UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS Y FARMACEUTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

TRES DEMOSTRACIONES DE UN TEOREMA DE ITO SOBRE GRADOS DE REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO
DE LICENCIADO EN CIENCIAS
CON MENCION EN MATEMATICAS

PROF. GUIA: DR. OSCAR BARRIGA

GUILLERMO GARCIA OTTE

SANTIAGO - CHILE
1983

I N D I C E

SUMMARY

An important result in Finite Group Character Theory is the one of Ito, which refers to degress of irreducible characters of a group, and asserts:

Let G be a finite group, let χ be an irreducible character of G, let H be a normal abelian subgroup of G; then $\chi(1)$ divides $[G: H]$.

The study of this theorem brought us the question of finding its proof without using powerful tools as Number Theory, specially P-adic Numbers. This question was the forerun of the central idea of this thesis which initialy intended a proof using if possible only tools from the classic character theory.

In spite of this idea, during our research of this method, we found two methods wich used by one side Group Cohomology, and on the other side Centralized algebras and Number Theory.

This work is the result of the research and its divided into three basic parts wich contain the diferent aproaches to Ito's Theorem.

The first part contains the classical aproach in the way Larry Dornhof does it, and considers important results on characters as Cliffords, Mackey, etc.

The second aproach is the development of the theory using Proyective Representations, Cohomology and Central Extensions wich we found so interesting that we included it in this work.

The last part, introduces a Centralized Algebra, and studying the elements that conform this algebra, we obtain as Corollary Ito's Theorem.

INTRODUCCION

En Teoría de Caracteres de Grupos Finitos uno de los resultados importantes es el Teorema de Ito, que se refiere al grado de Caracteres irreducibles de un Grupo.

Este Teorema afirma: si χ es un carácter irreducible de un grupo finito G, $H \lhd G$ un subgrupo normal abeliano, entonces $\chi(1)$ divide a $|G: H|$.

Una de las aplicaciones de éste teorema es que permite encontrar el grado de los caracteres y representaciones irreducibles de un grupo cualquiera que contenga grupos normales abelianos.

El estudio de este Teorema nos dejo la inquietud de demostrarlo sin usar herramientas tan poderosas como la Teoría de Números, especificamente Números p-ádicos. Esta inquietud es la precursora de la idea central de este trabajo de Tesis que en principio pretendia demostrar éste Teorema usando en lo posible sólo las herramientas de la Teoría de Grupos o de Caracteres de Grupos Finitos.

A pesar de esto, durante la búsqueda de un método para demostrar este Teorema, nos encontramos ante métodos que utilizan herramientas como Cohomología de Grupos, Algebras Centralizadoras y Teoría de Números.

Este trabajo es el resultado de la búsqueda, y está dividido básicamente en tres partes que contienen distintas formas o caminos para demostrar el Teorema de Ito con todos los elementos necesarios para lograrlo.

La primera parte contiene el camino "clásico" que considera Teoremas de la Teoría de Caracteres como el Teorema Clifford, Teorema de Mackey, etc.

La segunda parte es un desarrollo que encontramos muy interesante puesto que se desarrolla por medio de Representaciones Proyectivas, Cohomologías, Extensiones Centrales, etc. logrando un resultado a través del cual se obtiene como un corolario el Teorema de Ito.

La última parte, introduce un álgebra centralizadora, y a través del estudio de las propiedades de los elementos que conforman una base de ésta álgebra, se obtiene como corolario el Teorema de Ito. Los resultados que se ven en esta parte del trabajo, en parte pueden ser considerados como una extensión del Teorema de Ito, y cabe hacer notar que dificilmente se puede llegar a una extensión mayor puesto que los ejemplos muestran que se trata de un caso extremo.

Estas tres partes están desarrolladas en extenso con el objeto de hacer el trabajo autocontenido. La segunda parte se desarrollo especialmente con todo detalle debido a lo interesante que encontramos es su desarrollo.

A pesar de los esfuerzos realizados por encontrar una forma que no usara estas poderosas herramientas, estos fueron infructuosos debido quizás a que los caminos que se escogieron no fueron los apropiados, o tal vez debido a la profundidad del Teorema mismo.

PARTE I

Esta primera parte es introductoria a la Teoría de Caracteres de Grupos Finitos, en ella se presentan los resultados básicos de la Teoría Clásica, mediante los cuales se llega a demostrar el Teorema de Ito.

En general, se trata de desarrollar este trabajo lo más general posible, pero siempre sobre cuerpos con característica cero, empero ésto, gran parte de los resultados son válidos para cuerpos de característica que no divida al orden del grupo; e incluso, algunos resultados son válidos considerando sólo álgebras conmutativas con unidad sobre un cuerpo cualquiera.

Cabe hacer notar que cada uno de los resultados presentados en esta parte son necesarios para los resultados que le siguen, siendo un desarrollo lineal de la materia expuesta hacia la demostración del Teorema de Ito.

Sea A un álgebra sobre F. Sea M un A-módulo derecho de dimensión finita sobre F. Para $a \in A$ fijo, la aplicación

$$\begin{aligned} T_a : M &\to M \\ m &\to ma \end{aligned}$$

es una transformación lineal. La función

$$\chi_M\colon A \to F$$
$$a \to Tr(T_a)$$

se llama carácter del módulo M.

Si M se descompone como suma directa de A-módulos $M_1, \ldots, M_k$ (M_i irreducibles) entonces

$$\chi_M = \chi_{M_1} + \ldots + \chi_{M_k} .$$

Sea G un grupo finito y F un cuerpo

$$FG = \{\Sigma a_g \cdot g | a_g \in F\}$$

con las operaciones:

$$(\Sigma a_g \cdot g) + (\Sigma b_g \cdot g) = \Sigma(a_g + b_g) \cdot g$$

$$(\Sigma a_g \cdot g) \cdot (\Sigma b_g \cdot g) = \Sigma(\sum_{g'g''=g} a_{g'} \cdot b_{g''}) \cdot g$$

$$a(\Sigma a_g \cdot g) = \Sigma(aa_g) \cdot g$$

$$a,\ a_g,\ b_g \in F, \qquad g,\ g',\ g'' \in G$$

es un álgebra sobre F con base G y naturalmente es un FG-módulo derecho. El carácter de FG se llama carácter de la representación regular de G.

$$\chi_{FG}(g) = \begin{cases} |G| \cdot 1 & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{si } g \neq 1 \end{cases}$$

<u>Definición</u>: Sea k, cuerpo, A un álgebra sobre k, V un A-módulo, K cuerpo que extiende a k

$$V^K =: V \otimes_k K \quad ó \quad V^k =: K \otimes_k V$$

dependiendo si es un módulo derecho o izquierdo.

$V \otimes_k K$ es un $A \otimes_k K$ módulo bajo la acción

$$(v \otimes k)(a \otimes k') = va \otimes kk'$$

ó

$$(a \otimes k)(v \otimes k') = av \otimes kk'$$

dependiendo si es acción a derecha o izquierda.

<u>Definición</u>: Sea k un cuerpo, A un álgebra sobre k, V un A-módulo irreducible (derecho o izquierdo): V es absolutamente irreducible. Si V^K es irreducible para todo cuerpo K que extienda k.

k se llama cuerpo de descomposición para A si todo A-módulo irreducible es absolutamente irreducible.

k es un cuerpo de descomposición para un grupo finito G, si k es un cuerpo de descomposición para kG.

k es un cuerpo de descomposición para kG si y sólo si $End_{kG}(V) = k$ para todo kG-módulo irreducible V.

Si F es un cuerpo de descomposición de FG y car $F = 0$ entonces

$$FG = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k \qquad A_i \cong [F]_{d_i}$$

donde $[F]_{d_i}$ denota el álgebra de matrices sobre F de dimensión $d_i \times d_i$.

Sea I_i el conjunto de vectores fila de $1 \times d_i$ sobre F, entonces I_i es A_i-módulo derecho irreducible, de hecho I_i es un FG-módulo irreducible con

$$I_i A_j = 0 \qquad \text{si} \qquad i \neq j.$$

Los caracteres $\chi_i = \chi_{I_i}$ $i = 1, \ldots, k$ se llaman caracteres irreducibles o caracteres de Frobenius de FG.

Lema: Sea F un cuerpo de descomposición de G, car $F = 0$. Sean $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_h$ las clases de conjugación de G y $h_i = |\mathcal{C}_i|$. Sean $x_1, \ldots, x_h$ representantes de las clases de conjugación y $\chi_1, \ldots, \chi_h$ los caracteres irreducibles de G con $\eta_i = \mathrm{gr}\,\chi_i = \chi_i(1)$. Entonces

$$\omega_{ij} = \frac{h_i \chi_j(x_i)}{\eta_j} \quad \text{son enteros algebraicos } i,j = 1, \ldots, h.$$

Demostración: Sean $C_i = \sum_{x \in \mathcal{C}_i} x \in FG$

Si $g \in G \Rightarrow g^{-1} C_i g = C_i \Rightarrow C_i \in Z(FG)$ y como los C_i son linealmente independientes, estos forman una base del centro, ya que ellos generan FG, en efecto:

Sea $\Sigma a_g g \in Z(FG)$ y $u^{-1} gu = h \quad u, g, h \in G$

$$\Rightarrow u^{-1} (\Sigma a_g g) u = \Sigma a_g \cdot g$$

$$\Rightarrow a_g u^{-1} gu = a_g h = a_h h \Rightarrow a_g = a_h.$$

De aquí que $\exists! c_{ijm}$ tal que $C_i C_j = \sum_{m=1}^{n} c_{ijm} C_m$

Si χ_t es el carácter de la representación T_t, sea V_t el FG-módulo irreducible correspondiente y extendiendo $T_t: G \to \mathrm{End}_{FG}(V_t)$ a todo FG por linealidad entonces:

$$T_t(C_i) T_t(C_j) = \sum_m c_{ijm} T_t(C_m) \qquad (*)$$

Como $C_i \in Z(FG) \Rightarrow$ para todo $x \in FG$:

$$T_t(C_i)\, x\, v = T_t(C_i)(T_t(x)(v)) = T_t(C_i x) v$$

$$= T_t(x C_i) v = T_t(x) T_t(C_i) v$$

luego $T_t(C_i) \in \mathrm{End}_{FG}(V_t) = F$

Luego para algún $\omega_{ij} \in F$: $T_t(C_i) = \omega_{it} I$

Calculando trazas: $h_i \chi_t(x_i) = \omega_{it} n_t$

y (*) $\Rightarrow$ $\omega_{it}\,\omega_{jt} = \sum_m c_{ijm}\,\omega_{mt}$

$\Rightarrow$ $0 = \sum_m c_{ijm}\,\omega_{mt} - \omega_{it}\omega_{jt} = \sum_m (c_{ijm} - \delta_{jm}\,\omega_{it})\omega_{mt}$

Si $\mathcal{C}_1 = \{1\}$ $\Rightarrow$ $h_1 = 1$ y $\omega_{1t} = \dfrac{1\cdot\chi_t(1)}{\eta_t} = 1$

para i, t fijos, el sistema $0 = \sum_m (c_{ijm} - \delta_{jm}\,\omega_{it})\,x_m$ tiene solución no trivial puesto que $\omega_{1t} = 1 \neq 0$.

$\Rightarrow$ $\det(c_{ijm} - \delta_{jm}\,\omega_{it}) = 0$

$\Rightarrow$ ω_{it} es una raíz del polinomio característico de la matriz (c_{ijm}) $j,m = 1, \ldots, h$

$\Rightarrow$ ω_{it} satisface un polinomio mónico con coeficientes enteros

luego es un entero algebraico.

<u>Teorema</u>: Si χ es un carácter irreducible de G sobre $\mathbb{C}$ entonces $\chi(1)$ divide a $|G: Z(G)|$.

<u>Demostración</u>: (Glauberman).

Sea $Z = Z(G)$ y $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ las clases de conjugación de G con $x_i \in \mathcal{C}_i$ y $|\mathcal{C}_i| = h_i$

$\forall i$ y $\forall z \in Z$: $z\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j$ algún j.

Definimos $\mathcal{B}_i \sim \mathcal{B}_j \iff \mathcal{B}_i = z\mathcal{B}_j$ algún $z \in Z$

Si $\mathcal{B}_i \sim \mathcal{B}_j \Rightarrow h_i = h_j$

Supongamos que $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{|Z|}\}, \ldots, \{\mathcal{B}_{(t-1)|Z|}, \ldots, \mathcal{B}_{t|Z|}\}$, son todas las clases de equivalencia con $|Z|$ elementos distintos y el resto de las clases son menores.

Sea ϕ la representación matricial que aporta χ, y supongamos que ϕ es fiel.

Si $j > t|Z|$, entonces $\mathcal{B}_j = z\mathcal{B}_j$ algún $z \in Z - \{0\}$ $\alpha_z I = \phi(z)$ es una matriz escalar, de manera que

$$\chi(x_j) = \chi(zx_j) = Tr(\phi(z)\phi(x_j)) = Tr(\alpha\ \phi(x_j)) = \alpha_z \chi(x_j)$$

ϕ es fiel $\Rightarrow \alpha_z \neq 1$. Luego $\chi(x_j) = 0 \quad \forall j > t|Z|$.

$\forall x \in G$ y $\forall z \in Z$: $|\chi(zx)| = |\alpha_z \chi(x)| = |\alpha_z||\chi(x)| = |\chi(x)|$

Luego $|\chi(x)|$ es constante en las clases de conjugación equivalentes.

