



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

## **RIGIDEZ A FLEXIÓN EN CABLES: ANÁLISIS NUMÉRICO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

**SEBASTIÁN ANDRÉS PINO VIDAL**

PROFESOR GUÍA:  
JUAN FELIPE BELTRÁN MORALES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
RAFAEL OMAR RUIZ GARCÍA  
RICARDO ANTONIO HERRERA MARDONES

SANTIAGO DE CHILE  
2021

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL  
POR: SEBASTIÁN ANDRÉS PINO VIDAL  
FECHA: DICIEMBRE 2021  
PROF. GUÍA: SR. JUAN FELIPE BELTRÁN MORALES

## RIGIDEZ A FLEXIÓN EN CABLES: ANÁLISIS NUMÉRICO

El presente trabajo de título tiene por objetivo realizar un análisis numérico del fenómeno de variación de rigidez a flexión en cables metálicos con daño asimétrico. Para el desarrollo del presente, se extiende el modelo numérico de elementos finitos desarrollado por Tomás Bravo en su trabajo de título para optar al grado académico de Ingeniero Civil de la Universidad de Chile (Bravo Tetlak, 2018), incorporando la posible variación de rigidez a flexión, debido a la flexión inducida por el daño asimétrico.

El fenómeno de variación de rigidez a flexión tiene su origen en el deslizamiento relativo entre alambres de un cable, el cual ocurre cuando éste presenta curvaturas por sobre un nivel denominado *curvatura crítica*. El deslizamiento relativo entre alambres invalida la hipótesis de viga Euler-Bernoulli, clave para la modelación de la cinemática de deformación de los elementos finitos, denotados elementos viga-cable.

En el siguiente trabajo se realiza una revisión de los modelos presentes en la literatura para cuantificar el efecto de variación de rigidez a flexión, logrando implementar el deslizamiento relativo entre alambres, generando un modelo *Stick-Slip* que permite ingresar una geometría de cable de aluminio o acero, una distribución de daño, y que obtiene como resultado el estado de deslizamiento de cada elemento finito según sus planos principales, junto con una cota inferior de la curva de capacidad del cable, considerando el posible deslizamiento relativo entre alambres.

Para los diferentes cables estudiados, se comparan y validan las curvas de capacidad según las respuestas teóricas tanto del modelo existente, como del modelo *Stick-Slip* desarrollado en este trabajo, con resultados experimentales según ensayos realizados previamente por Fernanda Núñez en su trabajo de título (Núñez Jorquera, 2018).

A partir del presente trabajo se permite concluir que el fenómeno de variación de rigidez a flexión induce una flexibilización en la curva de capacidad, la cual se desarrolla tanto en el rango lineal, como en el no lineal, según las leyes constitutivas consideradas para acero galvanizado y aluminio. Se concluye a partir del cálculo de rigidez lineal equivalente ( $K_{Leq}$ ), que al comparar el modelo previo con el modelo *Stick-Slip* desarrollado en este trabajo, existe una variación entre 9.7 y 41.3 % dependiendo del diámetro, material y nivel de daño; además de una variación máxima en el índice de daño ( $D_r$ ) de un 17.2 %. Con los resultados obtenidos, se evidencia que el modelo *Stick*, en comparación al modelo *Stick-Slip*, obtiene una respuesta mecánica del cable con mayor capacidad en término de fuerza máxima, tenacidad y rigidez, a través de las curvas de capacidad resultantes. Sin embargo, el modelo *Stick* sigue siendo una buena aproximación para la respuesta mecánica del cable.

*A mi Padre.*

# Agradecimientos

Agradezco a mi esposa, mis padres y hermanos por apoyarme durante todo el proceso de formación profesional. Agradezco a Dios por poder conocer a grandes personas y amigos durante estos años de estudio. Y también presento mi agradecimiento al profesor Juan Felipe Beltrán por su apoyo, compromiso y por guiarme en el desarrollo del presente trabajo de título.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.2.1. Objetivo general . . . . .	2
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	2
1.3. Alcances . . . . .	2
1.3.1. Capítulo I: Introducción . . . . .	3
1.3.2. Capítulo II: Revisión bibliográfica . . . . .	3
1.3.3. Capítulo III: Variación de la rigidez a la flexión: Aplicación cables metálicos . . . . .	3
1.3.4. Capítulo IV: Análisis numérico . . . . .	3
1.3.5. Capítulo V: Conclusiones . . . . .	3
1.4. Metodología . . . . .	3
1.5. Resultados esperados . . . . .	4
<b>2. Revisión bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1. Descripción de la estructura de un cable . . . . .	5
2.2. Discusión . . . . .	6
2.3. Modelos en la literatura . . . . .	6
2.3.1. J. Lantaigne (1985) . . . . .	7
2.3.2. K.O. Papailiou (1997) . . . . .	11
2.3.2.1. Tensiones en alambres . . . . .	11
2.3.2.2. Momento y rigidez del cable . . . . .	14
2.3.3. Jean-Bernard Dastous (2005) . . . . .	16
2.3.3.1. Rigidez a flexión tangente . . . . .	16
2.3.4. Alain Cardou (2013) . . . . .	18
2.3.5. Sébastien Langlois, Frédéric Legeron y Frédéric Lévesque (2013) . . . . .	19
2.3.6. Francesco Foti y Luca Martinelli (2016) . . . . .	21
2.4. Efecto del daño asimétrico en cables . . . . .	23
2.4.1. Respuesta numérica y experimental de cables dañados asimétricamente. . . . .	24
2.5. Comentarios revisión bibliográfica . . . . .	25
<b>3. Variación de la rigidez a la flexión: Aplicación cables metálicos</b>	<b>27</b>
3.1. Ecuación momento curvatura para cables dañados asimétricamente . . . . .	29
3.2. Daño con distribución asimétrica . . . . .	33
3.3. Propiedades mecánicas . . . . .	35
3.3.1. Ley constitutiva . . . . .	35

3.3.2. Coeficiente de fricción . . . . .	37
3.4. Resultados Momento y Rigidez a flexión en función de curvatura . . . . .	38
3.5. Curvaturas en cables, modelo de elementos finitos . . . . .	43
3.6. Resultados curvaturas en cable acero 9.5 [mm] . . . . .	45
<b>4. Análisis numérico</b>	<b>51</b>
4.1. Implementación de algoritmo . . . . .	51
4.2. Cinemática de deformación y formulación de trabajo virtual . . . . .	55
4.2.1. Matriz de rigidez elástica . . . . .	57
4.2.2. Matriz de rigidez geométrica . . . . .	57
4.3. Resultados numéricos . . . . .	58
<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>
5.1. Resumen . . . . .	71
5.2. Conclusiones . . . . .	71
5.3. Limitaciones y recomendaciones de investigación futura . . . . .	72
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>
<b>A. Inercias máximas y mínimas cables con daño asimétrico</b>	<b>75</b>
<b>B. Polinomio Ley Constitutiva</b>	<b>77</b>
<b>C. Gráficos Momento y Rigidez a Flexión vs Curvatura</b>	<b>79</b>
C.1. Cable Aluminio 1x7 (1+6) diámetro 10.1 [mm] . . . . .	79
C.2. Cable Acero 1x7 (1+6) diámetro 12.7 [mm] . . . . .	82
C.3. Cable Aluminio 1x7 (1+6) diámetro 14.3 [mm] . . . . .	85
<b>D. Gráficos Curvaturas vs Longitud</b>	<b>88</b>
D.1. Cable Aluminio 1x7 (1+6) diámetro 10.1 [mm] . . . . .	88
D.2. Cable Acero 1x7 (1+6) diámetro 12.7 [mm] . . . . .	90
D.3. Cable Aluminio 1x7 (1+6) diámetro 14.3 [mm] . . . . .	92
<b>E. Matrices de rigidez</b>	<b>94</b>
E.1. Stick State . . . . .	94
E.1.1. Matriz de rigidez elástica. . . . .	94
E.1.2. Matriz de rigidez geométrica . . . . .	97
E.2. Slip State . . . . .	100
E.2.1. Matriz de rigidez elástica. . . . .	101
E.2.2. Matriz de rigidez geométrica . . . . .	104

# Índice de Tablas

3.1.	Geometría y materiales de cables ensayados. . . . .	27
3.2.	Desplazamiento del centro de gravedad en función del radio de alambre ( $r$ ). . .	34
3.3.	Datos característicos de ley constitutiva Aluminio. . . . .	35
3.4.	Datos característicos de ley constitutiva Acero. . . . .	36
3.5.	Resultados curvatura crítica según coeficiente de fricción parametrizado. . . .	39
3.6.	Resultados áreas bajo curvas momento-curvatura y rigidez a flexión-curvatura.	39
3.7.	Relación área bajo curvas momento-curvatura y rigidez a flexión-curvatura con respecto. . . . .	39
4.1.	Resultados rigidez lineal equivalente. . . . .	68
4.2.	Resultados índice de daño ( $D_r$ ) para cables. . . . .	69
A.1.	Cable 1x7, diámetro de alambre 3.1 [mm]. Inercias máximas y mínimas según ejes principales. . . . .	75
A.2.	Cable 1x7, diámetro de alambre 3.37 [mm]. Inercias máximas y mínimas según ejes principales. . . . .	75
A.3.	Cable 1x7, diámetro de alambre 4.19 [mm]. Inercias máximas y mínimas según ejes principales. . . . .	75
A.4.	Cable 1x7, diámetro de alambre 4.77 [mm]. Inercias máximas y mínimas según ejes principales. . . . .	76
B.1.	Parámetros ley constitutiva Acero galvanizado y Aluminio . . . . .	78

# Índice de Ilustraciones

1.1.	Ejemplo de falla de un cable en extremo inferior (Siegert y Brevet, 2005) . . . .	2
2.1.	Geometría de un cable (Khan, Gencturk, Shahzada, y Ullah, 2018) . . . . .	6
2.2.	Flexión de sección transversal de cable según estado de deslizamiento. a) <i>Stick State</i> . b) <i>Full Slip State</i> . . . . .	8
2.3.	Términos de rigidez a flexión según sección transversal de cable. . . . .	9
2.4.	Sección transversal del cable y alambre helicoidal (Papailiou, 1997). . . . .	11
2.5.	Diagrama de cuerpo libre, alambre en tracción (Papailiou, 1997). . . . .	13
2.6.	Tensiones en un cable para estados con y sin deslizamiento relativo entre alambre (Papailiou, 1997). . . . .	14
2.7.	Rigidez a flexión del cable en función de su curvatura (Papailiou, 1997). . . . .	15
2.8.	Comparativa entre rigidez a flexión secante y tangente (Dastous, 2005). . . . .	17
2.9.	Superficie de contacto elíptica (Paradis y Légeron, 2011) . . . . .	19
2.10.	Desplazamientos del cable según resultados experimentales y numéricos (Langlois, Legeron, y Lévesque, 2013). . . . .	20
2.11.	Comparativa de desplazamientos de resultados numéricos normalizados por mediciones experimentales (Langlois et al., 2013). . . . .	20
2.12.	Segmento infinitesimal del cable: (a) Deformación axial; (b) Curvatura por flexión. (Foti y Martinelli, 2016a). . . . .	21
2.13.	Condiciones de contacto: (a) Contacto entre alambres de una misma capa; (b) Contacto radial entre alambres de distintas capas. (Foti y Martinelli, 2016a) . .	22
2.14.	Sección transversal de un cable con daño asimétrico. a) 1 alambre dañado. b) 2 alambres dañados. . . . .	23
2.15.	Cargas sinusoidales biaxiales (Beltrán et al., 2018). . . . .	23
2.16.	Curvas de capacidad de cables dañados con y sin daño, resultados experimentales y de modelo numérico. a) Cable acero 9.5 [mm]. b) Cable acero 12.7 [mm]. . .	25
3.1.	Daño máximo para configuraciones de cable acero (Inostroza Correa, 2021). . .	28
3.2.	Gráfico momento vs curvatura (Cardou, 2013). . . . .	29
3.3.	Gráfico momento vs curvatura bilineal (Cardou, 2013). . . . .	30
3.4.	Sección transversal del cable, sistema de referencia local y global. . . . .	32
3.5.	Comportamiento bilineal de flexión según estado de deslizamiento. . . . .	33
3.6.	Variación centro de gravedad por daño asimétrico. . . . .	34
3.7.	Ley Constitutiva aluminio. . . . .	35
3.8.	Ley Constitutiva Acero. . . . .	36
3.9.	Gráfico momento vs curvatura con coeficiente de fricción parametrizado, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 1. . . . .	38
3.10.	Gráfico rigidez a flexión vs curvatura con coeficiente de fricción parametrizado, cable acero diámetro 9.5 mm, daño 1. . . . .	38
3.11.	Daño 1: Momento en eje Z-Z, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	40



3.12.	Daño 1: Momento en eje Y-Y, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	40
3.13.	Daño 2: Momento en eje Z-Z, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	40
3.14.	Daño 2: Momento en eje Y-Y, Cable diámetro 9.5mm. . . . .	41
3.15.	Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	41
3.16.	Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	42
3.17.	Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	42
3.18.	Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	43
3.19.	Definición de grados de libertad y esfuerzos nodales. . . . .	44
3.20.	Daño 1: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	46
3.21.	Daño 1: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	46
3.22.	Daño 2: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	47
3.23.	Daño 2: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	47
3.24.	Daño 1: Curvatura en eje Y-Y normalizada, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	48
3.25.	Daño 1: Curvatura en eje Z-Z normalizada, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	48
3.26.	Daño 2: Curvatura en eje Y-Y normalizada, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	49
3.27.	Daño 2: Curvatura en eje Z-Z normalizada, Cable diámetro 9.5 [mm]. . . . .	49
4.1.	Algoritmo numérico, (Bravo Tetlak, 2018). . . . .	52
4.2.	Diagrama de flujo según hipótesis de deslizamiento. . . . .	53
4.3.	Diagrama de flujo algoritmo <i>Stick-Slip state</i> . . . . .	54
4.4.	Sección transversal del cable, sistema de referencia local y global. . . . .	56
4.5.	Daño 1: Deslizamiento de elementos finitos. . . . .	58
4.6.	Curva de capacidad modelo Stick-Slip cable acero diámetro 9.5 [mm] daño 1. . . . .	59
4.7.	Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 1 . . . . .	60
4.8.	Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 2. . . . .	60
4.9.	Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable aluminio diámetro 10.1 [mm], daño 1. . . . .	61
4.10.	Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable aluminio diámetro 10.1 [mm], daño 2. . . . .	61
4.11.	Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable acero diámetro 12.7 [mm], daño 1. . . . .	61
4.12.	Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable acero diámetro 12.7 [mm], daño 2. . . . .	62
4.13.	Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable aluminio diámetro 14.3 [mm], daño 1. . . . .	62
4.14.	Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable aluminio diámetro 14.3 [mm], daño 2. . . . .	62
4.15.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 1. . . . .	63
4.16.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 1, dominio acotado. . . . .	64
4.17.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 2. . . . .	64
4.18.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 2, dominio acotado. . . . .	65

4.19.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable aluminio diámetro 10.1 [mm], daño 1. . . . .	65
4.20.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable aluminio diámetro 10.1 [mm], daño 2. . . . .	66
4.21.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 12.7 [mm], daño 1. . . . .	66
4.22.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 12.7 [mm], daño 2. . . . .	67
4.23.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable aluminio diámetro 14.3 [mm], daño 1. . . . .	67
4.24.	Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable aluminio diámetro 14.3 [mm], daño 2. . . . .	68
4.25.	Índice de daño según modelos Stick y Stick-Slip para cables estudiados. . . . .	70
C.1.	Daño 1: Momento en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 10.1 [mm]. . . . .	79
C.2.	Daño 1: Momento en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 10.1 [mm]. . . . .	80
C.3.	Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 10.1 [mm]. . . . .	80
C.4.	Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 10.1 [mm]. . . . .	80
C.5.	Daño 2: Momento en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 10.1 [mm]. . . . .	81
C.6.	Daño 2: Momento en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 10.1 [mm]. . . . .	81
C.7.	Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 10.1 [mm]. . . . .	81
C.8.	Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 10.1 [mm]. . . . .	82
C.9.	Daño 1: Momento en eje Z-Z, cable acero diámetro 12.7 [mm]. . . . .	82
C.10.	Daño 1: Momento en eje Y-Y, cable acero diámetro 12.7 [mm]. . . . .	82
C.11.	Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable acero diámetro 12.7 [mm]. . . . .	83
C.12.	Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable acero diámetro 12.7 [mm]. . . . .	83
C.13.	Daño 2: Momento en eje Z-Z, cable acero diámetro 12.7 [mm]. . . . .	83
C.14.	Daño 2: Momento en eje Y-Y, cable acero diámetro 12.7 [mm]. . . . .	84
C.15.	Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable acero diámetro 12.7 [mm]. . . . .	84
C.16.	Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable acero diámetro 12.7 [mm]. . . . .	84
C.17.	Daño 1: Momento en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 14.3 [mm]. . . . .	85
C.18.	Daño 1: Momento en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 14.3 [mm]. . . . .	85
C.19.	Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 14.3 [mm]. . . . .	86
C.20.	Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 14.3 [mm]. . . . .	86
C.21.	Daño 2: Momento en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 14.3 [mm]. . . . .	86
C.22.	Daño 2: Momento en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 14.3 [mm]. . . . .	87
C.23.	Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 14.3 [mm]. . . . .	87
C.24.	Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 14.3 [mm]. . . . .	87
D.1.	Daño 1: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 10.1 [mm]. . . . .	88
D.2.	Daño 1: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 10.1 [mm]. . . . .	89
D.3.	Daño 2: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 10.1 [mm]. . . . .	89
D.4.	Daño 2: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 10.1 [mm]. . . . .	89
D.5.	Daño 1: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 12.7 [mm]. . . . .	90
D.6.	Daño 1: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 12.7 [mm]. . . . .	90
D.7.	Daño 2: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 12.7 [mm]. . . . .	91
D.8.	Daño 2: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 12.7 [mm]. . . . .	91
D.9.	Daño 1: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 14.3 [mm]. . . . .	92
D.10.	Daño 1: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 14.3 [mm]. . . . .	92

D.11. Daño 2: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 14.3 [mm]. . . . .	93
D.12. Daño 2: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 14.3 [mm]. . . . .	93

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Los cables forman parte de diversos sistemas estructurales, siendo en muchas ocasiones un elemento crítico para la transmisión de cargas, como por ejemplo en grúas, sistemas portuarios, puentes colgantes, ascensores, torres de alta tensión, entre otros. Aunque primeramente un cable es destinado para la transmisión de esfuerzos axiales, para cierta estructuración, condiciones de daño en la sección transversal y materialización de sus apoyos, sus componentes también pueden estar sometidos a flexión y torsión.

Estos elementos generalmente poseen una alta flexibilidad y esbeltez, por lo que pueden experimentar curvaturas ante cargas de servicio, ya sean estáticas y/o dinámicas. En particular, los cables pueden ser excitados a grandes amplitudes de desplazamiento mediante pequeñas vibraciones, asociadas a vientos, tráfico, sismos, etc. Estas vibraciones pueden inducir fatiga en los elementos debido a los esfuerzos cíclicos provocados, y a la vez, cambios en la curvatura del cable, lo que puede inducir un desplazamiento relativo entre los alambres del cable generando fricción, y, por lo tanto, incorporando amortiguamiento y daño al sistema (Foti y Martinelli, 2016b).

Un ejemplo de falla por fatiga en cables se presenta en la Figura 1.1 (Siegert y Brevet, 2005), donde se observa un cable de un puente colgante desmantelado luego de 20 años de servicio. Este fenómeno, estudiado por diversos autores, se debe a la existencia de *capa límite*, es decir, una zona cercana a los apoyos del cable en la cual los esfuerzos de flexión aumentan considerablemente debido a la condición de borde dada por el apoyo, tal como desarrolla Matías Hofer (Hofer Jaramillo, 2020). Este aumento de curvaturas en sectores cercanos a los apoyos puede inducir que se produzca deslizamiento relativo entre los alambres del cable, lo cual causaría una disminución de la rigidez a flexión de éste, por lo que resulta de gran importancia determinar la influencia de esta variación de rigidez a flexión en el comportamiento mecánico de cables.

En este trabajo se realiza un análisis numérico de la variación de la rigidez a flexión según la curvatura desarrollada por cables con daño asimétrico cargados axialmente. Se considera el estado de tensión/deformación del alambre producto del deslizamiento relativo, incluyendo la fricción entre alambres. Se cuantifica el efecto de la fricción y el deslizamiento relativo entre

alambres a través de la curva de capacidad de cables de acero y aluminio. Para este propósito se extiende el modelo numérico desarrollado por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018), tomando en consideración las variaciones en la rigidez a flexión que pueden presentar los elementos finitos en que el cable se discretiza.



Figura 1.1: Ejemplo de falla de un cable en extremo inferior (Siegert y Brevet, 2005)

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

Estudiar numéricamente la variación de la rigidez a flexión de cables en función de la curvatura de éstos, considerando la potencial fricción generada por el desplazamiento relativo entre los alambres que conforman el cable.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Realizar revisión bibliográfica, seleccionando el modelo a considerar para estudiar la variación de la rigidez a flexión de cables.
- Realizar revisión del modelo determinado, evaluar variaciones y consideraciones, con el fin de adaptar el modelo al desarrollado por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018) a un modelo que considere el eventual deslizamiento relativo entre alambres.
- Cuantificar el efecto de la variación de la rigidez en flexión en la respuesta estática de cables dañados asimétricamente. Para este efecto se extiende el modelo desarrollado por Bravo (Bravo Tetlak, 2018) implementando la potencial variación de la rigidez a flexión de cables.

## 1.3. Alcances

### **1.3.1. Capítulo I: Introducción**

En el capítulo introductorio se describen los aspectos generales del estudio realizado, presentando el resumen, motivación, objetivos generales y específicos, y el alcance de los capítulos que componen el trabajo de título.

### **1.3.2. Capítulo II: Revisión bibliográfica**

En esta sección se presenta una revisión de la literatura pertinente al estado del arte sobre el tema en cuestión. Se estudian y comparan distintos autores que presentan modelos para describir y cuantificar la variación de la rigidez a flexión en cables, generando las bases para el desarrollo e implementación del modelo presente en este trabajo de título. Además, se presentan los efectos del daño asimétrico en cables multicapa cargados axialmente y estudios previos referentes a comparativas entre el modelo numérico desarrollado por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018) y ensayos experimentales realizados por Fernanda Núñez en su trabajo de título (Núñez Jorquera, 2018).

### **1.3.3. Capítulo III: Variación de la rigidez a la flexión: Aplicación cables metálicos**

En este apartado se desarrolla el modelo para representar la variación a flexión en cables basándose en los autores y consideraciones discutidas en la sección anterior. Se presenta el desarrollo teórico realizado para luego plantear un algoritmo que considere el posible deslizamiento entre alambres de un cable y su implementación en el programa computacional desarrollado por Tomas Bravo (Bravo Tetlak, 2018).

### **1.3.4. Capítulo IV: Análisis numérico**

En este capítulo se presentan y detallan las aplicaciones del programa computacional desarrollado, evaluando la influencia de la implementación de la variación de la rigidez a flexión en el comportamiento mecánico de cables. En particular, se cuantifica la variación del estado de tensiones-deformaciones, al considerar la potencial fricción generada por desplazamiento relativo entre alambres que conforman el cable y su variación de la rigidez a flexión, respectivamente.

### **1.3.5. Capítulo V: Conclusiones**

Esta sección presenta las conclusiones del trabajo realizado, junto con observaciones y comentarios relevantes. Además, se presentan posibles lineamientos para futuros estudios referentes al análisis numérico de cables dañados asimétricamente.

## **1.4. Metodología**

En primera instancia se revisa bibliografía pertinente al tema de estudio. Autores como J. Lanteigne (Lanteigne, 1985), K.O. Papailiou (Papailiou, 1997), Jean-Bernard Dastous (Dastous, 2005), Francesco Foti (Foti, Martinelli, y Perotti, 2016), (Cardou, 2013), Sébastien Langlois (Langlois et al., 2013) proponen modelos para describir el efecto de la variación de la

rigidez a flexión en cables, los cuales permiten generar una base teórica para el desarrollo del modelo del presente trabajo de título. Entre los distintos autores se determina el modelo que responda en mayor medida a los lineamientos presentes en el algoritmo numérico desarrollado previamente por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018); sin embargo, se realizan modificaciones al modelo determinado en la bibliografía, con el fin de cumplir los objetivos propios del estudio de la memoria a desarrollar.

Una vez determinado el modelo, al comparar distintos autores y realizar modificaciones correspondientes, se desarrolla e implementa el algoritmo numérico en el modelo presentado por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018) de cables con daño asimétrico en su sección transversal.

Al implementar el fenómeno en cuestión al algoritmo numérico, se realizan aplicaciones en cables de acero y aluminio abarcando diámetros de cables de 9.5 [mm] y 14.3 [mm] para comparar estos resultados con los obtenidos en el trabajo de medición experimental de tensiones-deformaciones desarrollado por Fernanda Núñez (Núñez Jorquera, 2018), así también presentado en el documento *Static response of asymmetrically damaged metallic strands: Experimental and numerical approach* (Beltrán et al., 2018), en el cual se incluyen a las mediciones experimentales los resultados de la modelación numérica realizada por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018). Finalmente, se realiza verificación del cumplimiento de los objetivos presentados, generando comentarios y conclusiones del trabajo desarrollado.

## 1.5. Resultados esperados

Cuantificar el efecto de la potencial variación de rigidez a flexión en cables de acero y aluminio, mediante la extensión del modelo numérico de cables desarrollado por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018), incorporando el efecto de fricción entre alambres y la variación de la rigidez a flexión.

# Capítulo 2

## Revisión bibliográfica

El siguiente capítulo tiene como objetivo presentar la bibliografía de interés para el análisis de rigidez a flexión en cables metálicos dañados asimétricamente. Para este motivo se realiza primeramente una revisión de los distintos autores que proponen modelos para cuantificar la variación de la rigidez a flexión de cables y la eventual pérdida de energía, relevante para un análisis cíclico, generada por la fricción producto del desplazamiento relativo entre alambres. Luego, se reporta el impacto del daño asimétrico en cables metálicos cargados axialmente, para finalizar mostrando comparativas entre resultados experimentales y teóricos estudiados en trabajos previos para la respuesta mecánica de cables con daño asimétrico.

### 2.1. Descripción de la estructura de un cable

Se consideran para el presente trabajo cables conformados por elementos continuos en el sentido longitudinal. Estos elementos, denominados alambres, se ubican alrededor del alambre núcleo, siguiendo una forma helicoidal, y, dependiendo del cable, presentando una o más capas, tal como se ejemplifica en Figura 2.1. Por lo tanto, la geometría de un cable queda determinada por el diámetro del alambre núcleo, diámetro de alambres por capas, cantidad de alambres por capa, cantidad de capas, y el ángulo hélice en que los alambres se orientan.



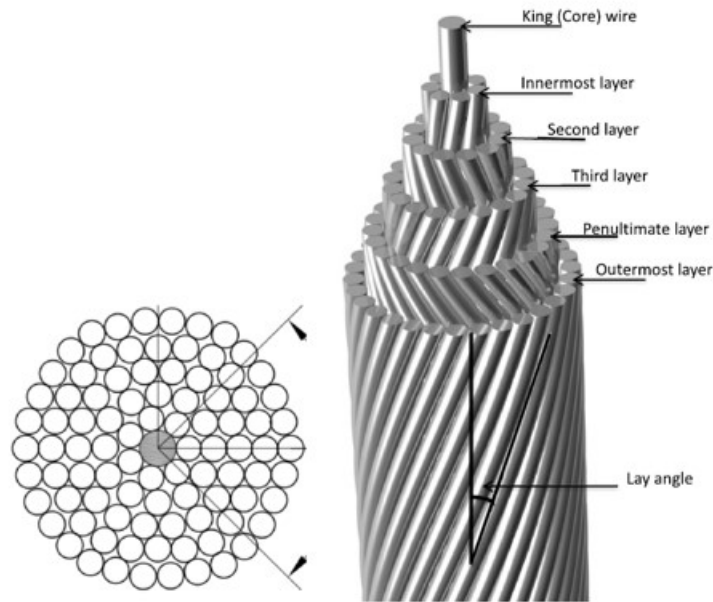


Figura 2.1: Geometría de un cable (Khan et al., 2018)

## 2.2. Discusión

Dada la amplia utilización de cables en sistemas estructurales, como elementos de transporte eléctrico, grúas, ascensores, entre otros, se propone estudiar la influencia de la variación de la rigidez a flexión en la respuesta mecánica de cables. En estudios y modelos preliminares de la respuesta de cables con daño asimétrico, se considera como hipótesis de deformación que el cable en su conjunto de alambres se deforma según una viga Euler-Bernoulli, donde las secciones transversales del cable permanecen planas al desarrollar flexión. Sin embargo, según el desarrollo de distintos autores, y también del presente trabajo, esto es válido sólo hasta cierto nivel de curvatura, denominado *curvatura crítica*.

En este sentido, la presente memoria busca extender el modelo desarrollado por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018), donde se expone un modelo numérico de elementos finitos que incorpora el fenómeno del daño asimétrico en la sección transversal de cables. Este modelo, considera un término de rigidez a flexión que no depende de la curvatura, asumiendo que esta no supera el valor de curvatura crítica. Si las curvaturas del cable superaran este valor, los alambres comenzarían a deslizarse entre sí, generando una disminución de la rigidez a flexión del elemento. Por otra parte, previamente se han realizado mediciones experimentales de la respuesta estática de cables dañados asimétricamente (Beltrán et al., 2018), (Núñez Jorquera, 2018), estudios que serán considerados para evaluar la influencia de tomar en consideración la rigidez a flexión de cables como función de la curvatura, en particular al superar la curvatura crítica.

## 2.3. Modelos en la literatura

A continuación se presentan algunos autores que han realizado estudios y/o modelos sobre el tema en cuestión del presente trabajo, exponiendo principales características y conclusiones

de cada uno.

### 2.3.1. J. Lantaigne (1985)

El trabajo desarrollado por J. Lantaigne (Lantaigne, 1985) presenta una estimación teórica de la respuesta mecánica de cables ACSR (*aluminium conductor steel reinforced*) sometidos a cargas estáticas transversales, las cuales pueden inducir solicitaciones combinadas de tracción, flexión y torsión. Las hipótesis del autor son presentadas a continuación:

- Todos los alambres de una capa poseen mismo diámetro, pero pueden variar entre una capa y otra.
- El cable desarrolla pequeñas deformaciones.
- Ángulo hélice permanece constante pese a la deformación.
- El cable se somete a flexión uniforme en su longitud.
- Se asume comportamiento lineal del material.
- Considera el deslizamiento relativo entre alambres.
- El contacto radial entre alambres induce una fuerza de roce modelada según ley de Coulomb.

El autor propone dos estados en el cual puede encontrarse un cable dependiendo del nivel de curvatura que presenta. El primer estado que describe el autor, denominado en este trabajo de título como *Stick State*, se presenta cuando las curvaturas que desarrolla el cable son bajas. En este estado, los alambres del cable se encuentran en completa adherencia entre sus capas, respondiendo a la flexión solicitada mediante un trabajo en conjunto, tal como se muestra en la Figura 2.2 (a). El segundo estado se desarrolla cuando las curvaturas que presenta el cable aumentan, en este estado, denominado *Slip state*, los alambres de la capa exterior se encuentran deslizando con respecto a la capa subyacente, comenzando a trabajar de forma individual ante la solicitación de flexión, tal como se presenta en la Figura 2.2 (b). Este deslizamiento genera una disminución en la rigidez a flexión con la que el cable responde a la flexión solicitada. Debido a lo anterior, el trabajo desarrollado por J. Lantaigne se divide en dos partes; la primera enfocada en derivar las matrices de rigidez para un cable sometido a tracción, flexión y torsión para bajos niveles de curvatura, tal que no existe deslizamiento relativo entre los alambres del cable; mientras que una segunda parte del trabajo se orienta a determinar la reducción de la rigidez a flexión producto del deslizamiento relativo entre alambres, determinando el límite entre un *Stick State* y *Slip State*.

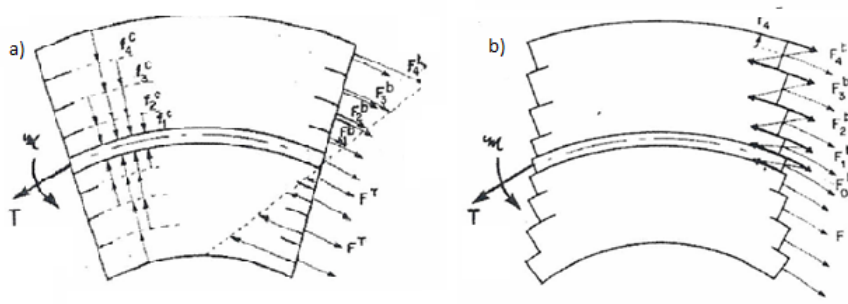


Figura 2.2: Flexión de sección transversal de cable según estado de deslizamiento. a) *Stick State*. b) *Full Slip State*.

En efecto, para el caso de pequeñas curvaturas, el autor deriva los términos de la matriz de rigidez de un cable multicapa considerando las hipótesis anteriormente mencionadas y el principio de energía potencial estacionaria en equilibrio. En particular, el término de rigidez a flexión obtenido por el autor se presenta en la ecuación 2.1.

$$EI = \sum_{i=0}^a n_i E_i A_i \frac{r_i^2 + R_i^2/2}{2} \cos^3 \beta_i \quad (2.1)$$

Los términos de la ecuación 2.1 se presentan a continuación, considerando la Figura 2.3 que ilustra la sección transversal de un cable junto a los parámetros de interés para un alambre  $i$ .

- $E_i$ : Módulo de elasticidad alambre  $i$ .
- $A_i$ : Área alambre  $i$ .
- $r_i$ : Distancia entre centro de gravedad del cable a centro de gravedad de alambre  $i$ .
- $R_i$ : Radio alambre  $i$ .
- $\beta$ : Ángulo hélice.

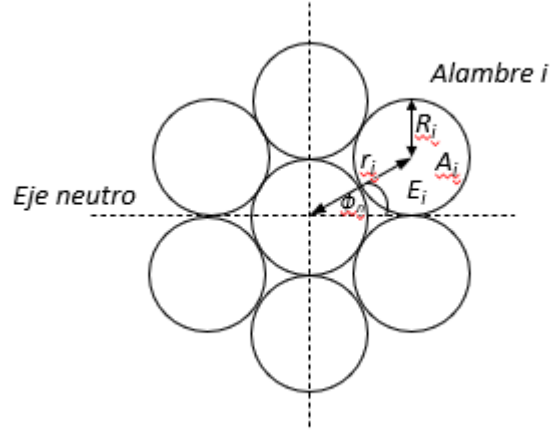


Figura 2.3: Términos de rigidez a flexión según sección transversal de cable.

A medida que se incrementan los niveles de curvatura, los alambres alcanzan tensiones cuyas fuerzas superan la fuerza de roce que impide el deslizamiento relativo entre alambres. Esta fuerza de roce depende de la presión radial que ejerce una capa con la capa subyacente del cable, por lo tanto esta presión radial es máxima en la interfaz del alambre núcleo, y es mínima entre el alambre exterior y el subyacente. Esto implica que el deslizamiento relativo comienza a partir de la capa exterior del cable. El autor determina la fuerza axial máxima  $F_i^{max}$  de un elemento ubicado en la capa  $i$  en ángulo  $\phi_n = \pi/2$ , rotación  $\Phi$  y curvatura  $\kappa$ , presentada en la ecuación 2.2, donde  $F_i^T$  corresponden a los términos de fuerza axial producto de la tracción y torsión, mientras que el término  $F_i^{f,max}$  corresponde a la fuerza axial debido a la flexión.

$$F_i^{max} = F_i^T + F_i^{f,max} \quad (2.2)$$

$$F_i^T = E_i A_i (\cos^2 \beta_i \epsilon_c + r_i \sin \beta_i \cos \beta_i \phi) \quad (2.3)$$

$$F_i^{f,max} = E_i A_i r_i \cos^2 \beta_i \kappa \quad (2.4)$$

Por lo tanto, el deslizamiento entre una capa  $i$  y la capa  $i-1$  se genera cuando la diferencia entre las fuerzas axiales de las capas comprometidas, debido a la curvatura del cable, superan la fuerza de roce, esto se traduce en la siguiente desigualdad:

$$F_i^{f,max} - F_{i-1}^{f,max} \geq \mu F_i^c \quad (2.5)$$

Donde:

- $\mu$ : Coeficiente de fricción.
- $F_i^c$ : Fuerza radial que ejerce alambre de capa  $i$  sobre alambre de capa  $i-1$ .

