GENERALIZACION DE LA TEORIA DE TRANSFORMACIONES EN MECANICA CLASICA

MIGUEL CALVO O.

Prof. Guía: Dr. Miguel Kiwi.

Informe presentado ante la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, en cumplimiento de los requisitos para optar a la Licenciatura en Ciencias con mención en Física.

SANTIAGO de CHILE, Agosto de 1969.

INDICE DE MATERIAS

RESUMEN

Se estudia con cierto detalle algunos aspectos de la formulación variacional de el problema del movimiento, en especial se analiza cuidadosamente la cuestión de la independencia de las funciones que aparecen en la integral de acción. Se plantea el problema de las transformaciones canónicas y se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi.

En la segunda parte se considera el problema de ampliar el concepto de transformación de coordenadas, para incluir transformaciones simultáneas de las coordenadas y velocidades generalizadas simultáneamente. De estas consideraciones se obtiene una cierta ecuación diferencial parcial cuya solución permite resolver el problema del movimiento. Finalmente se demuestra la equivalencia con la teoría de Hamilton-Jacobi.

En el apéndice se hace una nueva derivación de las transformaciones canónicas, tal que tanto la invariancia de ciertos corchetes de Poisson con el teorema de Louiville, quedan demostrados en forma subsidiaria.

I. Consideremos un cierto sistema físico compuesto por N partículas puntuales de masas m_i $(i = 1,2,\ldots,m)$. Sean $(x_i^{(1)} x_i^{(2)} x_i^{(3)}) \triangleq \vec{x}_i$ las coordenadas cartesianas de las partículas, referidas a un sistema de ejes $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$. Supondremos que para dichas partículas, existen ligazones (constraints) que restringen su movimiento, al extremo que el conocimiento de solo ciertos m parámetros, nos permiten determinar en forma única la posición de todo el sistema, es decir los valores de $(x_i^{(1)} x_i^{(2)} x_i^{(3)})$. Al número de parámetros que sean necesarios y suficientes para determinar la posición del sistema le llamaremos el número de grados de libertad.

Sean $q_1, \ldots q_m$ $(m \leq 3N)$ los parámetros en cuestión, deberán existir entonces 3N funciones tales que:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
x_i^{(1)} &= f_i^1 (q_1 \ldots q_m) \\
x_i^{(2)} &= f_i^2 (q_1 \ldots q_m) \\
x_i^{(3)} &= f_i^3 (q_1 \ldots q_m)
\end{aligned}
\qquad i = 1 \ldots N \ (*)
$$

o invirtiendo estas relaciones resultará que:

$$
(1)' \qquad q_j = q_j(x_i^{(1)} x_i^{(2)} x_i^{(3)}) \qquad j = 1, 2, \ldots m
$$

A los $q_1, \ldots q_m$ les llamaremos las coordenadas generalizadas del sistema.

II. Nuestro propósito será entonces encontrar los $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)})$ como funciones del tiempo. Definimos la velocidad de la partícula j como:

$$
(2)' \qquad \vec{v}_j \triangleq \left(\frac{dx_j^{(1)}}{dt}, \frac{dx_j^{(2)}}{dt}, \frac{dx_j^{(3)}}{dt} \right) \qquad j = 1, 2 \ldots N
$$

y en analogía definimos velocidad generalizada como:

$$
(2)' \qquad \frac{d}{dt} q_s (t) = \dot{q}_s (t) \qquad s = 1, 2, \ldots, m
$$

(*) Salvo que se especifique lo contrario, supondremos de una vez para siempre que las funciones que aparecen en el resto de este trabajo, son continuamente derivables tantas veces como sea necesario en cada caso; en un dominio apropiado.

Supondremos que nuestro sistema de ejes es inercial, de modo que las propiedades mecánicas del sistema físico, están determinadas por dos cantidades; la energía cinética que se define como:

$$(3) \quad T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\dot{x}_i^{(1)})^2 + (\dot{x}_i^{(2)})^2 + (\dot{x}_i^{(3)})^2 \right]$$

reemplazando en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas resulta:

$$(3)' \quad T = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{m} P_{ik}(q_1, \dots, q_m, t)\, \dot{q}_i \dot{q}_k$$

y la energía potencial, que da cuenta de la interacción de las partículas con el campo que supondremos a lo sumo depende de sus posiciones y de t, o sea:

$$(4) \quad V = V(q_1 \dots q_m, t) .$$

Definimos la función Lagrangiana del sistema como:

$$(5) \quad L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t)$$

Con estas definiciones enunciamos entonces el siguiente principio, que rige el movimiento del sistema:

Principio de la mínima acción: Supongamos que el sistema ocupa en los instantes t_0 y t_1 $(t_0 < t_1)$, las posiciones o configuración definidas por $(q_1^{(0)}, \dots, q_m^{(0)})$ y $(q_1^{(1)}, \dots, q_m^{(1)})$ respectivamente, entonces la condición para el movimiento entre t_0 y t_1 es que la integral:

$$(6) \quad S =: \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$$

posea un valor extremo. En otras palabras que para la verdadera trayectoria del sistema, la integral S presente un valor extremo en comparación con trayectorias virtuales, que en los instantes t_0 y t_1 asuman las mismas configuraciones; $(q_1^{(0)} \dots q_m^{(0)})$ y $(q_1^{(1)} \dots q_m^{(1)})$. A la integral S le llamaremos la acción.

Derivemos las ecuaciones diferenciales que han de satisfacer las $q_i(t)$ para extremar la integral (6). Para ello supondremos que el sistema posee m grados de libertad, de modo que debemos determinar las m funciones $q_i = q_i(t)$ (*)

Sean $q_i(t)$ las funciones para las cuales S asume su valor extremo; consideremos otras funciones:

(*) Para un tratamiento más riguroso del problema ver: Calculus of Variations, G. Bliss.

$$\bar{q}_i(t) = q_i(t) + a\,n_i(t) \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

en que a es un parámetro y las $n_i(t)$ funciones con la propiedad que:

$$n_i(t_0) = 0 \quad ; \quad n_i(t_1)=0$$

Si reemplazamos los nuevos $q_i(t)$ en la integral (6) resultará que S será función de a :

(7) $$S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(\bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i, t)\,dt \qquad \text{donde } \dot{\bar{q}}_i(t) = \dot{q}_i(t)+a\dot{n}_i(t),$$

y con la CARACTERÍSTICA que cuando $a = 0$ la función S tendrá un valor extremo. Por lo tanto,

(8) $$\frac{dS}{da}\Big|_{a=0} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} n_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{n}_i(t)\right)dt = 0 ,$$

integrando por partes resulta:

(9) $$0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} n_i(t)\,dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} n_i(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - $$
$$- \int_{t_0}^{t} \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\cdot n_i(t)\,dt$$

(10) $$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) n_i(t)\,dt = 0$$

Esta condición que deberá cumplirse para cualquier $n_i(t)$, en que $n_i(t_0) = n_i(t_1) = 0$ y se satisfacerá si y sólo si:

(11) $$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad i = 1, 2,\ldots,m \quad .$$

Estas son las ecuaciones diferenciales de segundo orden que han de satisfacer las funciones $q_i(t)$.

