

UCH-FC
LIC-F
S 334
C.1

AUTOINTERACCION Y MOMENTO ANGULAR LIGADO
DE UNA CARGA PUNTUAL ACELERADA.

Prof. Guía: Carlos A. López

NATALIO ALEXANDRO SCHILLER GRELLER

1977

A mis padres y a mi hermana.

NOTACION.

Signatura : $g^{\mu\nu} = \text{diag.}(-1, 1, 1, 1)$

Sistema de unidades $c = 1$

Las cantidades cinemáticas con barra encima están evaluadas en el tiempo retardado τ_R . Sin barra, evaluadas en el tiempo presente τ .

Variables cinemáticas de la carga:

τ : Tiempo propio

$Z^\mu(\tau)$: Posición

$v^\mu(\tau)$: Cuadrivelocidad

$a^\mu(\tau)$: Cuadriaceleración

$$v^\mu v_\mu = -1$$

$T^{\mu\nu}$: Tensor energía-momento del campo electromagnético creado por la carga.

Cantidades con un símbolo (b) o (r) sobre ellas indican dichas cantidades ligadas o radiadas respectivamente.

Subíndices (α) con α un Número indica orden ϵ^α (término proporcional a ϵ^α).

Subíndices (α con α un Número indica orden ϵ^α y todos los demás términos de órdenes en ϵ menos que α (términos proporcionales a $\epsilon^\alpha, \epsilon^{\alpha-1}, \epsilon^{\alpha-2}, \text{etc.}$).

* $a^{[\alpha}_b \beta]}$ = $(a^{\alpha_b \beta} - a^{\beta_b \alpha})$, \wedge sobre 2 índices indica antisimetría en dichos índices.

** $a^{(\alpha}_b \beta)}$ = $(a^{\alpha_b \beta} + a^{\beta_b \alpha})$, \cap sobre 2 índices indica simetría en dichos índices.

Observación: * y ** no son las notaciones usuales, hay un factor 2.

R E S U M E N . -

Hemos calculado el momento lineal ligado y el momento angular ligado de una partícula clásica cargada acelerada, en un punto $z^\mu(\tau)$ de su línea de universo, promediando sobre todas las direcciones tipo espacio que convergen en ese punto.

El método consiste en calcular ambos momentos sobre un hiperplano tipo espacio arbitrario que pasa por $z^\mu(\tau)$.

Para esto aplicamos el teorema de Stokes a un tensor antisimétrico de rango superior cuya divergencia da precisamente los tensores ligados. El procedimiento resulta muy simple si se redefinen previamente los tensores ligados en forma conveniente, lo que no altera su contenido físico. Finalmente se procede a promediar sobre todas las orientaciones posibles de la normal al hiperplano.

Este promedio conduce a resultados finitos (sin divergencia) de las cantidades antes mencionadas y la parte finita coincide con los resultados conocidos.

I. INTRODUCCION

Teitelboim⁽¹⁾ mostró que el tensor energía-momento electromagnético $T^{\mu\nu}$ para una partícula clásica cargada y acelerada se puede separar en dos términos, ambos conservados independientemente fuera de la línea de Universo de la partícula. Uno de ellos corresponde a la parte de la energía emitida por la carga, y el otro a la parte ligada a ella. A partir de estos tensores, definió los cuádrimomentos lineales asociados como integrales de los correspondientes Tensores de energía. Demostró, por medio de su definición que el momento lineal ligado $P_{\mu}^{(b)}(\tau)$ es una función de estado de la carga, es decir sólo depende de su velocidad y aceleración en el tiempo presente τ .

Esta propiedad nos permite visualizar a la carga como transportadora de una "nube electromagnética rígida" a pesar de la velocidad finita de propagación del campo electromagnético.

Más adelante, López y Villarroel⁽²⁾ extendieron este estudio al momento angular ligado de la carga obteniendo la relación

$$M_{\lambda\mu}^{(b)}(\tau) = Z [\lambda^{(b)}(\tau) P_{\mu}^{(b)}(\tau)] \quad (1.1)$$

es decir idéntica a la de una partícula puntual en mecánica clásica, siendo también el momento angular ligado

una función de estado de la carga.

Por otro lado, López⁽³⁾ introdujo un método de promediación para definir expresiones divergentes sobre la línea de universo de la carga aplicándolo al cálculo del tensor del campo electromagnético retardado de Lienárd-Wiechert, lo cual condujo a eliminar el término divergente de Coulomb sin afectar al término constante, obteniendo la ecuación de Lorentz-Dirac.

La exploración de estas divergencias continuó con el trabajo de Tabensky y Villarroel⁽⁴⁾, quienes calcularon el término divergente del cuadrimento ligado, cuando se lo define integrando sobre un hiperplano arbitrario tipo espacio que corta a la línea de universo de la carga en $z(\tau)$. Utilizando este resultado López⁽³⁾ demostró que la parte divergente de $P_{(b)}^{\mu}(\tau)$ se anula al promediar sobre todas las direcciones espaciales.

El objetivo de nuestro trabajo es, en primer lugar, completar el cálculo de $P_{(b)}^{\mu}$ verificando si la parte finita es correcta. Además nos interesa extender estas consideraciones al caso del momento angular ligado $M_{(b)}^{\mu\nu}$. Naturalmente para que el método sea consistente es necesario que desaparezcan también en este caso la divergencia y se reproduzca el valor conocido de la parte finita.

La respuesta es sí; se anula la parte divergente sin afectar al resto y además se reproduce la ecuación (1.1). Por lo tanto el resultado obtenido por López no es un accidente.

En sección II: explicaremos el método de promedios a utilizar ejemplificándolo (para su visualización) con el cálculo del cuadrimomento lineal ligado.

En sección III utilizando el tensor de Van Weert haremos una separación del tensor de energía ligado en dos partes; T' y T'' , ambas conservadas fuera de la línea de universo de la carga; pero una de ellas T'' da flujo nulo por los conos y no contribuye al momento lineal ligado. Se muestra que, usando el método de promedios explicado en sección II, T' conduce al $P^{(b)\mu}$ correcto.

En sección IV redefiniremos el tensor momento angular ligado que será una función de T' y encontraremos un tensor K^* cuya divergencia es el tensor de momento angular redefinido. Este K^* es sólo función de K' (que tiene por divergencia a T') lo que conduce a la ecuación (1.1) casi inmediatamente y además se muestra que el método de promedios elimina la parte divergente.

II. CALCULO DE LOS PROMEDIOS

Para fijar ideas lo ilustraremos con el caso del momento lineal, pudiendo extenderse a otros casos análogos.

Como se mostrará en la sección siguiente, definimos

$$P_{\mu}^{(b)}(\tau) = \int_{\sigma^0(\tau)} T_{\mu\nu}^{(b)} d\sigma^{\nu} \quad (2.1)$$

donde $\sigma^0(\tau)$ es una superficie tipo espacio que corta la línea de universo de la partícula en $Z^{\mu}(\tau)$ ortogonalmente a la cuadrivelocidad $v^{\mu}(\tau)$. También podemos definir $P_{\mu}^{(b)}(\omega^{\alpha})$ como

$$P_{\mu}^{(b)}(\tau)(\omega^{\alpha}) = \int_{\sigma(\tau, \omega^{\alpha})} T_{\mu\nu}^{(b)} d\sigma^{\nu} \quad (2.2)$$

donde $\sigma(\tau, \omega^{\alpha})$ es un hiperplano tipo espacio que corta la línea de universo de la carga en $Z^{\mu}(\tau)$ y cuya normal es ω^{α} (vector tipo tiempo unitario). Esta expresión, promediada sobre todas las direcciones posibles de ω^{α} , es la que usaremos.