De las relaciones de ortogonalidad:

$$|G| = \sum_{x \in G} |\chi(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i |\chi(x_i)|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{t|Z|} h_i |\chi(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^{t} |Z| h_{i|Z|} |\chi(x_{i|Z|})|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{t} |Z| h_{i|Z|}\ \chi(x_{i|Z|}) \overline{\chi(x_{i|Z|})}$$

$$= \sum_{i=1}^{t} |Z| \; \chi(1) \; \omega_i \; \overline{\chi(x_{i|Z|})}$$

y $\qquad \omega_i = \dfrac{h_{i|Z|}\chi(x_{i|Z|})}{\chi(1)}$ es entero algebraico.

Luego $\dfrac{|G:Z|}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^{t} \omega_i \chi(x_{i|Z|})$ es entero algebraico

y como $\dfrac{|G:Z|}{\chi(1)}$ es racional $\Rightarrow$ es número entero.

Corolario: Si G es abeliano entonces todos sus caracteres irreducibles son lineales.

Definición: Sea $H < G$, R anillo conmutativo, W un RH-módulo, $\{x_i\}$ una transversal de H en G.

$$W^G = RG \otimes_{RH} W = \oplus \sum_i x_i \; RH \otimes W = \sum_{x_i \in G/H} x_i \otimes W$$

W^G se llama módulo inducido y es un RG-módulo bajo la acción:

$$x(x_i \otimes \omega) = xx_i \otimes \omega = x_j h \otimes \omega = x_j \otimes h\omega \in x_j \otimes W \quad \forall x \in G$$

Definición: Sea $H < G$, R anillo conmutativo, V un RG-módulo, V_H es la restricción de V a RH.

Teorema: (Clifford).- Sea k un cuerpo, V un kG-módulo irreducible, $N \vartriangleleft G$. Si W es un kN-submódulo de V, como kN-módulo, denotaremos $gW = \{g\omega | \omega \in W\} \subseteq V$.

i) Si $\{0\} \neq W$ es un kN-submódulo de V, entonces $V = \sum_{g \in G} gW$.

Si W es irreducible $\Rightarrow$ gW también lo es, lo que demuestra que V_N es un kN-módulo completamente reducible.

ii) Sean $W_1, \ldots, W_m$ los representantes de las clases de isomorfismos de kN-submódulos irreducibles de V y sea V_i la suma de todos los KN-submódulos de V isomorfos a W_i. Entonces $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$.

iii) Si $g \in G$ entonces $gV_i = V_j$ algún j (i.e. G es transitivo en $\{V_i\}_{i=1}^{m}$

iv) Si $H_1 = \{g \in G \mid gV_1 = V_1\}$, entonces V_1 es irreducible como kH_1-módulo y $V \cong V_1^G = kG \otimes_{kH_1} V_1$.

v) $V_N \cong e(W_1 \oplus \ldots \oplus W_m)$ algún $e \in \mathbb{N}$.

vi) Sea θ un carácter irreducible de G con V como kG-módulo irreducible. Sean χ_i caracteres irreducibles de N con W_i como kN-módulos irreducibles $i = 1, \ldots, m$.

Entonces $\theta_N = e(\chi_1 + \ldots + \chi_m)$ donde

$W_i \cong g_i W_1$ algún $g_i \in G$ y $\chi_i = \chi_1^{g_i}$

donde $\chi_1^{g_i}(x) = \chi_1(x^{g_i}) = \chi_1(g_i^{-1}\, x\, g_i)$.

Demostración:

i) V irreducible como kG-módulo $\Rightarrow$ $V = \sum_{g \in G} gW$. Si $n \in N$

y $g\omega \in W \Rightarrow ng\omega = gg^{-1}ng\omega = gn^{g}\omega \in gW$. Luego gW es un kN-módulo.

Si gW tiene un kN-submódulo propio $W_o \Rightarrow g^{-1}W_o$ es submódulo propio de W ($\rightarrow\leftarrow$).

Luego gW son irreducibles $\Rightarrow V_N$ es completamente reducible.

ii) Sea L un kN-submódulo irreducible de V_i.
Sea $\phi: V_i \to W_i \oplus \ldots \oplus W_i$ un isomorfismo, π_j la j-ésima proyección $(\pi_j \circ \phi)(L) \neq \{0\}$ algún j.

Luego $\pi_j \circ \phi: L \to W_i$ es un isomorfismo V_i.

Hemos visto que los factores de composición de V_i son isomorfos a W_i.

Luego $(V_1 + \ldots + V_{i-1}) \cap V_i = \{0\} \Rightarrow V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$.

iii) Afirmación 1: $V_i = \Sigma\{xW_1 | x \in G, xW_1 \cong W_i\}$ puesto que si $U_i = \Sigma\{xW_1 | x \in G, xW_1 \cong W_i\}$ entonces $U_i \subseteq V_i$ y $V = U_1 + \ldots + U_m$ por i) $\Rightarrow U_i = V_i$ por ii).

Afirmación 2: $xW_1 \cong yW_1 \Rightarrow gxW_1 \cong gyW_1$ puesto que si $\phi: xW_1 \xrightarrow{\sim} yW_1 \Rightarrow g\phi g^{-1}: gxW_1 \to gyW_1$ es un k isomorfismo y para $n \in N$

$$(g\phi g^{-1})(ngx\omega_1) = (g\phi)((g^{-1}ng)x\omega_1) = g(g^{-1}ng)\phi(x\omega_1)$$
$$= n(g\phi g^{-1})(gx\omega_1)$$

Las afirmaciones 1 y 2 $\Rightarrow$ $gV_i \subseteq V_j$ algún V_j.

Si $gV_i \neq V_j$ entonces $\dim V_i < \dim V_j$ pero

$gV_i \leqslant V_j \Rightarrow V_i \leqslant g^{-1} V_j$

Como $gV_i = V_j$ algún j, la irreducibilidad de V como kG-módulo obliga que G sea transitivo en $\{V_1, \ldots, V_m\}$.

iv) De iii) $m = |G:H_1|$ si escogemos $x_1 = 1, \ldots, x_m \in G$ con $x_j V_1 = V_j$ entonces $x_1H_1, \ldots, x_mH_1$ son las clases izquierdas de H_1 en G.

Como $V_1^G = kG \otimes_{kH_1} V_1 = (x_1 \otimes V_1) \oplus \ldots \oplus (x_m \otimes V_1)$ definimos

$$\phi: V_1 \oplus \ldots \oplus V_m \to V_1^G \quad \text{por}$$

$$\Sigma x_i u_i \to \Sigma x_i \otimes u_i \qquad \forall u_i \in V_1 \qquad i = 1, \ldots, m$$

$\forall g \in G$ si $gx_i = x_j h$, $h \in H_1 \Rightarrow gx_iu_i = x_jhu_i$ y $g(x_i \otimes u_1) = x_j \otimes hu_i$ de donde $\phi: V \to V_1^G$ es un kG-isomorfismo.

V_1 es irreducible como kH_1-módulo puesto que si tuviese un submódulo propio $V_1' \Rightarrow (V_1')^G$ sería un kG-submódulo propio de $V_1^G \cong V$ ($\rightarrow\leftarrow$).

v) Cada $W_i \cong x_iW_1 \Rightarrow \dim W_i = \dim W_1$, $V_i = x_iV_1$ luego $\dim V_i = \dim V_1$ y sea $e = \dim V_{1/\dim W_1}$.

vi) Por v) $\theta_N = e(\chi_1 + \ldots + \chi_m)$. Tenemos que ver que $x_i W_1$ aporta el carácter $\chi_1^{x_i}$.

Sea $\{u_1, \ldots, u_t\}$ una k-base de W_1, entonces

$\{x_i u_1, \ldots, x_i u_t\}$ es una base de $x_i W_1$

Si $x \in N$ podemos escribir:

$$(x_i^{-1} x x_i)\, u_j = \sum_{i=1}^{t} \alpha_{ij} u_i \Rightarrow \chi_1(x_i^{-1} x x_i) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_{ii}$$

Vemos que:

$$x \cdot x_i u_j = x_i (x_i^{-1} x x_i u_j) = x_i \sum_{i=1}^{t} \alpha_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{t} \alpha_{ij} x_i u_i$$

Luego el carácter χ_i aportado por $x_i W_1$ satisface:

$$\chi_i(x) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_{ii} = \chi_1(x_i^{-1} x x_i) = \chi_1^{x_i}(x).$$

<u>Definición:</u> Sean χ, χ' caracteres de G. Se define

$$(\chi, \chi')_G =: \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\chi'(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi'(g)}$$

<u>Teorema:</u> (Reciprocidad de Frobenius).- Sean $H < G$, χ un carácter de G, χ_H la restricción de χ a H. Sea ζ un carácter de H y ζ^G la función de clases inducida sobre G i.e.

$$\zeta^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} \dot{\zeta}(tgt^{-1})$$

donde:

$$\dot{\zeta}(h) = \begin{cases} \zeta(h) & \text{si} \quad h \in H \\ 0 & \text{si} \quad h \notin H \end{cases}$$

Entonces $(\chi_H, \zeta)_H = (\chi, \zeta^G)_G$.

Demostración: $(\chi, \zeta^G)_G = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\, \zeta^G(g^{-1})$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} \chi(g)\dot{\zeta}(t^{-1}g^{-1}t)$$

$$= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{g,t \in G} \chi(t^{-1}gt)\zeta(t^{-1}g^{-1}t)$$

$$* \quad = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} \chi_H(g)\zeta(g^{-1})$$

$$= (\chi_H, \zeta)_H$$

* esto puesto que para $h^{-1} \in H$ fijo, el número de soluciones de $t^{-1}g^{-1}t = h^{-1}$ con $t, g \in G$ es $|G|$.

Lema: Sean V y W kG-módulos (car $k = 0$) con caracteres χ y θ. Entonces $V \cong W \iff \chi = \theta$.

Demostración: Supongamos $\chi = \theta$. Sea K la cerradura algebraica de k; $\chi_1, \ldots, \chi_n$ los KG caracteres irreducibles, $\phi_1, \ldots, \phi_t$ los kG caracteres irreducibles.

Si $i \neq j \Rightarrow (\phi_i, \phi_j)_G = 0$.

Sean $V_1, \ldots, V_t$ los kG-módulos irreducibles que aportan $\phi_1, \ldots, \phi_t$ y $U_1, \ldots, U_n$ los KG-módulos irreducibles que aportan $\chi_1, \ldots, \chi_n$.

El KG-módulo V_i^K aportan la misma representación matricial que V_i $\Rightarrow$ aportan el carácter ϕ_i.

V_i^K es completamente reducible, digamos:

$$V_i^K = U_1 \oplus \ldots \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \oplus \ldots \oplus U_n$$

Sea a_{ij} el número de copias de U_j.

Entonces $\phi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\chi_j$

luego

$$(\phi_i, \phi_i)_G = (\Sigma a_{ij}\chi_j, \Sigma a_{i\ell}\chi_\ell) = \sum_{j,\ell} a_{ij}a_{i\ell}\delta_{j\ell} = \sum_j a_{ij}^2 > 0$$

Sea m_i la multiplicidad de V_i en V y n_i la multiplicidad de V_i en W.

Entonces: $(\phi_j, \chi) = (\phi_j, \sum_i m_i\phi_i) = \sum_i m_i(\phi_j, \phi_i)$

$$= m_j(\phi_j, \phi_j)$$

Luego $m_j = (\phi_j, \chi)/(\phi_j, \phi_j)$.

Analogamente $n_j = (\phi_j, \Theta)/(\phi_j, \phi_j)$ pero $\chi = \Theta$, luego $m_j = n_j$ $\forall j$ y como V y W son completamente reducibles: $V \cong W$.

Teorema: (Descomposición de Mackey).- Sean k cuerpo, $H, A < G$, W un kH-módulo libre. Sea $\{x_i\}$ una transversal de H en G.

$G = x_1H \cup \ldots \cup x_tH \qquad t = |G:H|$. Entonces:

i) $\forall x \in G$, $x \otimes W$ es un $k(xHx^{-1})$-módulo con una acción: $xhx^{-1}(x \otimes \omega) = xh \otimes \omega = x \otimes h\omega$.

ii) $\forall (A, H)$-clase doble $D = A \times H$ de G, el k A-módulo $L(D) = (x \otimes W)_{xHx^{-1} \cap A}^{A}$ depende sólo de las clases dobles D y no de la elección de $x \in D$.

iii) $(W^G)_A = \oplus \sum_D L(D)$ donde D recorre las (A, H) clases dobles de G.

<u>Demostración</u>: Supongamos los x_i escogidos de manera que $D = x_1H \cup \ldots \cup x_sH$ y denotemos $M_D = \sum_{i=1}^{s} x_i \otimes W$.
Por su construcción, sabemos que $W^G = \sum_{i=1}^{t} x_i \otimes W$. Luego M_D es un k A-submódulo de W^G, de hecho:

$$(W^G)_A \cong \oplus \sum_D M_D \quad \text{como } k \text{ } A\text{-módulos.}$$

M_D no depende de la elección de $\{x_i\}$ puesto que si

$$x_iH = x_i'H \Rightarrow x_i \otimes W = x_i \otimes HW = x_iH \otimes W = x_i'H \otimes W = x_i' \otimes W.$$

$D = A \times H = x_1H \cup \ldots \cup x_sH$; sea $x_iH = a_ixH \quad a_i \in A$.
Afirmamos que $a_1(xHx^{-1} \cap A), \ldots, a_s(xHx^{-1} \cap A)$ son las clases distintas de $(xHx^{-1} \cap A)$ en A.

Son distintas puesto que:

$$a_i(xHx^{-1} \cap A) = a_j(xHx^{-1} \cap A) \iff a_j^{-1}a_i \in (xHx^{-1} \cap A)$$

$$\iff a_j^{-1}a_i \in xHx^{-1}$$

$$\iff x^{-1}a_j^{-1}a_ix \in H$$

$$\iff a_jxH = a_ixH$$

$$\iff i = j$$

y ellas llenan A puesto que si $a \in A \Rightarrow ax \in D$, $ax = a_ixh$ algún i y algún $h \in H$, $a \in a_ixHx^{-1}$, $a \in (a_ixHx^{-1} \cap a_iA) = a_i(xHx^{-1} \cap A)$.