Notemos que el funcional L no queda únicamente determinado, pues si a un dado la Lagrangiano L, al que le corresponden las ecuaciones del movimiento:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad i = 1\ldots m$$

le agregasemos la derivada total de una función arbitraria $f(q_i,t)$, entonces las nuevas ecuaciones que obtienen al extremar:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t)\right\} dt$$

son idénticas a las originales(*). En otras palabras la adición de una derivada total de una función de q_i y t al Lagrangiano no altera las ecuaciones del movimiento.

(*) COMO SE VERIFICA FACILMENTE, EFECTUANDO EL CALCULO DIRECTAMENTE.

Definición: Dos Lagrangianos son equivalentes si difieren entre sí por la derivada total de una función arbitraria de las coordenadas y t.

Es claro entonces, que la condición para que dos Lagrangianos caractericen a un mismo sistema físico, es que sean equivalentes.

(La demostración que cumplen con los requisitos de una relación de equivalencia es trivial :

a) Reflexibidad : $L \sim L \Longleftrightarrow L - L = 0$

b) Simetría : $L \sim L' = L' \sim L$. En efecto, si

$$L \sim L' \Longrightarrow L - L' = \frac{df}{dt} \Longrightarrow L' - L = \frac{d}{dt}(-f) \Longrightarrow L' \sim L$$

c) Transitividad :

$$\text{Si } L \sim L' \text{ y } L' \sim L'' \Longrightarrow L \sim L''$$

Demostración:

$$L \sim L' \Longleftrightarrow L - L' = \frac{df_1}{dt}, \quad L' \sim L'' \Longleftrightarrow L' - L'' = \frac{df_2}{dt}$$

luego $L \sim L''$ ya que $L - L'' = \frac{d}{dt}(f_1 + f_2)$).

(*) Consideremos un nuevo aspecto de el formalismo visto al comienzo del párrafo. Para ello haremos uso de la siguiente definición:

Definición: Si dos funciones pueden ser elegidas arbitrariamente, en el sentido de que no exista ninguna relación establecida a priori entre ellas, que permita obtener una a partir de la otra, se dice que las funciones son independientes.

Para ilustrar esta definición consideremos un sistema con m grados de libertad, es claro entonces que las funciones $q_i(t)$ (que aparecen en (6)), son independientes, sin embargo las funciones $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$ no lo son, ya que por definición $\dot{q}_i(t) = \frac{dq_i}{dt}(t)$

Volvamos al problema de extremar la integral

$$(12) \quad S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, r_i, t)\, dt ,$$

en que los q_i y r_i ($i = 1, 2, \ldots m$) están ligados por la condición subsidiaria $r_i = \dot{q}_i$. Este es un caso típico de problema variacional con condición subsidiaria, y como se sabe de la teoría del cálculo de

(*) Supondremos que el lector posee familiaridad con la teoría del cálculo de variaciones y en particular con problemas variacionales con condiciones subsidiarias. Ver por ej.: Weinstock: Calculus of Variations.

variaciones, la solución al problema se obtiene introduciendo m funciones auxiliares $u_i(t)$ y extremando la nueva integral

$$(13)\quad \int_{t_0}^{t_1}\left\{L(q_i, r_j, t)+\sum_{i=1}^{m} u_i(\dot{q}_i - r_i)\right\}dt$$

pero considerando a q_i, r_i y u_i como si fuesen funciones independientes.

En efecto, el sistema de ecuaciones que resulta de estas consideraciones, es el siguiente:

$$(14)\quad i)\ \frac{\partial L}{\partial r_j} = u_j \qquad ii)\ \frac{du_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad iii)\ \dot{q}_j - r_j = 0 \quad j=1\ldots m$$

y al combinar las tres expresiones de arriba se obtiene:

$$(15)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1\ldots m$$

es decir las ecuaciones (11)

Ahora bien, si se introduce en la integral (13) la condición (14):

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} = u_j \qquad j = 1, 2, \ldots m$$

y se extrema la expresión que resulta:

$$(16)\quad \int_{t_0}^{t_1}\left\{L(q_j, r_j, t)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial r_i}(\dot{q}_i - r_i) = 0\right.$$

considerando a q_j y r_j como funciones independientes, las ecuaciones del movimiento que se obtienen son idénticas a las obtenidas en (11), en efecto:

$$(17)\quad a)\ \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial r_j\,\partial r_i}(\dot{q}_i - r_i) = 0 \text{ y si } \det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial r_i \partial r_j}\right| \neq 0 \text{ se tiene } \dot{q}_i = r_j \ (*)$$

$$b)\ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial r_j}\right) + \sum_i \frac{\partial^2 L}{\partial r_i \partial r_j}(\dot{q}_i - r_i) = 0$$

que al combinar con a) da: $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad j = 1\ldots m$

En resumen, hemos visto como un mismo problema puede plantearse en forma distinta, pues extremar la integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt$$

teniendo en cuenta que q_i y $\dot{q}_i$ no son independientes, da las mismas ecuaciones del movimiento que al extremar la integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q_j, \dot{q}_j, t) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}(\dot{q}_i - r_i)$$

pero considerando a q_i y r_i como funciones independientes.