Supongamos que hemos hallado un tensor $K_{\mu\nu\lambda}$ cuya divergencia es el tensor de energía ligado

$$T_{\mu\nu}^{(b)} = \partial^{\lambda} K_{\mu\nu\lambda} \quad (2.3)$$

Por el teorema de Stokes, podemos transformar la integral de superficie tridimensional (ec.2.2) en integrales de superficie bidimensionales.

$$(b) \quad P^\mu(\tau)(\omega^\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_\epsilon} K^{\alpha\beta\gamma} d^2\sigma_{\beta\gamma} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_R} K^{\alpha\beta\gamma} d^2\sigma_{\beta\gamma} \quad (2.4)$$

con los signos incluidos en los elementos de superficie y consideraremos σ_ϵ y σ_R como bi-esferas de radio ϵ y R respectivamente concéntricas con la carga.

Imponiendo ciertas condiciones, podemos lograr que la segunda integral se anule. Para calcular la primera integral desarrollamos el integrando en potencias de ϵ y posteriormente procedemos a promediar (por el método explicado más adelante) orden por orden (sólo los términos proporcionales a $\epsilon^0, \epsilon^{-1}, \epsilon^{-2}$, etc., pues los términos con exponente positivo en ϵ se anulan al tomar $\lim \epsilon \rightarrow 0$).

El promedio se efectúa de la siguiente manera: consideremos la esfera de radio ϵ en torno al punto $Z^\mu(\tau)$ definido ortogonal a ω^α , es decir la esfera está contenida en $\sigma(\tau, \omega^\alpha)$ y tiene por ecuaciones

$$(x_\mu - Z_\mu(\tau))^2 = \epsilon^2 \quad (2.5a)$$

$$(x_\mu - Z_\mu(\tau))U^\mu = 0 \quad (2.5b)$$

U^μ vector unitario en el hiperplano definido por ω^α .

a) Integramos sobre todo el ángulo sólido en dicha esfera (porque $d^2\sigma_{\mu\nu}d\Omega$) para lo cual nos trasladamos al sistema de Lorentz que se mueve con velocidad ω^α respecto a la carga.

Una vez efectuada dicha integración podemos tomar el límite $\omega^\alpha \rightarrow v^\alpha(\tau)$ como lo hacen Tabensky y Villarroel⁽⁴⁾ para el cálculo de $P_{(-1)}^{\mu(b)}$, o bien, como lo haremos nosotros, promediar sobre todas las direcciones (tipo tiempo) que puede tener ω^α . Como ω^α es unitario hay que recorrer todo el hiperplano definido por $\omega^\alpha\omega_\alpha = -1$ y $\omega^0 > 0$ (lo mismo resultará si se calcula con $\omega^0 < 0$) (Ver Fig.1).

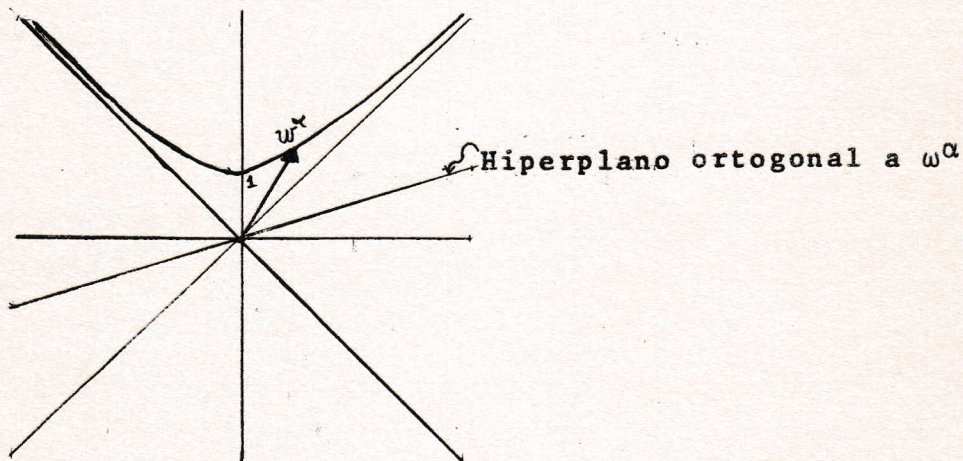


FIG.1

Para promediar sobre ω^α nos vamos al sistema en reposo de la partícula en el instante actual y definimos el ángulo hiperbólico β por medio de $\cosh\beta = -\omega^\alpha v_\alpha$ (puesto que ambos vectores (ω^α y v^α) son tipo tiempo ($\omega^\alpha v_\alpha < -1$), la definición no tiene problemas), con lo cual

$$\omega^\alpha = \cosh\beta v^\alpha + \omega_1^\alpha$$

b) En este sistema, los ω^α que forman un ángulo β constante describen una esfera de radio $|\sinh\beta|$ al ser proyectados sobre el espacio tridimensional (x, y, z) y sobre dicha esfera promediamos sobre el ángulo sólido $d\Omega$ (es decir promediamos sobre ω^α con β constante).

Una vez efectuado el cálculo b), promediamos sobre el ángulo hiperbólico β . Esta parte trae problemas por ser β un parámetro no compacto.

En resumen definimos $P^\mu(\tau)$ como el límite $\epsilon \rightarrow 0$ del promedio de los $P^\mu(\tau)(\omega^\alpha)$ sobre todas las direcciones tipo tiempo posibles.

Σ_ϵ definido por ec. (2.5a)

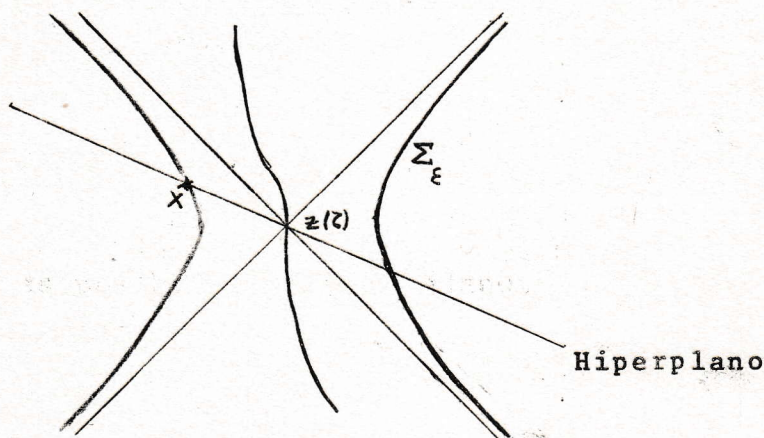


FIG. 2

P^μ considerado como el límite $\epsilon \rightarrow 0$ de la integral sobre la intersección del hiperplano con Σ_ϵ y el promedio sobre todas las direcciones posibles del hiperplano.

III. REDEFINICION DEL TENSOR DE ENERGIA LIGADO
Y CALCULO DEL CUADRIMOMENTO ASOCIADO

Teitelboim⁽¹⁾ mostró que el tensor de energía $T^{\mu\nu}$ se puede separar en dos términos (designados por $T^{(r)\mu\nu}$ y $T^{(b)\mu\nu}$) conservados separadamente fuera de la línea de universo, y simétricos. El comportamiento de ellos nos induce a pensar que dicha separación física puesto que $T^{(r)\mu\nu}$ (llamado tensor de energía radiado) tiene flujo nulo por los conos y el comportamiento asintótico requerido para que su flujo no sea nulo en el infinito, mientras que el $T^{(b)\mu\nu}$ (tensor de energía ligado) da flujo por los conos más no en el infinito.

El cuadrimento lineal ligado presente en el tiempo propio τ se define del modo siguiente⁽¹⁾

$$P^{(b)\mu}(\tau) = \int_{\sigma^0(\tau)} T^{(b)\mu\nu} d\sigma_\nu \quad (3.1)$$

donde $\sigma^0(\tau)$ es una superficie tipo tiempo que corta a la línea de universo de la carga en $Z^\mu(\tau)$ ortogonalmente a la cuadrivelocidad i.e. $v_\mu(\tau)(x^\mu - Z^\mu(\tau)) = 0$.