Ahora $M_D = \sum_{i=1}^{s} x_i\, H \otimes W = \sum_{1}^{s} a_ixH \otimes W = \sum_{1}^{s} a_i(x \otimes W)$

pero $(x \otimes W)_{(xHx^{-1} \cap A)}^{A} = \sum_{1}^{s} a_i(x \otimes W)$

donde A actúa igual que sobre M_D.

Luego $M_D = (x \otimes W)_{(xHx^{-1} \cap A)}^{A}$

<u>Lema</u>: Sean k un cuerpo, $H < G$. W un kH-módulo libre y $x \in G$. Entonces podemos definir un $k(xHx^{-1})$-módulo W^x llamado un conjugado de W como $W^x = W$. pero la acción como $xhx^{-1}\omega = h\omega$, Entonces:

i) $W^x \cong x \otimes W$ como $k(xHx^{-1})$-módulos.

ii) Si θ es el carácter aportado por W entonces W^x aporta el carácter θ^x donde $\theta^x(y) = \theta(y^x)$ $\forall y \in xHx^{-1}$.

iii) Si $x, y \in G$ y $H \triangleleft G$ entonces $(W^x)^y \cong W^{yx}$. En particular si $I(W) = \{g \in G | W^g \cong W\}$ entonces $I(\omega) \supset H$ es un subgrupo de G llamado "grupo de inercia de W".

Demostración: Es claro que W^x es un $k(xHx^{-1})$-módulo.

i) Sea $\{\omega_1, \ldots, \omega_t\}$ una base de W

$\Rightarrow$ $\{x \otimes \omega_1, \ldots, x \otimes \omega_t\}$ es una base de $x \otimes W$.

Si $h \in H$, sea $h\omega_j = \sum_i \alpha_{ij}\omega_i$ $\Rightarrow$ $xhx^{-1}\omega_j = h\omega_j = \sum_i \alpha_{ij}\omega_i$

y $xhx^{-1}(x \otimes \omega_j) = xh \otimes \omega_j = x \otimes h\omega_j = x \otimes (\Sigma\alpha_{ij}\omega_i) = \Sigma\alpha_{ij}(x \otimes \omega_i)$

Luego $W^x \cong x \otimes W$.

ii) Sea $y = xhx^{-1}$, $h \in H$; $\theta^x(y) = \Sigma\alpha_{ii}$ y $\theta(h) = \theta(y^x) = \Sigma\alpha_{ii}$.

iii) Por i), sólo falta ver que $yx \otimes W \cong y \otimes (x \otimes W)$ para $h \in H$ cualquiera sea $h = yxh'x^{-1}y^{-1}$, $h = yh''y^{-1}$, $h'' = xh'''x^{-1}$

Luego $h''' = x^{-1}h''x = x^{-1}y^{-1}hyx = h'$

y $h(yx \otimes \omega) = yxh'x^{-1}y^{-1}(yx \otimes \omega) = yxh' \otimes \omega = yx \otimes h'\omega$

mientras que $h(y \otimes (x \otimes \omega)) = yh''y^{-1}(y \otimes (x \otimes \omega)) = yh'' \otimes (x \otimes \omega)$

$$= y \otimes h''(x \otimes \omega) = y \otimes xh'''x^{-1}(x \otimes \omega)$$

$$= y \otimes (xh''' \otimes \omega) = y \otimes (x \otimes h''' \omega).$$

Teorema: Sea $H \trianglelefteq G$, k cuerpo, W un kH-módulo libre y sea $I(W) = \{g \in G | W^g \cong W\}$.

Sea $G = y_1 I(w) \cup \ldots \cup y_t I(w)$ con $y_1 = 1$.

Entonces $(W^G)_H \cong |I(w):H| (\oplus \sum_{i=1}^{t} W^{y_i})$.

Demostración: Sea $I(W) = x_1 H \cup \ldots \cup x_m H$, $m = |I(W):H|$, $x_1 = 1$

Luego $W^{x_j} \cong W$ $\forall j$ y $G = \bigcup_{i,j} y_i x_j H$.

Por el teorema de descomposición de Mackey con $A = H$ tenemos:

$$(W^G)_H = \oplus \sum_{i,j} y_i x_j \otimes W \cong \oplus \sum_{i,j} W^{y_i x_j} \cong \oplus \sum_{i,j} W^{x_j y_i}$$

$$\cong m(\oplus \sum_{i} W^{y_i})$$

NOTA: El resultado para caracteres es equivalente debido a resultados anteriores.

Lema: Sea k un cuerpo de descomposición de G y de todos sus subgrupos (car $k = 0$). Sean $A, H < G$, θ un carácter de H y η un carácter de A. Sean $Ax_1H, \ldots, Ax_mH$ todas las (A, H)-clases dobles de G.

Sean $K_i = x_iHx_i^{-1} \cap A \quad 1 \leqslant i \leqslant m$. Entonces:

$$(\theta^G, \eta^G)_G = \sum_{i=1}^{m} (\theta^{x_i}{}_{K_i}\ \eta_{K_i})_{K_i}$$

Demostración: Por resultados anteriores $(\theta^G)_A = \sum_{i=1}^{m} (\theta^{x_i}{}_{K_i})^A$ y usando dos veces el teorema de reciprocidad de Frobenius:

$$(\theta^G, \eta^G)_G = ((\theta^G)_A, \eta)_A = \sum_{i=1}^{m} ((\theta^{x_i}{}_{K_i})^A, \eta)_A = \sum_{i=1}^{m} (\theta^{x_i}{}_{K_i}, \eta_{K_i})_{K_i}$$

Lema: Sea k un cuerpo de descomposición de G y de todos sus subgrupos (car $k = 0$). Sea χ un carácter irreducible de G, $H \trianglelefteq G$, θ un carácter irreducible de H tal que $\theta \subset \chi_H$ (i.e. θ esté contenido en la descomposición de χ_H en caracteres irreducibles). Entonces hay un único carácter irreducible ξ de $I(\theta)$ tal que $\theta \subset \xi_H$ y $\xi \subset \chi_{I(\theta)}$. Mas aún $\xi^G = \chi$.

Demostración: Existencia. Sea $\chi_{I(\theta)} = \Sigma n_i \xi_i$, ξ_i irreducibles.

Luego $\chi_H = \Sigma n_i \xi_{i_H}$.

Tomamos $\xi = \xi_i$ algún i con $\theta \subset \xi_{i_H}$.

Mostraremos ahora que $\chi = \xi^G$. Por reciprocidad de Frobenius: $(\xi^G, \chi)_G > 0$, luego basta mostrar que ξ^G es irreducible.

Sean $I(\theta)x_1I(\theta), \ldots, I(\theta)x_mI(\theta)$, $x_1 = 1$ todas las $(I(\theta), I(\theta))$-clases dobles de G y denotemos por

$$k_i = (x_iI(\theta)x_i^{-1} \cap I(\theta)) \supset H$$

Luego

$$(\xi^G, \xi^G)_G = \sum_i (\xi^{x_i}{}_{k_i}, \xi_{k_i})_{k_i}, \qquad k_1 = I(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad (\xi^{x_i}{}_{k_1}, \xi_{k_1}) = 1.$$

Si $i \neq 1 \Rightarrow x_i \notin I(\theta) \Rightarrow \theta^{x_i} \neq \theta$, si $G = I(\theta)$ $\Rightarrow \xi_H = e\theta$, $e \in \mathbb{N}$. (Teorema de Clifford con $G = I(\theta)$)

Luego

$$\xi^{x_i}{}_H = e\theta^{x_i} \quad y \quad (\xi^{x_i}{}_H, \xi_H) = e^2(\theta, \theta^{x_i})_H = 0$$

Si $(\xi^{x_i}{}_{k_i}, \xi_{k_i})_{k_i} \neq 0 \Rightarrow$ existe carácter irreducible τ de k_i con $\tau \subset \xi^{x_i}{}_{k_i}$, $\tau \subset \xi_{k_i} \Rightarrow \tau \subset \xi^{x_i}{}_H$, $\tau \subset \xi_H$ $\Rightarrow (\xi^{x_i}{}_H, \xi_H) \neq 0$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

Luego $(\xi^{x_i}{}_{k_i}, \xi_{k_i})_{k_i} = 0 \quad \forall i > 0$.

Luego es irreducible $\Rightarrow \chi = \xi^G$.

Por el teorema de Clifford: $\chi_H = (\xi^G)_H = e_o \sum_i \theta^{y_i}$, $e_o \in \mathbb{N}$ y $\{\theta^{y_i}\}$ es el conjunto de conjugados de θ en G.

Logicamente $|\{\theta^{y_i}\}| = |G:I(\theta)|$. Luego

$\chi(1) = e_o|G:I(\theta)|\theta(1)$ y por otra parte $\chi(1) = |G:I(\theta)|\xi(1)$

Luego $(\chi_H, \theta)_H = e_o = \xi(1)/\theta(1)$; $\xi_H = e\theta$, $e \in \mathbb{N}$

$e = (\xi_H, \theta)_H = e_o$

Luego $\chi_{I(\theta)} - \xi$ satisface $(\theta, (\chi_{I(\theta)} - \xi)_H)_H = e_o - e = 0$.

$\Rightarrow \theta \not\subset (\chi_{I(\theta)} - \xi)_H$ y ξ es única.

<u>Lema</u>: Sean $T: G \to M_t(\mathbb{C})$ una representación que aporta el carácter χ. Entonces $\forall x \in G$: $|\chi(x)| \leqslant t$ y la igualdad vale solo si $T(x) = \alpha I$, algún $\alpha \in \mathbb{C}$.

<u>Demostración</u>: Sean $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ raíces características de $T(x)$. Luego $\chi(x) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t$ y $|\chi(x)| = |\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t| \leqslant |\varepsilon_1| + \ldots + |\varepsilon_t| = t$ y la igualdad se cumple solo si $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_t = \alpha$.

Si la igualdad se cumple, la matriz $\phi(x)$ generada por $T(x)$ satisface la ecuación característica $(x - \alpha)^t = 0$ y también $x^{|G|} = 1$.

Luego $\phi(x)$ es un cero de M.C.D. $\{(x-\alpha)^t, x^{|G|} - 1\} = x - \alpha$.

Teorema: (Ito).- Sea χ un carácter irreducible de G, y sea $H \trianglelefteq G$ abeliano. Entonces $\chi(1) \mid |G:H|$.

Demostración: Por inducción sobre $|G|$. Si χ no es fiel, entonces χ es un carácter de $G/\mathrm{Ker}\ \chi$ y por inducción $\chi(1) \mid |G/\mathrm{Ker}\ \chi : H/H \cap \mathrm{Ker}\ \chi|$.

Luego $\chi(1)$ divide a $\dfrac{|G:\mathrm{Ker}\ \chi|}{|H:H \cap \mathrm{Ker}\ \chi|} = \dfrac{|G:H|}{|\mathrm{Ker}\ \chi : H \cap \mathrm{Ker}\ \chi|}$

y listo si χ no es fiel.

Supongamos que χ es fiel, y sea λ un carácter irreducible de H con $(\chi_H, \lambda)_H > 0$. Como H es abeliano $\Rightarrow$ λ es lineal.

Caso 1: Si $I(\lambda) \neq G$, entonces existe un carácter irreducible ξ de $I(\lambda)$ con $\xi^G = \chi$ y $\lambda \subset \xi_H$.

Por inducción $\xi(1) \mid |I(\lambda):H|$ y $\chi(1) = |G:I(\lambda)|\xi(1)$ $\Rightarrow$ $\chi(1) \mid |G:H|$.

Caso 2: Si $I(\lambda) = G$, entonces por el teorema de Clifford $\chi_H = e\lambda$ algún $e \in \mathbb{N}$, $\lambda(1) = 1$, luego $\chi(1) = e$.

Si $h \in H: |\chi(h)| = e|\lambda(h)| = e = \chi(1)$.

Luego, por el lema anterior y el hecho que χ es fiel, la representación matricial que aporta a χ consiste de matrices escalares en H $\Rightarrow$ $H < Z(G)$.

Luego por resultados anteriores $\chi(1) \mid |G:H|$.

PARTE II

<u>Definición</u>: Sea G grupo, F un cuerpo. Sea $\mathfrak{X}: G \to GL(n,F)$ tal que $\forall g, h \in G$ existe $\alpha(g, h) \in F$ tal que

$$\mathfrak{X}(g)\ \mathfrak{X}(h) = \alpha(g,h)\mathfrak{X}(gh)$$

Entonces $\mathfrak{X}$ es una F-representación proyectiva de G. Su grado es n y la función $\alpha: G \times G \to F$ es el conjunto de factores asociado de $\mathfrak{X}$.

Nótese que α tiene valores no nulos, y está únicamente determinado por $\mathfrak{X}$ debido a que las matrices $\mathfrak{X}(g)$ son no-singulares.

Sea $Z(n, F) = Z(GL(n, F)) \subset GL(n, F)$ el grupo de matrices escalares.

$PGL(n, F) = GL(n, F)/Z(n, F)$ es el grupo proyectivo lineal general.

Si $\mathfrak{X}$ es una F-representación proyectiva de G de grado n, entonces la composición de $\mathfrak{X}$ con el homomorfismo canónico $GL(n, F) \to PGL(n, F)$ es un homomorfismo $G \to PGL(n,F)$.