(*) Esta condición quedará satisfecha puesto que la energía cinética (3)' es una forma cuadrática positiva definida en q_i

III. Forma Hamiltoniana de las ecuaciones del movimiento.

Estudiemos nuevamente el problema de extremar la expresión:

$$(18) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(q_j, r_j, t) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial r_i} (\dot{q}_i - r_i) \right\} dt$$

considerando a las funciones q_i y r_i, independientes. Introducimos un nuevo sistema de funciones, definidas por las siguientes ecuaciones:

$$(19) \quad p_i =: \frac{\partial L}{\partial r_i} \qquad i = 1, \ldots, m$$

y la nueva funcional:

$$(19)' \quad H(p_j, q_j, t) =: \sum_{i=1}^{m} p_i r_i - L(q_j, r_j, t)$$

en lugar de $L(q_j, r_j, t)$, supondremos explícitamente que $\frac{\partial^2 L}{\partial r_i^2} \neq 0$ (*) de modo que los r_i puedan ser determinados en función de p_i, q_i, t_i, invirtiendo las relaciones (19). Reemplazando (19)' en (18) obtenemos un problema equivalente, que es extremar:

$$(20) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i r_i - H(p_j, q_j, t) + \sum p_i (\dot{q}_i - r_i) \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \dot{q}_i - H(p_j, q_j, t) \right) dt$$

Considerando a p_i y q_i como si fuesen independientes, las ecuaciones del movimiento que resultan en estas circunstancias, son:

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} =: -H_{q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} =: H_{p_i} \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, m$$

a este sistema de 2m ecuaciones diferenciales de primer orden se le conoce como el sistema canónico del movimiento.

Es importante recalcar que el hecho de considerar a p_i y q_i como funciones independientes, es lícito gracias a que los q_i y los $\dot{q}_i$ son considerados como independientes en el problema original (18).

Mostremos que estas mismas ecuaciones pueden obtenerse también del problema de extremar la expresión:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

considerando que q_i y $\dot{q}_i$ <u>no son independientes</u>. En efecto, si definimos

---

(*) Ver página 8 (asterisco)

m nuevas funciones

(22) $$p_i =: \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

y una nueva funcional

(23) $$H(p_j, q_j, t) =: \sum_{i=1}^{m} p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

en que los $\dot{q}_i$ son funciones de p_i, q_i y t. Se tendrá entonces que

(24) $$\frac{\partial H}{\partial p_j} = H p_j = \dot{q}_j + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} = \dot{q}_j \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Estas ecuaciones muestran explícitamente que los p_j y $\dot{q}_j$ no son independientes, sino que están ligados por las m relaciones (22) o las equivalentes (24). Entonces si reemplazamos (23) en la integral S e introducimos (24) como condición subsidiaria, se tendrá:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i \dot{q}_i - H(p_j, q_j, t) + \sum_i \mu_i(t)(H p_i - \dot{q}_i) \right\} dt$$

de donde resultan las siguientes ecuaciones:

(25) $$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -H q_i \\ \dot{q}_i &= H p_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\ \mu_i(t) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Nuevamente hemos debido considerar a los p_i y q_i como funciones independientes, sin embargo debemos notar que este hecho ha sido un artificio matemático que nos ha permitido derivar las ecuaciones del movimiento, pero que únicamente tiene sentido para los efectos particulares que son extremar la expresión: $\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_j, q_j, t) \right\} dt$

En la práctica, (y de acuerdo con la definición de independencia dada al comienzo) tanto los p_i y q_i como los q_i y $\dot{q}_i$ no son funciones independientes entre sí.

Finalmente veremos una forma alternativa que nos permitirá obtener las ecuaciones canónicas, sin necesidad de recurrir al artificio ya mencionado, es decir sin necesidad de considerar a los p_i y $\dot{q}_i$ como independientes. Para lo cual consideraremos al funcional $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ como una mera función de las $2m + 1$ variables $(q_i, \dot{q}_i, t)$.

Definimos entonces un nuevo conjunto de m variables:

(26) $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

que llamaremos los momentos generalizados y una nueva función de p_i, q_i y t por:

(26)' $$H(p_i, q_i, t) = \sum_{j=1}^{m} p_j \dot{q}_j - L(q_i, \dot{q}_i(p, q, t), t)$$

suponiendo que los $\dot{q}_i$ son expresables como funciones de p_i, q_i y t.
Esta nueva función poseerá las siguientes propiedades:

(27) $$i)\ H_{p_i} = \dot{q}_i \qquad ii)\ H_{q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

a esta nueva función le llamaremos Hamiltoniano y a este tipo de transformación, definido por las ecuaciones (26) y (26)', transformación de Legendre.

Las ecuaciones del movimiento en términos de L eran:

(28) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}(p_i) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

y combinándolas con (27), se obtiene el siguiente sistema:

$$\dot{p}_i = -H_{q_i}, \quad \dot{q}_i = H_{p_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

es decir, las ecuaciones canónicas.

IV. Corchetes de Poisson: Sean q_i y p_i las coordenadas y los momentos generalizados de un sistema arbitrario, sea además $f(p_i, q_i, t)$ una función arbitraria de p_i, q_i y t, entonces

(29) $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)$$

como los $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_i$ satisfacen las ecuaciones canónicas, se tendrá:

(30) $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

la expresión $\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$ la llamaremos corchete de Poisson de f y H y la escribiremos abreviadamente como:

(31) $$[H, f] = \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

Análogamente, para cualquier par de funciones arbitrarias de p_i, q_i y t : p.ej. f y g , definimos el corchete de Poisson por:

$$(32) \quad [f,g] = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Propiedades importantes de los corchetes de Poisson:

i) Sea f una constante del movimiento entonces $\frac{df}{dt} = 0$ luego

$$[H,f] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

en particular si f no depende explícitamente de t se tendrá: $[H,f] = 0$

ii) De la definición (32) se desprende fácilmente las siguientes identidades:

$$[q_i, q_k] = 0 \qquad [p_i, p_k] = 0 \qquad [p_i, q_k] = \delta_{ik} \qquad i,k = 1,2,\ldots m$$

V. Transformaciones Canónicas.

Sean $q_1 \ldots q_m$ las coordenadas generalizadas de un sistema con m grados de libertad, en el párrafo I habíamos visto que la elección de las $q_1,\ldots,q_m$ era arbitraria, siempre que permitieran determinar en forma única la posición del sistema en el espacio. Esta libertad en la elección de las coordenadas nos permite definir otros nuevos parámetros $Q_1,\ldots,Q_m$, que igualmente determinen en forma única la posición del sistema y que estén relacionados con los $q_1,\ldots,q_m$ a través de las siguientes ecuaciones:

$$(33) \quad Q_i = F_i(q_1,\ldots,q_m , t) \qquad i = 1,\ldots,m$$

que supondremos invertibles, de modo que:

$$(34) \quad q_i = G_i(Q_1,\ldots,Q_m , t) \qquad i = 1,\ldots,m$$

entonces las nuevas velocidades generalizadas están dadas por:

$$(35) \quad \dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_i}{\partial t} \qquad i = 1,\ldots,m \ .$$

El nuevo Lagrangiano se define como:

$$(36) \quad \bar{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t) = L\left(G_i(Q_1,\ldots Q_m,t), \sum_j \left(\frac{\partial G_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial G_i}{\partial t}\right), t\right)$$

y los nuevos momentos GENERALIZADOS POR:

$$(37) \quad P_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

El aspecto formal de las ecuaciones del movimiento, en términos de los Q_i es el mismo, en este sentido se dice que las ecuaciones del movimiento quedan invariantes ante transformaciones de coordenadas.

