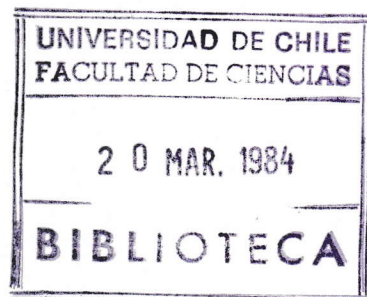


UCH-FC  
LIC-F.  
P171

UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD CIENCIAS BASICAS Y FARMACEUTICAS  
DEPARTAMENTO DE FISICA

CONVECCION ESTACIONARIA DEBIDO A  
RESISTIVIDAD, VISCOSIDAD Y CON-  
DUCTIVIDAD TERMICA EN UN PLASMA  
CILINDRICO.



Tesis para optar al grado  
de Licenciado en Ciencias  
con mención en Física.

PATROCINANTE: Dr. Luis Gomberoff Jaikles

GUILLERMO O. PALMA AGUIRRE

1 9 8 4

NO

"Vivía y soñaba que la vida era alegría,  
desperté y vi que la vida era servicio,  
serví y vi que el servicio era alegría"

R. Tagore

A mi familia - a todos a quienes quiero.

## RESUMEN

---

La estabilidad de un plasma cilíndrico con corrientes es estudiada usando las ecuaciones de la magnetohidrodinámica no ideal en un campo magnético sin cizalle. Se muestra que para cada modo  $m$  hay cuatro estados marginales estacionarios los cuales, bajo ciertas condiciones, conducen a convección estacionaria en gran escala, tomando en consideración efectos no lineales.

## I N D I C E

- §1.      Introducción
- §2.      Ecuación Cinética para el Plasma
- §3.      Ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD)
- §4.      MHD Ideal
- §5.      Efectos no-ideales debido a viscosidad y conducti  
          vidad térmica.
- §6.      Efectos no-ideales debido a resistividad y conduc  
          tividad térmica.
- §7.      Efectos combinados de viscosidad, resistividad y  
          conductividad térmica.
- §8.      Conclusiones y Discusión

## 1. INTRODUCCION

Convección, o movimientos de plasma bien organizado han sido estudiado por muchos autores. Los primeros estudios son debidos a Tinofeev<sup>(1)</sup> (1965) y Simov<sup>(2)</sup> (1968) quienes mostraron que en un plasma parcialmente ionizado los modos convectivos son originados por la curvatura toroidal y los neutrones producen la disipación requerida. Más tarde, Kadomtsev y Pogutse<sup>(3)</sup> mostraron que los modos resistivos producen celdas de convección. Dawson y Okuda<sup>(4)</sup> (1973) mostraron la existencia de convección térmicamente excitada causada por modos de deriva. La formación de un cuasimodo de larga extensión espacial ha sido propuesta por Roberts y Taylor<sup>(5)</sup> (1965). Posteriormente, Wobig (1972), Maschke y Paris (1973) han mostrado que cuando el plasma es inestable al intercambio magnetohidrodinámico, viscosidad y resistividad producen convección en un campo magnético sin cizalle. Dagazian y Paris<sup>(8)</sup> (1977) mostraron la existencia de modos estacionarios tipo convección en una "slab" de plasma con un campo magnético con cizalle. Más recientemente Gomberoff y Hernández<sup>(9, 10)</sup> (1981) probaron la existencia de convección estacionaria en un plasma cilíndri

co como una consecuencia de la viscosidad y conductividad térmica. Los modos convectivos ocurren para número de ondas grandes y campo magnético sin cizalle que satisface  $B_{\theta}/B_z \gg 1$ .

La estabilidad de una columna de plasma con corrientes limitada por paredes conductoras en presencia de un campo magnético longitudinal externo ha sido extensamente estudiado. El primer resultado analítico estudiado fue debido a Tayler <sup>(12)</sup> (1957) y Shafranov <sup>(13)</sup> (1958) quienes resolviendo las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal (MHD), suponiendo movimiento incompresible mostraron que la tasa de crecimiento como función de la componente paralela del vector de onda  $k_{\parallel}$ , tiene dos máximos localizados simétricamente alrededor de  $k_{\parallel} = 0$  y se anula para  $k_{\parallel} = 0$ . Sin embargo, Gomberoff y Maschke (1981) mostraron que no hay solución lineal en la región central del espectro si se supone el plasma incompresible. La compresibilidad cambia la forma del espectro de tal modo que la tasa de crecimiento tiene un máximo simple en  $k_{\parallel} = 0$  y en el rango inestable de  $k_{\parallel}$  los valores permanecen inalterados <sup>(15-18)</sup>.

Se obtiene una nueva situación cuando efectos no ideales tales como, viscosidad, resistividad y conducción térmica son considerados. (Gomberoff y Palma <sup>(24)</sup> (1983)).

Aún cuando los correspondientes coeficientes son pequeños, los efectos no-ideales juegan un importante rol - para perturbaciones con  $k_{\parallel} = 0$ . Esto es, la viscosidad y conductividad térmica tienen el efecto de remover la singularidad en  $k_{\parallel} = 0$  del movimiento incompresible ideal. Esto ocurre para  $B_0/B_z \gg 1$  y  $|k_z|a \gg 1$  donde  $a$  es el radio del cilindro <sup>(9, 10)</sup> y  $k_z$  es la componente longitudinal del vector de onda. Además, cuando el producto de la viscosidad y la conductividad térmica alcanzan cierto valor, el modo con  $k_{\parallel} = 0$  se convierte en modo convectivo.

Por otro lado, resistividad y conductividad térmica también producen convección <sup>(11)</sup>. En este caso, la singularidad en  $k_{\parallel} = 0$  del movimiento ideal persiste, pero el modo marginal se convierte en convectivo cuando el cociente entre resistividad y conductividad térmica toman un valor dado <sup>(11)</sup>. Esta situación ha sido establecida para  $\frac{B_0}{B_z} \ll 1$  y  $|k_z|a \ll 1$ .

En esta tesis se estudia los efectos combinados de viscosidad, resistividad y conductividad térmica. Se muestra que hay 4 estados marginales estacionarios, todos ellos resultan en convección estacionaria en gran escala bajo ciertas condiciones análogas a los 2 casos anteriores.

§2. ECUACION CINETICA PARA EL PLASMA

Consideramos un plasma compuesto de  $N$  electrones moviéndose sobre un fondo fijo de cargas positivas.

Sean  $X_i = (\bar{q}_i, \bar{p}_i)$  la posición del  $i$ -ésimo electrón en el espacio de fase donde  $\bar{q}_i, \bar{p}_i$  son variables canónicas conjugadas del hamiltoniano del sistema. Por simplicidad tomamos la interacción entre las partículas derivable de un potencial escalar  $\phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|)$  que depende de la separación relativa de los electrones  $(i, j)$ . Además consideramos un potencial  $\mathcal{U}(\bar{q}_i)$  de interacción sobre cada electrón proveniente de la barrera de potencial en la frontera del volumen en el espacio de configuración y un potencial promediado debido al fondo de iones. Definamos ahora la distribución de probabilidad reducida  $F_S/V^S$  :

$$F_S(t, X_1, \dots, X_S) \prod_{i=1}^S dx_i = \text{probabilidad de que las partículas } 1, 2, \dots, S \text{ estén en los entornos } dx_1, \dots, dx_S \text{ de los puntos } X_1, \dots, X_S.$$

Luego fluye la definición de la distribución de probabilidad  $D_n(X_1, \dots, X_n, t)$



$\frac{F_n}{V^n} = D(t, X, \dots, X_n) =$  Probabilidad de que las partículas 1, ..., N estén al tiempo t en los entornos  $dx, \dots, dx_n$  de los puntos  $X, \dots, X_n$  respectivamente).

Del teorema de Liouville  $\frac{dD(t, X, \dots, X_n)}{dt} = 0$  (2.1)

Se sigue la evolución temporal, o equivalentemente usando corchetes de Poisson definidos por :

$$\{A, B\} = \partial_{\bar{q}_i} A \partial_{\bar{p}_i} B - \partial_{\bar{p}_i} A \partial_{\bar{q}_i} B$$

donde  $\partial_{\bar{q}_i} = \nabla_{\bar{q}_i}$  y se usa la convención de Einstein para la suma de índices repetidos.

Se obtiene :

$$\partial_t D(t, X_1, \dots, X_n) = \left\{ H(t, \dots, X_n); D(t, \dots, X_n) \right\} \quad (2.2)$$

en donde

$$H = \sum_{i \in I_n} \left\{ \frac{p_i^2}{2m} + U(q_i) \right\} + \sum_{i < j < n} \Phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|) \quad (2.3)$$

donde  $I_k = \{1, 2, \dots, k\}$

Integrando (2.2) respecto a  $X_{s+1} \dots X_n$  y multiplicando  $V^S$  se obtiene :

$$\begin{aligned} \partial_t F_s = & \sum_{i \in I_n} V^S \int \dots \int_{(n-s)} \left\{ \frac{P_i^2}{2m} + U(q_i); D \right\} dx_{1+s} \dots dx_n + \\ & \text{integrales} \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V^S \int \dots \int_{(n-s)} \left\{ \phi(|\bar{q}_i - q_j|); D \right\} dx_{1+s} \dots dx_n \quad (2.4) \\ & \text{integrales} \end{aligned}$$

Equivalentemente :

$$\begin{aligned} \partial_t F_s = & \sum_{i \in I_s} V^S \int \dots \int \dots \int \left\{ \frac{P_i^2}{2m} + U(\bar{q}_i); D \right\} dx_{s+1} \dots dx_n + \\ & \sum_{s+1 \leq i < N} V^S \int \dots \int_{(n-s)} \left\{ \frac{P_i^2}{2m} + U(\bar{q}_i); D \right\} dx_{s+1} \dots dx_n + \\ & \text{integrales} \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq s} V^S \int \dots \int_{(n-s)} \left\{ \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|); D \right\} dx_{s+1} \dots dx_n + \\ & \text{integrales} \\ & + \sum_{i \in I_s} V^S \int \dots \int_{(n-s)} \left\{ \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|); D \right\} dx_{s+1} \dots dx_n + \\ & \text{integrales} \\ & + \sum_{s+1 \leq j \leq n} \sum_{s+1 \leq i < j \leq n} V^S \int \dots \int_{(n-s)} \left\{ \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|); D \right\} dx_{s+1} \dots dx_n \quad (2.5) \\ & \text{integrales} \end{aligned}$$

Integrando por partes, usando que  $D \xrightarrow{X_i \rightarrow \infty} 0$  se tiene :

$$\int \left\{ \frac{P_i^2}{2m} + U(\bar{q}_i); D \right\} dX_i = 0 \quad (2.6)$$

$$\iint \left\{ \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|); D \right\} dX_i dX_j = 0$$

Luego el 2° y el 5° términos del segundo miembro de (2.5) se anulan. Combinando el 1° y 3° término se obtiene :

$$V^S \int \dots \int_{(n-s)} \dots \int \left\{ \sum_{i \in I_s} \left\{ \frac{P_i^2}{2m} + U(\bar{q}_i) \right\} + \sum_{i < j < s} \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|); D \right\} \times \\ dX_{1+s} \dots dX_n = \left\{ \sum_{i \in I_s} \left\{ \frac{P_i^2}{2m} + U(\bar{q}_i) \right\} + \sum_{i < j < s} \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|); F_s \right\} \quad (2.7)$$

Usando ahora la simetría de  $D(t, X_1 \dots X_n)$  respecto al intercambio de índices el 4° término se escribe :

$$\sum_{i \in I_s} V^S (N-s) \int \dots \int_{(N-s)} \dots \int \left\{ \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_{sh}|); D \right\} dX_{s+1} \dots dX_n = \\ = \frac{N-s}{V} \int \sum_{i \in I_s} \left\{ \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_{sh}|); F_{s+1} \right\} dX_{s+1} \quad (2.8)$$

Luego (2.4) resulta :

$$\partial_t F_s = \left\{ H_s; F_s \right\} + \frac{N-s}{V} \int \sum_{i \in I_s} \left\{ \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_{s+1}|); F_{s+1} \right\} dX_{s+1} \quad (2.9)$$

donde

$$H_s = \sum_{i \in I_s} \left\{ \frac{p_i^2}{2m} + U(\bar{q}_i) \right\} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|) \quad (2.9)_b$$

La cadena de ecuaciones íntegro-diferenciales (2.9) es equivalente a la ecuación de Liouville y conserva sus propiedades, por ejemplo su reversibilidad. Sin embargo, hay soluciones de la cadena que no son una función distribución.

Tomando ahora el límite termodinámico  $N, V \rightarrow \infty$  con  $N_0 =: N/V$  fijo y finito, haciendo la interacción con las paredes despreciable y el potencial debido al fondo iones aproximadamente constante.

En tal caso la ecuación (2.9) queda :

$$\partial_t F_s = \left\{ H_s; F_s \right\} + N_0 \int dX_{s+1} \left\{ \sum_{i \in I_s} \phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_{s+1}|); F_{s+1} \right\} \quad (2.10)$$

Para obtener soluciones de la cadena que correspondan a funciones de distribución haremos la hipótesis física :

$$F_s(t, X, \dots, X_s) - \prod_{i \in I_s} F_i(t, X_i) \xrightarrow{|\bar{q}_i - \bar{q}_j| \rightarrow \infty} 0 \quad (2.11)$$

conocida como "condición de debilitamiento de la corrección".

Evaluando los corchetes de Poisson y escribiendo los dos primeros términos de la cadena (2.10) obtenemos :

$$\partial_t f_1 + \frac{\bar{P}_1}{m} \partial_{\bar{Q}_1} f_1 = n_0 \int \partial_{\bar{Q}_1} \phi_{12} \partial_{\bar{P}_1} f_2 dX_2 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_t f_2 + \left( \frac{\bar{P}_1}{m} \cdot \partial_{\bar{Q}_1} + \frac{\bar{P}_2}{m} \cdot \partial_{\bar{Q}_2} \right) f_2 - \left( \partial_{\bar{Q}_1} \phi_{11} \partial_{\bar{P}_1} + \partial_{\bar{Q}_2} \phi_{12} \cdot \partial_{\bar{P}_2} \right) f_2 = \\ n_0 \int \left( \partial_{\bar{Q}_1} \phi_{13} \cdot \partial_{\bar{P}_1} f_3 + \partial_{\bar{Q}_2} \phi_{23} \cdot \partial_{\bar{P}_2} f_3 \right) dX_3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Los valores de espectación  $\langle \dots \rangle$  de las cantidades medibles son calculados en términos de  $f_1$  y  $f_2$ .

Buscamos ahora un método que permita obtener  $f_1$  y  $f_2$  sin el conocimiento previo de  $f_3, f_4, \dots$ , es decir, una manera de cortar la cadena (2.10) de ecuaciones íntegro-diferenciales. Sin embargo, aún no ha sido probado que un tal método sea correcto. Aún en ausencia de buenos argumentos haremos una expansión basada en el método Mayer Cluster <sup>(25)</sup> para cortar la cadena.

Si el sistema estaba aislado y en equilibrio térmico,  $D_n$  sería constante y uniforme sobre la hipersuperficie de energía en el espacio de fase de las  $N$  partículas. En la mecánica estadística clásica uno de los resultados mejor conocidos para situaciones de equilibrio que cuando  $N \rightarrow \infty$   $f_s$  puede escribirse en la forma :

$$\begin{aligned}
 f_1(X_1) &= f_1(X_1) \\
 f_2(X_1, X_2) &= f_1(X_1)f_1(X_2) + P(X_1, X_2) \\
 f_3(X_1, X_2, X_3) &= f_1(X_1)f_1(X_2)f_1(X_3) + f_1(X_1)P(X_2, X_3) + f_1(X_2)P(X_1, X_3) \\
 &\quad + P(X_1, X_2, X_3) + f_1(X_3)P(X_1, X_2) + T(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Es llamada expansión en "racimo" de Mayer.

Excepto por términos  $O(1/\sqrt{N})$   $f_1$  es una distribución Maxwelliana.

$$f_1 = \left( \frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} e^{-P^2/2mkT} \tag{2.15}$$

$P, T, \dots$  son llamadas funciones de correlación, y la expansión (14) es aplicable en situaciones donde éstas son pequeñas en algún sentido o no importantes relativas a las partes principales con  $f_1, f_2, \dots$ .

Físicamente es posible entender esta situación pensando las posiciones en el espacio de fase como dos variables al azar, des

critas por una cierta función distribución de probabilidad,  $P$  representa entonces la dependencia entre estas variables. Esta situación es válida en sentido de promedios ya que la posición de las partículas en el espacio de fase son distribuciones deltas bien definidas.

Esta última analogía es clara para un "gas molecular", la fuerza entre moléculas se anula a pocos angstroms de separación. Si la densidad del gas es muy baja, el promedio de la energía cinética de una partícula es mucho más grande que el de su energía potencial.

Esto sugiere que si  $|\bar{q}_1 - \bar{q}_2| \gg$  rango de la interacción, la partícula 1 no tendrá "información" acerca de la posición de la partícula 2. Sin embargo, si la partícula 2 está suficientemente cerca de la partícula 1, su movimiento afectará al de la partícula 1 y las posiciones en el espacio de fase no pueden ser prescritas independientemente. Pero a bajas densidades, la fracción total en el espacio de fase donde  $P$  es no nula, relativa a  $f_1 f_1$  es muy pequeña, y en forma intuitiva es que esta afirmación es más precisa cuanto menos denso es el gas.

La noción que  $P$  es despreciable comparada con  $f_1 f_1$  y la correlación ternaria  $T$  es pequeña relativa a  $P f_1$  está bien motivada en este caso. La estructura de (2.13) sugiere que -

este ordenamiento de las cantidades podría ser la base de una expansión para una situación de no-equilibrio. Esta es la idea original debida a BB6KY. <sup>(25)</sup>

La situación no es tan clara para interacción coulombiana, dado que  $\phi_{ij}$  es de largo alcance, y se podría esperar un par de correlación del orden de la función distribución para una partícula. Sin embargo, sobre casi todo el espacio de fase de dos partículas, (el hoyo en el cual esto no es cierto es del orden de  $g^2 n_0^{-1}$ ), la cantidad  $P/f_1 f_1$  es del orden de  $g = 1/n L_d^3$  donde  $L_d^2 = k_d^{-2} K_d^{-2} = KT/4\pi n_0 e^2$ ,  $k$  = constante de Boltzmann,  $T$  temperatura, y para un plasma  $g$  es en general muy pequeño. Esto es cierto a pesar de ser la fuerza coulombiana de largo alcance. Esto es entendible debido al efecto de apantallamiento de Debye tal que, asociado a una carga hay un racimo de cargas de signo opuesto las cuales transforman el potencial  $\frac{1}{r}$  en uno efectivo de la forma  $\frac{1}{r} e^{-k_d r}$ . Un tratamiento cuidadoso para  $|\bar{q}_1 - \bar{q}_2| \gg e^2/kt$  muestra que el par correlación es :

$$P \approx \frac{-e^2}{kt} \frac{e^{-k_d |\bar{q}_1 - \bar{q}_2|}}{|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|} f_1(\bar{P}_1) f_1(\bar{P}_2) \quad (2.16)$$

donde  $f_1$  es una distribución Maxwelliana. Y observamos que :

$$\lim_{|\bar{q}_1 - \bar{q}_2| \rightarrow \infty} P(X_1, X_2) = f_1(X_1) f_1(X_2) \quad (2.17)$$

equivalente a la condición de debilitamiento de la correlación (11).



