

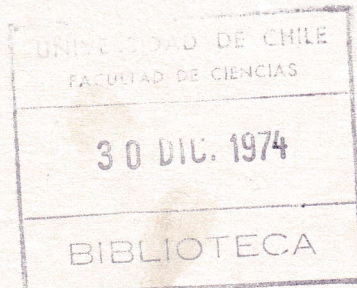
UCH-FC
LIC-F.
M445
CA

CAUSALIDAD EN ELECTRODINAMICA CLASICA Y CUANTICA

ERNESTO MATUTE CARVAJAL

Informe de Investigación presentado ante la
Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile
en cumplimiento de los requisitos para optar al
grado de Licenciado de Ciencias con mención en Fí
sica.

SANTIAGO DE CHILE, Mayo de 1974.



I N D I C E

Indice	1
Agradecimientos	2
Notación	2
1. Introducción	3
2. La ecuación de campo y sus soluciones	4
3. Causalidad clásica y cuántica	9
4. Forma explícita de la función delta causal D_c	16
5. Solución causal cuántica de la ecuación de campo para una densidad de corriente creada por una car- ga móvil	20
6. Los campos	25
Referencias	29

AGRADECIMIENTO

Es un placer agradecer aquí las valiosas indicaciones y comentarios del Profesor, Sr. Carlos López, bajo cuya dirección fué realizado este trabajo.

NOTACION

Indices griegos varían entre 0 y 3. La métrica en el espacio de Minckowski es: $g_{00} = -1 = -g_{11}$; los demás términos nulos. Puntos sobre las letras significan derivación respecto al tiempo propio. Las referencias se citan mediante números encerrados en un círculo.

1. Introducción:

En electrodinámica clásica la solución de la ecuación de campo $\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ no es única. Para escoger la adecuada se invoca el Principio de Causalidad Clásica que determina la función de Green retardada D_R . Con esta solución se llega finalmente a la siguiente ecuación de movimiento para la partícula cargada, acelerada por una fuerza externa

F_{ext}^μ , (ver (1))

$$m(a^\mu - \tau_0 \dot{a}^\mu) = -\frac{2}{3} e^2 a^2 v^\mu + F_{ext}^\mu \equiv K^\mu(\tau)$$

donde $\tau_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}$

Esta es la ecuación de Lorentz-Dirac para la carga puntual. Una integración de ella conduce a

$$a^\mu(\tau) = \frac{e^2/c_0}{m\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} e^{\tau/\tau_0} K^\mu(\tau') d\tau'$$

la cual es manifiestamente anti-causal, pues depende de toda la historia futura de la partícula. Si bien es cierto que esta a-causalidad ocurre en un intervalo de tiempo muy corto, indistinguible para los efectos prácticos, la situación es insatisfactoria en principio. La ecuación de movimiento admite también soluciones que no tienen sentido físico (soluciones patológicas); ellas dan al electrón una velocidad que aumenta asintóticamente (en el futuro distante) hacia la

la velocidad de la luz independientemente de la fuerza aplicada, lo cual sucede aunque las fuerzas hayan dejado de actuar. Estas soluciones patológicas son descartadas, dejando de lado el Principio de Causalidad; ellas son justamente las causales a diferencia de las soluciones físicas que son a-causales. La teoría es entonces inconsistente.

En electrodinámica cuántica la solución que satisface causalidad es la delta causal de Feynman D_F , también denotada en la literatura por D_C . La teoría trabaja con ella en forma consistente y con conceptos que no tienen análogo clásico; se presentan problemas pero son de otro tipo como es la presencia de integrales divergentes que se evitan mediante la técnica de renormalización y que también está presente en la teoría clásica. Dada esta situación, el Principio de Correspondencia (relativista) nos "sugiere" que se podría desarrollar una teoría clásica consistente considerando D_C en lugar de D_R .

El propósito de esta investigación es trabajar clásicamente con D_C con la esperanza de que las soluciones causales de la ecuación de movimiento que se obtenga no sean patológicas.

2. La ecuación de campo y sus soluciones:-

Es bien sabido de la electrodinámica clásica que la ecuación de onda para el cuadrivector potencial A^μ en el gauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ es (ver por ejemplo (1))

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (\mu=0,1,2,3) \quad (1)$$

en donde por definición

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}) ; j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \vec{\nabla} \right) ; \partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla} \right) \quad (2)$$

y se ha adoptado la métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{matrix} \mu \backslash \nu & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (3)$$

El modo más conveniente de resolver (1) es usando el método de la función de Green. Resolvemos entonces primeramente la ecuación

$$\square G(x-x') = -\delta^{(4)}(x-x') \quad (4)$$

La función $G(x-x')$ es una función de Green. Debe satisfacer las mismas condiciones impuestas sobre A^μ , las cuales estarán determinadas por consideraciones físicas. Una vez que se ha especificado la función de Green $D(x-x')$, la solución de la ecuación (1) estará dada por

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int D(x-x') j^\mu(x') d^4x' \quad (5)$$

Para hallar la función de Green consideramos la transformada de Fourier de los dos miembros de la ecuación (4)

$$G(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int g(k) e^{ik(x-x')} d^4k, \quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) \quad (6)$$

$$\delta^{(4)}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik \cdot (x-x')} d^4k \quad (7)$$

reemplazando en (4) se tiene

$$(8) \quad - \frac{1}{(2\pi)^2} \int k^2 g(k) e^{ik_0(x-x^0)} d^4k = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x-x^0)} d^4k$$