En la formulación Hamiltoniana (Párrafo III), vimos que tanto las coordenadas como los momentos, debían ser considerados independientes para obtener las ecuaciones canónicas a partir de la integral de acción. Esto sugiere entonces ampliar el concepto de transformación, para incluir transformaciones simultáneas de los momentos y las coordenadas independientemente.

Sean

$$(38)\qquad \begin{aligned} P_i &= P_i(q_j, p_j, t) \\ Q_i &= Q_i(q_j, p_j, t) \end{aligned} \qquad i=1,\ldots,m$$

las fórmulas de la transformación. Las nuevas ecuaciones del movimiento que resultan al expresar:

$$(39)\qquad \begin{aligned} -\dot{p}_i &= H_{q_i} \\ \dot{q}_i &= H_{p_i} \end{aligned} \qquad i=1,\ldots,m$$

en términos de los argumentos P_i y Q_i, no son en general canónicas. Sin embargo, por razones que aparecerán más adelante, exijiremos que las nuevas ecuaciones también lo sean. Esta situación impone grandes limitaciones al tipo de transformaciones posibles. Estudiemos entonces las condiciones que han de satisfacerse si las nuevas ecuaciones deben ser del tipo:

$$(39)'\qquad \begin{aligned} \dot{Q}_i &= +K_{P_i} \\ \dot{P}_i &= -K_{Q_i} \end{aligned} \qquad i=1,2,\ldots,m$$

y que naturalmente resultan de extremar la integral

$$(40)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P_j, Q_j, t) \Big\}\, dt$$

siendo $K(P_j, Q_j, t)$ una cierta función.

Habíamos visto que, de igual forma, las viejas ecuaciones canónicas:

$$(39)'\qquad \begin{aligned} \dot{p}_i &= -H_{qi} \\ \dot{q}_i &= H_{pi} \end{aligned}$$

también resultaban de extremar la integral:

$$(40)'\qquad \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H \Big\}\, dt$$

Como en abmos casos, las ecuaciones (39)y(39)'rigen el movimiento de un mismo sistema físico, debemos suponer que las cantidades subintegrales (40)y(40)' han de ser equivalentes(*),o sea que

$$(41)\qquad \sum_i P_i \dot{Q}_i - K - \Big(\sum_i p_i \dot{q}_i - H\Big) = \frac{d}{dt} F(P_j, Q_j, p_j, q_j, t)$$

(*) Ver definición, página 4-

A toda transformación que reuna estas condiciones, es decir (39) y (41), le llamaremos canónica. Es claro entonces que toda transformación canónica se caracteriza por una cierta función $F(Q_i, P_i q, p, t)$, que llamaremos la función generatriz de la transformación.

Supongamos que de los Q_i, q_i, P_i, p_i tan son los $Q_i q_i$ son independientes y que los p_i y P_i están dados implícitamente por las ecuaciones (38).

Entonces F será una función de Q_i y q_i. Si desarrollamos el segundo miembro de (41), se tendrá que:

$$\sum_i P_i \dot{Q}_i - \sum p_i \dot{q}_i + H - K = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y por la supuesta independencia de las q_j y Q_j, resultará que:

$$(42) \qquad \begin{aligned} i)\ & \frac{\partial F}{\partial q_i} = -p_i \\ ii)\ & \frac{\partial F}{\partial Q_i} = P_i \\ iii)\ & \frac{\partial F}{\partial t} = H - K \end{aligned}$$

Por lo tanto, a cada función $F(q_i, Q_i, t)$ le corresponderá una transformación canónica, que quedará determinada del sistema de ecuaciones (42).

Es importante notar que fórmulas semejantes se habrían obtenido si hubiésemos escogido a (p_i, Q_i) ó (p_i, P_i) o $(q_i P_i)$, como argumentos independientes.

Otra propiedad interesante de las transformaciones canónicas es que dejan invariantes los corchetes de Poisson, es decir si f y g son dos funciones de p_i y q_i, entonces:

$$(43) \qquad [f, g]_{p_i, q_i} = [\bar{f}, \bar{g}]_{P_i, Q_i}$$

en que $\bar{f}(P_i, Q_i, t) = f(p_i(P_i Q_i t), q_j(P_i, Q_i, t), t)$

y $\bar{g}(P_i, Q_i, t) = g(p_j(P_i Q_i t), q_j(P_i Q_i t), t)$

En particular se tendrá que:

$$(44) \qquad [Q_i, Q_K] = 0 \qquad [P_i, P_K] = 0 \qquad [P_i, Q_K] = \delta_{iK} .$$

(En el apéndice de este trabajo, se desarrolla una formulación alternativa al problema de las transformaciones canónicas, en que estas y otras propiedades de los corchetes de Poisson, aparecen demostrados en forma subsidiaria).

VI. Teoría de Hamilton-Jacobi:

Consideremos el siguiente problema, en relación al párrafo anterior: encontrar una transformación canónica en que el nuevo sistema de coordenadas y momentos $(Q_1,\ldots,Q_m,P_1,\ldots,P_m)$ sean todos constantes y que la función $K(P_j, Q_j, t)$ correspondiente, sea idénticamente nula. Llamemos S a la función generatriz de esta transformación, entonces por las relaciones (42), la función S deberá ser solución de la siguiente ecuación diferencial parcial de primer orden:

$$(45)\quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1,\ldots,q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_m}\right) = 0$$

que se obtiene al sustituir 42-i) en 42-ii), imponiendo que K sea cero.