Para el cálculo de la fuerza radial, el autor primeramente plantea la ecuación de fuerza

por unidad de largo de un alambre, distribuida en los alambres de la capa inferior, según la ecuación 2.6, donde  $a$  es el número total de capas del cable y  $n_m$  el número de alambres de la capa  $m$ .

$$f_i^c = \sum_{m=i}^a \left( \frac{F_m^{max} \sin^2 \beta_m}{r_m} \right) \frac{n_m}{n_i} \quad (2.6)$$

Luego, se determina la distancia  $l$  entre dos puntos de contacto, según la siguiente expresión que depende del ángulo hélice  $\beta_i$ :

$$l = \frac{2\pi r_i}{n_{i-1} |\sin \beta_i|} \quad (2.7)$$

Por lo tanto la fuerza radial que genera un alambre en la capa  $i$  corresponde a:

$$F_i^c = f_i^c \cdot l \quad (2.8)$$

$$F_i^c = \frac{2\pi r_i}{n_{i-1} |\sin \beta_i|} \sum_{m=i}^a \left( \frac{F_m^{max} \sin^2 \beta_m}{r_m} \right) \frac{n_m}{n_i} \quad (2.9)$$

Con lo anterior, se puede expresar la condición de deslizamiento en la capa  $i$  con la siguiente desigualdad:

$$(E_i A_i r_i \cos^2 \beta_i - E_{i-1} A_{i-1} r_{i-1} \cos^2 \beta_{i-1}) \kappa \geq \frac{2\pi r_i \mu}{n_{i-1} |\sin \beta_i|} \sum_{m=i}^a \left( \frac{F_m^{max} \sin^2 \beta_m}{r_m} \right) \frac{n_m}{n_i} \quad (2.10)$$

De esta manera, al existir deslizamiento en la capa  $i$ , la rigidez a flexión disminuye de la ecuación presentada en 2.1, pasando a ser la expresión presentada en la ecuación 2.11, donde el primer término corresponde a la rigidez a flexión de las capas inferiores la capa  $i$ , que se encuentran en *Stick State*; mientras que el segundo término corresponde a la rigidez a flexión de las capas por sobre la capa  $i$  las cuales se encuentran en *Slip State*.

$$EI = \sum_{m=0}^{i-1} n_m E_m A_m \frac{r_m^2 + R_m^2/2}{2} \cos^3 \beta_m + \sum_{m=i}^a n_m E_m I_m \cos \beta_m \quad (2.11)$$

En el caso que todas las capas se encuentren deslizando, es decir en un *Full Slip State*, el cable alcanza una rigidez a flexión mínima, cuya expresión se obtiene a partir de la ecuación 2.11 evaluando el caso particular en que todas los alambres deslizan. Análogamente, al encontrarse en *Stick State* se puede evaluar la ecuación 2.11 para el caso particular en que ningún alambre desliza, obteniendo la rigidez a flexión máxima. Con esto se obtienen las expresiones para rigidez a flexión máxima y rigidez a flexión mínima según ecuación 2.12 y 2.13, respectivamente.

$$EI_{max} = \sum_{m=0}^a n_m E_m A_m \frac{r_m^2 + R_m^2/2}{2} \cos^3 \beta_m \quad (2.12)$$

$$EI_{min} = \sum_{m=0}^a n_m E_m I_m \cos \beta_m \quad (2.13)$$

Luego, conociendo el estado de deslizamiento, y por lo tanto la rigidez a flexión, se puede calcular el momento sobre el cable según la curvatura que éste presente.

$$M = EI \cdot \kappa \quad (2.14)$$

### 2.3.2. K.O. Papailiou (1997)

El modelo desarrollado por K.O Papailiou (Papailiou, 1997), permite tener las primeras aproximaciones a la variación de la rigidez a flexión, considerando la fricción entre alambres. Para esto, el autor realiza los siguientes supuestos:

- La rigidez del cable depende de la deformación del cable durante el ciclo de flexión, y varía en su longitud, lo que genera un proceso iterativo no lineal.
- La tracción impuesta al cable, genera una presión radial debido a la curvatura que presentan los alambres al ordenarse de forma helicoidal sobre el núcleo.
- Considera el deslizamiento relativo entre alambres, lo que genera una fuerza de roce a través de la ley de Coulomb.
- Los alambres del cable poseen una ley constitutiva lineal.
- Las secciones permanecen planas antes y después de deformarse, hasta el momento en que los alambres comienzan a deslizarse.
- La rigidez mínima del cable cuando está sometido a flexión corresponde a la suma de la rigidez a flexión de cada alambre.

#### 2.3.2.1. Tensiones en alambres

Para explicar la teoría del modelo, el autor propone comenzar con un análisis de un cable formado por una capa alrededor del alambre núcleo, donde cada elemento posee el mismo diámetro  $\delta$ , tal como se muestra en la Figura 2.4.

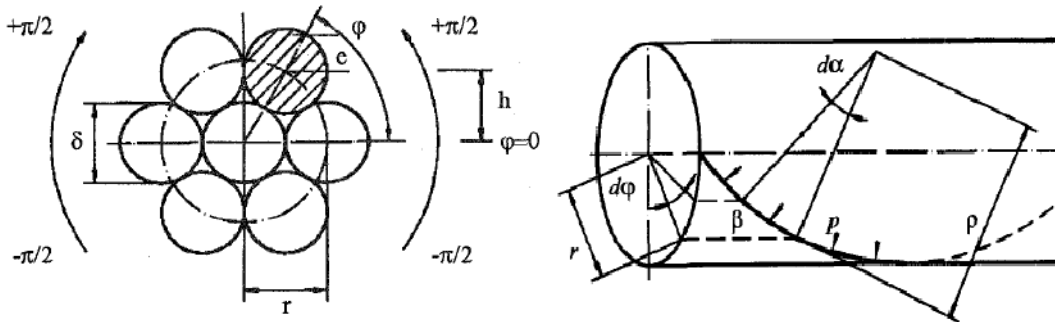


Figura 2.4: Sección transversal del cable y alambre helicoidal (Papailiou, 1997).

Realizando un análisis de la sección del cable, esta se encuentra sometida a una fuerza de tracción  $T$ , la cual causa una fuerza  $Z_T$  en cada alambre que compone el cable. Los alambres externos, tal como se presentan en los supuestos del autor, generan presiones radiales sobre los alambres ubicados en capas interiores del cable, en este caso, sobre el alambre núcleo.

Para esto se considera un tramo diferencial  $dl = \rho d\alpha$ , y por lo tanto, la presión radial ( $p$ ) viene dada por:

$$p = \frac{2Z_T \cdot \sin(d\alpha/2)}{\rho d\alpha} \approx \frac{Z_T}{\rho} \quad (2.15)$$

Donde:

- $\alpha$ : ángulo envolvente
- $\rho$ : radio de curvatura del alambre previamente a la flexión.

Por lo tanto, la carga distribuida  $p$  genera una fuerza radial  $dN$ :

$$dN = p dl = p \rho d\alpha \quad (2.16)$$

De la Figura 2.4, se pueden obtener 2 consideraciones geométricas que permiten expresar la fuerza radial en función de parámetros conocidos por la geometría del cable:

$$\sin(\beta) = \frac{r d\phi}{\rho d\alpha} \quad (2.17)$$

$$\rho = \frac{r}{\sin^2(\beta)} \quad (2.18)$$

Con estas dos expresiones, es posible determinar la fuerza radial como:

$$dN = Z_T \sin(\beta) d\phi \quad (2.19)$$

Considerando una ley constitutiva lineal del cable, es posible calcular la tracción  $Z_T$  que presenta cada elemento.

$$\frac{T}{EA} = \varepsilon_c = \frac{T}{\sum_n E_n A_n \cos^3(\beta)} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_n^T = \varepsilon_c \cos^2(\beta) = \frac{T \cos^2(\beta)}{\sum_n E_n A_n \cos^3(\beta)} \quad (2.21)$$

$$Z_T = \frac{E_n A_n \cos^2(\beta)}{\sum_n E_n A_n \cos^3(\beta)} T \quad (2.22)$$

Donde:

- $\varepsilon_c$ : deformación unitaria del cable.
- $\varepsilon_n^T$ : deformación unitaria de cada alambre.
- $Z_T$ : fuerza sobre alambre individual, debido sólo a carga axial T sobre el cable.
- $n$ : número de elementos que conforman el cable.

Cuando la curvatura del cable supera la curvatura crítica, los alambre comenzarán a deslizar. La Figura 2.5 presenta un diagrama de cuerpo libre de uno de los elementos del cable,

donde se presenta una fuerza de roce según la ley de Coulomb inducida por el deslizamiento relativo entre alambres.

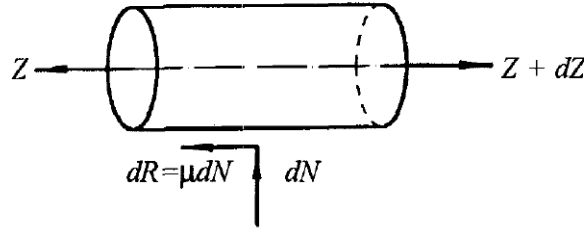


Figura 2.5: Diagrama de cuerpo libre, alambre en tracción (Papailiou, 1997).

Realizando un equilibrio de fuerzas se tiene:

$$dZ = dR = \mu dN = \mu Z \sin(\beta) d\phi \quad (2.23)$$

Integrando la ecuación 2.23, con la condición de borde  $Z(\phi = 0) = Z_T$ , se obtiene la fuerza total para cada alambre, la cual incluye tanto la fuerza dada por la carga axial aplicada sobre el cable, anteriormente denotada  $Z_T$ , como también la fuerza generada por el roce entre alambres:

$$Z(\phi) = Z_T e^{\mu \sin(\beta) \phi} \quad (2.24)$$

Por lo tanto, con las ecuaciones 2.22 y 2.24 se puede obtener la tracción adicional generada por la fricción dado el deslizamiento relativo entre alambres y directamente la tensión adicional dado el deslizamiento, considerando el área del alambre.

$$Z_{slip}(\phi) = Z(\phi) - Z_T = Z_T (e^{\mu \sin(\beta) \phi} - 1) \quad (2.25)$$

$$\sigma_{slip} = \frac{Z_{slip}(\phi)}{A} = \frac{Z_T}{A} (e^{\mu \sin(\beta) \phi} - 1) = \sigma_T (e^{\mu \sin(\beta) \phi} - 1) \quad (2.26)$$

Extendiendo este desarrollo para cables con más de una capa, la ecuación 2.25 queda dada por la siguiente expresión:

$$Z_{slip,i}(\phi) = (Z_{T,i} + S_i) (e^{\mu \sin(\beta) \phi} - 1) \quad (2.27)$$

Donde  $S_i$  corresponde a la influencia de las tracciones presentes en los alambres ubicados alrededor del alambre  $i$  analizado.

$$S_i = \sum_{j=i+1}^a 2Z_{T,j} \quad (2.28)$$

Por otro lado, el autor propone dos términos para describir las tensiones normales dada la flexión del cable. El primero,  $\sigma_{min}$ , corresponde a la tensión causada por la flexión de una



alambre alrededor de su propio eje neutro, asumiendo que la curvatura de este es igual a la curvatura del cable. Mientras que el segundo término,  $\sigma_{stick}$ , corresponde a la tensión adicional generada por la fricción en el momento del inicio de la flexión, donde esta es suficiente para impedir el deslizamiento relativo entre alambres. Estas tensiones son presentadas en Figura 2.6, según el estado de deslizamiento que presenta, y las expresiones para cada término se muestran a continuación, donde  $\kappa$  corresponde a la curvatura del cable.

$$\sigma_{min} = E \frac{\delta}{2} \kappa \quad (2.29)$$

$$\sigma_{stick} = E \kappa r \sin(\phi) \cos^2(\beta) \quad (2.30)$$

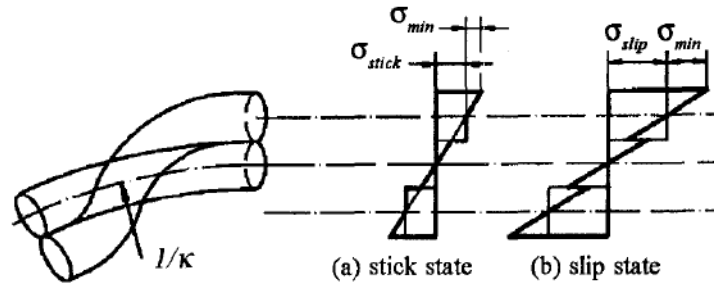


Figura 2.6: Tensiones en un cable para estados con y sin deslizamiento relativo entre alambre (Papailiou, 1997).

Una vez conocidas las tensiones para los dos estados del cable, es posible obtener el valor de la curvatura crítica, resolviendo las ecuaciones 2.26 y 2.30 para  $\kappa$ :

$$\kappa(\phi) = \sigma_T \frac{e^{\mu \sin(\beta) \phi} - 1}{E r \sin(\phi) \cos^2(\beta)} \quad (2.31)$$

Esta ecuación muestra que la curvatura crítica depende de la ubicación de los alambres ( $\phi$ ), por lo tanto, para un mismo nivel de curvatura del cable, algunos alambres pueden estar deslizando mientras que otros no.

### 2.3.2.2. Momento y rigidez del cable

Para conocer el momento del cable, es autor presenta la siguiente ecuación, la cual depende del término ( $EI$ ) correspondiente a la rigidez a flexión del cable.

$$M = EI \cdot \kappa \quad (2.32)$$

Siendo la rigidez mínima del cable, la contribución de la rigidez de cada alambre, que viene dada por la siguiente ecuación:

$$EI_{min}^{wire} = E \frac{\pi \delta^4}{64} \cos(\beta) \quad (2.33)$$

Mientras que las rigideces a flexión del cable para los casos con y sin deslizamiento relativo

son las siguientes:

$$EI_{stick}^{wire} = EA(r \sin(\phi))^2 \cos^3(\beta) \quad (2.34)$$

$$EI_{slip}^{wire} = \sigma_T A \frac{(e^{\mu \sin(\beta) \phi} - 1) r \sin(\phi) \cos(\beta)}{\kappa} \quad (2.35)$$

Con estas expresiones se pueden determinar las rigideces para cada estado del cable según su curvatura. Para el caso sin deslizamiento relativo, la rigidez a flexión es constante, y corresponde a:

$$EI_{max} = EI_{min} + EI_{stick} \quad (2.36)$$

Mientras que cuando los alambres del cable comienzan a deslizar, el valor de la rigidez depende de la curvatura, y corresponde a:

$$EI = EI_{min} + EI_{slip} \quad (2.37)$$

Con el desarrollo anterior, la rigidez a flexión del cable en función de la curvatura puede describirse a través de la Figura 2.7. El cable comienza a responder la flexión, dada una sollicitación externa, con una rigidez a flexión constante  $EI_{max}$  al tener sus alambres completamente adheridas, es decir, encontrándose en un "*Stick State*", comportándose como un sólido rígido. Al aumentar la curvatura hasta el valor de curvatura crítica, comienza una zona de "*Transition State*" la fricción entre alambres del cable no es suficiente para evitar el deslizamiento relativo entre ellas, comenzando a desplazarse una respecto a otra; inicialmente desde la capa más externa, hasta la capa más cercana al núcleo. Al seguir aumentando la curvatura del cable, comienza el "*Slip State*", donde la rigidez a flexión busca converger a un valor mínimo denotado  $EI_{min}$ . Cabe mencionar, que el término de curvatura crítica presente en el gráfico  $\kappa_{slip}$  corresponde a la curvatura promedio entre el "*Stick State*" y el "*Slip State*" del cable.

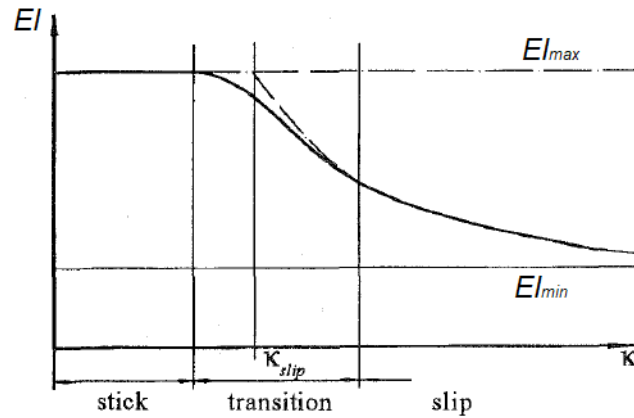


Figura 2.7: Rigidez a flexión del cable en función de su curvatura (Papailiou, 1997).

### 2.3.3. Jean-Bernard Dastous (2005)

El autor basa su desarrollo en el trabajo realizado previamente por Papailiou, extendiendo el trabajo mediante el uso de la rigidez a flexión tangente, en lugar de la rigidez a flexión secante de Papailiou e incluyendo el carácter no lineal de la geometría y el material en un modelo de elementos finitos.

En este sentido, el autor mantiene las expresiones obtenidas por las fuerzas radiales que ejercen los alambres y las tensiones que producen. La diferencia comienza con las consideraciones y el cálculo de la rigidez a flexión.

#### 2.3.3.1. Rigidez a flexión tangente

El autor propone calcular la rigidez a flexión a través de la contribución del alambre núcleo y de cada capa del cable, donde  $EI_i$  es la rigidez a flexión tangente de la capa  $i$ , que se puede descomponer en la suma de las contribuciones de cada alambre de la capa dependiendo de su estado, si se encuentra deslizando, o se encuentra adherida.

$${}^{tan}EI = EI_{core} + \sum^n EI_i \quad (2.38)$$

Donde la rigidez del alambre núcleo corresponde al siguiente término, donde  $E_c$  es el módulo de Young del alambre y  $\delta_c$  su diámetro.

$$EI_{core} = E_c \frac{\pi \delta_c^4}{64} \quad (2.39)$$

El término ( $EI$ ) para el caso *stick* es análogo que el desarrollado por Papailiou, presente en la ecuación 2.36, mientras que para el caso en que se encuentra deslizando (*slip*) corresponde a:

$$EI_i = \sum_{J=stick} EI_{ij}^{max} + \sum_{J=slip} EI_{ij}^{min} \quad (2.40)$$

Donde ( $EI_{stick}$ ) se determina según (Papailiou, 1997), mediante la ecuación 2.34.

En este punto es posible notar las diferencias presentes entre el modelo presentado por Dastous con el de Papailiou. En la Figura 2.8 donde se grafican curvas de rigidez a flexión secante y tangente en función de la curvatura para un conductor de aluminio 1796-MCM, compuesto por 1 alambre núcleo más 4 capas de 6, 12, 18 y 24 alambres respectivamente, tensionado a 20 [kN]. Se observa que utilizando la rigidez a flexión tangente, el gráfico rigidez a flexión - curvatura ( $EI-\kappa$ ) presenta una forma escalonada. Esto se debe que Dastous considera cada alambre de manera independiente, es decir, a medida que aumenta la curvatura del cable, los alambres de manera individual van alcanzando el límite de curvatura crítica, y así cada alambre del cable comienza a deslizar en un instante diferente, e inmediatamente se

cuantifica la pérdida de rigidez a flexión en el sistema. A diferencia de esto, Papailiou con su método secante de rigidez a flexión, asume como curvatura crítica de cada capa del cable el valor promedio en el que los alambres de la misma capa comienzan a deslizar, obteniendo un decaimiento suave de la curva. Por otro lado, la rigidez tangente permite alcanzar la rigidez mínima ( $EI_{min}$ ) para cierto nivel de curvatura en el sistema, tal que todos los alambres deslizan; en cambio, el método de Papailiou sólo alcanza este valor cuando la curvatura tiende a infinito.

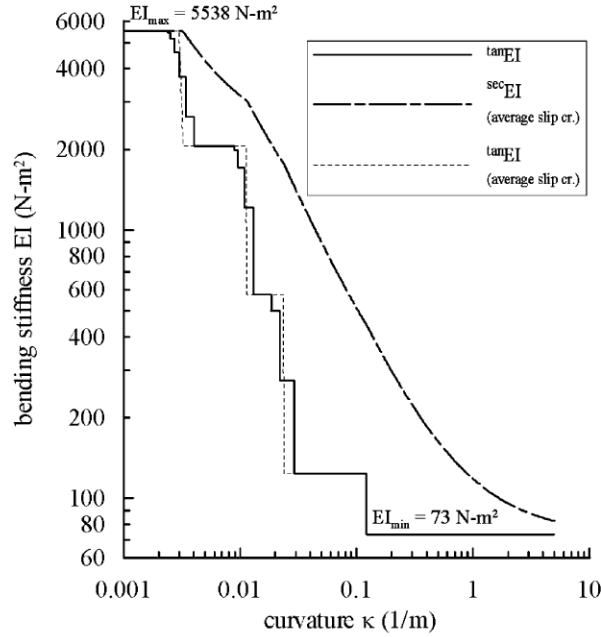


Figura 2.8: Comparativa entre rigidez a flexión secante y tangente (Dastous, 2005).

Por último, los momentos internos son calculados a partir del momento interno de cada capa, al igual que el cálculo de rigidez. Además, el cálculo de momento de cada componente depende si se encuentra deslizando o adherido.

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (2.41)$$

$$M_{ij}^{stick} = EI_{ij}^{stick} \cdot (\kappa - \kappa_{ref_{ij}}) \quad (2.42)$$

$$M_{ij}^{slip} = \sigma_{slip_{ij}} h_{ij} \cos(\beta_i) A_i \quad (2.43)$$

Donde

$$\sigma_{slip_{ij}} = \frac{Z_i + S_i}{A_i} \cdot (e^{\mu \sin(\beta) \phi} - 1) \quad (2.44)$$

Pese a lo descrito anteriormente en las diferencias de los modelos, el autor propone considerar el inicio del deslizamiento para una curvatura única por cada capa del cable, tal como

presenta Papailiou, considerando que resulta práctico para la modelación numérica, al incluir un momento interno dependiendo de la curvatura referencial anterior. Con esto, la curvatura crítica queda descrita por la siguiente expresión, la cual se debe evaluar para cada capa del cable.

$$\Delta\kappa_i = \frac{(Z_i + S_i) \sum_{j=1}^{n_i} (e^{\mu \sin(\beta)\phi} - 1) \sin(\phi_j)}{E_i A_i r_i \cos^2(\beta_i) \frac{r_i}{2}} \quad (2.45)$$

### 2.3.4. Alain Cardou (2013)

El texto presentado por el autor en (Cardou, 2013), tiene como finalidad entregar una recopilación resumida de modelos mecánicos de cables analizados en flexión que incorporan la variación de rigidez a flexión de cables, presentando ejemplos numéricos y aplicaciones de estos en Matlab. El autor presenta una comparativa de diversos autores sobre la variación de la rigidez a flexión, comparando resultado según las distintas hipótesis que cada uno considera en sus trabajos; entre estos autores se encuentran K.O. Papailiou, F. Foti, G.A Costello, entre otros. Este ejercicio comparativo entre distintos modelos permite observar de una manera preliminar la influencia numérica de las hipótesis de cada autor; herramienta útil para el desarrollo, elección e implementación de un modelo numérico según los objetivos de este trabajo.

En el capítulo 1 el autor presenta la formulación de respuesta de un cable frente a carga axial, en particular de la presión entre los alambres del cable que se generan.

El segundo capítulo presenta el caso de un cable compuesto de una sola capa de 6 alambres y un alambre núcleo, sometido a curvatura constante. En este capítulo, se muestran las propiedades mecánicas del cable, en función del estado de deslizamiento en que se encuentra. Al igual que los demás autores de la presente revisión bibliográfica, se consideran los estados *stick* y *slip*, es decir, para cierto nivel de curvatura, los alambres del cable comienzan a deslizarse relativamente. Una vez comprendido el caso de un cable simple de un alambre y una capa del capítulo 2, se realiza una extensión de este en el capítulo 3, considerando un cable con múltiples capas.

El capítulo 4 presenta una aplicación para la variación de la rigidez a flexión, con el fin de estudiar cómo se aplica el estado de deslizamiento de un cable se aplica a un caso de un cable sometido a flexión, donde su curvatura varía punto a punto.

Finalmente, el quinto capítulo se discute sobre la tensión a flexión máxima para un caso cuasi-estático para bajas amplitudes, asumiendo una rigidez a flexión constante. Se comparan resultados teóricos y resultados experimentales, y en particular se discute sobre las tensiones en las zonas cercanas a los apoyos, donde se produce un aumento en curvaturas y tensiones.

### 2.3.5. Sébastien Langlois, Frédéric Legeron y Frédéric Lévesque (2013)

El estudio realizado por (Langlois et al., 2013), tiene como finalidad modelar a través de un análisis de elementos finitos tiempo historia no lineal, los modos de vibrar de conductores eléctricos durante las vibraciones generadas por el viento, considerando la variación de la rigidez a flexión; para posteriormente comparar los resultados obtenidos numéricamente con mediciones experimentales presentes en la literatura.

Los autores presentan resultados y comparativa entre 3 hipótesis para la rigidez a flexión:

1. Rigidez a flexión constante, equivalente al 50 % del valor máximo teórico rigidez a flexión ( $EI_{max}$ ).
2. Rigidez a flexión no lineal, según Papailiou (Papailiou, 1997).
3. Rigidez a flexión no lineal, según Paradis (Paradis y Légeron, 2011).

A diferencia del modelo de Papailiou (Papailiou, 1997), el modelo desarrollado por Paradis y Legeron (Paradis y Légeron, 2011) además de considerar el contacto radial entre alambres que desarrolla Papailiou para calcular la fuerza de fricción, toma en cuenta el contacto tangencial de los alambres, es decir, el contacto entre alambres de la misma capa. Esta hipótesis de contacto genera una superficie de fricción elíptica, la cual se presenta en la Figura 2.9.

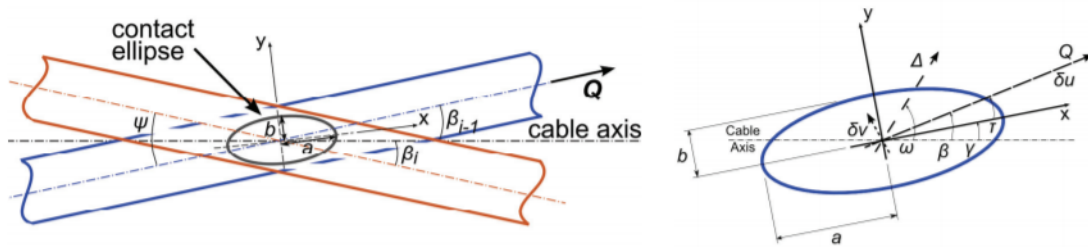


Figura 2.9: Superficie de contacto elíptica (Paradis y Légeron, 2011)

Los resultados obtenidos por los autores son presentados gráficamente en las Figuras 2.10 y 2.11; donde la Figura 2.10 presenta la deformada del cable según las distintas hipótesis de rigidez a flexión, y la Figura 2.11 muestra la deformada del cable para cada hipótesis de rigidez a flexión, normalizada con el resultado experimental.

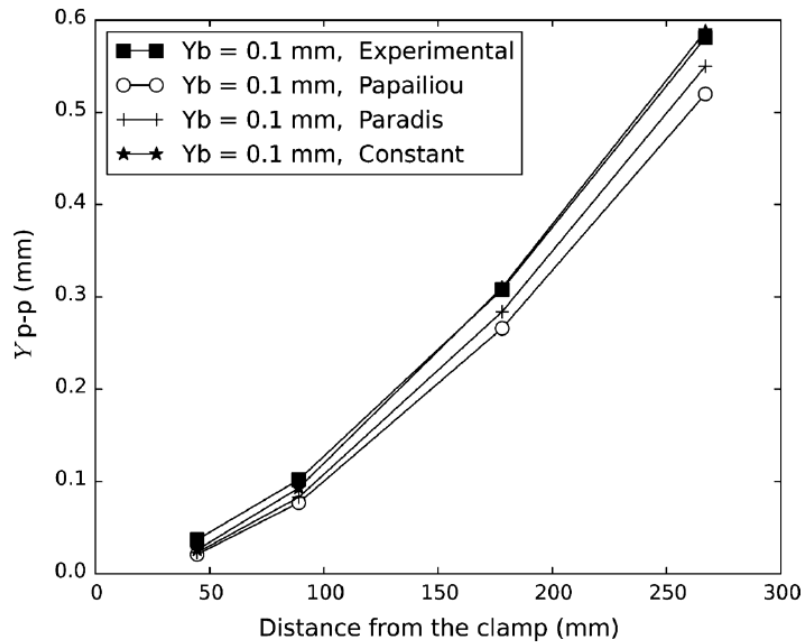


Figura 2.10: Desplazamientos del cable según resultados experimentales y numéricos (Langlois et al., 2013).

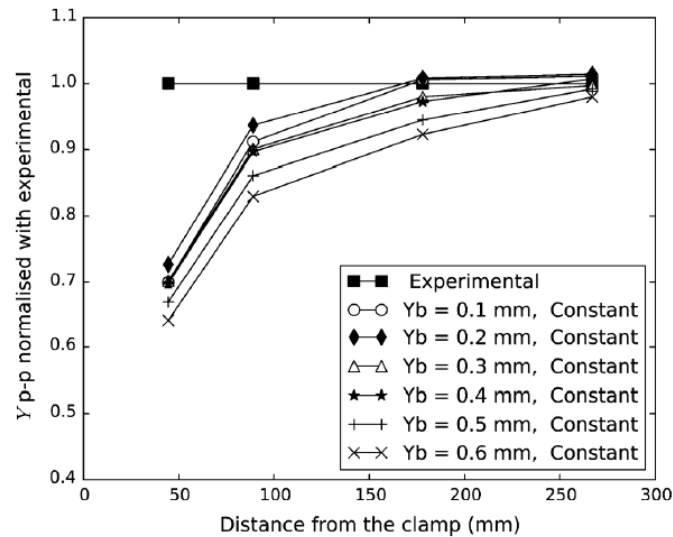


Figura 2.11: Comparativa de desplazamientos de resultados numéricos normalizados por mediciones experimentales (Langlois et al., 2013).

En función de los resultados obtenidos, los autores concluyen que el modelo de Paradis (Paradis y Légeron, 2011) presenta una mayor precisión en comparación con el resultado experimental que Papailiou (Papailiou, 1997), sin embargo, este resultado no dista en gran medida con la consideración de rigidez a flexión constante igual a  $0.5EI_{max}$  sobre un modelo con hipótesis de un cable como viga Bernoulli, es decir, considerando que el cable se mantiene en estado *stick* para todo nivel de curvatura, obteniendo resultados cercanos a las mediciones experimentales con esta hipótesis y ahorrando tiempo computacional.

### 2.3.6. Francesco Foti y Luca Martinelli (2016)

Los autores presentan un nuevo modelo para representar la variación de la rigidez a flexión en cables, incorporando una variación temporal de la respuesta del cable, permitiendo la realización de aplicaciones dinámicas.

Al igual que los demás autores presentados en la discusión bibliográfica, se presenta la importancia de la fricción que se genera entre los alambres del cable, la cual permite determinar dos estados posibles de deslizamiento: uno de completa adherencia o *full stick state* y otro donde los alambres se encuentran deslizando relativamente o *full slip state*. En el estado de completa adherencia, el cable alcanza una rigidez a flexión  $EI_{max}$ , mientras que en el estado de completo deslizamiento su rigidez a flexión disminuye hasta un valor  $EI_{min}$ .

El modelo mecánico, se realiza considerando la teoría de viga Euler- Bernoulli, por lo tanto, se asume que las secciones del cable permanecen planas y perpendiculares a la línea de deformación. De esta manera se describe la cinemática del cable, tanto su desplazamiento axial relativo, como su rotación, tal como se muestra en la Figura 2.12.

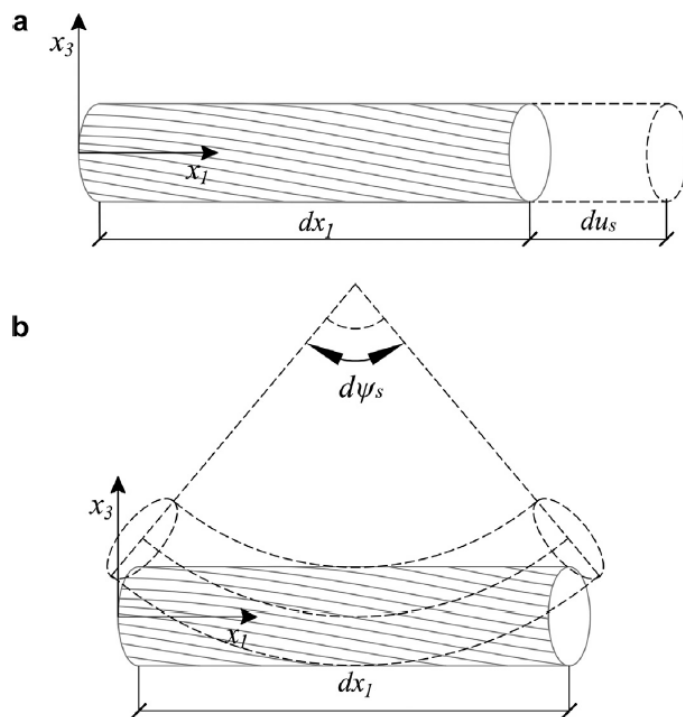


Figura 2.12: Segmento infinitesimal del cable: (a) Deformación axial; (b) Curvatura por flexión. (Foti y Martinelli, 2016a).

Dentro del desarrollo e hipótesis que proponen los autores, el límite del estado de completa adherencia *full stick state*, se obtiene a través del equilibrio de un segmento infinitesimal de un alambre del cable, considerando el roce que se genera por el deslizamiento relativo entre alambres, considerando la ley de Coulomb.



Por otro lado, la interacción entre los alambres del cable se definen de dos maneras. Un primer tipo se presenta una interacción entre alambres de una misma capa, según Figura 2.13.a, mientras que entre los alambres de distintas capas también se genera una interacción radial Figura 2.13.b, tal como presenta Papailiou (Papailiou, 1997). Sin embargo, los autores desprecian el efecto producido por la interacción entre elementos de una misma capa, siguiendo la misma línea teórica que Papailiou, considerando sólo una interacción radial entre los elementos que conforman el cable.

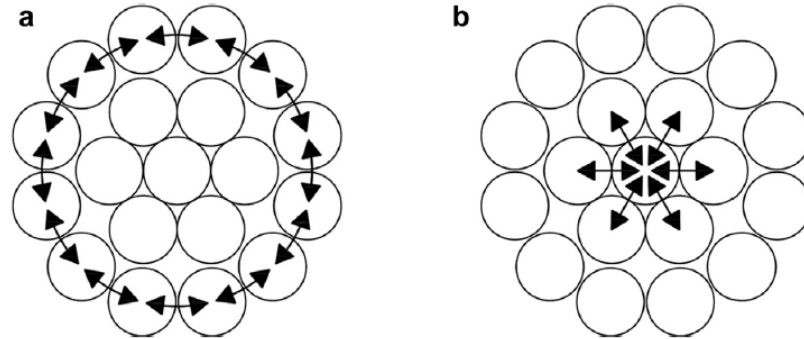


Figura 2.13: Condiciones de contacto: (a) Contacto entre alambres de una misma capa; (b) Contacto radial entre alambres de distintas capas.(Foti y Martinelli, 2016a)

En el caso de encontrarse en el estado *full stick state*, el cable es modelado como un conjunto de alambres, las cuales no interactúan entre ellas; por lo tanto, la sección transversal de cada alambre se encuentra curvada en el mismo plano de flexión que el cable. Por otra parte, al encontrarse en el estado *full stick state*, todos los alambres son consideradas como parte de una sección transversal del cable trabajando como una viga Euler-Bernoulli. En este caso, algunos alambres del cable están sujetos a un desplazamiento adicional, proporcional a la distancia del alambre con el eje horizontal del centro del cable  $x_2$ , induciendo un aumento en la distribución de tensiones de la sección transversal. Por lo tanto, durante el proceso de deformación del cable, la sección transversal se mantiene en el estado de adherencia, sólo hasta que las fuerzas internas de contacto previenen el deslizamiento relativo; cuando esta fuerza de roce no logra prevenir el deslizamiento, los alambres del cable comienzan a trabajar de forma individual, según el *full slip state*. Para este último caso, el cable es modelado como un conjunto de alambres, las cuales cumplen con la hipótesis de Euler-Bernoulli, pero estas trabajan a flexión de forma independiente, no interactuando entre ellas. Dentro esta modelación presentada por los autores, se presenta una hipótesis de deslizamiento que considera sólo dos posibles estados: *full stick state* o *full slip state*, lo cual simplifica las hipótesis de autores previos que consideran, además de estos estados, un *transition state*.

Para el cálculo de los esfuerzos en la sección transversal, se asume un comportamiento para el cable de una viga lineal elástica, considerando el esfuerzo total como la contribución de un esfuerzo lineal, relacionado a la elongación del cable, y un esfuerzo no lineal producto de la flexión. Posteriormente, para obtener la matriz de rigidez a flexión del cable, los autores proponen la utilización del método tangente, obteniendo la matriz como la pendiente punto a punto del gráfico esfuerzo vs deformación.

## 2.4. Efecto del daño asimétrico en cables

Los trabajos reportados previamente realizan análisis de la variación de la rigidez a flexión para cables multicapa sometidos a carga axial y flexión, tal que presentan flexión y curvaturas constantes a lo largo del cable. A diferencia de estos modelos, en el presente trabajo se utilizan cables multicapa de acero y aluminio que poseen una distribución de daño asimétrica, los cuales son sometidos a tracción axial.

Tal como se presenta en el texto *"Assessment of static rope behavior with asymmetric damage distribution"* (Beltrán y De Vico, 2015), la presencia de daño distribuido asimétricamente en la sección transversal de un cable multicapa sometido a una tracción axial genera una pérdida de equilibrio en las fuerzas radiales que ejerce cada alambre sobre la capa subyacente, tal como muestra la Figura 2.14. Evaluando el equilibrio en la sección transversal del cable, se obtiene una carga transversal neta que rota a lo largo del cable según el ángulo hélice de éste. J. Beltrán y E. de Vico (Beltrán y De Vico, 2015) proponen modelar la rotación de la fuerza transversal a través de cargas transversales sinusoidales biaxiales, permitiendo trabajar el problema a través de los ejes principales del cable, según se presenta en la Figura 2.15.

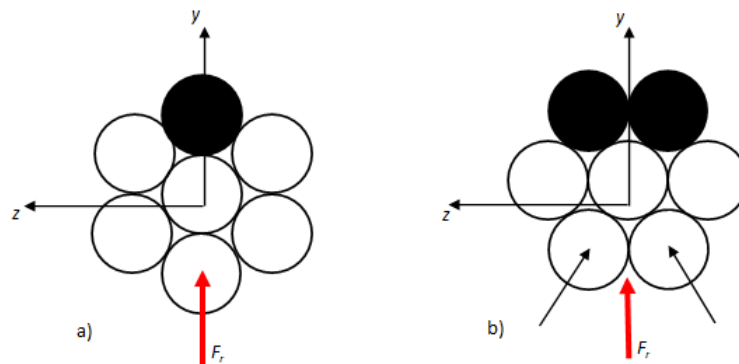


Figura 2.14: Sección transversal de un cable con daño asimétrico. a) 1 alambre dañado. b) 2 alambres dañados.

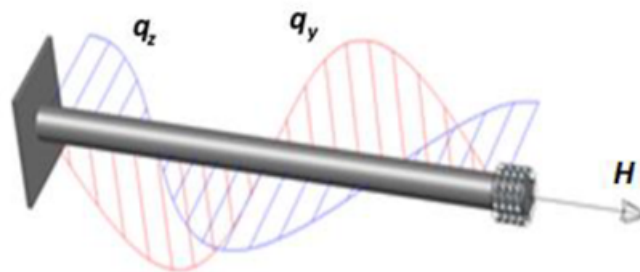


Figura 2.15: Cargas sinusoidales biaxiales (Beltrán et al., 2018).