Analogamente si $\pi: G \to PGL(n, F)$ es un homomorfismo, podemos definir una representación proyectiva $\mathfrak{X}$ de G definiendo $\pi(g)$ = (algún elemento de la clase $\pi(g)$ de $Z(n, F)$ en $GL(n, F)$).

Definición: Sea A un grupo abeliano (incluso infinito), G un grupo. Un conjunto de A-factores de G es una función $\alpha: G \times G \to A$ tal que:

$$\alpha(xy, z)\alpha(x, y) = \alpha(x, yz)\alpha(y, z) \qquad \forall\, x,y,z \in G$$

Observación: F-factores de definición anterior.

Definición: Sea G un grupo finito, F cuerpo, α conjunto de F^x-factores de G. Sea $F^\alpha[G]$ el F-espacio vectorial con base $\{\overline{g} \mid g \in G\}$ donde $\overline{g} \cdot \overline{h} = \alpha(g, h)\,\overline{gh}$ y extendemos via linealidad.

El álgebra $F^\alpha[G]$ es el "álgebra de grupo torcida" con respecto a α.

Lema: Sea α un conjunto de A-factores de G entonces

$$\alpha(1, x) = \alpha(1, 1) = \alpha(x, 1) \qquad \forall x \in G.$$

Demostración: $\alpha(1 \cdot 1, x)\alpha(1, 1) = \alpha(1, 1 \cdot x)\alpha(1, x)$ cancelando $\alpha(1, 1) = \alpha(1, x)$.

Sea α un conjunto de F^x-factores de G y $\nu = \alpha(1, 1)^{-1} \in F$

$$(\nu\overline{1})\overline{g} = \alpha(1, g)\,\nu\overline{g} = \alpha(1,1)\,\nu\overline{g} = \overline{g}$$

Luego $\nu\overline{I}$ es el elemento unidad de $F^{\alpha}[G]$

$$\overline{g}\overline{h} = \alpha(g,h)\ \overline{gh} = \nu\overline{I} \Rightarrow (\overline{g})^{-1} = \frac{1}{\alpha(g,\ g^{-1})}\ \nu\overline{g^{-1}}$$

Sea ahora η una representación del álgebra $F^{\alpha}[G]$. Definimos $\mathfrak{X}(g) = \eta(\overline{g})$, entonces $\mathfrak{X}(g)$ es no-singular, y

$$\mathfrak{X}(g)\mathfrak{X}(h) = \eta(\overline{g})\eta(\overline{h}) = \eta(\overline{g}\overline{h}) = \eta(\alpha(g,h)\ \overline{gh}) = \alpha(g,h)\eta(\overline{gh})$$

$$= \alpha(g,h)\ \mathfrak{X}(gh)$$

Analogamente si $\mathfrak{X}$ es una F-representación proyectiva de G con conjunto de factores α, podemos definir una representación η de $F^{\alpha}[G]$ poniendo $\eta(\overline{g}) = \mathfrak{X}(g)$ y extendemos por linealidad.

En otras palabras hay una correspondencia 1-1 entre las F-representaciones proyectivas de G con conjunto de factores α y las representaciones del álgebra de grupo torcida $F^{\alpha}[G]$.

El conjunto de A-factores de G forman un grupo bajo la multiplicación punto a punto.

En el lenguaje de cohomología de grupos, este grupo se denota por $Z^2(G, A)$: el grupo de 2-cociclos.

Si $\mu: G \to A$ es una función arbitraria, podemos definir:

$$\delta(\mu):\ G \times G \to A$$
$$(g,h) \to \mu(g)\mu(h)\mu(gh)^{-1}$$

es fácil probar que $\delta(\mu)$ es un 2-cociclo.

Nótese que δ es un homomorfismo del grupo de funciones A-valuadas sobre G en $Z^2(G, A)$. La imagen de δ es el subgrupo $B^2(G, A) \subseteq Z^2(G, A)$ que es el grupo de 2-cobordes, $H^2(G, A) = Z^2(G, A)/B^2(G, A)$ es el segundo grupo de cohomología de G con valores en A.

Definición: Dos 2-cociclos de G son equivalentes si son congruentes mod $B^2(G, A)$. Así, $H^2(G, A)$ es el conjunto de clases de equivalencias de 2-cociclos de G.

Si $\mathfrak{X}$ es una F-representación proyectiva de G con 2-cociclo α y $\mu: G \to F^x$ una función cualquiera, definimos: $\eta = \mathfrak{X}\mu$ por $\eta(g) = \mathfrak{X}(g)\mu(g)$.

Es fácil probar que η es una representación proyectiva de G con 2-cociclo $\beta = \alpha\delta(\mu) \therefore \mathfrak{X}$ y η tienen 2-cociclos equivalentes.

Definición: Si $\mathfrak{X}$ y η son F-representaciones proyectivas de G, decimos que $\mathfrak{X}$ y η son equivalentes si η es similar a $\mathfrak{X}\mu$ para alguna función $\mu : G \to F^x$. Es fácil ver que se define una relación de equivalencia que preserva irreducibilidad.

Teorema: Sea $N \trianglelefteq G$ y sea $\theta \in \mathrm{Irr}\, N$ invariante en G. Sea η la representación que aporta a θ y sea $\mathfrak{X}$ una representación proyectiva de G tal que

1) $\mathfrak{X}(n) = \eta(n) \qquad \forall n \in N$

2) $\mathfrak{X}(ng) = \mathfrak{X}(n)\mathfrak{X}(g) \qquad \forall n \in N, \quad g \in G$

3) $\mathfrak{X}(gn) = \mathfrak{X}(g)\mathfrak{X}(n) \qquad \forall n \in N, \quad g \in G$

Sea α el 2-cociclo de $\mathfrak{X}$. Definamos $\beta \in Z^2(G/N, \mathbb{C}^x)$ como $\beta(gN, hN) = \alpha(g, h)$.

Entonces β está bien definida y su imagen $\overline{\beta} \in H^2(G/N, \mathbb{C}^x)$ depende sólo de θ. Además θ es extendible a G si y solo si $\overline{\beta} = 1$.

<u>Demostración</u>: Para $n, m \in N$. $g, h \in G$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\alpha(gn, hm)\,\mathfrak{X}(gnhm) &= \mathfrak{X}(gn)\,\mathfrak{X}(hm) \\
&= \mathfrak{X}(g)\,\mathfrak{X}(nhm) \\
&= \mathfrak{X}(g)\,\mathfrak{X}(hn\,{}^{h}m) \\
&= \mathfrak{X}(g)\,\mathfrak{X}(h)\mathfrak{X}(n\,{}^{h}m) \\
&= \alpha(g,h)\,\mathfrak{X}(gh)\,\mathfrak{X}(n\,{}^{h}m) \\
&= \alpha(g,h)\,\mathfrak{X}(ghn\,{}^{h}m) \\
&= \alpha(g,h)\,\mathfrak{X}(gnhm)
\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{X}(gnhm)$ es no singular se tiene que $\alpha(gn, hm) = \alpha(g, h)$ y luego β esta bien definida. Si escogemos $\mathfrak{X}_o$ en lugar de $\mathfrak{X}$, tenemos $\mathfrak{X}_o = \mathfrak{X}\mu$ con $\mu : G \to \mathbb{C}^x$

constante en las clases de N, de manera que podemos definir $\nu(gN) = \mu(g)$.

Si $\mathfrak{X}_o$ tiene 2-cociclo α_o, entonces

$\alpha_o(g,h) = \alpha(g,h)\mu(g)\mu(h)\mu(gh)^{-1} = \beta(gN,hN)\nu(gN)\nu(hN)\nu(ghN)^{-1}$

luego $\overline{\beta}$ es independiente de la elección de $\mathfrak{X}$.

Si se hubiera escogido $P\eta P^{-1}$ en lugar de η, podemos reemplazar $\mathfrak{X}$ por $P\mathfrak{X}P^{-1}$, lo que deja α, β y $\overline{\beta}$ sin cambios; de aquí, $\overline{\beta}$ queda determinada únicamente al ser dado θ.

Si θ es extendible a G, podemos escoger $\mathfrak{X}$ y η de manera que $\mathfrak{X}$ sea una representación $\therefore$ $\alpha = 1$ y luego $\overline{\beta} = 1$.

A la inversa, si $\overline{\beta} = 1$ $\exists$ $\nu: G/N \to \mathbb{C}$ tal que

$$\beta(gN, hN) = \nu(gN)\nu(hN)\nu(ghN)^{-1}$$

Definimos $\mu: G \to \mathbb{C}^{x}$ por $\mu(g) = \nu(gN)$ y $\mathfrak{X}_o(g) = \mathfrak{X}(g)\mu(g)^{-1}$ de manera que $\mathfrak{X}_o$ es una representación proyectiva de G con conjunto de factores

$$\alpha_o(g,h) = \alpha(g,h)\mu(g)^{-1}\mu(h)^{-1}\mu(gh) = 1$$

y luego $\mathfrak{X}_o$ es una representación de G.

Más aún como $\mathfrak{X}(1) = \eta(1) = I$, tenemos $1 = \alpha(1,1) = \mu(1)\mu(1)\mu(1)^{-1} = \mu(1)$. Luego $\mu(n) = \nu(1) = \mu(1) = 1$ $\forall n \in N$ y $\mathfrak{X}_o(n) = \mathfrak{X}(n)\,\mu(n)^{-1} = \eta(n)$.

Luego $\mathfrak{X}_o$ es una extensión de η.

Definición: Una extensión central de un grupo G es un grupo Γ(posiblemente infinito) junto con un epimorfismo π de Γ sobre G tal que

$$\operatorname{Ker} \pi \subseteq Z(\Gamma)$$

Lema: Sea (Γ, π) una extensión central de G con $\operatorname{Ker}\pi = A$. Sea X una transversal de A en Γ y escribamos

$$X = \{x_g \mid g \in G\} \quad \text{donde} \quad \pi(x_g) = g.$$

Definamos α: $G \times G \to A$ por $x_g x_h = \alpha(g, h)x_{gh}$. Entonces $\alpha \in Z^2(G, A)$. Más aún, la clase de equivalencia de α es independiente de la elección de X.

Demostración: α es un conjunto de A-factores puesto que:

$$x_g x_h x_k = x_g(x_h x_k) = x_g(\alpha(h,k)x_{hk}) = \alpha(g,hk)\alpha(h,k)x_{ghk}$$

$$= (x_g x_h)x_k = (\alpha(g\ h)x_{gh})x_k = \alpha(gh,k)\alpha(g,h)x_{ghk}$$

Si $Y = \{y_g\}$ es otra transversal entonces $y_g = \mu(g)x_g$ algún $\mu(g) \in A$, y

$$y_g y_h = \mu(g)\mu(h)x_g x_h = \mu(g)\mu(h)\alpha(g,h)x_{gh} = \mu(g)\mu(h)\mu(gh)^{-1}\alpha(g,h)y_{gh}.$$

Si A y U son grupos abelianos y $\lambda \in \operatorname{Hom}(A,U)$ $\forall\alpha \in Z^2(G,A)$

definimos $\lambda(\alpha)$ por $\lambda(\alpha)(g,h) = \lambda(\alpha(g, h))$. Es fácil probar que $\lambda(\alpha) \in Z^2(G, U)$.

<u>Corolario</u>: Sea (Γ, π) una extensión central finita de G y sean A, $X = \{x_g\}$ y α como en el lema anterior. Sea η una F-representación (ordinaria) de Γ tal que η_A sea una representación escalar: λI, algún $\lambda \in \mathrm{Hom}(A, F^x)$. Definamos $\mathfrak{X}(g) = \eta(x_g)$ $\forall g \in G$. Entonces $\mathfrak{X}$ es una F-representación proyectiva de G con conjunto de factores $\lambda(\alpha)$. Más aún, $\eta(y) = \mathfrak{X}(\pi(y))\mu(y)$ $\forall y \in \Gamma$ donde $\mu: \Gamma \to F^x$ es la función definida por $\mu(y) = \lambda(yx^{-1}_{\pi(y)})$. Además, $\mathfrak{X}$ es irreducible si y solo si η lo es y la clase de equivalencia de $\mathfrak{X}$ es independiente de la elección de X.

<u>Demostración</u>: Tenemos:

$$\mathfrak{X}(g)\mathfrak{X}(h) = \eta(x_g)\eta(x_h) = \eta(\alpha(g, h)x_{gh})$$

$$= \lambda(\alpha(g, h))\mathfrak{X}(gh)$$

y $\mathfrak{X}$ es una representación proyectiva con 2-cocíclo $\lambda(\alpha)$.

Si $y \in \Gamma$: $y = ax_g$ donde $g = \pi(y)$ y $a \in A$ luego $\eta(y) = \mathfrak{X}(g)\lambda(a) = \mathfrak{X}(\pi(y))\lambda(yx^{-1}_{\pi(y)})$. En particular $\mathfrak{X}(G)$ y $\eta(\Gamma)$ generan el mismo espacio vectorial de matrices sobre F. Luego tenemos la dependencia de irreducibilidad.

Finalmente, si $\mathfrak{X}_1$ es la representación proyectiva determinada por otra elección de transversal, tendriamos:

$$\mathfrak{X}_1(\pi(y)) = \eta(y)\mu_1(y)^{-1} = \mathfrak{X}(\pi(y))\mu(y)\mu_1(y)^{-1}$$

luego $\mathfrak{X}_1$ y $\mathfrak{X}$ son equivalentes.

Nótese que si η es un $\mathbb{C}$-representación irreducible (ó F-representación absolutamente irreducible), entonces la condición que η_A sea matriz escalar es automáticamente satisfecha.