Las $q_1,\ldots,q_m, t$ constituyen las variables independientes en esta ecuación, mientras que S será la variable dependiente. Toda ecuación diferencial de este tipo, llamada ecuación de Hamilton-Jacobi, posee tres tipos de soluciones; sólo será de interés para nosotros, la solución completa, que se caracteriza por depender de tantas constantes arbitrarias como variables independientes aparezcan en la ecuación, en este caso $m + 1$. El hecho que S no aparece explícitamente en (45), implica que una de las constantes ha de ser aditiva, o sea que la solución completa tendrá la forma general siguiente:

$$(46)\quad S = S(q_1,\ldots,q_m,t,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) + \alpha_0$$

Si identificamos a las constantes $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ con las $Q_1,\ldots,Q_m$ entonces, de acuerdo con 42-ii) los nuevos momentos estarán dados por

$$(47)\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = P_i = \beta_i \qquad i = 1, 2,\ldots,m$$

que también son constantes. De estas m relaciones (47), será posible obtener a los $q_1,\ldots,q_m$ como funciones de las $2m$ constantes α_i, β_i y t. En conclusión, de la solución completa de (45), hemos obtenido la solución de las ecuaciones canónicas. La ecuación de Hamilton-Jacobi, al igual que las ecuaciones de Lagrange y el sistema canónico, es la base de un método general para resolver las ecuaciones del movimiento.(*)

(*) Esta ha sido la razón para exigir en el párrafo V, que las transformaciones sean canónicas.

VII. Integral completa y la ecuación de Hamilton-Jacobi

Consideremos la siguiente ecuación:

$$(48) \quad p + H(t, x_1, \ldots, x_m, p_1, \ldots, p_m) = 0$$

con $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ y $p = \frac{\partial u}{\partial t}$ $\qquad i = 1, 2, \ldots, m$

De la teoría general de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden se sabe(**) que a toda ecuación diferencial parcial, le corresponde un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, llamado en el caso de la ecuación (48), sistema característico canónico.

De las soluciones de este sistema característico, es posible en general, construir soluciones de (48) que satisfagan ciertas condiciones iniciales prescritas. en el caso de la ecuación (48), el sistema característico correspondiente es:

$$(49) \quad \frac{dx_i}{dt} = H_{p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i}$$

$$\frac{du}{dt} = \sum_i p_i H_{p_i} - H \qquad \frac{dp}{dt} = -H_t$$

Por otra parte, si se conoce la integral completa

$$(50) \quad u = \Phi(x_1, \ldots, x_m, t, a_1, \ldots a_m) + a_0$$

de la ecuación (48), es posible obtener implícitamente, de las relaciones

$$(51) \quad \Phi_{a_i} = b_i \qquad \Phi_{x_i} = p_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, m$$

con a_i, b_i 2n parámetros arbitrarios, una familia de soluciones de las ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = H_{p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i} \qquad i = 1 \ldots m \quad (52)$$

que dependen de 2n parámetros.

De manera que a un sistema físico de m grados de libertad, caracterizado por un Hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones canónicas le podemos asociar una ecuación diferencial parcial si identificamos la función H de (48) con el Hamiltoniano, los x_i con las coordenadas q_i y los momentos generalizados p_i con las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Las soluciones de las ecuaciones del movimiento se podrán obtener entonces de la solución completa de (48).

(**) Ver por ejemplo: Courant and Hilbert ; cap. 2, Methods of Mathematical Physics, vol.II.

Aún cuando el problema de integrar una ecuación diferencial parcial, es en general, mucho más difícil que integrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, suele ocurrir que la integración del sistema es muy difícil por métodos elementales, mientras que la solución completa de la ecuación (48) correspondiente, se obtenga fácilmente por el método de separación de variables.

PARTE 2

I' Teoría en que las coordenadas y las velocidades son consideradas independientes.

Vimos en la primera parte de este trabajo, que el hecho de poder considerar a los p_i y q_i como funciones independientes en la integral de acción, permite efectuar transformaciones tales que los nuevos argumentos P_i,Q_i resultan todos constantes; para encontrar esta transformación vimos también que era necesario resolver cierta ecuación diferencial parcial, y que una vez encontrada dicha transformación, la solución al problema del movimiento se obtenía en forma inmediata.

Por otra parte, en el párrafo II, vimos como las funciones q_i q_i podían ser consideradas independientes, si se reemplazaba la integral de acción S, por la siguiente expresiín:

$$(53) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(q_i,\dot{q}_i,t) - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\dot{q}_j - \frac{d}{dt}q_j\right) \right\} dt$$

en que L era el Lagrangiano del sistema físico en cuestión. Las ecuaciones que en este caso se obtenían eran precisamente las ecuaciones de Lagrange.

Esta nueva posibilidad sugiera entonces el problema siguiente: es posible efectuar transformaciones simultáneas de los q_i y q_i independientemente, de manera que las nuevas funciones, que en adelante denotaremos por Q_i y R_i, sean todas constantes? La respuesta a este problema es afirmativa; veremos a continuación como es posible encontrar esta transformación, para lo cual será también necesario resolver cierta ecuación diferencial parcial. Finalmente veremos que una vez encontrada la transformación, la solución al problema del movimiento resulta en forma inmediata.

Sea L el Lagrangiano que caracteriza a cierto sistema físico, entonces las ecuaciones del movimiento correspondientes están dadas por el siguiente sistema

(54) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j=1,\ldots,m$$

Supongamos que las aceleraciones generalizadas $\ddot{q}_i$, pueden expresarse a partir de (54), en función de las velocidades $\dot{q}_j$, las coordenadas q_j y t, es decir

(55) $$\ddot{q}_i = u_i(q_j, \dot{q}_j, t) \qquad i=1,\ldots,m.$$

Sean entonces

(56) $$\begin{aligned} Q_i &= f_i(q_j, \dot{q}_j, t) \\ R_i &= g_i(q_j, \dot{q}_j, t) \end{aligned} \qquad i=1,\ldots,m$$

las ecuaciones de transformación, impongamos que para los nuevos argumentos se verifique la relación

(57) $$\frac{dQ_i}{dt} = R_i \qquad i=1,\ldots,m$$

(Esto sería el equivalente, en la formulación Hamiltoniana, a imponer que las nuevas funciones sean canónicas).

Naturalmente esta condición restringe el tipo de transformaciones posibles ya que las siguientes relaciones deberán ser satisfechas por las f_i, g_i:

(58) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} u_j(q_k, \dot{q}_k, t)\right) = g_i(q_k, \dot{q}_k, t) \qquad i=1,\ldots,m$$

en donde $\ddot{q}_j$ ha sido reemplazado por las ecuaciones (55) en términos de los $q_k, \dot{q}_k$ t.