A partir de (3.1) Teitelboim dedujo que

$$P^{(b)\mu}(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^2}{2\epsilon} v^\mu(\tau) - \frac{2}{3} e^2 a^\mu(\tau) \quad (3.2)$$

lo cual hace que $P^{(b)\mu}(\tau)$ sea una función de estado de la par-

tícula, pero hay una divergencia que se elimina renormalizando la masa.

Ahora bien, Van Weert⁽⁵⁾ halló un tensor

$K^{\alpha\beta\gamma}$ cuya divergencia es el tensor de energía ligado
(b)
 $T^{\mu\nu}$, dado por

$$K^{\alpha\beta\gamma} = \frac{e^2}{16\pi \bar{\rho}^3} \left\{ \underbrace{3\bar{k}^\alpha \bar{v}^\beta [\bar{\beta} \bar{\gamma}]}_{K'} + g^\alpha [\bar{\beta} \bar{\gamma}] \right\} + \frac{4}{\bar{\rho}^2} \left\{ \underbrace{\bar{a}_k \bar{k}^\alpha \bar{v}^\beta [\bar{\beta} \bar{\gamma}]}_{K''} + \bar{k}^\alpha [\bar{\beta} \bar{\gamma}] \right\} \quad (3.3)$$

$$\text{con } \bar{r}^\alpha = r^\alpha(\tau_R) = x^\alpha - Z^\alpha(\tau_R) \quad \bar{r}^\alpha \bar{r}_\alpha = 0$$

$$\bar{\rho} = \rho(\tau_R) = -\bar{v}_\mu \bar{r}^\mu \quad \text{distancia retardada del punto } x \text{ a la línea de universo}$$

$$\bar{k}^\alpha = \bar{\rho}^{-1} \bar{r}^\alpha \quad \bar{k}^\alpha \bar{v}_\alpha = -1 \quad \bar{a}_k = \frac{\bar{a}^\alpha}{\bar{k}^\alpha}$$

si separamos este tensor en 2 términos, uno proporcional a ρ^{-3} y el otro a ρ^{-2} denotándolos por $K'^{\alpha\beta\gamma}$ y $K''^{\alpha\beta\gamma}$ y calculamos sus divergencias, obtenemos:

$$T^{\alpha\hat{\beta}} = \partial_\lambda K'^{\alpha\beta\gamma} = T_{I,I}^{\alpha\beta} - \frac{e^2}{2\pi\bar{\rho}^3} \bar{a}_k \frac{\bar{r}^\alpha \bar{r}^\beta}{\bar{\rho}^2} \quad (3.3a)$$

$$T''^{\alpha\hat{\beta}} = K''^{\alpha\beta\gamma} = T_{I,II}^{\alpha\beta} + \frac{e^2}{2\pi\bar{\rho}^3} \bar{a}_k \frac{\bar{r}^\alpha \bar{r}^\beta}{\bar{\rho}^2} \quad (3.3.b)$$

$$\text{con } T_{I,II}^{\alpha\beta} + T_{I,I}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} \quad (b)$$

$$T_{I,I}^{\alpha\hat{\beta}} = \frac{e^2}{4\pi\bar{\rho}^4} \left[\frac{\bar{r}^\alpha \bar{r}^\beta}{\bar{\rho}^2} - \frac{\bar{v}^\alpha \bar{r}^\beta}{\bar{\rho}} - 1/2 g^{\alpha\hat{\beta}} \right] \quad (3.4a)$$

$$T_{I,II}^{\alpha\hat{\beta}} = \frac{e^2}{2\pi\bar{\rho}^3} \left[\bar{a}_k \frac{\bar{r}^\alpha \bar{r}^\beta}{\bar{\rho}^2} - 1/2 (\bar{a}_k \bar{v}^\alpha + \bar{a}^\alpha) \frac{\bar{r}^\beta}{\bar{\rho}} \right] \quad (3.4b)$$

(Ver Ref. 1)

Las propiedades son las siguientes:

- 1) Tanto T' como T'' son simétricos.
- 2) Ambos se conservan fuera de la línea de universo por la antisimetría del tensor K .
- 3) T'' da flujo nulo por los conos i.e. $T''^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta = 0$
- 4) $T''^{\alpha\beta}$ no contribuye al $P^{(b)\mu}$ (Ver Apéndice A.4 para una demostración distinta a la nuestra).

Las propiedades 3 y 4 nos inducen a relacionar T'' con la parte radiada más bien que con la ligada.

Si imponemos la condición asintótica $a^\mu(-\infty) = 0$, la integral en σ_R se anula al hacer $R \rightarrow \infty$ (Ver explicación al final de esta sección).

Ahora calculemos $P^{(b)\mu}$ por medio de nuestro método. Para tal efecto desarrollamos $K^{\alpha\beta\gamma}$ en órdenes de ϵ (Ver Apéndice A.1).

Por razones geométricas obtenemos una forma explícita de $d^2\sigma_{\mu\nu}$

$$d^2\sigma_{\mu\nu} = (1/2)\epsilon^2 (U_{[\beta} \omega_{\gamma]}) d\Omega \quad (3.5)$$

donde U_β es el vector unitario radial, tipo espacio, y $d\Omega$ es el ángulo sólido visto por un observador en $Z^\mu(\tau)$ con cuya drivelocidad ω_γ i.e. $x^\alpha = \epsilon U^\alpha + Z^\alpha(\tau)$.

Efectuando la contracción $K^{\alpha\beta\gamma} d^2\sigma_{\beta\gamma}$, tenemos que sus órdenes en ϵ son $1/\epsilon, \epsilon^0, \epsilon^1$, etc. puesto que el término más divergente de $K^{\alpha\beta\gamma}$ es $1/\epsilon$ y está en K' (Ver A.1).

Para el orden $1/\epsilon$ obtenemos:

$$K^{\alpha\beta\gamma} d^2\sigma_{\beta\gamma} = \frac{e^2}{16\pi} \left\{ U^\alpha f \left[\frac{1}{q^3} + \frac{v_u}{q^4} - \frac{3}{q^5} \right] - 3fv^\alpha \left[\frac{v_u}{q^5} + \frac{1}{q^4} \right] - \omega^\alpha \left[\frac{1}{q^2} + \frac{v_u}{q^3} \right] \right\} d\Omega \quad (3.6)$$

$$\text{con } q \doteq \sqrt{1+v_u^2} \quad k \doteq q+v_u \quad f = \omega_\mu v^\mu \quad v_u = b \cos \theta$$

$$v^u = v^\mu U_\mu \quad b^2 = f^2 - 1 \quad \omega_\alpha U^\alpha = 0$$

$a_u = a^\mu U_\mu$ Integrando sobre U^α en $d\Omega$ y escogiendo como

eje polar la proyección de v sobre el hiperplano, tomando

en cuenta que los términos impares no contribuyen a la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle P_\alpha^{(b)}(\tau) \rangle_{(-1)}(\omega^\alpha) &= \frac{e^2}{8} \left[v^\alpha f \left\{ \frac{2}{b^2} - \frac{2}{b^3} \text{tg}^{-1} b - \frac{3}{(1+b^2)} - \frac{3}{b} \text{tg}^{-1} b \right\} \right. \\ &\quad \left. + \omega^\alpha \left\{ f \left[\frac{2}{b^2} - \frac{2}{b^3} \text{tg}^{-1} b \right] - \frac{2}{b} \text{tg}^{-1} b \right\} \right] \quad (3.7) \end{aligned}$$

Ahora tenemos que promediar sobre la proyección de ω^α en el espacio tridimensional (x, y, z) con β cte, obteniendo (Ver ref. 3)

$$\langle P_\omega^\alpha(\tau) \rangle_\Omega = \frac{1}{4} e^2 \frac{1}{\epsilon} \left[(\cosh \beta)^{-1} + (\sinh \beta)^{-1} \text{tg}^{-1} (\sinh \beta) \right] v^\alpha + o(\epsilon^0) \quad (3.8)$$

Promediando sobre β , el término divergente se anula y nos queda

$$P_{e\ell m}^\alpha(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle P_\omega^\mu(\tau) \rangle_{\Omega, \alpha} = 0(\epsilon^0) \quad (3.9)$$

Así, el término divergente se anula después de promediar sobre el ángulo β , lo que coincide con el cálculo del $F^{\mu\nu(3)}$.

