmación de Weisskopf tiene validez dentro de un porcentaje razonable de concordancia. Esto es interesante señalarlo en razón de los escasos conocimientos que se poseen respecto a la forma del potencial correspondiente a libertad asintótica.

## VII. LOS SUPERMULTIPLITES PERMITIDOS DE SU(3) EN AUSENCIA DE QUARKS.

En esta sección nos apartamos de lo que ha sido la discusión del espectro de masas del charmonium para presentar ciertas especulaciones relacionadas con los supermultipletes permitidos de SU(3).

Como ya se ha dicho anteriormente la evidencia experimental relacionada con los quarks es indirecta; nadie ha encontrado quarks libres en la naturaleza. Por otra parte esta evidencia es relativamente reciente; los primeros datos experimentales al respecto fueron presentados en 1968, y recién en 1974 (Conferencia de Londres) se aceptó como verdad bien establecida la estructura de quarks de los nucleones.

Como también ya ha sido señalado, una solución posible al problema que así se plantea es proporcionada por la hipótesis de fuerza constante entre los quarks (potencial lineal). Sin embargo, desde el punto de vista teórico es interesante explorar ideas alternativas, capaces de reproducir los resultados (predicciones) obtenidos con el modelo de quarks, pero sin introducir estas partículas.

El camino a seguir es claro; se trata en primera instancia de introducir algún nuevo ingrediente, extraído de los hechos experimentales, capaz de seleccionar de entre las representaciones irreducibles de SU(3) aquellas "usadas por la naturaleza" - las representaciones permitidas.

Veamos una manera de lograr esto. Se sabe que el formalismo de isospin es un esquema construido explícitamente a fin de dar cuenta del hecho que muchos hadrones, al despreñar la interacción electromagnética, se pueden considerar como básicamente una sola partícula, la cual puede asumir distintos estados de carga. Esto permite introducir los isomultipletes y hablar, por ejemplo del nucleón, el pión, etc. sin especificar la carga de estas partículas. Estos isomultipletes corresponden a representaciones irreducibles de  $SU(2)$ .

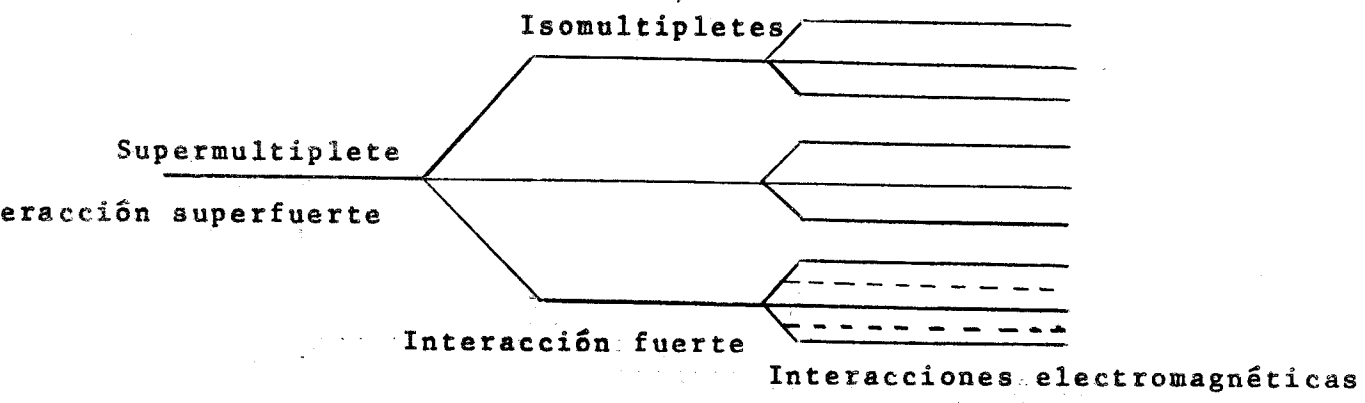
Nos interesa lograr una generalización de esta idea, esta vez bajo el punto de vista de  $SU(3)$ .

Para lograr esto, proponemos la existencia de un cierto número cuántico, el "superspin isotópico", el cual daría cuenta de los isomultipletes que constituyen los supermultipletes de  $SU(3)$ , en analogía al isospin que nos permite contruir los  $2I+1$  estados de carga posibles a una partícula, caracterizada por un valor de isospin igual a  $I$ .