Luego excepto en un pequeño hoyo en el espacio de fase para 2 partículas es una excelente aproximación en equilibrio tratar  $P/f_1 f_1$  como una cantidad pequeña.

La esperanza es que tal situación sea aplicable para situaciones fuera del equilibrio.

La aproximación de Rostober y Rosenbluth es esencialmente un procedimiento de expansión formal para (2.12) y (2.13), en la cual  $O(T) = g$ ,  $O(P) = 1$  y  $O(f) = 0$ . Entonces guardando términos de  $O(1)$  y  $O(g)$  permite un sistema cerrado de ecuaciones para  $f$  y  $P$ . Entonces haremos una expansión r<sub>a</sub>cimo de Mayer para el sistema fuera del equilibrio, de donde :

$$\partial_t f_1 + \frac{\bar{P}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} f_1 = n_0 \int \frac{\partial}{\partial q_1} \phi_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} f_1(X_2) f_1(X_2) dX_2 + n_0 \int \frac{\partial}{\partial q_1} \phi_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} P(X_1 X_2) dX_2 \quad (2.18)$$

$$\left( \partial_t + \frac{\bar{P}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\bar{P}_2}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \right) P(X_1 X_2) = \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \phi_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \phi_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial p_2} \right)$$

$$\left[ P_1(X_1) f_1(X_2) + P(X_1 X_2) \right] + n_0 \left\{ dX_3 f_1(X_3) \frac{\partial}{\partial q_1} \phi_{13} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} + (1 \longleftrightarrow 2) \right\} P(X_1 X_2) + n_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial p_1} f_1 \cdot \int \frac{\partial}{\partial q_1} \phi_{13} P(X_2 X_3) dX_3 + (1 \longleftrightarrow 2) \right\} + n_0 \int \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \phi_{13} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} + (1 \longleftrightarrow 2) \right\} T(X_1 X_2 X_3) dX_3 \quad (2.19)$$

donde  $(i \longleftrightarrow j)$  significa una expresión idéntica, pero  $(i, j)$  permutados.

De la aproximación de Rostober y Rosenbluth se tiene :

$$O(e^2/m) = O(g) \quad O(e) = O(m) = O(g) \quad O(n_0^{-1}) = O(g) \quad (2.20)$$

Esta asignación de órdenes tiene un elemento de arbitrariedad y son motivados por la física más que por la matemática. El supuesto que permite cerrar el sistema es que  $O(T) = O(g)$ .

Reescribiendo (2.18) y (2.19) bajo los supuestos de Rostober y Rosenbluth, ahora en  $(\vec{X}, \vec{V})$  en lugar de  $(\vec{X}, \vec{P})$  :

$$\begin{aligned} f_1(\vec{q}, \vec{p}) d^3 p &= f(\vec{x}, \vec{v}) d^3 v \\ P(x_1, x_2) d^3 p_1 d^3 p_2 &= P(\vec{x}_1, \vec{v}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_2) d^3 v_1 d^3 v_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tenemos finalmente :

$$\partial_t f + \vec{v}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} f - \frac{n_0}{m} \left[ \int d^3 x_2 d^3 v_2 \partial_{\vec{x}_1} \phi_{12} f(\vec{x}_2, \vec{v}_2) \right] \cdot \partial_{\vec{v}_1} f(\vec{x}_1, \vec{v}_1) = \frac{n_0}{m} \int \partial_{\vec{x}_1} \phi_{12} \cdot \partial_{\vec{v}_1} P d^3 x_2 d^3 v_2 \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \partial_t P + (\vec{v}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} + \vec{v}_2 \cdot \partial_{\vec{x}_2}) P &= \frac{1}{m} \left[ \partial_{\vec{x}_1} \phi_{12} \cdot \partial_{\vec{v}_1} + (1 \leftrightarrow 2) \right] f(\vec{x}_1, \vec{v}_1) f(\vec{x}_2, \vec{v}_2) + \frac{n_0}{m} \left[ \int d^3 x_3 d^3 v_3 f(\vec{x}_3, \vec{v}_3) \partial_{\vec{x}_1} \phi_{13} \cdot \partial_{\vec{v}_1} + (1 \leftrightarrow 2) \right] P \\ &+ \frac{n_0}{m} \left[ \partial_{\vec{v}_1} f(\vec{x}_1, \vec{v}_1) \cdot \int \partial_{\vec{x}_1} \phi_{13} P(\vec{x}_2, \vec{v}_2, \vec{x}_3, \vec{v}_3) d^3 x_3 d^3 v_3 + (1 \leftrightarrow 2) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tomando el límite  $g \rightarrow 0$  (equivalentemente  $e, m, 1/n_0 \rightarrow 0$ ) en (2.22) y (2.23) obtenemos la ecuación de Vlasov o ecuación de Boltzmann no colisional.

$$\partial_t f + \vec{v}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} f + \frac{\langle e\vec{E} \rangle}{m} \cdot \partial_{\vec{v}_1} f = 0 \quad (2.24)$$

donde :

$$\langle e\vec{E} \rangle = -n_0 \int d^3 x_2 d^3 v_2 \partial_{\vec{x}_1} \phi_{12} f(\vec{x}_2, \vec{v}_2) \quad (2.25)$$

es el promedio de la fuerza eléctrica sobre la partícula 1 debido a todo el sistema, en este sentido se dice que en un plasma son más importantes los efectos colectivos que las fluctuaciones locales.

En el caso más general (23), presencia de un campo magnético, un tratamiento análogo muestra que en este caso la ecuación de Vlasov se escribe :

$$\left[ \partial_t + \vec{v}_i \cdot \partial_{\vec{x}_i} + \frac{\langle \vec{F}_L \rangle}{m} \cdot \partial_{\vec{v}_i} \right] f = 0 \quad (2.26)$$

donde :  $\vec{F}_L = e (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) \quad (2.27)$

es la fuerza de Lorentz

### §3. ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINAMICA

En el capítulo anterior dedujimos la ecuación de Vlasov o Boltzmann no colisional a partir del método debido a BBGKY, (23) y ésta será nuestro punto de partida:

$$\left[ \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{e}{m} \langle \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \rangle \cdot \partial_{\vec{v}} \right] f = 0 \quad (3.1)$$

Multiplicando esta ecuación por una función  $\psi(\vec{v})$  cualquiera e integrando en todo el espacio de velocidades tenemos :

$$\partial_t (n \langle \psi \rangle) + \vec{\nabla} \cdot (n \langle \vec{v} \psi \rangle) - \frac{ne}{m} \langle (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \partial_{\vec{v}} \psi \rangle = 0 \quad (3.2)$$

donde el promedio  $\langle \psi \rangle$  es definido por :

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{n(\vec{n}, t)} \int d^3v \psi(\vec{v}) f(\vec{n}, \vec{v}, t) \quad (3.3)$$

con la densidad de número  $n(\vec{n}, t)$  :

$$n(\vec{n}, t) = \int f(\vec{n}, \vec{v}, t) d^3v$$

Caso 1 :  $\psi(\vec{v}) = 1$ , de (3.2) se obtiene

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot (n \langle \vec{v} \rangle) = 0 \quad (3.4)$$

ignorando ionización y recombinación. De donde iones y electrones la ecuación (3.4) se escribe :

$$\partial_t n_{\alpha} + \vec{\nabla} \cdot (n_{\alpha} \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle) = 0 \quad (3.5)$$

con

$$\alpha = i, e$$

Haremos la descripción de un fluido para lo cual definiremos densidad de masa y carga, y no trabajaremos con las densidades  $n_i$  y  $n_e$

Def.

$$\text{densidad de masa } \rho = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \quad (3.6)$$

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle$$

$$\text{densidad de carga } \sigma = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \quad (3.7)$$

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle$$

y luego de (3.4) y (3.5) obtenemos :

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.8)$$

$$\partial_t \sigma + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.9)$$

Caso 2 :  $\psi(\vec{v}) = \vec{v}$  sustituyendo en (3.2), tenemos :

$$\partial_t (n \langle \vec{v} \rangle) + \vec{\nabla} \cdot (n \langle \vec{v} \vec{v} \rangle) - \frac{ne}{m} (\vec{E} + \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}) = 0 \quad (3.10)$$

donde :  $\vec{\nabla} \cdot (n \langle \vec{v} \vec{v} \rangle) = \hat{e}_j \partial_j (n \langle v^i v^j \rangle)$  (3.11)

Se usa la convención de Einstein de suma de índices repetidos.

En la aproximación 1 fluido multiplicamos (11) por  $m_\alpha$  y sumamos sobre  $\alpha$  :

$$\partial_t (\sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v}_\alpha \rangle) + \vec{\nabla} \cdot \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle - \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha (\vec{E} + \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}) = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{Def. } \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \quad \vec{u}: \text{velocidad de masa} \quad (3.13)$$

$$\text{Luego : } \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle \vec{w}_\alpha \rangle = 0 \quad (3.14)$$

insertando (3.13) en (3.12) tenemos :

$$\partial_t (\rho \langle \vec{u} \rangle) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} + \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle \vec{w}_\alpha \vec{w}_\alpha \rangle) - \sigma \vec{E} - \vec{J} \times \vec{B} = 0 \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.9) en (3.15) obtenemos :

$$\partial_t (\rho \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) \vec{u} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \sigma \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.16)$$

$$\text{con } \vec{\Pi} = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle \vec{w}_\alpha \vec{w}_\alpha \rangle \quad (3.17)$$

tensor de tensiones.

El término  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}$  tal como se demuestra en el trabajo de S.I. Braginskii (21) puede ser escrito como :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \vec{\nabla} p + \mu_\perp \vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x \vec{v} + \mu_\parallel h(\vec{v}, \partial_x \partial_{x_j} \vec{v}) \quad (3.18)$$

donde  $\mu_\parallel$  es debido a los términos no diagonales del tensor  $\Pi$ , llamada viscosidad magnética,  $h$  es una función

que depende de  $\vec{V}$  y las segundas derivadas de  $\vec{V}$ .

En el apéndice 1 se muestra que la viscosidad paralela puede ser despreciada en este caso.

Luego con este resultado introducimos (3.18) en (3.16) para obtener :

$$\rho(\partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{J} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p + \sigma \vec{E} - \mu_{\perp} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0 \quad (3.19)$$

Ahora multiplicamos (3.12) por  $e_{\alpha}$  y sumamos sobre todas las especies.

$$\partial_t \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} (\vec{E} + \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle \times \vec{B}) = 0 \quad (3.20)$$

Haremos las siguientes suposiciones para simplificar las ecuaciones :

- 1) Plasma bi-componente, electrones y protones ( $m_e \ll m_i$ )
- 2)  $n_e \approx n_i =: n$  (cuasi-neutralidad) (3.21)

con estas aproximaciones :

$$i) \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \langle \vec{v}_{\alpha} \rangle \approx n(m_i + m_e) \vec{u} \approx n m_i \vec{u} \quad (3.22)$$

Además :

$$-n_e \langle \vec{v}_e \rangle e + n_i \langle \vec{v}_i \rangle e = \vec{J} \quad (3.23)$$

De (3.22) y (3.23) se obtiene :

$$\langle \vec{v}_i \rangle = \vec{u} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\vec{J}}{n_e} \quad (3.24)$$

$$\langle \vec{v}_e \rangle = \vec{u} - \frac{\vec{J}}{n_e}$$

Luego

$$\text{ii) } \langle \vec{v} \rangle \langle \vec{v} \rangle = \bar{n} \bar{u} + \langle \vec{w} \rangle \bar{u} + \bar{n} \langle \vec{w} \rangle + \langle \vec{w} \rangle \langle \vec{w} \rangle \quad (3.25)$$

$$\langle \vec{w}_i \rangle = \frac{m_i}{m_e} \frac{\vec{J}}{ne}$$

$$\langle \vec{w}_e \rangle = - \frac{\vec{J}_e}{ne} \quad (3.26)$$

Pero,

$$\text{iii) } \vec{\nabla} \cdot \left( \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{J} \bar{u} + \bar{n} \vec{J}) - \frac{e}{m_e} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_e \quad (3.27)$$

(usando la condición de cuasineutralidad 2)

$$\text{iv) } \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \langle \vec{w}_{\alpha} \vec{w}_{\alpha} \rangle = \frac{e}{m_i} \vec{\Pi}_i - \frac{e}{m_e} \vec{\Pi}_e \approx - \frac{e}{m_e} \vec{\Pi}_e \quad (3.28)$$

(Para temperaturas comparables de electrones o iones

$\| \vec{\Pi}_i \| \sim \| \vec{\Pi}_e \|$ ) :

$$\text{v) } \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} (\vec{E} + \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}) \approx \frac{ne^2}{m_e} (\vec{E} + \bar{u} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \vec{J} \times \vec{B}) \quad (3.29)$$



Insertando i)  $\rightarrow$  v) en (3.20) tenemos :

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{ne} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_e = \frac{m_e}{ne^2} (\partial_t \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \vec{J} + \vec{J} \vec{u})) + \eta \vec{J} \quad (3.30)$$

La ecuación (3.3) es la ley de Ohm para el flujo de co rriente, donde

$$\eta =: m_e \nu_e / ne^2 \quad (3.31)$$

(resistividad del plasma)

$\nu_e$  = frecuencia de colisión

#### Observación :

En la ecuación (3.30) corresponde :

- i)  $\vec{E}$  densidad de fuerza eléctrica de acoplamiento.
- ii)  $\vec{u} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \vec{J} \times \vec{B} = \vec{v}_e \times \vec{B}$  densidad de fuerza magnética.
- iii)  $\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}$  densidad de fuerza de Lorentz vista en el sistema de moviemiento de los electrones.
- iv)  $\frac{1}{ne} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_e$  densidad de fuerza debida a gradientes de presión (es dominante la presión de los electrones).
- v)  $\eta \vec{J}$  densidad de fuerza de fricción.
- vi)  $\frac{m_e}{ne^2} [\partial_t \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \vec{J} + \vec{J} \vec{u})]$  es la inercia de los electrones.

La forma simple de la ley de Ohm desprecia los 3<sup>os</sup> y 4<sup>os</sup> términos de la izquierda de la ecuación (3.30) y el primer grupo de términos de la derecha :

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (3.32)$$

### Aproximaciones

En nuestro sistema el movimiento del fluido es dirigido por gradientes de presión, y en el límite donde el movimiento es masivo, la velocidad del fluido está dada grue-  
samente por :

$$\xi(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p \quad (3.33)$$

$$\text{escribiendo la ecuación de estado } p = nkT \quad (3.34)$$

válida en nuestro sistema en un amplio rango y además

$$\xi \sim n m_i, \quad \text{obtenemos } u \sim \mathcal{O}(v_{th,i}), \quad \text{donde} \\ v_{th,i} \simeq (kT/m_i)^{1/2} \quad (3.35)$$

la velocidad térmica de los iones. Usaremos esta relación para estimar la magnitud de los términos despreciados en la ecuación (3.30).

i) La fuerza magnética comparable con el gradiente de presión  $\vec{\nabla} p \sim \vec{J} \times \vec{B}$  estarán fuera de nuestro interés.

Escribimos :  $\pi_e \sim p_e \sim p_i \sim n m_i v_{th,i}^2$ , comparando este término con el retenido de la forma  $n \times B$ , el cociente es :

$$\left\| \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_e}{n e} \right\| / \left\| \vec{u} \times \vec{B} \right\| \sim \frac{n m_i v_{th,i}^2}{n e L} \frac{1}{u B} \sim \frac{v_{th,i}}{\Omega_i L} \sim \frac{n_{Li}}{L} \quad (3.36)$$

Donde  $L$  es la longitud de escala típico;  $\Omega_i$  y  $\rho_{Li}$  son los girofrecuencia y el radio de Larmor respectivamente.

Luego podemos desprestigiar el 3<sup>ero</sup> y 4<sup>to</sup> términos de esta ecuación si  $\rho_{Li} \ll L$ . Tratamientos que toman en cuenta estos términos se llaman tratamientos de "radio de Larmor finito".

ii) Estimando  $\vec{J}$  de  $\vec{J} \times \vec{B} \sim \vec{\nabla} p$  tenemos :

$$\left\| \frac{m_e}{n e^2} \partial_t \vec{J} \right\| / \left\| \vec{u} \times \vec{B} \right\| \sim \frac{m_e}{n e^2} \frac{n m_i}{z B L} v_{th,i} \frac{1}{u_B} \sim \frac{m_e}{m_i} \left( \frac{\rho_{Li}}{L} \right) \frac{1}{\Omega_i \tau} \quad (3.37)$$

donde  $\tau$  es la escala característica de tiempo del movimiento. Generalmente  $m_e \ll m_i$ ,  $\rho_{Li} \ll L$ ,  $\Omega_i \tau \gg 1$  luego desprestigiamos el término  $\partial_t \vec{J}$ .

iii) Análogamente

$$\left\| \frac{m_e}{n e^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \vec{J}) \right\| / \left\| \vec{u} \times \vec{B} \right\| \sim \frac{m_e}{n e^2} \frac{n m_i v_{th,i}^2}{B L^2 u_B} \sim \frac{m_e}{m_i} \left( \frac{\rho_{Li}}{L} \right)^2 \quad (3.38)$$

Dado que  $m_e/m_i \ll 1$  estos términos son aún desprestigados en las teorías de "radio finito de Larmor".

Luego de la condición de cuasi-neutralidad y las aproximaciones i)  $\rightarrow$  iii) las ecuaciones (3.19) y (3.30) se escriben :

$$\partial_t (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{J} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p - \mu_e \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (3.39)$$

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (3.40)$$

Caso 3 :  $\psi(\vec{v}) = v^2/2$  , sustituyendo en (3.2) obtenemos :

$$\partial_t \left( \frac{n}{2} \langle v^2 \rangle \right) + \vec{\nabla} \cdot (n \langle \vec{v} v^2/2 \rangle) = \frac{ne}{m} \vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle \quad (3.41)$$

Multiplicando (3.41) por  $m_\alpha$  y sumando obtenemos :

$$\partial_t \left( \frac{3}{2} p + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \rho \frac{u^2}{2} \vec{u} + \frac{5}{2} p \vec{u} + \vec{q} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (3.42)$$

Donde :

$$\vec{q} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{w}_{\alpha} w_{\alpha}^2/2 \rangle \quad (3.43)$$

$\vec{q}$  : representa el flujo térmico de azar debido al movimiento azaroso térmico.

$\partial_t \left( \frac{3}{2} p + \rho \frac{u^2}{2} \right)$  : tasa de cambio de la energía interna y la energía macroscópica de movimiento.