entonces,

$$g(k) = \frac{1}{(2\pi)^2 k^2} \quad (9)$$

luego,

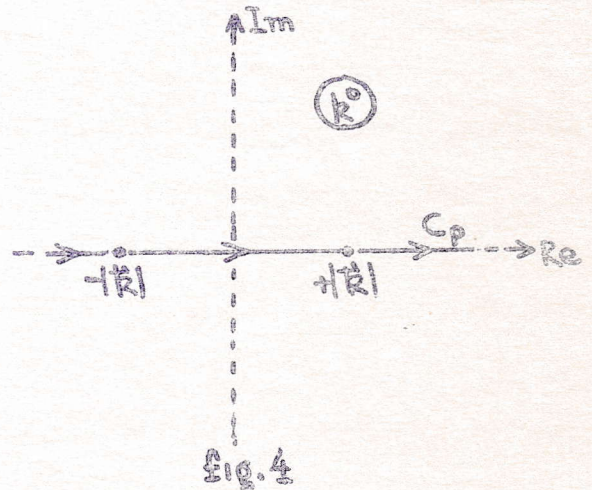
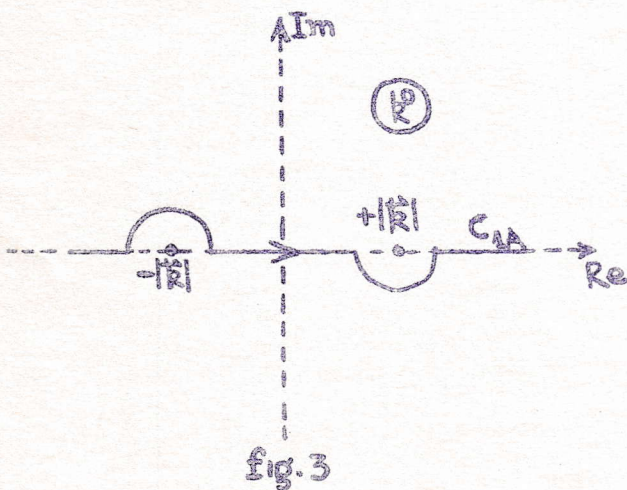
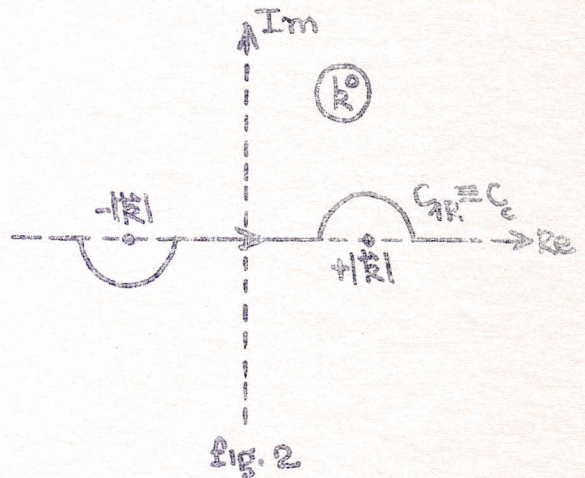
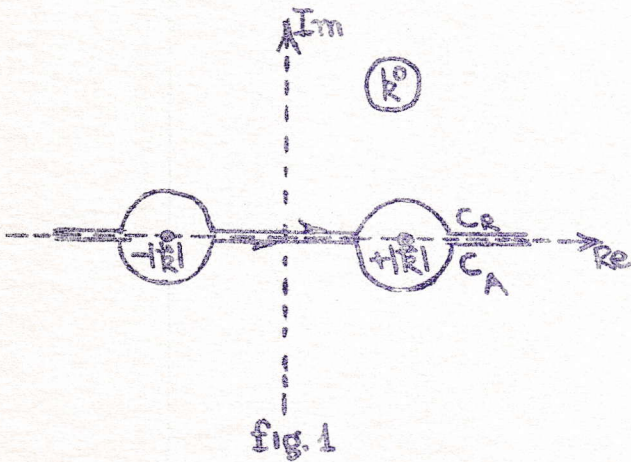
$$G(x-x^0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik_0(x-x^0)}}{k^2} d^4k \quad (10)$$

separando (10) en parte espacial y temporal se obtiene

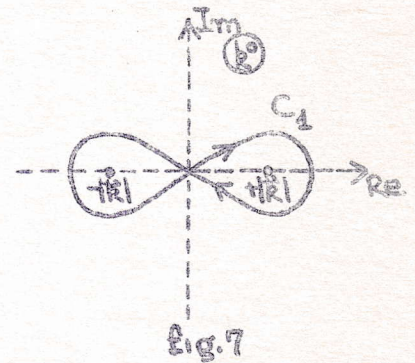
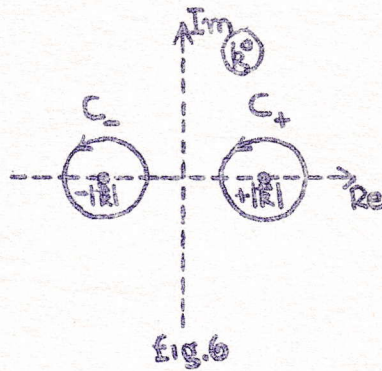
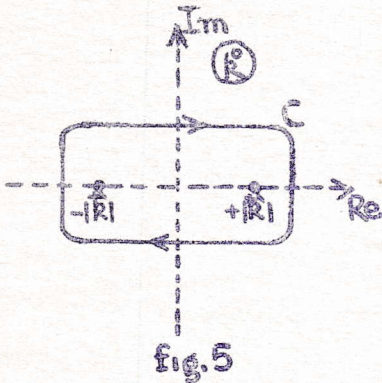
$$(11) \quad G(x-x^0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}-\vec{x}^0)} d^3k \int \frac{e^{-ik^0(x^0-x^0)}}{k^2 - k^{02}} dk^0$$

Si atendemos a la integración sobre k^0 vemos que aparecen singularidades en el integrando para $k^0 = \pm |\vec{k}|$, por lo tanto la solución (11) no tiene sentido si no damos alguna regla para tratar las singularidades. Esta no puede darse sólo por consideraciones matemáticas, sino también por consideraciones físicas. La función de Green entonces no es única. La integración sobre k^0 la podemos efectuar como una integral de Cauchy en el plano complejo k^0 , y el tratamiento de los polos dará origen a las distintas funciones delta (ver (2)):

a) Funciones delta inhomogéneas:
 Son soluciones de la ecuación de onda inhomogénea y están determinadas por las trayectorias $C_R, C_A, C_{1R} \equiv C_C, C_{1A}$ y C_P , mostradas en las figuras 1, 2, 3, y 4, y las cuales definen las funciones $D_R(x), D_A(x), D_{1R}(x) \equiv D_C(x), D_{1A}(x)$ y $D_P(x)$ respectivamente.



b) Funciones delta homogéneas:- Son soluciones de la ecuación de ondas homogénea y están determinadas por las trayectorias C_0, C_+, C_- y C_1 , mostradas en las figuras 5, 6 y 7, y las cuales definen las funciones $D(x), D_+(x), D_-(x), D_1(x)$ respectivamente.