Dadas las m funciones f_i, las relaciones (58) determinan automáticamente las g_i, o al revés, dadas las $g_i(q_k, \dot{q}_k, t)$ las f_i deberán ser soluciones de esta ecuación diferencial parcial. Las nuevas ecuaciones del movimiento deberán resultar de extremar la siguiente expresión:

(59) $$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\bar{L}(Q_i, R_i, t) - \sum \frac{\partial L}{\partial Q_j}\left(\frac{dQ_j}{dt} - g_j\right)\right\} dt$$

en que

$$\bar{L}(Q_i, R_i, t) = L(q_i(Q_k, R_k, t), \dot{q}_i(Q_k, R_k, t) t)$$

Impongamos ahora la condición que las nuevas funciones Q_i sean todas constantes, se tendrá entonces que:

$$(60) \quad \frac{df_i}{dt} = 0 \qquad\qquad i = 1,\ldots,m$$

y por lo tanto $g_i \equiv 0$

luego la ecuación diferencial parcial (58) se reduce a

$$(61) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} u_j(q_k, \dot{q}_k, t) \right) = 0.$$

Supongamos por el momento, que hemos logrado obtener la solución completa de (61), que deberá tener la forma

$$(62) \quad f = f(q_1,\ldots,q_m, \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m, t, a_1,\ldots,a_m, b_1,\ldots,b_m) + a_0$$

en que $a_1,\ldots,a_m, b_1,\ldots,b_m, a_0$ son constantes arbitrarias. Identifiquemos entonces los Q_i, con las siguientes expresiones:

$$(63) \quad Q_i = f(q,\ldots,q_m, q_1,\ldots,q_m, t, 0,\ldots,1,0, b_1,\ldots,b_m) = f_i(q_k, \dot{q}_k, t, a_i, b_k)$$

pero como hemos supuesto que los Q_i son constantes, estas ecuaciones (63) nos proporcionarán m constantes del movimiento que nos permitirá integrar las ecuaciones del movimiento (54) en forma inmediata.

II° <u>El Sistema Característico y la Integral completa.</u>

Habíamos visto en VII que a toda ecuación diferencial parcial de primer orden, le corresponde un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, llamado el sistema característico, vimos además que la solución general de este sistema característico, podía obtenerse implícitamente, si se conocía la integral completa de la ecuación diferencial parcial, por medio de las siguientes relaciones:

$$(64) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad\qquad i = 1,\ldots,2m$$

en que $\Phi(x_1,\ldots,x_{2m}, \alpha_1,\ldots,\alpha_{2m})$ era la integral completa, $x_1,\ldots,x_{2m}$ las variables independientes y $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2m}, \beta_1,\ldots,\beta_{2m}$ $4m$ constantes, ~~arbitrarias~~

Consideremos la ecuación diferencial parcial (61), el sistema característico correspondiente, es:

$$(65)\quad \frac{dt}{1} = \frac{dq_i}{\dot{q}_i} = \frac{d\dot{q}_i}{u_i(q_k, \dot{q}_k, t)} \qquad i = 1,\ldots,m$$

o

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \,, \quad \frac{d\dot{q}_i}{dt} = u_i(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Reconocemos inmediatamente que este sistema no es otra cosa que las ecuaciones del movimiento (55). Si aplicamos el procedimiento arriba indicado, la solución general de las ecuaciones del movimiento se obtienen simplemente planteando el sistema de ecuaciones (64), para la solución completa de la ecuación diferencial parcial (61).

Para ilustrar esta teoría consideremos un ejemplo sencillo: Una partícula puntual, de masa, en el campo gravitario terrestre, que se mueve verticalmente.

El Lagrangiano correspondiente es:

$L = 1/2\ m\ \dot{q}^2 + mg\ q$

en que q es la distancia desde un origen fijo arbitrario.

La ecuación del movimiento es:

$$(67)\qquad \ddot{q} = g$$

La ecuación diferencial parcial (61) correspondiente es:

$$(68)\quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} g = 0$$

Planteamos una solución de la forma:

$$(69)\quad F(q, \dot{q}, t) = \alpha(t) + \beta(q) + \gamma(\dot{q})$$

que al reemplazar en (68) da:

$$(70)\quad \frac{d}{dt}\alpha(t) + \frac{d\beta}{dq}\dot{q} + \frac{d\gamma}{d\dot{q}} g = 0$$

de donde se obtiene fácilmente

$$(71)\quad \frac{d}{dt}\alpha(t) = a_1 \Longrightarrow \alpha(t) = a_1(t) + \alpha_0$$

$$(72)\quad \frac{d\beta}{dq} = -\frac{1}{q}\left(\frac{d\gamma}{d\dot{q}} g - a_1\right) = a_2 \Rightarrow \beta(q) = a_2 q + \beta_0$$

Finalmente

$$(73)\quad \frac{d\gamma}{d\dot{q}} = -a_2\dot{q} + a_1 \Longrightarrow \gamma(\dot{q}) = -\frac{a_2\dot{q}^2}{2} + a_1 q + \gamma_0$$

La solución completa será:

(74) $F(q,\dot{q},t) = a_1(t - \dot{q}/g) + a_2\left(q - \frac{1}{2g}\dot{q}^2\right) + a_0$

donde:

(75) $C_0 = \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0$

Planteando el sistema (64) se tiene:

(76) $$\frac{\partial F}{\partial a_1} = t - \dot{q}/g = b_1$$

lo que da finalmente $\frac{\partial F}{\partial a_2} = q - \frac{1}{2g}\dot{q}^2 = b_2$

(77) $\dot{q} = gt - b_1 g$

y

$$q = \frac{1}{2g}\dot{q}^2 - b_2 = \frac{1}{2}gt^2 - b_1 g t + \frac{b_1^2 g}{2} + b_2$$

o sea la solución general de el problema del movimiento.

III' Equivalencia con la teoría hamiltoniana.