$\vec{\nabla} \cdot \left( \rho \frac{u^2}{2} \vec{u} \right)$  : energía macroscópica "fuera de flujo" a la velocidad macroscópica  $U$ .

$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{5}{2} p \vec{u} \right)$  : energía interna "fuera de flujo" debido a la separación o convección a la velocidad macroscópica.

$\vec{j} \cdot \vec{E}$  : conversión de energía eléctrica a mecánica.

Integrando (3.42) sobre el espacio con borde en infinito, el término con divergencia se anula, obteniéndose :

$$\partial_t \int_V \left( \frac{3}{2} p + \rho \frac{u^2}{2} \right) d^3x = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x \quad (3.44)$$

ecuación de conservación de la energía.

Del teorema de Poyting tenemos: (22)

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \right) - \frac{1}{8\pi} \partial_t (E^2 + B^2) \quad (3.45)$$

De donde (3.42) se escribe :

$$\partial_t \left( \frac{5}{2} \rho + \frac{5}{2} \frac{u^2}{\gamma} + \frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{5}{2} \rho \vec{u} + \frac{5}{2} p \vec{u} + \vec{q} + \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \right) = 0 \quad (3.46)$$

La integral de volumen de la ecuación (3.46) da la conservación de la energía total.

Ahora (3.42) puede ser escrito como una ecuación diferencial para la presión. Usando la ecuación de continuidad y la ley de movimientos obtenemos :

$$\partial_t \left( \frac{5}{2} \rho \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{5}{2} \rho \vec{u} \right) = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \vec{u} \cdot \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.47)$$

(ver (21) y (23))

Restando (3.47) a (3.42) obtenemos :

$$\frac{5}{2} (\partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \frac{5}{2} \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \vec{J} \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (3.48)$$

#### Observación

- i)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$  conducción del calor
- ii)  $\vec{J} \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \sim \eta J^2$  flujo óhmico
- iii) Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \eta J^2 = 0$  tenemos de la ecuación de continuidad :

$$0 = (\partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left( \rho / \gamma^{5/3} \right) \quad (3.49)$$

$\frac{d}{dt}$

$$\rho = C \gamma^{5/3} \quad (3.50)$$

Ley familiar de adiabaticidad

- iv) Usando  $p = nkT$  y sustituyendo en (3.48) obtenemos una ecuación para la evolución de la temperatura. Además de la ecuación de conducción del calor en presencia de una fuente tenemos ((23) y (24)) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -\kappa \nabla^2 p - \frac{3}{2} S_0 \quad (3.51)$$

donde  $\kappa$  = coeficiente de conducción calórica

$S_0$  = fuente externa,

introduciendo (3.51) en la ecuación (3.48) obtenemos :

$$\partial_t p + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p - \frac{2}{3} \kappa \nabla^2 p - S_0 = -\rho p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{2}{3} \eta J^2 \quad (3.52)$$

Para una discusión más detallada de las ecuaciones magnetohidrodinámica consultar ref. (21) y (22).

A las ecuaciones obtenidas acoplamos las ecuaciones de Maxwell :

$$\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3.53)$$

$$-4\pi \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (3.54)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.55)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\sigma \quad (3.56)$$

Donde se despreció el término de corriente de desplazamiento en la ecuación de Maxwell (3.54) debido a la condición de cuasi-neutralidad 2. (Ver 23).

Ahora escogemos el set de ecuaciones independientes que describen el sistema :

$$s(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{J} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (3.57)$$

$$\partial_t p + \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) = 0 \quad (3.58)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (3.59)$$

$$\partial_t p + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p = \frac{2}{3} \kappa \nabla^2 p + S_0 + \frac{2}{3} \eta J^2 - \mu p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (3.60)$$

$$\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3.61)$$

$$-4\pi \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (3.62)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.63)$$

§4. MAGNETOHIDRODINAMICA IDEAL

En el caso ideal  $\mu = \eta = \kappa = 0$  las ecuaciones (3.57)

(3.63) que describen el sistema son :

$$\rho(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p \quad (4.1)$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\mu} [\partial_t p + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p] = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (4.3)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (4.4)$$

$$\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (4.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.6)$$

$$-4\pi \vec{j} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (4.7)$$

El sistema es una columna cilíndrica de plasma en un campo magnético longitudinal. El campo magnético en equilibrio está dado por :

$$\vec{B}^{(0)} = B_z \left(\frac{r}{a}\right) \hat{\theta} + B_0 \hat{z} \quad (4.8)$$

Resolveremos el sistema (4.1)-(4.7) con teoría de perturbaciones de forma:

a) MOVIMIENTO INCOMPRESIBLE

$$\psi = \psi^{(0)} + \epsilon \psi^{(1)} + \epsilon^2 \dots$$

I. Orden Cero :

$$\text{con } \epsilon \ll 1.$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}^{(0)}) \times \vec{B}^{(0)} = -2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 n \hat{n} \quad (4.9)$$

Usando la ecuación (4.1) suponiendo  $\vec{v}^{(0)} = 0$  se obtiene :

$$p^{(0)} = p_0 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{n^2}{4\pi} \quad (4.10)$$

donde  $p_0$  es una constante.



La transformada rotacional  $q$  es una constante y por lo tanto, el campo magnético no tiene cizalle :

$$q = \frac{2\pi n b_2^{(0)}}{L B_0^{(0)}} = \frac{2\pi a}{L} \left( \frac{b_0}{b_2} \right) \quad (4.11)$$

El resto de las ecuaciones (4.2) ---- (4.7) se satisfacen automáticamente :

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} &= \rho_0 \\ \vec{v}^{(0)} &= 0 \\ \vec{E}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

## II. Orden Uno :

Siendo  $(\theta, z)$  coordenadas cíclicas supondremos que la forma de las cantidades perturbadas es :

$$f^{(1)}(n, \theta, z) = f^{(1)}(n) e^{i(m\theta + kz) + \omega t} \quad (4.13)$$

De donde :

$$i) \quad \partial_t \vec{v}^{(1)} = \omega \vec{v}^{(1)} = \omega^2 \vec{\xi} \quad (4.14)$$

$\vec{\xi}$  : vector desplazamiento.

$$\begin{aligned} ii) \quad [(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_x \vec{B}]^{(1)} &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(0)})_x \vec{B}^{(1)} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(1)})_x \vec{B}^{(0)} \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}^{(0)} \cdot \vec{B}^{(1)}) + (\vec{B}^{(0)} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}^{(1)} + (\vec{B}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}^{(0)} \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned} (\vec{B}^{(0)} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}^{(1)} &= (b_0 k + \frac{b_2}{a} m) \vec{B}^{(1)} + \frac{b_2}{a} \{ b_\theta^{(1)} \hat{e}_\theta + b_n^{(1)} \hat{e}_n \} \\ &= \underbrace{\frac{b_2}{a} (k \frac{b_0}{b_2} a + m)}_{-m\frac{b_2}{a}} \vec{B}^{(1)} + \frac{b_2}{a} \{ b_n^{(1)} \hat{\theta} - b_\theta^{(1)} \hat{n} \} \end{aligned}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B}^{(0)} = \frac{B_E}{a} \{ B_n^{(1)} \hat{\theta} - B_\theta^{(1)} \hat{n} \}$$

$$[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}]^{(1)} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{B})^{(1)} + i \frac{B_E}{a} (m-nq) \vec{B}^{(1)} \cdot \left\{ \frac{B_E}{a} \{ B_n^{(1)} \hat{\theta} - B_\theta^{(1)} \hat{n} \} \right\} \quad (4.15)$$

iii) De (4.4) y (4.5) se tiene :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ \omega \vec{B}^{(1)} &= (\vec{B}^{(0)} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}^{(1)} - (\vec{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}^{(0)} = i \frac{B_E}{a} (m-nq) \vec{v}^{(1)} + \frac{B_E}{a} (v_n^{(1)} \hat{\theta} - v_\theta^{(1)} \hat{n}) \\ &\quad - i \frac{B_E}{a} (v_n^{(1)} \hat{\theta} - v_\theta^{(1)} \hat{n}) \end{aligned}$$

De donde :

$$\omega \vec{B}^{(1)} = i \frac{B_E}{a} (m-nq) \vec{v}^{(1)} \quad (4.16)$$

Luego sustituyendo (4.15) y (4.16) en (4.1) obtenemos :

$$S_0 \omega^2 \vec{\xi} = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{B})^{(1)} - \left( \frac{B_E}{a} (m-nq) \right)^2 \xi^2 + 2i \left( \frac{B_E}{a} \right)^2 (m-nq) \{ \xi_n \hat{\theta} - \xi_\theta \hat{n} \} \right] - \vec{\nabla} \cdot \hat{p}^{(1)}$$

Definiendo :

$$\hat{\omega} = \sqrt{4\pi S_0} \frac{a}{B_E} \omega \quad (4.18)$$

$$\hat{p}^{(1)} = 4\pi \frac{a^2}{B_E^2} \left( p^{(1)} + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{B})^{(1)}}{8\pi} \right)$$

La ecuación (4.17) se escribe

$$[\hat{\omega}^2 + (m-nq)^2] \vec{\xi} = -\vec{\nabla} \cdot \hat{p}^{(1)} - 2i (m-nq) \{ \xi_\theta \hat{n} - \xi_n \hat{\theta} \} \quad (4.19)$$

Pero,

$$\begin{aligned} \text{iv) } \vec{\nabla} \cdot \hat{p}^{(1)} &= \partial_n \hat{p}^{(1)} \hat{n} + \frac{1}{n} \partial_\theta \hat{p}^{(1)} \hat{\theta} + \partial_z \hat{p}^{(1)} \hat{z} \\ &= \partial_n \hat{p}^{(1)} \hat{n} + \frac{im}{n} \hat{p}^{(1)} \hat{\theta} + ik \hat{p}^{(1)} \hat{z} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sustituyendo (4.20) en (4.19) y separando en coordenadas :

$$\left. \begin{aligned} [\hat{\omega}^2 + (m-nq)^2] \xi_n &= -\partial_n \hat{p}^{(1)} - 2i(m-nq) \xi_\theta^{(1)} \\ [\hat{\omega}^2 + (m-nq)^2] \xi_\theta &= -\frac{m}{n} \hat{p}^{(1)} + 2i(m-nq) \xi_n^{(1)} \\ [\hat{\omega}^2 + (m-nq)^2] \xi_z &= -\alpha k \hat{p}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Definiendo :

$$\sigma_0 = 2 |m-nq| \quad (4.22)$$

$$\Delta_0 = [\hat{\omega}^2 + (m-nq)^2] (\sigma_0^2 - 1) \quad (4.23)$$

De (4.21) obtenemos :

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= \Delta_0^{-1} \{ \partial_n \hat{p}^{(1)} + \frac{m}{n} \sigma_0 \hat{p}^{(1)} \} \\ \xi_\theta &= i \Delta_0^{-1} \{ \frac{m}{n} \hat{p}^{(1)} + \sigma_0 \partial_n \hat{p}^{(1)} \} \\ \xi_z &= \alpha k \Delta_0^{-1} (1 - \sigma_0^2) \hat{p}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Usando la condición de incompresibilidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0 \quad (4.25)$$

se tiene :

$$\nabla^2 \hat{p}^{(1)} + k^2 \sigma_0^2 \hat{p}^{(1)} = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{n} \partial_n (n \partial_n \hat{p}^{(1)}) + [k^2 (\sigma_0^2 - 1) - \frac{m^2}{n^2}] \hat{p}^{(1)} = 0 \quad (4.27)$$

Definiendo :

$$x = k n \sqrt{\sigma_0^2 - 1} \quad (4.28)$$

La ecuación (4.27) se transforma en la ecuación de Bessel de 1<sup>era</sup> especie :

$$\frac{1}{x} \partial_x (x \partial_x \hat{p}^{(0)}) + (1 - m^2/x^2) \hat{p}^{(0)} = 0 \quad (4.29)$$

Con solución :

$$\hat{p}^{(0)} = \alpha J_m(x) \quad (4.30)$$

La otra solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel es la función de Neumann  $N_m(x)$ , sin embargo, es singular en  $r = 0$  y luego hay que eliminarla de (4.30) la solución general.

Condición de borde :

Dado que el plasma está acotado por paredes conductoras,

$$\xi_n(r=a) = 0 \quad (4.31)$$

Usando las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel ( ).

$$\begin{aligned} J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x} J_m(x) \\ J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) &= 2 \frac{d}{dx} J_m(x) \end{aligned} \quad (4.32)$$

De (4.31) obtenemos :

$$\left. \left\{ \partial_n \hat{p}^{(0)} + \frac{m}{a} \sigma_0 \hat{p}^{(0)} \right\} \right|_{n=a} = 0 \quad (4.33)$$

Usando (4.32) se tiene :

$$ka\sqrt{\sigma_0^2 - 1} \frac{1}{2} \left\{ J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) \right\} \Big|_{x=ka\sqrt{\sigma_0^2 - 1}} + m\sigma_0 J_m(ka\sqrt{\sigma_0^2 - 1}) = 0 \quad (4.34)$$

De donde  $S_i |k| a \gg 1$  se obtiene :

$$m \sigma_0 J_m(k a \sqrt{\sigma_0^2 - 1}) = 0 \quad (4.35)$$

Luego la relación de dispersión resulta de (4.35) :

$$k a \sqrt{\sigma_0^2 - 1} = Z_m \quad (4.36)$$

Donde  $Z_m$  es el primer cero de la función de Bessel de orden  $m$ .

Sustituyendo la definición de  $\sigma_0$  (4.22) en (4.36) obtenemos :

$$\hat{\omega}^2 \approx \frac{2|m-nq|k|a}{Z_m} - (m-nq)^2 \quad (4.37)$$

Y observamos que  $\hat{\omega} = 0$  para  $m = nq$ , sin embargo :

$$\left(\frac{\hat{\omega}}{\Delta_0}\right) \sim \left(\frac{k a}{Z_m}\right)^{3/2} [2|m-nq|]^{-1/2} \xrightarrow{nq \rightarrow m} \infty \quad (4.38)$$

y dado que  $\vec{v}^{(1)} = \omega \vec{\xi}$  de (4.24) se sigue que cuando  $m \rightarrow nq$ , una perturbación finita de la presión produce una velocidad infinita. Esto significa que no hay solución lineal al problema si el plasma es incompresible.

En la magnetohidrodinámica ideal, sin embargo, la hipótesis de incompresibilidad debe ser abandonada cerca de valores racionales de  $nq$ . Por otro lado, el plasma permanece incompresible cerca de los modos marginales inestables, es decir, de  $nq_1$  y  $nq_2$  (Ver figura 1). En otras palabras, la compresibilidad depende de  $k_{||} = m - nq$ , como veremos en la siguiente sección.

b) MOVIMIENTO COMPRESIBLE

Primero mostraremos que cerca de los límites de estabilidad, es decir, cuando  $nq$  toma los valores  $nq_{1,2} = m \int$

$$\int = 2|k|a/z_m \quad (4.39)$$

(Ver ecuación (4.37)), el plasma siempre es incompresible. Consideremos la ecuación (4.1) para  $\omega \neq 0$  pero suficientemente pequeño. En este caso la linealización de (4.1) resulta :

$$\left( \frac{B_L}{4\pi a} (m - nq) \vec{B}^{(0)} - 2 \frac{B_L}{4\pi a} \left( \frac{a}{h} - \frac{a}{h} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right) - \frac{B_L^2}{4\pi a^2} \vec{\nabla} \hat{p}^{(0)} = 0(\omega) \quad (4.40)$$

De las ecuaciones (4.4) y (4.5) se obtiene :

$$\vec{B}^{(0)} = \left( \frac{B_L}{a} (m - nq) \vec{\xi} - \vec{B}^{(0)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) \right) \quad (4.41)$$

Las componentes de (4.40) pueden ser escritas en términos de  $\hat{p}^{(0)}$  de la misma manera como las componentes de  $\vec{\xi}$  fueron escritas en (4.24). Usando la ecuación de Maxwell (4.6) se encuentra que satisface la ecuación (4.26) hasta orden  $w$ .

$$\nabla^2 \hat{p}^{(0)} + k^2 \sigma_0^2 \hat{p}^{(0)} = 0(\omega) \quad (4.42)$$

Por lo tanto, en el límite  $w \rightarrow 0$  el campo magnético perturbado  $\vec{B}^{(0)}$  es idéntico al obtenido en la sección anterior a) bajo la suposición  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$ . Luego la ecuación (4.41) implica que para  $w = 0$ , el vector desplazamiento  $\vec{\xi}$  está dado por las ecuaciones (4.24) y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$  (Notar que en este límite, es decir,  $w = 0$  con  $m \neq nq$   $\int$  es infinito, considerando  $\vec{V} = 0$ )

Dado que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$  en los límites de estabilidad, podemos usar el hecho que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$  es pequeño en una vecindad de estos límites para determinar la relación de dispersión para modos compresibles en esta región. Entonces, en primera aproximación el término proporcional a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$  en la ecuación (4.41) puede ser despreciado y el resultado puede ser usado para eliminar  $\vec{B}^{(1)}$  de la ecuación linealizada de (4.1), el resultado es :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \Delta_0^{-1} \{ \nabla^2 \hat{p}^{(1)} + k^2 \sigma_0^2 \hat{p}^{(1)} \} \quad (4.43)$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (4.3) para eliminar  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$ , se obtiene (ver apéndice A) :

$$\nabla^2 \hat{p}^{(1)} + \{ k^2 \sigma_0^2 - \frac{S \hat{\omega}^2 \sigma_0^2 n q}{a^2 (m - n q)} \} \hat{p}^{(1)} = 0 \quad (4.44)$$

donde :

$$S =: \frac{B_E^2}{\mu} [4\pi p^{(0)}]^{-1} \quad (4.45)$$

Suponiendo que  $p^{(0)}$  es una función que varía lentamente con  $r$ , es decir,  $p_0 \gg B_E^2 / 4\pi$ ,  $S$  puede ser considerado como constante, la solución regular en  $r = 0$  de (4.44) es :

$$\hat{p}^{(1)} = \lambda J_m(bn) \quad (4.46)$$

$$\text{donde :} \quad b^2 = k^2 (\sigma_0^2 - 1) \frac{S \hat{\omega}^2 \sigma_0^2 n q}{a^2 (m - n q)^2} \quad (4.47)$$

y  $\lambda$  en (4.46) es una constante.

Nuevamente la relación de dispersión se obtiene de la condición de borde de conductividad perfecta de las paredes ( $\zeta_n(a) = 0$ ).

$$\hat{\omega}^2 = - \left[ (m-nq) + \frac{2S nq k a}{z_m^2} \right] (m-nq) + z_m^{-1} \left\{ 4(m-nq)^2 (ka)^2 + 4S nq (m-nq) ka + \frac{4S (nq)^2}{z_m^2} \right\}^{1/2} \quad (4.48)$$

De esta expresión se sigue que compresibilidad, como se esperaba, tiene el efecto de aumentar la tasa de crecimiento sin cambiar el dominio inestable de los valores de  $q$ . Esto es ilustrado por la línea a trazos en Fig. 1.