Por supuesto todas las funciones $\rightarrow D$ no son independientes; en realidad pueden pensarse como combinaciones lineales de sólo tres de ellas, por ejemplo D_p, D_+, D_- , como debe ser, pues la ecuación (4) es una ecuación inhomogénea de segundo orden y su solución general es una combinación lineal de dos soluciones de la homogénea y una solución particular de la inhomogénea.

Es fácil verificar que todas las funciones deltas inhomogéneas son soluciones de la ecuación (4). En efecto, tomemos por ejemplo el camino de integración D_{1A} ,

$$G(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{1A}} \frac{e^{ik \cdot (x-x')}}{k^2} d^4k \quad (10)$$

$$\square G(x-x') = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{1A}} e^{ik \cdot (x-x')} d^4k$$

pero por ser el integrando una función analítica en k , $\int_{C_{1A}} = \int_{\text{eje real}} = -\delta$ (4)

Algo similar sucede para las funciones deltas homogéneas; tomemos por ejemplo la trayectoria cerrada dada por C_1 ,

$$\square \int_C \delta(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C e^{ik \cdot (x-x')} d^4k = 0 \text{ por el teorema de Cauchy.}$$

De las definiciones dadas anteriormente, podemos obtener inmediatamente un par de relaciones que nos serán útiles, ellas son

$$D_C(x) = D_R(x) + D_-(x) \tag{12}$$

$$D_-(x) = \frac{1}{2} [D_C(x) - D(x)] \tag{13}$$

3. Causalidad clásica y cuántica-

De las funciones delta inhomogéneas definidas en 2., la que satisface causalidad clásica es $D_R(x-x')$ (el índice R indica su naturaleza "retardada"). En efecto, se ve fácilmente de la ecuación (11) y de la Fig. 1 que

$$\left. \begin{aligned} D_R(x-x') &= 0, \text{ si } x^0 - x'^0 < 0 \text{ (t(efecto) < t'(causa))} \\ D_R(x-x') &\neq 0, \text{ si } x^0 - x'^0 > 0 \text{ (t > t')} \end{aligned} \right\} \text{causalidad clásica. (14)}$$

Para clarificar esto un poco, supongamos que la corriente se debe a una carga móvil representada por una línea de universo en el espacio de Minkovski (Fig. 8).

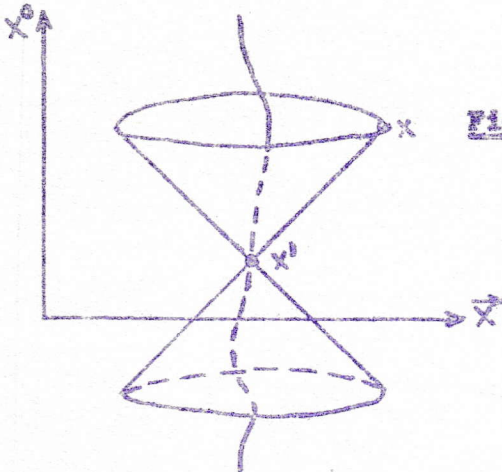


Fig. 8:-- Conos de luz del futuro y del pasado asociados con un punto x^0 sobre la línea de universo de una partícula cargada.

En un punto arbitrario x^0 sobre dicha línea de universo serán producidos campos electromagnéticos los cuales se mueven con velocidad de la luz, es decir, se propagan a lo largo del cono del futuro (conicidad); en tres dimensiones son esferas cuyo radio crece con la velocidad C de la luz. Como una consecuencia, los campos electromagnéticos en el punto x se deben al movimiento de la carga en el punto x^0 (¡ y no otro punto de la línea de universo!). Los campos en x debido a x^0 se conocen como campos retardados ya que ellos están determinados por el comportamiento de la fuente en un tiempo anterior (retardado). Inversamente, se puede determinar el punto o puntos retardados (si hay más de una línea de universo cargada) para un punto dado x dibujando el cono de luz del pasado con vértice en x . Este cono intersectará todas las líneas de universo en los puntos retardados x^0 . Esta construcción es única ya que líneas de universo de carga siempre tienen vectores tangentes tipo tiempo. La condición de retardación queda establecida en (14).

Por su parte, la función $D_{12}(x-x^0) \equiv D_C(x-x^0)$ tiene asociada condiciones de borde que expresan su naturaleza causal cuántica. Para especificar mejor éstas, hacemos referencia a las soluciones onda plana, de frecuencias tanto positiva como negativa, de la ecuación de ondas homogénea

$$\square \varphi(x) = 0 \quad (15)$$

Dichas soluciones forman un conjunto completo. Normalizando, se tiene (4)

$$f_k^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2|k^0|}} e^{\pm i k \cdot x} \quad , \quad \begin{aligned} k \cdot x &= -k^0 x^0 + \vec{k} \cdot \vec{x} \\ k^0 &= |\vec{k}| \end{aligned} \quad (16)$$

para las soluciones de frecuencia positiva y negativa respectivamente. Ellas satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int d^3x f_k^{(+)*}(x) \pm \vec{\partial}_0 f_k^{(+)}(x) &= \pm \delta(\vec{k}-\vec{k}') \quad (3) \\ \int d^3x f_k^{(+)*}(x) \pm \vec{\partial}_0 f_k^{(-)}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

donde usamos la notación

$$a \vec{\partial}_0 b \equiv a \left(\frac{\partial b}{\partial x^0} \right) - \left(\frac{\partial a}{\partial x^0} \right) b \quad (18)$$