En la teoría de Hamilton-Jacobi habíamos visto como la solución de las ecuaciones canónicas del movimiento, podía obtenerse a partir de la integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Desgraciadamente esta integral completa es, en la mayoría de los casos, muy difícil de obtener directamente. Existen, sin embargo, métodos que permiten en ciscunstancias especiales determinar esta solución. Describiremos a continuación el método llamado de Lagrange-Charpi (sólo para el caso de ecuaciones con dos variables independientes):

Supongamos que se desea encontrar la solución completa de una ecuación diferencial parcial de primer orden y que supondremos es del tipo especial:

(78) $$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, t, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

El método consiste entonces, en encontrar otra ecuación diferencial parcial, que dependa de un parámetro arbitrario y que junto con (78), tengan soluciones comunes. Sea

(79) $$\frac{\partial S}{\partial t} + G\left(q, t, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

la ecuación diferencial parcial que posee soluciones comunes con (78), entonces deberá cumplir con:

(80) $$[H, G] + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \qquad (*)$$

(*) Ver por ejemplo Smirnov, vol. IV, A Course of Higher Mathematics, pages 354 - 369.

Si esto ocurre se dice entonces que las funciones H y G están en involución. Una vez encontrada esta G , con ayuda de (78) podemos aislar $\frac{\partial S}{\partial t}$ y $\frac{\partial S}{\partial q}$ como funciones de q y t. Finalmente estas expresiones, al ser integradas, nos darán la solución común que deberá depender de dos parámetros arbitrarios. Este método puede generalizarse fácilmente al caso de m + 1 variables independientes $q_1,\ldots,q_m,t$; en cuyo caso también será necesario obtener una solución de:

$$(81) \quad [H,G] + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Esta relación puede ser considerada, como una ecuación diferencial parcial para la función G, si suponemos a p_i, q_i y t como variables independientes. Entonces la ecuación (81) será equivalente a la ecuación (61) obtenida en el párrafo I° , sólo que (81) está dada en términos de q_i, $\dot{q}_i$ y t.

Otra manera de establecer esta relación entre ambas ecuaciones, es la siguiente: habíamos visto que la ecuación

$$(82) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} u_i(q_j, \dot{q}_j, t) \right) = 0$$

nos proporcionaba constantes del movimiento.

Sea entonces

$$(83) \quad f(q_i, \dot{q}_i, t) = \text{Constante}$$

una solución de la ecuación (82), si expresamos las $\dot{q}_i$ como funciones de p_i, q_i y t y las reemplazamos en f = constante obtenemos la siguiente función:

$$(84) \quad f(q_i, \dot{q}_i(p_j, q_j, t), t) = \bar{f}(q_i, p_i, t) = \text{constante.}$$

Por otra parte, y de acuerdo con las propiedades de los corchetes de Poisson vistas en IV, se tendrá que:

$$(85) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + [H, \bar{f}] = 0$$

Si esta relación la consideramos como una ecuación diferencial parcial para f , vemos como tanto la ecuación (85) como la (62) poseen soluciones comunes, lo que establece la equivalencia entre ambas ecuaciones.

Finalmente planteamos el problema siguiente: ¿Sería posible (*) encontrar una ecuación diferencial parcial de primer orden tal que su sistema característico sea

$$(86)\quad \frac{dt}{\gamma} = \frac{dq_i}{\dot{q}_i} = \frac{d\dot{q}_i}{u_i(q_j, \dot{q}_j, t)} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

y que si $R(q_1, \ldots, q_m, t)$ es una solución, entonces

$$(87)\quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = \dot{q}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

La respuesta es en general negativa, se puede demostrar que dicha ecuación solo existiría en los casos triviales en que $\dot{q}_i = p_i$ en donde sería precisamente la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Vemos entonces, como en este aspecto, la formulación Hamiltoniana posee una enorme ventaja sobre la formulación Lagrangiana, ya que sólo a través de las funciones p_i, q_i y H es posible establecer una ecuación diferencial parcial, como la de Hamilton-Jacobi, que como dijimos anteriormente, es la base de un método general para resolver las ecuaciones del movimiento.

(*) Al describir el método de Lagrange-Charpi vimos como a partir de una ecuación diferencial parcial de m + 1 variables independientes podíamos derivar otra con 2m + 1 variables independientes (Ec.(78) y (79) respectivamente). La idea del problema es invertir el procedimiento, o sea dada la ecuación en 2m + 1 variable, encontrar la correspondiente de m + 1.

A P E N D I C E

Transformaciones canónicas: Habíamos visto en V que la representación canónica de las ecuaciones del movimiento, es el punto de partida de la teoría de transformaciones canónicas.

Sean

$$(a,1) \qquad \dot{q}_i = Hp_i \quad , \quad \dot{p}_i = - Hq_i \qquad i = 1,\ldots,m$$

las ecuaciones canónicas de un cierto sistema físico; planteamos entonces el siguiente problema: buscar un nuevo conjunto de 2m cantidades $(Q_1,\ldots,Q_m, P_1,\ldots,P_m)$, funciones de las $(q_1\ldots q_m, p_1,\ldots p_m t)$ y definidas por las siguientes relaciones:

$$(a,2) \qquad \begin{aligned} Q_i &= Q_i(p_j, q_j, t) \\ P_i &= P_i(p_j,q_j,t) \end{aligned} \qquad i = 1,\ldots,m.$$

tales que las ecuaciones del movimiento: (a_1), expresadas en términos de las funciones (P_i,Q_i) sean también canónicas, es decir de la forma:

$$\dot{P}_k = - K_{QK} \qquad \dot{Q}_k = K_{pk}$$

siendo K una cierta función de los P_i Q_i y t.

Para mayor simplicidad, supondremos que el sistema físico en consideración, posee tan sólo un grado de libertad, de modo que las ecuaciones correspondientes son:

$$\text{i)} \quad \dot{q} = H_p \qquad \dot{p} = - H_q$$

$$\text{ii)} \quad Q = Q(p,q,t) \qquad P = P(p,q,t)$$

$$(a,3) \quad \text{iii)} \quad \dot{Q} = K_p \qquad \dot{P} = - K_Q$$

Estudiemos entonces las condiciones que impone a las transformaciones $(a_3\text{-ii})$, la restricción que las nuevas ecuaciones sean del tipo $(a_3\text{-iii})$. Para ello encontremos las ecuaciones $(a_3\text{-i})$ en términos de

P_i y Q_i. (Haremos uso de la notación matricial que simplificará enormemente los cálculos).