Esto equivale a proponer que en el límite de simetría exacta de  $SU(3)$  tengamos una "superpartícula" (supermultipletes). Esto está inspirado precisamente en el hecho de que cuando podemos despreñar la interacción electromagnética, las partículas presentes en un isomultiplete corresponden a una única identidad física. Esta superpartícula, una vez que  $SU(3)$  pasa a convertirse en simetría aproximada debido a la presencia de las interacciones fuertes, se "des-

dobla" en los isomultipletes conocidos.

Gráficamente se tiene lo siguiente:



|                       |  |                                      |
|-----------------------|--|--------------------------------------|
| SU(3) simetría exacta | SU(3) simetría aproximada, SU(2) simetría exacta | SU(3) y SU(2) simetrías aproximadas. |
|-----------------------|--|--------------------------------------|

Veamos que propiedades caracterizan a estas superpartículas asociadas a distintas representaciones de SU(3). Consideremos primero la carga eléctrica de esta superpartícula.

Para esto recordamos que las representaciones irreducibles de SU(3) <sup>(15)</sup> son tensores del tipo  $T_{\lambda+\mu}^{\mu}$ , en que los subíndices conforman un molde de Young con el número de índices señalado. Cada índice puede asumir los valores 1, 2, 3.

La dimensión de las representaciones viene dada por

$$\dim(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\lambda+\mu+2) \tag{41}$$

Para cada representación,  $(\lambda, \mu)$ , se puede identificar el contenido de isospin y hipercarga asociados.

$$I = \frac{1}{2}(f-g) \quad (42)$$

$$Y = f+g - \frac{2}{3}(\lambda+2\mu)$$

en que  $f, g$  son números enteros que satisfacen la siguiente relación de desigualdad,

$$\lambda + \mu \geq f \geq \mu \geq g \geq 0 \quad (43)$$

En base a lo anterior nosotros pudimos calcular la carga total de los isomultipletes, vale decir de la superpartícula; mediante la expresión de Gell-Mann Nishijima

$$Q = T_z + \frac{Y}{2} \quad (44)$$

Lo que hicimos fue sumar las cargas, sobre todo el supermultiplete

$$\sum_{\text{supermultiplete}} Q = \sum_{\text{supermultiplete}} (T_z + Y/2) \quad (45)$$

pero

$$\sum_{\text{supermultiplete}} T_z = 0 \quad (45')$$

$\hat{J}_z$  la tercera componente del superspin isotópico.

En base a este nuevo número cuántico consideremos una posible generalización de la expresión de Gell-Mann Nishijima, válida ahora para los isomultipletes (y no para las partículas constituyentes de ellos, como es el caso usual).

La expresión que proponemos es la siguiente

$$\hat{Q} = \hat{J}_z + \frac{x}{2} \quad (47)$$

En esta fórmula  $Q$  denota la carga total del isomultiplete en cuestión. Observamos que  $x$  corresponde a la generalización natural de la hipercarga. Mostraremos que en módulo esta magnitud resulta ser constante para cada supermultiplete, lo que nos permite considerar  $x$  como la generalización natural de la hipercarga.

Todo esto lo hacemos apuntando hacia una fórmula de masas para la cual proponemos la siguiente expresión

$$M = M_0 + M_1 \hat{J}_z + M_2 x \quad (48)$$

en que  $M$  designa la masa total de un isomultiplete. Observe-mos que nuestra expresión no corresponde a una suposición explícita acerca del quiebre de simetría, como lo es por ejemplo la fórmula de Gell-Mann Okubo<sup>(16)</sup>. La idea que se encuentra de trás de una expresión como la dada por la ecuación (48) es que uno puede construir fórmulas de masa inspiradas, por ejemplo

Con esto la ecuación (45) se reduce a

$$\sum_{\substack{\text{supermul} \\ \text{tripleto}}} (2I+1) \frac{Y}{2} = \sum_{f=\mu}^{\lambda+\mu} \sum_{g=0}^{\mu} \frac{1}{2} (f-g+1) (f+g + \frac{2}{3}(\lambda+2\mu)) = 0 \quad (46)$$

Por lo tanto

$$\sum_{\substack{\text{supermul} \\ \text{tripleto}}} Q = 0 \quad (47)$$

El resultado de la suma es idénticamente cero para todos los valores posibles de  $\lambda$  y  $\mu$ . De acuerdo a esto vemos que las superpartículas asociadas a representaciones de SU(3) tienen hipercarga y carga nulas.