La forma general de onda es

$$\Psi(x) = \Psi^{(+)}(x) + \Psi^{(-)}(x) \quad (19)$$

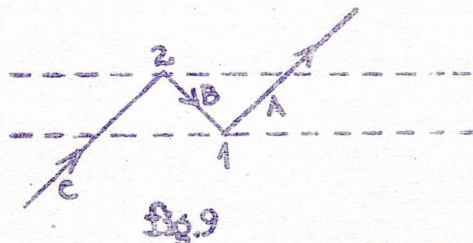
donde

$$\begin{aligned} \Psi^{(+)}(x) &= \int d^3x a_+(k) f_k^{(+)}(x) \\ \Psi^{(-)}(x) &= \int d^3k a_-(k) f_k^{(-)}(x) \end{aligned} \quad (20)$$

Por la naturaleza causal de D_C significamos las condiciones de borde asociadas a la ecuación

$$\square D(x-x') = -\delta(x-x') \quad (4)$$

las cuales determinan D_C . En electrodinámica cuántica, las condiciones de borde a las soluciones incorpora la interpretación física de Stückelberg-Feynman de los positrones como electrones de energía negativa viajando en el sentido retrógrado del tiempo (3). Para comprender mejor esta interpretación tomamos como ejemplo la creación de un par electrón-positrón. En la aproximación de la teoría relativista clásica la creación de un par electrón-positrón (A,B) puede representarse por el nacimiento de dos líneas de universo desde el punto de creación 1 (ver Fig. 9).



La línea de universo del positrón continuará entonces hasta que se aniquile con otro electrón, C, en un punto 2. Entre los tiempos t_1 y t_2 hay entonces tres líneas de universo, antes y después sólo una. Sin embargo, las líneas de universo de C, B, y A forman una línea continua aunque la parte positrónica B de ella está dirigida en el sentido inverso del tiempo. Siguiendo la carga más bien que la partícula esta línea de universo continúa es como un todo. Como dice Feynman (3) es como si un bombardero volando a baja altura sobre una carretera repentinamente vé tres carreteras y es sólo cuando dos de ellas se juntan y desaparecen nuevamente que nota simplemente que ha pasado sobre un largo desvío de un solo camino. Es conveniente entonces considerar la historia entera en el espacio tiempo. En un problema de scattering este punto de vista del proceso de scattering total es similar al punto de vista de la matriz-S de Heisenberg. El orden temporal de los sucesos durante el scattering es irrelevante. En física clásica los positrones pueden verse como electrones avanzando a lo largo de la línea de universo hacia el pasado. La idea es entonces considerar sólo una partícula, el electrón, que a veces retrocede en el tiempo. Este punto de vista está de acuerdo con causalidad.

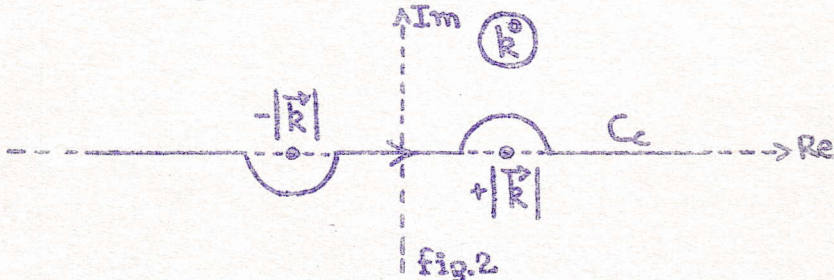
De acuerdo con lo anterior, si representamos el campo electromagnético por fotones ellos deben ser de energía positiva y para construir el propagador (o función de Green) causal debemos encontrar una solución de (4) la cual propaga a las ondas de frecuencia positiva —representando cuantos de energía positiva— en el sentido directo del tiempo y a las de frecuencia negativa en el sentido retrógrado. Obviamente, la solución que satisface esto ya no es

D_R pues esta función de Green propaga frecuencias de ambos signos hacia el futuro.

El propagador causal para la radiación electromagnética tiene una expansión de Fourier dada por

$$D_C(x-x^0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_C} d^4k \frac{e^{ik \cdot (x-x^0)}}{k^2} \quad (10)$$

donde C_C es la trayectoria de integración en el plano complejo k^0 mostrada en la figura 2



C_C asegura que (10) satisface la condición de borde deseada de tener solamente frecuencias positivas avanzando en el tiempo y frecuencias negativas retrocediendo en el tiempo (requisito físico necesario de la teoría de los agujeros). No hay otra elección posible para el contorno de integración de modo que se satisfaga ello, pues entonces tendríamos ondas de energía negativa propagándose en el futuro u ondas de energía positiva propagándose hacia el pasado. Podemos verificar que C_C es la elección correcta de contorno integrando sobre d^4k . Usando el teorema de Cauchy, se tiene

$$D_C(x-x^0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}-\vec{x}^0)} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-x^0)}}{k^2 - k^{02}} \quad (11)$$

Los residuos son:

$$R_+ = \lim_{k^0 \rightarrow |\vec{k}|} (k^0 - |\vec{k}|) \frac{e^{-ik^0(x^0 - x'^0)}}{(|\vec{k}| + k^0)(|\vec{k}| - k^0)} = \frac{e^{-i|\vec{k}|(x^0 - x'^0)}}{2|\vec{k}|} \quad (21)$$

$$R_- = \lim_{k^0 \rightarrow -|\vec{k}|} (k^0 + |\vec{k}|) \frac{e^{-ik^0(x^0 - x'^0)}}{(|\vec{k}| + k^0)(|\vec{k}| - k^0)} = \frac{e^{i|\vec{k}|(x^0 - x'^0)}}{2|\vec{k}|} \quad (22)$$

de modo que,

$$D_c(x-x') = i \int d^3k \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} e^{-i|\vec{k}|(x^0 - x'^0)}}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|} \\ = i \int d^3k \int \frac{f_k^{(+)}(x) f_k^{(+)*}(x') \theta(t-t') - i \int d^3k \int \frac{f_k^{(-)}(x) f_k^{(-)*}(x') \theta(t'-t)}{k} \quad (23)$$

y por cálculo directo encontramos de (17) y (23) que $D_c(x-x')$ propaga sólo la parte de frecuencia positiva de una onda general:

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) \quad (19)$$

en el sentido directo del tiempo,

$$i \theta(t-t') \psi^{(+)}(x, t) = \int d^3x' D_c(x-x') i \vec{\partial}'_0 \psi^{(+)}(x', t') \quad (24)$$

y la frecuencia negativa en el sentido retrocedido del tiempo,

$$i \theta(t'-t) \psi^{(-)}(x, t) = \int d^3x' D_c(x-x') i \vec{\partial}'_0 \psi^{(-)}(x', t') \quad (25)$$

4.- Forma explícita de la función delta causal D_c :

De acuerdo con (12),

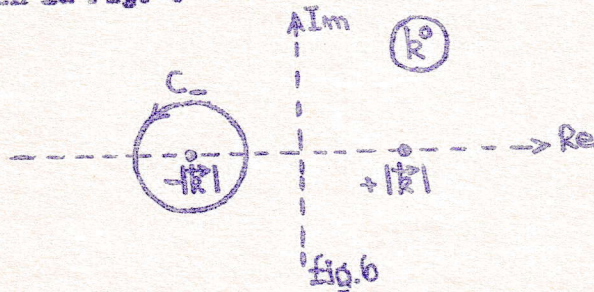
$$D_c(x) = D_R(x) + D_-(x)$$

Calculamos primeramente $D_-(k)$:

$$D_-(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_-} d^4k \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int_{C_-} dk^0 \frac{e^{-ik^0 x^0}}{k^2 - k^{02}} \quad (26)$$

donde C_- es el contorno de integración en el plano complejo k^0 mostrada en la Fig. 6



Usando el teorema de Cauchy,

$$\int_{C_-} dk^0 \frac{e^{-ik^0 x^0}}{k^2 - k^{02}} = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi i \text{Res}_- = 2\pi i \frac{e^{-i|\vec{k}|x^0}}{2|\vec{k}|} \quad (27)$$

de modo que,

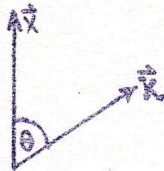
$$D_-(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i|\vec{k}|x^0}}{|\vec{k}|} \quad (28)$$

Para integrar (26) usamos coordenadas esféricas eligiendo como eje polar el vector \vec{x} :

Sea $|\vec{k}| \equiv k$. Se tiene entonces,

$$d^3k = 2\pi k^2 \sin \theta d\theta dk = -2\pi k^2 d(\cos \theta) dk$$

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = k|\vec{x}| \cos \theta$$



Luego,

$$D_-(x) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k e^{ikx^0} \int_{-1}^1 e^{ik|\vec{x}|\cos \theta} d(\cos \theta) = \frac{1}{2(2\pi)^2 |\vec{x}|} \int_0^\infty dk e^{ikx^0}$$

$$D_-(x) = \frac{1}{2(2\pi)^2 |\vec{x}|} \int_0^\infty dk e^{ik(x^0 + |\vec{x}|)} - \frac{1}{2(2\pi)^2 |\vec{x}|} \int_0^\infty dk e^{ik(x^0 - |\vec{x}|)}$$

(29)

Ahora bien, por definición (una dimensión)

$$\delta^+(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha x}, \quad \delta^-(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\alpha e^{i\alpha x}$$

(30)

$$y \quad \delta(x) = \delta^-(x) + \delta^+(x)$$

(31)

o equivalentemente,

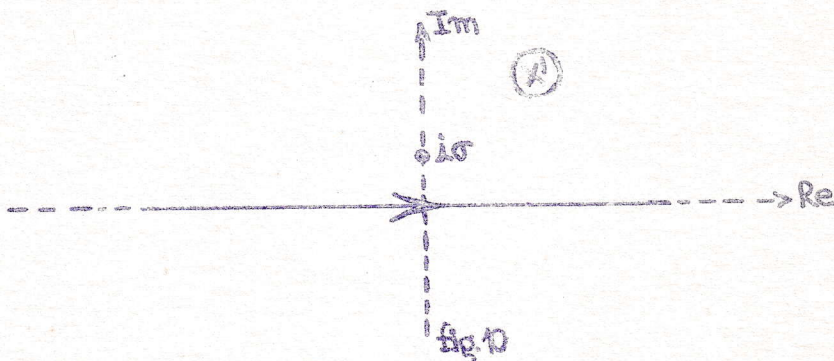
$$\delta^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{i\alpha x} \theta(\pm\alpha)$$

(32)

Pero

$$\delta(+\alpha) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm i\alpha x'}}{x' - i\sigma} dx' \quad (33)$$

La presencia del término $i\sigma$ en (33) indica que la integral es a lo largo del eje real, según se muestra en la Fig. 10



El uso de (33) en (32) conduce a

$$\delta^{\pm}(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{x' - i\sigma} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{i\alpha(x' \pm x')}}_{\delta(x' \pm x')} \quad (34)$$

$$\delta^{\pm}(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mp \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x \pm i\sigma}$$

y de acuerdo con (31),

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i\sigma} - \frac{1}{x + i\sigma} \right) \quad (35)$$

Por otra parte,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\sigma} = P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi \delta(x)$$

, donde P indica valor principal. (36)

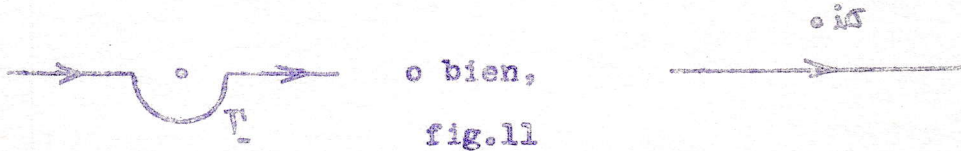
aquí hacemos notar que esta expresión toma sentido al ser multiplicada por una función $f(x)$ $\left[\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0 \right]$ e integrada sobre X .