<u>Definición</u>: Sea (Γ, π) una extensión central finita de G. Sea $\mathfrak{X}$ una $\mathbb{C}$-representación proyectiva de G. Decimos que $\mathfrak{X}$ se puede levantar a Γ si existe una representación (ordinaria) η de Γ y una función $\mu\colon \Gamma \to \mathbb{C}^{\times}$ tal que
$\eta(x) = \mathfrak{X}(\pi(x))\mu(x) \quad \forall x \in \Gamma$.

Se dice que (Γ, π) tiene la propiedad de levantamiento proyectivo si toda $\mathbb{C}$-representación proyectiva de G puede ser levantada a Γ.

Nótese que si $\mathfrak{X}$ es levantado a la representación η de Γ, entonces η_A es necesariamente una representación escalar; y por el corolario anterior, podemos construir una representación proyectiva $\mathfrak{X}_1$ de G escogiendo representantes para Ker π en Γ. Entonces, $\mathfrak{X}_1(\pi(x))\mu_1(x) = \eta(x)=\mathfrak{X}(\pi(x))\mu(x)$, luego $\mathfrak{X}_1$ es equivalente $\mathfrak{X}$.

Si (Γ, π) tiene la propiedad de levantamiento proyectivo para G; entonces, todas las $\mathbb{C}$-representaciones proyectivas de G son equivalentes a las obtenidas vía la construcción del corolario.

Definición: El multiplicador de Schur de G es el grupo $M(G) = H^2(G, \mathbb{C}^x)$.

Para un grupo finito A, denotaremos: $\hat{A} = \mathrm{Irr}\ A$. Si (Γ, π) es una extensión central de G con $\mathrm{Ker}\ \pi = A$ finito, construimos un homomorfismo $\eta: \hat{A} \to M(G)$.

Sea X una transversal de A en Γ y $X = \{x_g | g \in G\}$ donde $\pi(x_g) = g$. Sea $\alpha \in Z^2(G, A)$ definido por $x_g x_h = \alpha(g, h)\, x_{gh}$ para $\lambda \in \hat{A}$ definimos $\eta(\lambda) = \overline{\lambda(\alpha)}$ donde $\lambda(\alpha) \in Z^2(G, \mathbb{C}^x)$ está definido como $\lambda(\alpha)(g,h) = \lambda(\alpha(g,h))$ y la barra denota el epimorfismo canónico $Z^2(G, \mathbb{C}^x) \to H^2(G, \mathbb{C}^x) = M(G)$. Notemos que η es un homomorfismo.

La función $\eta: \hat{A} \to M(G)$ es independiente de la elección de X. Esto, puesto que otra elección nos llevaría a un conjunto de factores $\beta \in Z^2(G, A)$, que es equivalente a α.

Como $\alpha\beta^{-1} \in B^2(G, A)$ se tiene que

$$\lambda(\alpha)\lambda(\beta)^{-1} = \lambda(\alpha\beta^{-1}) \in B^2(G, \mathbb{C}^x)$$

luego $\lambda(\alpha)$ y $\lambda(\beta)$ son equivalentes en $Z^2(G, \mathbb{C}^x)$ y $\overline{\lambda(\alpha)} = \overline{\lambda(\beta)}$.

Este homomorfismo único $\eta : \hat{A} \to M(G)$ se denomina función estandar.

Teorema: Sea (Γ, π) una extensión central finita de G, y sea η la función estandar asociada. Sea $\mathfrak{X}$ una $\mathbb{C}$-representación proyectiva de G con 2-cociclo γ. Entonces $\mathfrak{X}$ puede ser levantada a Γ si y solo si $\bar{\gamma} \subseteq Im(\eta)$.

En particular, (Γ, η) tiene la propiedad de levantamiento proyectivo si y solo si η es sobre.

Demostración: Sea $A = \ker \pi$ y $X = \{X_g | g \in G, \pi(X_g) = g\}$ transversal de A en Γ. Pongamos $X_g X_h = \alpha(g, h)\ X_{gh}$ de manera que $\alpha \in Z^2(G, A)$. Supongamos que $\bar{\gamma} = \eta(\lambda)$ algún $\lambda \in \hat{A}$. Entonces $\lambda(\alpha)$ es equivalente a γ y

$$\lambda(\alpha(g,h)) = \gamma(g,h)\mu(g)\mu(h)\mu(gh)^{-1} \quad \text{algún} \quad \mu : G \to \mathbb{C}^{x}$$

Definamos ϕ en Γ por $\phi(aX_g) = \lambda(a)\mathfrak{X}(g)\mu(g)$

$$\begin{aligned}\phi(X_g)\ \phi(X_h) &= \mathfrak{X}(g)\mathfrak{X}(h)\mu(g)\mu(h) = \gamma(g,h)\mathfrak{X}(gh)\mu(g)\mu(h)\\ &= \lambda(\alpha(g,h))\mathfrak{X}(gh)\mu(gh) = \phi(\alpha(g,h)X_{gh})\\ &= \phi(X_g X_h)\end{aligned}$$

Como $\phi(aX_g) = \lambda(a)\ \phi(X_g)$ entonces ϕ es una representación; luego ϕ levanta $\mathfrak{X}$ a Γ.

Inversamente si $\mathfrak{X}$ puede levantarse, tenemos $\phi(x) = \mathfrak{X}(\pi(x))\mu(x)$ alguna representación ϕ de Γ y

$\mu : \Gamma \to \mathbb{C}^x$; luego $\mathfrak{X}(1) = \mu(1)^{-1}\ \phi(1)$ y $\forall a \in A$

$$\phi(a) = \mathfrak{X}(1)\mu(a) = \mu(a)\mu(1)^{-1}\ \phi(1)$$

y $\lambda(a) = \mu(a)\mu(1)^{-1}$ es un carácter lineal de A.

Escribamos ahora $\nu(g) = \mu(X_g)$ y tenemos:

$\lambda(\alpha(g,h))\ \phi(X_{gh}) = \phi(X_g)\ \phi(X_h) = \mathfrak{X}(g)\mathfrak{X}(h)\nu(g)\nu(h)$. Luego $\lambda(\alpha(g,h))\nu(gh)\mathfrak{X}(gh) = \gamma(g,h)\nu(g)\nu(h)\mathfrak{X}(gh)$ y $\lambda(\alpha)$ es equivalente a γ. Luego $\eta(\lambda) = \overline{\lambda(\alpha)} = \overline{\gamma}$.

Dado un grupo finito arbitrario G se mostrara que M(G) es finito y se construira una extensión central (Γ, π) de G con $\ker \pi = A$ tal que la función estandar $\eta : \hat{A} \to M(G)$ es un isomorfismo.

Este será un grupo con la propiedad de levantamiento proyectivo para G con el menor orden posible: $|G| \cdot |M(G)|$. Este grupo Γ se llama Grupo de Representaciones de Schur para G.

Definición: Un grupo abeliano Q es divisible si $\forall x \in Q$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $y \in Q$ tal que $y^n = x$. Por ejemplo F^x es divisible si F es algebraicamente cerrado.

Lema: Sea A un grupo abeliano (infinito), y sea $Q \subseteq A$ con Q divisible. Supongamos $|A:Q| < \infty$. Entonces Q se complementa en A. (Frobenius).

Demostración: Por inducción sobre $|A:Q|$. Escojamos $a \in A \setminus Q$. Sea $n = o|aQ|$ en A/Q y sea $u = a^n$. Sea $v \in Q$ con $v^n = u$ por divisibilidad y sea $b = av^{-1}$ de manera que $b^n = 1$. Como $aQ = bQ$, se tiene que $n = o|bQ|$ en A/Q y luego $\langle b \rangle \cap Q = 1$.

Sea $\overline{A} = A/\langle b \rangle$ $\therefore$ $\overline{Q} = Q\langle b \rangle/\langle b \rangle$ satisface $\overline{Q} \cong Q$ y $|\overline{A}:\overline{Q}| = |A:Q\langle b \rangle| < |A:Q|$.

Por hipótesis de inducción $\overline{Q}$ se complementa en A y luego, existe $B \subseteq A$ con $B \cap Q\langle b \rangle = \langle b \rangle$ y $QB = A$. Ahora $Q \cap B = Q \cap Q\langle b \rangle \cap B = Q \cap \langle b \rangle = 1$.

Teorema: Sea F un cuerpo algebraicamente cerrado y G un grupo finito. Entonces $H^2(G, F^x)$ es finito y cada elemento tiene orden que divide a $|G|$. Más aún $B^2(G, F^x)$ se complementa en $Z^2(G, F^x)$.

Demostración:

i) Sea $\beta \in B^2(G, F^x)$ y $n \in \mathbb{N}$, $\beta = \delta(\mu)$ algún $\mu: G \to F^x$. $\forall g \in G$ sea $\gamma(g) \in F^x$ tal que $\gamma(g)^n = \mu(g)$ entonces $\delta(\gamma)^n = \delta(\mu) = \beta$.

ii) Sea $\alpha \in Z^2(G, F^x)$ y definamos $\mu(g) = \prod_{x \in G} \alpha(g, x)$ para $g, h \in G$ fijos tenemos
$\alpha(g, hx)\alpha(h, x) = \alpha(gh, x)\alpha(g, h)$ entonces
$\mu(g)\mu(h) = \mu(gh)\alpha(g, h)^{|G|}$, entonces $\alpha^{|G|} \in B^2(G, F)$.

Esto muestra que $H^2(G, F^x)$ tiene exponente que divide a $|G|$.

Sea $U = \{\alpha \in Z^2(G, F^x) | \alpha^{|G|} = 1\}$. Para $\alpha \in Z^2(G, F^x)$ sea $A = \langle B^2(G, F^x), \alpha \rangle$, $|A: B^2(G, F^x)|$ divide a $|G|$ luego $B^2(G, F)$ se complementa en A y su complemento es un subgrupo de U. Luego $\alpha \in B^2(G, F^x)\, U$ y luego $B^2(G, F)\, U = Z^2(G, F^x)$

Todo elemento de U es una función de $G \times G$ en $\{Y \in F | Y^{|G|} = 1\}$, como es un conjunto finito se tiene que $|U| < \infty$ y luego

$$|H(G, F^x)| = |B(G, F^x)U: B(G, F^x)| \leqslant |U| < \infty$$

De i) y ii) se tiene demostrado el Teorema.

Lema: Sea A un grupo abeliano y sea $\alpha \in Z^2(G, A)$. Entonces existe una extensión central (Γ, π) de G con $\ker \pi = A$ y tal que existe una transversal $X = \{X_g | g \in G\}$ de A en Γ con $\pi(X_g) = g$ y $X_g X_h = \alpha(g,h) X_{gh}$

Demostración: Sea $\Gamma = G \times A$ como conjunto y definamos $(g, a)(h, b) = (gh, \alpha(g, h)\, ab)$. Esta multiplicación es asociativa puesto que α es un 2-cociclo.

Sea $z = \alpha(1, 1)^{-1} \in A$, entonces

$(1, z)(g, a) = (g, \alpha(1, g) za) = (g, a)$

$$(g^{-1},\ a^{-1}\alpha(g^{-1},\ g)^{-1}z)(g,\ a) = (1,\ z)$$

Luego Γ es un grupo con $1 = (1,\ z)$

Claramente $\pi: \Gamma \to G$ definido por $\pi(g,\ a) = g$ es un homomorfismo con $\mathrm{Ker}\ \pi = \tilde{A} = \{(1,\ a) | a \in A\}$. Como $\alpha(1,\ g) = \alpha(g,\ 1)$ entonces $\tilde{A} \subseteq Z(\Gamma)$. Como $(1,\ za)(1,\ zb) = (1,\ zab)$

$a \longleftrightarrow (1,\ za)$ define un isomorfismo: $A \cong \tilde{A}$. Sea $X = \{(g,\ 1) | g \in G\}$; $\pi: X \to G$ es 1-1 y sobre, luego X es una transversal de A en Γ.

Ahora $(g,\ 1)(h, 1) = (gh,\ \alpha(g,\ h)) = (1,\ z\alpha(g,\ h))(gh,\ 1)$

Como $(1,\ z\alpha(g,\ h)) = \alpha(g,\ h)$ por la identificación $A \cong \tilde{A}$ se tiene el lema demostrado.

<u>Teorema</u>: (Schur) Dado G, existe una extensión central finita $(\Gamma,\ \pi)$ que tiene la propiedad de levantamiento proyectivo para G. Más aún, $(\Gamma,\ \pi)$ se puede escoger de manera que $\ker\ \pi = A \cong M(G)$ y la función estandar $\hat{A} \to M(G)$ sea un isomorfismo.

<u>Demostración</u>: Sea M un complemento para $B^2\ (G,\ \mathbb{C})$ en $Z^2(G,\ \mathbb{C})$. Sea $A = \hat{M}$. Definamos $\alpha(g,\ h) \in A$ como

$$\alpha(g,\ h)(\nu) = \nu(g,\ h),\ \nu \in M$$

es claro que $\alpha(g,\ h) \in \hat{M} = A$.

$$(\alpha(gh,\ k)\alpha(g,\ h))(\nu) = \nu(gh,\ k)\nu(g,\ h)$$

$$(\alpha(g,\ hk)\alpha(h,\ k))(\nu) = \nu(g,\ hk)\nu(h,k)$$

y como ν recorre todo un 2-cociclo, se tiene que $\alpha \in Z^2(G,\ A)$.

Sea $(\Gamma,\ \pi)$ y X como en el Lema, de manera que $X_g X_h = \alpha(g,\ h)X_{gh}$.

Sea $\eta\colon \hat{A} \to M(G)$ la función estandar. Para $\bar{\nu} \in M(G) = Z^2(G,\ \mathbb{C}^x)/B^2(G,\ \mathbb{C}^x)$ existe $\gamma \in M \cap \bar{\nu}$ puesto que M complementa a $B^2(G,\ \mathbb{C}^x)$ en $Z^2(G,\ \mathbb{C})$.