La observación anterior nos permite la siguiente reflexión: si SU(3) es la simetría adecuada para el universo hadrónico, podemos asegurar que la carga de este universo es cero. En este universo no incluimos partículas que experimenten sólo interacciones débiles o electromagnéticas, ya que SU(3) solamente se refiere a partículas que experimentan interacción fuerte.

A fin de explorar un poco más las propiedades de las superpartículas introduzcamos explícitamente el superspin isotópico  $\hat{J}$ . Esta magnitud da cuenta de los  $2\hat{J}+1$  isomultipletes en que la superpartícula se desdobra por interacciones fuertes. Entonces usando el álgebra de momento angular podemos asociar a cada isomultiplete un valor de



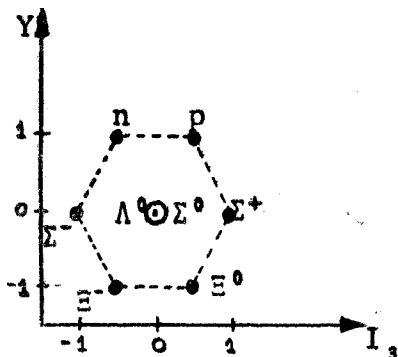
en física nuclear, y en las cuales simplemente se expresa en forma explícita el hecho que ciertos estados han sido clasificados de acuerdo a las representaciones irreducibles de una simetría supuesta para el sistema; estas fórmulas, como se sabe se encuentran en excelente acuerdo con la experiencia. Al respecto vease la referencia <sup>(17)</sup>. Con esto el argumento en el sentido que las fórmulas de masas constituyen una buena evidencia respecto al quiebre de simetría pierde significación.

Por supuesto, nos interesa aplicar la expresión anterior a las representaciones de SU(3) que han sido empleadas en la clasificación de hadrones, esto es, el octeto y decuplete de bariones.

Llegado a este punto observamos un hecho interesante. Todos los supermultipletes mencionados, octetos y decupletos, poseen cuatro isomultipletes cada uno. Esto significa que las superpartículas asociadas a dichas representaciones tienen un superspin isotópico  $\hat{J} = \frac{3}{2}$ .

Para el octeto y decuplete de bariones tenemos

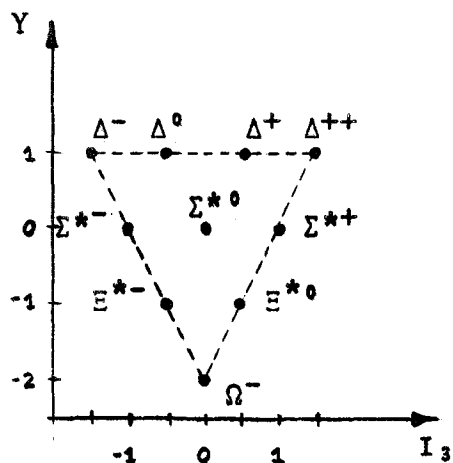
a) Octeto



|                     |               |
|---------------------|---------------|
| N(939)              | (1.878) (Mev) |
| $\Lambda^0$ (1.116) | (1.116) "     |
| $\Xi$ (1.318)       | (2.636) "     |
| $\Sigma$ (1.193)    | (3.579) "     |

Masa Total = 9.109 (Mev)

## b) Decupleteo



|                   |               |
|-------------------|---------------|
| $\Delta(1.236)$   | (4.944) (Mev) |
| $\Sigma^*(1.385)$ | (4.155) "     |
| $E^*(1.531)$      | (3.062) "     |
| $\Omega(1.672)$   | (1.672) "     |

Masa total = 13.833 (Mev)

En las figuras anteriores se indica al lado de cada isomultiplete la masa promedio y total del isomultiplete. También indicamos la masa total de ambos supermultipletes. Es interesante señalar la siguiente observación en física. Se cumple que

$$\frac{M_{\text{Total decupleteo}}}{M_{\text{Total octeto}}} = \frac{3}{2} \frac{\text{Masa } \Omega^-}{\text{Masa } \Lambda^0}$$

En cada caso tenemos cuatro isomultipletes, como ya se dijo. En el octeto están el doblete de los nucleones, el triplete de los  $\Sigma$ , el doblete de los  $E$  y el singulete de  $\Lambda^0$ . Para el decuplete tenemos el cuarteto de  $\Delta$ , el triplete de  $\Sigma^*$ , el doblete de  $E^*$  y el singulete de  $\Omega^-$ .