Veamos si el término constante no es afectado, como ocurre en el caso del $F^{\mu\nu}$. El cálculo es largo y tedioso obteniéndose el siguiente resultado

$$\begin{aligned} K^{\alpha\beta\gamma} d^2 \sigma_{\beta\gamma}(0) &= \frac{e^2}{16\pi} \left\{ a^\alpha \left[\frac{3f}{2q^5} k^2 \right] + U^\alpha \left[\frac{a_u f}{q^7} (7/2 - 2v_u q - 4v_u^2) \right. \right. \\ &\quad - \frac{Y}{q^5} \left(\frac{v_u + 2v_u^3}{2} - \frac{Y}{2q^4} (4v_u^2 + 3) \right) + v^\alpha \left[f a_u \left\{ \frac{1}{q^7} (9v_u + 5/2v_u^3 + v_u^5) \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{q^6} (9/2 - \frac{v_u^2}{2} + v_u^4) + \frac{1}{q^4} (v_u q + q^2 + 2) \left. \right\} \frac{Y}{q^5} (1 + 3/2v_u^2 + 2v_u^4) \\ &\quad \left. \left. - \frac{Y}{q^4} (1/2v_u + 2v_u^3) \right] + \omega^\alpha a_u \left[\frac{1}{q^5} (7/2v_u + 2v_u^3) + \frac{1}{q^4} (2v_u^2 + 5/2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tomando los términos pares en u^α e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} (b) \\ P_{(0)}^\alpha(\tau)(\omega^\alpha) &= \frac{e^2}{16\pi} \left\{ a^\alpha f \left[\frac{15K + \frac{2}{3\sqrt{1+b^2}} + \frac{2b^2}{(1+b^2)^{3/2}}}{2} \right] + \omega^\alpha y f \left[\frac{15K - \frac{16}{3\sqrt{1+b^2}} + \frac{4}{(1+b^2)^{3/2}}}{2} \right. \right. \\ &\quad + f^2 y \left[f \omega^\alpha + v^\alpha \right] \left[\left\{ -\frac{15}{\sqrt{1+b^2}} \left(1 - \frac{2b^2}{3(1+b^2)} + \frac{b^4}{5(1+b^2)^2} \right) + \frac{45}{(1+b^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1b^2}{5(1+b^2)} \right) \right\} \frac{1}{b^2} + \frac{4}{3(1+b^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. \left. + v^\alpha 16\Delta y (1-f^2) + v^\alpha y \left[-\frac{4}{b} \delta + \frac{10}{\sqrt{1+b^2}} - \frac{6}{\sqrt{1+b^2}} \left(\frac{3+2b^2}{3+3b^2} \right) \right] + v^\alpha f^2 y \left[\frac{32}{3} \frac{1}{(1+b^2)^{3/2}} - \frac{6b^2}{(1+b^2)^{5/2}} \right] \right\} \right. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{con } K = \frac{2}{(1+b^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{2b^2}{3(1+b^2)} + \frac{b^4}{5(1+b^2)^2} \right) - \frac{2}{(1+b^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \frac{b^2}{(1+b^2)} \right)$$

$$\delta = \ln \left[\frac{\sqrt{1+b^2} + b}{\sqrt{1+b^2} - b} \right] \quad \Delta = \frac{1}{2b^2} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{4b^3} \delta$$

Ahora nos corresponde promediar sobre los ω_1^α i.e. la proyección en x,y,z.

Considerando que $\langle y\omega^\alpha \rangle_\Omega = 1/3 \sinh^2 \beta a^\alpha = 1/3(f^2 - 1)a^\alpha$ y $-f = \sqrt{1+b^2}$, (ver Apéndice A.3) se deduce

$$\langle P_\omega^\mu(\tau) \rangle_\Omega = -\frac{2}{3} e^2 a^\mu(\tau) \quad (3.12)$$

aún antes de promediar sobre el ángulo hiperbólico β .

Todos los cálculos efectuados hasta el momento han sido hechos considerando el K sin haberlo separado. Veremos ahora que basta con el K' para obtener los mismos resultados. Con este objeto observemos que para el término divergente no hay contribución en K'', puesto que este último contiene potencias en ϵ desde -2 en adelante (ver Apéndice A.1) y $d^2\sigma_{\alpha\beta}$ es proporcional a ϵ^2 . Para el término constante de P^μ participan las órdenes ϵ^{-2} de K' y de K''.

Si descartamos la contribución de K'' debemos restar a Ec.(3.10) la expresión

$$\frac{e^2}{16\pi} \{u^\beta I + v^\beta k I\} \quad (3.13)$$

$$\text{con } k = v_u + q \quad e \quad I = \left(-\frac{4a_{uf}}{q^5} + \frac{4a_{uf}}{q^4} - \frac{4y}{q^4} - \frac{4kv_{uy}}{q^4} \right)$$

Integrando en U^α y promediando en ω_\perp^α obtenemos que (3.13) da contribución nula, aún antes de promediar sobre el ángulo hiperbólico β . Por lo tanto para el cálculo de P^μ ^(b) basta considerar K' y el resultado es la eliminación del término divergente y la no afectación del término constante aún antes de promediar sobre β lo que coincide con el caso del $F^{\mu\nu}$ ⁽³⁾.

Nos queda aún por justificar el por qué de la condición asintótica aún considerando solamente K' . El hecho es el siguiente: $K' \sim \rho^3$ si $\rho \rightarrow \infty$, y si $a^\mu(-\infty) = 0$ $R \sim \rho$ ⁽¹⁾, luego la integral en σ_R se comporta como $1/R$ y al tomar $\lim_{R \rightarrow \infty}$ se anula. Si $a^\mu(-\infty) \neq 0$ en general la condición asintótica no es necesaria. Sin embargo, si en el pasado remoto la velocidad de la partícula tiende a c (como por ejemplo en el movimiento hiperbólico) hay contribución de $a^\mu(-\infty)$ al valor de $P^\mu(\tau)$ ^(b). Explícitamente en el caso del movimiento hiperbólico se tiene⁽⁶⁾

$$P^\mu(\tau)^{(b)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^2}{2\epsilon} v^\mu(\tau) - \frac{2}{3} a^\mu(\tau) + \frac{2}{3} a^\mu(-\infty) \quad (3.14)$$

IV. MOMENTO ANGULAR LIGADO.

Como está explicado en Ref.(2), definimos el tensor momento angular ligado como

$$M_{\lambda\mu}^{(b)} = \bar{z}_{\lambda} T_{\mu\nu}^{(b)} - \bar{z}_{\mu} T_{\lambda\nu}^{(b)} + \bar{r}_{\lambda} T_{\mu\nu}^{(-4)} - \bar{r}_{\mu} T_{\lambda\nu}^{(-4)} \quad (4.1)$$

donde $T^{(-4)}$ indica la parte del tensor $T_{\mu\nu}$ proporcional a ρ^{-4} , es decir $T_{I,I}$ (Ver ec.3.4a)

Tenemos además, que

$$M_{\lambda\mu}^{(r)} = z_{\lambda} T_{\mu\nu}^{(r)} - z_{\mu} T_{\lambda\nu}^{(r)} + r_{\lambda} T_{\mu\nu}^{(-3)} - r_{\mu} T_{\lambda\nu}^{(-3)}$$

$$T^{(-3)} = T_{I,II} \text{ (Ver ec.3.4b)} \quad T^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\bar{\rho}^2} (\bar{a}_r^2 - \bar{a}^2) \frac{\bar{r}^{\mu}\bar{r}^{\nu}}{\bar{\rho}^2}$$

Tensor de energía radiado.