Las cargas transversales sinusoidales biaxiales ( $q_y$  y  $q_z$ ) inducen flexión biaxial sobre el cable, que a diferencia de los modelos presentados en esta sección, esta flexión será variable a lo largo del cable y por lo tanto también las curvaturas que éste desarrolla. En este sentido, al igual que los modelos presentados, los cables a analizar se encuentran sujetos a carga axial y flexión; sin embargo, esta flexión se debe a la presencia de daño asimétrico y una fuerza de tracción sobre el cable. Esta variación de la curvatura a lo largo del cable es relevante a la hora de evaluar el estado de deslizamiento en que éste se encuentra, pudiendo existir zonas del cable que presenten curvaturas mayores a la curvatura crítica, encontrándose así en un *Slip State*, mientras que otras zonas del cable pueden presentar curvaturas menores a la crítica, encontrándose en *Stick State*.

#### **2.4.1. Respuesta numérica y experimental de cables dañados asimétricamente.**

En el estudio respuesta estática de cables dañados asimétricamente (Beltrán et al., 2018), se realiza una comparativa entre el estado tensional de cables dañados asimétricamente obtenido a partir de un modelo semi-analítico, mediciones experimentales, y un programa no lineal de elementos finitos 3D. El modelo semi-analítico presentado por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018), permite predecir la respuesta mecánica de cables con daño asimétrico. Sin embargo, esta modelación tiene como hipótesis el considerar el cable como un sólido rígido, es decir, asumiendo que el cable se encuentra completamente en *Stick State* utilizando la hipótesis de viga Euler- Bernoulli para toda la respuesta mecánica del cable. Tal como se menciona en la revisión bibliográfica, y como motivo del presente trabajo, esta hipótesis es válida siempre y cuando la curvatura del cable no supere un límite denominado curvatura crítica. Por otro lado, los resultados experimentales presentes en el documento son producto de los ensayos realizados por Fernanda Núñez, presentes en su memoria de título (Núñez Jorquera, 2018).

Considerando la hipótesis de Viga Euler-Bernoulli del modelo numérico, en el texto "*Static response of asymmetrically damaged metallic strands: Experimental and numerical approach*" (Beltrán et al., 2018) se obtienen resultados tales que permiten concluir que el modelo semi-analítico, y en particular la hipótesis de viga Bernoulli, son una buena aproximación a la respuesta mecánica experimental evidenciada para cables con daño asimétrico en su sección transversal, sometidos a carga axial. En la Figura 2.16 se presentan la comparativa entre resultados experimentales (curvas continuas) y del modelo semi-analítico (curvas segmentadas) para un cables de acero de diámetro 9.5 [mm] y 12.7 [mm] en formato 1x7.

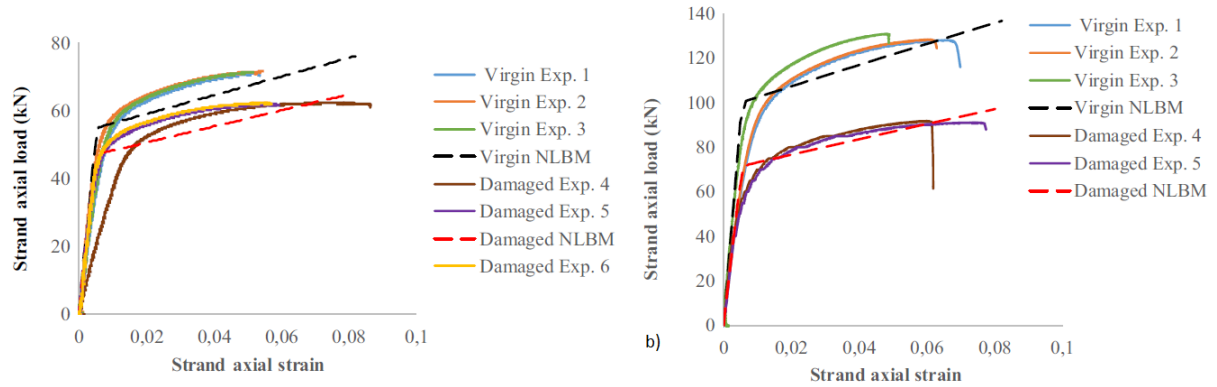


Figura 2.16: Curvas de capacidad de cables dañados con y sin daño, resultados experimentales y de modelo numérico. a) Cable acero 9.5 [mm]. b) Cable acero 12.7 [mm].

## 2.5. Comentarios revisión bibliográfica

A partir de la revisión bibliográfica realizada en este capítulo, se presentan comentarios relevantes para el desarrollo de este trabajo de título, considerando los principales lineamientos de los autores citados, el efecto del daño asimétrico en la sección transversal del cable y los resultados que se poseen experimental y numéricamente para la respuesta mecánica de cables.

- Los modelos desarrollados por los autores consideran un cable sometido a una curvatura constante en todo su largo.
- Se definen tres estados de deslizamiento: *Stick*, *Transition* y *Slip State*, que dependen de la curvatura que presenta el cable.
- Autores proponen acotar el problema despreciando el estado de transición, definiendo un valor de curvatura crítica media  $\kappa_m$  tal que al presentar curvaturas inferiores el cable se encuentra completamente en *Stick State*, mientras que si se supera este nivel de curvatura crítica media, el cable se encuentra completamente en *Slip State*.
- El deslizamiento relativo entre alambres genera una disminución en la rigidez a flexión del cable.
- Autores (Lanteigne, 1985), (Langlois et al., 2013), concluyen que el fenómeno de variación de rigidez a flexión en cables puede simplificarse para el análisis de deflexiones transversales, asumiendo que el cable trabaja en *Stick State* para todo nivel de curvatura, con una rigidez a flexión equivalente a  $0.5EI_{max}$ .
- La presencia de daño asimétrico en la sección transversal de un cable induce una flexión. Por lo tanto, al igual que en los trabajos reportados, el cable se encuentra sometido a carga axial y flexión. Sin embargo, y a diferencia de los modelos presentados, el daño asimétrico induce una flexión biaxial y variable a lo largo del cable.
- Existen evidencias (Beltrán et al., 2018), (Beltrán y De Vico, 2015), que muestran que la hipótesis de *Stick State*, con hipótesis de viga Euler-Bernoulli para toda la respuesta

mecánica del cable, es una buena aproximación para representar curvas de capacidad y distribución de tensiones y deformaciones.

# Capítulo 3

## Variación de la rigidez a la flexión: Aplicación cables metálicos

El siguiente capítulo tiene como objetivo realizar una aplicación del fenómeno de variación de rigidez a flexión en cables metálicos con daño asimétrico en su sección transversal. Tal como se reporta en el capítulo previo, el daño asimétrico junto con una carga axial inducen sobre un cable una flexión biaxial, lo cual según los autores estudiados, puede inducir una pérdida de adherencia entre alambres, disminuyendo la rigidez a flexión que posee el cable.

Por lo tanto, resulta fundamental evaluar los valores de curvatura crítica para los cables estudiados previamente, con el fin de analizar si las curvaturas alcanzadas por estos superan estos valores críticos y de este modo incorporar la variación de rigidez a flexión y la cinemática de deformación respectiva. A continuación, en Tabla 3.1, se presentan los cables ya estudiados, tanto experimental como numéricamente, los cuales serán considerados para este trabajo; presentando resultados en el cuerpo de este trabajo para cable de acero diámetro 9.5 [mm], daño 1 y 2, mientras que para los demás cables a analizar se adjuntan los resultados análogos en sección de Anexos.

Tabla 3.1: Geometría y materiales de cables ensayados.

N° de alambres	Diámetro alambre [mm]	Material	Diámetro cable [mm]	Ángulo hélice [°]
7	3.1	Acero	9.5	7.5
7	3.37	Aluminio	10.1	8
7	4.19	Acero	12.7	8
7	4.77	Aluminio	14.3	7

En este trabajo, se consideran daños de 1 y 2 alambres para cables en formato 1x7 (1 alambre núcleo y 6 alambres en la siguiente capa), considerando los comentarios presentes en el trabajo "*Estudio numérico de la distribución y evolución del daño en cables metálicos*" (Inostroza Correa, 2021). Este trabajo muestra que a partir de 3 alambres dañados en un cable 1x7 (aproximadamente el 40% del cable dañado), tanto en acero galvanizado como en aluminio, el daño adicional que acumula un cable es prácticamente el mismo, debido a que es el núcleo del cable es quien acumula la mayor parte del daño, y por lo tanto, el daño adicional necesario para hacer fallar el cable es el mismo. Estos comentarios concuerdan con criterios existentes para el reemplazo de cables dañados, como *ISO 4309: Cranes-wire*

*ropes-care and maintenance, inspection and discard, (2010)* y *Occupational Safety and Health Administration, (2021)* . Por lo tanto, para este nivel de daño un cable en servicio debe ser reemplazado, y, por lo tanto, no representa interés para los objetivos de este trabajo evaluar más de 2 alambres dañados para este tipo de cable.

En la Figura 3.1 se presentan tres curvas asociadas al daño experimentado por un cable de acero en función del número de alambres superficiales cortados. Estas curvas son: (i) daño total, la que corresponde al daño crítico (grieta se propaga en la mesoescala) que experimenta la sección del cable dañada asimétricamente; (ii) daño adicional, que corresponde al daño que es capaz de desarrollar un cable que presenta un daño inicial (número de alambres cortados) asimétrico; y (iii) daño simétrico, que corresponde al daño que es capaz de desarrollar un cable que presenta un daño inicial simétrico. Es importante mencionar, que para esta Figura, la suma del daño inicial asimétrico más el daño adicional asimétrico corresponde al valor daño crítico. La capacidad adicional o residual que tiene la sección del cable de desarrollar daño disminuye a medida que crece el número de alambres cortados (daño inicial). Esta disminución es más abrupta para el caso de daño inicial asimétrico, en que la mayor disminución se presenta hasta dos alambres cortados. Para más de dos alambres cortados, se puede considerar que la capacidad de desarrollar daño es prácticamente constante, es decir, no existe una mayor diferencia para el cable en tener más de dos alambres cortados superficialmente en términos de su capacidad de desarrollar daño. Por lo tanto, este plateau alcanzado para una condición de daño inicial de más de dos alambres cortados indica un estado de daño inestable para el cable, lo que sugiere su retiro y reemplazo. Si bien para el caso de daño inicial simétrico, no se presenta claramente esta condición de inestabilidad, un análisis de la contribución relativa del daño residual al valor del daño crítico muestra que esta curva decreciente (en términos del daño inicial) puede ser representada por una curva bilineal en que el cambio de pendiente se produce cercano a un número de alambres cortados igual a dos. Para valores menores que dos, la contribución relativa decrece más rápidamente que para valores mayores que dos. Esto implica que para valores del daño inicial mayores que dos, la reducción de la capacidad de desarrollar daño es menos significativa en su contribución al valor del daño crítico (Beltrán y Inostroza, 2021)

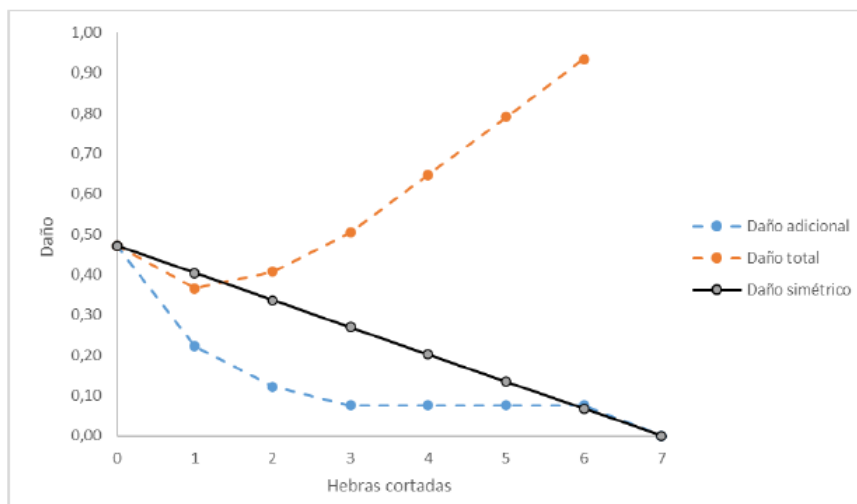


Figura 3.1: Daño máximo para configuraciones de cable acero (Inostroza Correa, 2021).

### 3.1. Ecuación momento curvatura para cables dañados asimétricamente

Para comenzar a evaluar el impacto de la variación de la rigidez a flexión para cables con daño asimétrico, se procede a determinar los gráficos momento-curvatura para los cables estudiados en “*Static response of asymerically damaged metallic strands: Experimental and numerical approach*” (Beltrán et al., 2018), también presentados en la memoria “*Influencia de la distribución del daño en curvas de capacidad de cables: Análisis experimental*” (Núñez Jorquera, 2018) y descritos en la Tabla 3.1.

Primeramente, se procede a calcular la ecuación momento curvatura para los cables en cuestión. Esta función, presentada en la Figura 3.2, permite notar 3 zonas de la curva. La zona denotada (I) corresponde a valores de curvatura inferiores a la curvatura crítica, donde el cable se encuentra en *Stick State* con una rigidez a flexión máxima ( $EI_{max}$ ), y por lo tanto la zona lineal en que la hipótesis de Bernoulli es válida para la modelación de cables realizada; mientras que la zona (II), *Full Slip State* asociada a una rigidez a flexión mínima ( $EI_{min}$ ), comienza cuando todos los alambres que conforman el cable se encuentran deslizando entre sí y, por lo tanto, el cable ya no se comporta como un sólido rígido. Entre estas zonas se encuentra una etapa de transición, donde sólo algunos alambres se encuentran deslizando entre sí.

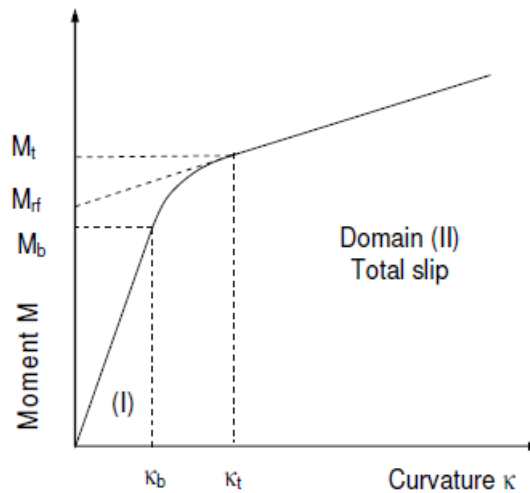


Figura 3.2: Gráfico momento vs curvatura (Cardou, 2013).

Sin embargo, para la aplicación del presente trabajo, se incorpora el modelo presentado en “*Stick-slip mechanical models for overhead electrical conductors in bending*” (Cardou, 2013), donde el gráfico presentado en Figura 3.2 se considera como una curva bilineal, tal como se muestra en la Figura 3.3, donde la curvatura crítica  $\kappa_m$  pasa a ser un valor medio ubicado en la zona de transición.



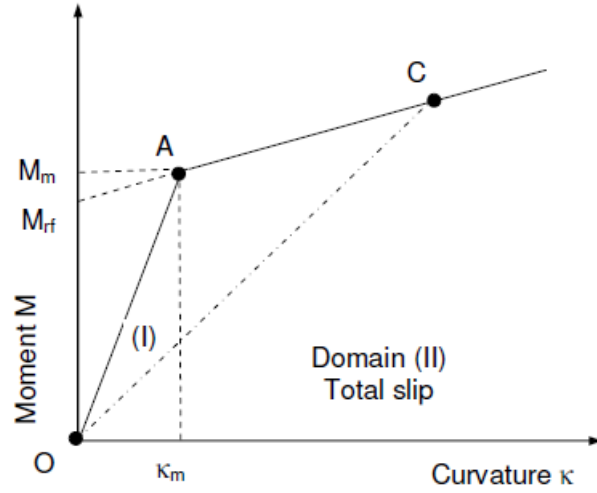


Figura 3.3: Gráfico momento vs curvatura bilineal (Cardou, 2013).

Las ecuaciones para describir este gráfico bilineal, se obtienen a partir del punto A, el cual corresponde al par curvatura media - momento medio  $(\kappa_m, M_m)$  donde se genera el cambio de estado de deslizamiento de *Stick* a *Slip* State. En este punto, se cumplen las siguientes expresiones que satisfacen ambos regímenes de deslizamiento:

$$EI_{max} \cdot \kappa_m = EI_{min}\kappa_m + M_{rf} \quad (3.1)$$

$$\kappa_m = \frac{M_{rf}}{EI_{max} - EI_{min}} \quad (3.2)$$

$$M_m = EI_{max} \cdot \kappa_m \quad (3.3)$$

$$M_m = \frac{EI_{max}}{EI_{max} - EI_{min}} M_{rf} \quad (3.4)$$

Definiendo  $\Delta M$  como la diferencia entre el momento medio ( $M_m$ ) y el momento de fricción residual ( $M_{rf}$ ):

$$\Delta M = M_m - M_{rf} = \left( \frac{EI_{max}}{EI_{max} - EI_{min}} - 1 \right) M_{rf} \quad (3.5)$$

$$\Delta M = \frac{EI_{min}}{EI_{max} - EI_{min}} M_{rf} \quad (3.6)$$

Siendo la rigidez a flexión complementaria definida como la diferencia entre la rigidez a flexión máxima y mínima, se obtiene la siguiente expresión para  $\Delta M$ .

$$EI_{comp} = EI_{max} - EI_{min} \quad (3.7)$$

$$\Delta M = \frac{EI_{min}}{EI_{comp}} M_{rf} = EI_{min}\kappa_m \quad (3.8)$$

De este modo, las expresiones para construir el gráfico bilineal momento curvatura son las siguientes:

Si  $\kappa \leq \kappa_m$ :

$$M_I(\kappa) = EI_{max} \cdot \kappa \quad (3.9)$$

Si  $\kappa \geq \kappa_m$ :

$$M_{II}(\kappa) = M_m + (\kappa - \kappa_m)EI_{min} \quad (3.10)$$

El término de rigidez a flexión máxima  $EI_{max}$  presentado para la zona I del gráfico 3.3, corresponde a la contribución tanto de cada alambre en forma individual, como también considerando trabajo en conjunto del cable. Mientras que para la zona II, la rigidez a flexión  $EI_{min}$  se calcula sólo con la componente individual de cada alambre de la rigidez a flexión, pues a este nivel de curvatura los alambres del cable no trabajan como un sólido rígido al encontrarse deslizando entre sí. Esto se traduce en las siguientes expresiones para la rigidez a flexión para cada zona en cuestión.

$$EI_{max} = \sum_{i=1}^n EA_i d_i^2 \cos^3(\alpha) + \sum_{i=1}^n EI_i \cos(\alpha) \quad (3.11)$$

$$EI_{min} = \sum_{i=1}^n EI_i \cos(\alpha) \quad (3.12)$$

$$I_i = \frac{\pi r_i^4}{4} \quad (3.13)$$

Donde:

- $E$ : Módulo de Young secante.
- $A_i$ : Área transversal de alambre i.
- $d_i$ : Distancia perpendicular entre centro de gravedad de alambre i y el eje correspondiente del sistema de referencia.
- $\alpha$ : Ángulo hélice del cable.
- $I_i$ : Inercia de alambre i según su sistema de referencia local.
- $r_i$ : Radio de alambre i.
- $n$ : Número de alambres que componen el cable.

En base al trabajo de K.O. Papailiou (Papailiou, 1997), Alain Cardou presenta el valor del momento residual de fricción  $M_{rf}$ , el cual queda expresado en la ecuación 3.14.

$$M_{rf} = RF_T \cos \alpha \sum_i^n (e^{\mu \theta_i \sin \alpha} - 1) \sin \theta_i \quad (3.14)$$

Luego, igualando las rectas del gráfico presentado en la Figura 3.3, para el punto A en que se genera el cambio de régimen de deslizamiento, se obtiene la siguiente expresión.

$$EI_{max}\kappa_m = EI_{min}\kappa_m + M_{rf} \quad (3.15)$$

Con estas ecuaciones se obtiene el valor de curvatura media ( $\kappa_m$ ), el cual describe el paso entre el régimen de total adherencia, *full stick*, y el régimen de deslizamiento total, *full slip*; considerando la convención de signos presentes en la Figura 3.4.

$$\kappa_m = \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_T}{R} \frac{\sum_{i=1}^n (e^{\mu\theta_i \sin\alpha} - 1) \sin\theta_i}{\cos^2\alpha} \quad (3.16)$$

Donde:

- $\varepsilon_T$ : Deformación del cable asociada a la tensión T aplicada.
- $R$ : Distancia entre sistema de referencia global y local.
- $\mu$ : Coeficiente de fricción.
- $\alpha$ : Ángulo hélice del cable.
- $\theta_i$ : ángulo de alambre  $i$  a partir del eje Z-Z.
- $n$ : Número de alambres que componen el cable.

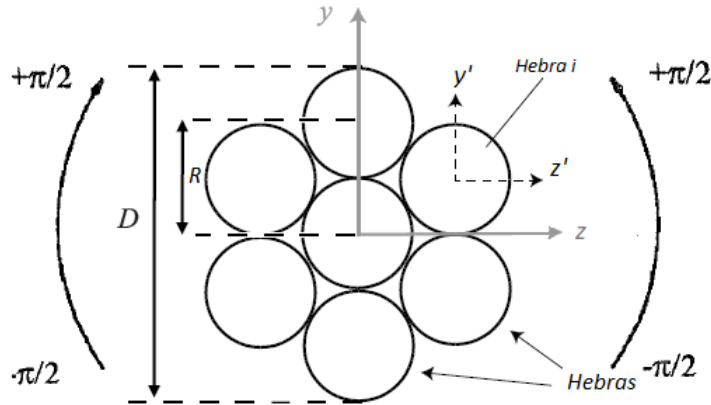


Figura 3.4: Sección transversal del cable, sistema de referencia local y global.

El fenómeno de deslizamiento también puede ser analizado a partir de las tensiones experimentadas por los alambres del cable  $\sigma_{tt}$  según el estado de deslizamiento.

Si  $\kappa \leq \kappa_m$ :

$$\sigma_{tt}(\kappa) = \sigma_a + \sigma_f(\kappa) \quad (3.17)$$

Si  $\kappa \geq \kappa_m$ :

$$\sigma_{tt}(\kappa) = \sigma_a + \sigma_f(\kappa_m) + \sigma_{f-local}(\kappa) \quad (3.18)$$

La ecuación 3.17 muestra que al encontrarse en *Stick State*, las tensiones en los alambres dependen de la componente asociada a la tensión axial  $\sigma_a$  y a la flexión  $\sigma_f$ , siendo esta última respondida mediante el trabajo en conjunto del cable al ser válida la hipótesis de viga Bernoulli. Sin embargo, al superar la curvatura crítica, según ecuación 3.18, la tensión de alambres corresponden a la tracción axial  $\sigma_a$ , a un término de flexión constante  $\sigma_f$  independiente de la curvatura y a la flexión local de cada alambre  $\sigma_{f-local}$ . Es importante notar que el término constante para las tensiones en el *Slip State*, corresponde a la flexión debido a las fuerzas de fricción asociadas al punto A de la Figura 3.3. Por lo tanto, al superar la curvatura crítica, la flexión existente asociada a la curvatura crítica permanece constante, por lo que el cable responde al aumento de flexión o curvaturas, aumentando la flexión local de cada alambre. Esto se traduce y se explica según la Figura 3.5, donde se muestran de forma separada la flexión asociada al *Stick State* (según  $EI_{max}$ ) y la flexión para el *Slip State* (según  $EI_{min}$ ).

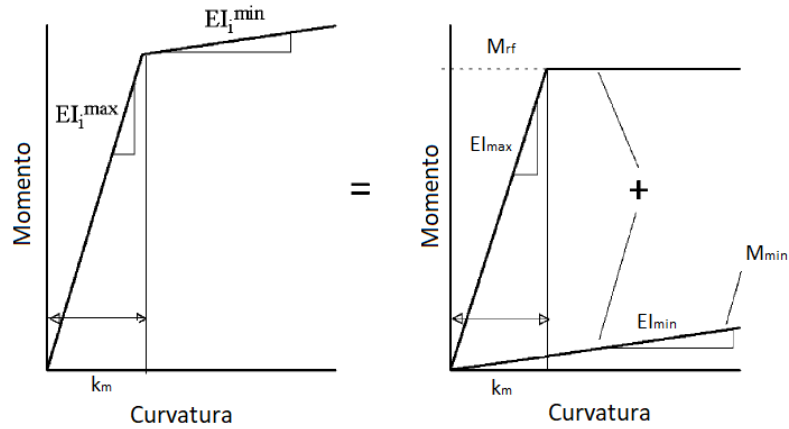


Figura 3.5: Comportamiento bilineal de flexión según estado de deslizamiento.

## 3.2. Daño con distribución asimétrica

El daño asimétrico presente en los cables a estudiar induce diferentes efectos en la respuesta mecánica de cables. Una primera consecuencia del daño se evidencia al aplicar una fuerza de tracción según el eje longitudinal del cable, lo cual genera cargas transversales al cable e inducen que a lo largo del cable exista corte y flexión. Este fenómeno, estudiado previamente (Beltrán y De Vico, 2015) se encuentra implementado en el algoritmo numérico desarrollado previamente (Bravo Tetlak, 2018). Por otro lado, el daño asimétrico produce una variación en el centro de gravedad, el cual al presentar daño asimétrico no coincide con el centro del alambre núcleo como sucede en el caso de cables sin daño. Por lo tanto, para calcular la inercia de cada uno se debe determinar la posición del centro de gravedad para cada uno de los tipos de daño. Esta nueva posición del centro de gravedad, presentada en Figura 3.6 se calcula según las siguientes expresiones, y los resultados se presentan a continuación para cada configuración de cable y daño en función del radio ( $r$ ) de cada alambre.

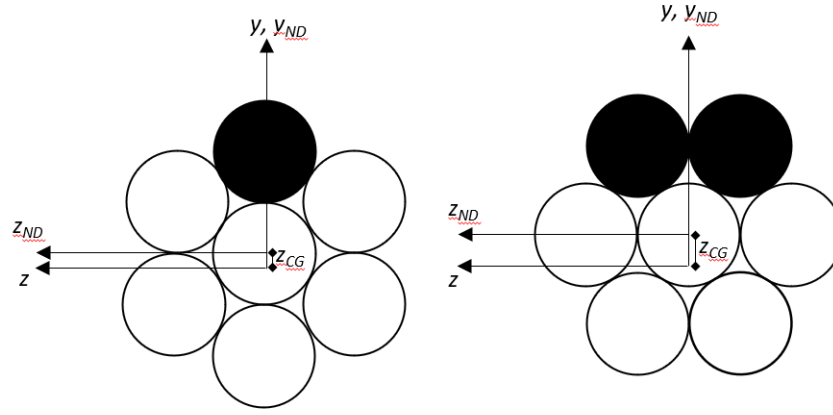


Figura 3.6: Variación centro de gravedad por daño asimétrico.

$$y_{cg} = \frac{\sum_i A_i y_{cgi}}{\sum_i A_i} \quad (3.19)$$

$$z_{cg} = \frac{\sum_i A_i z_{cgi}}{\sum_i A_i} \quad (3.20)$$

Donde:

- $A_i$ : Área de alambre i.
- $y_{cgi}$ : posición del centro de gravedad en eje Y-Y de alambre i.
- $z_{cg}$ : posición del centro de gravedad en eje Z-Z de alambre i.

A partir de la tabla 3.2, que presenta el desplazamiento del centro de gravedad para un cable 1x7 de radio  $r$  según 1 o 2 alambres dañados, se evidencia que la sección del cable se orienta según sus ejes principales, de tal modo que sólo se ve afectada la componente según el eje Z del centro de gravedad dado el sistema de referencia presente en la Figura 3.6, mientras que la componente en el eje Y del centro de gravedad, se mantiene centrado al eje.

Tabla 3.2: Desplazamiento del centro de gravedad en función del radio de alambre ( $r$ ).

Cable	$z_{cg}$	$y_{cg}$
1x7 Daño 1	$-\frac{r}{3}$	0
1x7 Daño 2	$-r\sqrt{\frac{12}{25}}$	0

Al conocer el centro de gravedad para cada tipo de daño, se pueden calcular las inercias máximas y mínimas para cada cable a estudiar y para cada eje principal, cuyos resultados se presentan en Anexos, sección A.

### 3.3. Propiedades mecánicas

#### 3.3.1. Ley constitutiva

Para los distintos cables a estudiar, se les asocia una ley constitutiva según el material: acero galvanizado y aluminio. Para esto se considera una ley constitutiva bilineal, basadas en ensayos experimentales previamente realizados por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018) según la norma ASTM E8/E8M (2004).

Para definir cada ley constitutiva de aluminio, se definen 2 puntos de interés que definen la curva bilineal, primeramente la deformación y tensión de fluencia ( $\epsilon_y, \sigma_y$ ), resultantes de trazar una recta paralela a la curva en el rango elástico, desplazada en 0.2% ; y por otro lado, la deformación y tensión de rotura ( $\epsilon_u, \sigma_u$ ), los cuales se definen como los máximos valores alcanzados, en tensión y deformación respectivamente. A continuación se muestran los valores obtenidos para definir la ley constitutiva de aluminio en Tabla 3.3, y en la Figura 3.7 se muestran los resultados experimentales para las distintas probetas (P1, P2 y P3) según los cables de diferentes diámetros ensayados (25.3 [mm] y 14.3 [mm]), junto a la curva bilineal resultante.

Tabla 3.3: Datos característicos de ley constitutiva Aluminio.

	Deformación [mm/mm]	Esfuerzo [MPa]
Origen	0	0.00
Fluencia	0.00449	289.63
Rotura	0.07449	326.50

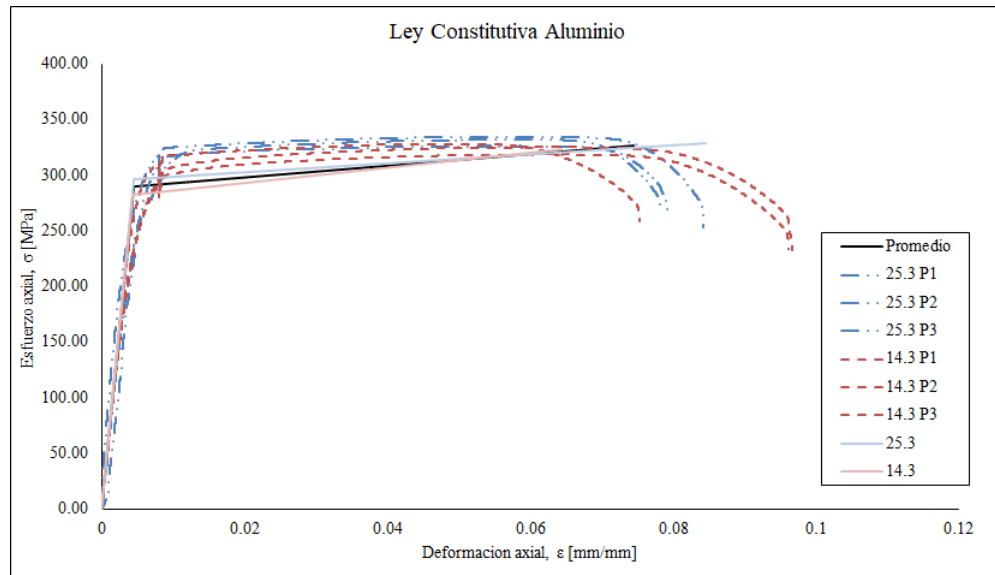


Figura 3.7: Ley Constitutiva aluminio.

De igual manera, para el caso de acero galvanizado se obtienen los datos pares de tensión-deformación anteriores (fluencia y rotura) para los ensayos experimentales realizados en 3

probetas (P1, P2 y P3), en cables de diámetros 9.5 [mm] y 12.7 [mm]. Los valores obtenidos para definir la ley constitutiva de acero se presentan en la Tabla 3.4, junto con la Figura 3.8 que muestra tanto los valores experimentales como la curva bilineal ajustada.

Tabla 3.4: Datos característicos de ley constitutiva Acero.

	Deformación [mm/mm]	Esfuerzo [MPa]
Origen	0	0.00
Fluencia	0.0053	1041.95
Rotura	0.082	1443.00

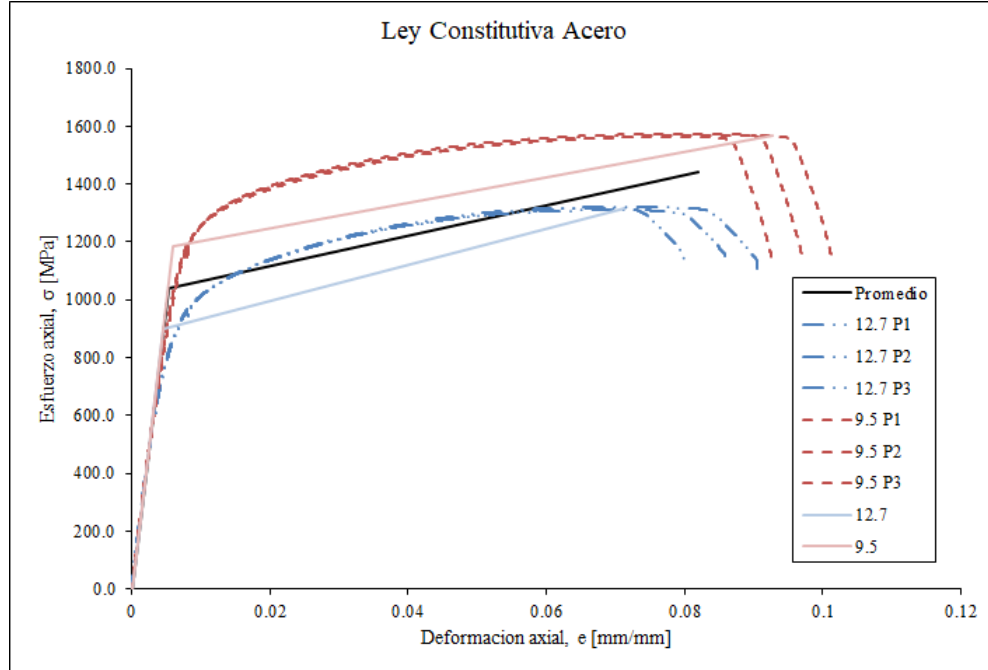


Figura 3.8: Ley Constitutiva Acero.

Con finalidad de evitar discontinuidades en la ley constitutiva de los materiales, se realiza un suavizado en las cercanías a la fluencia de cada material. Para esto se utiliza un polinomio de tercer orden el cual suaviza la curva entre dos límites arbitrariamente definidos:  $\varepsilon'_y$  y  $\varepsilon''_y$  tales que  $\varepsilon'_y < \varepsilon_y < \varepsilon''_y$ . De esta forma, la ley constitutiva queda definida de la siguiente manera:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_e \cdot \varepsilon & \varepsilon < \varepsilon'_y \\ a(\varepsilon - \varepsilon'_y)^3 + b(\varepsilon - \varepsilon'_y)^2 + c(\varepsilon - \varepsilon'_y) + d & \varepsilon'_y < \varepsilon < \varepsilon''_y \\ E_p(\varepsilon - \varepsilon'_y) + E_e \cdot \varepsilon'_y & \varepsilon''_y < \varepsilon \end{cases} \quad (3.21)$$

Donde los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  se obtienen al imponer que la función resultante sea clase C1, es decir, posea continuidad tanto en la función como en su derivada. Las expresiones para calcular dichas constantes son presentadas en el capítulo Anexos, sección B.

Al comparar las curvas experimentales de alambres ensayados con las leyes constitutivas

bilineales definidas, en Figuras 3.7 y 3.8, se observa que para los cables de aluminio la curva bilineal se ajusta gran medida a los resultados experimentales tanto en el rango lineal, como en el rango plástico. Por otro lado, para el acero galvanizado, experimentalmente se obtienen resultados diferentes según se ensaya cable de diámetro 9.5 [mm] o 12.7 [mm]. Debido a esto, se calcula una curva bilineal promedio según ambos tamaños de cable ensayados. Si bien esta ley constitutiva bilineal promedio no se ajusta, por inspección, de forma tan cercana al ensayo experimental en el rango no lineal, como si sucede para el caso de aluminio, esto no representa un problema al desarrollo del presente trabajo debido a que los resultados a obtener por el algoritmo de elementos finitos serán comparados entre cables con diferentes niveles de daños. De este modo, tal como se presenta en (Beltran y Bravo, 2021) y (Bravo Tetlak, 2018), cables multicapa como los estudiados en este trabajo responden correctamente ante resultados aproximados por el *área neta*, lo cual permite comparar de buena manera los resultados para diferentes daños. Por lo tanto, esta simplificación para definir la ley constitutiva se considera válida para los objetivos del presente trabajo.

### 3.3.2. Coeficiente de fricción

La determinación del coeficiente de fricción  $\mu$ , necesario para evaluar la curvatura crítica para cada cable según ecuación 3.16, se realiza gracias a la revisión bibliográfica presentada en el capítulo 2. Los trabajos descritos presentan aplicaciones en cables en diferentes materializaciones. Entre éstas se encuentran cables de acero, aluminio, como también cables *ACSR* conformados por un alambre núcleo de acero y alambres de aluminio en las siguientes capas del cable. Por ejemplo, K.O. Papailiou presenta una aplicación en cables *ACSR*, considerando un coeficiente de fricción  $\mu = 0.5$  (Papailiou, 1997). Jean-Bernard Dastous considera un valor  $\mu = 0.5$  para su aplicación en cables de aluminio (Dastous, 2005). Francesco Foti y Luca Martinelli también presentan una aplicación en cables *ACSR*, considerando un valor de  $\mu = 0.5$ . Sin embargo, Alain Cardou asume un valor  $\mu = 0.7$  para cables tipo *ACSR*; y S.W Khan considera  $\mu = 0.12$  para cables de acero (Khan et al., 2018).

Lo anterior muestra que no existe un consenso en un valor exacto para el coeficiente de fricción para cables de acero o aluminio para los autores estudiados. Por este motivo, se opta por considerar un coeficiente de fricción promedio ( $\mu=0.5$ ) para ambos materiales. Sin embargo, se presenta en las siguientes Figuras 3.9 y 3.10 la influencia de este parámetro tanto en el gráfico momento-curvatura, como en el gráfico rigidez a flexión-curvatura, donde este último es calculado a través del módulo de elasticidad secante. Para esto, se considera el cable de acero en diámetro 9.5 [mm] con 1 alambre dañado, el cual es sometido a una deformación axial  $\varepsilon_t = 0.004$  trabajando en el rango lineal ( $\varepsilon_t < \varepsilon_y = 0.0053$ ), por lo que la no linealidad observable en los gráficos corresponden al efecto del deslizamiento entre alambres y no a la fluencia del material.