El efecto de la compresibilidad en la región central del espectro donde  $k_{||} = 0$  y  $\vec{\zeta}$  no es pequeña comparada con otras cantidades perturbadas, como ya han sido calculadas numéricamente (17, 15) y analíticamente (17, 18). El resultado es ilustrado en fig. 1. Vemos de esta figura que el espectro con dos máximos se transforma en uno con un máximo simple en  $nq = m$ .

A pesar, como se dijo antes, los cálculos para los modos compresibles han sido ya efectuados, repetiremos para el caso  $nq = m$  debido a que los usaremos en el próximo capítulo.

Linealizando (4.1) y tomando  $m = nq$ , y despejando de (4.2) (4.7) obtenemos :

$$\hat{\omega}^2 \vec{\zeta} = \vec{\nabla} \left[ (n^2(1-\mu) + \Lambda) \vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta} - 2n \zeta_n^{(n)} \right] + 2n \vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta} \hat{n} \quad (4.49)$$

donde

$$\Lambda = a^2 \left\{ \left( \frac{b_0}{b_1} \right)^2 + 4 \frac{\mu \lambda}{b_1^2} p_0 \right\} \quad (4.50)$$



Para  $\Delta/a^2 \gg 1$ , lo cual, para  $m = nq$ , implica  $|k|a \ll 1$  (ver ecuación (4.11)), las ecuaciones (4.49) se reducen a :

$$\partial_{r^2} \psi + \frac{1}{r} \partial_r \psi + \left\{ \left( \frac{4m^2}{\Delta \omega^2} - k^2 \right) \frac{m^2}{n^2} \right\} \psi = 0 \quad (4.51)$$

donde  $\psi = r \xi_n$  (4.52)

La solución regular en  $r = 0$  de (4.51) es :

$$\psi = \alpha J_m \left\{ \left( \frac{4m^2}{\Delta \omega^2} - k^2 \right)^{1/2} r \right\} \quad (4.53)$$

La condición de borde  $\psi(r = a) = 0$  da los valores de  $\omega$  en  $m = nq$  :

$$\omega^2 \approx \frac{4m^2 a^2}{\Delta z_m^2} \quad (4.54)$$

Entonces concluimos que la compresibilidad depende del modo, siendo el plasma incompresible para los modos marginales, y jugando un papel importante para valores racionales de  $nq$ , donde  $\omega$  no sólo no es nulo, sino que toma su máximo.

Finalmente, las componentes de  $\vec{\xi}$  están dadas por :

$$\xi_n = \frac{1}{n} \psi \quad (4.55)$$

$$\xi_\theta = \frac{r n}{\Delta m} \left\{ (\Delta - (\mu - 1) r^2) \frac{1}{n} \partial_r \psi - 2\mu \right\}$$

$$\xi_z = \frac{r k n^2}{\Delta m^2} \left\{ (\Delta - (\mu - 1) r^2) \frac{1}{n} \partial_r \psi - 2\mu \right\}$$

§5. EFFECTOS NO IDEALES DEBIDO A VISCOSIDAD Y CONDUCTIVIDAD TERMICA

RESUMEN

En este capítulo estudiaremos los efectos de la viscosidad perpendicular y conductividad térmica sobre la estabilidad del sistema considerado en el capítulo anterior. Nuestro propósito es mostrar que los efectos combinados de viscosidad y conducción térmica son responsables de la existencia de modos marginales estacionarios.

En este caso ( $\eta=0$ ) las ecuaciones (3.57) --- (3.63) que describen el sistema, resultan :

$$\rho(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p - \mu_L \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (5.1)$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{\mu} [\partial_t p + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \frac{2}{3} \kappa \nabla^2 p - S_0] = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (5.3)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (5.4)$$

$$\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (5.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - 4\pi \vec{j} = 0 \quad (5.7)$$

I. Orden Cero

Dado que  $\vec{V}^{(0)} = 0$ , la única modificación a la solución en este orden es de (5.3), en que aparece  $S_0$  una fuente que mantiene el perfil de presión en equilibrio, de donde :

$$S_0 = \frac{2K}{3\pi} \left( \frac{B_I}{a} \right)^2 \quad (5.8)$$

## II. Orden Uno

Supondremos que el plasma es incompresible, (esto es  $\mu$  en la ecuación (5.3) es infinito y la ecuación es reemplazada por  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(1)} = 0$ ), y mostraremos que  $\mu_{\perp}$  remueve la singularidad en  $k_{\parallel} = 0$ .

Suponiendo como antes, densidad aproximadamente constante y linealizando la ecuación (5.1) para perturbaciones de la forma usada en el capítulo 4, obtenemos la ecuación para el vector desplazamiento  $\vec{\xi}$ :

$$\left[ \epsilon_0 \hat{\omega}^2 + \frac{\beta_{\perp}^2}{4\pi a^2} (m-nq)^2 \right] \vec{\xi} = -\vec{\nabla} \left( \hat{p}^{(1)} + \frac{\vec{B}^{(0)} \cdot \vec{B}^{(1)}}{4\pi} \right) - 2 \frac{\epsilon_0 \hat{\omega}^2}{4\pi a^2} (m-nq) \left\{ \epsilon_0 \hat{n} - \epsilon_{\parallel} \hat{\theta} \right\} - \mu_{\perp} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) \quad (5.9)$$

En el caso ideal de MHD (magnetohidrodinámica) tratada en el capítulo 4,  $\vec{\xi}$  tenía la propiedad que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$  era proporcional a  $\vec{\xi}$  (es decir, (4.19)). Por lo tanto, en el caso incompresible estamos tratando con un campo libre de fuerzas como se ve en la ecuación (4.41). Supondremos que esta propiedad se mantiene en presencia de viscosidad. Entonces, escribiendo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\xi} = \beta \vec{\xi} \quad (5.10)$$

y  $\beta$  es una constante que más tarde será determinada, con esto (5.9) se reduce a:

$$\left[ \hat{\omega}^2 + \hat{\mu}_{\perp} \hat{\omega} \beta^2 a^2 + (m-nq)^2 \right] \vec{\xi} = -\vec{\nabla} p - 2(m-nq) \left\{ \epsilon_0 \hat{n} - \epsilon_{\parallel} \hat{\theta} \right\} \quad (5.11)$$

Donde hemos definido:

$$\hat{\mu}_{\perp} = \left( \frac{4\pi}{a^2 \epsilon_0 \epsilon_{\perp}^2} \right)^{1/2} \mu_{\perp} \quad (5.12)$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} \Omega &= (\hat{\omega} + \hat{\mu}_{\perp} \beta^2 a^2) \hat{\omega} + (m-nq)^2 \\ \sigma_1 &= 2|m-nq| \Omega^{-1} \quad \Delta_1 = \Omega(\sigma_1^2 - 1) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Escribiendo (5.11) en componentes se obtiene :

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= \Delta_i^{-1} \left\{ \partial_n \hat{p}^{(1)} + \frac{m}{n} \sigma_i \hat{p}^{(1)} \right\} \\ \xi_\theta &= \Delta_i^{-1} \left\{ \frac{m}{n} \hat{p}^{(1)} + \sigma_i \partial_n \hat{p}^{(1)} \right\} \\ \xi_z &= \Delta_i^{-1} (1 - \sigma_i^2) \hat{p}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Calculando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$  se tiene nuevamente :

$$\nabla^2 \hat{p}^{(1)} + k^2 \sigma_i^2 = 0 \quad (5.15)$$

Para determinar  $\beta$  tomamos rotor en la ecuación (5.11) :

$$\vec{\nabla} \times (\xi_\theta \hat{n} - \xi_n \hat{\theta}) = ik \xi_n \hat{n} + ik \xi_\theta \hat{\theta} - \left( \frac{im}{n} \xi_\theta + \frac{1}{n} \partial_n (n \xi_n) \right) \hat{z}$$

Luego :

$$\begin{aligned} \xi_n \Omega \beta &= -2i(m-nq) ik \xi_n \\ \xi_\theta \Omega \beta &= -2i(m-nq) ik \xi_\theta \\ \xi_z \Omega \beta &= 2i(m-nq) \left( \frac{im}{n} \xi_\theta + \frac{1}{n} \partial_n (n \xi_n) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

De donde concluimos :

$$\beta = k \sigma_i \quad (5.17)$$

Desarrollando (5.15) obtenemos :

$$\frac{1}{x} \partial_x (x \partial_x \hat{p}^{(1)}) + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) \hat{p}^{(1)} = 0 \quad (5.18)$$

Donde hemos hecho

$$x = kn \sqrt{\sigma_i^2 - 1} \quad (5.19)$$

La solución regular en  $r = 0$  es  $J_m(X)$ , luego la solución general (eliminando la singular  $N_m(X)$  : función de Neumann) es :

$$\hat{p}^{(1)} = \alpha J_m(kr\sqrt{\sigma_1^2 - 1}) \quad (5.20)$$

Condiciones de borde :

$$i) \quad \xi_n(r=a) = 0 \quad (5.21)$$

$$ii) \quad \xi_\theta(r=a) = 0 \quad (5.22)$$

i) Se debe al supuesto de paredes perfectamente conductoras y ii) a la presencia de la componente perpendicular de la viscosidad.

$$\text{Explícitamente : } \left\{ \partial_n \hat{p}^{(1)} + \frac{m}{n} \sigma_1 \hat{p}^{(1)} \right\} \Big|_{r=a} = 0$$

$$\left\{ \frac{m}{n} \hat{p}^{(1)} + \sigma_1 \partial_n \hat{p}^{(1)} \right\} \Big|_{r=a} = 0 \quad (5.23)$$

Y las ecuaciones (5.23) sólo pueden ser simultáneamente válidas si :

$$\sigma_1 \approx 1 \quad (5.24)$$

Además de la ecuación (5.20) y las relaciones de recurrencia (4.32) para las funciones de Bessel se tiene :

$$J_{m-1}(ka\sqrt{\sigma_1^2 - 1}) = 0 \quad (5.25)$$

De donde :

$$\sigma_1^2 \approx 1 + \frac{2m-1}{(ka)^2} \quad (5.26)$$

Siendo  $z_{m-1}$  el primer cero de  $J_{m-1}(z)$ .

y para compatibilizar (5.24) y (5.26) exigimos longitudes de onda  $\lambda = 2\pi/k$  cortas, tal que  $:(ka)^2 \gg z_{m-1}^2$

$$(5.27)$$

Por otro lado, dado que como veremos,  $m \neq nq$ , se sigue que la condición (5.27) implica el límite tokamak:

$$B_\theta/B_z \gg 1 \quad (5.28)$$

Podemos ahora escribir la relación de dispersión que satisfacen estos modos. De las ecuaciones (5.13) y (5.17) se sigue que :

$$\frac{2|m-nq|}{\hat{\omega}^2 + \hat{\mu}_\perp \hat{\omega} k^2 a^2 + (m-nq)^2} \approx 1 \quad (5.29)$$

De donde se obtiene :

$$\hat{\omega} \approx -\frac{1}{2} \hat{\mu}_\perp (ka)^2 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{4} \hat{\mu}_\perp^2 (ka)^4 + 2|m-nq| - (m-nq)^2} \quad (5.30)$$

Donde el signo de la raíz cuadrada se escogió de tal forma de hacer  $\hat{\omega}$  real y positivo de otro modo las condiciones de borde no son satisfechas.

La relación de dispersión tiene la misma forma de los modos ideales incompresibles encontrados en el capítulo anterior.

En efecto

$$\hat{\omega} = 0 \quad \text{para} \quad m = nq \quad (5.31)$$

Sin embargo

$$\hat{\omega} \approx \frac{2|m-nq|}{\hat{\mu}_\perp k^2 a^2} + \mathcal{O}((m-nq)^2) \quad (5.32)$$

$$\Delta_1 = 2|m-nq| \left( \frac{z_{m-1}}{2a} \right)^2 + O((m-nq)^2) \quad (5.33)$$

Por lo tanto :

$$\lim_{nq \rightarrow m} \left( \frac{\hat{\omega}}{\Delta_1} \right) = \frac{1}{\hat{\mu}_1 z_{m-1}^2} \quad (5.34)$$

Luego  $\xi$  es finito en este límite, removiendo, en consecuencia, la singularidad en  $nq = m$ . En otros términos, dado que el cociente (5.34) es finito en este límite y de las ecuaciones (5.14) y se sigue que una perturbación finita de presión produce una velocidad finita  $\vec{v}^{(1)} = \hat{\omega} \vec{\xi}$ . La forma del espectro dada por la ecuación (5.30) es mostrada en la figura 2.

### III. Modos físicos para $\mu$ finito

Mostraremos que hay solución en este caso para el sistema (5.1) ---- (5.7) para  $\mu$  finito.

Para estados marginalmente estables ( $w = 0$ ), de la ecuación (5.5) se obtiene  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , es decir  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ ,  $\phi$  potencial escalar.

Luego, linealizando la ecuación (5.5) se tiene :

$$\vec{v}^{(1)} \times \vec{B}^{(0)} = \vec{\nabla} \phi^{(1)} \quad (5.35)$$

De las componentes de la ecuación (3.35) se obtiene :

$$v_n^{(1)} (m-nq) = 0 \quad (5.36)$$

$$Y \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(1)} = i(m-nq) \left\{ \frac{v_\theta^{(1)}}{n} + \frac{b_I}{a b_0} v_z^{(1)} \right\} \quad (5.37)$$

Para los estados marginales donde  $nq \neq m$  la ecuación (5.36) implica  $V_n^{(0)} = 0$ . De hecho, las tres componentes de  $\vec{V}^{(0)}$  se anulan en los límites  $nq_{1,2} = m / \left( 1 \pm \frac{2\pi a}{qL z_m} \right)$ . Por otra parte, para los estados marginales que ocurren en  $nq = m$ , de (5.36) sólo pueden satisfacer para  $V_n^{(0)} \neq 0$ , pero de (5.37) esto requiere que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{(0)} = 0$ .

Ahora entonces, mostraremos que bajo esta situación, ( $nq = m$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{(0)} = 0$ ), existe un modo marginal que satisface el conjunto completo de ecuaciones (5.1) ---- (5.7) con  $K \neq 0$  y  $\mathcal{N}$  finito.

En efecto, tomando  $\hat{w} = 0$  y  $nq = m$  y usando (5.37)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{(0)} = 0$  la ecuación (5.2) se reduce a :

$$V_n^{(0)} \partial_n p^{(0)} = \frac{2}{3} K \nabla^2 p^{(0)} \quad (5.38)$$

De las ecuaciones (5.14) y (5.34) obtenemos :

$$\lim_{nq \rightarrow m} (\hat{w} \hat{s}_n) = \left( \frac{B_I}{4\pi a^2 \epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{a^2}{\mu_L z_m^2} \left[ \partial_n \hat{p}^{(0)} + \frac{m}{n} \hat{p}^{(0)} \right] \quad (5.39)$$

Dado que  $V$  es una función  $p^{(1)}$ , es conveniente expresar el lado derecho de (5.38) en términos de  $p^{(1)}$ . De (4.41) y (5.34) se sigue que :

$$\vec{B}^{(0)} = \lim_{nq \rightarrow m} \left( \gamma \frac{(m-nq)}{\hat{w}} \frac{B_I}{a} \vec{V}^{(0)} \right) = i \frac{\mu_L k^2 B_I}{2\epsilon_0 a} \vec{V}^{(0)} \quad (5.40)$$



Reemplazando esta expresión en (4.8) y usando el hecho que  $\hat{p}^{(1)}$  satisface (5.15), se tiene (ver apéndice C) :

$$\nabla^2 p^{(1)} \approx \frac{1}{2} \mu_{\perp} k^4 R V_n^{(1)} \quad (5.41)$$

Usando el valor de equilibrio para la presión, introduciendo (5.34) y (5.41) en (5.38), se obtiene que si se satisface :

$$\mu_{\perp} K = - \frac{3}{k^4 a} d_n p^{(0)} \Big|_{n=a} \quad (5.42)$$

entonces también (5.38). Por lo tanto cuando esta relación entre el gradiente de presión y las constantes físicas  $\hat{\mu}_{\perp}$  y K se alcanza una solución marginal del problema existe para  $\mathcal{M}$  arbitrario.

Este estado es realmente el análogo en un plasma o la bien conocida convección estacionaria en hidrodinámica ordinaria. Por lo tanto, es posible definir el análogo para el plasma del número de Rayleigh usado en hidrodinámica<sup>(19)</sup> :

$$R = \frac{1}{n_c} d_n p^{(0)} \Big|_{n=a/2} a^4 / \mu_{\perp} K \quad (5.43)$$

donde :

$$\frac{1}{n_c} = \frac{1}{a} \left( \frac{b_I}{b_0} \right)^2 \quad (5.44)$$

es la curvatura de las líneas de campo helicoidales en  $n = a$ . La curvatura juega aquí el mismo rol que la gravedad juega en el problema de estabilidad hidrodinámica.

La condición (5.42) para la existencia de una solución marginal puede ser escrito en la forma :

$$R = R_{\text{crit}} \quad (5.45)$$

donde

$$R_{\text{crit}} = (ka)^b / 6m^2 \quad (5.46)$$

Esta ecuación define el número crítico de Rayleigh para la convección estacionaria en el plasma. En general, nuestro tratamiento para  $R = R_{\text{crit}}$  es una condición para inestabilidad marginal. La teoría lineal no dice nada acerca del comportamiento para  $R > R_{\text{crit}}$ . Sin embargo, para situación sin cizalle ha sido mostrado<sup>(20)</sup> que en la teoría no lineal, el estado bajo consideración produce convección en el plasma<sup>(8)</sup>. En otras palabras, para  $R > R_{\text{crit}}$  las ecuaciones no lineales (5.1) --- (5.7) tienen soluciones estacionarias con una velocidad de convección finita  $\vec{V}$ . El problema no lineal no es tratado aquí, pero puede ser resuelto análogamente como en la referencia (20).

El estudio de los patrones de flujo es estudiado en el apéndice B y graficado en la figura 3 para el caso  $m = 1$ .