Definamos λ en $A = \hat{M}$ como la función evaluación en ν. Nótese que $\lambda \in \hat{A}$. $\lambda(\alpha(g,h)) = \alpha(g,h)(\nu) = \nu(g,h)$; entonces $\lambda(\alpha) = \nu$. Luego $\eta(\lambda) = \overline{\lambda(\alpha)} = \bar{\nu}$ y de aquí η es sobre. Entonces Γ tiene la propiedad de levantamiento proyectivo para G.

Además $|A| = |\hat{A}| \geqslant |\eta(\hat{A})| = |M(G)| = |M| = |A|$ luego η debe ser 1-1 y $\hat{A} \cong M(G)$.

<u>Corolario</u>: Sea $\mathfrak{X}$ una $\mathbb{C}$-representación proyectiva irreducible de G. Entonces $gr(\mathfrak{X})/|G|$.

<u>Demostración</u>: Existe una extensión central finita $(\Gamma,\ \pi)$ con la propiedad de levantamiento proyectivo para G.

Luego $\mathfrak{X}$ se puede levantar a $\eta\colon \Gamma \to \mathbb{C}^x$ como

$$\eta(x) = \mu(x)\chi(\pi(x))$$

con $\qquad \mu: \Gamma \to \mathbb{C}^x$

$$y \to \lambda(xy^{-1}{}_{\pi(y)})$$

como en la construcción del corolario anterior y según la observación subsiguiente a dicho corolario. Como se puede escoger una transversal, escojamos $x_1 = 1$, entonces

$$\mu(1) = \lambda(1\, x^{-1}{}_{\pi(1)}) = \lambda(x_1^{-1}) = \lambda(1) = 1$$

puesto que $\lambda: \ker \pi \to \mathbb{C}^x$ es una representación escalar.

Entonces $\eta(1) = \chi(1)$

Pero $\eta(1) \,\big|\, |\Gamma : Z(\Gamma)|$

y $\quad |\Gamma: Z(\Gamma)| \,\Big|\, |\Gamma: \operatorname{Ker} \pi| = |G| \qquad (\operatorname{Ker} \pi \subseteq Z(\Gamma))$

Luego $\quad \chi(1) \,\big|\, |G|$

<u>Teorema</u>: Sea (Γ, π) una extensión central finita de G con $A = \ker \pi$ y $\eta: \hat{A} \to M(G)$ la función estandar.
Sea $A_o = A \cap \Gamma'$. Entonces $\ker \eta = \{\lambda \in \hat{A} | A_o \subseteq \ker \lambda\}$.
En particular η es 1-1 si y solo si $A \subseteq \Gamma'$

<u>Demostración</u>: Sea $X = \{X_g | g \in G\}$ como siempre y sea $X_g X_h = \alpha(g, h) X_{gh}$ con $\alpha \in Z^2(G, A)$.

Supongamos $\lambda \in \ker \eta$, entonces $1 = \eta(\lambda) = \overline{\lambda(\alpha)}$

Entonces $\lambda(\alpha) \in B^2(G, \mathbb{C}^x)$

luego $\lambda(\alpha(g, h)) = \mu(g)\mu(h)\mu(gh)^{-1}$ algún $\mu: G \to \mathbb{C}^x$.

Definamos $\hat{\lambda}$ en Γ por $\hat{\lambda}(aX_g) = \lambda(a)\mu(g)$ y verifiquemos:

$\hat{\lambda}(X_g)\hat{\lambda}(X_h) = \mu(g)\mu(h) = \lambda(\alpha(g, h))\mu(gh) = \hat{\lambda}(\alpha(g,h)X_{gh}) = \hat{\lambda}(X_gX_h)$

luego $\hat{\lambda}$ es un carácter lineal de Γ que extiende a λ.

$$\Gamma' \subseteq \ker \hat{\lambda} \quad \text{luego} \quad A_o \subseteq \ker \lambda$$

Inversamente, sea $A_o \subseteq \ker \lambda$, entonces λ es extendible a $\lambda_o \in \mathrm{Irr}\,(A\Gamma'/\Gamma')$ por $\lambda_o(ax) = \lambda(a)$ $\forall x \in \Gamma'$. Como Γ/Γ' es abeliano, λ_o es extendible a $\lambda_1 \in \mathrm{Irr}(\Gamma/\Gamma')$.

Ahora $\lambda_1(X_g)\lambda_1(X_h) = \lambda_1(X_gX_h) = \lambda(\alpha(g, h))\lambda_1(X_{gh})$.

Definimos $\mu(g) = \lambda_1(X_g)$ y entonces

$$\lambda(\alpha(g, h)) = \mu(g)\mu(h)\mu(gh)^{-1}.$$

Corolario: Sea (Γ, π) una extensión central finita de G con $A = \ker \pi$.

a) Si $A \subseteq \Gamma'$ entonces A es isomorfo a un subgrupo de $M(G)$.

b) Si $|A| = |M(G)|$. Entonces $A \subseteq \Gamma'$ si y solo si Γ tiene la propiedad de levantamiento proyectivo para G. En este caso $M(G) \cong A$.

Demostración:

a) es inmediato puesto que $A \cong \hat{A}$

b) es inmediato del Teorema anterior.

Así, hemos visto que Γ es un grupo de representaciones de Schur para G si y solo si $\Gamma/A \cong G$ para algún $A \subseteq Z(\Gamma)$ tal que $|A| = |M(G)|$ y $A \subseteq \Gamma'$.

Corolario: Sea p un primo que divide a $|M(G)|$. Entonces un p-subgrupo de Sylow de G no es cíclico.

Demostración: Sea Γ un grupo de representaciones de Schur para G. Podemos suponer que $\Gamma/A \cong G$ con $A \subseteq Z(\Gamma)$. Sea $P/A \in Syl_p(G)$ y supongamos que P/A es cíclico. Como A es central, se tiene que P es abeliano. $p \nmid |\Gamma' \cap Z(\Gamma)|$. Como $A \subseteq \Gamma'$ por el corolario anterior, tenemos que $P \nmid |A|$. Entonces $p \nmid |M(G)|$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

Corolario: Sea $N \trianglelefteq G$ con G/N cíclico, y sea $\theta \in \mathrm{Irr}\, N$ invariante en G. Entonces θ es extendible a G.

Demostración: Por el corolario anterior $M(G/N) = H^2(G/N, \mathbb{C}^x)$ es trivial y por el teorema anterior (P. 26), este resultado es inmediato.

Definición: Sea $N \trianglelefteq G$, $\theta \in \mathrm{Irr}\, N$ invariante en G entonces (G, N, θ) se llama un triple.

$Ch(G|\theta) = \{\chi \in \hat{G} | \chi_N$ es multiplo de $\theta\}$.

$Irr(G|\theta) = \{\chi \in Ch(G|\theta)$ χ es irreducible$\}$.

Si $N \leq H \leq G$, $\chi_H \in Ch(H|\theta) \iff \chi \in Ch(G, \theta)$, y (H, N, θ) es un triple.

Si $\tau: U \to V$ es un isomorfismo de grupos y $\phi \in Irr\ U$, sea $\phi^\tau \in Irr\ V$ el carácter correspondiente de manera que $\phi^\tau(u^\tau) = \phi(u)$.

Definición: Sean (G, N, θ) y (Γ, M, ϕ) triples y sea $\tau : G/N \to \Gamma/M$ un isomorfismo. Para $N \leq H \leq G$, sea H^τ la imagen en Γ de $\tau(H/N)$. Para cada tal H, supongamos que existe una función:

$\sigma_H: Ch(H|\theta) \to Ch(H^\tau|\phi)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones para H, K con $N \leq K \leq H \leq G$ y $\chi, \psi \in Ch(H|\theta)$

a) $\sigma_H(\chi + \psi) = \sigma_H(\chi) + \sigma_H(\psi)$

b) $(\chi, \psi) = (\sigma_H(\chi), \sigma_H(\psi))$

c) $\sigma_K(\chi_K) = (\sigma_H(\chi))_K$

d) $\sigma_H(\chi\beta) = \sigma_H(\chi)\beta^\tau \qquad \forall\beta \in Irr\ H/N$

Sea σ la unión de las funciones σ_H. Entonces se dice que (τ, σ) es un isomorfismo de (G, N, θ) en (Γ, M, ϕ).

Nótese que si (τ, σ) es un isomorfismo de (G, N, θ) en (Γ, M, ϕ) entonces σ_H queda determinado por su restricción a $\mathrm{Irr}(H|\theta)$ (a)

$$\sigma_H : \mathrm{Irr}(H|\theta) \to \mathrm{Irr}(H^\tau|\phi) \text{ es } 1\text{-}1 \qquad \text{(b)}$$

Luego, para construir un isomorfismo (τ, σ) basta definir σ_H sobre $\mathrm{Irr}(H|\theta)$ que sea 1-1 y se extiende la definición por a) y se comprueba que c) y d) se cumplen para $\chi \in \mathrm{Irr}(H|\theta)$.

<u>Lema</u>: Sea $(\tau, \sigma): (G, N, \theta) \to (\Gamma, M, \phi)$ un isomorfismo de triples. Entonces σ_H es una biyección de $\mathrm{Ch}(H|\theta)$ sobre $\mathrm{CH}(H^\tau|\phi)$ $\forall H$ con $N \leqslant H \leqslant G$. Más aún:

$$\chi(1)/\theta(1) = \sigma_H(\chi)(1)/\phi(1) \qquad \forall \chi \in \mathrm{Ch}(H|\theta)$$

<u>Demostración</u>: Si $\sigma_H(\chi_1) = \sigma_H(\chi_2)$ para $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Ch}(H|\theta)$ tenemos $(\chi_i, \psi) = (\sigma_H(\chi_i), \sigma_H(\psi))$ es independiente de i $\forall \psi \in \mathrm{Irr}(H|\theta)$, entonces $\chi_1 = \chi_2$ y σ_H es 1-1.

Para $\chi \in \mathrm{Ch}(H|\theta)$ escribamos $e(\chi) = {}^{\chi(1)}/_{\theta(1)}$ y $e(\eta) = {}^{\eta(1)}/_{\phi(1)}$ para $\eta \in \mathrm{Ch}(H^\tau|\phi)$, $\sigma_N(\theta) \in \mathrm{Irr}(M|\phi)$ entonces $\sigma_N(\theta) = \phi$

$$\chi_N = e(X)\theta \qquad y \qquad \eta_M = e(\eta)\phi$$

y $\quad e(\sigma_H(\chi))\phi = (\sigma_H(\chi))_M = \sigma_N(\chi_N) = \sigma_N(e(\chi)\theta) = e(\chi)\phi$

luego $\quad e(\sigma_H(\chi)) = e(\chi)$

Por Frobenius: $\theta^H = \sum_{\chi \in Irr(H|\theta)} e(\chi)\chi$ y comparando grados $\Sigma e(\chi)^2\theta(1) = |H:N|\theta(1)$; $\Sigma e(\chi)^2 = |H:N|$ donde χ recorre $Irr(H|\theta)$. Analogamente $\Sigma e(\eta)^2 = |H^\tau : M| = |H:N|$ para $\eta \in Irr(H^\tau|\phi)$.

Como σ_H: $Irr(H|\theta) \rightarrow Irr(H^\tau|\phi)$ es 1-1 tenemos que

$$|H:N| = \Sigma e(\chi)^2 = \Sigma e(\sigma_H(\chi))^2 \leqslant \Sigma e(\eta)^2 = |H:N|$$

Luego, todo $\eta \in Irr(H^\tau, \phi)$ es de la forma $\sigma_H(\chi)$ para algún $\chi \in Irr(H|\theta)$.

<u>Corolario</u>: Los isomorfismos son relaciones de equivalencias sobre los triples.

<u>Demostración</u>: Si $(\tau, \sigma): (G, N, \theta) \rightarrow (\Gamma, M, \phi)$ es un isomorfismo, entonces σ_H: $Ch(H|\theta) \rightarrow Ch(K|\phi)$ es 1-1 y sobre $(K = H^\tau)$. Podemos definir σ^{-1} como $(\sigma^{-1})_K = (\sigma_H)^{-1}$ para $M \leqslant K \leqslant \Gamma$ donde $H = K^{\tau^{-1}}$. Es fácil probar que:

$$(\tau^{-1}, \sigma^{-1}): (\Gamma, M, \phi) \rightarrow (G, N, \theta) \text{ es un isomorfismo.}$$

<u>Lema</u>: Sea (G, N, θ) un triple y sea $\mu: G \rightarrow \Gamma$ un epimorfismo con $\ker \mu \subset \ker \theta$. Sea $M = \mu(N)$ y sea $\phi \in Irr\ M$ el carácter correpondiente a $\theta \in Irr(N/\ker \mu)$. Entonces (G, N, θ) y (Γ, M, ϕ) son triples isomorfos.

Demostración: Tenemos $\tau: G/N \rightarrow \Gamma/M$ definido naturalmente por μ. Para $N \leqslant H \leqslant G$ y $\chi \in Ch(H|\theta)$ tenemos $\ker \mu \subset \ker \chi$ y podemos considerarlo como un carácter de $H/\ker \mu$. Sea $\sigma_H(\chi)$ el carácter correspondiente a $\mu(H) \cong H/\ker \mu$ B.d. que (τ, σ) es el isomorfismo deseado.

Lema: Sea (G, N, θ) un triple y sea $\eta \in \mathrm{Irr}\ G$ tal que $\eta_N\theta = \phi \in \mathrm{Irr}\ N$. Para $N \leqslant H \leqslant G$ definamos:

$$\sigma_H: Ch(H \mid \theta) \rightarrow Ch(H \mid \phi) \quad \text{por} \quad \sigma_H(\psi) = \psi\eta_H.$$

Sea $i: G/N \rightarrow G/N$ la identidad. Entonces $(i, \sigma): (G, N, \theta) \rightarrow (G, N, \phi)$ es un isomorfismo de triples.