En efecto, tenemos por ejemplo

$$2\pi i f(0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - i\sigma} = P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x} + i\pi f(0) \quad (36')$$

donde hemos hecho uso del contorno de integración mostrada en la Fig.

11.



Por lo tanto,

$$\delta^+(x) = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{2\pi i} P\left(\frac{1}{x}\right) \quad (37)$$

De modo que, reemplazando en (29), se tiene finalmente (espacio de Minkowski).

$$\begin{aligned} D_-(x) &= \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \left[\delta^+(x^0 + |\vec{x}|) - \delta^+(x^0 - |\vec{x}|) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi |\vec{x}|} \left[\delta(x^0 + |\vec{x}|) - \delta(x^0 - |\vec{x}|) \right] + \frac{1}{8\pi^2 |\vec{x}|} \left[P\left(\frac{1}{x^0 + |\vec{x}|}\right) - P\left(\frac{1}{x^0 - |\vec{x}|}\right) \right] \\ D_-(x) &= \frac{\epsilon(x)}{4\pi} \delta(x^2) + \frac{1}{4\pi^2} P\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} D(x) + \frac{1}{2} D_1(x) \quad (38) \end{aligned}$$

donde se ha usado la siguiente propiedad de la función δ (1):

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \left[\delta(x+a) + \delta(x-a) \right] \quad (39)$$

Por otro lado, se encuentra en la literatura standard la siguiente expresión para la función $D_R(x)$ (ver por ejemplo (1))

$$D_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \sin|\vec{k}|x^0}{|\vec{k}|} d^3k = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(x^0 - |\vec{x}|) = \frac{1 + \epsilon(x)}{4\pi} \delta(x^2) \quad (40)$$

donde $\epsilon(x) = -\frac{n^\mu x_\mu}{|n^\nu x_\nu|} \frac{1}{\sin^2(1,0)} + \frac{x^0}{|x^0|} = \epsilon(x^0) \quad (41)$

Entonces, según (12)

$$D_c(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) + \frac{1}{4\pi^2} P\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (42)$$

5.- Solución causal cuántica de la ecuación de campo para una densidad de corriente creada por una carga móvil:-

Si la densidad de corriente se debe a una partícula cuya línea de universo está dada por $Z^\mu(\tau)$ y cuya carga es q , entonces (1)

$$j^\mu(x') = ec \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - z(\tau)) v^\mu(\tau) d\tau, \text{ con } v^\mu(\tau) \equiv \frac{dz^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (43)$$

Estando interesados en la solución causal cuántica, obtenemos de (5) y (43)

$$A_C^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int D_C(x-x') j^\mu(x') d^4x' = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} D_C(x-z(\tau)) v^\mu(\tau) d\tau \quad (44)$$

siendo

$$D_C(x-z) = D_R(x-z) + D_-(x-z) \quad (12) \text{ sigue que}$$

$$A_C^\mu(x) = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} D_R(x-z(\tau)) v^\mu(\tau) d\tau + 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} D_-(x-z(\tau)) v^\mu(\tau) d\tau$$

$$= A_{Ret}^\mu(x) + A_-^\mu(x) \quad (45)$$

Reemplazando (40) en (45) se tiene

$$A_{Ret}^\mu(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} [1 + \epsilon(x-z(\tau))] \cdot \delta[(x-z(\tau))^2] v^\mu(\tau) d\tau \quad (46)$$

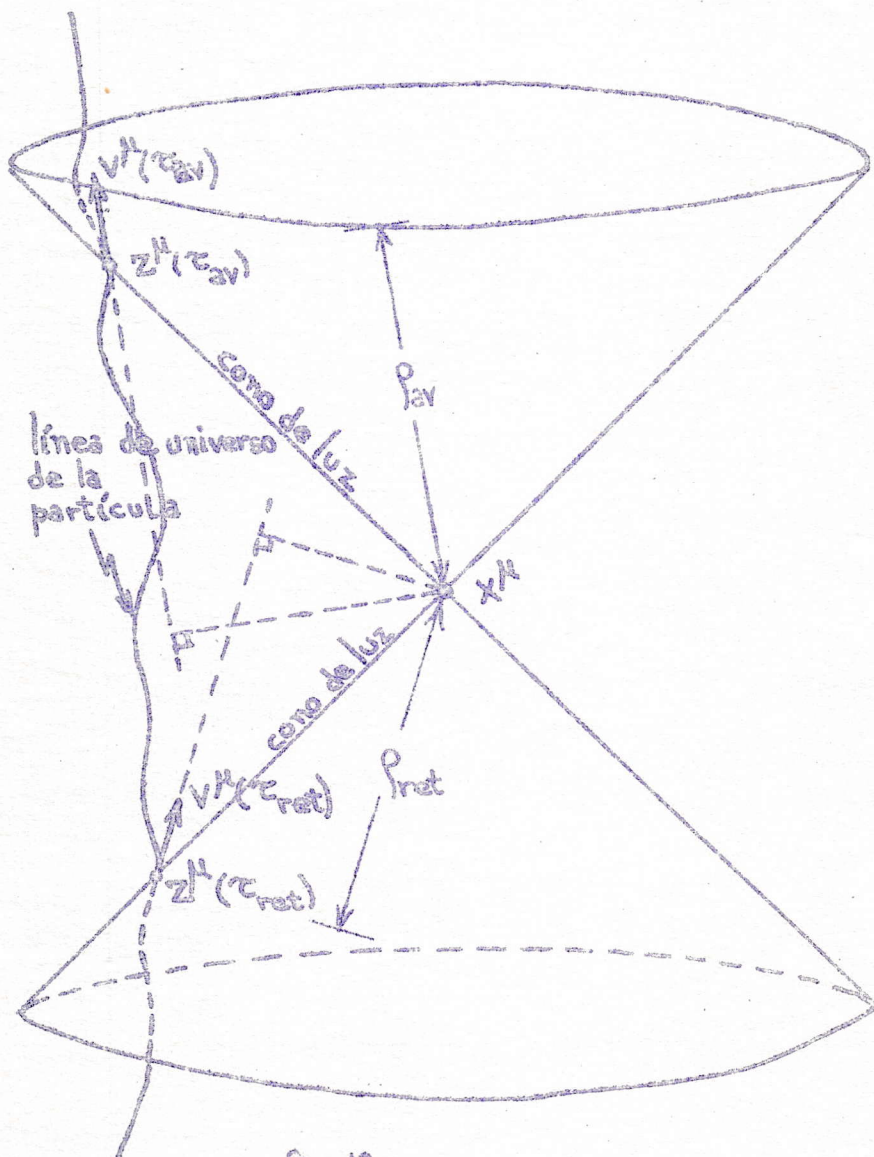
para integrar (46) necesitamos de la identidad (1)