IV. Mostraremos a continuación que en la aproximación to  
 kamak  $\Delta/a^2 \gg 1$  (ver ecuación (4.50)), la viscosidad  
 es necesariamente grande, o al menos, no puede ser arbi-  
 trariamente pequeña. En efecto de las ecuaciones (5.1)  
 ---- (5.7) en la aproximación lineal y para la  
 ecuación para el vector desplazamiento es :

$$\hat{\omega}^2 \vec{\xi} = \vec{\nabla} \left\{ \Delta \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} - 2\pi \xi_n - (\gamma-1) n^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right\} + 2\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \hat{n} - \hat{\mu}_\perp \hat{\omega} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\xi}) \quad (5.47)$$

Las soluciones de estas ecuaciones son funciones de  $\vec{n}$   
 y los parámetros  $\hat{\omega}$  y  $\hat{\mu}_\perp$ . La solución puede ser ex-  
 pandida en serie de Taylor alrededor de  $\hat{\mu}_\perp$ :

$$\vec{\xi}(\vec{n}, \hat{\mu}_\perp, \hat{\omega}) = \vec{\xi}_0(\vec{n}, 0, \hat{\omega}) + \left. \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \hat{\mu}_\perp} \right|_{\hat{\mu}_\perp=0} \hat{\mu}_\perp + \mathcal{O}(\hat{\mu}_\perp^2) \quad (5.48)$$

y  $\vec{\xi}_0(\vec{n}, 0, \hat{\omega})$  está dada por (4.24). Por lo tanto,  
 las componentes de  $\vec{\xi}$  están dadas por :

$$\xi_n = \frac{1}{n} \psi + \left. \frac{\partial \xi_n}{\partial \hat{\mu}_\perp} \right|_{\hat{\mu}_\perp=0} \hat{\mu}_\perp + \mathcal{O}(\hat{\mu}_\perp^2) \quad (5.49)$$

$$\xi_\theta = \frac{1}{\Delta m} \left\{ (\Delta - (\gamma-1) n^2) \frac{1}{n} \partial_n \psi - 2\psi \right\} + \left. \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \hat{\mu}_\perp} \right|_{\hat{\mu}_\perp=0} \hat{\mu}_\perp + \mathcal{O}(\hat{\mu}_\perp^2)$$

$$\xi_z = \frac{1}{\Delta m^2} \left\{ (1 + (\gamma-1) n^2) \frac{1}{n} \partial_n \psi - 2\psi \right\} + \left. \frac{\partial \xi_z}{\partial \hat{\mu}_\perp} \right|_{\hat{\mu}_\perp=0} \hat{\mu}_\perp + \mathcal{O}(\hat{\mu}_\perp^2)$$

y para  $\hat{\mu}_\perp$  suficientemente pequeño, las condiciones de  
 borde implican :

$$\psi(n=a) \simeq 0 \quad (5.52)$$

Usando las ecuaciones (5.49) se obtiene :

$$\Delta \simeq (\gamma+1) a^2 \quad (5.53)$$

Sin embargo, dado que  $(\mu-1) = O(1)$  y  $\Lambda/a^2 \gg 1$ , se sigue que  $\hat{\mu}_1$  no puede ser arbitrariamente pequeño. No tamos que este resultado es válido para el tensor viscosidad completo.

§6. EFFECTOS NO IDEALES DEBIDO A RESISTIVIDAD Y CONDUCTIVIDAD TERMICA

En este capítulo estudiaremos los efectos de la resistividad y conductividad térmica sobre la estabilidad del sistema, considerado en el capítulo 4. El propósito es mostrar que ellos son responsables de la existencia de modos marginales estacionarios.

En este caso ( $\hat{M}_L=0$ ) las ecuaciones (3.57) ---- (3.63) que describen el sistema, resultan :

$$\rho(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{J} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p \quad (6.1)$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.2)$$

$$(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) p = \frac{2}{3} \kappa \nabla^2 p + \frac{2}{3} \eta J^2 + S_0 - \gamma p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (6.3)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (6.4)$$

$$\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (6.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - 4\pi \vec{J} = 0 \quad (6.7)$$

a) MOVIMIENTO INCOMPRESIBLE

I. Orden Cero

De (6.1) 
$$p^{(0)} = p_0 - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{B_I}{a} \right)^2 r^2 \quad (6.8)$$

De (6.3) 
$$S_0 = -\eta / 6\pi^2 \left( B_I / a \right)^2 \quad (6.9)$$

De (6.4) 
$$\vec{E}^{(0)} = \eta / 2\pi \left( B_I / a \right) \hat{z} \quad (6.10)$$

## II. Orden Uno

Suponemos  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(1)} = \beta \vec{B}^{(1)}$  (6.11)

Definimos  $q = \frac{2\pi a}{L} \frac{B_0}{B_I} \quad n = -\frac{kL}{2\pi}$  (6.12)

De (6.1) linealizando obtenemos :

$$\xi_0 \omega \vec{v}^{(1)} = -\vec{\nabla} p - \frac{1}{8\pi} \vec{\nabla} (\vec{B} \cdot \vec{B})^{(1)} + \frac{\eta B_I}{4\pi a} \frac{(m-nq)}{(\omega + \eta \beta^2 / 4\pi)} \left\{ \frac{\eta B_I}{a} (m-nq) \vec{v}^{(1)} + 2 \frac{\eta B_I}{a} [v_{\theta}^{(1)} \hat{\theta} - v_{\phi}^{(1)} \hat{\phi}] \right\} \quad (6.13)$$

Definiendo :

$$\hat{\omega} = \left( \frac{4\pi a^2 S_2}{B_I^2} \right)^{1/2} \omega \quad (6.14)$$

$$\hat{p}^{(1)} = \frac{4\pi a^2}{B_I^2} \left[ p^{(1)} + \frac{1}{8\pi} (\vec{B} \cdot \vec{B})^{(1)} \right] \quad (6.15)$$

$$\hat{\xi}^{(1)} = (\omega + \eta \beta^2 / 4\pi)^{-1} \vec{v}^{(1)} \quad (6.16)$$

$$\hat{\eta} = \left( \frac{S_2}{4\pi a^2 B_I^2} \right)^{1/2} \eta \quad (6.17)$$

Sustituyendo en (6.13) obtenemos una ecuación para :

$$[\hat{\omega}^2 + \hat{\eta} \beta^2 a^2 \hat{\omega} + (m-nq)^2] \hat{\xi}^{(1)} = -\vec{\nabla} \hat{p}^{(1)} + 2i(m-nq) [\xi_{\theta}^{(1)} \hat{\theta} - \xi_{\phi}^{(1)} \hat{\phi}] \quad (6.18)$$

Def.  $\Omega = (m-nq)^2 + \hat{\omega}^2 + \hat{\omega} \hat{\eta} \beta^2 a^2$

$$\hat{\sigma}_2 = 2|m-nq| / \Omega \quad (6.19)$$

$$\Delta_2 = \Omega (\hat{\sigma}_2^2 - 1)$$

De (6.18) obtenemos :

$$\xi_n = \Delta_2^{-1} \left\{ \partial_n \hat{p}^{(n)} + \frac{m}{n} \sigma_2 \hat{p}^{(n)} \right\}$$

$$\xi_{\theta} = \Delta_2^{-1} \left\{ \frac{m}{n} \hat{p}^{(n)} + \sigma_2 \partial_n \hat{p}^{(n)} \right\} \quad (6.20)$$

$$\xi_2 = \frac{2k}{\Delta_2} (1 - \sigma_2^2) \hat{p}^{(n)}$$

Calculando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$  en (6.18) obtenemos como antes :

$$\beta = k \sigma_2 \quad (6.21)$$

Ahora calculando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$  a partir de (6.20) obtenemos :

$$\nabla^2 \hat{p}^{(n)} + k^2 \sigma_2^2 \hat{p}^{(n)} = 0 \quad (6.22)$$

y nuevamente haciendo  $x = kn \sqrt{\sigma_2^2 - 1}$  (6.23)

Obtenemos la ecuación de Bessel :

$$\frac{1}{x} \partial_x (x \partial_x \hat{p}^{(n)}) + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) \hat{p}^{(n)} = 0 \quad (6.24)$$

La única solución regular en el origen  $r = 0$  de (6.24) es :

$$\hat{p}^{(n)} = \propto J_m(x) \quad (6.25)$$

#### Condiciones de borde

Para garantizar que no entren impurezas al sistema, lo cual podría producir inestabilidad exigimos :

$$\xi_n (n = a) = 0 \quad (6.26)$$

De la ecuación (6.20) la condición de borde se escribe :

$$ka\sqrt{\sigma_2^2-1} J_m'(ka\sqrt{\sigma_2^2-1}) + m\sigma_2 J_m(ka\sqrt{\sigma_2^2-1}) = 0 \quad (6.27)$$

Usando las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel (6.27) se puede escribir como :

$$ka\sqrt{\sigma_2^2-1} J_{m-1}(ka\sqrt{\sigma_2^2-1}) + m(\sigma_2-1) J_m(ka\sqrt{\sigma_2^2-1}) = 0 \quad (6.28)$$

Y se puede encontrar dos límites para satisfacer (6.28)

a)  $|k|a \ll 1$  , de (6.28) tenemos

$$|k|a\sqrt{\sigma_2^2-1} = Z_m \quad (6.29)$$

$Z_m$  : primer cero de  $J_m(Z)$

Usando la expresión explícita para  $\sigma_2$  de (6.19) se tiene:

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{2} Z_m^2 \hat{\eta} + \left[ \frac{1}{4} Z_m^4 \hat{\eta}^2 + \frac{2|kk_c|}{Z_m} |m-nq| - (m-nq)^2 \right]^{1/2} \quad (6.30)$$

Para satisfacer las condiciones de borde se escogió el signo + en la raíz para que  $\hat{\omega}$  fuese real y positivo.

Los límites de la región inestable están dados por (ver figura 4) :

$$nq_{1/2} = m \mp 2|k|a / Z_m \quad (6.31)$$

Estos modos mostraremos que conducen a convección estacionaria.



Dado que supusimos que  $|k|a \ll 1$  y  $z_m = \mathcal{O}(1)$ , (6.30) implica que los modos están caracterizados por valores de  $nq$  del orden de  $m$ . Por lo tanto, de (6.8) y  $k = \frac{2\pi n}{L}$  se sigue que :

$$m \approx nq = |k|a \frac{B_0}{B_I} \quad (6.32)$$

lo cual para  $|k|a \ll 1$  implica la aproximación tokamak

$$B_0/B_I \gg 1$$

En la región central del espectro,  $k_{||} = \vec{k} \cdot \vec{B}^{(0)} = (m-nq) = 0$  (6.16) y (6.20) muestran que la velocidad perturbada diverge. Esto significa que en la región central el plasma es compresible. Fuera de esta región, sin embargo, los modos son más y más incompresibles para  $m-nq = 2|k|a/z_m$  ( $\hat{w} = 0$ ) el movimiento es incompresible.

En efecto, (6.1) linealizada y tomando  $w = 0$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \neq 0$  se escribe :

$$(m-nq) \vec{B}^{(0)} - 2 \frac{B_I}{4\pi a} [B_\theta^{(0)} \hat{n} - B_n^{(0)} \hat{\theta}] - \frac{B_I}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \hat{p}^{(1)} = 0 \quad (6.35)$$

Las componentes de esta ecuación pueden ser expresadas en términos de  $\hat{p}^{(1)}$  de la misma forma como las componentes de  $\vec{\xi}$  fueron escritas en (6.20). Usando entonces que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(0)} = 0$ , se encuentra que  $\hat{p}^{(1)}$  satisface (6.22).

Por lo tanto, en el límite  $w = 0$ , el campo magnético perturbado es idéntico al encontrado previamente bajo la suposición  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$ . Por otro lado de (6.4), (6.5) y (6.7) se sigue que :

$$(\omega + \eta \beta^2/4\pi) \vec{B}^{(1)} = i \frac{B_I}{\omega} (m-nq) \vec{v}^{(1)} - \vec{B}^{(0)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(1)}) \quad (6.34)$$

lo cual junto con el argumento anterior implica que en el límite  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{(1)} = 0$  (6.35)

### Modo Marginal Físico

Mostraremos que los modos  $nq_{1,2}$  satisfacen (6.3) para  $\eta$  finito y arbitrario y para valores específicos de los parámetros  $K$  y  $\eta$ .

Para  $w = 0$ , la ecuación (6.3) linealizada es :

$$\nabla_r^{(1)} d_n p^{(0)} = \frac{2}{3} K \nabla^2 p^{(1)} + \frac{4}{3} \eta \vec{J}^{(0)} \cdot \vec{J}^{(1)} \quad (6.36)$$

De (6.15) se sigue que :

$$p^{(1)} = \frac{B_I^2}{4\pi} \hat{p}^{(1)} - \frac{\vec{B}^{(0)} \cdot \vec{B}^{(1)}}{4\pi} \quad (6.37)$$

Dado que los estados marginales  $w = 0$  son incompresibles (6.34) y (6.37) dan :

$$p^{(1)} = \frac{B_I^2 \sigma_2 n}{4\pi(m-nq)(\sigma_2^2-1)} \left\{ \frac{m}{n} \sigma_2 \hat{p}^{(1)} + \sigma_2 n \partial_n \hat{p}^{(1)} \right\} \quad (6.38)$$

Además  $p^{(1)}$  satisface (6.22) y por lo tanto :

$$\nabla^2 p^{(1)} = - \frac{B_I^2}{4\pi} \frac{\sigma_2}{(m-nq)(\sigma_2^2-1)} \left\{ m k^2 \sigma_2^5 \hat{p}^{(1)} + 2k^2 (\sigma_2^2-1) \hat{p}^{(1)} + k^2 \sigma_2^3 n \partial_n \hat{p}^{(1)} \right\} \quad (6.39)$$

En el límite  $k+a \ll 1$ , la última expresión se reduce a :

$$\nabla^2 p^{(1)} \approx - \frac{B_I^2}{4\pi a^2} k^2 \sigma_2^2 n (m-nq) \xi_n \quad (6.40)$$

Reemplazando  $p^{(0)}$  y (6.40) en (6.36) se obtiene :

$$\eta/K = 8\pi/3 \quad (6.41)$$

Por lo tanto, si  $\eta/k$  toma el valor  $8\pi/3$ , los estados caracterizados por  $w = 0$  y  $nq_{1,2} = m \mp \frac{2k/a}{z_m}$  satisfacen las ecuaciones (6.1) ---- (6.7) para  $\mu$  arbitrario y fini to.

Como en el capítulo anterior definimos el número de Rayleigh:

$$R = \frac{a}{n_c} d_n p^{(0)} /_{n=a/2} / k/\eta \quad (6.42)$$

donde

$$\frac{1}{n_c} = \frac{1}{a} \left( \frac{\beta I}{B_0} \right)^2 \quad (6.43)$$

$n_c$  : curvatura antes definida.

Comparando (5.43) y (6.42) observamos que la resistividad juega el mismo papel que el inverso de la viscosidad.

En términos del número de Rayleigh, la condición (6.41) para la existencia de un solución marginal se escribe :

$$R = R_{crit} \quad (6.44)$$

donde

$$R_{crit} = \frac{16\pi}{3} z_m \left( \frac{\beta I}{B_0} \right)^2 = \frac{16\pi}{3} \frac{z_m}{m} (ka)^2 \quad (6.45)$$

Aplicamos los mismos argumentos dados en la parte inferior de la ecuación (5.46) para garantizar que la solución lineal permanece en el sistema no lineal, incluso para  $R > R_{crit}$ .

En resumen, para  $R > R_{crit}$ , las ecuaciones no-lineales (6.1) ---- (6.7) tienen soluciones estacionarias con velocidad de convección  $\vec{V}$  finita.

b)  $|k| a \gg 1$

De (6.28) obtenemos solución para

$$\sigma_z \simeq 1 \quad (6.46)$$

$$\alpha = z_{m-1}$$

de donde :

$$\sigma_z^2 \simeq 1 + \left( \frac{z_{m-1}}{ka} \right)^2 \quad (6.47)$$

De aquí obtenemos la relación de dispersión :

$$\hat{\omega}^2 + \hat{\eta}^2 (ka)^2 \hat{\omega} + (m-nq)^2 - 2|m-nq| = 0 \quad (6.48)$$

De donde :

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{2} k^2 a^2 \hat{\eta} + \left[ \frac{1}{4} \hat{\eta}^2 (ka)^4 + 2|m-nq| - (m-nq)^2 \right]^{1/2} \quad (6.49)$$

Los modos marginales están dados por :

$$nq_{1,2} = m \pm 2 \quad (6.50)$$

### Modo Marginal Físico

Mostraremos que para  $\hat{w} = 0$  ( $n q_{1,2} = m \pm 2$ ) el plasma es incompresible y estos modos satisfacen (6.3) para finitos y valores específicos de los parámetros físicos  $K$  y  $\eta$ .

Para  $w = 0$  la ecuación (6.1) se escribe :

$$\frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}]^{(1)} = \vec{\nabla} p \quad (6.51)$$

De donde :

$$2(m-nq) \vec{B}^{(1)} - 2[B_{\theta}^{(1)} \hat{n} - B_n^{(1)} \hat{\theta}] = \left( \frac{B_I}{a} \right) \vec{\nabla} p^{(1)} \quad (6.52)$$

Escribiendo la ecuación (6.52) en componentes :

$$B_n^{(1)} = \Delta_2^{-1} \left\{ \partial_n \hat{p}^{(1)} + \frac{m}{n} \sigma_2 \hat{p}^{(1)} \right\} \lambda$$

$$B_\theta^{(1)} = i \Delta_2^{-1} \left\{ \frac{m}{n} \hat{p}^{(1)} + \sigma_2 \partial_n \hat{p}^{(1)} \right\} \lambda$$
(6.53)

$$B_z^{(1)} = i k \Delta_2^{-1} (1 - \sigma_2^2) \hat{p}^{(1)} \lambda$$

Donde  $\lambda = : i(m-nq) B_I / a$

(6.54)

y además :

$$\Omega = (m-nq)^2$$

$$\sigma_2 = 2|m-nq| / \Omega$$

$$\Delta_2 = \Omega(\sigma_2^2 - 1)$$
(6.55)

Imponiendo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(1)}$  de (6.53) se obtiene :

$$\hat{p}^{(1)} = \propto J_m(kn \sqrt{\sigma_2^2 - 1})$$
(6.56)

regular en  $r = 0$

Por lo tanto, se encuentra el mismo campo eléctrico que se encontró para  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ .

Además de (6.4), (6.5) y (6.7) se tiene en este caso :

$$0 = i \frac{B_I}{a} (m-nq) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(1)} [1 - \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(1)}]$$
(6.57)

De donde :

$$\text{Si } m \neq nq \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(1)} = 0$$
(6.58)

Luego de (6.58) se concluye que los modos marginales  $q_{1,2} \eta$  son incompresibles.

Además la ecuación (6.3) para  $w = 0$

$$\vec{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla} p^{(1)} = \frac{2}{3} \kappa \nabla^2 p^{(1)} + \frac{\eta k \sigma_2}{6\pi^2} \left(\frac{\beta_I}{a}\right) B_2^{(1)} \quad (6.59)$$

Pero :

$$i) \frac{\eta k \sigma_2}{6\pi^2} \left(\frac{\beta_I}{a}\right) B_2^{(1)} = \frac{\eta k^2}{6\pi^2} \left(\frac{\beta_I}{a}\right)^2 \frac{\sigma_2}{(m-nq)} \hat{p}^{(1)} \quad (6.60)$$

$$ii) \vec{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla} p^{(1)} = -\frac{\eta k^2}{8\pi^2} \left(\frac{\beta_I}{a}\right) \left(\frac{ka}{z_{m-1}}\right)^2 \frac{1}{(m-nq)^2} [\eta \partial_n \hat{p}^{(1)} + m \sigma_2 \hat{p}^{(1)}] \quad (6.61)$$

De donde :

$$\frac{|\vec{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla} p^{(1)}|}{\left| \frac{\eta k \sigma_2}{4\pi^2} \left(\frac{\beta_I}{a}\right) B_2^{(1)} \right|} = \frac{3}{4} \left(\frac{q}{\beta_I}\right) \frac{\sigma_2}{|m-nq|} \frac{[\eta \partial_n \hat{p}^{(1)} + m \sigma_2 \hat{p}^{(1)}]}{\hat{p}^{(1)} (z_{m-1}/ka)^2} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{ka}{z_{m-1}}\right)^2\right) \gg 1 \quad (6.63)$$

Luego hasta 2° orden en  $\left(\frac{ka}{z_{m-1}}\right)$  sólo retenemos  $\vec{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla} p^{(1)}$  en (6.59), por lo tanto la condición es :

$$\frac{\kappa}{\eta} = 3/8\pi \quad (6.63)$$

Idéntica a la condición (6.41)

Usando los argumentos análogos, en este límite opuesto.

encontramos que existen modos convectivos, es decir, solución marginal estacionaria para  $\mu$  finito y  $\kappa/\eta$  como en (6.63) para la cadena no lineal de ecuaciones (6.1) ---- (6.7).