Ahora bien, a (4.1) podemos sumarle la cantidad nula

$$-\bar{r}_{\lambda} \frac{e^2}{2\pi\bar{\rho}^3} \bar{a}_r \bar{r}_{\mu} \bar{r}_{\nu} + \bar{r}_{\mu} \frac{e^2}{2\pi\bar{\rho}^3} \bar{a}_r \bar{r}_{\lambda} \bar{r}_{\nu}$$

Por lo tanto

$$M_{\lambda\mu}^{(b)} = \bar{z}_{\lambda} T_{\mu\nu}'' - \bar{z}_{\mu} T_{\lambda\nu}'' + x_{\lambda} T_{\mu\nu}' - x_{\mu} T_{\lambda\nu}' \quad (4.2)$$

con

$$\begin{aligned} T^{(b)} &= T' + T'' & \bar{z}_{\lambda} + \bar{r}_{\lambda} &= x_{\lambda} \end{aligned}$$

Análogamente a $P^{(b)\mu}$, definimos el momento angular ligado como

$$M_{\lambda\mu}^{(b)}(\tau) = \int_{\sigma^0(\tau)} M_{\lambda\mu}^{(b)} d\sigma^{\nu}$$

donde $\sigma^0(\tau)$ es una superficie tipo espacio, que corta a la línea de universo de la partícula en $z^\mu(\tau)$ ortogonalmente a $v^\mu(\tau)$. Tal como en el caso de P^μ ,^(b) donde el término T'' no contribuye, en este caso ocurrirá que los 2 primeros términos de (4.2) se anularán al integrar.

Por lo tanto, una buena redefinición será la siguiente:

$$(b) \quad M_{\lambda\mu\nu}^{\wedge} = x_{[\lambda} T'_{\mu]\nu} \quad (4.3)$$

que se conserva fuera de la línea universo (por la simetría de T' y de $\partial^\nu T'_{\mu\nu} = 0$) y que muestra la relación general

$M_{\lambda\mu\nu}^{\wedge} = x_{[\lambda} T'_{\mu]\nu}$ para el caso ligado ya que, por sus propiedades, el tensor ligado debiera ser T' .

Así, (4.3) tiene un sentido físico más claro que (4.1), que se podrá interpretar como algo artificial.

Partiendo de (4.3) veremos que nos lleva a resultados esperados.

Para ello, tratemos de hallar un "superpotencial" K^* cuya divergencia sea (4.3). En efecto, el tensor

$$K_{\lambda\mu\nu\varepsilon}^* = x_{[\lambda} K'_{\mu]\nu\varepsilon} + K'_{[\lambda\mu]\nu} \bar{r}_{\varepsilon]} \quad (4.4)$$

posee dicha propiedad. Para verificarlo, i.e que $\partial^\varepsilon K_{\lambda\mu\nu\varepsilon}^* = M_{\lambda\mu\nu}^{\wedge}$, calculemos esta expresión, sabiendo que $\bar{r}_{,\varepsilon}^\varepsilon = 0$; $\bar{r}_{,\varepsilon}^\alpha = \delta_{\varepsilon}^\alpha + \frac{\bar{r}_{\varepsilon} \bar{v}^\alpha}{\bar{\rho}}$;

T' es simétrico y que $\partial^\varepsilon K_{\mu\nu\varepsilon}^* = T'_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \partial^\epsilon K^*_{\lambda\mu\nu\epsilon} &= \delta^\epsilon_\lambda K'_{\mu\hat{\nu}\epsilon} - \delta^\epsilon_\mu K'_{\lambda\hat{\nu}\epsilon} + x[\lambda T'_\mu]_\nu + \bar{r}_\epsilon \partial^\epsilon [K'_{\lambda\hat{\mu}\hat{\nu}} - K'_{\mu\hat{\lambda}\hat{\nu}}] \\ &+ 3[K'_{\lambda\hat{\mu}\hat{\nu}} - K'_{\mu\hat{\lambda}\hat{\nu}}] + \bar{r}_\nu [T'_{\mu\lambda} - T'_{\lambda\mu}] + \left[\delta^\epsilon_\nu + \frac{\bar{r}^\epsilon \bar{v}_\nu}{\bar{\rho}} \right] [K'_{\mu\hat{\lambda}\hat{\epsilon}} - K'_{\lambda\hat{\mu}\hat{\epsilon}}] \end{aligned}$$

Definiendo $K'_{\lambda\hat{\mu}\hat{\nu}} - K'_{\mu\hat{\lambda}\hat{\nu}} = \frac{e^2}{16\pi} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}^3} [3\bar{k}[\lambda\bar{v}\mu]\bar{k}\gamma + \bar{k}[\lambda g\mu]_\nu] \right\} \doteq \Delta K'$

obtenemos

$$\bar{r}_\epsilon \partial^\epsilon \Delta K' + 3\Delta K' = 0$$

Así, llegamos finalmente a

$$\partial^\epsilon K^*_{\lambda\mu\hat{\nu}\epsilon} = x[\lambda T'_\mu]_\nu$$

pudiendo observar inmediatamente que

$$\partial^\nu \partial^\epsilon K^*_{\lambda\mu\hat{\nu}\epsilon} = 0 = \partial^\nu M_{\lambda\mu\hat{\nu}}$$

puesto que contracción de una expresión simétrica en $\nu\epsilon$ con otra asimétrica en los mismos índices.

Ahora hallemos el $M_{\lambda\mu}^{(b)}(\tau)$, calculando $K^*_{\lambda\mu\hat{\nu}\epsilon} d^2\sigma^{\hat{\nu}\epsilon}$ y después promediando.

Puesto que $\bar{r}^\epsilon \bar{v}_\epsilon(\epsilon)$ (Ver Apéndice A.1), $d^2\sigma^{\hat{\nu}\epsilon}$ es proporcional a ϵ^2 y $K'_{\lambda\mu\hat{\nu}}$ tiene términos de órdenes en $\epsilon^{-3}, \epsilon^{-2}, \epsilon^{-1}$, etc. para obtener $M_{\lambda\mu}^{(b)}(\tau)$ necesitamos sólo el término (-1)

$$z[\lambda K'_\mu]_\nu \epsilon_{(-3)} \quad (\text{NOTA: } x^\alpha = \bar{r}^\alpha + \bar{z}^\alpha = \epsilon u^\alpha + z^\alpha)$$

Así concluimos directamente que

$$\langle M_{\lambda\mu}^{(b)\omega}(\tau) \rangle_{(-1)\Omega, \alpha} = 0 \quad (4.5)$$

puesto que z_λ está evaluado en τ por lo cual es una constante que sale fuera de la integral, y al promediar $K'_{\mu\nu\epsilon(-3)}$ obtenemos cero (Ver Ec. 3.9).