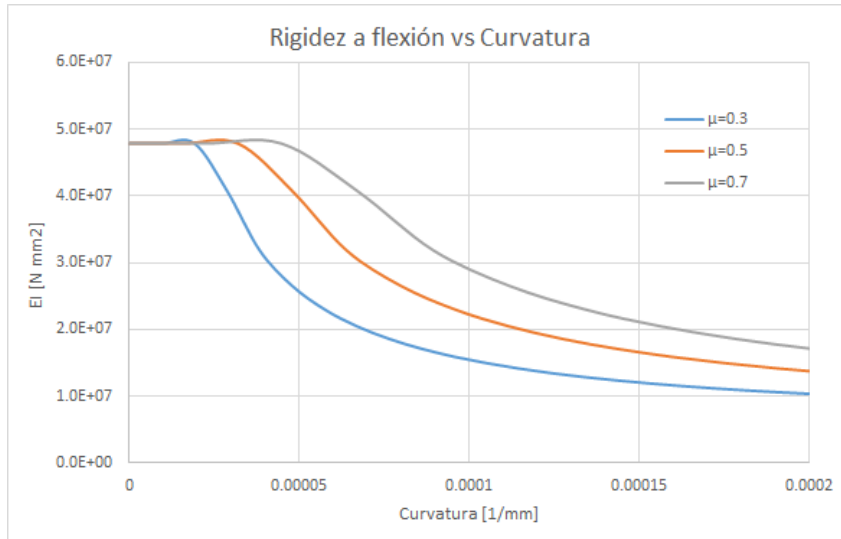


Figura 3.9: Gráfico momento vs curvatura con coeficiente de fricción parametrizado, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 1.

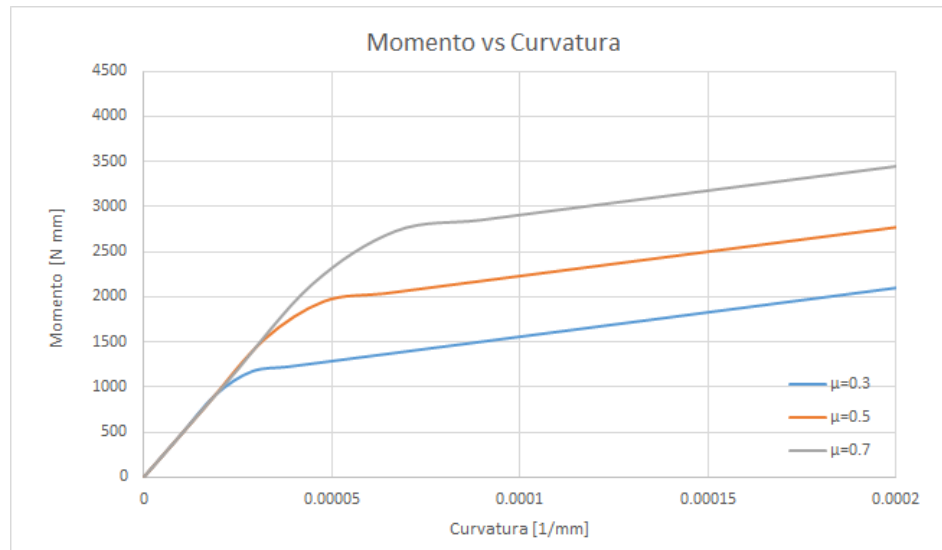


Figura 3.10: Gráfico rigidez a flexión vs curvatura con coeficiente de fricción parametrizado, cable acero diámetro 9.5 mm, daño 1.

### 3.4. Resultados Momento y Rigidez a flexión en función de curvatura

El parametrizar el coeficiente de fricción permite notar la influencia de este valor en el tema de estudio del presente trabajo, en particular para el valor de curvatura crítica, y por lo tanto, en el estado de deslizamiento en que se encuentra el cable. Por este motivo se calculan los valores de curvatura crítica en función de distintos coeficientes de fricción, para el cable de diámetro 9.5 mm, compuesto por 7 alambres (1 de éstos dañado), cuyos resultados se presentan en la Tabla 3.5:

Tabla 3.5: Resultados curvatura crítica según coeficiente de fricción parametrizado.

	$\mu = 0.3$	$\mu = 0.5$	$\mu = 0.7$
$\kappa_{critica}$ [1/mm]	$2.38 \cdot 10^{-5}$	$3.98 \cdot 10^{-5}$	$5.58 \cdot 10^{-5}$

Por otro lado, se calcula el área bajo las curvas asociadas a la parametrización del coeficiente de fricción, tanto para las curvas de momento-curvatura (Figura 3.9) y rigidez a flexión-curvatura (Figura 3.9), obteniendo los siguientes resultados adjuntos en Tabla 3.6.

Tabla 3.6: Resultados áreas bajo curvas momento-curvatura y rigidez a flexión-curvatura.

	$\mu = 0.3$	$\mu = 0.5$	$\mu = 0.7$
Área bajo curva $M - \kappa$ [N]	0.299	0.431	0.516
Área bajo curva $EI - \kappa$ [N mm]	3888.953	5035.554	5782.535

Los resultados presentados en la tabla 3.6 son expresados en porcentajes con respecto a las curvas con coeficiente de fricción promedio de la literatura, equivalente a  $\mu = 0.5$ , obteniendo los resultados adjuntos en Tabla 3.7.

Tabla 3.7: Relación área bajo curvas momento-curvatura y rigidez a flexión-curvatura con respecto.

	$\mu = 0.3$	$\mu = 0.5$	$\mu = 0.7$
Curva $M - \kappa$ [%]	69.50	100.00	119.76
Curva $EI - \kappa$ [%]	77.23	100.00	114.83

Los resultados de integrar las curvas presentadas en Figuras 3.9 y 3.10, muestran que hay una variación de entre 15 y 30 % con respecto a las curvas integradas para según el coeficiente de fricción promedio  $\mu = 0.5$ . Esto, junto con los resultados de la Tabla 3.5, muestra que el coeficiente de fricción es un valor que influye directamente en el valor de la curvatura crítica, y por lo tanto en el límite de cada estado de deslizamiento.

Tomando en consideración el coeficiente de fricción promedio según la literatura estudiada en el capítulo anterior,  $\mu = 0.5$ , junto con las ecuaciones presentadas anteriormente, se grafica el momento en función de la curvatura para cable de acero galvanizado diámetro 9.5 [mm], para cada uno de los daños estudiados, considerando distintos niveles de deformación axial aplicada y una rigidez a flexión secante en función de la deformación axial en Figuras 3.11, 3.12, 3.13 y 3.14. De igual manera, se grafica la relación momento-curvatura para cable de acero de diámetro 12.7 [mm], y cables de aluminio diámetros 10.1 [mm] y 14.3 [mm], resultados adjuntos en Anexos, sección C.

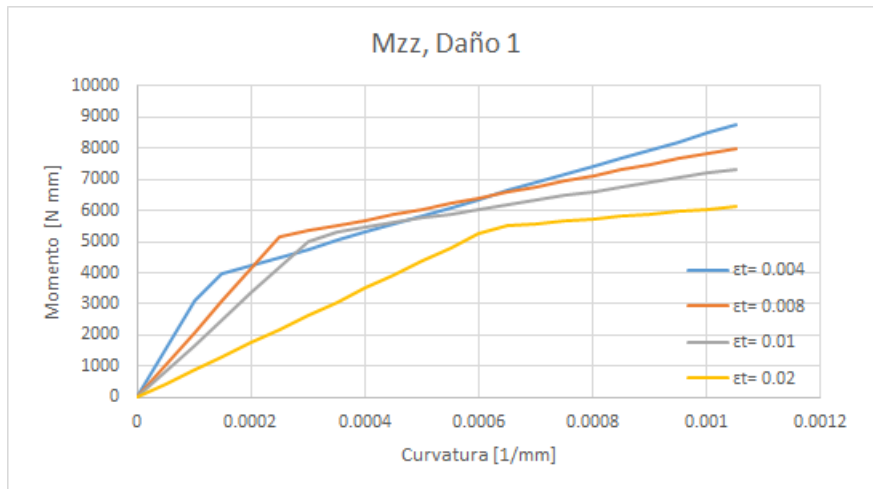


Figura 3.11: Daño 1: Momento en eje Z-Z, Cable diámetro 9.5 [mm].

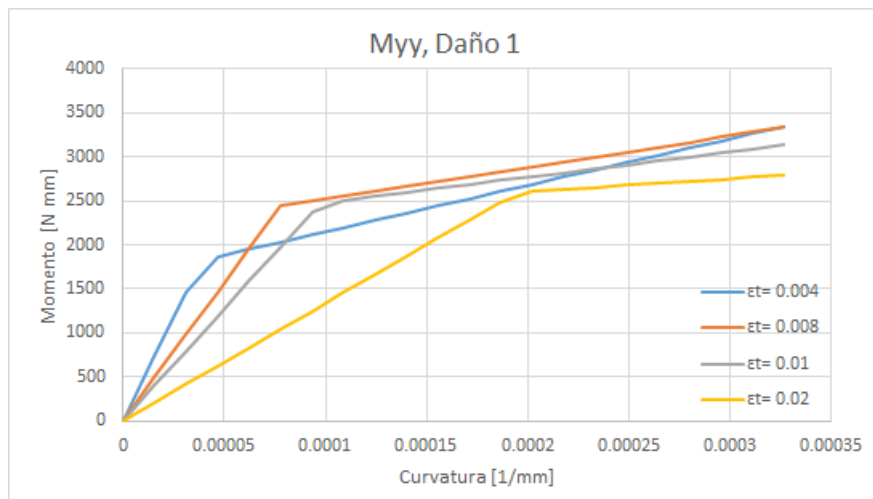


Figura 3.12: Daño 1: Momento en eje Y-Y, Cable diámetro 9.5 [mm].

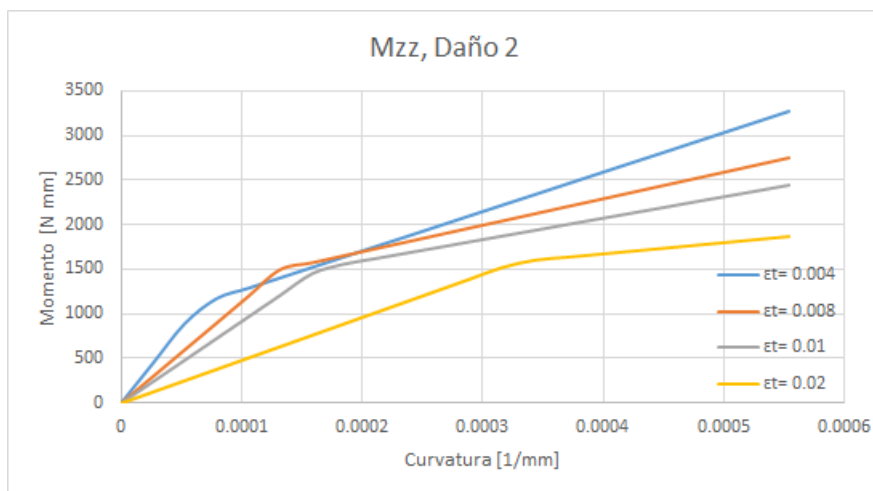


Figura 3.13: Daño 2: Momento en eje Z-Z, Cable diámetro 9.5 [mm].

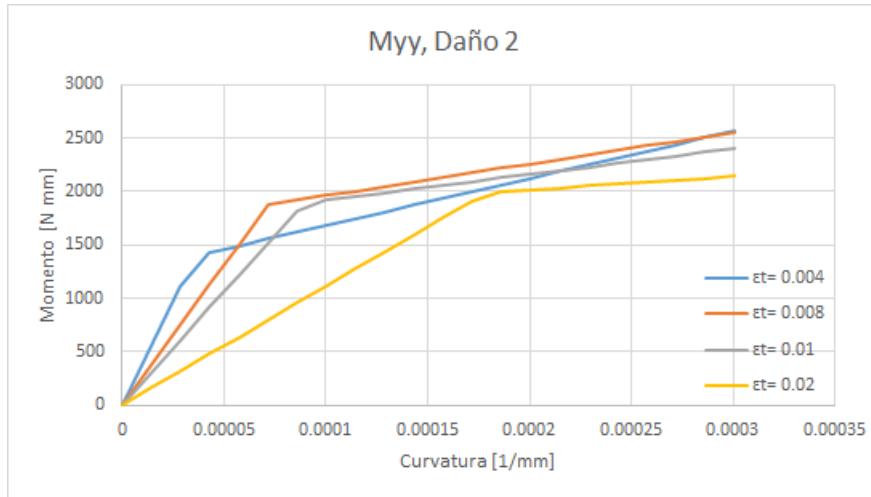


Figura 3.14: Daño 2: Momento en eje Y-Y, Cable diámetro 9.5mm.

A partir de los gráficos presentados según los ejes principales del cable dañado, se evidencia que el valor de curvatura crítica aumenta con respecto al nivel de deformación axial aplicada sobre el cable. Se observa además una mayor flexibilidad a medida que se aumenta la deformación axial aplicada, debido a al módulo de elasticidad secante considerado, siendo la no linealidad de las curvas producto del cambio de *Stick* a *Slip State* al superar el valor de curvatura crítica.

Una vez conocidos estos gráficos, se puede obtener la variación de la rigidez a flexión, considerando el módulo de elasticidad secante y la inercia de la sección del cable para cada eje, en función de la curvatura, a través del cociente entre el momento y la curvatura, obteniendo los siguientes resultados en Figuras 3.15, 3.16, 3.17, 3.18 para cable acero diámetro 9.5 [mm]. Dichas Figuras también son presentadas para los demás cables que abarca el presente estudio, resultados presentes en Anexos, sección C.

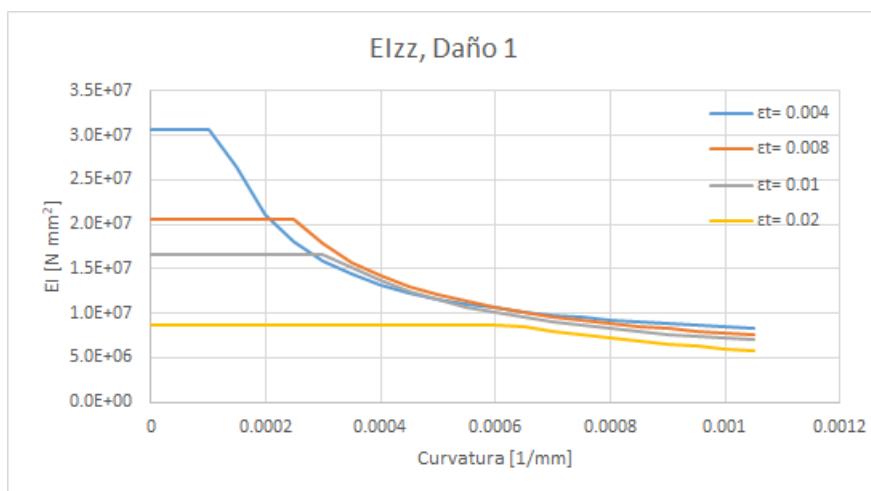


Figura 3.15: Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, Cable diámetro 9.5 [mm].

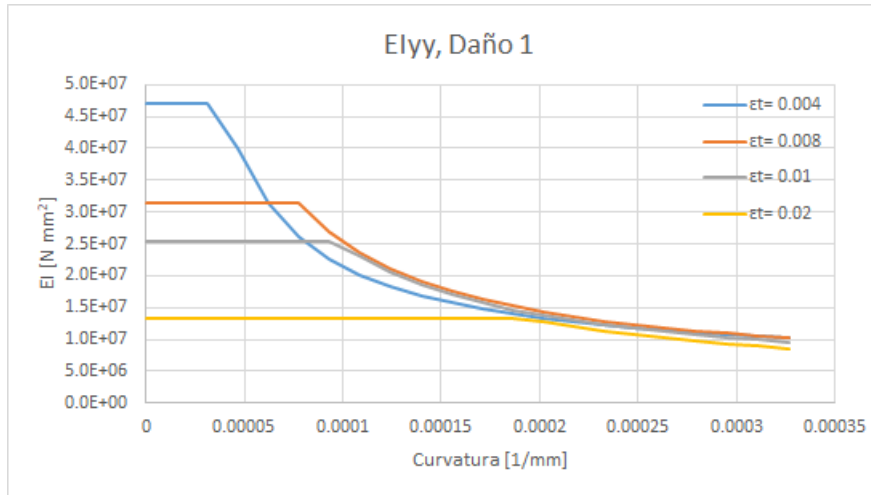


Figura 3.16: Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, Cable diámetro 9.5 [mm].

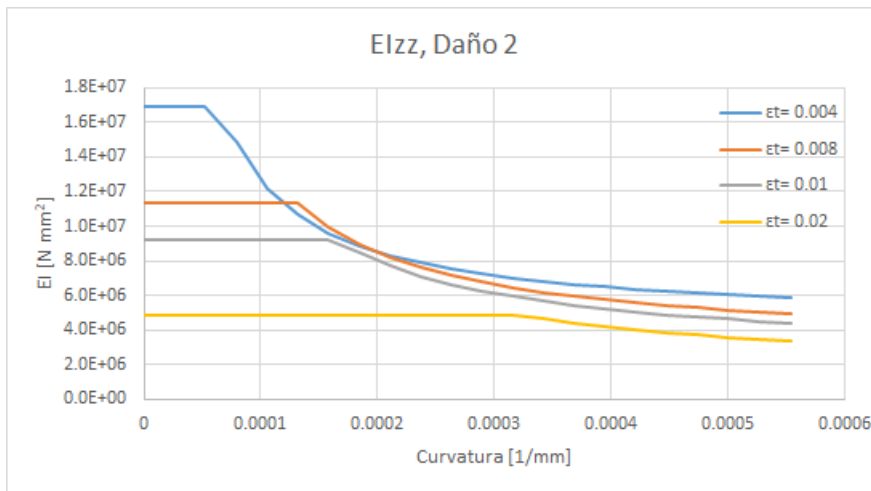


Figura 3.17: Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, Cable diámetro 9.5 [mm].

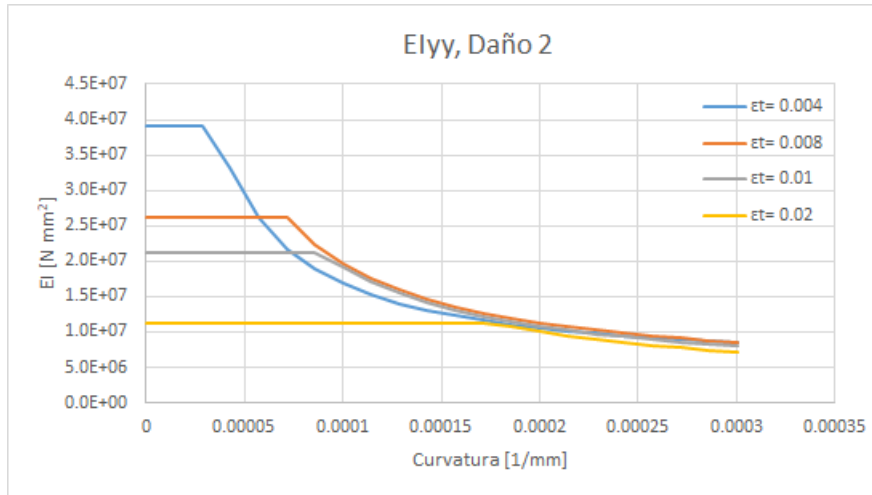


Figura 3.18: Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, Cable diámetro 9.5 [mm].

### 3.5. Curvaturas en cables, modelo de elementos finitos

Dado que se conocen los valores de curvatura crítica para cada tipo de cable, daño y para distintos niveles de deformación axial, es necesario conocer cuáles son las curvaturas que presentan los cables ensayados al estar sometidos a diferentes niveles de fuerza axial, materializados a través de la aplicación de deformaciones axiales.

Para este motivo se utiliza el modelo de elementos finitos desarrollado en MATLAB por Tomás Bravo T. (Bravo Tetlak, 2018), el cual permite ingresar una geometría de un cable, definir una distribución de daño asimétrica, lo que se traduce en cargas distribuidas bi-axiales variables a lo largo del cable, tal como se presenta en Figura 2.15. Dada la naturaleza no lineal del problema, se resuelve la ecuación estática del cable empotrado-empotrado deslizante a través de un proceso incremental-iterativo, obteniendo esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de cada nodo considerado según la discretización ingresada al modelo.

En efecto, una de las consideraciones de Tomás Bravo para la implementación del modelo es realizar una discretización del cable a través de elementos finitos denotados elementos *cable-viga*. Este elemento es presentado en la figura 3.19, el cual posee 6 grados de libertad en cada nodo, asociados a traslaciones y giros en cada eje. Según las hipótesis cinemáticas de deformación, cada elemento finito es considerado como una viga según hipótesis de viga Euler-Bernoulli, es decir, asumiendo respuesta en *Stick State*; cuya validez es estudiada en este trabajo.

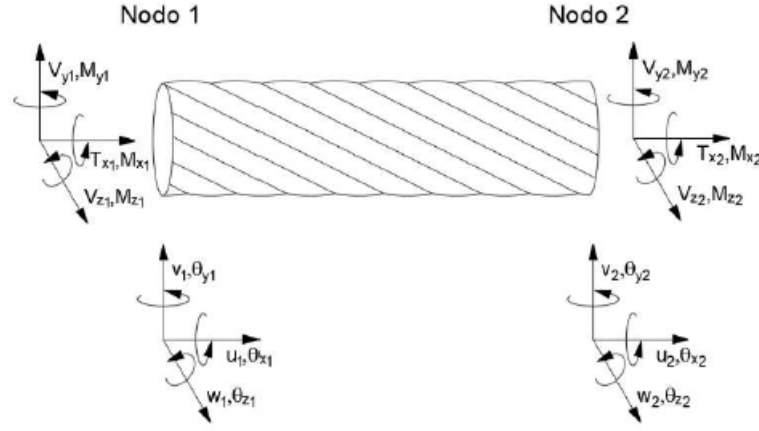


Figura 3.19: Definición de grados de libertad y esfuerzos nodales.

Un resultado de interés que se obtiene a través el modelo es el campo de desplazamiento. Para esto, primeramente se obtienen las traslaciones y rotaciones nodales, las cuales son interpoladas con el fin de obtener una función continua a lo largo del cable. Esto se realiza a través de polinomios lineales para los grados de libertad asociados al eje longitudinal (desplazamiento axial y torsión), y con polinomios de Hermite para interpolar los grados de libertad transversales (rotaciones y desplazamientos en ejes transversales). De esta manera, se expresa la variación del campo de desplazamiento (asociados al operador  $\Delta$ ) en función de la variación de los valores nodales y las funciones de interpolación, tal como sigue a continuación:

$$\Delta u(x) = N_{u1}(x)\Delta u_A + N_{u2}(x)\Delta u_B \quad (3.22)$$

$$\Delta v(x) = N_{v1}(x)\Delta v_A + N_{\theta_1}(x)\Delta \theta_{zA} + N_{v2}(x)\Delta v_B + N_{\theta_2}(x)\Delta \theta_{zB} \quad (3.23)$$

$$\Delta w(x) = N_{v1}(x)\Delta w_A + N_{\theta_1}(x)\Delta \theta_{yA} + N_{v2}(x)\Delta w_B + N_{\theta_2}(x)\Delta \theta_{yB} \quad (3.24)$$

$$\Delta \theta_x(x) = N_{u1}(x)\Delta \theta_{xA} + N_{u2}(x)\Delta \theta_{xB} \quad (3.25)$$

Donde:

$$N_{u1} = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.26)$$

$$N_{u2} = \frac{x}{L} \quad (3.27)$$

$$N_{v1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.28)$$

$$N_{\theta_1}(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (3.29)$$

$$N_{v2}(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.30)$$

$$N_{\theta_2}(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (3.31)$$

Luego, la curvatura del cable en cada punto se obtiene mediante la segunda derivada del desplazamiento en cada eje transversal, con respecto a un incremento axial:

$$\Delta v''(x) = \frac{d^2 \Delta v(x)}{dx^2} \quad (3.32)$$

$$\Delta w''(x) = \frac{d^2 \Delta w(x)}{dx^2} \quad (3.33)$$

$$\Delta v''(x) = \frac{d^2 N_{v_1}(x)}{dx^2} \Delta v_A + \frac{d^2 N_{\theta_1}(x)}{dx^2} \Delta \theta_z A + \frac{d^2 N_{v_2}(x)}{dx^2} \Delta v_B + \frac{d^2 N_{\theta_2}(x)}{dx^2} \Delta \theta_z B \quad (3.34)$$

$$\Delta w''(x) = \frac{d^2 N_{v_1}(x)}{dx^2} \Delta w_A + \frac{d^2 N_{\theta_1}(x)}{dx^2} \Delta \theta_y A + \frac{d^2 N_{v_2}(x)}{dx^2} \Delta w_B + \frac{d^2 N_{\theta_2}(x)}{dx^2} \Delta \theta_y B \quad (3.35)$$

Donde:

$$\frac{d^2 N_{v_1}(x)}{dx^2} = \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad (3.36)$$

$$\frac{d^2 N_{\theta_1}(x)}{dx^2} = \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad (3.37)$$

$$\frac{d^2 N_{v_2}(x)}{dx^2} = \frac{6}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2 N_{\theta_2}(x)}{dx^2} = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \quad (3.39)$$

### 3.6. Resultados curvaturas en cable acero 9.5 [mm]

Implementando las ecuaciones anteriores para obtener la curvatura del cable, junto con la ecuación 3.16, se obtienen los siguientes gráficos que muestran la relación entre la curvatura del cable para distintos niveles de deformación axial (tanto en el rango lineal como en el rango no lineal), con respecto al valor de curvatura crítica para cada deformación axial. Estos resultados, presentes en Figuras 3.20, 3.21, 3.22 y 3.23, son obtenidos con las hipótesis cinemáticas del modelo numérico desarrollado por Tomás Bravo, y por lo tanto asumiendo una respuesta del cable en un *Stick State*.



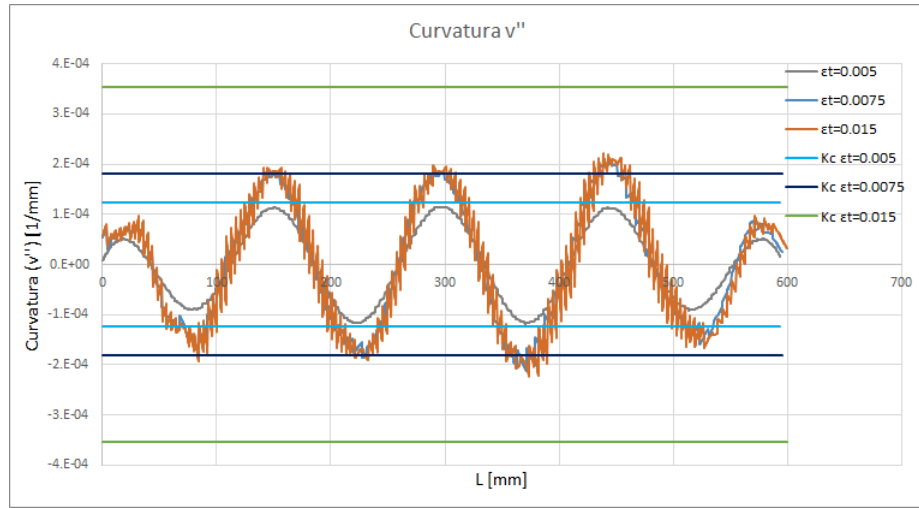


Figura 3.20: Daño 1: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 9.5 [mm].

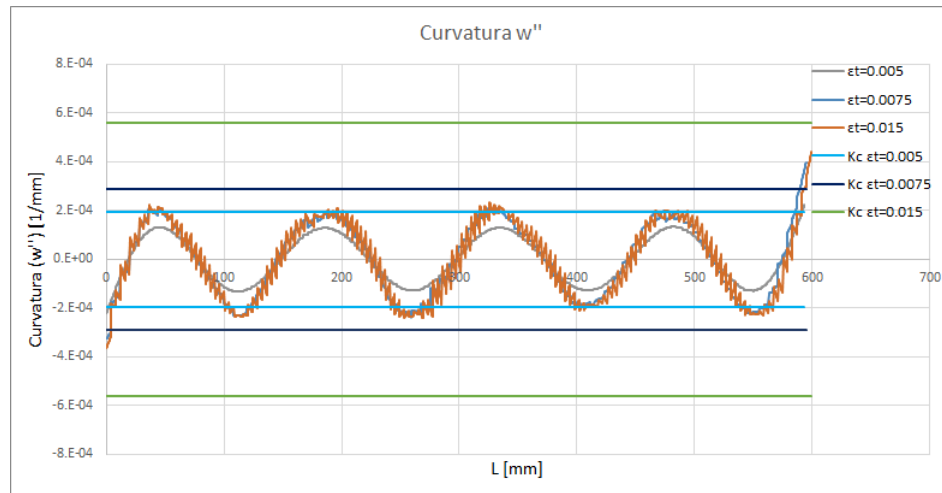


Figura 3.21: Daño 1: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 9.5 [mm].

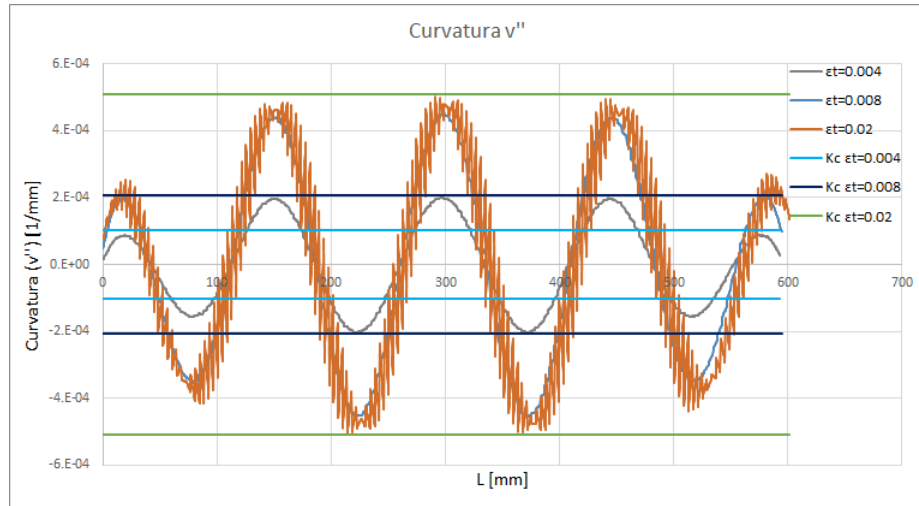


Figura 3.22: Daño 2: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 9.5 [mm].

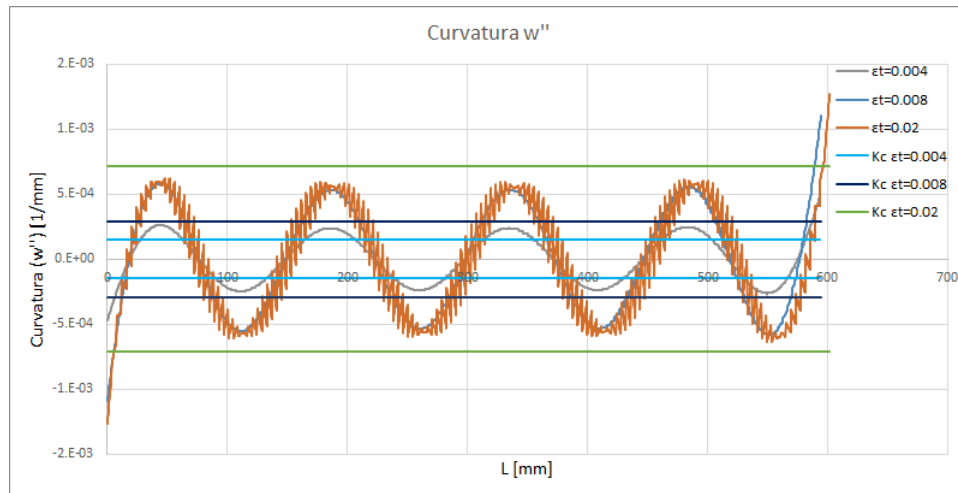


Figura 3.23: Daño 2: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 9.5 [mm].

En los resultados presentados en Figuras 3.20, 3.21, 3.22 y 3.23, se evidencian aumentos en los valores de curvaturas en las zonas cercanos en los apoyos de los cables, para los valores de curvatura en el eje Z-Z, tal como desarrolla de forma analítica, Matias Hofer en su memoria de título (Hofer Jaramillo, 2020). Este aumento en las curvaturas en las zonas de apoyos corresponde al fenómeno de *capa límite*, es decir, una zona acotada en las cercanías de los anclajes del cable, donde los niveles de curvatura son mayores que en la zona central del cable o *fuera de la capa límite*. Una aplicación de interés para el presente estudio es demostrar numéricamente el desarrollo de *capa límite* para los cables estudiados. Una primera medida para evidenciar el concepto de capa límite en los cables analizados, corresponde a normalizar los valores de curvaturas por los valores *peaks* ubicados en la zona ubicada fuera de la capa límite, es decir, en la alejada de los apoyos. Para definir una primera aproximación de capa límite, se consideran las conclusiones del estudio *Nonlinear response of elastic cables with*

*flexural-torsional stiffness* (Arena, Pacitti, y Lacarbonara, 2016), donde de forma numérica se comparan los niveles de flexión a lo largo del cable, y se concluye que la zona de la capa límite posee una extensión del orden del 20% del largo del cable, para cada zona de apoyo. Considerando esta conclusión, se normalizan los valores de curvatura por el valor máximo de curvatura desarrollado fuera de la capa límite, obteniendo las siguientes Figuras 3.24, 3.25, 3.26 y 3.27.

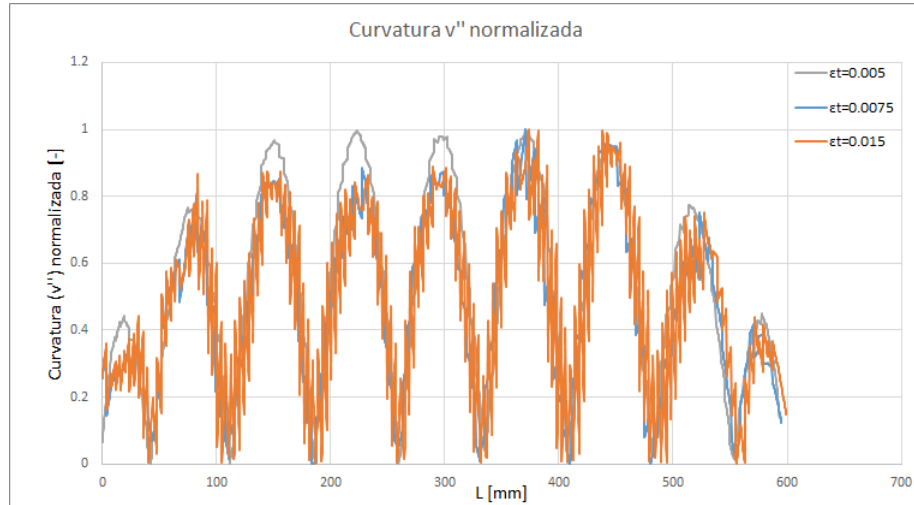


Figura 3.24: Daño 1: Curvatura en eje Y-Y normalizada, Cable diámetro 9.5 [mm].

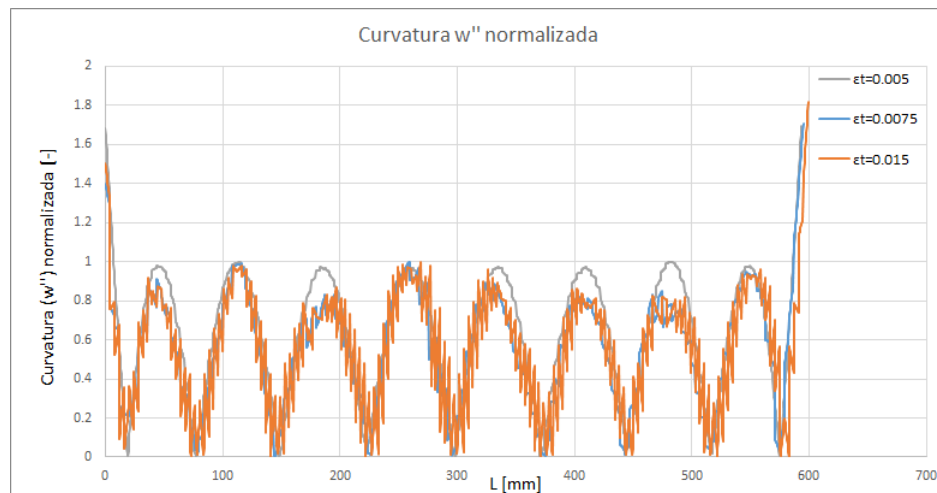


Figura 3.25: Daño 1: Curvatura en eje Z-Z normalizada, Cable diámetro 9.5 [mm].

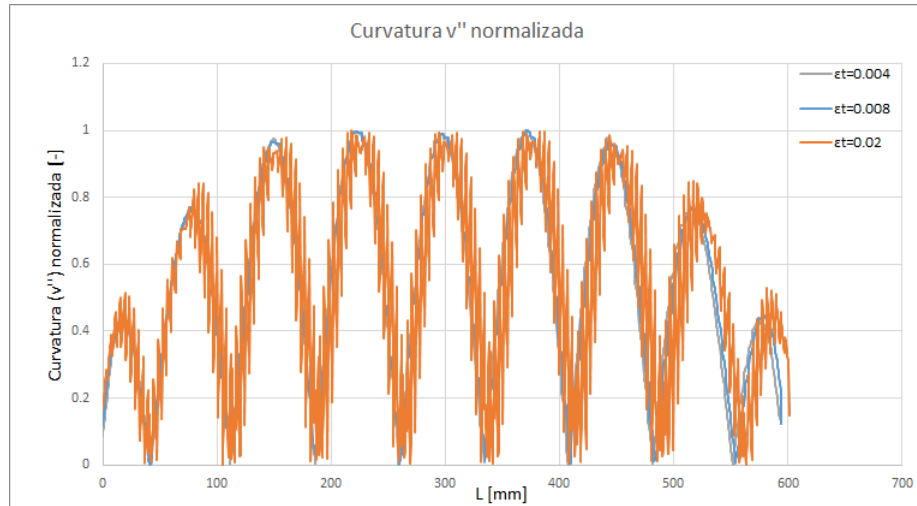


Figura 3.26: Daño 2: Curvatura en eje Y-Y normalizada, Cable diámetro 9.5 [mm].