§7. EFFECTOS COMBINADOS DE VISCOSIDAD, RESISTIVIDAD Y CONDUCTIVIDAD TERMICA

Resumen

En este capítulo estudiamos los efectos no ideales de viscosidad perpendicular, resistividad y conductividad térmica y se demuestra que en los límites apropiados estos efectos son responsables de la existencia de modos marginales estacionarios.

Las ecuaciones (3.57) ----- (3.63) que describen el sistema resultan :

$$\rho(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{J} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p - \mu_{\perp} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (7.1)$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (7.2)$$

$$(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) p = \frac{2}{3} \kappa \nabla^2 p + S_0 - \gamma p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (7.3)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (7.4)$$

$$\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (7.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - 4\pi \vec{J} = 0 \quad (7.7)$$

Nuevamente para resolver este sistema usamos teoría de perturbaciones para linealizar el problema :

$$\psi = \psi^{(0)} + \epsilon \psi^{(1)} + \epsilon^2 \psi^{(2)} + \dots$$

### I. Orden Cero

En la situación de equilibrio el campo magnético es la suma de un campo externo  $B_0 \hat{z}$  más un campo producido por una corriente uniforme y constante :

$$\vec{B}^{(0)} = B_L \left(\frac{a}{z}\right) \hat{\theta} + B_0 \hat{z} \quad (7.8)$$

Luego :

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}^{(0)}) \times \vec{B}^{(0)} = -2 \left(\frac{B_L}{a}\right)^2 r \hat{r}$$

i) Sustituyendo en (1) obtenemos :

$$p^{(0)} = p_0 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{B_L}{a}\right)^2 r^2 \quad (7.9)$$

ii) De (2) suponiendo fluido incompresible

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (7.10)$$

$$\text{obtenemos : } d_t S = 0 \quad (7.11)$$

La densidad de carga es constante a lo largo del fluido.

$$\text{iii) De (3) } \frac{2}{3} \kappa \nabla^2 p^{(0)} + S_0 = -\frac{2}{3} \eta \vec{j}^{(0)2} \quad (7.12)$$

$$\text{donde } S_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{B_L}{a}\right)^2 \left[ \frac{\kappa}{\pi} - \eta/4\pi^2 \right] \quad (7.13)$$

$S_0$  : fuente que mantiene el perfil de presión de equilibrio.

$$\text{iv) De (4) } \vec{E}^{(0)} = \eta \vec{j}^{(0)} \quad (7.14)$$

$$\text{de donde } \vec{E}^{(0)} = \frac{\eta}{2\pi} \left(\frac{B_L}{a}\right) \hat{z} \quad (r < a) \quad (7.15)$$



## II. Orden Uno

Dado que  $(\theta, z)$  son coordenadas ignorables, supondremos que las cantidades perturbadas se comportan como :

$$f^{(1)}(r, \theta, z, t) = f(r) e^{\gamma(m\theta + kz) + \omega t} \quad (7.16)$$

y condiciones de borde periódica en  $Z = L$  el fin del cilindro,

$$k = -\frac{2\pi}{L} n \quad (7.17)$$

La transformada rotacional es constante y por lo tanto el campo magnético no tiene cizalle :

$$q = \frac{2\pi n}{L} \frac{B_z^{(0)}}{B_\theta^{(0)}} = \frac{2\pi c_1}{L} \frac{b_0}{b_1} \quad (7.18)$$

i) De (7.1)

$$\sum \partial_t \vec{v}^{(1)} - \frac{1}{4\pi} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}]^{(1)} - \mu_1 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}^{(1)}) - \vec{\nabla} p \quad (7.19)$$

$$\text{Suponemos ahora } \vec{\nabla} \times \vec{B}^{(1)} = \beta \vec{B}^{(1)} \quad (7.20)$$

Al igual que en el caso de viscosidad y conducción calórica (§5), más tarde será verificado.

Luego :

$$\begin{aligned} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}]^{(1)} = & \hat{n} \left\{ \mu_1 B_\theta B_\theta^{(1)} - B_z \left( \frac{r}{a} \right) B_z^{(1)} \right\} - 2 \left( \frac{B_z}{a} \right) B_\theta^{(1)} \left\{ + \frac{z}{a} \frac{B_z}{a} n \beta B_n^{(1)} + \right. \\ & \left. + \theta \left\{ \mu_1 - b_0 B_n^{(1)} + \frac{z}{\rho} \left( \frac{B_z}{a} \right) B_n^{(1)} \right\} \right\} \quad (7.21) \end{aligned}$$

$$\text{ii) De (7.5) y (7.7) } \partial_t \vec{B}^{(1)} = -\eta \vec{\nabla} \times \vec{j} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (7.22)$$

pero,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \hat{e}_i \sum_{j,m} \partial_j \nabla_l B_m = \left( \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\nabla} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \quad (7.23)$$

Suponemos que el plasma es incompresible :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(1)} = 0 \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} \\ (\vec{B}^{(0)} \cdot \nabla) \vec{v}^{(1)} &= \hat{n} \left\{ \frac{\beta_I}{a} v_{\theta}^{(1)} \right\} + \hat{\theta} \left\{ \frac{\beta_I}{a} v_{\eta}^{(1)} \right\} + (m-nq) i \frac{\beta_I}{a} \vec{v}^{(1)} \\ (\vec{v}^{(1)} \cdot \nabla) \vec{B}^{(0)} &= \hat{n} \left\{ -\frac{\beta_I}{a} v_{\theta}^{(1)} \right\} + \hat{\theta} \left\{ \frac{\beta_I}{a} v_{\eta}^{(1)} \right\} \end{aligned} \quad (7.25)$$

De donde :

$$[(\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}))]^{(1)} = i \frac{\beta_I}{a} (m-nq) \vec{v}^{(1)} \quad (7.26)$$

$$\text{De (7.7) } \nabla \times \vec{B}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times (\nabla \times \vec{B}))]^{(1)} = \frac{\beta_I}{4\pi} \vec{B}^{(1)} \quad (7.27)$$

Sustituyendo (7.26) y (7.27) en (7.22) obtenemos :

$$(\omega + \eta \beta^2 / 4\pi) \vec{B}^{(1)} = i \left( \frac{\beta_I}{a} \right) (m-nq) \vec{v}^{(1)} \quad (7.28)$$

$$\text{iv) } [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}] = -\frac{1}{2} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (7.29)$$

usando (7.25) y (7.28) obtenemos :

$$[(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}]^{(1)} = -\frac{1}{2} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B})^{(1)} + i \frac{\beta_I}{a} (m-nq) (\omega + \eta \beta^2 / 4\pi)^{-1} \left\{ i \frac{\beta_I}{a} (m-nq) \vec{v}^{(1)} + \frac{2\beta_I}{a} [v_{\eta}^{(1)} \hat{\theta} - v_{\theta}^{(1)} \hat{n}] \right\} \quad (7.30)$$

De (7.28) se obtiene :

$$\nabla \times \vec{v}^{(1)} = \beta \vec{v}^{(1)} \quad (7.31)$$

Ahora sustituimos en (7.1)

$$S_0 \omega \vec{v}^{(1)} = -\mu_1 \beta^2 \vec{v}^{(1)} - \nabla p - \frac{1}{8\pi} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B})^{(1)} + \frac{\beta_I (m-nq)}{4\pi a (\omega + \eta \beta^2 / 4\pi)} \left[ i \frac{\beta_I}{a} (m-nq) \vec{v}^{(1)} + 2 \frac{\beta_I}{a} (v_{\eta}^{(1)} \hat{\theta} - v_{\theta}^{(1)} \hat{n}) \right] \quad (7.32)$$

Definiendo :

$$\hat{\omega} = \left( \frac{4\pi a^2 S_0}{\beta_I^2} \right)^{1/2} \omega \quad \vec{\xi} = \frac{\vec{v}^{(1)}}{(\omega + \eta \beta^2 / 4\pi)} \quad (7.33)$$

$$\hat{\mu}_1 = \left( \frac{4\pi}{S_0 a^2 \beta_I^2} \right)^{1/2} \mu_1 \quad \hat{\eta} = \left( \frac{S_0}{4\pi a^2 \beta_I^2} \right)^{1/2} \eta$$

$$\hat{p} = \frac{4\pi a^2}{\beta_I^2} \left\{ p^{(1)} + \frac{1}{8\pi} (\vec{B} \cdot \vec{B})^{(1)} \right\}$$

De donde :

$$[(\hat{\omega} + \hat{\mu}_L \beta^2 a^2)(\hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2) + (m-nq)^2] \vec{\xi} = -\vec{\nabla} \hat{p}^{(1)} + 2i(m-nq)(\xi_n \hat{\theta} - \xi_\theta \hat{n}) \quad (7.34)$$

Def.  $\Omega = (\hat{\omega} + \hat{\mu}_L \beta^2 a^2)(\hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2) + (m-nq)^2$

$$\sigma_3 = 2|m-nq| \Omega^{-1} \quad (7.35)$$

$$\Delta_3 = \Omega (\sigma_3^2 - 1)$$

De (7.35) y (7.34) se obtiene :

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= \Delta_3^{-1} \left\{ \partial_n \hat{p}^{(1)} + \frac{m}{n} \sigma_3 \hat{p}^{(1)} \right\} \\ \xi_\theta &= \Delta_3 \left\{ \frac{m}{n} \hat{p}^{(1)} + \sigma_3 \partial_n \hat{p}^{(1)} \right\} \\ \xi_z &= \frac{1}{k} \Delta_3 \left\{ (1 - \sigma_3^2) \hat{p}^{(1)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Además  $\vec{\nabla}_x (\xi_n \hat{n} - \xi_\theta \hat{\theta}) = ik \xi_n \hat{n} + ik \xi_\theta \hat{\theta} - \left( \frac{im}{n} \xi_\theta + \frac{1}{n} \partial_n (n \xi_n) \right) \hat{z} \quad (7.37)$

Tomando rotor en la ecuación (7.34) se obtiene :

$$\Omega \beta \xi_n = -2i(m-nq) ik \xi_n \quad (7.38)$$

$$\Omega \beta \xi_\theta = -2i(m-nq) ik \xi_\theta$$

$$\Omega \beta \xi_z = 2i(m-nq) \left( \frac{im}{n} \xi_\theta + \frac{1}{n} \partial_n (n \xi_n) \right)$$

De donde :

$$\beta = k \sigma_3 \quad (7.39)$$

De la ecuación (38) tenemos :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \xi_2 &= - \frac{k^2}{\Delta_3} (1 - \sigma_3^2) \hat{p}^{(1)} \\ \frac{1}{n} \partial_n \xi_2 &= \frac{1}{n \Delta_3} \left[ \frac{m^2}{n} \hat{p}^{(1)} + m \sigma_3 \partial_n \hat{p}^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$\frac{1}{n} \partial_n (n \xi_2) = \frac{1}{\Delta_3} \left[ \frac{1}{n} \partial_n (n \partial_n \hat{p}^{(1)}) + m \sigma_3 \partial_n \hat{p}^{(1)} \right]$$

Sumando obtenemos :

$$\nabla^2 \hat{p}^{(1)} + k^2 \sigma_3^2 \hat{p}^{(1)} = 0 \quad (7.41)$$

haciendo cambio en la variable independiente

$$\chi = k n \sqrt{\sigma_3^2 - 1} \quad (7.42)$$

$$\text{obtenemos : } \frac{1}{\chi} \partial_\chi (\chi \partial_\chi \hat{p}^{(1)}) + \left(1 - \frac{m^2}{\chi^2}\right) \hat{p}^{(1)} = 0 \quad (7.43)$$

La solución regular en  $\chi = 0$  es

$$\hat{p}^{(1)} = \chi J_m(\chi) \quad (7.44)$$

La otra solución linealmente independiente es la función de Neumann  $N_m(\chi)$ , que es singular en el origen :

Luego :

$$\hat{p}^{(1)} = \chi J_m(k n \sqrt{\sigma_3^2 - 1}) \quad (7.45)$$

Condiciones de borde

$$\xi_n(r=a) = 0 \quad (7.46)a$$

$$\xi_\theta(r=a) = 0 \quad (7.46)b$$

Donde (7.46)a se debe a imponer que las partículas no choquen con las paredes y de este modo entren impurezas al sistema lo que produciría inestabilidad y (7.46)b es debido a la presencia de la viscosidad perpendicular  $\mu_\perp$ .

De (7.46) obtenemos :

$$\left[ \partial_n \hat{p}^{(n)} + \frac{m}{a} \sigma_3 \hat{p}^{(n)} \right]_{r=a} = 0$$

$$\left[ \frac{m}{a} \hat{p}^{(n)} + \sigma_3 \partial_n \hat{p}^{(n)} \right]_{r=a} = 0 \quad (7.46)c, d$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene :

$$\sigma_3 \approx 1 \quad (7.47)$$

Usando (7.35) y (7.47) se obtiene la relación de dispersión:

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{2}(\hat{\mu}_\perp + \hat{\eta}) k^2 a^2 + \left[ \frac{(k a)^4}{4} (\hat{\mu}_\perp - \hat{\eta})^2 + (m - nq)^2 + 2|m - nq| \right]^{1/2} \quad (7.48)$$

El signo en (7.48) se escogió para que  $w$  sea real y positivo.

Los ceros de  $\hat{w}$  están dados por :

$$(k a)^4 \hat{\eta} \hat{\mu}_\perp = 2|m - nq| + (m - nq)^2 \quad (7.49)$$

$$\text{Definiendo : } \lambda^2 = (k a)^4 \hat{\mu}_\perp \hat{\eta} \quad (7.50)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= m - nq = 1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \\ \alpha_2 &= m - nq = 1 - \sqrt{1 - \lambda^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

y las soluciones (7.49) son  $\pm \alpha_1, \pm \alpha_2$

Gráficamente :

Figura 5

Usando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel.

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2x J'_m(x) \quad (7.52)$$

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x)$$

De las ecuaciones (7.46)<sub>c,d</sub> se obtiene :

$$J_{m-1}(ka\sqrt{\sigma_3^2 - 1}) = 0 \quad (7.53)$$

Luego :

$$\sigma_3^2 \approx 1 + \left(\frac{z_{m-1}}{ka}\right)^2 \quad (7.54)$$

y para ser consistentes con (7.47) se exige :

$$\left(\frac{z_{m-1}}{ka}\right)^2 \ll 1 \quad (7.55)$$

### Convección estacionaria

Hemos encontrado hasta aquí 4 estados para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , los cuales son no sólo marginales ( $\text{Re } w = 0$ ) sino además estacionarios ( $\text{Im } w = 0$ ). Estos estados son denotados por  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $-\alpha_1$ ,  $-\alpha_2$  y están dados en la ecuación (7.51).

A partir de la ecuación (7.21) hemos supuesto que el plasma era incompresible, lo que permitió encontrar solución explícita para las magnitudes a primer orden (7.41), pero de la ecuación (7.3) esto implica que  $\eta$  es infinito. Mostraremos que los estados dados por la ecuación (7.51), son bajo ciertas condiciones, estados físicos en el sentido que son incompresibles y satisfacen ec. (7.3) con  $\eta$  coeficiente de adiabaticidad finito.