Veamos ahora qué ocurre con el término proporcional a $\epsilon^0=1$

$$K'_{\lambda\mu\nu\epsilon(-2)} = z [\lambda K'_{\mu}]_{\nu\epsilon(-2)} + U [\lambda K'_{\mu}]_{\nu\epsilon(-3)} + K'_{[\lambda\mu]} [\nu]_{\epsilon(-3)} U \quad (4.6)$$

(2) Al substituir $K'_{\mu\nu\epsilon(-3)}$ por su expresión y multiplicar el término (2) por $d^2\sigma^{\hat{\nu}\epsilon}$ obtenemos

$$(2) \cdot d^2\sigma^{\hat{\nu}\epsilon} = M_{\lambda\mu}^* = \frac{e^2}{16\pi} \left\{ \frac{9kf}{q^5} (U [\mu \nu \lambda]) + \frac{2}{q^4} (U [\mu + kv [\omega \lambda]]) + \frac{k}{q^3} (U [\mu \omega \lambda]) \right\}$$

Integrando ahora en U^α concluimos que

$$M_{\lambda\mu}^* = \frac{e^2}{16\pi} \{ 9f^2 \eta(b) (\omega [\mu \nu \lambda]) + 2\zeta(b) \omega [\lambda \nu \mu] + \xi(b) \omega [\lambda \nu \mu] \} \quad (4.7)$$

donde

$$\eta(b) = \frac{1}{b} \int \frac{U^3 v_u}{q^5} d\Omega \quad \zeta(b) = \int \frac{d\Omega}{q^4} \quad \xi(b) = \frac{1}{b} \int \frac{U^3 v_u}{q^3} d\Omega$$

(4.7) es lineal en ω_μ , por lo cual al promediar, se anula

$M_{\lambda\mu}^*$ y (2) no contribuye. Respecto al término (1), como

$z=z(\tau)$ es constante y al promediar $K'_{\mu\nu\epsilon(-2)}$ obtenemos, aún antes de promediar sobre el ángulo hiperbólico β , $P_{\mu(0)}^{(b)}$

entonces

$$\langle M_{\lambda\mu}^{\omega(\tau)} \rangle_{\Omega}^{(b)} = z [\mu(\tau) P_{\lambda}^{(b)}]_{(0)}(\tau) \quad (4.8)$$

sin divergencias.

V. CONCLUSIONES Y DISCUSION.

Con el método expuesto obtuvimos el término constante de los momentos lineal y angular ligados a la partícula correctamente, mientras que el término divergente se elimina al promediar. En ambos casos (i.e. momentos lineal y angular) se obtuvo el término constante antes de promediar sobre el ángulo hiperbólico β . Estos resultados nos muestran que el método introducido por López⁽³⁾ (el cual condujo a resultados análogos para el tensor del campo electromagnético retardado de Lienárd-Wiechert), no elimina por accidente el término divergente, sino que corresponde a una propiedad del proceso de promediación.

Por lo tanto, cabe decir que nuestro objetivo se cumplió. También cabe consignar lo siguiente: si en vez de haber promediado sobre todas las normales de los hiperplanos tipo espacio hubieramos tomado el límite en el cual la normal tiende a la cuadrivelocidad en el tiempo presente (después de haber integrado sobre la esfera determinada por un hiperplano con normal fija), hubiésemos obtenido el momento lineal ligado correctamente (aunque con la divergencia incluida) y, la expresión (1.1). [Todo esto se desarrolló y se comprobó su validez].

Por otro lado, la expresión (1.1) aparece como un accidente matemático. ¿Lo será en realidad o tendrá su

"explicación"? Algo análogo ocurre con el caso de los niveles energéticos del átomo de hidrógeno no relativista, en el cual la energía es sólo función del número cuántico principal n y no del momento angular ℓ . Parece un accidente; sin embargo, posteriormente, se descubrió un vector (el vector de Runge-Lenz) cuyas componentes conmutan con el hamiltoniano del átomo de hidrógeno lo cual permitió "explicar" la degeneración del espectro. Esta simetría, sin embargo, se debe a la forma explícita del potencial, es decir, que es proporcional a $\frac{1}{R^2}$.

Una posible explicación (conjetura) de (1.1) es que esta ecuación es una consecuencia directa de la estructura de los tensores de energía ligado y de momento angular ligado, ya que ambos provienen de la divergencia de 2 tensores "superpotenciales", y el tensor K^* (cuya divergencia es el tensor de momento angular ligado) es función solo de K' (el cual tiene por divergencia al nuevo tensor de energía ligado).

Sin embargo, como se vió en sección IV, esto no ocurre puesto que un término no se anula al contraer con el elemento de superficie sino sólo después de promediar (Ver término (2) en Ecuación (4.6) y (4.7)).

Por lo tanto, dicha conjetura no resultó ser válida y persiste la duda de cuál es la "explicación" de (1.1) si es que la tiene.

Finalmente por este método podríamos esperar que la parte divergente desaparezca al calcular el momento an-

gular ligado de una carga con spin, sin embargo dicho cálculo no se efectuó por su gran extensión.

El hecho de que se haya descubierto un tensor T' conservado y que sea el que da toda la contribución a las integrales, además de redefinir el tensor de momento angular ligado, facilitará cualquier cálculo posterior similar y podría ayudar a interpretar posibles nuevos resultados.

APENDICEA.1
Desarrollo en potencias de ϵ para $K^{\alpha\beta\lambda}$

Derivaremos las expresiones de K en órdenes de ϵ .

El punto x se toma en el presente absoluto de $z^\mu(\tau)$.

En términos de $\sigma = \tau - \tau_R$ $\tau_R =$ tiempo retardado tenemos

$$\bar{z}^\mu = z^\mu - v^\mu + 1/2 a^\mu + O(\sigma^3) \quad (A.1)$$

$$\bar{v}^\mu = v^\mu - \sigma a^\mu + O(\sigma^2) \quad (A.2)$$

$$\bar{r}^\mu \doteq x^\mu - z^\mu = \epsilon U^\mu + \sigma v^\mu - 1/2 \sigma^2 a^\mu + O(\sigma^3) \quad (A.3)$$

$$\bar{\rho} = -\bar{v}_\mu \bar{r}^\mu = -\epsilon v_u + \sigma + \epsilon \sigma a_u + O(\sigma^3) \quad (A.4)$$

$$x^\mu - z^\mu(\tau) \doteq \epsilon U^\mu \quad \bar{\rho}: \text{distancia retardada}$$

$$a_\mu(\tau) v^\mu(\tau) = 0 \quad v^\mu v_\mu = -1 \quad U^\mu U_\mu = 1$$

Para hallar la relación entre σ y ϵ , tenemos que imponer que \bar{r}^μ sea un vector del cono, es decir

$$\bar{r}^\mu \bar{r}_\mu = 0 \quad (A.5)$$

Así por (A.3) obtenemos (sabiendo que $\sigma \sim \epsilon$)

$$0 = \epsilon^2 + 2\epsilon\sigma v_u - \sigma^2 - \epsilon\sigma^2 a_u + O(\sigma^4) \quad (A.6)$$

Hay que resolver σ a 3^{er} orden (con eso nos bastará)

$$(1 + \epsilon a_u) \sigma^2 - (2v_u \epsilon) \sigma - \epsilon^2 = 0$$

$$\sigma = \frac{2v_u \epsilon + \sqrt{4v_u^2 \epsilon^2 + 4\epsilon^2 (1 + a_u \epsilon)}}{2(1 + a_u \epsilon)} = \frac{2v_u \epsilon + 2\epsilon \sqrt{v_u^2 + 1} \sqrt{1 + \frac{a_u \epsilon}{v_u^2 + 1}}}{2(1 + a_u \epsilon)}$$

que es correcto hasta $0(\epsilon^2)$ incluido

Desarrollando en potencias de ϵ obtenemos

$$\sigma = k\epsilon + \alpha a_u \epsilon^2 + 0(\epsilon^3) \quad (\text{A.7})$$

$$\text{con } q = \sqrt{1+v_u^2} \quad k \doteq q+v_u \quad \alpha \doteq \frac{1}{2q} - k$$