Se tiene que

$$(a,4)\qquad \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial P}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

o en notación matricial

$$(a,5)\qquad \begin{bmatrix} \dot{P} - \frac{\partial P}{\partial t} \\ \dot{Q} - \frac{\partial Q}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

Por otra parte invirtiendo las transformaciones (a_3-ii) se tiene que

$$(a,6)\qquad \bar{H}(P,Q,t) = H(p,P,Q,t),\ q(P,Q,t),t)$$

de donde

$$(a,6)'\qquad \bar{H}(P(p,q,t),Q(p,q,t),t) = H(p,q,t)$$

luego

$$(a,7)\qquad -H_q = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}$$

$$H_p = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}$$

o en notación matricial

$$(a,8)\qquad \begin{bmatrix} -H_q \\ H_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_Q \\ \bar{H}_P \end{bmatrix}$$

pero como suponemos que $\dot{p} = -H_q$ y $\dot{q} = H_p$ entonces:

$$(a,9)\qquad \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_Q \\ \bar{H}_P \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos esta expresión por la matriz:

$$(a,10)\qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{bmatrix}$$

y comparamos con (a,5) resulta que:

$$(a,11)\quad \begin{bmatrix} \dot{P} - \frac{\partial P}{\partial t} \\ \dot{Q} - \frac{\partial Q}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial P/\partial p & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \partial Q/\partial p & \partial Q/\partial q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_Q \\ \bar{H}_P \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_Q \\ \bar{H}_P \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$(a,12)\quad \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{bmatrix} = [P,Q] \begin{bmatrix} -\bar{H}_Q \\ \bar{H}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} \end{bmatrix}$$

en que $[P,Q]$ es el corchete de Poisson.

Si suponemos por otra parte que $\dot{P} = -K_Q$ y $\dot{Q} = K_P$, en forma análoga se tendrá que

$$(a,13)\quad \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = [p,q] \begin{bmatrix} -\bar{K}_q \\ \bar{K}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial t} \end{bmatrix} \quad con \quad \bar{K}(p,q,t) = K(P(p,q,t),Q(p,q,t),t)$$

Si consideramos que tanto los (p,q) como los (P,Q) son canónicos entonces las relaciones (a,12) y (a,13) deben satisfacerse simultáneamente.

De donde:

$$(a,14)\quad \begin{aligned} &\alpha)\ [P,Q](-\bar{H}_Q) + \frac{\partial P}{\partial t} = -K_Q \\ &\beta)\ [P,Q]\,\bar{H}_p + \frac{\partial Q}{\partial t} = K_P \\ &\gamma)\ [p,q](-\bar{K}_q) + \frac{\partial p}{\partial t} = -H_q \\ &\delta)\ [p,q]\,\bar{K}_p + \frac{\partial q}{\partial t} = H_p \end{aligned}$$

Consideremos por ejemplo las relaciones $\alpha), \gamma)$ y supongamos que se satisfacen idénticamente en q y Q, entonces es claro que para que los miembros izquierdos de estas relaciones sean derivadas respecto de Q y q respectivamente, es necesario y suficiente que:

(i) $\quad \left[P, Q\right] = \left[p, q\right] = 1$

(a,15) y que exista cierta función $W = W(q,Q,t)$ tal que

(ii) $\quad \dfrac{\partial W}{\partial Q} = -P \qquad \dfrac{\partial W}{\partial q} = p \qquad \dfrac{\partial W}{\partial t} = K - H \qquad$ (*)

Sin embargo la existencia de dicha función W queda garantizada por la ecuación (i). En efecto, la condición necesaria y suficiente para la existencia de W es que:

(a,16) $\quad \dfrac{\partial^2 W}{\partial Q\,\partial q} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial q\,\partial Q} \Longrightarrow -\dfrac{\partial P}{\partial q} = \dfrac{\partial p}{\partial Q} \qquad$ (**)

si consideramos a $\dfrac{\partial P}{\partial q}$ como elemento de la matriz inversa de

(a,17) $\quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial Q} & \dfrac{\partial p}{\partial P} \\ \dfrac{\partial q}{\partial Q} & \dfrac{\partial q}{\partial P} \end{bmatrix}$

se tendrá que:

(a,18) $\quad \dfrac{\partial P}{\partial q} = (-1)\,\dfrac{\text{cofactor de } \frac{\partial q}{\partial P}}{\text{DET } \frac{\partial(p,q)}{\partial(P,Q)}} = \dfrac{(-1)\frac{\partial p}{\partial Q}}{[p,q]} = -\dfrac{\partial p}{\partial Q}$

demostrando la suficiencia de la condición (i). Vemos entonces que la condición necesaria y suficiente para que las funciones (P,Q) y (p,q) sean canónicas es que

(a,19) $\quad \left[P, Q\right] = \left[p, q\right] = 1$

<u>TEOREMA</u>: Si las funciones p y q son canónicas y se define una transformación

(a,20) $\quad P = P(p,q,t)$

$\qquad\quad Q = Q(p,q,t)$

con la propiedad que $\left[P, Q\right] = 1$ entonces las nuevas funciones también son canónicas.

(*) Relaciones equivalente se habrían obtenido si hubiésemos elegido cualquier combinación:
α),δ) ; β)γ) ; β),δ).

(**) Ya que las condiciones: $\dfrac{\partial^2 W}{\partial Q\,\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial t} = K_Q - \bar{H}_Q = \dfrac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial Q}$
y $\dfrac{\partial^2 W}{\partial q\,\partial t} = \dfrac{\partial p}{\partial t} = \bar{K}_q - H_q = \dfrac{\partial^2 W}{\partial t\,\partial q}$
se satisfacen automáticamente, en virtud de las relaciones α) y γ) de (a,14)

Demostración:

Si $[P, Q] = 1$ implica que el determinante de la transformación (a,14):

$$\text{(a,21)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = [P, Q] = 1$$

Luego el determinante de la transformación inversa también será 1 de donde:

$$\text{(a,22)} \qquad [p, q] = 1$$

por las condiciones demostradas anteriormente se tiene finalmente P & Q son canónicas.

El caso de m grados de libertad es análogo, aún cuando la derivación es un tanto más complicada, el procedimiento a seguir es el mismo. Sólo daremos los resultados:

TEOREMA: Para que una transformación de las funciones (p_i, q_i) a las (P_i, Q_i) $\forall$ $i=1,2,\ldots,m$ sea canónica es necesario y suficiente que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\text{(a,23)} \qquad [Q_i, Q_k] = 0 \qquad [P_i, P_k] = 0 \qquad [P_i, Q_k] = \delta_{ik}$$

$$i,k=1,2,\ldots,m$$

0-0-0-0-0-0