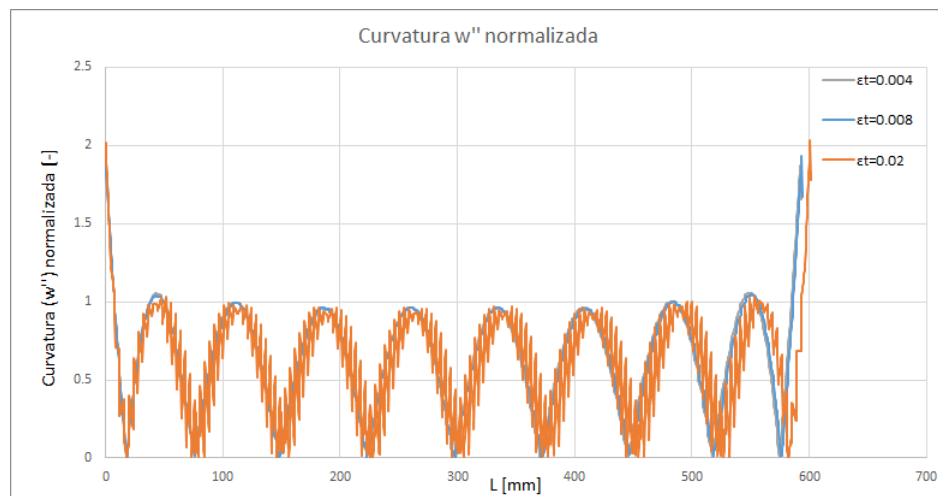


Figura 3.27: Daño 2: Curvatura en eje Z-Z normalizada, Cable diámetro 9.5 [mm].

En la Figura 3.25 se puede observar que en la zona de capa límite hay un aumento en los niveles de curvatura de hasta un 80 % para el cable de diámetro 9.5 [mm] con 1 alambre dañado, mientras que en la figura 3.27 se alcanza un aumento curvaturas de un 100 % para el cable de diámetro 9.5 [mm] con 2 alambres dañados. Estos resultados, junto con las comparativas entre curvaturas críticas y curvaturas de cables presentadas en las figuras 3.20 a 3.23 permiten concluir que la zona con mayor compromiso a presentar deslizamiento relativo entre alambres se encuentra en la zona de capa límite, es decir, zonas cercanas a los apoyos del cable. Sin embargo, se evidencia en las Figuras 3.20 a 3.23, que también son superadas las curvaturas críticas en las zonas fuera de la capa límite. Estos resultados numéricos muestran que la hipótesis de *Stick State* no es válida para todos los niveles de deformación axial, pues se genera deslizamiento relativo entre alambres en los planos principales del cable dañado, al superar los valores de curvatura crítica.

Los resultados numéricos indican que la capa límite sólo se desarrolla en uno de los planos de flexión, que en este caso es el plano definido por el vector  $Y$ . Este resultado concuerda con lo desarrollado por Matías Hofer (Hofer Jaramillo, 2020), en que utilizando el método de las perturbaciones determinó que la curvatura en el interior de la capa límite, para el plano antes mencionado, tiene una variación exponencial.

# Capítulo 4

## Análisis numérico

### 4.1. Implementación de algoritmo

En el presente capítulo, se describe la implementación realizada al modelo de elementos finitos desarrollada por Tomas Bravo (Bravo Tetlak, 2018). Tal como se menciona en el capítulo anterior, las curvaturas que presentan los cables al tener daño asimétrico y encontrarse sometidos a carga axial son mayores a los valores de curvatura crítica; por lo tanto a este nivel de curvatura no es válido la hipótesis de viga Euler-Bernoulli; hipótesis fundamental para describir la cinemática de deformación del modelo de elementos finitos ya desarrollado.

El algoritmo numérico, detallado en la tesis *Estimación numérica de la respuesta estática de un cable dañado: formulación viga-cable* (Bravo Tetlak, 2018), propone al cable como un elemento viga, que permite incorporar la cinemática de deformación de cada elemento finito que conforma el cable, permitiendo generar matrices de rigidez que representa a cada elemento que puede desarrollar tanto carga de tracción axial como flexión biaxial y torsión.

Este algoritmo numérico, resumido en el diagrama de flujo presentado en la Figura 4.1, permite obtener como resultado la curva de capacidad del cable, distribución de tensiones en una sección transversal, distribución de deformaciones de una sección transversal y deformada del cable dañado, es decir, el algoritmo resuelve la siguiente ecuación de equilibrio, expresada en forma matricial en la ecuación 4.1 (Beltrán y Bravo, 2020), donde  $[K_L]_{dr}$  y  $[K_G]_{dr}$  son las matrices de rigidez lineal y geométrica, cuya adición corresponde a  $[K_{dr}]$  equivalente a matriz de rigidez tangente del cable,  $\{du\}$  y  $\{dQ\}$  son los incrementos en desplazamiento y en cargas externas,  $\{R\}$  es el vector residual, igual a la diferencia entre las cargas internas y externas, y los subíndices  $j$ ,  $k$  representan el paso del análisis y el número de iteraciones en dicho paso, respectivamente.

$$([K_L]_{dr} + [K_G]_{dr})_{j-1}^{k-1} \{du\}_j^k = \{dQ\}_j^k + \{R\}_j^{k-1} \quad (4.1)$$

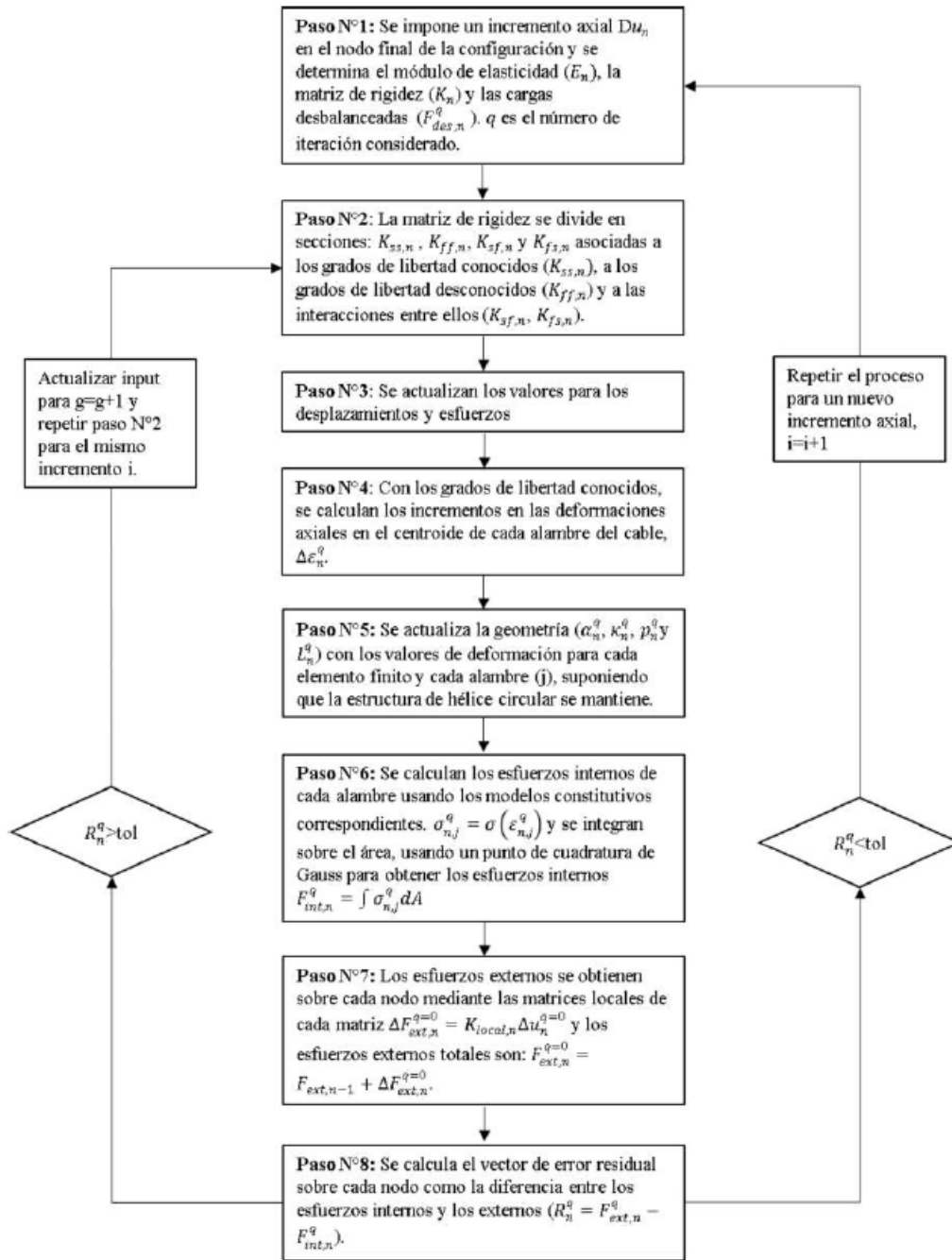


Figura 4.1: Algoritmo numérico, (Bravo Tetlak, 2018).

A diferencia de los modelos mecánicos presentados en la revisión bibliográfica de este trabajo, el algoritmo de la Figura 4.1 considera el cable como un elemento tridimensional, obteniendo como resultado deformadas y curvaturas en un plano perpendicular al eje del cable; mientras que los modelos mecánicos existentes para cuantificar el efecto de la variación de rigidez a flexión, junto con el deslizamiento relativo entre alambres, estudian las curvaturas dadas por una flexión uniaxial.

Dada la asimetría del daño, el análisis del cable en sus ejes principales genera que los

valores de curvatura crítica sean diferentes en cada eje de la sección transversal del cable. Ante esto, se propone acotar el efecto del deslizamiento relativo entre alambres mediante la siguiente hipótesis: *un elemento finito se encuentra en Slip State si en algunos de sus ejes principales la curvatura que presenta el elemento finito supera el valor de curvatura crítica*. Esta hipótesis de deslizamiento propone acotar la respuesta de cables, en cuanto asume que uno de los ejes transversales define el deslizamiento completo del alambre para cada elemento finito; por lo tanto, de forma conservadora, los resultados a esperar del modelo propuesto corresponden a una cota inferior para la capacidad real del cable.

Según lo anterior, se presenta un diagrama de flujo en Figura 4.2 que permite resumir el algoritmo según la hipótesis considerada.

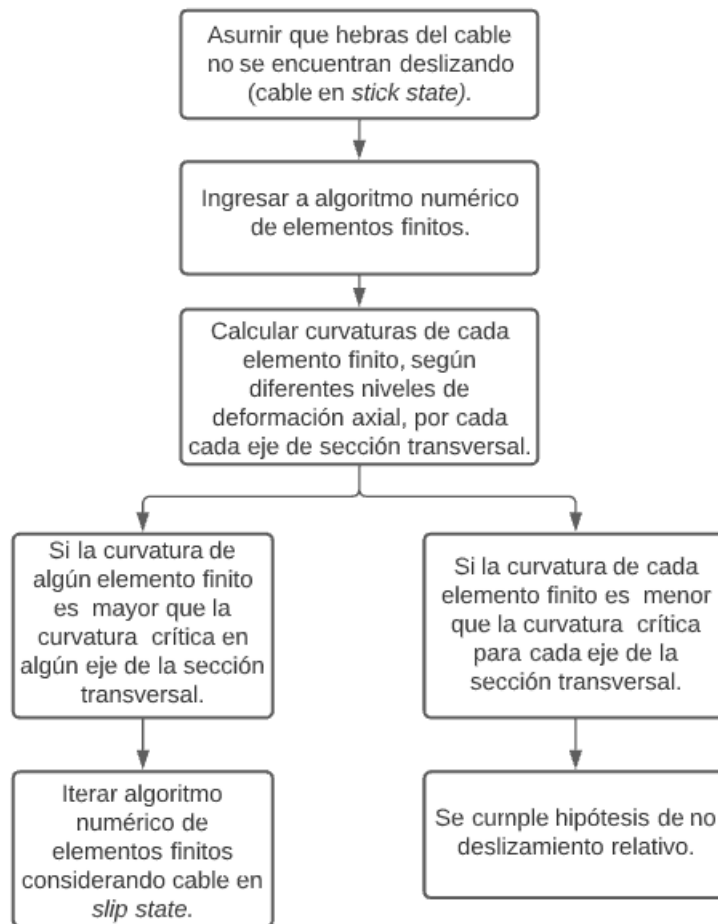


Figura 4.2: Diagrama de flujo según hipótesis de deslizamiento.

Finalmente, el diagrama de flujo del algoritmo, considerando el eventual deslizamiento entre alambres se resume en la Figura 4.3.



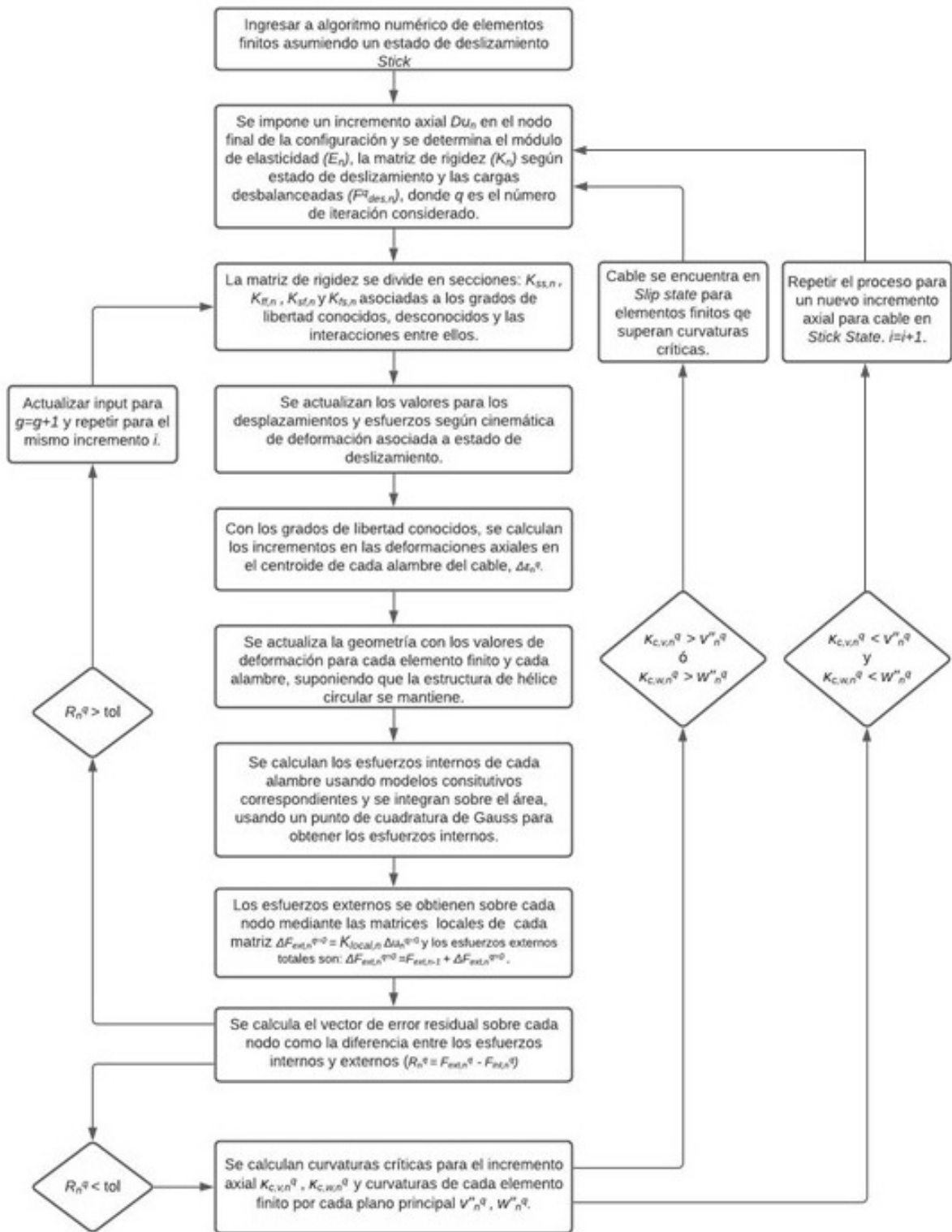


Figura 4.3: Diagrama de flujo algoritmo *Stick-Slip state*.

## 4.2. Cinemática de deformación y formulación de trabajo virtual

En el caso que un elemento finito no se encuentra deslizando, encontrándose en *stick state*, el campo de desplazamientos queda dado según las siguientes expresiones.

$$u_x = u - yv' + zw' \quad (4.2)$$

$$u_y = v - \theta_x z \quad (4.3)$$

$$u_z = w + \theta_x y \quad (4.4)$$

Proyectando el campo de desplazamientos desde el eje global, hasta el eje local de cada alambre, se generan interacciones entre el esfuerzo axial y la torsión para el desplazamiento axial; mientras que los desplazamientos transversales no son proyectados en el eje local, supuesto dado por la hipótesis que el comportamiento predominante para la respuesta del cable es la respuesta axial. Con esto se obtiene el siguiente campo de desplazamientos para el caso *stick state*.

$$u_t = (u - yv' + zw')\cos(\alpha) + R\theta_x\sin(\alpha) \quad (4.5)$$

$$u_y = v - \theta_x z \quad (4.6)$$

$$u_z = w + \theta_x y \quad (4.7)$$

Por otra parte, para un elemento finito que se encuentra deslizando, *slip state*, se genera una modificación en el campo de desplazamiento. Considerando la revisión bibliográfica anteriormente presentada, (Cardou, 2013), se decide por despreciar el régimen de transición entre *stick state* y *slip state*. Por lo tanto, cuando la curvatura del cable supera el valor de curvatura crítica, los alambres de este no responden en conjunto ante una sollicitación de flexión, sino que responden en forma individual. De este modo, se plantea la respuesta del cable como una curva bilineal considerando un régimen de completa adherencia entre alambres, y uno de completo deslizamiento, tal como se presenta en Figura 3.3. Esto se traduce en el siguiente campo de desplazamiento para *slip state*, donde los ejes locales se definen en la figura 4.4:

$$u_t = (u - y'v' + z'w')\cos(\alpha) + R\theta_x\sin(\alpha) \quad (4.8)$$

$$u_y = v - \theta_x z \quad (4.9)$$

$$u_z = w + \theta_x y \quad (4.10)$$

Donde:

- $y'$ : Desplazamiento en el eje  $y'$ , local desde el centro cada alambre.
- $z'$ : Desplazamiento en el eje  $z'$ , local desde el centro cada alambre.

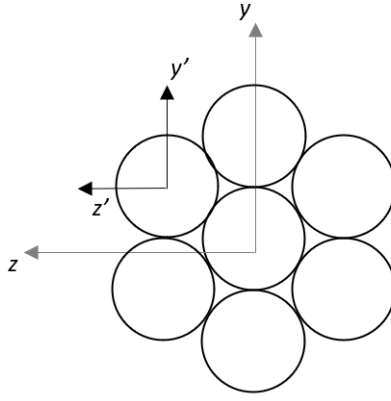


Figura 4.4: Sección transversal del cable, sistema de referencia local y global.

Dentro del desarrollo del programa de elementos finitos realizado previamente (Bravo Tetlak, 2018), una de las hipótesis considerada en el planteamiento mecánico es considerar que el comportamiento predominante del cable es axial, por lo que la energía de deformación que predomina, es la asociada a deformaciones axiales de los alambres. De esto se desprende la siguiente ecuación, según el principio variacional que minimiza la energía potencial estacionaria:

$$\Delta\Pi = \Delta W_{int} - \Delta W_{ext} \quad (4.11)$$

Donde el trabajo interno viene dado por la siguiente expresión:

$$\Delta W_{int} = \int_V \Delta\sigma(\delta(e + \eta))dV = \int_V \sigma(\delta\Delta e)dV + \int_V \sigma(\delta\Delta\eta)dV \quad (4.12)$$

En esta ecuación se presenta una contribución de una parte lineal del tensor de deformaciones, según el término  $e$ , y una parte geométrica del tensor de deformaciones asociado al parámetro  $\eta$ . Mientras que el trabajo externo viene dado por:

$$\Delta W_{int} = \int_V g(\delta\Delta\varepsilon)dV + \int_S r(\delta\Delta\varepsilon)dS \quad (4.13)$$

Donde el término  $g$  corresponde a las fuerzas volumétricas actuando sobre el cable, mientras que  $r$  son las fuerzas superficiales.

Por otro lado, para escribir el campo de desplazamiento de forma matricial, previamente presentado en las ecuaciones 3.22 a 3.25, se deben reescribir las funciones de interpolación como sigue a continuación:

$$N_u(x) = [N_{u1} \ N_{u2}] \quad (4.14)$$

$$N_{\theta x}(x) = [N_{u1} \ N_{u2}] \quad (4.15)$$

$$N_v(x) = [N_{v1} \ N_{\theta1} \ N_{v2} \ N_{\theta2}] \quad (4.16)$$

$$N_w(x) = [N_{v1} \ N_{\theta1} \ N_{v2} \ N_{\theta2}] \quad (4.17)$$

De esta manera, los desplazamientos nodales se expresan según las siguientes ecuaciones:

$$\bar{u} = [u_A \ u_B]^T \quad (4.18)$$

$$\bar{\theta}_x = [\theta_{xA} \ \theta_{xB}]^T \quad (4.19)$$

$$\bar{v} = [v_A \ \theta_{zA} \ v_B \ \theta_{zB}]^T \quad (4.20)$$

$$\bar{w} = [w_A \ \theta_{yA} \ w_B \ \theta_{yB}]^T \quad (4.21)$$

Al reemplazar estas ecuaciones, se obtiene la matriz de rigidez, compuesta por una parte elástica (lineal) y una parte geométrica (no lineal). Esta matriz de rigidez se ve afectada por el cambio en la cinemática de deformación al pasar de un *stick state* a un *slip state*. Para el caso Stick, las matrices de rigidez se encuentran calculadas previamente (Bravo Tetlak, 2018), y son adjuntas en el capítulo Anexos, sección E.1. Mientras que para el caso de deslizamiento las matrices de rigidez elástica y geométrica son recalculadas a continuación.

### 4.2.1. Matriz de rigidez elástica

Debido al cambio de la cinemática de deformación generado por el deslizamiento relativo entre alambres, ciertos términos de la matriz de rigidez se anulan debido al cambio de considerar la flexión a partir de ejes globales del cable, de la ecuación 4.5, para luego considerar sólo el efecto local del alambre en torno a su eje local para la respuesta en flexión en la ecuación 4.8.

De la aplicación del principio de trabajos virtuales, la matriz de rigidez elástica-lineal,  $[K_E]$ , queda definida por:

$$[\delta_{\bar{u}}]^T [K_E] \{\bar{u}\} = [\delta_{\bar{u}}]^T \int_V E_t e_{tt} \delta e_{tt} dV \{\bar{u}\} \quad (4.22)$$

$$= [\delta_{\bar{u}}]^T \int_V E_t \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} dV \{\bar{u}\} \quad (4.23)$$

En particular desarrollando para los términos de acoplamiento flexión-torsión:

$$E \cos^3(\alpha) \sin(\alpha) [\delta \theta_x]^T \int_L [N']_{\theta_x} [N']_{\theta_z} \int_A -y' \sqrt{y'^2 + z'^2} dA dx \quad (4.24)$$

$$E \cos^3(\alpha) \sin(\alpha) [\delta \theta_x]^T \int_L [N']_{\theta_x} [N']_{\theta_y} \int_A -z' \sqrt{z'^2 + y'^2} dA dx \quad (4.25)$$

Esto implica que los términos de la matriz de rigidez asociados al acople flexión-torsión  $\theta_x - \theta_z$  y  $\theta_x - \theta_y$  son nulos al encontrarse en *Slip state*. Lo anterior resulta en las expresiones adjuntas en la sección E.2.1 de Anexos.

### 4.2.2. Matriz de rigidez geométrica

Por otra parte, para la matriz de rigidez geométrica los términos que se ven afectados son los asociados al acoplamiento entre traslaciones perpendiculares al eje longitudinal y flexión, es decir, el acoplamiento  $v - v$ ,  $w - w$ ,  $v - \theta_z$  y  $w - \theta_y$ .

De manera equivalente a la matriz de rigidez elástica, mediante la aplicación del principio de trabajos virtuales, la matriz de rigidez geométrica,  $[K_G]$ , queda definida por:

$$[\delta_{\bar{u}}]^T [K_G] \{\bar{u}\} = [\delta_{\bar{u}}]^T \int_V \sigma_{tt} \delta \eta_{tt} dV \{\bar{u}\} \quad (4.26)$$

$$= [\delta_{\bar{u}}]^T \int_V E \eta_{tt} \delta \eta_{tt} dV \{\bar{u}\} \quad (4.27)$$

Donde:

$$\eta_{tt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{\partial w^2}{\partial t} \right) \quad (4.28)$$

$$\delta \eta_{tt} = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial \delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} \right) \cos^2(\alpha) \quad (4.29)$$

Integrando las expresiones anteriores, se obtiene que los factores nulos son dados por el acople entre traslaciones transversales al eje longitudinal y flexión. Sin embargo, y a diferencia de la matriz elástica, estos términos en la matriz de rigidez total no son nulos, debido a que el resto de factores asociados a este acoplamiento no lo son. Las expresiones resultantes para la matriz de rigidez geométrica correspondiente a un *slip state* se presentan en la sección E.2.2 de Anexos.

### 4.3. Resultados numéricos

Mediante el modelo propuesto anteriormente, se identifican los elementos finitos que discretizan el cable que presentan curvaturas mayores a la curvatura crítica en algunos de sus ejes transversales, para cada nivel de deformación axial. Ante esto, es de interés cuantificar cuál es el nivel de deslizamiento que experimenta el cable según la hipótesis de deslizamiento utilizada, para los diferentes niveles de deformación axial.

De esta forma, para el el cable de acero galvanizado de diámetro 9.5 [mm] se calcula el porcentaje de elementos finitos que se encuentran deslizando con respecto al total de elementos finitos en Figura 4.5, según cada incremento de deformación axial, para 1 y 2 alambres dañados.

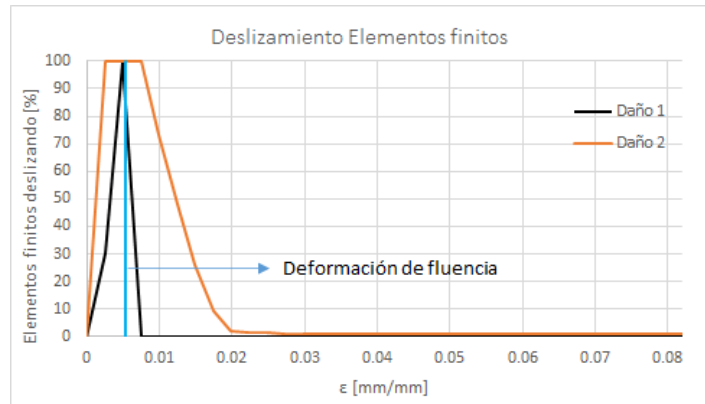


Figura 4.5: Daño 1: Deslizamiento de elementos finitos.

La Figura 4.5 muestra un resultado de gran importancia para este trabajo. Según la hipótesis de deslizamiento considerada y las curvaturas que desarrolla el cable de acero 9.5 [mm] con 1 daño, con una discretización homogénea, se observa en la Figura 4.5 que el cable comienza a deslizarse ante la aplicación de bajas deformaciones axiales, alcanzando un peak en la curva donde el 100 % de los elementos finitos se encuentran deslizando. Sin embargo, al aplicar una mayor deformación axial, la rigidez del cable aumenta (debido a la matriz de rigidez geométrica) e induce que las curvaturas dejen superar los valores de curvatura crítica, alcanzando un nuevo estado de no deslizamiento o *stick state* que se mantiene hasta la máxima deformación que puede alcanzar el cable. De este modo, se muestra que el *slip state* se desarrolla sólo para un dominio acotado de la deformación axial, el cual incluye tanto el rango elástico como plástico del material

Debido a que existen elementos finitos en *slip state*, el algoritmo numérico calcula las matrices de rigidez (elástica y geométrica) asociadas al caso con deslizamiento para estos elementos finitos. Esto induce una flexibilización en la curva de capacidad del cable con respecto al modelo Stick, el cual no considera el deslizamiento relativo entre alambres, lo que se muestra en la Figura 4.6 y 4.7.

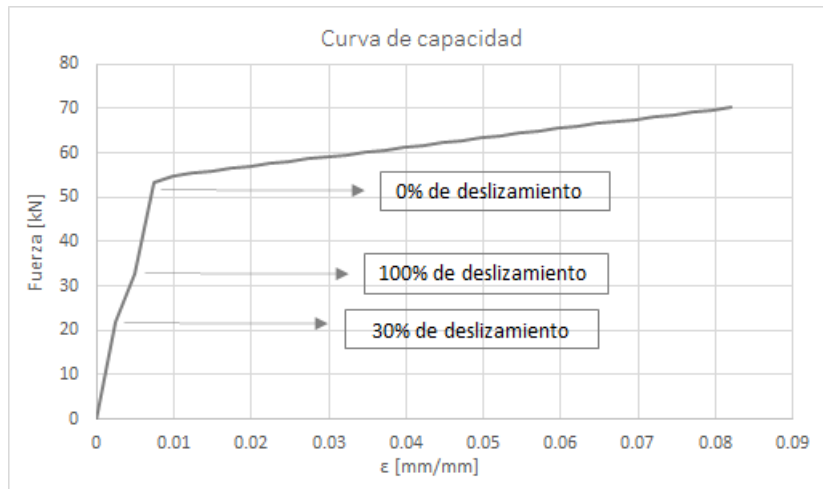


Figura 4.6: Curva de capacidad modelo Stick-Slip cable acero diámetro 9.5 [mm] daño 1.

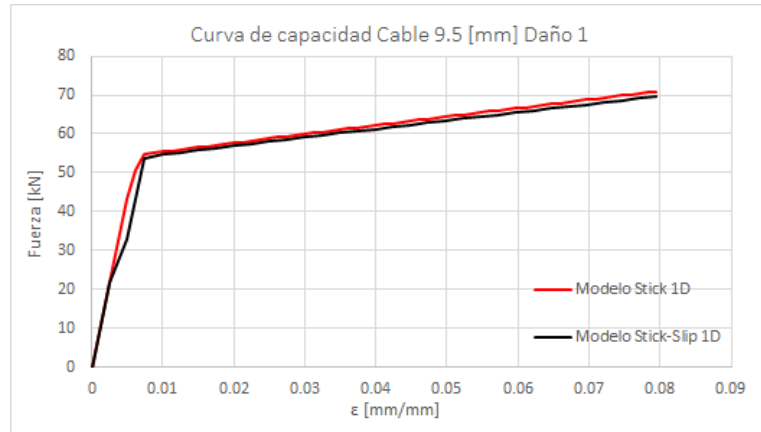


Figura 4.7: Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 1

A partir de los gráficos anteriores presentados en Figuras 4.6 y 4.7 se observa una no linealidad en la curva de capacidad para deformaciones axiales inferiores a la de fluencia, lo que se debe al estado y porcentaje de deslizamiento que presenta el cable para cada nivel de deformación axial según lo presentado en Figura 4.5. En efecto, en la Figura 4.6 se identifican 3 tramos con pendientes diferentes ubicadas en el rango lineal según la ley constitutiva del material, sin embargo, se evidencian cambios en la rigidez del cable según el porcentaje de elementos finitos que se encuentran en *Slip State*, lo que induce una flexibilización en la curva de capacidad. De igual forma, se presentan las curvas de capacidad para el cable de acero galvanizado de diámetro 9.5 [mm] con 2 alambres dañados, y para cables de aluminio de diámetro 10.1 [mm] y 14.3 [mm], y de acero de diámetro 12.7 [mm] con 1 y 2 alambres dañados, en las Figuras 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14.

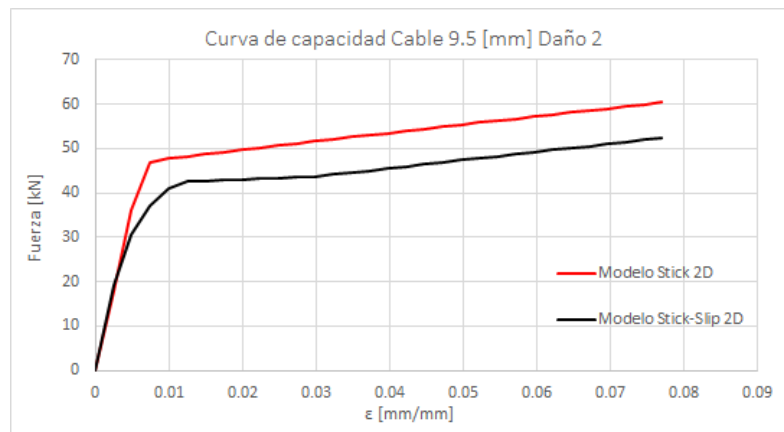


Figura 4.8: Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 2.

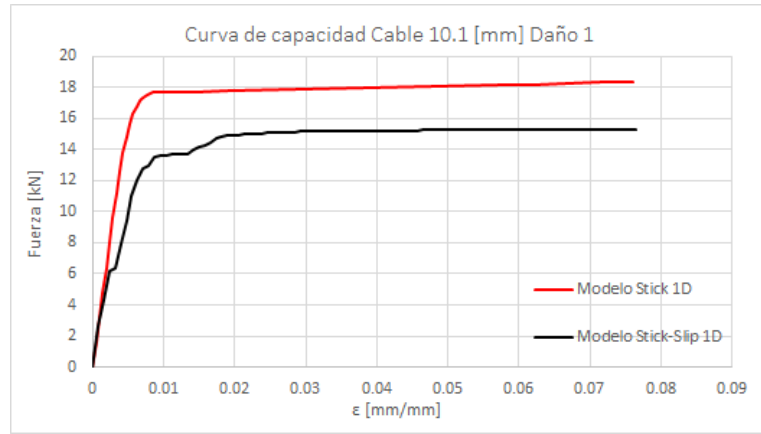


Figura 4.9: Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable aluminio diámetro 10.1 [mm], daño 1.

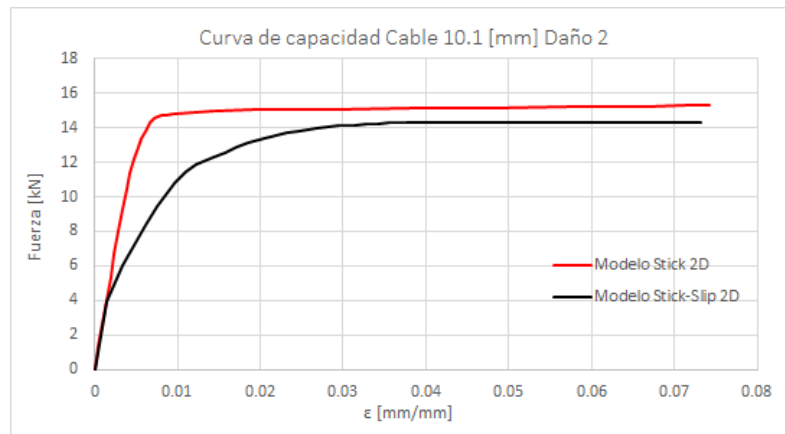


Figura 4.10: Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable aluminio diámetro 10.1 [mm], daño 2.

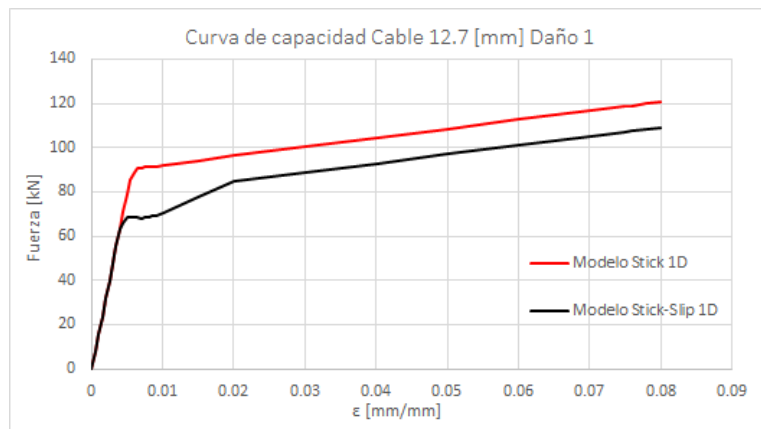


Figura 4.11: Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable acero diámetro 12.7 [mm], daño 1.



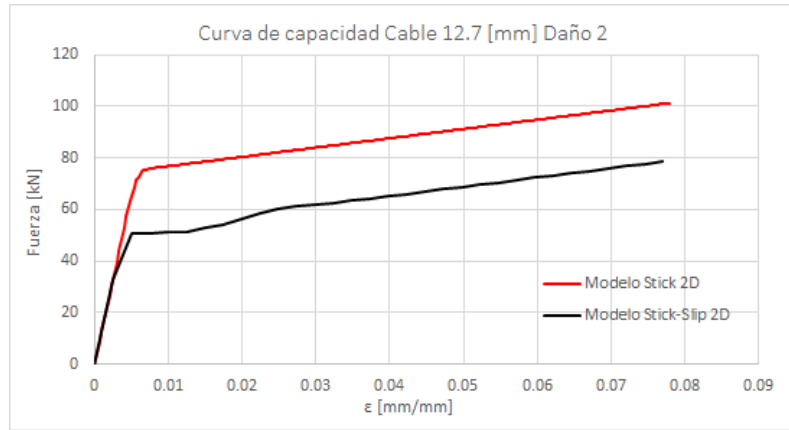


Figura 4.12: Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable acero diámetro 12.7 [mm], daño 2.