Substituyendo (A.7) en Ecs. (A.2) al (A.4) obtenemos

$$\bar{v}^\mu = v^\mu - k\epsilon a^\mu + 0(\epsilon^2) \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\rho} = \epsilon q \left(1 + \frac{a_u}{2q^2} \epsilon\right) + 0(\epsilon^3) \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\rho}^{-1} = \frac{1}{\epsilon q} \left(1 - \frac{a_u}{2q^2} \epsilon\right) + 0(\epsilon) \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{\rho}^{-2} = \frac{1}{\epsilon^2 q^2} \left(1 - \frac{a_u}{q^2} \epsilon\right) + 0(\epsilon^0) \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\rho}^{-3} = \frac{1}{\epsilon^3 q^3} \left(1 - \frac{3a_u}{2q^2} \epsilon\right) + 0(\epsilon^{-1}) \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{r}^\mu = \epsilon(U^\mu + kv^\mu) + \epsilon^2(\alpha a_u v^\mu - 1/2 a^\mu k^2) + 0(\epsilon^2) \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{k}^\mu \doteq \bar{\rho}^{-1} \bar{r}^\mu = \frac{U^\mu + kv^\mu}{q} + \epsilon \left[\left(-\frac{a_u}{2q^2}\right) \left(\frac{U^\mu + kv^\mu}{q}\right) + \frac{\alpha a_u v^\mu - 1/2 a^\mu k^2}{q} \right] + 0(\epsilon^2) \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{a}_k \doteq \bar{a}^\mu \bar{k}_\mu = \frac{a_u}{q} + 0(\epsilon) \quad (\text{A.15})$$

Puesto que $K^{\alpha\beta\gamma} d^2 \sigma_{\beta\gamma}$

$$= \frac{e^2}{16\pi} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}^3} (3\bar{k}^\alpha \bar{v}^\beta \bar{k}^\gamma + g^{\alpha\beta} \bar{k}^\gamma) + \frac{4}{\bar{\rho}^2} (\bar{a}_k \bar{k}^\alpha \bar{v}^\beta \bar{k}^\gamma + \bar{k}^\alpha \bar{a}^\beta \bar{k}^\gamma) \right\} \cdot \epsilon^2 d\Omega \{U_\beta \omega_\gamma - \omega_\beta U_\gamma\} \quad (\text{A.16})$$

$$\text{entonces } K^{\alpha\beta\gamma} d^2 \sigma_{\beta\gamma} (-1) = \frac{e^2}{16\pi} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}^3} (3\bar{k}_{(0)}^\alpha \bar{v}_{(0)}^\beta \bar{k}_{(0)}^\gamma + g^{\alpha\beta} \bar{k}_{(0)}^\gamma) + \frac{4}{\bar{\rho}^2} (\bar{a}_{k(-3)} \bar{k}_{(0)}^\alpha \bar{v}_{(0)}^\beta \bar{k}_{(0)}^\gamma + \bar{k}_{(0)}^\alpha \bar{a}_{(-3)}^\beta \bar{k}_{(0)}^\gamma) \right\} \{U_\beta \omega_\gamma - \omega_\beta U_\gamma\} d\Omega \quad (\text{A.17})$$

Reemplazando los términos de (A.17) por sus valores (dados en ecs. (A.8 al A.15) y contrayendo, obtenemos Ec. (3.6)

Análogamente

$$\begin{aligned}
 K^{\alpha\beta\gamma} = & \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}^3} (3\bar{k}_{(0)}^\alpha \bar{v}_{(0)}^\beta \bar{k}_{(0)}^\gamma + g^{\alpha\beta} \bar{k}_{(0)}^\gamma) + \frac{1}{\bar{\rho}^3} (3\bar{k}_{(1)}^\alpha \bar{v}_{(0)}^\beta \bar{k}_{(0)}^\gamma \right. \\
 & + 3\bar{k}_{(0)}^\alpha \bar{v}_{(1)}^\beta \bar{k}_{(0)}^\alpha + 3\bar{k}_{(0)}^\alpha \bar{v}_{(0)}^\beta \bar{k}_{(1)}^\gamma + g^{\alpha\beta} \bar{k}_{(1)}^\gamma) \\
 & \left. + \frac{4}{\bar{\rho}^2} (\bar{a}_{(0)}^\alpha \bar{k}_{(0)}^\alpha \bar{v}_{(0)}^\beta \bar{k}_{(0)}^\gamma + \bar{k}_{(0)}^\alpha \bar{a}_{(0)}^\beta \bar{k}_{(0)}^\gamma) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Para encontrar $K^{\alpha\beta\gamma} d^2\sigma_{\beta\gamma(0)}$ hay que contraer (A.18) con $\{U_\beta\omega_\gamma - U_\gamma\omega_\beta\} d\Omega$.

Desarrollando, se obtiene Ec.(3.10)

A.2

Forma covariante de las integrales sobre U^α .

Para las integraciones en U^α , se procede de la siguiente manera (daremos ejemplos para su visualización):

$$1) \int \frac{1}{q^4} d\Omega = \int \frac{\text{sen}\theta d\theta d\phi}{1+b^2 \cos^2\theta} = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+b^2 x^2)^2} \quad x = \cos\theta \tag{A.19}$$

$$2) \int \frac{U^\alpha v_u}{q^4} d\Omega$$

hay que expresarlo de modo covariante pues integramos en el sistema de referencias en el cual $U^\alpha = (0; \cos\phi \text{sen}\theta, \text{sen}\phi \text{sen}\theta, \cos\theta)$.
(Ver sección II y Fig. 3).

$$v_u = b \cos\theta$$

$$\int \frac{U^0 v_u}{q^4} d\Omega = \int \frac{U^1 v_u}{q^4} d\Omega = \int \frac{U^2 v_u}{q^4} d\Omega = 0$$

El único que sobrevive es $\int \frac{U^3 v_u}{q^4}$

Como estamos en un sistema de Lorentz que se mueve con cuadrivelocidad ω^μ

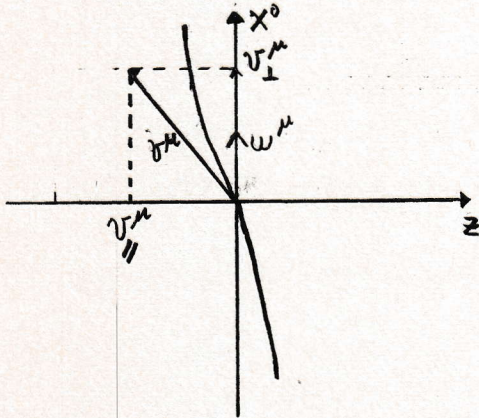


FIG. 3

$$\begin{aligned} v^\mu &= v_{\parallel}^\mu + v_{\perp}^\mu \\ v^\mu &= v^\mu + \underbrace{(v^\mu \omega_u)}_f \omega^\mu \\ \omega^\mu &= (1; \vec{0}) \quad (\text{A.20}) \\ v^\mu &= (0, |\vec{v}_{\parallel}| \hat{z}) \text{ define eje } z \\ U^\mu &= (0; \hat{U}) \end{aligned}$$

$$v_u = v^\mu U_\mu = v_{\parallel}^\mu U_\mu = |\vec{v}_{\parallel}| \hat{z} \cdot \hat{U} = |\vec{v}_{\parallel}| \cos \theta = b \cos \theta$$

$$v_{\parallel}^\mu v_{\parallel}^\mu = f^2 - 1 = b^2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{U^\alpha v_u}{q^4} d\Omega &= g^{\alpha 3} \int \frac{U^3 v_u}{q^4} d\Omega = \frac{1}{|\vec{v}_{\parallel}|} \int \frac{U^3 v_u d\Omega}{q^4} v_{\parallel}^\alpha \\ &= \frac{1}{b} \int \frac{U^3 v_u}{q^4} d\Omega v_{\parallel}^\alpha = \frac{1}{b} \int \frac{U^3 v_u}{q^4} d\Omega [v^\alpha + f \omega^\alpha] \\ &\quad (\text{por (A.20)}) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$3) \int \frac{U^\nu a_u}{q^3} d\Omega = a_\alpha \int \frac{U^\nu U^\alpha}{q^3} d\Omega$$

$$a_1 \int \frac{(U_1)^2}{q^3} d\Omega = \Delta^* a_1$$

$$\Delta^* \doteq \left(\frac{\sqrt{1+b^2}}{2b^2} - \frac{1}{4b^3} \text{Log} \left| \frac{\sqrt{1+b^2}+b}{\sqrt{1+b^2}-b} \right| \right) 4\pi$$

$$a_2 \int \frac{(U_2)^2}{q^3} d\Omega = a_2 \Delta^*$$

Los términos con $v \neq \alpha$ se anulan al integrar

$$a_3 \int \frac{(U_3)^2}{q^3} d\Omega = a_3 \Delta^* a_3 \left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} - 3\Delta^* \right)$$

como $\omega^\alpha = (1, \vec{0})$ entonces

$$(g^{\alpha\beta} + \omega^\alpha \omega^\beta) \Delta^* a_\beta = (0, a_1, a_2, a_3) \Delta^*$$

$$ka_3 = \frac{k}{b^2} v_{//}^\nu v_{//}^\beta a_\beta \quad k = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} - 3\Delta^*$$

$$= \frac{k}{b^2} (\omega^\nu f^2 y + v^\nu f y) \quad y = \omega^\alpha a_\alpha$$

por (A.20)