Dados $\lambda, \theta \in \mathrm{Irr}\ N$ invariantes en G con $\lambda(1) = 1$ se tiene que (G, N, λ) y (G, N, θ) son isomorfos si $\theta\lambda^{-1}$ es extendible a G.

Teorema: Sea (G, N, θ) un triple y (Γ, π) una extensión central finita de G/N que tenga la propiedad de levantamiento proyectivo. Sea $A = \ker \pi$. Entonces (G, N, θ) es isomorfo a (Γ, A, λ) para algún $\lambda \in \hat{A}$.

Demostración: (G, N, θ) determina un $\bar{\beta} \in H^2(G/N, \mathbb{C}^\times) = M(G/N)$. Como Γ tiene la propiedad de levantamiento proyectivo para G/N podemos encontrar un $\lambda \in \hat{A}$ tal que $\eta(\lambda) = \bar{\beta}^{-1}$ donde η es la función estandar. Sea $G^* \leqslant G \times \Gamma$ definido como

$G^* = \{(g, x) \mid \overline{g} = \pi(x)\}$ donde $\overline{g} = gN$. Sea $L = N \times A$, $L \leqslant G^*$

Definamos θ^* y λ^* en L como $\theta^*(h, a) = \theta(h)$ y $\lambda^*(h, a) = \lambda(a)$; $\theta^*, \lambda^* \in \mathrm{Irr}\, L$ son invariantes en G^*.

Tenemos homomorfismos $\mu_G \colon G^* \xrightarrow{\text{epi}} G$ y $\mu_\Gamma\ G^* \xrightarrow{\text{epi}} \Gamma$ y $\ker \mu_G = 1 \times A \subseteq \ker \theta^*$ y $\ker \mu_\Gamma = N \times 1 \subseteq \ker \lambda^*$. Luego

(G^*, L, θ^*) es isomorfo a (G, N, θ) y

(G^*, L, λ^*) es isomorfo a (Γ, A, λ)

Basta demostrar $(G^*, L, \theta^*) \cong (G^*, L, \lambda^*)$ y estaríamos listos si probamos que $\theta^* {\lambda^*}^{-1}$ es extendible a G.

Sea ϕ una representación que aporte a θ y $\mathfrak{X}$ una representación proyectiva de G tal que $\mathfrak{X}(n) = \phi(n)$, $\mathfrak{X}(ng) = \mathfrak{X}(n)\mathfrak{X}(g)$ y $\mathfrak{X}(gn) = \mathfrak{X}(g)\mathfrak{X}(n)$.

Sea α el conjunto de factores de G pertenecientes a $\mathfrak{X}$ y sea β el conjunto de factores de G/N definidos como $\beta(gN, hN) = \alpha(g, h)$.

Sea $\{X_{\overline{g}} \mid \overline{g} \in G/N\}$ una transversal de A en Γ con $\pi(X_{\overline{g}}) = \overline{g}$ y tal que $X_{\overline{1}} = 1$. Ponemos $X_{\overline{g}} X_{\overline{h}} = \gamma(g, h) X_{\overline{gh}}$ tal que $\gamma \in Z^2(G/N, A)$. Como $\eta(\lambda) = \overline{\beta}^{-1}$ tenemos

$\lambda(\gamma)\beta \in B^2(G/N, \mathbb{C}^x)$ entonces

$\lambda(\gamma(\overline{g}, \overline{h}))\alpha(g, h) = \nu(\overline{g})^{-1}\, \nu(\overline{h})^{-1}\, \nu(\overline{gh})$ algún

$\nu \colon G/N \to \mathbb{C}^x$.

Todo elemento de G^* es solo de la forma $(g, aX_{\bar{g}})$. Definimos 3 en G^* por $3(g, aX_{\bar{g}}) = \mathfrak{X}(g)\lambda(a)^{-1}\ \nu(\bar{g})$ y calculamos: $3(g, aX_{\bar{g}})\ 3(h, bX_{\bar{h}}) = \mathfrak{X}(gh)\lambda(ab)^{-1}\alpha(g, h)\nu(\bar{g})\nu(\bar{h})$ y $3(gh, ab\ \gamma(\bar{g}, \bar{h})X_{\overline{gh}}) = \mathfrak{X}(gh)\lambda(ab)^{-1}\ \lambda(\gamma(\bar{g}, \bar{h}))^{-1}\ \nu(\overline{gh})$ como estas dos expresiones son iguales, tenemos que 3 es una representación de G^*.

Como $\gamma(\bar{1}, \bar{1}) = 1$ y $\alpha(1, 1) = 1$ y $\nu(\bar{h}) = \nu(1) = 1$ $h \in N$. Tenemos que $3(n, a) = \phi(n)\lambda(a)^{-1}$ y 3_L aporta $\theta^*\lambda^{*-1}$.

<u>Corolario</u>: Sea $N \trianglelefteq G$ y $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$. Sea $\theta \in \mathrm{Irr}\, N$ un constituyente de χ_N. Entonces $\chi(1)/\theta(1)$ divide a $|G{:}N|$.

<u>Demostración</u>: Sea $T = I_G(\theta) = \{g \in G \mid \theta^g = \theta\}$ el grupo de inercia y sea $\psi \in \mathrm{Irr}\, T$ tal que $\psi^G = \chi$ y $\psi_N = e\theta$. (Lema P. 19)

Como $\chi(1) = |G{:}T|\psi(1)$. Basta demostrar $\psi(1)/\theta(1)$ divide a $|T{:}N|$. Sea (Γ, A, λ) un triple isomorfo a (T,N,θ) con λ lineal.

Sea $\zeta \in \mathrm{Irr}(\Gamma|\lambda)$ correspondiente con $\psi \in \mathrm{Irr}(T|\theta)$. Entonces $\psi(1)/\theta(1) = \zeta(1)/\lambda(1) = \zeta(1)$. Como $A \leqslant Z(\Gamma)$, $\zeta(1)$ divide a $|\Gamma{:}A| = |T{:}N|$.

<u>Corolario</u>: (Teorema de Ito).- Sea $N \trianglelefteq G$, N abeliano. Sea χ un carácter irreducible de G, $\chi\colon G \to \mathbb{C}$. Entonces $\chi(1)$ divide a $|G{:}N|$.

Ejemplo: Sea $G = Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

Tabla de Multiplicación

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

Clases de conjugación:

$K_1 = \{1\}$

$K_2 = \{a, a^3\}$

$K_3 = \{a^2\}$

$K_4 = \{b, a^2b\}$

$K_5 = \{ab, a^3b\}$

Sea $H = \{1, a^2\}$

$aH = \{a, a^3\}$

$bH = \{b, a^2b\}$

$abH = \{ab, a^3b\}$

Generemos un cocíclo $\alpha: G/H \times G/H \to \mathbb{C}$

	$\overline{1}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{ab}$
$\overline{1}$	1	1	1	1
$\overline{a}$	1	-1	1	-1
$\overline{b}$	1	-1	-1	1
$\overline{ab}$	1	1	-1	-1

Extendemos α a todo G: $\alpha(g, h) = \alpha(\overline{g}, \overline{h})$

Con este cocíclo α, la tabla de multiplicación G queda como:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	$-a^2$	a^3	-1	ab	$-a^2b$	a^3b	$-b$
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	-1	a	$-a^2$	a^3b	$-b$	ab	$-a^2b$
b	b	$-a^3b$	a^2b	$-ab$	$-a^2$	a	-1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	$-a^3$	$-a^2$	$-a$	-1
a^2b	a^2b	$-ab$	b	$-a^3b$	-1	a^3	$-a^2$	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	$-a$	-1	$-a^3$	$-a^2$

Extendiendo por linealidad este producto a todo $\mathbb{C}\, Q_8$ como conjunto, tenemos el álgebra $\mathbb{C}^{\alpha} Q_8$.

Pero considerando otra base para $F^{\alpha}Q_8$, se tiene que $\mathbb{C}^{\alpha}Q_8 \cong \mathbb{C}Q_8$, y esto es claro tomando como base

$$\{1,\ a,\ -a^2,\ -a^3,\ b,\ ab,\ -a^2b,\ -a^3b\}.$$

y desarrollando el producto:

	1	a	$-a^2$	$-a^3$	b	ab	$-a^2b$	$-a^3b$
1	1	a	$-a^2$	$-a^3$	b	ab	$-a^2b$	$-a^3b$
a	a	$-a^2$	$-a^3$	1	ab	$-a^2b$	$-a^3b$	b
$-a^2$	$-a^2$	$-a^3$	1	a	$-a^2b$	$-a^3b$	b	ab
$-a^3$	$-a^3$	1	a	$-a^2$	$-a^3b$	b	ab	$-a^2b$
b	b	$-a^3b$	$-a^2b$	ab	$-a^2$	a	1	$-a^3$
ab	ab	b	$-a^3b$	$-a^2b$	$-a^3$	$-a^2$	a	1
$-a^2b$	$-a^2b$	ab	b	$-a^3b$	1	$-a^3$	$-a^2$	a
$-a^3b$	$-a^3b$	$-a^2b$	ab	b	a	1	$-a^3$	$-a^2$

Este resultado no nos debe extrañar puesto que al extender α a todo Q_8, este resulta ser un coborde, que en $H^2(Q_8, \mathbb{C})$ es 1.

Pero, analicemos que ocurre en $G/H \simeq K$ (Klein)

	I	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\overline{ab}$
I	I	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\overline{ab}$
$\bar{a}$	a	$-I$	$\overline{ab}$	$-\bar{b}$
$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\overline{ab}$	$-I$	$\bar{a}$
$\overline{ab}$	$\overline{ab}$	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	$-\bar{I}$

Que al extenderse a $\mathbb{C}(G/H)$ resulta un álgebra anticonmutativa, que no es un álgebra de grupo.

Consideremos ahora la representación irreducible de Q_8 dada por:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que al restringirla a $\mathbb{C}^{\alpha}K$ resulta una representación irreducible de grado 2.

Esta representación es una representación proyectiva para el grupo de Klein K. de grado 2 que es irreducible.

Examinemos ahora que ocurre con $G = D_4$.

Su tabla de Multiplicación es:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	1	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	1	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	1	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1

Clases de Conjugación:

$$K_1 = \{1\}$$

$$K_2 = \{a,\ a^3\}$$

$$K_3 = \{a^2\}$$

$$K_4 = \{b,\ a^2b\}$$

$$K_5 = \{ab,\ a^3b\}$$

Sea $H = \{1, a^2\}$

$aH = \{a, a^3\}$

$bH = \{b, a^2b\}$

$abH = \{ab, a^3b\}$

	$\overline{1}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{ab}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{ab}$
$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{1}$	$\overline{ab}$	$\overline{b}$
$\overline{b}$	$\overline{b}$	$\overline{ab}$	$\overline{1}$	$\overline{a}$
$\overline{ab}$	$\overline{ab}$	$\overline{b}$	$\overline{a}$	$\overline{1}$

Luego $G/H \cong K$ (klein).

Generemos un cociclo $\beta : G/H \times G/H \to \mathbb{C}^x$

	$\overline{1}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{ab}$
$\overline{1}$	1	1	1	1
$\overline{a}$	1	-1	1	-1
$\overline{b}$	1	-1	1	-1
$\overline{ab}$	1	1	1	1

Con este cociclo construyamos la nueva tabla de multiplicación:

	$\overline{1}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{ab}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{ab}$
$\overline{a}$	$\overline{a}$	$-\overline{1}$	$\overline{ab}$	$-\overline{b}$
$\overline{b}$	$\overline{b}$	$-\overline{ab}$	$\overline{1}$	$-\overline{a}$
$\overline{ab}$	$\overline{ab}$	$\overline{b}$	$\overline{a}$	$\overline{1}$

Extendiendo a $\mathbb{C}(G/H)$ por linealidad, tenemos la multiplicación para $\mathbb{C}^{\beta}(G/H) \cong \mathbb{C}^{\beta} K$.

Considerando la representación irreducible de D_4 dada por:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y restringiendo a $\mathbb{C}^{\beta} K$, tenemos una representación irreducible de $\mathbb{C}^{\beta}(G/H)$ de grado 2, que es una representación proyectiva del grupo de Klein de grado 2, que es irreducible.

PARTE III

Sea G un grupo finito, $H < G$, K un cuerpo de descomposición de G y H (car $K = 0$), $A = KG$ y $B = KH$ las álgebras de grupo de G y H.

Sea ψ un carácter de H aportado por el B-módulo izquierdo Be, donde e es un idempotente de B.

El anillo centralizador $E = eAe$ es un álgebra con identidad e, que es sub-álgebra de A.

Teorema: Sea ζ un carácter irreducible de G tal que $(\zeta, \psi^G) > 0$. Entonces ζ_E es un carácter irreducible de E de grado (ζ, ψ^G).

Recíprocamente, cada carácter ϕ de E es la restricción a E de un único carácter irreducible ζ de G.

Demostración: Sea ζ aportado por un A-módulo irreducible M. Entonces eM es un E-módulo izquierdo de dimensión (ζ, ψ^G) (Teorema de Clifford), y es irreducible puesto que si

$$0 \neq m \in eM \Rightarrow Em = (eAe)m = (eA)m = eM.$$

Sea $x \in E \Rightarrow xM \subset eM$, de manera que la traza de x en M es igual a la traza de x en eM. Luego la restricción ζ_E es el carácter del E-módulo eM.

Recíprocamente, sea ϕ el carácter de un E-módulo izquierdo irreducible N. Como E es semisimple podemos suponer que $N = En$ donde n es un idempotente primitivo de E. Luego, n también es idempotente primitivo de A, luego An es un A-módulo izquierdo irreducible.