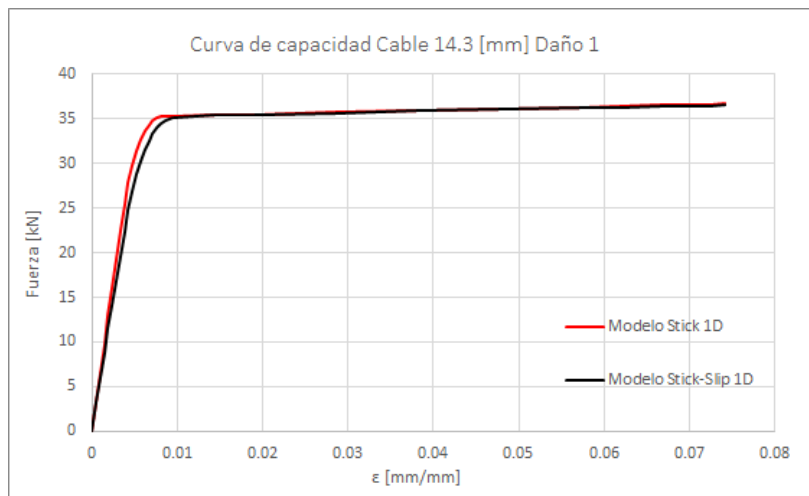


Figura 4.13: Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable aluminio diámetro 14.3 [mm], daño 1.

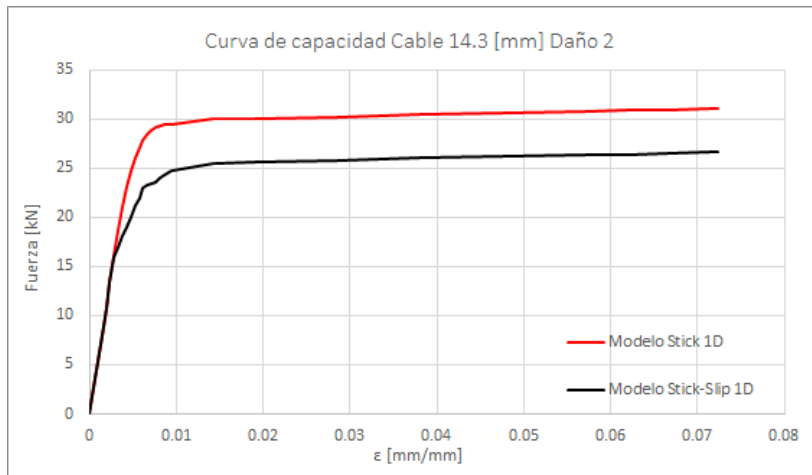


Figura 4.14: Curva de capacidad modelo Stick y Stick-Slip, cable aluminio diámetro 14.3 [mm], daño 2.

A partir de las curvas de capacidad obtenidas con el modelo desarrollado en este trabajo (modelo stick-slip), se evidencia que el deslizamiento relativo entre alambres tiene una directa implicancia en la curva de capacidad del cable. En particular, se demuestra que en las zonas (niveles de deformación axial) donde existe deslizamiento, la rigidez (pendiente en el gráfico fuerza-deformación) del cable disminuye; sin embargo, al volver a un *stick state* el cable recupera la misma rigidez que presenta el modelo de Viga Bernoulli. Pese a esto, la pérdida de rigidez para el modelo Stick-Slip induce que la curva de capacidad se flexibilice con respecto al modelo Stick, lo que se traduce en una pérdida de tenacidad del cable al desarrollar deslizamiento.

Por otra parte, debido a la hipótesis conservadora considerada que define cuándo un elemento finito se encuentra en *slip state*, se espera que la respuesta mecánica real del cable se encuentre en una zona media entre las curvas presentadas según ambos modelos. Para validar estos resultados, se grafican las curvas de capacidad presentadas en las figuras previas junto a los datos experimentales obtenidos en el trabajo *"Influencia de la distribución de daño en curvas de capacidad de cables: Análisis Experimental"* (Núñez Jorquera, 2018), en las Figuras 4.15 a 4.24.

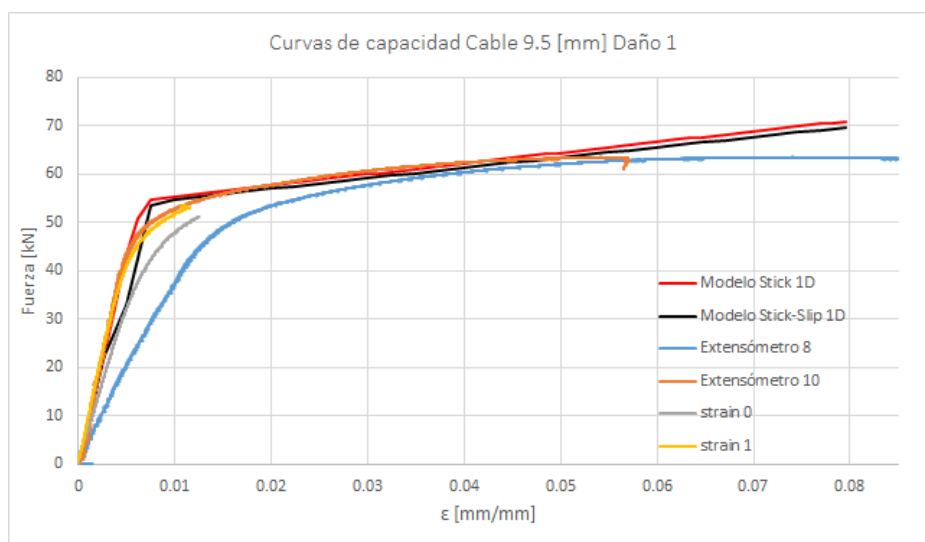


Figura 4.15: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 1.

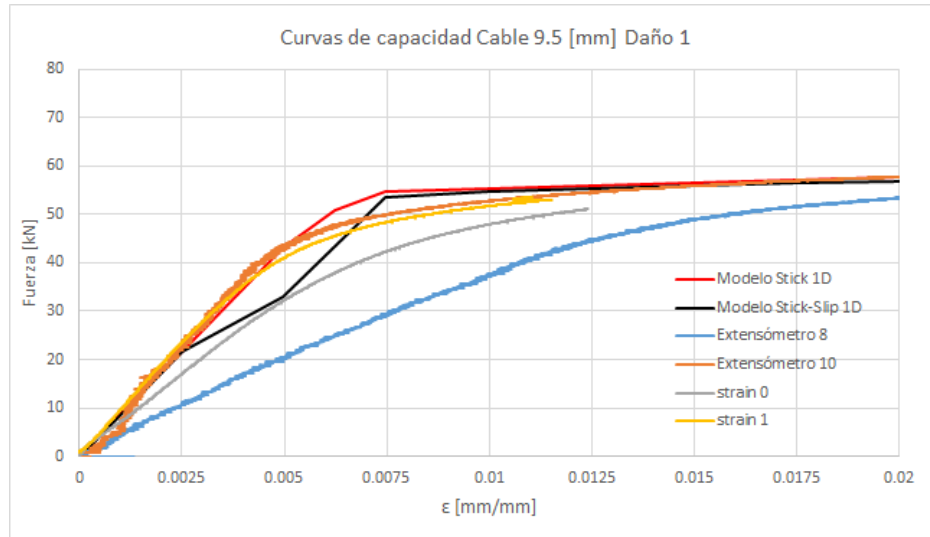


Figura 4.16: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 1, dominio acotado.

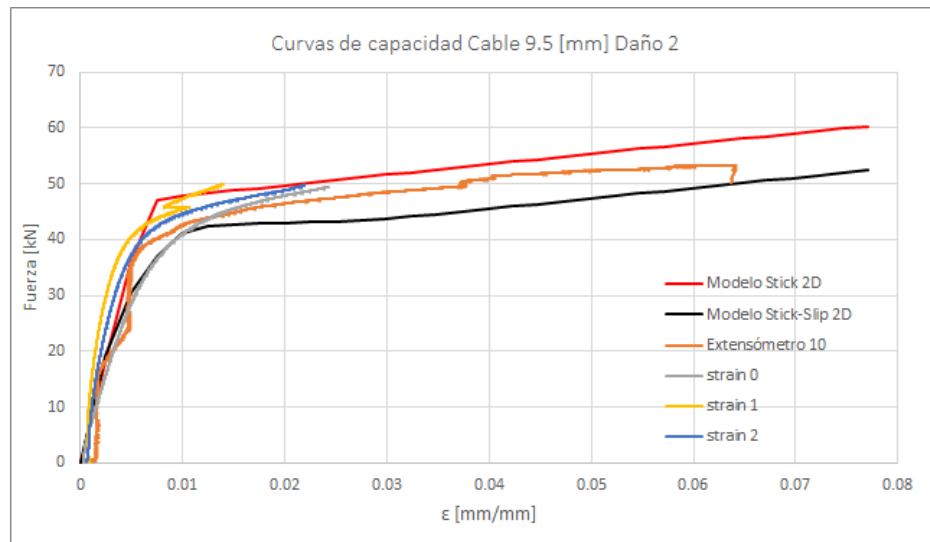


Figura 4.17: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 2.

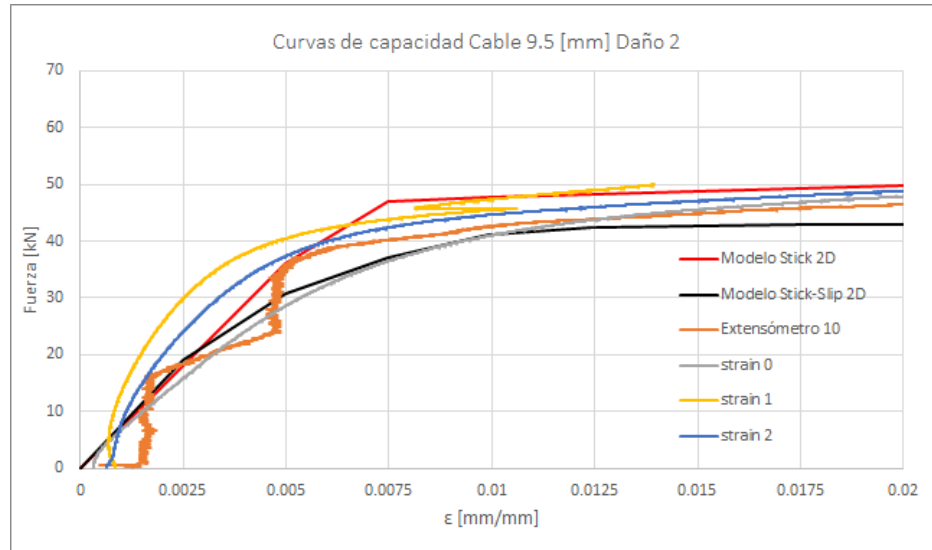


Figura 4.18: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 9.5 [mm], daño 2, dominio acotado.

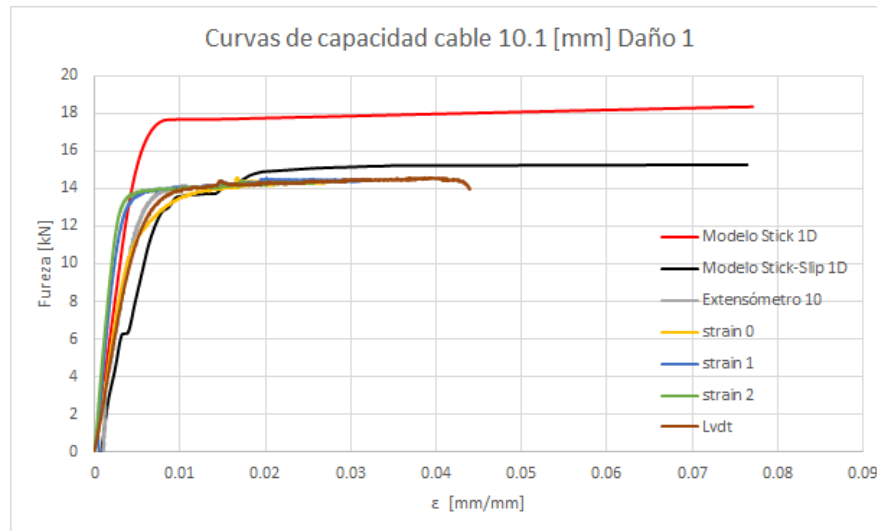


Figura 4.19: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable aluminio diámetro 10.1 [mm], daño 1.

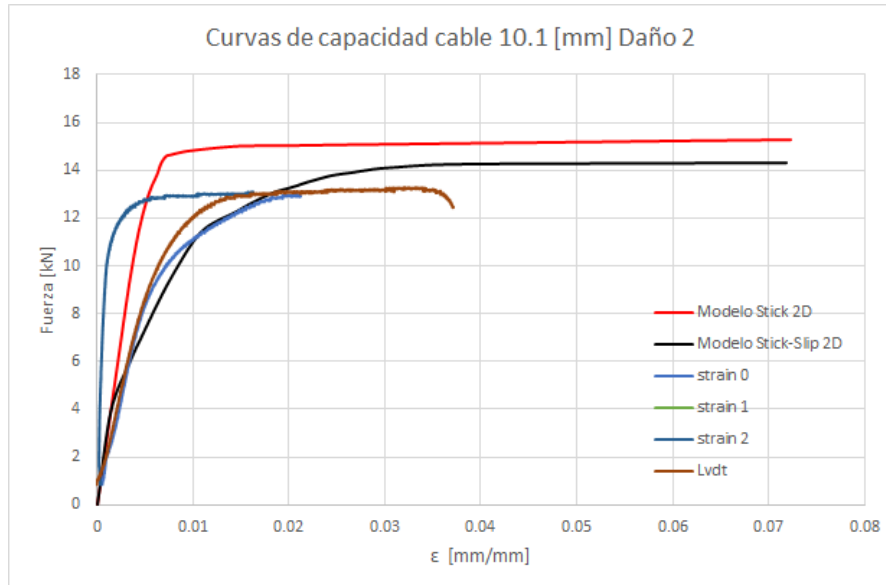


Figura 4.20: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable aluminio diámetro 10.1 [mm], daño 2.

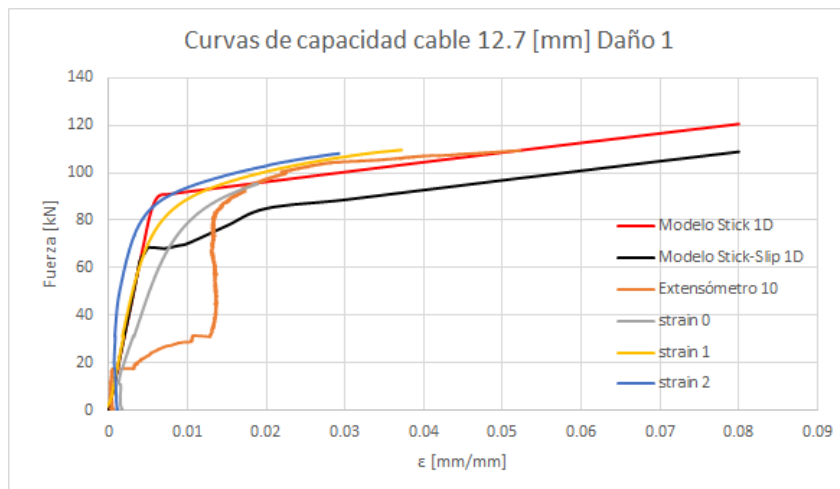


Figura 4.21: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 12.7 [mm], daño 1.

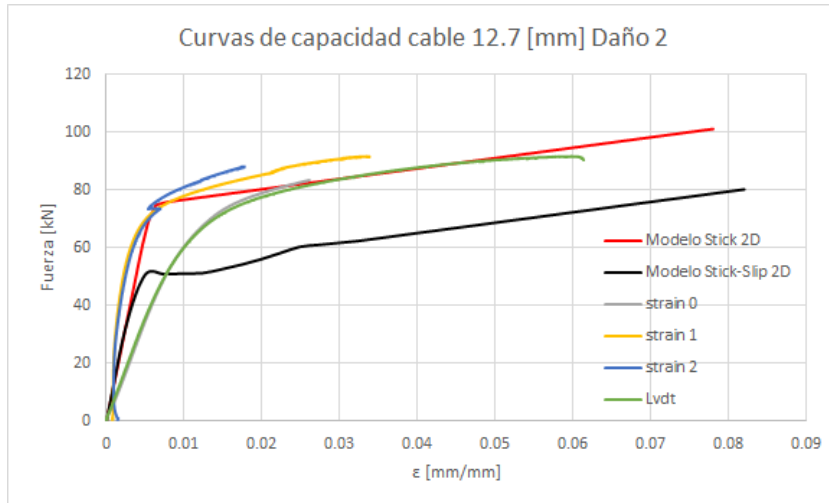


Figura 4.22: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable acero diámetro 12.7 [mm], daño 2.

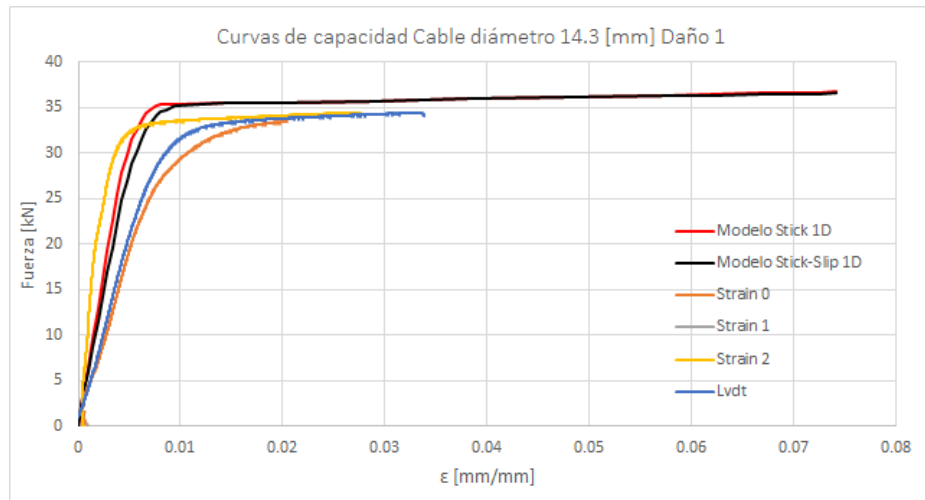


Figura 4.23: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable aluminio diámetro 14.3 [mm], daño 1.

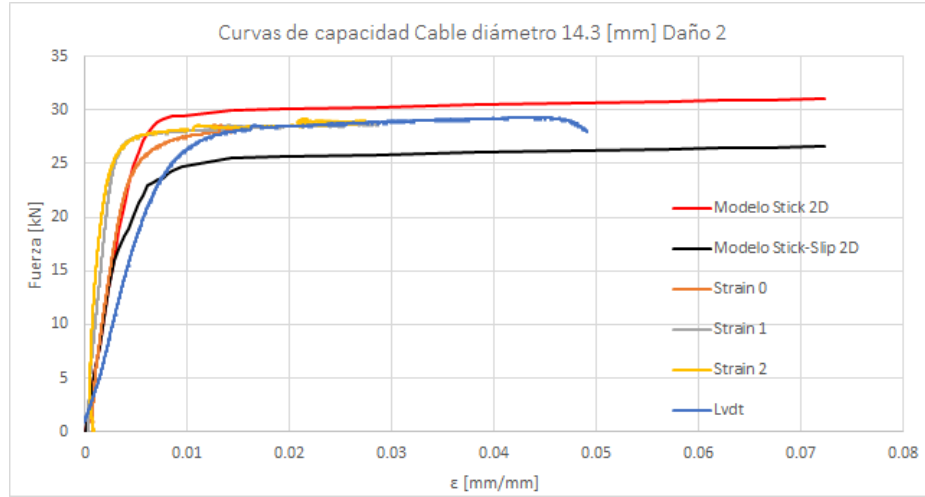


Figura 4.24: Curvas de capacidad teóricas y experimentales, cable aluminio diámetro 14.3 [mm], daño 2.

Las anteriores Figuras permiten corroborar y verificar la hipótesis de deslizamiento considerada para el modelo presentado. En particular en las Figuras 4.15 a 4.24 se observa que los datos experimentales de los cables ensayados se encuentran en la zona intermedia entre las curvas definidas por el modelo Stick y el modelo Stick-Slip del presente trabajo. Esto muestra que el modelo implementado corresponde a una cota inferior, y por lo tanto conservadora, para la respuesta en términos de capacidad real del cable con daño asimétrico.

Por otro lado, para evaluar y cuantificar la influencia del deslizamiento relativo entre alambres, se calcula una rigidez equivalente para la curva de capacidad en el rango lineal-elástico obtenida con el modelo propuesto ( $K_{Leq}^{Stick-Slip}$ ) y se compara con la rigidez equivalente en el rango lineal-elástico obtenida con la curva de capacidad utilizando el modelo con hipótesis de viga Bernoulli ( $K_{Leq}^{Stick}$ ) en Tabla 4.1, donde la rigidez equivalente se calcula según la siguiente expresión:

$$K_{Leq} = \frac{\sum_i^n K_{L_i} \cdot \Delta\varepsilon_i}{\sum_i^n \Delta\varepsilon_i} \quad (4.30)$$

Tabla 4.1: Resultados rigidez lineal equivalente.

	$K_{Leq}^{Stick}$ [kN]	$K_{Leq}^{Stick-Slip}$ [kN]	Razón [%]
Cable 9.5 [mm], Daño 1	8698.14	7177.32	82.5 %
Cable 9.5 [mm], Daño 2	6297.25	4975.41	79.0 %
Cable 10.1 [mm], Daño 1	3116.27	2004.19	64.3 %
Cable 10.1 [mm], Daño 2	2565.10	1505.55	58.7 %
Cable 12.7 [mm], Daño 1	15844.28	13696.18	86.4 %
Cable 12.7 [mm], Daño 2	13015.59	10217.27	78.5 %
Cable 14.3 [mm], Daño 1	6273.46	5667.87	90.3 %
Cable 14.3 [mm], Daño 2	5200.10	4205.13	80.9 %

Con estos resultados se muestra la influencia del deslizamiento en el tramo elástico de

los cables estudiados en cuanto a rigidez por unidad de longitud. Encontrando una máxima diferencia entre el modelo Stick y el modelo Stick-Slip de un 42.3 % para el cable de aluminio 10.1 [mm] con 2 alambres dañados. Tal como se menciona previamente, esta pérdida de rigidez para el rango lineal elástico responde a que el deslizamiento entre alambres se desarrolla para bajas deformaciones axiales. Según los resultados de Tabla 4.1, se evidencia una tendencia de la razón entre rigidez lineal equivalente a converger a una razón cercana a un 80 % para dos alambres dañados; y además, a medida que se consideran cables de diámetros mayores para 1 alambre dañado, la razón entre rigidez equivalente presenta una tendencia a aumentar, desde un 82.5 % para cable 9.5 [mm] hasta un 90.3 % para cable de 14.3 [mm]. Lo anterior se cumple para cables de diámetros 9.5 [mm], 12.7 [mm] y 14.3 [mm], encontrando para el cable de acero en diámetro 10.1 [mm] una mayor pérdida de rigidez en la curva de capacidad, lo que induce razones menores en comparación a los demás cables.

Otro resultado de interés que permite evaluar el impacto de considerar el *slip state* que desarrolla el cable, se encuentra en el estudio "*A new approach to low-cycle fatigue damage based on exhaustion of static toughness and dissipation of cyclic plastic strain energy during fatigue*" (Duyi y Zhenlin, 2001), donde se presenta una expresión para cuantificar un índice de daño de un cable ( $D_r$ ) a partir de la relación entre la tenacidad (área bajo la curva fuerza-deformación) del cable dañado ( $U_T$ ) y la tenacidad del cable sin daño ( $U_{T0}$ ). Esto se traduce en la siguiente expresión:

$$D_r(\tau) = 1 - \frac{U_T(\tau)}{U_{T0}} \quad (4.31)$$

Integrando las curvas de capacidad, se obtienen los siguientes resultados para el índice de daño según cada modelo en Tabla 4.2; donde la última columna corresponde al daño asociado al área neta, es decir, el porcentaje de área dañada de la sección transversal según el número de alambres cortados.

Tabla 4.2: Resultados índice de daño ( $D_r$ ) para cables.

	$D_r^{VB}$ [%]	$D_r^{Stick-Slip}$ [%]	$D_r^{A_{neta}}$ [%]
Cable 9.5 [mm], Daño 1	8.4 %	11.9 %	14.29 %
Cable 9.5 [mm], Daño 2	25.7 %	36.1 %	28.57 %
Cable 10.1 [mm], Daño 1	15.2 %	31.4 %	14.29 %
Cable 10.1 [mm], Daño 2	33.4 %	39.7 %	28.57 %
Cable 12.7 [mm], Daño 1	16.2 %	26.3 %	14.29 %
Cable 12.7 [mm], Daño 2	32.9 %	50.1 %	28.57 %
Cable 14.3 [mm], Daño 1	18.8 %	19.4 %	14.29 %
Cable 14.3 [mm], Daño 2	33.25 %	43.0 %	28.57 %

Estos resultados pueden ser presentados de forma gráfica, en Figura 4.25, donde se presentan los puntos asociados al índice de daño de cada cable, para el modelo Stick y Stick-Slip, y junto a la recta correspondiente al área neta.



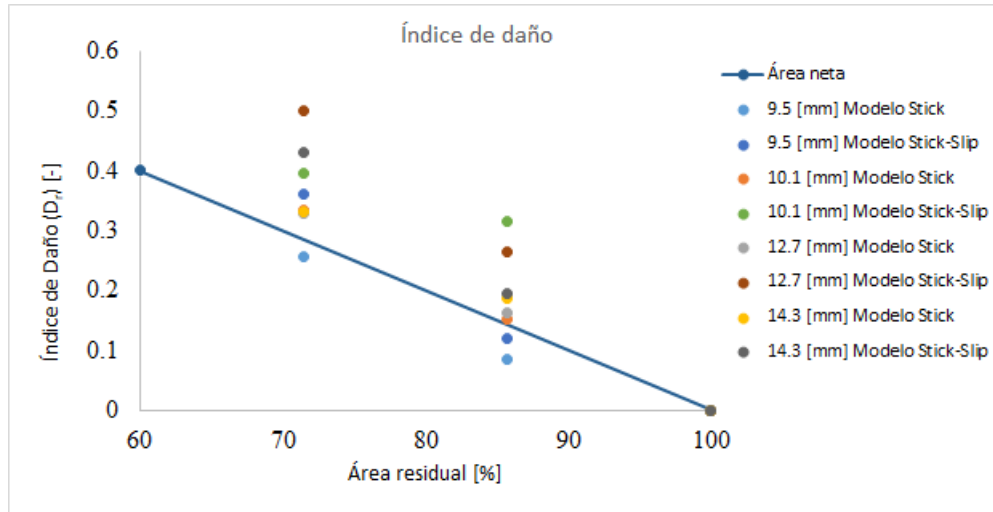


Figura 4.25: Índice de daño según modelos Stick y Stick-Slip para cables estudiados.

Estos resultados de Tabla 4.2 y Figura 4.25 muestran que el modelo Stick-Slip asocia al cable, en términos de energía, un mayor daño que el modelo de Viga Bernoulli; es decir, un valor de ( $D_r$ ) mayor, debido a la pérdida de capacidad evidenciada. Se observa que para el cable de acero 9.5 [mm] se obtiene un índice de daño menor que el valor asociado al área neta, debido a que su curva de capacidad se sobreestima con respecto a lo esperado y con la curva de capacidad asociada al área neta. Sin embargo, los demás resultados con el modelo Stick-Slip muestran un mayor daño que el obtenido por área neta. Estos resultados permiten concluir que el modelo de Viga-Bernoulli subestima el daño real que desarrollan los cables, mientras que el modelo que considera el deslizamiento relativo corrige esto mediante la flexibilización de la curva capacidad y por lo tanto un mayor daño en términos de energía mediante el índice ( $D_r$ ).

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Resumen

En el presente trabajo se presenta un análisis numérico del fenómeno de variación de rigidez a flexión para cables con daño asimétrico. Se extiende el modelo numérico de elementos finitos desarrollado por Tomás Bravo (Bravo Tetlak, 2018), tal que permite calcular la respuesta mecánica, a través de una cota inferior de la curva de capacidad, de cables metálicos en acero o aluminio con daño asimétrico en su sección transversal incorporando el posible deslizamiento entre alambres. Mediante las hipótesis desarrolladas, se permite evaluar el estado de deslizamiento (*Stick* o *Slip State*) que presentan los elementos finitos en que se discretiza el cable, lo cual, en caso de encontrarse en *Slip State*, induce una pérdida de rigidez a flexión del cable y por lo tanto una flexibilización en la curva de capacidad y un comportamiento no lineal de la respuesta fuerza-deformación.

### 5.2. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo, se puede concluir lo siguiente:

1. El modelo implementado permite obtener las curvaturas que experimenta un cable de acero galvanizado o aluminio, para diferentes niveles de daño asimétrico. Así también permite calcular valores de curvaturas críticas para cada eje de la sección transversal del cable, y determinar para cada nivel de deformación axial el estado de deslizamiento (*stick* o *slip*) en que se encuentra cada elemento finito que discretiza al cable.
2. Por medio del punto anterior, se evidencia el fenómeno de capa límite estudiado por Matías Hofer (Hofer Jaramillo, 2020), verificando que en la zona cercana a los anclajes del cable, zona de capa límite, los valores de curvatura son mayores que en la zona central del cable, fuera de la capa límite, para uno de los ejes transversales del cable.
3. Se identifica y demuestra que las zonas donde primeramente se genera el deslizamiento relativo entre alambres es en la zona de capa límite, lo cual coincide con daños por fatiga observados en la literatura. Una vez los elementos finitos en capa límite se encuentran en *Slip State*, este estado de deslizamiento es propagado hacia la zona fuera de la capa límite, alcanzando *Slip State* en todo el largo del cable.
4. Las curvaturas del cable son mayores a medida que aumenta el daño asimétrico en la sección transversal. Sin embargo, la curvatura crítica disminuye al presentar mayor

daño asimétrico. Esto induce que al aumentar el daño asimétrico en la sección transversal de un cable, el deslizamiento relativo entre alambres comience para una menor deformación axial con respecto a un cable con un menor número de alambres dañados asimétricamente.

5. La curvatura crítica para cada eje crece linealmente con la deformación axial; sin embargo, las curvaturas que desarrolla el cable crecen a una menor tasa con respecto a la deformación axial inducida. Esto implica que a partir de cierto nivel de deformación axial, los alambres del cable se encuentran en completa adherencia (*stick state*). Esto implica que el deslizamiento entre alambres se encuentra acotado para un rango de deformación axial aplicada sobre el cable.
6. Las hipótesis consideradas en el trabajo, tanto para definir el deslizamiento del elemento finito a partir del deslizamiento en uno de los ejes transversales, como el considerar sólo dos regímenes de deslizamiento (despreciando la zona de transición), responden a una buena aproximación del fenómeno estudiado, con la finalidad de acotar la respuesta mecánica del cable, validadas por los resultados obtenidos y la comparativa realizada con datos experimentales existentes.
7. Según a lo anteriormente mencionado, la hipótesis de considerar el cable como un elemento viga Euler-Bernoulli (Bravo Tetlak, 2018) es buena aproximación para la respuesta estática de cables, según resultados obtenidos a partir de tenacidad, rigidez equivalente en el rango lineal elástico y comparativa con datos experimentales. Sin embargo, se debe tener en consideración que los resultados a través de esta hipótesis sobreestima la respuesta mecánica del cable. En efecto, comparando los modelos Stick y Stick-Slip, se obtienen rigideces lineales equivalentes ( $K_{Leq}$ ) con una variación entre 9.7 y 41.3% dependiendo del diámetro, material y nivel de daño; y una variación máxima en el índice de daño ( $D_r$ ) de un 17.2%.

### 5.3. Limitaciones y recomendaciones de investigación futura

Las conclusiones presentadas son válidas para el estudio estático de cables con daño asimétrico. En este sentido no son extrapolables para un análisis dinámico con cargas cíclicas. Por lo tanto, se sugiere estudiar de forma particular el caso dinámico, donde la fatiga genera un amortiguamiento y degradación al sistema (*fretting fatigue*) lo que puede inducir que la modelación del cable como elemento viga tipo Euler-Bernoulli no sea una buena aproximación como lo es para el análisis estático. Además, las conclusiones son válidas para el caso de flexión inducida mediante el daño asimétrico que presentan los distintos cables estudiados; es posible que otras causas de flexión inducida presenten un mayor impacto en el nivel de curvaturas que desarrolla el cable, por consecuencia en el estado de deslizamiento que puede desarrollar el cable, y finalmente en su capacidad mecánica.

# Bibliografía

- Arena, A., Pacitti, A., y Lacarbonara, W. (2016). Nonlinear response of elastic cables with flexural-torsional stiffness. *International journal of solids and structures*, 87, 267–277.
- Beltrán, J. F., y Bravo, T. (2020). Evaluation of the coupled effect of strain localization and asymmetric damage distribution on rope response: Numerical approach based on a nonlinear cable-beam element. *Engineering Structures*, 207, 110258.
- Beltran, J. F., y Bravo, T. P. (2021). Numerical assessment of the damage-tolerance properties of polyester ropes and metallic strands. *Structural Engineering and Mechanics*, 79(1), 83–96.
- Beltrán, J. F., y De Vico, E. (2015). Assessment of static rope behavior with asymmetric damage distribution. *Engineering Structures*, 86, 84–98.
- Beltrán, J. F., y Inostroza, E. (2021). Simplified analysis of damage evolution in surface-damaged metallic strands: Uncoupled approach. *Engineering Failure Analysis*, 105916.
- Beltrán, J. F., Nuñez, E., Nuñez, F., Silva, I., Bravo, T., y Moffat, R. (2018). Static response of asymmetrically damaged metallic strands: Experimental and numerical approach. *Construction and Building Materials*, 192, 538–554.
- Bravo Tetlak, T. P. (2018). Estimación numérica de la respuesta estática de un cable dañado: Formulación viga-cable.
- Cardou, A. (2013). *Stick-slip mechanical models for overhead electrical conductors in bending (with matlab® applications)*. Alain Cardou.
- Dastous, J.-B. (2005). Nonlinear finite-element analysis of stranded conductors with variable bending stiffness using the tangent stiffness method. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 20(1), 328–338.
- Duyi, Y., y Zhenlin, W. (2001). A new approach to low-cycle fatigue damage based on exhaustion of static toughness and dissipation of cyclic plastic strain energy during fatigue. *International Journal of Fatigue*, 23(8), 679–687.
- Foti, F., y Martinelli, L. (2016a). An analytical approach to model the hysteretic bending behavior of spiral strands. *Applied Mathematical Modelling*, 40(13-14), 6451–6467.
- Foti, F., y Martinelli, L. (2016b). Mechanical modeling of metallic strands subjected to tension, torsion and bending. *International Journal of Solids and Structures*, 91, 1–17.
- Foti, F., Martinelli, L., y Perotti, F. (2016). A new approach to the definition of self-damping for stranded cables. *Meccanica*, 51(11), 2827–2845.

- Hofer Jaramillo, M. E. (2020). Daño superficial asimétrico en cables: aplicación método de perturbaciones.
- Inostroza Correa, E. I. (2021). Estudio numérico de la distribución y evolución del daño en cables metálicos.
- Khan, S. W., Gencturk, B., Shahzada, K., y Ullah, A. (2018). Bending behavior of axially preloaded multilayered spiral strands. *Journal of Engineering Mechanics*, 144(12), 04018112.
- Langlois, S., Legeron, F., y Lévesque, F. (2013). Time history modeling of vibrations on overhead conductors with variable bending stiffness. *IEEE transactions on power delivery*, 29(2), 607–614.
- Lanteigne, J. (1985). Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion, and bending.
- Núñez Jorquera, F. P. C. (2018). Influencia de la distribución del daño en curvas de capacidad de cables: análisis experimental.
- Papailiou, K. (1997). On the bending stiffness of transmission line conductors. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(4), 1576–1588.
- Paradis, J.-P. H., y Légeron, F. (2011). Modelling of the free bending behavior of a multilayer cable taking into account the tangential compliance of contact interfaces. En *Ninth international symposium on cable dynamics* (pp. 18–20).
- Siegert, D., y Brevet, P. (2005). Fatigue of stay cables inside end fittings: high frequencies of wind induced vibrations. *Bulletin*, 89, 43–51.

# Anexo A

## Inercias máximas y mínimas cables con daño asimétrico

Con la geometría de cada cable, el tipo de daño y su distancia al centro de gravedad, se utilizan las ecuaciones 3.11, 3.12 y 3.13 se obtienen los valores de inercias para sus ejes principales.

Tabla A.1: Cable 1x7, diámetro de alambre 3.1 [mm]. Inercias máximas y mínimas según ejes principales.

	$I_{yy}$ Máx [mm <sup>4</sup> ]	$I_{yy}$ Min [mm <sup>4</sup> ]	$I_{zz}$ Máx[mm <sup>4</sup> ]	$I_{zz}$ Min [mm <sup>4</sup> ]
Daño 1	239.068	27.006	156.599	27.006
Daño 2	199.230	22.511	86.130	22.511
Daño 3	119.553	18.017	53.360	18.017

Tabla A.2: Cable 1x7, diámetro de alambre 3.37 [mm]. Inercias máximas y mínimas según ejes principales.

	$I_{yy}$ Máx [mm <sup>4</sup> ]	$I_{yy}$ Min [mm <sup>4</sup> ]	$I_{zz}$ Máx[mm <sup>4</sup> ]	$I_{zz}$ Min [mm <sup>4</sup> ]
Daño 1	332.793	37.679	277.338	37.679
Daño 2	277.338	31.409	119.944	31.409
Daño 3	166.427	25.140	74.325	25.140

Tabla A.3: Cable 1x7, diámetro de alambre 4.19 [mm]. Inercias máximas y mínimas según ejes principales.

	$I_{yy}$ Máx [mm <sup>4</sup> ]	$I_{yy}$ Min [mm <sup>4</sup> ]	$I_{zz}$ Máx[mm <sup>4</sup> ]	$I_{zz}$ Min [mm <sup>4</sup> ]
Daño 1	795.26	90.041	521.01	90.041
Daño 2	662.74	75.059	286.63	75.059
Daño 3	412.69	60.076	177.61	60.076

Tabla A.4: Cable 1x7, diámetro de alambre 4.77 [mm]. Inercias máximas y mínimas según ejes principales.