El problema a que nos enfrentamos si deseamos ver "como funciona" nuestra expresión de masas, es inventar una adecuada asignación de  $\hat{J}_z$  para cada isomultiplete.

El criterio que proponemos consiste en asignar el máximo valor de  $\hat{J}_z$  a aquel isomultiplete cuya masa total es mayor, asignando posteriormente valores menores de  $\hat{J}_z$  según los valores decrecientes de las masas totales de los isomultipletes.

En razón de esto, para el octeto de bariones obtuvimos la siguiente tabla

| Isomultiplete | $\hat{J}_z$ | Carga total $\hat{Q}$ isomultiplete | Masa total $\hat{M}$ isomultiplete (Mev) | x  |
|---------------|-------------|-------------------------------------|--|----|
| $\Lambda_0$   | -3/2        | 0                                   | 1.116                                    | 3  |
| N             | -1/2        | 1                                   | 1.878                                    | 3  |
| E             | 1/2         | -1                                  | 2.636                                    | -3 |
| $\Sigma$      | 3/2         | 0                                   | 3.579                                    | -3 |

En lo que sigue introducimos la siguiente notación.

El nombre de las partículas con un signo (^) encima, se refiere a la masa total del isomultiplete al que dicha partícula pertenece. En el caso de los nucleones escribiremos  $\hat{N}$  para denotar lo anterior.

Al aplicar la fórmula de masas obtenemos

un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. La necesidad de consistencia (tal como en el caso de la fórmula de Gell-Mann-Okubo) conduce aquí a la relación

$$\hat{\Lambda}_0 + \hat{\Sigma} = \hat{N} + \hat{E} \quad (49)$$

Numéricamente encontramos que esta expresión se satisface dentro de un 2% respecto de las masas involucradas.

En el caso del decuplete de bariones podemos construir la siguiente tabla:

| Isomultiplete | $\hat{J}_z$ | Carga total $\hat{Q}$<br>isomultiplete | Masa total $\hat{M}$<br>isomultiplete<br>(MeV) | x  |
|---------------|-------------|--|--|----|
| $\Omega$      | -3/2        | -1                                     | 1.672  | 1  |
| $\Xi^*$       | -1/2        | -1                                     | 3.062  | -1 |
| $\Sigma^*$    | 1/2         | 0                                      | 4.155  | -1 |
| $\Delta$      | 3/2         | 2                                      | 4.944  | 1  |

Al substituir estos valores en la fórmula de masas la necesidad de consistencia del sistema nos conduce a

$$\hat{\Delta} - \hat{\Omega} = 3(\hat{\Sigma}^* - \hat{\Xi}^*). \quad (50)$$

Esta relación se verifica dentro de un margen

de 0.5% respecto a los valores de masa presentes.

Recordemos que la aplicación de la fórmula de masas de Gell-Mann-Okubo al caso de los bariones da resultados comprendidos en un 1% de las masas involucradas.

Si nos preocupamos finalmente por el número posible de isospin en una cierta representación de  $SU(3)$ , lo que equivale al número posible de valores para  $\hat{J}_z$ , encontramos que está dado por

$$N_I = (\lambda+1)(\mu+1) = 2\hat{J}+1 \quad (51)$$

Al imponer  $\hat{J} = \frac{3}{2}$ , encontramos la siguiente relación

$$\lambda\mu + \lambda + \mu = 3 \quad (52)$$

cuyas únicas soluciones enteras son  $\lambda=1, \mu=1; \lambda=3, \mu=0; \lambda=0, \mu=3$ , las cuales corresponden al octeto, al decupleteo y al decupleteo conjugado respectivamente, que son precisamente las representaciones de  $SU(3)$  que ocurren en la naturaleza. (Esta fue, por otra parte, una de las motivaciones iniciales para introducir el modelo de quarks).