Así

$$\int \frac{U^\nu a_u}{q^3} d\Omega = \Delta^* (g^{\nu\beta} + \omega^\nu \omega^\beta) a_\beta + \frac{k}{b^2} f y [f \omega^\nu + v^\nu] \quad (A.22)$$

$$4) \int \frac{a_u v_u}{q^3} d\Omega = a_\alpha \int \frac{U^\alpha v_u}{q^3} d\Omega = \frac{a_\alpha}{b} \int \frac{U^3 v_u}{q^3} d\Omega (v^\alpha + f \omega^\alpha)$$

$$= \frac{1}{b} \int \frac{U^3 v_u}{q^3} d\Omega f y \quad (A.23)$$

A.3

Promedio sobre los hiperplanos.

Recordemos que $\omega^\alpha = (\cosh\beta) v^\alpha + \omega_1^\alpha$ con $v^\mu \omega_\mu = 0$ (A.24)

$$\cosh\beta = -\omega^\alpha v_\alpha = -f \quad b = |\sinh\beta|$$

Al irnos al sistema en reposo, para promediar en ω_μ con β constante y después promediar en β , tenemos las expresiones

$$v^\alpha = (1; 0, 0, 0) = (\cosh\beta, \sinh\beta \cos\phi \sin\theta, \sinh\beta \sin\phi \sin\theta, \sinh\beta \cos\theta)$$

Al promediar con $\beta = \text{cte.}$, los términos impares en ω_1^α se anulan.

En sección III nos aparece $\langle y\omega^\alpha \rangle_\Omega$ $y = a_\gamma \omega^\gamma$
 pero $a_0 = 0$ pues $a^\mu v_\mu = 0$

$$\text{así obtenemos } \langle y\omega^j \rangle_\Omega = 1/3 \sinh^2 \beta a_j \quad j=1,2,3$$

$$\langle y\omega^0 \rangle = 0$$

Escribirlo de manera covariante, es directo,
 por el sistema de referencia utilizado y el resultado es

$$\langle y\omega^\alpha \rangle_\Omega = 1/3 (\sinh^2 \beta) a^\alpha \quad (\text{A.25})$$

A.4

Contribución del $T^{\mu\nu}$ al cálculo del P^μ . ^(b)

Si nos basamos en Ref.2 ec.(A.3), para calcular ^(b) P^μ ocupamos el tubo de Bhabha (cilindro de radio retardado constante ϵ) y tenemos que el elemento de superficie es

$$d\sigma_\nu = |\epsilon v_\mu - (1-K') \bar{r}_\nu| \epsilon d\Omega d\tau \quad \bar{a}_k = \bar{a}_\mu \frac{\bar{r}^\mu}{\epsilon} \quad d\Omega = \text{ángulo sólido en el sistema de reposo.}$$

Como se ve de ec.(3.3.b) y (3.4.b) que $T^{\mu\nu}$ es proporcional a \bar{r}^ν por lo tanto $T^{\mu\nu}$ no da flujo por los conos.

Veremos que tampoco hay flujo a lo largo de los conos.

Al contraer $T^{\mu\nu}$ con \bar{v}_ν obtenemos (con $\bar{\rho}$ constante, propiedad del tubo de Bhabha $= \epsilon$)

$$T^{\mu\nu} \bar{v}_\nu = \frac{e^2}{2\pi\epsilon^3} \left[2\bar{a}_k \frac{\bar{r}^{\mu-\nu}}{\epsilon^2} - 1/2 (\bar{a}_k \bar{v}^{\mu+\nu} + \bar{a}^{\mu+\nu} \frac{\bar{r}^\nu}{\epsilon}) \right] \bar{v}_\nu$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\epsilon^3} \left[-4\bar{a}_k \frac{\bar{r}^\mu}{\epsilon} + \bar{a}_k \bar{v}^\mu + \bar{a}^\mu + \frac{\bar{a}_k}{\epsilon} \bar{r}^\mu \right] = \frac{e^2}{4\pi\epsilon^3} \left[\bar{a}_k \bar{v}^\mu + \bar{a}^\mu - 3\bar{a}_k \frac{\bar{r}^\mu}{\epsilon} \right] \quad (\text{A.26})$$

pues $\bar{r}^\nu \bar{v}_\nu = -\bar{\rho} = -\epsilon$

al integrar

$$\frac{\bar{a}^\nu}{4\pi\epsilon^2} \int \bar{r}_\mu \bar{r}_\nu d\Omega = +1/3 \bar{a}_\mu$$

$$\text{i.e. } \int \bar{a}_k \bar{r}_\mu d\Omega = \frac{4\pi\epsilon}{3} \bar{a}_\mu$$

Después en $d\Omega$

$$\int T^{\mu\nu} d\Omega \bar{v}_\nu = \frac{e^2}{\epsilon^3} \left[\bar{a}^\mu - \frac{3}{3} \bar{a}^\mu \right] = 0 \quad (\text{A.27})$$

R E F E R E N C I A S

- 1.-C.Teitelboim:Phys.Rev.D1,1572 (1970).
- 2.-C.A.López and D.Villarroel:Phys.Rev.D11,2724 (1975).
- 3.-C.A.López, por aparecer en Nuovo Cimento B, "Nondivergent retarded self-interaction of a classical point-electron".
- 4.-R.Tabensky and D.Villarroel: Lettere al Nuovo Cimento 12,125(1975).
- 5.-Ch.Van Weert:Phys.Rev.D9,339;(1974).
- 6.-M.Hernández:"Significado de la condición asintótica en la ecuación de Lorentz-Dirac". (Futura Tesis de Licenciatura).

I N D I C E

| | <u>Página</u> |
|--|---------------|
| Notación. | 0 |
| Resumen. | 1 |
| I. Introducción. | 2 |
| II. Cálculo de los promedios. | 5 |
| III. Redefinición del tensor de energía ligado y cálculo del cuadrimomento asociado. | 9 |
| IV. Momento angular ligado. | 16 |
| V. Conclusiones y Discusión | 20 |
| Apéndice 1. Desarrollo en potencia de ϵ para $K^{\alpha\beta\gamma}$. | 23 |
| Apéndice 2. Forma covariante de las integrales sobre U^α . | 25 |
| Apéndice 3. Promedio sobre los hiperplanos. | 27 |
| Apéndice 4. (b) Contribución del T'' al cálculo del P^μ . | 28 |
| Referencias. | 30 |

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer al Sr. Carlos A. López, mi profesor guía por su decidida y valiosa cooperación en todo instante para ayudarme a salir adelante en este trabajo.

También agradezco al Sr. Jaime Röessler por la colaboración que me otorgó a lo largo de mi carrera, y a la Sra. Sonia Encalada por mecanografiar esta tesis.

Doy las gracias a mis familiares por la gran ayuda que me otorgaron para lograr finalizar mis estudios.

Finalmente a todos mis amigos y compañeros, con los cuales tuve agradables momentos y con los cuales logramos, en conjunto, avanzar en esta carrera.