$$\delta[g(\tau)] = \sum_j \frac{1}{|g'(\tau_j)|} \delta(\tau - \tau_j), \quad g(\tau_j) = 0 \quad (47)$$

en nuestro caso,

$$g(\tau) = (x-z(\tau))^2 = (x^\mu - z^\mu(\tau))(x_\mu - z_\mu(\tau)) \quad (48)$$

Esta función $\Theta(\tau)$ tiene solo dos ceros: los conos de luz del futuro y del pasado con vértices en X , intersectando la línea de universo $Z(\tau)$ exactamente en dos puntos, $Z(\tau_{ret})$ y $Z(\tau_{av})$ (ver Fig. 12)



Si definimos

$$A_{\mu}^{\mu}(z) = x^{\mu} - z^{\mu}(\tau), \quad z^{\mu} = 0 \text{ (vector de longitud cero)} \quad (49)$$

la derivada del argumento de la función delta es

$$g'(\tau) = 2z^{\mu} \frac{z_{\mu}}{\mu} = 2z^{\mu} v_{\mu} \quad (50)$$

El factor $1 + \epsilon(\tau)$ elimina $\tau_{\mu} v^{\mu} < 0$, de modo que según (48), (50) y (47)

$$\delta[(x-z)^2] [1 + \epsilon(x-z)] = \frac{\delta(\tau - \tau_{ret})}{|x^{\mu} v_{\mu}|} \quad (51)$$

luego,

$$A_{\mu}^{\mu}(x) = e \frac{v^{\mu}(\tau_{ret})}{|x^{\alpha} v_{\alpha}(\tau_{ret})|} \quad (52')$$

Definiendo

$$\rho_{ret} = - \frac{x^{\alpha} v_{\alpha}(\tau_{ret})}{c} > 0 \text{ (Ver fig. 12)} \quad (53)$$

Se obtiene finalmente,

$$A_{\mu}^{\mu} \text{ Ret}(x) = \frac{e}{c} \frac{v^{\mu}(\tau_{ret})}{\rho_{ret}} \quad (52)$$

Por otra parte,

$$A_{\mu}^{\mu}(x) = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} D_{\mu}(x-z(\tau)) v^{\mu}(\tau) d\tau \quad (45')$$

el reemplazo de (38) en (45) conduce a

$$A_{-}^{\mu}(z) = -e \int_{-\infty}^{\infty} E(x-z(\tau)) \delta[(x-z(\tau))'] v(\tau) d\tau + \frac{ie}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^{\mu}(\tau)}{(x-z(\tau))^2} d\tau \quad (54)$$

La primera integral de (54) la efectuamos en la misma forma de antes, obteniéndose

$$A_{-}^{\mu}(z) = -e \left(\frac{v^{\mu}(\tau_{ret})}{2|r^{\alpha} v(\tau_{ret})|} - \frac{v^{\mu}(\tau_{av})}{2|r^{\alpha} v(\tau_{av})|} \right) + \frac{ie}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^{\mu}(\tau)}{(x-z(\tau))^2} d\tau$$

Definiendo

$$\rho_{ret} \equiv \frac{r^{\alpha} v(\tau_{ret})}{c} > 0 \quad (\text{ver fig. 12}) \quad (53)$$

Se tiene

$$A_{-}^{\mu}(z) = -\frac{e}{2c} \frac{v^{\mu}}{\rho_{ret}} + \frac{e}{2c} \frac{v^{\mu}}{\rho_{av}} + \frac{ie}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^{\mu}(\tau)}{(x-z(\tau))^2} d\tau \quad (55)$$

Luego, reemplazando (52) y (55) en (45)

$$A_{c}^{\mu}(z) = \frac{e}{2c} \frac{v^{\mu}}{\rho_{ret}} + \frac{e}{2c} \frac{v^{\mu}}{\rho_{av}} - \frac{ie}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^{\mu}(\tau)}{(x-z(\tau))^2} d\tau \quad (56)$$

$$\frac{1}{2} (A_{ret}^{\mu} + A_{av}^{\mu}) - \frac{ie}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^{\mu}(\tau)}{(x-z(\tau))^2} d\tau \quad (55)$$

6.- Los campos:-

Es sabido que los campos electromagnéticos (en notación covariante) forman un tensor antisimétrico (1)

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}, \quad F^{\mu\mu} = -F^{\mu\mu} \quad (57)$$

La solución causal cuántica de la ecuación de onda encontrada en la sección 5, nos permite obtener los campos respectivos. De acuerdo a (57) necesitamos sólo diferenciar, pero esta diferenciación no es tan elemental ya que los instantes τ_{ret} y τ_{av} dependen de X .