Tomando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(0)} = 0$  de (7.3) obtenemos :

$$\partial_t p^{(0)} + \vec{v}^{(0)} \cdot \vec{\nabla} p^{(0)} = \frac{2}{3} \eta \nabla^2 p^{(0)} + \frac{\eta k \sigma_3}{\omega \pi^2} \left( \frac{B_E}{a} \right) B_2^{(0)} \quad (7.56)$$

Tenemos :

$$\begin{aligned} \text{i) } \vec{B}^{(0)} \cdot \vec{B}^{(0)} &= \frac{2 B_E (m-nq)}{a} \left\{ B_1 \left( \frac{B_E}{a} \right) \xi_\theta + B_0 \xi_z \right\} \\ &= - \left( \frac{B_E}{a} \right)^2 \frac{(m-nq)}{\Delta_3} \left\{ [nq \sigma_3^2 + (m-nq)] \hat{p}^{(0)} + n \sigma_3 \partial_n \hat{p}^{(0)} \right\} \end{aligned} \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } p^{(0)} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \hat{p}^{(0)} - \frac{\vec{B}^{(0)} \cdot \vec{B}^{(0)}}{(B_E/a)^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{B_E}{a} \right)^2 \hat{p}^{(0)} - \frac{1}{4\pi} \vec{B}^{(0)} \cdot \vec{B}^{(0)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{B_E}{a} \right)^2 \Delta_3 \left[ \hat{p}^{(0)} + \frac{1}{\Delta_3} \left( \omega + \mu_0 h \sigma_3^2 \lambda \omega + \eta k^2 \sigma_3^2 (\sigma_3^2 - 1) \right) \hat{p}^{(0)} + (m-nq) n \sigma_3 \Delta_3 \xi_n \right] \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\text{iii) } [\nabla^2, n \partial_n] \hat{p}^{(0)} - 2 (\nabla^2 - \partial_z^2) \hat{p}^{(0)} = 2 k^2 (1 - \sigma_3^2) \hat{p}^{(0)} \quad (7.59)$$

$$\text{iv) } \nabla^2 (n \xi_n) = \Delta_3^{-1} \left[ -m k^2 \sigma_3^2 \hat{p}^{(0)} - k^2 \sigma_3^2 n \partial_n \hat{p}^{(0)} + 2 k^2 (1 - \sigma_3^2) \hat{p}^{(0)} \right] \quad (7.60)$$

$$v) \nabla^2 p^{(1)} = \frac{1}{4a} \left( \frac{k_1}{a} \right)^2 \Delta_3 \left\{ \left[ -(\hat{\omega} \mu_1 k^2 \sigma_3^2) (\hat{\omega} + \hat{\eta} k^2 \sigma_3^2) (\sigma_3^2 - 1) - m k^2 \sigma_3^4 (m - nq) \right] \hat{p}^{(1)} + \right. \\ \left. \sigma_3 (m - nq) [2k^4 (1 - \sigma_3^2) \hat{p}^{(1)} - k^2 \sigma_3^2 n \partial_n \hat{p}^{(1)}] \right\} \quad (7.61)$$

Ahora imponemos que son estados marginales y estacionarios :

$$\hat{\omega} = 0 \quad (7.62)$$

usando además la explícita para  $\sigma_3$  , obtenemos :

$$\nabla^2 p^{(1)} = \left( \frac{k_1}{a} \right)^2 \frac{1}{4a \Delta_3} \left[ -\hat{\eta} k^2 \sigma_3^5 \left( \frac{2m-1}{na} \right)^2 \hat{p}^{(1)} - 2k^2 \sigma_3 (m - nq) \left( \frac{2m-1}{na} \right)^2 \hat{p}^{(1)} - k^2 \sigma_3^3 (m - nq) n \Delta_3 \hat{p}^{(1)} \right] \quad (7.63)$$

vi) Evaluando ahora en los puntos críticos, de acuerdo a (51):

$$m - nq = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda^2} \\ \lambda^2 = (ka)^4 \mu_1 \hat{\eta} \quad (7.64)$$

$$\text{De donde :} \quad (ka)^4 \mu_1 \hat{\eta} \ll 1 \quad (7.65)$$

$$\text{vii) } \nabla^2 p^{(1)} = -\frac{1}{4a} \left( \frac{k_1}{a} \right)^2 n \hat{v}_n^{(1)} \quad (7.66)$$

$$\text{viii) } \frac{\eta k \sigma_3}{6\eta^2} \left( \frac{k_1}{a} \right) \hat{v}_t^{(1)} = \frac{\hat{\eta} k^2 \left( \frac{k_1}{a} \right)^2 (m - nq) \hat{p}^{(1)}}{\lambda^2 \sigma_3^3 + (m - nq)^2 \sigma_3^{-1}} \quad (7.67)$$

$$\text{ix) } \nabla^2 p^{(1)} = -\frac{\hat{\eta} k^2 \left( \frac{k_1}{a} \right)^2 \left( \frac{k_1}{2m-1} \right)^2 \partial_n \hat{p}^{(1)} + \frac{m}{n} \sigma_3 \hat{p}^{(1)}}{\lambda^2 \sigma_3^4 + (m - nq)^4} \quad (7.68)$$

x) Desarrollando en serie en términos de  $\left( \frac{2m-1}{ka} \right)^2 \ll 1$  , hasta 2 orden obtenemos :

I. Caso  $m - nq \approx 2$

Comparando viii) y ix) se ve :

$$\nabla^2 p^{(1)} \gg \frac{\eta k \sigma_3}{6\pi^2} \left( \frac{k_1}{a} \right) \hat{v}_t^{(1)} \quad (7.69)$$



Además de (63) obtenemos :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{p}^{(n)} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{b_I}{a}\right)^2 \Delta_3 \left[ -\lambda \left(\frac{z_{m-1}}{ka}\right)^2 \hat{p}^{(n)} - 4 \left(\frac{z_{m-1}}{a}\right)^2 \hat{p}^{(n)} - 2k^2 n \left(\partial_n \hat{p}^{(n)} + \frac{n}{n} \hat{p}^{(n)}\right) \right] \\ &\approx -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{b_I}{a}\right)^2 2k^2 \sigma_3^2 n \xi_n \approx -\frac{2}{\eta} \left(\frac{b_I}{a}\right)^2 n V_n^{(n)} \end{aligned} \quad (7.70)$$

Sustituyendo en (56) obtenemos :

$$\frac{K}{\eta} = -\frac{3}{4} \left(\frac{a}{b_I}\right)^2 \frac{1}{n} d_n \hat{p}^{(n)} \quad (7.71)$$

De donde :

$$\frac{K}{\eta} = \frac{3}{8\pi} \quad (7.72)$$

II. Caso  $m = nq = \frac{1}{2} \lambda^2$

De (63) :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{p}^{(n)} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{b_I}{a}\right)^2 \Delta_3 \left[ -\lambda \left(\frac{z_{m-1}}{a^2}\right)^2 \hat{p}^{(n)} - \left(\frac{z_{m-1}}{a}\right)^2 \lambda^2 \hat{p}^{(n)} - \frac{1}{2} k^2 \lambda^2 n \Delta_3 \xi_n \right] \\ &\approx -\frac{1}{2} \left(\frac{b_I}{a}\right)^2 (ka)^4 \mu_{\pm} n V_n^{(n)} \left(\frac{\sigma_3}{4ka^2 b_I^2}\right)^{1/2} = -\frac{1}{2} \mu_{\pm} k^4 n V_n^{(n)} \end{aligned} \quad (7.73)$$

De (68) :

$$\vec{V}^{(n)} \cdot \vec{\nabla} \hat{p}^{(n)} \approx -\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{b_I}{a^2 z_{m-1}}\right)^2 \frac{n}{\mu_{\pm}} \left(\partial_n \hat{p}^{(n)} + \frac{n}{n} \hat{p}^{(n)}\right) \quad (7.74)$$

Además :

$$\frac{\eta k \sigma_3}{6\pi^2} \left(\frac{b_I}{a}\right) b_I^{(n)} \approx \frac{\hat{\eta}}{6\pi^2} \left(\frac{b_I k}{a}\right)^2 \frac{1}{2} \hat{p}^{(n)} = \frac{\hat{\eta}}{12\pi^2} \left(\frac{z_{m-1} b_I}{a^2}\right)^2 \left(\frac{ka}{z_{m-1}}\right)^2 \hat{p}^{(n)} \quad (7.75)$$

Luego :

$$D = \left| \frac{\eta k \sigma_3}{6\pi^2} \left(\frac{b_I}{a}\right) b_I^{(n)} / \vec{V}^{(n)} \cdot \vec{\nabla} \hat{p}^{(n)} \right| \approx \frac{2}{3} \frac{\hat{p}^{(n)} (ka)^2 \mu_{\pm} \hat{\eta}}{z_{m-1}^2 (\partial_n \hat{p}^{(n)} + \frac{n}{n} \hat{p}^{(n)})} \quad (7.76)$$

Pero de (7.65)  $\hat{\mu}_+ \hat{\eta} (ka)^2 \ll 1$  y además  $ka \gg Z_m^{-1}$ ,  
 luego :

$$D \ll 1 \quad (7.77)$$

Luego la ecuación (56) queda :

$$V_n^{(1)} d_n p^{(0)} = \frac{2}{3} K \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{b_I}{a}\right)^2 (ka)^4 \mu_+ \pi V_n^{(0)} \left(\frac{S_0}{4\pi b_I^2 \omega^2}\right)^{1/2} \quad (7.78)$$

De donde :

$$\mu_+ K = -3k^{-4} \frac{1}{\pi} d_n p^{(0)} \quad (7.79)$$

Explicítamente :

$$\mu_+ K = \frac{3}{2\pi} \left(\frac{b_I}{ak^2}\right)^2 \quad (7.80)$$

Los resultados pueden esquematizarse en el diagrama Fig. 6

R E S U L T A D O S

i) La condición (80) es igual a la que se encuentra en referencias (19) y (7), para el modo caracterizado por  $m = nq$  dado que estimado es marginal y estacionario, es el análogo - en un plasma a la bien conocida convección estacionaria en hidrodinámica ordinaria. Por lo tanto, es posible definir el análogo en el plasma al número de Rayleigh usado en hidrodinámica.

$$R = \frac{1}{n_c} \left. \frac{d_n P^{(w)}}{dn} \right|_{n=a/2} / \mu_{\perp} \kappa \quad (7.81)$$

donde : 
$$\frac{1}{n_c} = \frac{1}{a} \left( \frac{B_{\perp}}{B_z} \right)^2 \quad (7.82)$$

es la curvatura de las líneas helicoidales del campo en  $n = a$ . La curvatura aquí juega el mismo papel que la gravedad en el problema de la estabilidad hidrodinámica.

La condición (79) para la existencia de una solución marginal, puede ser entonces escrita en la forma :

$$R = R_{\text{crit}} \quad (7.83)$$

donde : 
$$R_{\text{crit}} = \frac{k^2 a^6}{6 m^2} \quad (7.84)$$

Esta ecuación define el número de Rayleigh crítico para asegurar la convección estacionaria en el plasma. En general nuestro tratamiento para  $R = R_{\text{crit}}$  es una condición para inestabilidad marginal. La teoría lineal no dice nada acerca del comportamiento para  $R > R_{\text{crit}}$ .

Sin embargo, el estado bajo consideración corresponde al estado llamado "intercambio de estabildades" en Ref. (19) donde se muestra (Cap. 2 y App. I; además ver Maschke y Paris (7)) que para  $R = R_{\text{crit}}$  las ecuaciones no lineales poseen solución convectiva estacionaria la cual se bifurca de la solución de equilibrio.

ii) Una situación similar ocurre para el estado  $\alpha_2$ . En este caso la ecuación (56) se satisface si :

$$\eta/\kappa = 8\pi/3 \quad (7.85)$$

Esta condición es idéntica a la encontrada en Ref. (11) donde la convección fue encontrada en la aproximación tokamak :

$$B_0/B_2 \ll 1 \quad (7.86)$$

y para  $|k| a \ll 1$ . Como en el caso anterior para  $\alpha_1$  es posible definir el número de Rayleigh el cual en este caso resulta:

$$R = \frac{a}{n_c} \left. \frac{d_n p^{(0)}}{dn} \right|_{n=a/2} / B_I^2 (\kappa/\eta) \quad (7.87)$$

Usando las ecuaciones (7.82) y (7.85) y el hecho que el estado satisface  $m-nq = -1 - \sqrt{1 - \lambda^2}$  el número de Rayleigh crítico está dado por :

$$R_{\text{crit}} = \frac{16}{3} \frac{k^2 a^2}{m^2}$$

Entonces, debido a los argumentos previos el estado  $\alpha_2$  también conduce a convección estacionaria para  $R > R_{\text{crit}}$  cuando los efectos no lineales son considerados.

Un análisis similar muestra que el mismo resultado es aplicable a los estados  $-\alpha_1$  y  $-\alpha_2$ .

## §8. CONCLUSIONES Y DISCUSION

En el capítulo §4 se muestra que no hay solución de las ecuaciones de MHD ideal para un plasma cilíndrico limitado por paredes fijas si se supone el plasma incompresible. Para una perturbación de la presión, la velocidad perturbada se anula en los límites del dominio estable de  $nq$ , es decir, en los puntos :

$$nq_{1,2} = m / \left( 1 \pm \frac{2\pi a}{Z_m qL} \right)$$

y diverge en  $nq = m$ , donde  $w$  de acuerdo a (4.37) se anula. La compresibilidad restaura el comportamiento propio de la velocidad perturbada en  $nq = m$ , pero entonces  $\hat{w}$  tiene su máximo, precisamente en  $m = nq$  no anulándose. Se muestra que la compresibilidad depende de los valores de  $nq$ , siendo nulo para modos marginales y máximo en la región central del espectro, (es decir,  $m = nq$ ). Esto se estableció en la aproximación tokamak  $B_\theta / B_z \ll 1$  o equivalentemente  $|h| a \ll 1$ .

Del capítulo §5 observamos que al considerar efectos no ideales, viscosidad y conductividad térmica se obtiene una situación diferente. Esta diferencia se debe a que la viscosidad remueve la singularidad en  $k_{||} = m - nq = 0$  del caso ideal. Luego aún en el caso incompresible existe una solución lineal de las ecuaciones MHD. Esto ocurre en el límite opuesto tokamak

$B_\theta/B_z \gg 1$ . Bajo estas condiciones, el espectro se anula ( $w = 0$ ) en  $m = nq$  (ver figura 2), situación que persiste independiente de  $\hat{\mu}_\perp$ . Además, aún cuando la compresibilidad es considerada, la forma del espectro inestable permanece invariante siempre para  $R > R_{crit}$ . La condición  $R = R_{crit}$  determina la convección estacionaria en el plasma y los modos con  $w = 0$  y  $k_\parallel = 0$  satisfacen el conjunto completo de ecuaciones de la MHD no ideal para  $\mathcal{N}$  finito.

A pesar que la viscosidad cambia la forma del espectro apreciablemente, (i.e.  $w = 0$  en  $m = nq$  para  $\mu_\perp \neq 0$  y sin embargo,  $w = w_{m\acute{a}x}$  en  $m = nq$  para  $\mu_\perp = 0$ , bajo  $R \gg R_{crit}$ ), no cambia el rango del espectro inestable (ver figura 2).

También se muestra que en el límite tokamak, la viscosidad no puede ser arbitrariamente pequeña.

Del capítulo § 6, mostramos que la resistividad no remueve la singularidad en  $m = nq$ , pero los estados  $nq_{1,2} = m \mp \frac{2ka}{Z_m}$  no son caracterizado por tener velocidad perturbada nula como en el caso previo de viscosidad perpendicular y conductividad térmica. Se mostro que estos estados eran incompresibles y conducían a convección estacionaria, considerando efectos no lineales. Por lo tanto el efecto de la resistividad es "empujar" los estados convectivos fuera del eje del espectro inestable, jugando un rol similar al inverso de la viscosidad.

Esto fue establecido en ambos límites  $|k| a \gg 1$  y  $|k| a \ll 1$  sugiriendo que el límite no es lo esencial en la producción de estados convectivos.

Finalmente, en el capítulo §7, se muestra los efectos combinados de viscosidad, resistividad y conducción térmica, y tal como se esperaba se rescata las mismas condiciones que conducían a convección estacionaria (considerando el sistema no lineal) en los límites correspondientes, esto es representado en figura 5.

En la región central del espectro, resistividad no juega ningún rol, pero viscosidad remueve la singularidad y conduce a convección estacionaria del plasma, suponiendo incompresibilidad.

En la frontera del espectro inestable, la viscosidad no juega ningún rol y es la resistividad quien conduce a convección estacionaria en el caso de incompresibilidad.

La existencia de soluciones para el sistema no lineal para  $R > R_{crit}$  es establecida para modos que satisfacen  $|k| a \gg 1$  en este caso.



APENDICE A

Para obtener la ecuación (4.44), primera la presión  $p^{(1)}$  es expresada en términos de la presión total  $\hat{p}^{(1)}$ . Para esto, reemplazando la ecuación (4.41) en (4.18) y tomando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}' = 0$  se obtiene :

$$p^{(1)} = \frac{b_I^2}{4\pi\Delta_0} \left\{ [\omega^2(1-\sigma_0^2) - m\sigma_0^2] - m\sigma_0^2(m-nq) \right\} \hat{p}^{(1)} - (m-nq)\sigma_0 n \partial_n \hat{p}^{(1)} \quad (\text{A.1})$$

Insertando (A.1) en la ecuación linealizada (4.3) resulta :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}' = \frac{1}{\rho^{(0)}} \frac{b_F^2 n^2}{4\pi\Delta_0} \left\{ [\omega^2(1-\sigma_0^2) - (m-nq)m\sigma_0^2 + 2m\sigma_0] \hat{p}^{(1)} / n^2 - [(m-nq)\sigma_0 - 2] \frac{1}{n} \partial_n \hat{p}^{(1)} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Y la ecuación (A.2) junto con la ecuación (4.43) suponiendo  $|k|a \ll 1$ , resulta la ecuación (4.44).

APENDICE B.

En que se muestra que el término de viscosidad paralela puede ser despreciado. Estudiaremos los patrones de flujo. Dado que  $\nabla' \cdot \vec{V} = 0$ ,  $\vec{V}$  puede ser escrito en término de una función de flujo  $\vec{G}$  en la forma :

$$\vec{V} = \nabla' \times \vec{G} \quad (\text{B.1})$$

Teorema de Helmholtz.

Sin pérdida de generalidad tomamos  $G_r = 0$ , y haciendo uso de la simetría helicoidal de la perturbación, las superficies de flujo están dadas por :

$$\phi(r, \theta, z) = m G_z - k r G_\theta = \text{cte} \quad (\text{B.2})$$

Y puede ser escrito en términos de  $V$  tal que :

$$\phi = \text{Re} \left\{ i r V_n \right\} = A \left\{ \int_m \left( z_{m-1} \frac{r}{a} \right) + \frac{r}{m a} z_{m-1} \int_m \left( z_{m-1} \frac{r}{a} \right) \sin(m\theta + kz) \right\} \quad (\text{B.3})$$

Las superficies de flujo dadas por (B.2) son celdas de convección las cuales tienen la forma de tubos helicoidales entrecruzados como se ilustra en figuras (3) y (7) para  $m = 1$  y  $m = 2$  respectivamente.

El centro de cada tubo está determinado por los extremos de  $\phi$ , esto es :

$$\partial_r \phi = 0 \quad (\text{B.4})$$

y  $\partial_\theta \phi = 0 \quad (\text{B.5})$

$$\partial_\theta \phi = 0$$

De las ecuaciones (B.3), (B.4) y (B.5) tenemos :

$$m\theta + kz = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{B.6})$$

$$y \quad J_m'\left(z_{m-1} \frac{\eta}{a}\right) + \frac{z_{m-1}}{m} \frac{d}{dz} \left[ \eta J_m'\left(\frac{\eta}{a} z_{m-1}\right) \right] = 0 \quad (\text{B.7})$$

Dado que  $V_n = f(n) \exp\{im\theta + ikz\}$  las ecuaciones (B.6) y (B.7) muestran que sobre la línea central de cada tubo  $\vec{V}$  está dado por :

$$V_n = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$V_\theta = (B_\theta/B_z) V_z$$

$$V_z = (-)^{n+1} C k a J_m\left(z_{m-1} \frac{\eta}{a}\right)$$

donde C es una constante.

Entonces, de las ecuaciones (6.8) concluimos que dado que :

$$B_\theta/B_z \gg 1, \quad |v_z| \ll |v_\theta|$$

por lo tanto no es necesario considerar la influencia de la viscosidad paralela en la ecuación de movimiento (3.57).

### Lectura de Gráficos

1. Tasa de crecimiento  $w$  vs.  $nq$  para modos incompresibles ( $\beta = 1$ ) y compresibles ( $\beta = 5/3$ ) en MHD ideal.
2. Tasa de crecimiento  $w$  vs.  $nq$  para modos incompresibles ( $\beta = 1$ ) bajo la influencia de viscosidad perpendicular.
3. Celdas de convección helicoidales para  $m = 1$ .
4. Tasa de crecimiento vs.  $nq$  para modos incompresibles ( $\beta = 1$ ).
5. Tasa de crecimiento vs.  $k$  para  $\beta \neq 0$  y  $\beta = 0$  (línea llena y para  $\beta = 0$  (línea a trazos)).
6. Tasa de crecimiento para  $\beta \neq 0$  y  $\beta \neq 0$  vs.  $\beta = m - nq$ .
7. Celdas de convección helicoidales para  $m = 2$ .