	$I_{yy}$ Máx [mm <sup>4</sup> ]	$I_{yy}$ Min [mm <sup>4</sup> ]	$I_{zz}$ Máx[mm <sup>4</sup> ]	$I_{zz}$ Min [mm <sup>4</sup> ]
Daño 1	1344.2	151.53	880.41	151.53
Daño 2	1120.2	126.3	484.12	126.3
Daño 3	697.44	101.08	299.87	101.08

# Anexo B

## Polinomio Ley Constitutiva

Imponiendo que el polinomio de tercer grado es de clase C1, se debe presentar continuidad en la función y en su derivada. Esto se traduce en las siguientes condiciones que permiten obtener las constantes del polinomio:

$$\sigma'(\varepsilon'_y) = E_e \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma'(\varepsilon''_y) = E_p \quad (\text{B.2})$$

$$\sigma(\varepsilon'_y) = E_e \cdot \varepsilon'_y \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma(\varepsilon''_y) = E_e \cdot \varepsilon_y + E_p(\varepsilon''_y - \varepsilon_y) \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{B.5})$$

Resolviendo las condiciones anteriores junto a la definición de ley constitutiva presentada en la ecuación 3.21, se obtienen las constantes del polinomio de tercer orden:

$$a = \frac{(E_e - E_p)(2\varepsilon_y - \varepsilon'_y - \varepsilon''_y)}{(\varepsilon'_y - \varepsilon''_y)((\varepsilon'_y)^2 - 2\varepsilon'_y\varepsilon''_y + (\varepsilon''_y)^2)} \quad (\text{B.6})$$

$$b = \frac{(E_e - E_p)(3\varepsilon_y - \varepsilon'_y - 2\varepsilon''_y)}{(\varepsilon'_y)^2 - 2\varepsilon'_y\varepsilon''_y + (\varepsilon''_y)^2} \quad (\text{B.7})$$

$$c = E_e \quad (\text{B.8})$$

$$d = E_e \cdot \varepsilon'_y \quad (\text{B.9})$$

De esta forma, se presentan los parámetros utilizados para definir la ley constitutiva tanto de acero galvanizado como de aluminio.



Tabla B.1: Parámetros ley constitutiva Acero galvanizado y Aluminio

	Acero	Aluminio
Ee [Mpa]	196603.774	64509.8
Ep [Mpa]	5228.162	207
$\varepsilon_y$	0.0053	0.0049
$\varepsilon'_y$	0.005	0.003
$\varepsilon''_y$	0.006	0.0095
$\varepsilon_b$	0.082	0.0745
a	76550244800	632198627.3
b	-210513173.2	-11110305.51
c	196603.774	64509.80
d	983.01887	193.529

# Anexo C

## Gráficos Momento y Rigidez a Flexión vs Curvatura

A continuación se muestran los gráficos momento vs curvatura y rigidez a flexión ( $EI$ ) vs curvatura para cables en formato 1x7 de aluminio en diámetros 10.1 [mm] y 14.3 [mm] y de acero galvanizado en diámetro 12.7 [mm], considerando 1 y 2 alambres dañados.

### C.1. Cable Aluminio 1x7 (1+6) diámetro 10.1 [mm]

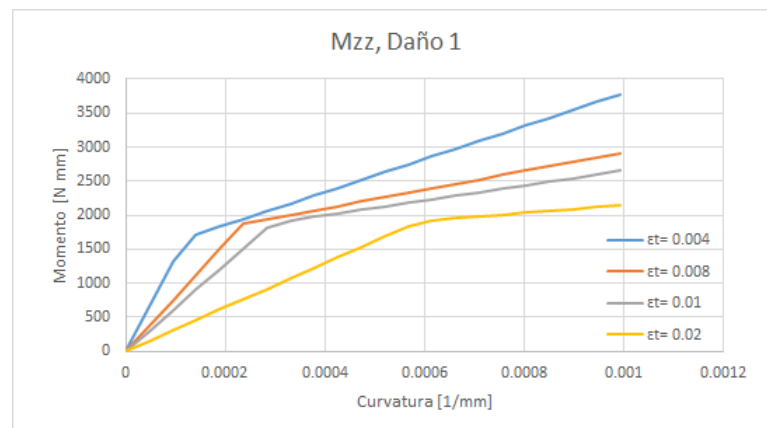


Figura C.1: Daño 1: Momento en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 10.1 [mm].

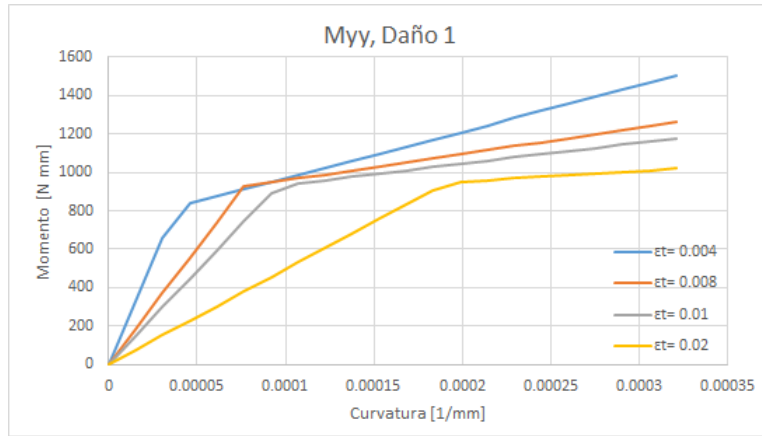


Figura C.2: Daño 1: Momento en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 10.1 [mm].

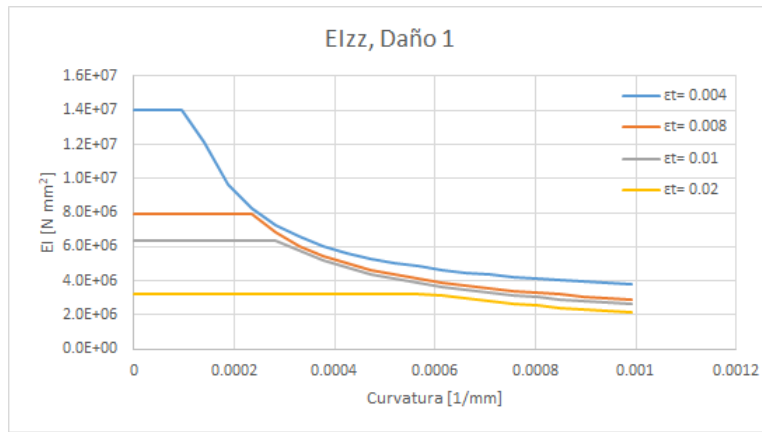


Figura C.3: Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 10.1 [mm].

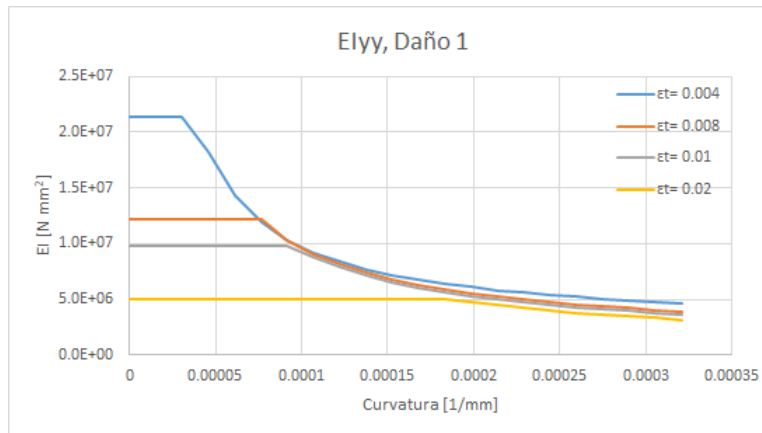


Figura C.4: Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 10.1 [mm].

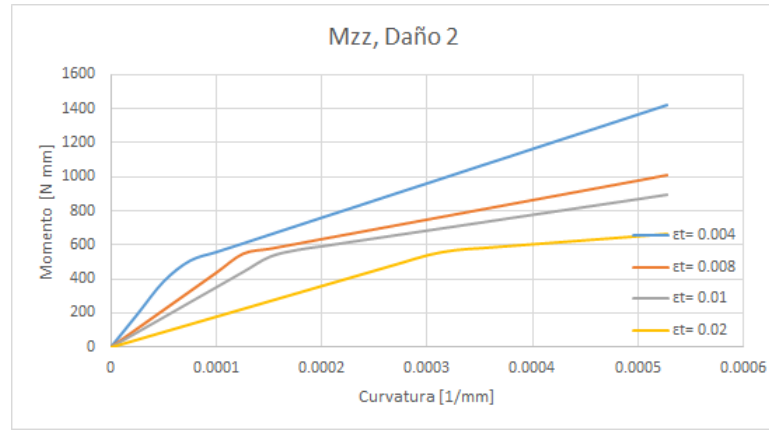


Figura C.5: Daño 2: Momento en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 10.1 [mm].

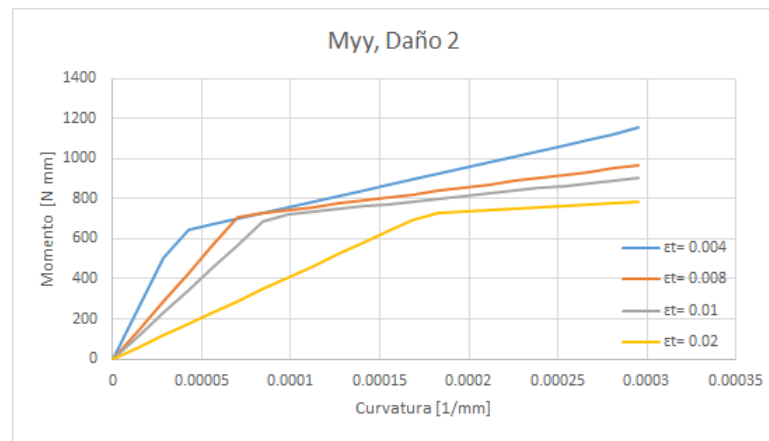


Figura C.6: Daño 2: Momento en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 10.1 [mm].

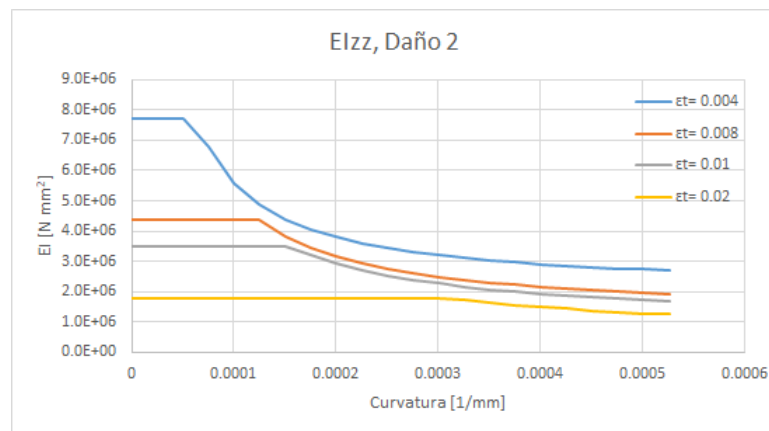


Figura C.7: Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 10.1 [mm].

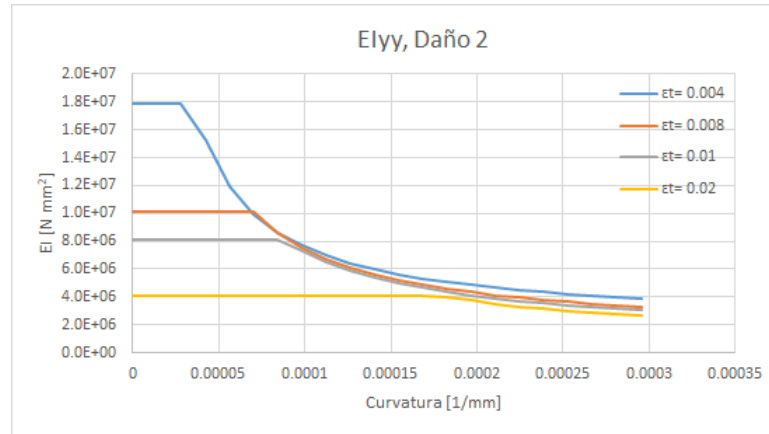


Figura C.8: Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 10.1 [mm].

## C.2. Cable Acero 1x7 (1+6) diámetro 12.7 [mm]

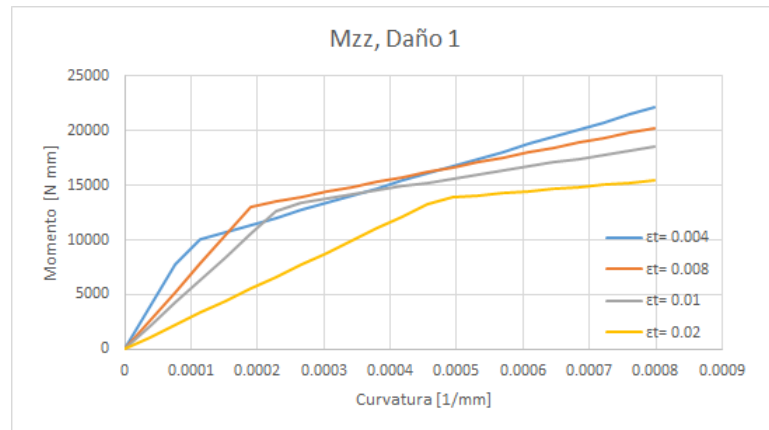


Figura C.9: Daño 1: Momento en eje Z-Z, cable acero diámetro 12.7 [mm].

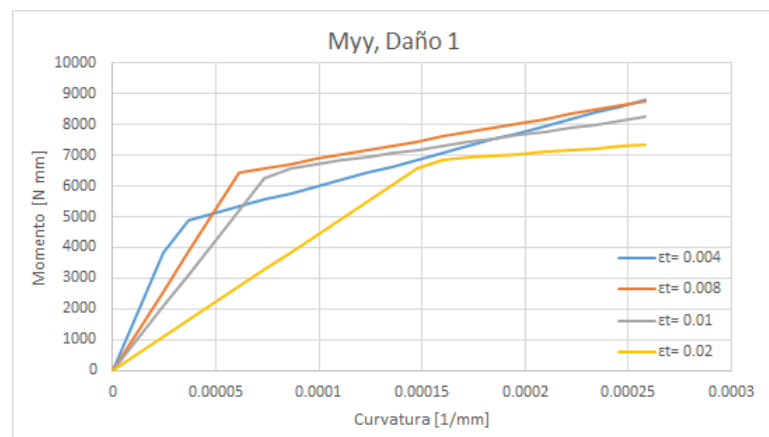


Figura C.10: Daño 1: Momento en eje Y-Y, cable acero diámetro 12.7 [mm].

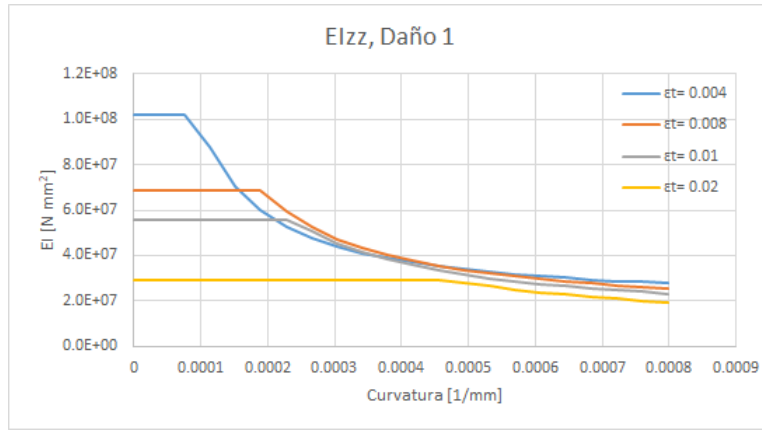


Figura C.11: Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable acero diámetro 12.7 [mm].

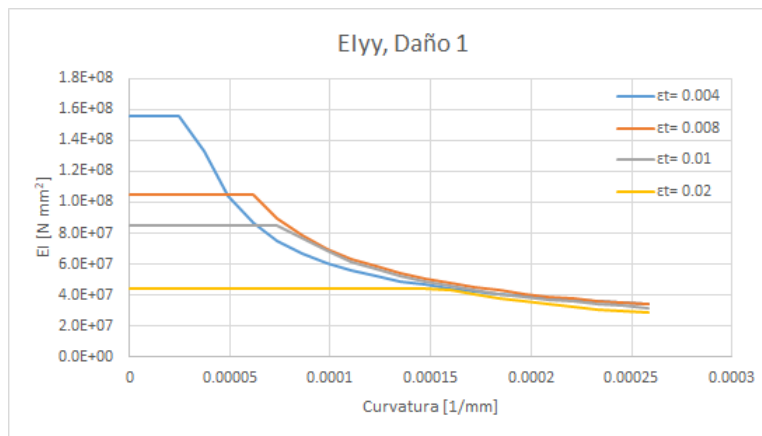


Figura C.12: Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable acero diámetro 12.7 [mm].

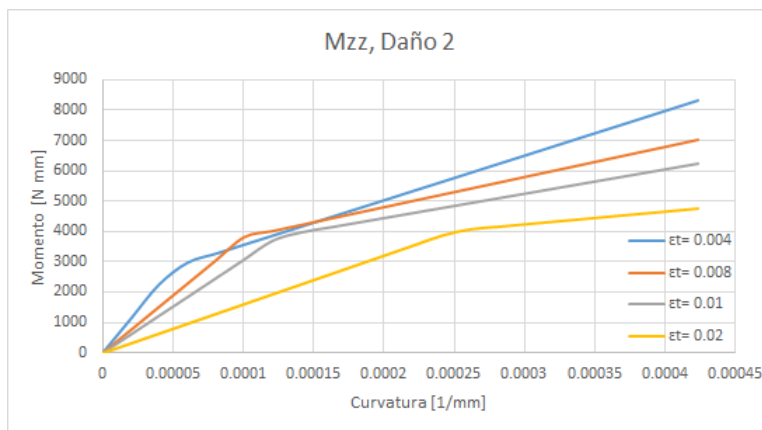


Figura C.13: Daño 2: Momento en eje Z-Z, cable acero diámetro 12.7 [mm].

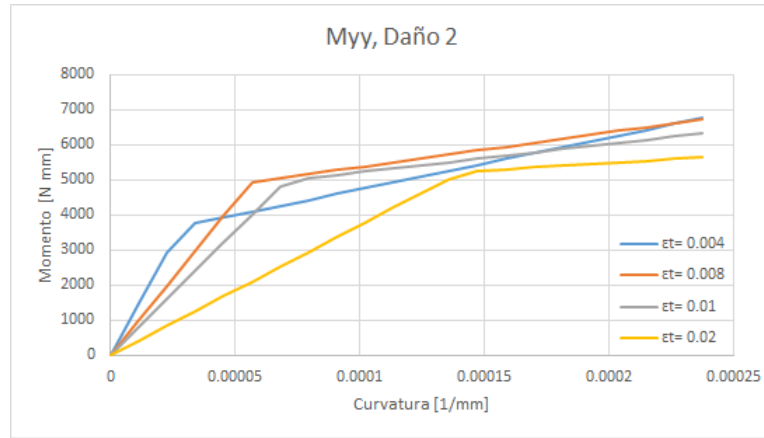


Figura C.14: Daño 2: Momento en eje Y-Y, cable acero diámetro 12.7 [mm].

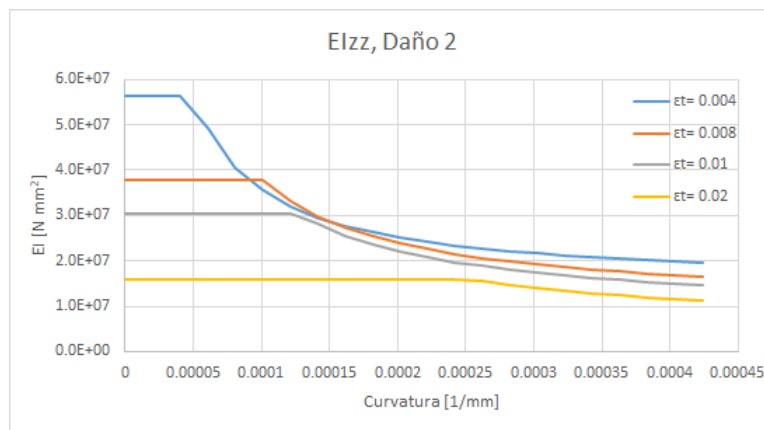


Figura C.15: Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable acero diámetro 12.7 [mm].

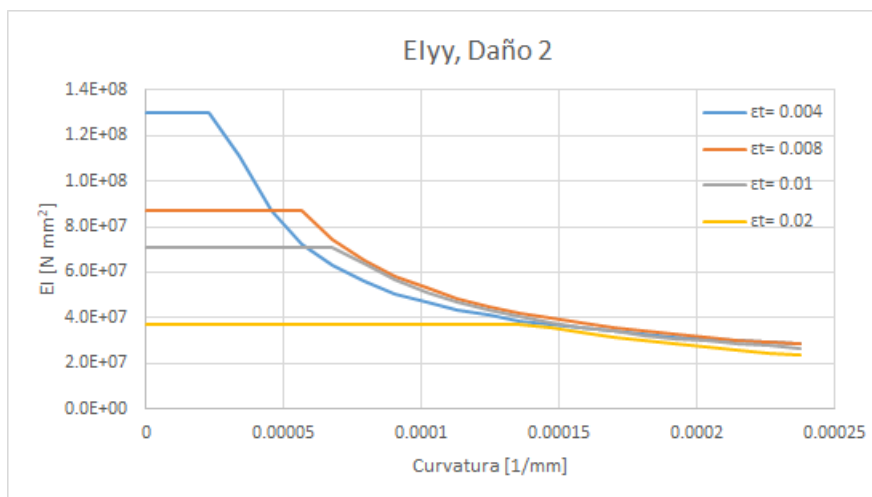


Figura C.16: Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable acero diámetro 12.7 [mm].

### C.3. Cable Aluminio 1x7 (1+6) diámetro 14.3 [mm]

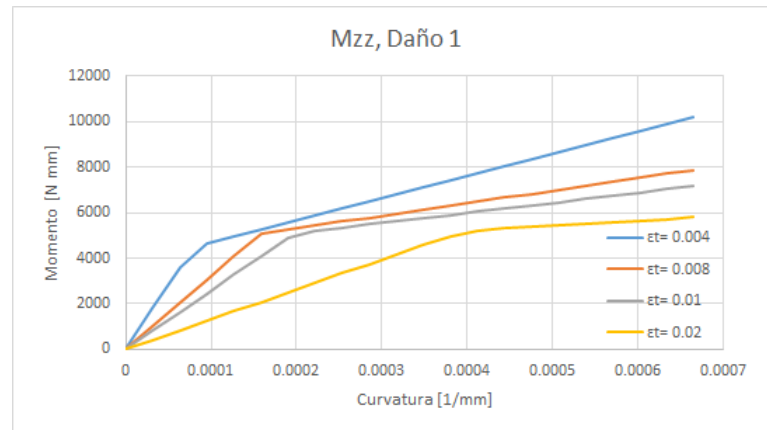


Figura C.17: Daño 1: Momento en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 14.3 [mm].

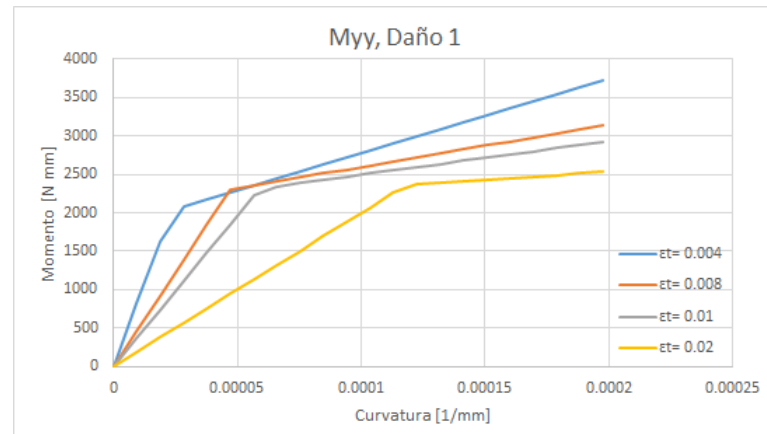


Figura C.18: Daño 1: Momento en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 14.3 [mm].



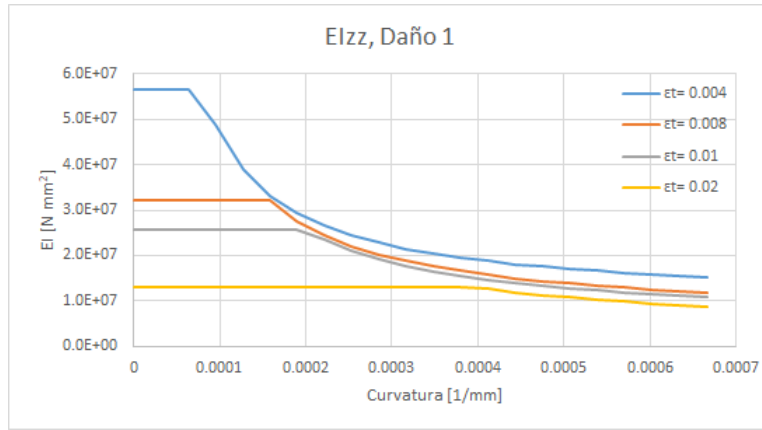


Figura C.19: Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 14.3 [mm].

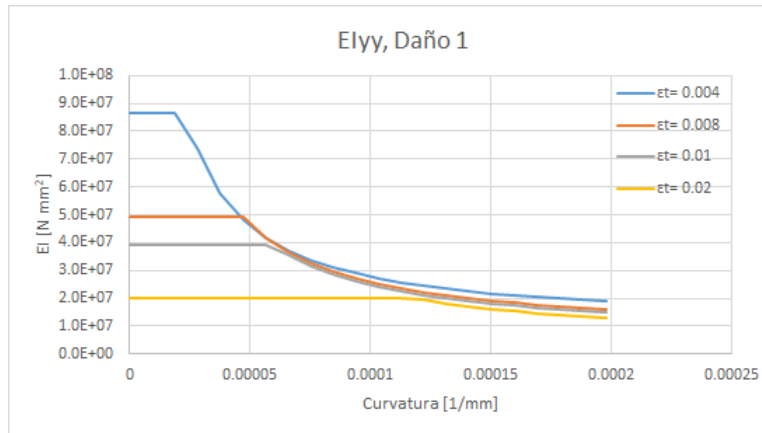


Figura C.20: Daño 1: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 14.3 [mm].

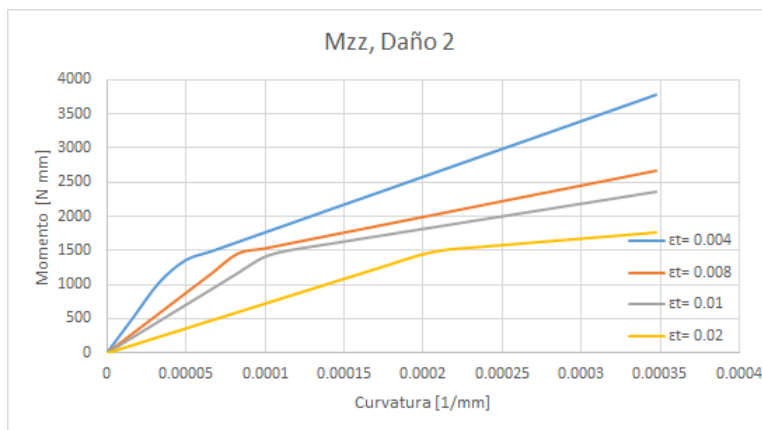


Figura C.21: Daño 2: Momento en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 14.3 [mm].

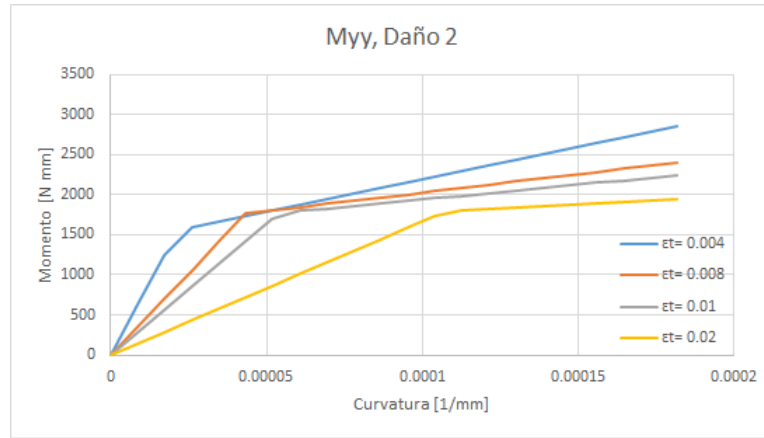


Figura C.22: Daño 2: Momento en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 14.3 [mm].

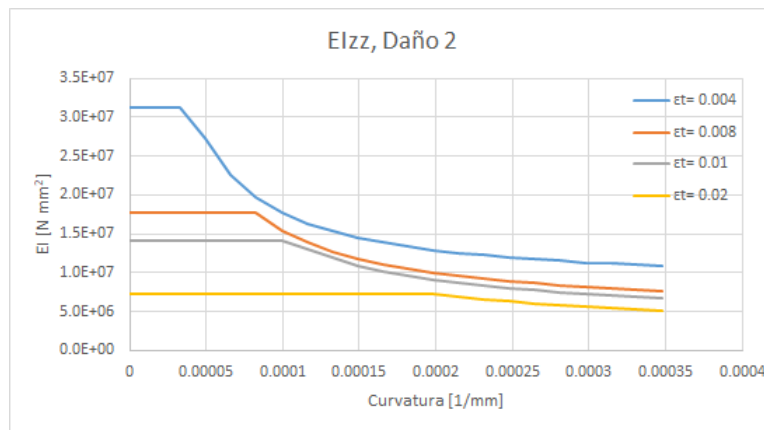


Figura C.23: Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Z-Z, cable aluminio diámetro 14.3 [mm].

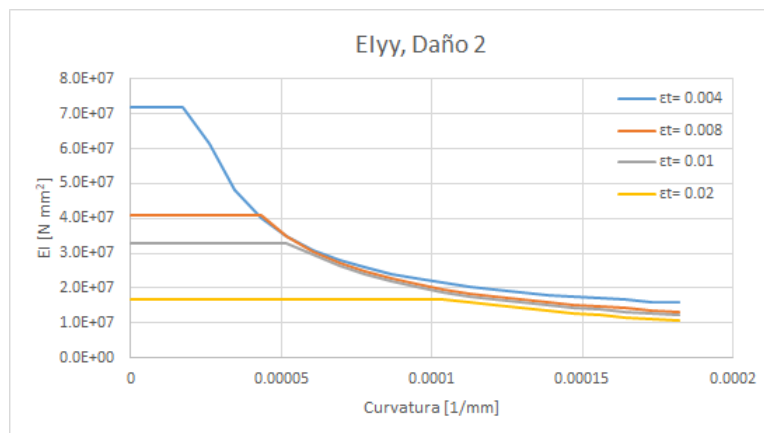


Figura C.24: Daño 2: Variación rigidez a flexión en eje Y-Y, cable aluminio diámetro 14.3 [mm].

# Anexo D

## Gráficos Curvaturas vs Longitud

En esta sección se adjuntan gráficos de curvatura en la longitud del cable según cada eje de la sección transversal, para cable de aluminio en diámetros 10.1 [mm] y 14.3 [mm], y de acero galvanizado en diámetro 12.7 [mm], considerando 1 y 2 alambres dañados.

### D.1. Cable Aluminio 1x7 (1+6) diámetro 10.1 [mm]

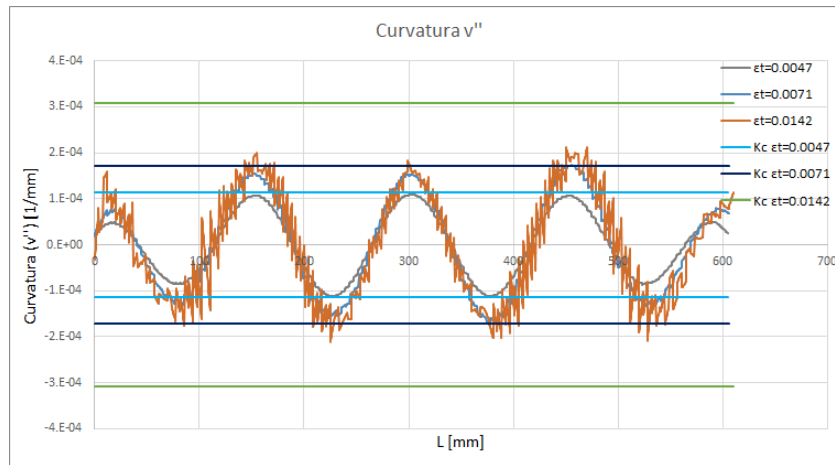


Figura D.1: Daño 1: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 10.1 [mm].

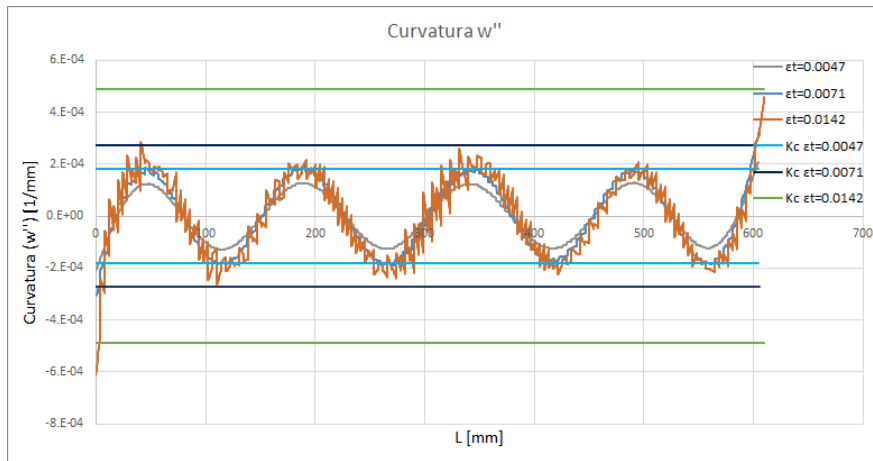


Figura D.2: Daño 1: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 10.1 [mm].

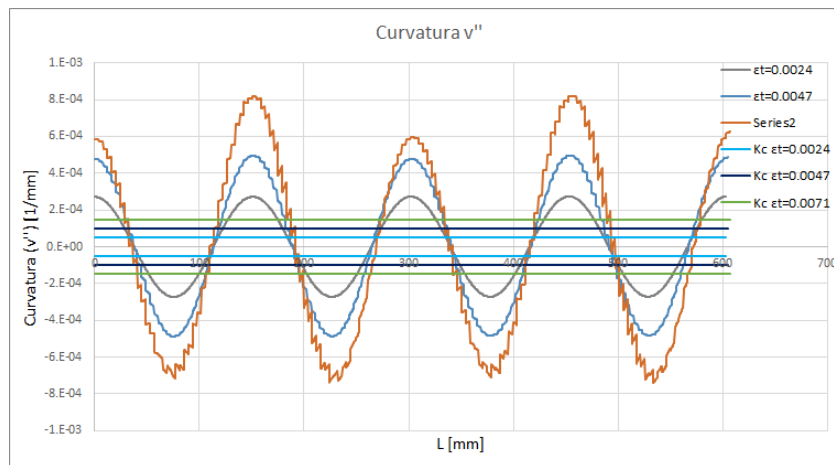


Figura D.3: Daño 2: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 10.1 [mm].

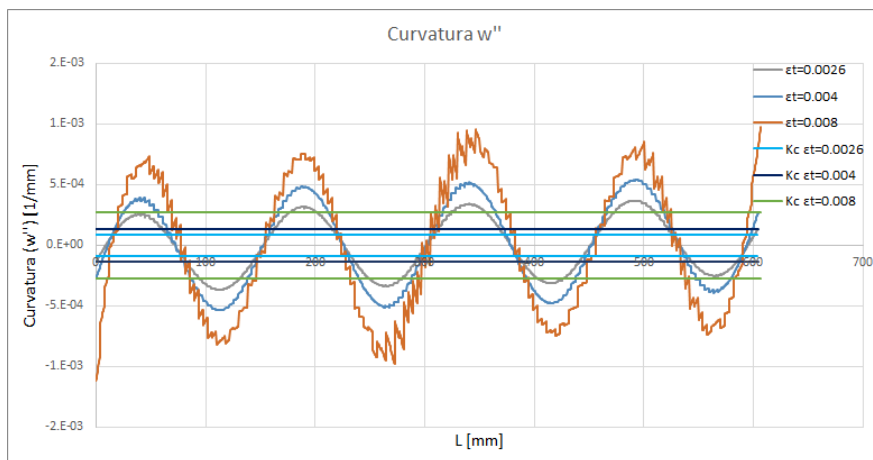


Figura D.4: Daño 2: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 10.1 [mm].

## D.2. Cable Acero 1x7 (1+6) diámetro 12.7 [mm]

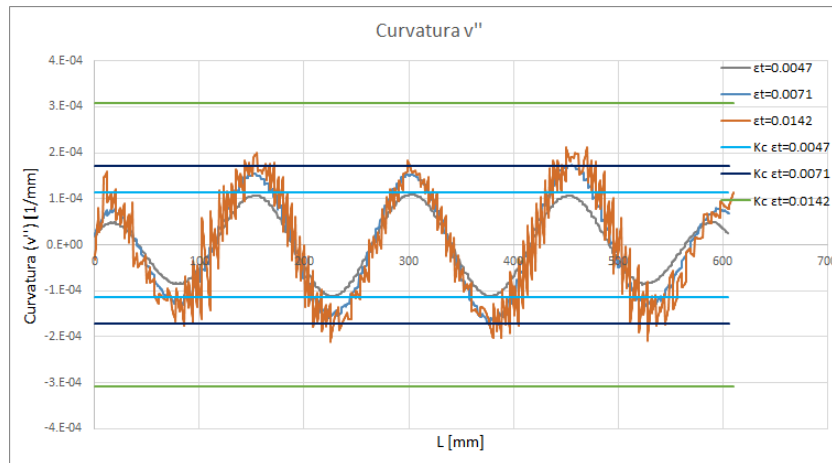


Figura D.5: Daño 1: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 12.7 [mm].