La diferenciación con respecto a x^{μ} de (49) y el uso de (53^o) conduce a

$$r_{\nu} (\partial^{\nu} - v^{\nu} \partial_{\mu} \tau) = 0$$

$$\partial_{\mu} \tau = \frac{\partial \tau}{\partial x^{\mu}} = \frac{r_{\mu}}{c} \left(\frac{ret}{av} \right) \quad (58)$$

usando (58) y (53^o) se encuentra que

$$\partial_{\mu} \rho = \frac{1}{c} v_{\mu} + \frac{r_{\mu}}{\rho} \left(1 + \frac{\partial \tau}{c^2} \right) \left(\frac{ret}{av} \right) \quad (59)$$

donde se ha definido

$$a_{r} = \frac{\alpha}{\partial_{ret}} \quad (60)$$

Con los resultados (58) y (59) pueden ahora calcularse las derivadas de los potenciales

$$A^{\nu}_{ret} = \frac{e}{c} \frac{v^{\nu}}{\rho} \left(\frac{ret}{av} \right) ?$$

$$\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial A^{\nu}} \text{ret}(x) = \frac{e}{c\rho} a^{\nu} \partial^{\mu} \tau - \frac{e}{c\rho^2} v^{\nu} \partial^{\mu} \rho$$

$$\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial A^{\nu}} \text{ret}(x) = \frac{e}{c\rho} a^{\nu} \left(+ \frac{r^{\mu}}{c\rho} \right) - \frac{e}{c\rho^2} v^{\nu} \left(+ \frac{r^{\mu}}{c} + \frac{r^{\mu}}{\rho} \left(1 + \frac{\rho a^2}{c^2} \right) \right)$$

es decir,

$$\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial A^{\nu}} \text{ret}(x) = - \frac{e}{c^2 \rho^2} a^{\nu} r^{\mu} + \frac{e}{c^2 \rho^2} v^{\nu} r^{\mu} - \frac{e}{c\rho} v^{\nu} a^{\mu} \left(1 + \frac{\rho a^2}{c^2} \right) \quad (61)$$

de modo que, según (57),

$$\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial A^{\nu}} \text{ret}(x) = \frac{1}{c\rho^3} (v^{\mu} r^{\nu} - v^{\nu} r^{\mu}) + \frac{e}{c^3 \rho^2} a_{\nu} (v^{\mu} r^{\nu} - v^{\nu} r^{\mu}) + \frac{e}{c^2 \rho^2} \left(\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) \left(\frac{r^{\mu}}{\rho} \right) \quad (62)$$

o bien,

$$\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial A^{\nu}} \text{ret}(x) = \frac{2e}{\rho^2} \left\{ \frac{v^{\mu} r^{\nu}}{c} - \frac{v^{\nu} r^{\mu}}{\rho} \right\} + \frac{2e}{\rho} \frac{a_{\nu}}{c^2} \left\{ \frac{v^{\mu} r^{\nu}}{c} - \frac{v^{\nu} r^{\mu}}{\rho} \right\} + \frac{2e}{\rho} \left\{ \frac{\partial^{\mu\nu}}{c^2} \frac{r^{\mu}}{\rho} \right\} \quad (63)$$

donde se ha usado la notación: $\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} b^{\mu} = \frac{1}{2} (a^{\mu\nu} b^{\nu} - a^{\nu\mu} b^{\mu})$

Las cantidades $a^{\mu}, v^{\mu}, \frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}$ deben referirse a los puntos retardado y avanzado respectivamente.

Por otra parte,

$$\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^{\nu}(\tau)}{r^2} d\tau = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^{\mu} v^{\nu}(\tau) - v^{\nu}(\tau) x^{\mu})}{(r^2)^2} d\tau \quad (64)$$

$$\frac{\partial^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} [x^2]^{-1} = - [x^2]^{-2} \partial^{\mu\nu} x^2 = -2 x^{\nu} \partial^{\mu} x^{\nu} - 2 x^{\mu} \partial^{\nu} x^{\nu} = -2 \frac{x^{\mu} x^{\nu}}{x^4}$$

Entonces,

$$F_c^{(\mu)}(x) = \frac{1}{2} \left(F_{ret}^{(\mu)}(x) + F_{av}^{(\mu)}(x) \right) - \frac{4ie}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{[x]^\mu - [z]^\mu(\tau)}{x - z(\tau)} \right) v_j(\tau)}{(x - z(\tau))^4} d\tau \quad (65)$$

con $F_{ret}^{(\mu)}(x)$ dadas por (63).

En conclusión, mientras que en un análisis totalmente clásico en que se emplea la función de Green retardada D_R se obtiene una dependencia de los campos solamente de la posición retardada, ahora se tienen campos $F_c^{(\mu)}(x)$ que dependen de toda la historia de la partícula. En la práctica, la integral en (65) depende principalmente de todos aquellos puntos de la línea de universo que no están muy lejos del presente absoluto respecto a X pues a grandes distancias la contribución del integrando es relativamente menor.

Aparentemente, según se deduce de (66), trabajar clásicamente con D_C no es la solución a la inconsistencia que se encuentra en la teoría clásica; quizás un estudio detallado de la integral nos muestre que la parte que corresponde al futuro desaparece, lo que es poco probable, el problema en todo caso queda abierto. Nuestra intención era llegar a establecer una ecuación de movimiento de la forma

$$m a^\mu(\tau) = \frac{e}{c} F_c^{(\mu)}(z) v_j(\tau) + F_{ext}^\mu$$

como sucede para $F_{ret}^{(\mu)}(z)$ (ver (5)); para ello necesitaríamos el valor de $F_c^{(\mu)}(x)$ en la línea de universo de la carga puntual y según se aprecia en (66) la dependencia de toda la historia de la partícula es inevitable.

Probablemente el Principio de Correspondencia bien aplicado conduzca de la teoría cuántica con D_C a la teoría clásica con D_R

lo cual significaría que la teoría clásica está correcta; pero ya se mencionó que ella es inconsistente; el panorama se tornaría aún más oscuro. De todos modos, que lo anterior acontezca no es tan claro pues no hay una transición continua entre las funciones D_C y D_R .

REFERENCIAS

1. F. Rohrlich. "Classical Charged Particles", Addison-Wesley, 1965.
2. J.M. Jauch y F. Rohrlich, "The Theory of Photons and Electrons", Addison-Wesley, 1955.
3. R.P. Feynman. Phys. Rev. 76, 749 (1949).
4. J.D. Bjorken y S.D. Drell. "Relativistic Quantum Mechanics", Mc. Graw-Hill, 1964.
5. C.A. López. Nuovo Cimento 1, 527 (1971).