Por otra parte, si solamente imponemos

$$\lambda\mu + \lambda + \mu \leq 3 \quad (53)$$

encontramos que los únicos valores posibles de  $(\lambda, \mu)$  están dados por los pares  $(1,0), (0,1), (2,0), (0,2), (1,1), (3,0)$  y  $(0,3)$ .

Observamos que ahora obtenemos todas las representaciones posibles de  $SU(3)$ , hasta el decuplete. En particular, al imponer la igualdad, encontramos las representaciones dadas por el modelo de quarks, sin haber hablado de quarks en ningún momento. Naturalmente, para obtener estos resultados fue necesario introducir una hipótesis que reemplace a la de los quarks, que aquí consistió en postular la existencia de las superpartículas.

R E F E R E N C I A S

- 1.- P.H.Perkins.Contemporary Physics 16,173(1975).
- 2.- G.West.Physical.Review Letters 37,1454(1976).
- 3.- S.L.Glashow, J.Iliopoulos, L.Maiani.Physical Review D2,1285(1970).
- 4.- i) J.J.Aubert et al.Physical Review Letters 33,404(1974).  
ii) J.E.Augustin et al.Physical Review Letters 33,1406(1974).
- 5.- E.p.Tryon. Physical Review Letters 36,455(1976).
- 6.- L.Foldy and S.Wouthuysen.Physical Review 78,29(1950).
- 7.- I.Saavedra. Nuovo Cimento Letters 4,873(1970).
- 8.- M.Abramowitz and I.Stegun.Mathematical Tables.Pág.446.
- 9.- P.Leal Ferreira.Lettere al Nuovo Cimento 14,500(1975).
- 10.- E.Eichten et al.Physical Review Letters 34,369(1975).
- 11.- K.Lane and E.Eichten.Physical Review Letters 37,477(1976).
- 12.- J.Bjorken and S.Drell.Relativistic Quantum Mechanics.  
Mc Graw Hill Pág.198.
- 13.- B.J.Harrington et al.Physical Review Letters 34,168(1975).
- 14.- R.Van Royen and V.F.Weisskopf.Il Nuovo Cimento.Vol.Serie  
XA,617(1967).
- 15.- A.J.Mac Farlane.Latin American School of Physics 1965,  
Pág.593.
- 16.- D.B.Lichtenberg:Unitary Symmetry and Elementary Particles  
Academic Press Pág.173.
- 17.- I.Saavedra.Lettere al Nuovo Cimento 3,796(1970).

## I N D I C E

|   | <u>Página</u> |
|---|---------------|
| I Introducción.   | 1             |
| II Límite no relativista de la ecuación de Dirac con un potencial lineal.   | 12            |
| III Algo sobre Zitterbewegung.  | 20            |
| IV Límite no relativista de la ecuación de Dirac con el potencial de Tryon. | 24            |
| V Cálculo de la masa.   | 26            |
| VI Funciones de onda corregidas en el origen.                               | 36            |
| VII Los supermultipletes permitidos de SU(3) en ausencia de quarks.         | 41            |
| Referencias.  | 53            |



## AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Igor Saavedra toda la ayuda y el estímulo que me brindó a lo largo de este trabajo. Quisiera resaltar, además, su buena disposición para conversar y discutir sobre una gran cantidad de temas interesantes, (no sólo de física) con lo cual este período se convirtió en uno de los más atractivos a lo largo de mis estudios.

Además quiero agradecer la inapreciable ayuda de Florencio Utreras por la confección del programa que se usó en este trabajo. Junto con él deseo agradecer a Constantino Utreras por su desinteresada ayuda en el manejo de la mágica pantalla.

En tercer lugar, debo agradecer todas las facilidades brindadas por el Sr. Patricio Martens para el uso del tiempo de computación requerido.

También me es grato agradecer a la Sra. Sonia Encalada, no sólo por mecanografiar esta memoria, sino por todas las amabilidades que tuvo para conmigo durante mi estadía en física teórica.

Quisiera aprovechar la ocasión para agradecer a todos los profesores que de algún modo participaron en mi formación académica, tanto en Facultad de Ciencias como en el departamento de Física de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Finalmente agradezco a todos mis amigos y amigas con quienes compartí este período de mi vida, especialmente a ti Panchi, no sólo por esos siniestros conmutadores, sino porque los quarks realmente cobraron encanto en tu compañía.