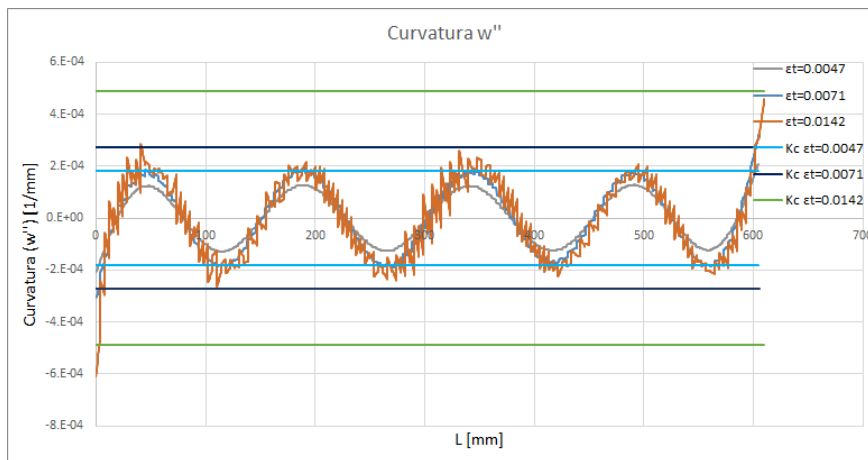


Figura D.6: Daño 1: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 12.7 [mm].

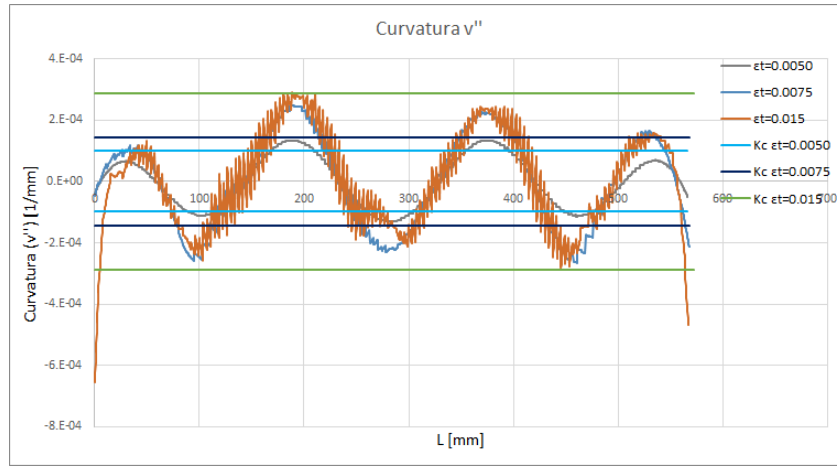


Figura D.7: Daño 2: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 12.7 [mm].

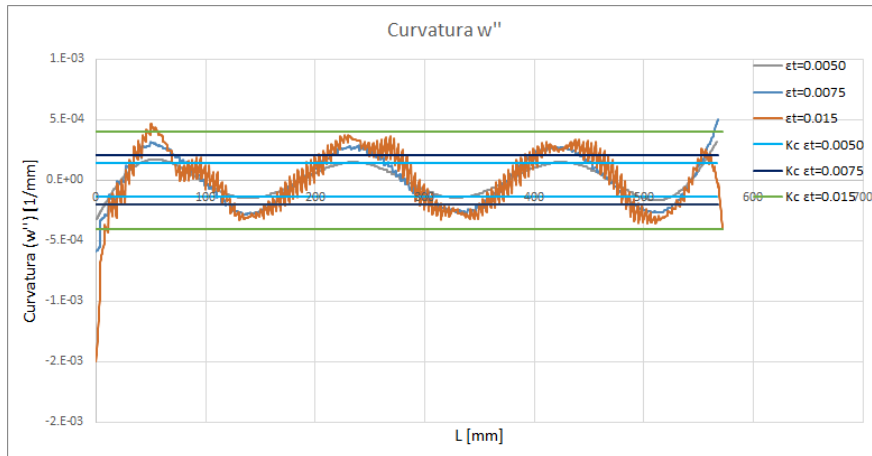


Figura D.8: Daño 2: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 12.7 [mm].

### D.3. Cable Aluminio 1x7 (1+6) diámetro 14.3 [mm]

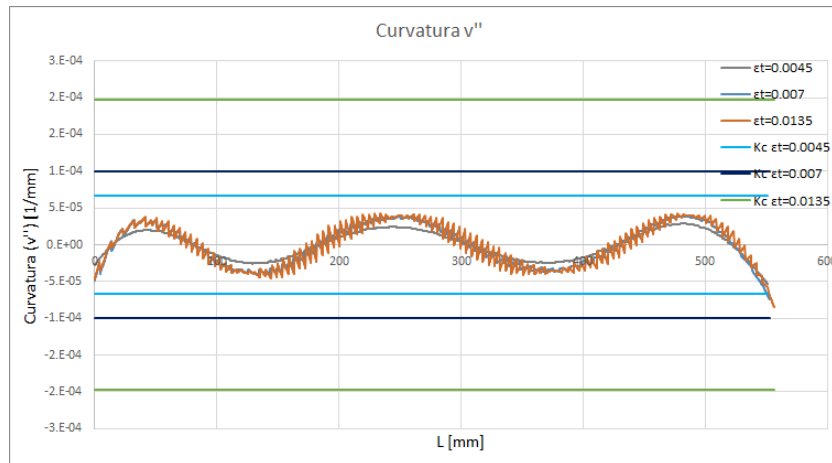


Figura D.9: Daño 1: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 14.3 [mm].

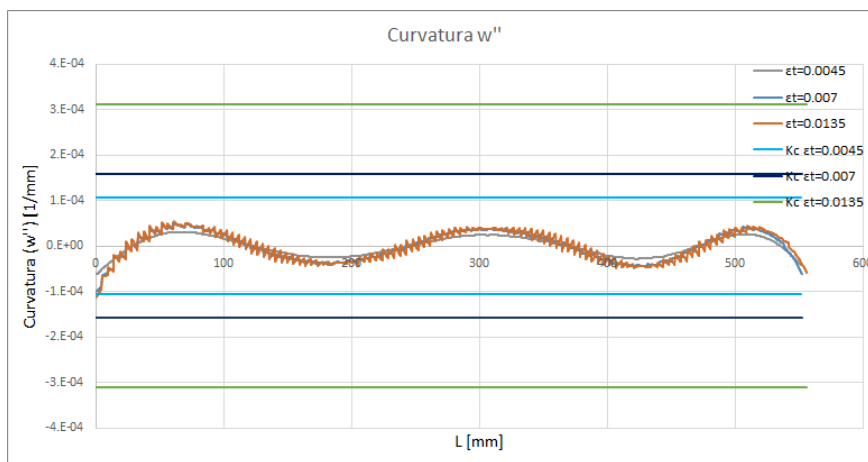


Figura D.10: Daño 1: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 14.3 [mm].

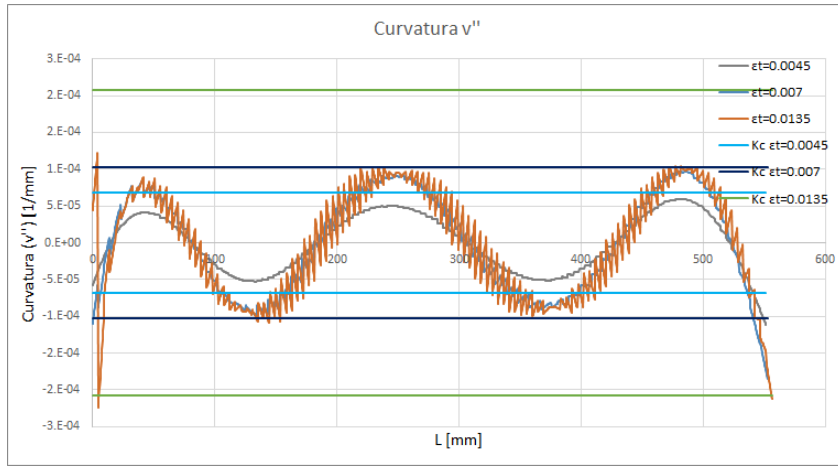


Figura D.11: Daño 2: Curvatura en eje Y-Y vs Largo, Cable diámetro 14.3 [mm].

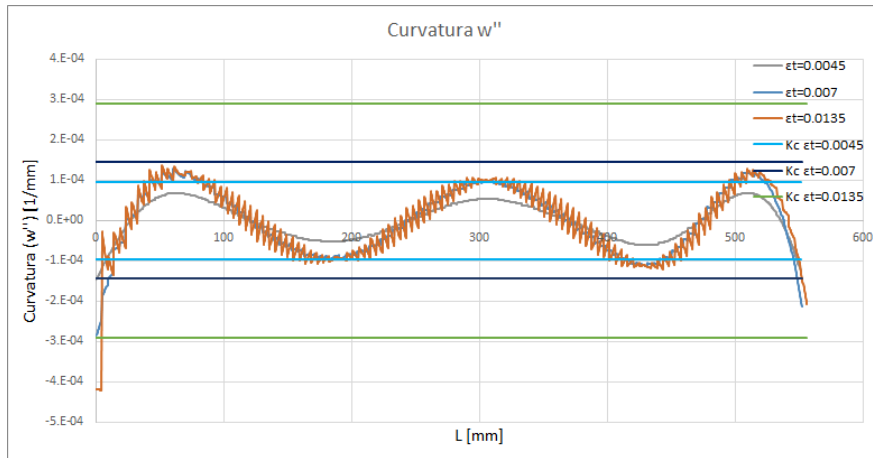


Figura D.12: Daño 2: Curvatura en eje Z-Z vs Largo, Cable diámetro 14.3 [mm].



# Anexo E

## Matrices de rigidez

A continuación se presentan las expresiones para obtener cada valor de las matrices de rigidez, tanto elástica como geométrica, asociadas al caso sin deslizamiento relativo entre alambres (*stick state*) como también para el caso con deslizamiento (*slip state*).

### E.1. Stick State

#### E.1.1. Matriz de rigidez elástica.

$$\begin{pmatrix} K_{E0101} & K_{E0102} & K_{E0103} & \cdots & K_{E0112} \\ K_{E0201} & K_{E0202} & K_{E0203} & \cdots & K_{E0212} \\ K_{E0301} & K_{E0302} & K_{E0303} & \cdots & K_{E0312} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{E1201} & K_{E1202} & K_{E1203} & \cdots & K_{E1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ v_A \\ v_B \\ w_A \\ w_B \\ \theta_{xA} \\ \theta_{xB} \\ \theta_{yA} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zA} \\ \theta_{zB} \end{pmatrix} \quad (E.1)$$

$$\begin{aligned}
 K_{E0101} &= \frac{AE\cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{E0102} &= K_{E0201} = - \left( \frac{AE\cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
 K_{E0103} &= K_{E0301} = 0 \\
 K_{E0104} &= K_{E0401} = 0 \\
 K_{E0105} &= K_{E0501} = 0 \\
 K_{E0106} &= K_{E0601} = 0 \\
 K_{E0107} &= K_{E0701} = \frac{E\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{E0108} &= K_{E0801} = - \left( \frac{E\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
K_{E0109} &= K_{E0901} = \frac{AEz_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0110} &= K_{E1001} = - \left( \frac{AEz_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{E0111} &= K_{E1101} = \frac{AEy_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0112} &= K_{E1201} = - \left( \frac{AEy_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{E0202} &= \frac{AE \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0203} &= K_{E0302} = 0 \\
K_{E0204} &= K_{E0402} = 0 \\
K_{E0205} &= K_{E0502} = 0 \\
K_{E0206} &= K_{E0602} = 0 \\
K_{E0207} &= K_{E0702} = - \left( \frac{E\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
K_{E0208} &= K_{E0802} = \frac{E\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{E0209} &= K_{E0902} = - \left( \frac{AEz_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{E0210} &= K_{E1002} = \frac{AEz_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0211} &= K_{E1102} = - \left( \frac{AEy_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{E0212} &= K_{E1202} = \frac{AEy_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0303} &= \frac{12EI_{zz} \cos(\alpha)}{L^3} + \frac{12AEy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0304} &= K_{E0403} = - \left( \frac{12EI_{zz} \cos(\alpha)}{L^3} \right) - \frac{12AEy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0305} &= K_{E0503} = 0 \\
K_{E0306} &= K_{E0603} = 0 \\
K_{E0307} &= K_{E0703} = 0 \\
K_{E0308} &= K_{E0803} = 0 \\
K_{E0309} &= K_{E0903} = 0 \\
K_{E0310} &= K_{E1003} = 0 \\
K_{E0311} &= K_{E1103} = \frac{6EI_{zz} \cos(\alpha)}{L^2} + \frac{6AEy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0312} &= K_{E1203} = \frac{6EI_{zz} \cos(\alpha)}{L^2} + \frac{6AEy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0404} &= \frac{12EI_{zz} \cos(\alpha)}{L^3} + \frac{12AEy_c \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0405} &= K_{E0504} = 0 \\
K_{E0406} &= K_{E0604} = 0 \\
K_{E0407} &= K_{E0704} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{E0408} &= K_{E0804} = 0 \\
K_{E0409} &= K_{E0904} = 0 \\
K_{E0410} &= K_{E1004} = 0 \\
K_{E0411} &= K_{E1104} = - \left( \frac{6EI_{zz}\cos(\alpha)}{L^2} \right) - \frac{6EAy_c^2\cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0412} &= K_{E1204} = - \left( \frac{6EI_{zz}\cos(\alpha)}{L^2} \right) - \frac{6EAy_c^2\cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0505} &= \frac{12EI_{yy}\cos(\alpha)}{L^3} + \frac{12EAz_c^2\cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0506} &= K_{E0605} = - \left( \frac{12EI_{yy}\cos(\alpha)}{L^3} \right) - \frac{12EAz_c^2\cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0507} &= K_{E0705} = 0 \\
K_{E0508} &= K_{E0805} = 0 \\
K_{E0509} &= K_{E0905} = \frac{6EI_{yy}\cos(\alpha)}{L^2} + \frac{6EAz_c^2\cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0510} &= K_{E1005} = \frac{6EI_{yy}\cos(\alpha)}{L^2} + \frac{6EAz_c^2\cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0511} &= K_{E1105} = 0 \\
K_{E0512} &= K_{E1205} = 0 \\
K_{E0606} &= \frac{12EI_{yy}\cos(\alpha)}{L^3} + \frac{12EAz_c^2\cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0607} &= K_{E0706} = 0 \\
K_{E0608} &= K_{E0806} = 0 \\
K_{E0609} &= K_{E0906} = - \left( \frac{6EI_{yy}\cos(\alpha)}{L^2} \right) - \frac{6EAz_c^2\cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0610} &= K_{E1006} = - \left( \frac{6EI_{yy}\cos(\alpha)}{L^2} \right) - \frac{6EAz_c^2\cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0611} &= K_{E1106} = 0 \\
K_{E0612} &= K_{E1206} = 0 \\
K_{E0707} &= \frac{E \left( \frac{I_{zz}}{\cos(\alpha)^2} + Ay_c^2 \right) \cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{L} + \frac{E \left( \frac{I_{yy}}{\cos(\alpha)^2} + Az_c^2 \right) \cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{L} \\
K_{E0708} &= K_{E0807} = - \left( \frac{E \left( \frac{I_{zz}}{\cos(\alpha)^2} + Ay_c^2 \right) \cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{L} \right) - \frac{E \left( \frac{I_{yy}}{\cos(\alpha)^2} + Az_c^2 \right) \cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{L} \\
K_{E0709} &= K_{E0907} = \frac{Ez_c\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{E0710} &= K_{E1007} = - \left( \frac{Ez_c\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
K_{E0711} &= K_{E1107} = \frac{Ey_c\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{E0712} &= K_{E1207} = - \left( \frac{Ey_c\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{E0808} &= \frac{E \left( \frac{I_{zz}}{\cos(\alpha)^2} + Ay_c^2 \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \frac{E \left( \frac{I_{yy}}{\cos(\alpha)^2} + Az_c^2 \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} \\
K_{E0809} &= K_{E0908} = - \left( \frac{Ez_c \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
K_{E0810} &= K_{E1008} = \frac{Ez_c \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{E0811} &= K_{E1108} = - \left( \frac{Ey_c \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
K_{E0812} &= K_{E1208} = \frac{Ey_c \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{E0909} &= \frac{4EI_{yy} \cos(\alpha)}{L} + \frac{4EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0910} &= K_{E1009} = \frac{2EI_{yy} \cos(\alpha)}{L} + \frac{2EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0911} &= K_{E1109} = 0 \\
K_{E0912} &= K_{E1209} = 0 \\
K_{E1010} &= \frac{4EI_{yy} \cos(\alpha)}{L} + \frac{4EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E1011} &= K_{E1110} = 0 \\
K_{E1012} &= K_{E1210} = 0 \\
K_{E1111} &= \frac{4EI_{zz} \cos(\alpha)}{L} + \frac{4EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E1112} &= K_{E1211} = \frac{2EI_{zz} \cos(\alpha)}{L} + \frac{2EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E1212} &= \frac{4EI_{zz} \cos(\alpha)}{L} + \frac{4EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L}
\end{aligned}$$

### E.1.2. Matriz de rigidez geométrica

$$\begin{pmatrix}
K_{G0101} & K_{G0102} & K_{G0103} & \cdots & K_{G0112} \\
K_{G0201} & K_{G0202} & K_{G0203} & \cdots & K_{G0212} \\
K_{G0301} & K_{G0302} & K_{G0303} & \cdots & K_{G0312} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
K_{G1201} & K_{G1202} & K_{G1203} & \cdots & K_{G1212}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_A \\
u_B \\
v_A \\
v_B \\
w_A \\
w_B \\
\theta_{xA} \\
\theta_{xB} \\
\theta_{yA} \\
\theta_{yB} \\
\theta_{zA} \\
\theta_{zB}
\end{pmatrix} \quad (E.2)$$

$$\begin{aligned}
K_{G0101} &= \frac{F_x \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0102} = K_{G0201} &= - \left( \frac{F_x \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{G0103} = K_{G0301} &= 0 \\
K_{G0104} = K_{G0401} &= 0 \\
K_{G0105} = K_{G0501} &= 0 \\
K_{G0106} = K_{G0601} &= 0 \\
K_{G0107} = K_{G0701} &= \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0108} = K_{G0801} &= - \left( \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
K_{G0109} = K_{G0901} &= \frac{F_x z_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0110} = K_{G1001} &= - \left( \frac{F_x z_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{G0111} = K_{G1101} &= - \left( \frac{F_x y_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{G0112} = K_{G1201} &= \frac{F_x y_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0202} &= \frac{F_x \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0203} = K_{G0302} &= 0 \\
K_{G0204} = K_{G0402} &= 0 \\
K_{G0205} = K_{G0502} &= 0 \\
K_{G0206} = K_{G0602} &= 0 \\
K_{G0207} = K_{G0702} &= - \left( \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
K_{G0208} = K_{G0802} &= \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0209} = K_{G0902} &= - \left( \frac{F_x z_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{G0210} = K_{G1002} &= \frac{F_x z_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0211} = K_{G1102} &= \frac{F_x y_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0212} = K_{G1202} &= - \left( \frac{F_x y_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
K_{G0303} &= \frac{12F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL^3} + \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} + \frac{12F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0304} = K_{G0403} &= - \left( \frac{12F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL^3} \right) - \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} - \frac{12F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0305} = K_{G0503} &= 0 \\
K_{G0306} = K_{G0603} &= 0 \\
K_{G0307} = K_{G0703} &= \frac{F_x z_c \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{G0308} &= K_{G0803} = - \left( \frac{F_x z_c \cos(\alpha)}{L} \right) - \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0309} &= K_{G0903} = 0 \\
K_{G0310} &= K_{G1003} = 0 \\
K_{G0311} &= K_{G1103} = \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} + \frac{6F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL^2} + \frac{6F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0312} &= K_{G1203} = \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} + \frac{6F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL^2} + \frac{6F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0404} &= \frac{12F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL^3} + \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} + \frac{12F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0405} &= K_{G0504} = 0 \\
K_{G0406} &= K_{G0604} = 0 \\
K_{G0407} &= K_{G0704} = - \left( \frac{F_x z_c \cos(\alpha)}{L} \right) - \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0408} &= K_{G0804} = \frac{F_x z_c \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0409} &= K_{G0904} = 0 \\
K_{G0410} &= K_{G1004} = 0 \\
K_{G0411} &= K_{G1104} = - \left( \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} \right) - \frac{6F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL^2} - \frac{6F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0412} &= K_{G1204} = - \left( \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} \right) - \frac{6F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL^2} - \frac{6F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0505} &= \frac{12F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL^3} + \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} + \frac{12F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0506} &= K_{G0605} = - \left( \frac{12F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL^3} \right) - \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} - \frac{12F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0507} &= K_{G0705} = \frac{F_x y_c \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0508} &= K_{G0805} = - \left( \frac{F_x y_c \cos(\alpha)}{L} \right) - \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0509} &= K_{G0905} = \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} + \frac{6F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL^2} + \frac{6F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0510} &= K_{G1005} = \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} + \frac{6F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL^2} + \frac{6F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0511} &= K_{G1105} = 0 \\
K_{G0512} &= K_{G1205} = 0 \\
K_{G0606} &= \frac{12F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL^3} + \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} + \frac{12F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0607} &= K_{G0706} = - \left( \frac{F_x y_c \cos(\alpha)}{L} \right) - \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0608} &= K_{G0806} = \frac{F_x y_c \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0609} &= K_{G0906} = - \left( \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} \right) - \frac{6F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL^2} - \frac{6F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0610} &= K_{G1006} = - \left( \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} \right) - \frac{6F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL^2} - \frac{6F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{G0611} &= K_{G1106} = 0 \\
K_{G0612} &= K_{G1206} = 0 \\
K_{G0707} &= \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x I_{yy} \sec(\alpha)}{AL} + \frac{F_x I_{zz} \sec(\alpha)}{AL} + \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \\
&\frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \frac{F_x I_{yy} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} + \frac{F_x I_{zz} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} \\
K_{G0708} &= K_{G0807} = - \left( \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha)}{L} \right) - \frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha)}{L} - \frac{F_x I_{yy} \sec(\alpha)}{AL} - \frac{F_x I_{zz} \sec(\alpha)}{AL} - \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} - \\
&\frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} - \frac{F_x I_{yy} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} - \frac{F_x I_{zz} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} \\
K_{G0709} &= K_{G0907} = 0 \\
K_{G0710} &= K_{G1007} = 0 \\
K_{G0711} &= K_{G1107} = 0 \\
K_{G0712} &= K_{G1207} = 0 \\
K_{G0808} &= \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x I_{yy} \sec(\alpha)}{AL} + \frac{F_x I_{zz} \sec(\alpha)}{AL} + \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \\
&\frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \frac{F_x I_{yy} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} + \frac{F_x I_{zz} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} \\
K_{G0809} &= K_{G0908} = 0 \\
K_{G0810} &= K_{G1008} = 0 \\
K_{G0811} &= K_{G1108} = 0 \\
K_{G0812} &= K_{G1208} = 0 \\
K_{G0909} &= \frac{4F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL} + \frac{2F_x L \cos(\alpha)}{15} + \frac{4F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0910} &= K_{G1009} = \frac{2F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL} - \frac{F_x L \cos(\alpha)}{30} + \frac{4F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0911} &= K_{G1109} = 0 \\
K_{G0912} &= K_{G1209} = 0 \\
K_{G1010} &= \frac{4F_x I_{yy} \cos(\alpha)}{AL} + \frac{2F_x L \cos(\alpha)}{15} + \frac{4F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G1011} &= K_{G1110} = 0 \\
K_{G1012} &= K_{G1210} = 0 \\
K_{G1111} &= \frac{4F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL} + \frac{2F_x L \cos(\alpha)}{15} + \frac{4F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G1112} &= K_{G1211} = \frac{2F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL} - \frac{F_x L \cos(\alpha)}{30} + \frac{2F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G1212} &= \frac{4F_x I_{zz} \cos(\alpha)}{AL} + \frac{2F_x L \cos(\alpha)}{15} + \frac{4F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L}
\end{aligned}$$

## E.2. Slip State

### E.2.1. Matriz de rigidez elástica.

$$\begin{pmatrix} K_{E0101} & K_{E0102} & K_{E0103} & \cdots & K_{E0112} \\ K_{E0201} & K_{E0202} & K_{E0203} & \cdots & K_{E0212} \\ K_{E0301} & K_{E0302} & K_{E0303} & \cdots & K_{E0312} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{E1201} & K_{E1202} & K_{E1203} & \cdots & K_{E1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ v_A \\ v_B \\ w_A \\ w_B \\ \theta_{xA} \\ \theta_{xB} \\ \theta_{yA} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zA} \\ \theta_{zB} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned}
 K_{E0101} &= \frac{AE\cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{E0102} &= K_{E0201} = -\left(\frac{AE\cos(\alpha)^3}{L}\right) \\
 K_{E0103} &= K_{E0301} = 0 \\
 K_{E0104} &= K_{E0401} = 0 \\
 K_{E0105} &= K_{E0501} = 0 \\
 K_{E0106} &= K_{E0601} = 0 \\
 K_{E0107} &= K_{E0701} = \frac{E\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
 K_{E0108} &= K_{E0801} = -\left(\frac{E\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L}\right) \\
 K_{E0109} &= K_{E0901} = \frac{AEz_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{E0110} &= K_{E1001} = -\left(\frac{AEz_c \cos(\alpha)^3}{L}\right) \\
 K_{E0111} &= K_{E1101} = \frac{AEy_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{E0112} &= K_{E1201} = -\left(\frac{AEy_c \cos(\alpha)^3}{L}\right) \\
 K_{E0202} &= \frac{AE\cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{E0203} &= K_{E0302} = 0 \\
 K_{E0204} &= K_{E0402} = 0 \\
 K_{E0205} &= K_{E0502} = 0 \\
 K_{E0206} &= K_{E0602} = 0 \\
 K_{E0207} &= K_{E0702} = -\left(\frac{E\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L}\right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
K_{E0208} = K_{E0802} &= \frac{E\sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{E0209} = K_{E0902} &= -\left(\frac{AEz_c \cos(\alpha)^3}{L}\right) \\
K_{E0210} = K_{E1002} &= \frac{AEz_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0211} = K_{E1102} &= -\left(\frac{AEy_c \cos(\alpha)^3}{L}\right) \\
K_{E0212} = K_{E1202} &= \frac{AEy_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0303} &= \frac{12EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L^3} + \frac{12AEy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0304} = K_{E0403} &= -\left(\frac{12EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L^3}\right) - \frac{12AEy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0305} = K_{E0503} &= 0 \\
K_{E0306} = K_{E0603} &= 0 \\
K_{E0307} = K_{E0703} &= 0 \\
K_{E0308} = K_{E0803} &= 0 \\
K_{E0309} = K_{E0903} &= 0 \\
K_{E0310} = K_{E1003} &= 0 \\
K_{E0311} = K_{E1103} &= \frac{6EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L^2} + \frac{6EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0312} = K_{E1203} &= \frac{6EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L^2} + \frac{6EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0404} &= \frac{12EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L^3} + \frac{12EAy_c \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0405} = K_{E0504} &= 0 \\
K_{E0406} = K_{E0604} &= 0 \\
K_{E0407} = K_{E0704} &= 0 \\
K_{E0408} = K_{E0804} &= 0 \\
K_{E0409} = K_{E0904} &= 0 \\
K_{E0410} = K_{E1004} &= 0 \\
K_{E0411} = K_{E1104} &= -\left(\frac{6EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L^2}\right) - \frac{6EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0412} = K_{E1204} &= -\left(\frac{6EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L^2}\right) - \frac{6EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0505} &= \frac{12EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L^3} + \frac{12EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0506} = K_{E0605} &= -\left(\frac{12EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L^3}\right) - \frac{12EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0507} = K_{E0705} &= 0 \\
K_{E0508} = K_{E0805} &= 0 \\
K_{E0509} = K_{E0905} &= \frac{6EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L^2} + \frac{6EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0510} = K_{E1005} &= \frac{6EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L^2} + \frac{6EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0511} = K_{E1105} &= 0 \\
K_{E0512} = K_{E1205} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{E0606} &= \frac{12EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L^3} + \frac{12EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{E0607} &= K_{E0706} = 0 \\
K_{E0608} &= K_{E0806} = 0 \\
K_{E0609} &= K_{E0906} = - \left( \frac{6EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L^2} \right) - \frac{6EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0610} &= K_{E1006} = - \left( \frac{6EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L^2} \right) - \frac{6EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{E0611} &= K_{E1106} = 0 \\
K_{E0612} &= K_{E1206} = 0 \\
K_{E0707} &= \frac{E \left( \frac{I_{zz}^{min}}{\cos(\alpha)^2} + Ay_c^2 \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \frac{E \left( \frac{I_{yy}^{min}}{\cos(\alpha)^2} + Az_c^2 \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} \\
K_{E0708} &= K_{E0807} = - \left( \frac{E \left( \frac{I_{zz}^{min}}{\cos(\alpha)^2} + Ay_c^2 \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} \right) - \frac{E \left( \frac{I_{yy}^{min}}{\cos(\alpha)^2} + Az_c^2 \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} \\
K_{E0709} &= K_{E0907} = 0 \\
K_{E0710} &= K_{E1007} = 0 \\
K_{E0711} &= K_{E1107} = 0 \\
K_{E0712} &= K_{E1207} = 0 \\
K_{E0808} &= \frac{E \left( \frac{I_{zz}^{min}}{\cos(\alpha)^2} + Ay_c^2 \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \frac{E \left( \frac{I_{yy}^{min}}{\cos(\alpha)^2} + Az_c^2 \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} \\
K_{E0809} &= K_{E0908} = 0 \\
K_{E0810} &= K_{E1008} = 0 \\
K_{E0811} &= K_{E1108} = 0 \\
K_{E0812} &= K_{E1208} = 0 \\
K_{E0909} &= \frac{4EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L} + \frac{4EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0910} &= K_{E1009} = \frac{2EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L} + \frac{2EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E0911} &= K_{E1109} = 0 \\
K_{E0912} &= K_{E1209} = 0 \\
K_{E1010} &= \frac{4EI_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{L} + \frac{4EAz_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E1011} &= K_{E1110} = 0 \\
K_{E1012} &= K_{E1210} = 0 \\
K_{E1111} &= \frac{4EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L} + \frac{4EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E1112} &= K_{E1211} = \frac{2EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L} + \frac{2EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{E1212} &= \frac{4EI_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{L} + \frac{4EAy_c^2 \cos(\alpha)^3}{L}
\end{aligned}$$

## E.2.2. Matriz de rigidez geométrica

$$\begin{pmatrix} K_{G0101} & K_{G0102} & K_{G0103} & \cdots & K_{G0112} \\ K_{G0201} & K_{G0202} & K_{G0203} & \cdots & K_{G0212} \\ K_{G0301} & K_{G0302} & K_{G0303} & \cdots & K_{G0312} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{G1201} & K_{G1202} & K_{G1203} & \cdots & K_{G1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ v_A \\ v_B \\ w_A \\ w_B \\ \theta_{xA} \\ \theta_{xB} \\ \theta_{yA} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zA} \\ \theta_{zB} \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned}
 K_{G0101} &= \frac{F_x \cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{G0102} &= K_{G0201} = - \left( \frac{F_x \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
 K_{G0103} &= K_{G0301} = 0 \\
 K_{G0104} &= K_{G0401} = 0 \\
 K_{G0105} &= K_{G0501} = 0 \\
 K_{G0106} &= K_{G0601} = 0 \\
 K_{G0107} &= K_{G0701} = \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
 K_{G0108} &= K_{G0801} = - \left( \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
 K_{G0109} &= K_{G0901} = \frac{F_x z_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{G0110} &= K_{G1001} = - \left( \frac{F_x z_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
 K_{G0111} &= K_{G1101} = - \left( \frac{F_x y_c \cos(\alpha)^3}{L} \right) \\
 K_{G0112} &= K_{G1201} = \frac{F_x y_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{G0202} &= \frac{F_x \cos(\alpha)^3}{L} \\
 K_{G0203} &= K_{G0302} = 0 \\
 K_{G0204} &= K_{G0402} = 0 \\
 K_{G0205} &= K_{G0502} = 0 \\
 K_{G0206} &= K_{G0602} = 0 \\
 K_{G0207} &= K_{G0702} = - \left( \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \right) \\
 K_{G0208} &= K_{G0802} = \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{G0209} &= K_{G0902} = -\left(\frac{F_x z_c \cos(\alpha)^3}{L}\right) \\
K_{G0210} &= K_{G1002} = \frac{F_x z_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0211} &= K_{G1102} = \frac{F_x y_c \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0212} &= K_{G1202} = -\left(\frac{F_x y_c \cos(\alpha)^3}{L}\right) \\
K_{G0303} &= \frac{12F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL^3} + \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} \\
K_{G0304} &= K_{G0403} = -\left(\frac{12F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL^3}\right) - \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} \\
K_{G0305} &= K_{G0503} = 0 \\
K_{G0306} &= K_{G0603} = 0 \\
K_{G0307} &= K_{G0703} = \frac{F_x z_c \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0308} &= K_{G0803} = -\left(\frac{F_x z_c \cos(\alpha)}{L}\right) - \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0309} &= K_{G0903} = 0 \\
K_{G0310} &= K_{G1003} = 0 \\
K_{G0311} &= K_{G1103} = \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} + \frac{6F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL^2} \\
K_{G0312} &= K_{G1203} = \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} + \frac{6F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL^2} \\
K_{G0404} &= \frac{12F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL^3} + \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} + \frac{12F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0405} &= K_{G0504} = 0 \\
K_{G0406} &= K_{G0604} = 0 \\
K_{G0407} &= K_{G0704} = -\left(\frac{F_x z_c \cos(\alpha)}{L}\right) - \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0408} &= K_{G0804} = \frac{F_x z_c \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0409} &= K_{G0904} = 0 \\
K_{G0410} &= K_{G1004} = 0 \\
K_{G0411} &= K_{G1104} = -\left(\frac{F_x \cos(\alpha)}{10}\right) - \frac{6F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL^2} - \frac{6F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0412} &= K_{G1204} = -\left(\frac{F_x \cos(\alpha)}{10}\right) - \frac{6F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL^2} - \frac{6F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0505} &= \frac{12F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL^3} + \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} + \frac{12F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0506} &= K_{G0605} = -\left(\frac{12F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL^3}\right) - \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} - \frac{12F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0507} &= K_{G0705} = \frac{F_x y_c \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0508} &= K_{G0805} = -\left(\frac{F_x y_c \cos(\alpha)}{L}\right) - \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{G0509} = K_{G0905} &= \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} + \frac{6F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL^2} + \frac{6F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0510} = K_{G1005} &= \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} + \frac{6F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL^2} + \frac{6F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0511} = K_{G1105} &= 0 \\
K_{G0512} = K_{G1205} &= 0 \\
K_{G0606} &= \frac{12F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL^3} + \frac{6F_x \cos(\alpha)}{5L} + \frac{12F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^3} \\
K_{G0607} = K_{G0706} &= - \left( \frac{F_x y_c \cos(\alpha)}{L} \right) - \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0608} = K_{G0806} &= \frac{F_x y_c \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x \sqrt{y_c^2 + z_c^2} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{L} \\
K_{G0609} = K_{G0906} &= - \left( \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} \right) - \frac{6F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL^2} - \frac{6F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0610} = K_{G1006} &= - \left( \frac{F_x \cos(\alpha)}{10} \right) - \frac{6F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL^2} - \frac{6F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L^2} \\
K_{G0611} = K_{G1106} &= 0 \\
K_{G0612} = K_{G1206} &= 0 \\
K_{G0707} &= \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x I_{yy}^{min} \sec(\alpha)}{AL} + \frac{F_x I_{zz}^{min} \sec(\alpha)}{AL} + \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \\
&\frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \frac{F_x I_{yy}^{min} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} + \frac{F_x I_{zz}^{min} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} \\
K_{G0708} = K_{G0807} &= - \left( \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha)}{L} \right) - \frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha)}{L} - \frac{F_x I_{yy}^{min} \sec(\alpha)}{AL} - \frac{F_x I_{zz}^{min} \sec(\alpha)}{AL} - \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} \\
&- \frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} - \frac{F_x I_{yy}^{min} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} - \frac{F_x I_{zz}^{min} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} \\
K_{G0709} = K_{G0907} &= 0 \\
K_{G0710} = K_{G1007} &= 0 \\
K_{G0711} = K_{G1107} &= 0 \\
K_{G0712} = K_{G1207} &= 0 \\
K_{G0808} &= \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha)}{L} + \frac{F_x I_{yy}^{min} \sec(\alpha)}{AL} + \frac{F_x I_{zz}^{min} \sec(\alpha)}{AL} + \frac{F_x y_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \\
&\frac{F_x z_c^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2}{L} + \frac{F_x I_{yy}^{min} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} + \frac{F_x I_{zz}^{min} \sin(\alpha) \tan(\alpha)}{AL} \\
K_{G0809} = K_{G0908} &= 0 \\
K_{G0810} = K_{G1008} &= 0 \\
K_{G0811} = K_{G1108} &= 0 \\
K_{G0812} = K_{G1208} &= 0 \\
K_{G0909} &= \frac{4F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL} + \frac{2F_x L \cos(\alpha)}{15} + \frac{4F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0910} = K_{G1009} &= \frac{2F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL} - \frac{F_x L \cos(\alpha)}{30} + \frac{4F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G0911} = K_{G1109} &= 0 \\
K_{G0912} = K_{G1209} &= 0 \\
K_{G1010} &= \frac{4F_x I_{yy}^{min} \cos(\alpha)}{AL} + \frac{2F_x L \cos(\alpha)}{15} + \frac{4F_x z_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G1011} = K_{G1110} &= 0 \\
K_{G1012} = K_{G1210} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{G1111} &= \frac{4F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL} + \frac{2F_x L \cos(\alpha)}{15} + \frac{4F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G1112} &= K_{G1211} = \frac{2F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL} - \frac{F_x L \cos(\alpha)}{30} + \frac{2F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L} \\
K_{G1212} &= \frac{4F_x I_{zz}^{min} \cos(\alpha)}{AL} + \frac{2F_x L \cos(\alpha)}{15} + \frac{4F_x y_c^2 \cos(\alpha)^3}{L}
\end{aligned}$$