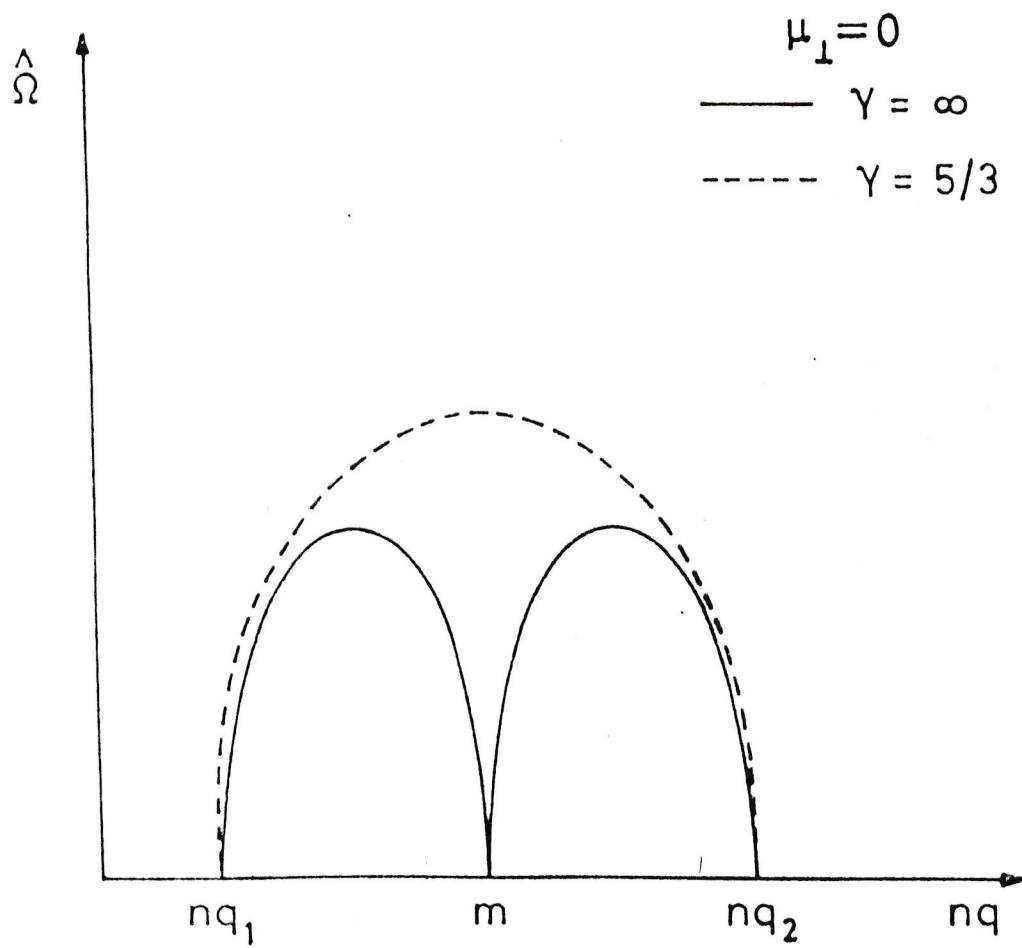


FIG. 1

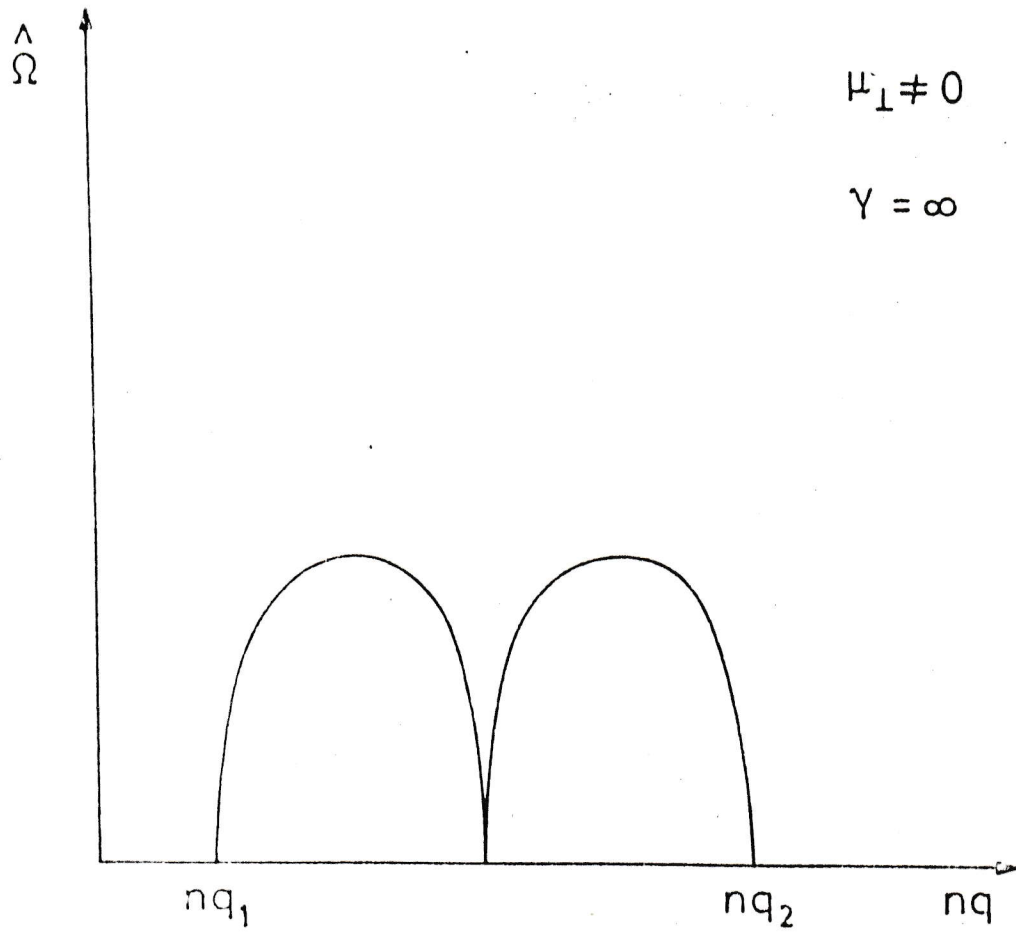


FIG. 2



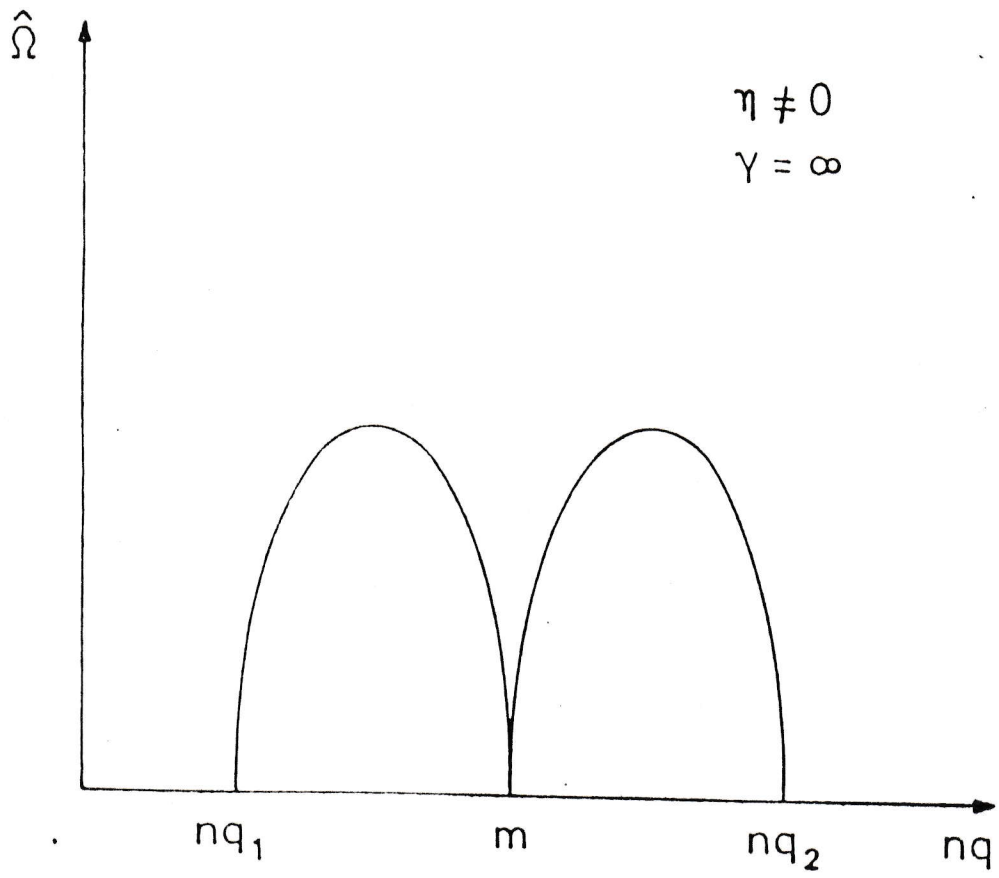


FIG.4



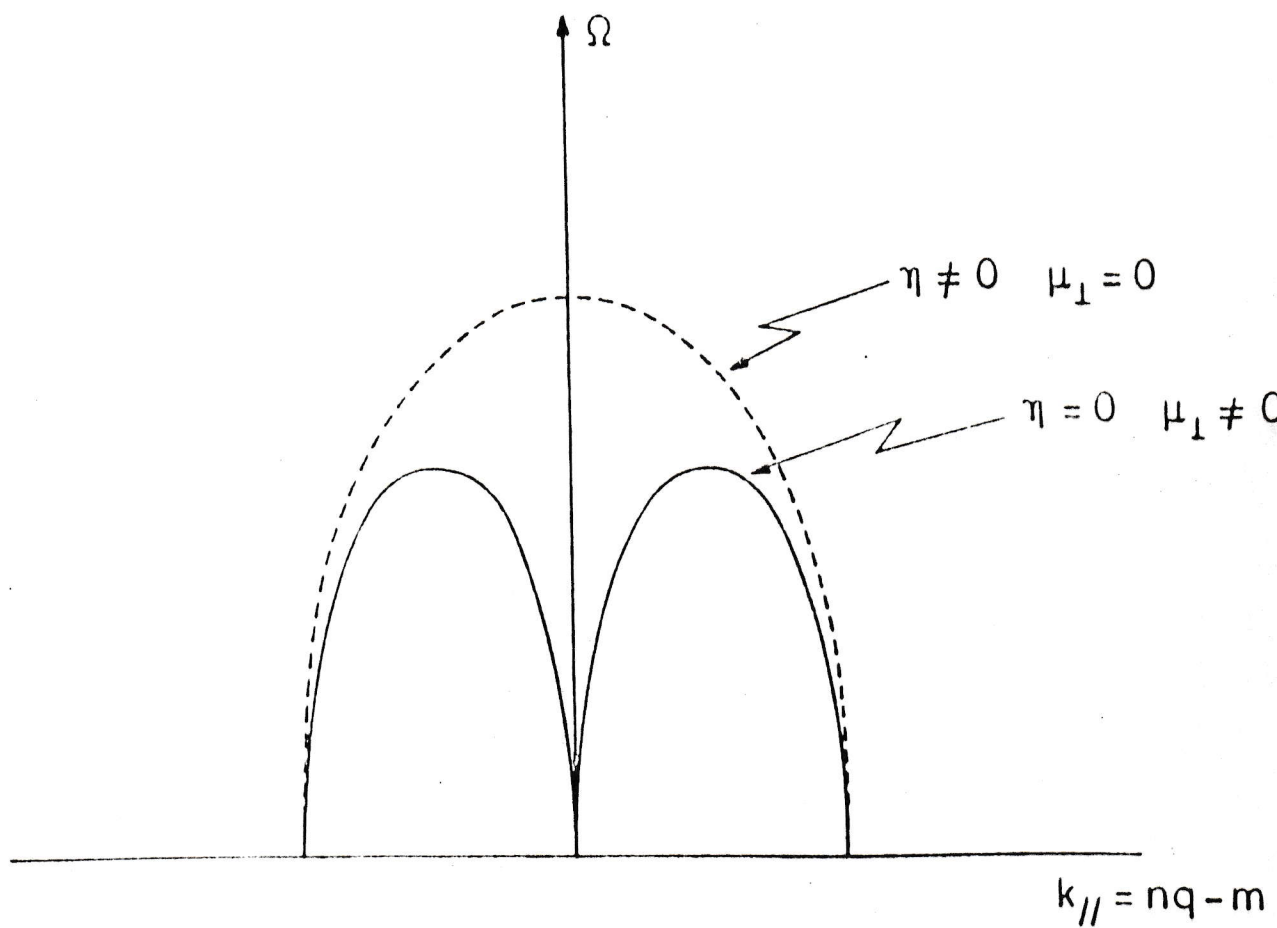


FIG. 5

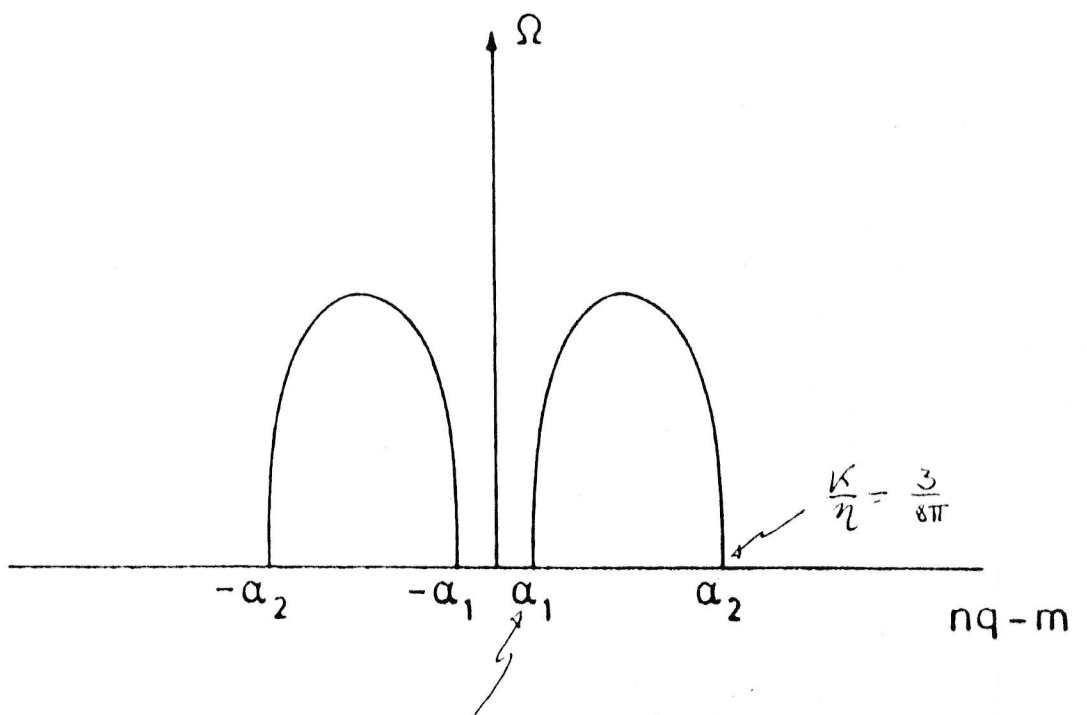


FIG. 6

$$\mu_{\perp} \kappa = \frac{3}{2\pi} \left( \frac{BI}{ak^2} \right)^2$$

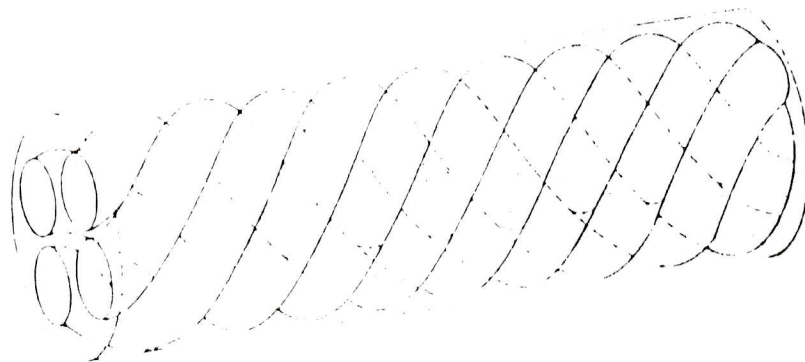


FIG 7

## References

1. A. V. Timofeev, Sov. Phys. Tech. Phys. 33, 776 (1963).
2. A. Simon, Phys. Fluids 11, 1186 (1968).
3. B. Kadomtsev and O. Pogutse, Reviews of Plasma Physics Vol. 5, p. 349, Ed. M. Leontovich, New York (1970).
4. H. Okuda and J. M. Dawson, Phys. Fluids 16, 408 (1973).
5. H. Roberts and J.B. Taylor, Phys. Fluids 8, 315 (1965).
6. H. Wobig, Plasma Phys. 14, 403 (1972).
7. E.K. Mascheke and R. B. Paris, Proceedings of the Sixth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics (Joint Institute for Nuclear Research, Moscow, U.S.S.R.), Vol. 1, p. 205 (1973).
8. R.Y. Dagazian and R. B. Paris, Phys, Fluids 20, 917 (1977).
9. L. Gomberoff and M. Hernández, Phys. Rev. A Rapid Communications 27, 1244 (1983).
10. L. Gomberoff and M. Hernández, Phys. Fluids (to be published)
11. L. Gomberoff, Jour. Plasma Phys. in press.
12. R. J. Tayler, Proc. Phys. Soc. (London) B 70, 1049 (1957)
13. V.D. Shafranov, Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Research, Pergamon Press, New York, Vol. 2, p. 197, (1958).
14. L. Gomberoff and E. K. Maschke, "Field Theory, Quantization and Statistical Physics", Ed. E. Tirapequi, D. Reidel Publishing Company, p. 123 (1981).

15. M. Ohta, Y. Shimomura, and T. Takeda, Nucl. Fusion 12, 271 (1972).
16. T. Takeda, Y. Shimomura, M. Ohta, and M. Yoshikawa, Phys. Fluids 15, 2193 (1972).
17. J.P. Freidberg, Phys. Fluids 13, 1812 (1970).
18. J.P. Goedbloed H.J.L. Hagebeuk, Phys. Fluids 15, 1090 (1972).
19. S. Chandrasekhar, "Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability" Clarendon Press, Oxford (1961).
20. E.K. Mascke and R. B. Paris, Proceedings of the Vth. Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Tokyo 1974, I.A.E.A. Vienna (1975).
21. S.I. Braginskii, Reviews in Plasma Physics Vol. 1, p. 205, M.A. Leontaich (Ed.), Consultant Bureaus, N. Y. (1965)
22. J. D. Jackson Classical Electrodynamics. 1975. Wiley y Sons, Inc.
23. Lecture Notes on PLasma Physics. Plasma Physics Laboratory. Princeton University, New Jersey. H.P. Furth P.H. Rutherford
24. L. Gomberoff y G. Palma, Stationay Convection due viscosity, resistivity and termal conductivity in a cilindrical Plasma.
25. D.C. Montgomery y D.A. Tidman, Plasma Kinetic Theory. (1964) Mc. Graw-Hill, Inc.