Si ζ es el carácter aportado por An, ζ_E es el carácter de E aportado por $eAn = En$ por la primera parte de la demostración.

Luego $\zeta_E = \phi$. Finalmente, si M es otro A-módulo irreducible con carácter ζ' tal que $\zeta'_E = \phi$. Entonces $\zeta'(n) = \phi(n) = 1$, luego $nM \neq 0$. Luego $M \simeq An$ puesto que An es irreducible, y luego $\zeta' = \zeta$.

<u>Corolario</u>: Si ζ es un carácter irreducible de A tal que $(\zeta, \psi^G) = 1$, entonces la restricción ζ_E es un homomorfismo de E en K. Recíprocamente, todo homomorfismo ϕ de E en K es la restricción a E de un único carácter irreducible ζ de A tal que $(\zeta, \psi^G) = 1$.

<u>Notaciones</u>: ψ carácter lineal de H

$$e = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \psi(h^{-1}) \cdot h$$ el idempotente primitivo de $B = KH$ aportado por ψ.

$$H^x = x^{-1}Hx$$

$$\psi^x(h^x) = \psi(h) \quad h^x \in H^x$$

Teorema: Sea $G = \dot{\bigcup}_{i \in I} D_i$, D_i (H, H)-clases dobles HgH en G. Sea $J = \{j \in I / \psi = \psi^g$ algún $g \in D_j$ en $H \cap H^g\} \subseteq I$, esta condición depende solo de las clases dobles y no de sus representantes. Para $j \in J$ escojamos $g_j \in D_j$ y sea $\beta_j = [H: H \cap H^{g_j}] \cdot e g_j e$. Los elementos $\{\beta_j\}_{j \in J}$ son una base para $E = eAe$. El conjunto $\{D_j\}_{j \in J}$ es invariante bajo la aplicación $D \to D^{-1}$, de manera que hay una segunda base $\{\hat{\beta}_j\}_{j \in J}$ donde $\hat{\beta}_j = [H: H \cap H^{g_j}] \cdot e g_j^{-1} e$.

Si $\beta_i \beta_j = \sum_{i \in J} a_{ijk} \beta_k$, entonces las constantes de estructura a_{ijk} son enteros algebraicos en K.

Demostración: Probaremos primero que para $g \in G$, $ege \neq 0 \iff \psi = \psi^g$ en $H \cap H^g$.

Nótese que para $h \in H$: $he = eh = \psi(h)e$.

Sea $h \in H \cap H^g$, digamos $h = h_1^g$ para $h, h_1 \in H$. Entonces: $\psi^g(h) ege = \psi(h_1) ege = e h_1 g e = eghe = egeh = \psi(h) \cdot ege$. Luego si $ege \neq 0 \Rightarrow \psi^g(h) = \psi(h)$.

Recíprocamente, sea $\psi^g = \psi$ en $H \cap H^g$, entonces $h_1 g h_2 = g$ para $h_2 \in H \iff h_2 \in H \cap H^g$. Luego el coeficiente de g en ege es $\dfrac{|H \cap H^g|}{|H|^2} \Rightarrow exe \neq 0$ y de hecho, para $j \in J$:

$$(*) \qquad \beta_j = \frac{1}{|H|} \sum_{h_1 g h_2 \in HgH} \psi(h_1^{-1})\, \psi(h_2^{-1}) \cdot h_1 g h_2$$

Más aún, $ege \neq 0$ si y sólo si $eye \neq 0$ cuando g, y están en la misma clase doble y $ege \neq 0$ si y sólo si $eg^{-1}e \neq 0$.

Luego $\{D_j\}_{j \in J}$ está bien definida y es invariante bajo la aplicación $D \to D^{-1}$. Ahora es claro que $\{\beta_j\}_{j \in J}$ es una base para E. Lo mismo vale para $\{\hat{\beta}_j\}_{j \in J}$.

El siguiente paso es calcular las constantes de estructura a_{ijk}, consideraremos los elementos de E como funciones sobre G y multiplicaremos según la fórmula de convolución usual.

Evaluando en g_k ambos lados de $\beta_i\beta_j = \sum_k a_{ijk}\beta_k$, $k \in J$.

$$a_{ijk} = |H|\beta_i\beta_j(g_k) = |H| \sum_{g \in D_i \cap g_k D_j^{-1}} \beta_i(g)\beta_j(g^{-1}g_k)$$

(usando (*)). Como $D_i \cap g_k D_j^{-1}$ es unión de clases izquierdas. y si $g, gh \in D_i \cap g_k D_j^{-1}$ entonces

$$\beta_i(g)\beta_j(g^{-1}g_k) = \beta_i(gh)\beta_j(h^{-1}g^{-1}g_k).$$

Teorema: Sea ζ un carácter irreducible de G tal que $(\zeta, \psi^G) > 0$. Entonces

$$\varepsilon(\zeta)\cdot e = \frac{\zeta(1)}{[G:H]} \sum_{j \in J} \frac{1}{[H:H \cap H^{g_i}]} \zeta(\hat{\beta}_j)\cdot\beta_j$$

donde:

$$\varepsilon(\zeta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(1)\zeta(g^{-1}) \cdot g$$

es el idempotente primitivo central de A aportado por ζ. Si ζ y $\tilde{\zeta}$ son caracteres irreducibles contenidos en ψ^G con multiplicidad positiva, entonces:

$$\frac{\zeta(1)}{[G:H]} \sum_{j \in J} \frac{1}{[H:H \cap H^{g_j}]} \zeta(\hat{\beta}_j)\tilde{\zeta}(\beta_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta \neq \tilde{\zeta} \\ (\zeta,\psi^G) & \text{si } \zeta = \tilde{\zeta} \end{cases}$$

Demostración: Basta demostrar la primera aserción puesto que es inmediato que $\zeta(\varepsilon(\zeta)\cdot e) = (\zeta, \psi^G)$ y $\tilde{\zeta}(\varepsilon(\zeta) \cdot e) = 0$ si $\zeta \neq \tilde{\zeta}$

$$\varepsilon(\zeta)\cdot e = e \cdot \varepsilon(\zeta)\cdot e = \frac{\zeta(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(g^{-1})\cdot ege$$

$$= \frac{\zeta(1)}{|G|} \sum_{i \in I} \sum_{h_1 g_i h_2 \in H g_i H} \zeta(h_2^{-1} g_i^{-1} h_1^{-1}) \psi(h_1)\psi(h_2)\cdot e g_i e$$

$$= \frac{\zeta(1)}{|G|} \sum_{j \in J} \zeta(|H|\ \beta_j) \frac{1}{[H:H \cap H^{g_j}]} \cdot \beta_j$$

Este teorema puede interpretarse como dando algunas relaciones de ortogonalidad en el anillo centralizador.

<u>Corolario</u>: Sea $\Phi: E \to K$ un homomorfismo. Entonces Φ es la restricción a E de un único carácter irreducible ζ de G tal que $(\zeta, \psi^G) = 1$. Más aún,

$$u = \frac{\zeta(1)}{[G:H]} \sum_{j \in J} \frac{1}{[H:H \cap H^{g_j}]} \Phi(\hat{\beta}_j) \cdot \beta_j$$

es un idempotente primitivo en A tal que Au aporta a ζ.

<u>Teorema</u>: Sea ζ un carácter irreducible de G tal que $(\zeta, \psi^G) > 0$. Entonces

$$\zeta(1) = [G:H] \, (\zeta, \psi^G) \Big(\sum_{j \in J} \frac{1}{[H:H \cap H^{g_j}]} \zeta(\hat{\beta}_j)\zeta(\beta_j)\Big)^{-1}$$

y $\qquad \zeta(1)/[G:H] \cdot \text{m.c.m.} \ \{[H:H \cap H^{g_j}] : j \in J\}.$

<u>Demostración</u>: Sea K una extensión finita de $\mathbb{Q}$ que contiene las raíces $|G|$-ésimas de 1. Sea p un primo y sea ν una valuación sobre K que extiende la valuación p-ádica sobre $\mathbb{Q}$.

Sea R el anillo de valuación sobre K, e.d. $R = \{\alpha \in K \mid \nu(\alpha) \leqslant 1\}$.

Sea D el R-orden en E con R-base $\{\beta_j\}_{j \in J}$.

Sabemos que las constantes de estructuras a_{ijk} son enteros algebraicos, luego están en R.

Nótese que $\hat{\beta}_j \in D$, $j \in J$ puesto que $\hat{\beta}_j$ es múltiplo entero algebraico de β_i algún $i \in J$.

ζ_E es aportado por un E-módulo irreducible M. Como K es cuerpo de descomposición de E, M es absolutamente irreducible. Ahora, R es un dominio de ideales principales con K como cuerpo cociente, de manera que existe un D-módulo $N \subset M$ tal que:

a) $KN = M$

b) N es un R-módulo libre con R-base $S = \{m_1, \ldots, m_n\}$ que también es una K-base para M.

Sea $T: E \to K_n$ la representación matricial de E aportada por M, calculada según la K-base S.

Analogamente, definamos $U: D \to R_n$ para el D-módulo N con respecto a S.

Claramente $T_D = U$.

Para $j \in J$: $\zeta(\hat{\beta}_j) = Tr(T(\hat{\beta}_j)) = Tr(U(\hat{\beta}_j)) \in R$ puesto que $\hat{\beta}_j \in D$.

Sea $\ell =$ m.c.m $\{[H:H \cap H^{g_j}] : j \in J\}$ y sea

$$w = \sum_{j \in J} \frac{\ell}{[H:H \cap H^{g_j}]} \zeta(\hat{\beta}_j) \cdot \beta_j .$$

Como cada $\dfrac{\ell}{[H:H \cap H^{g_j}]} \in \mathbb{Z} \subset R$ y como $\zeta(\hat{\beta}_j) \in R$ tenemos que $w \in D$.

Pero w es central en E puesto que es un múltiplo escalar de $\varepsilon(\zeta)\cdot e$. Como T es una representación absolutamente irreducible de E: $T(w) = \alpha \cdot I$, $\alpha \in K$.

Ahora, $\omega \in D \Rightarrow T(w) = U(\omega) \in R_n$ y luego $\alpha \in R$. Más aún, $\zeta(\omega) = \mathrm{Tr}(T(\omega)) = n\cdot\alpha = (\zeta, \psi^G)\cdot \alpha$.

Por el Teorema anterior $\omega = \dfrac{[G:H]\ \ell}{\zeta(1)} \cdot \varepsilon(\zeta)\cdot e$, pero $\zeta(\varepsilon(\zeta)\cdot e) = (\zeta, \psi^G)$

Luego $\dfrac{[G:H]}{\zeta(1)} \quad (\zeta, \psi^G) = \zeta(\omega) = (\zeta, \psi^G)\cdot \alpha$, como

$(\zeta, \psi^G) > 0 \qquad \dfrac{[G:H]\cdot\ell}{\zeta(1)} = \alpha \in R \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_p$.

Luego $\zeta(1)^{-1}\ [G:H]\cdot\ell$ es un entero p-ádico $\forall p \Rightarrow$ es entero.

Corolario: (Teorema de Ito): Sea $H \triangleleft G$, H abeliano y sea ζ un carácter irreducible de G. Entonces $\zeta(1)/[G:H]$.

Demostración: Como H es abeliano hay carácter lineal ψ de H tal que $(\zeta, \psi^G) > 0$. Pero H es normal $\Rightarrow [H:H \cap H^g] = 1$ $\forall g \in G$, y por el Teorema $\Rightarrow$ el Corolario.

Ejemplo: Sea $G = SL(2, q)$ $\quad q = p^n$, p primo impar

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{F}_q^*, \quad b \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{F}_q \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{F}_q^* \right\}$$

$1_H{}^G = \pi + 1, \qquad \pi(1) = q$

Sea $\quad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$S = B \cup BsB; \qquad B \cap B^s \cong \mathbb{F}_q^*;$

$|B \cap B^s| = q - 1, \qquad [B:B \cap B^s] = q$

$$q = \pi(1)/[S:B] \quad \text{m.c.m.} \ \{[B:B \cap B], [B:B \cap B^s]\}$$

$$= (q + 1) \quad \text{m.c.m.} \quad \{1, q\}$$

$$= (q + 1)q.$$

Ejemplo:

$G = S_4 = \{\sigma^i \tau^j \zeta^k | \sigma^4 = \zeta^3 = \tau^2 = 1, \ \tau\sigma = \sigma^3\tau, \zeta\tau = \tau\zeta^2, \ \zeta\sigma = \sigma^2\tau\zeta^2\}.$

$H = S_3 = \{1, \zeta, \zeta^2, \sigma^3\tau, \sigma^3\tau\zeta, \sigma^3\tau\zeta^2\} < S_4.$

Clases de conjugación de S_4:

$K_1 = \{1\}$

$K_2 = \{\zeta, \zeta^2, \tau\zeta, \tau\zeta^2, \sigma\zeta, \sigma\zeta^2, \sigma^2\tau\zeta^2\}$

$K_3 = \{\sigma\tau, \sigma^3\tau, \sigma^3\zeta, \sigma\zeta^2, \sigma^3\tau\zeta, \sigma^3\tau\zeta^2\}$

$K_4 = \{\sigma^2, \sigma^2\tau, \tau\}$

$K_5 = \{\sigma, \sigma^3, \sigma\zeta, \sigma^3\zeta^2, \sigma\tau\zeta, \sigma\tau\zeta^2\}$

Tabla de Caracteres de S_4:

	1	8	6	3	6
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	2	-1	0	1	0
χ_4	3	0	1	-1	-1
χ_5	3	0	-1	-1	1

$\psi = \chi_{2_H}$; $(\chi_{2_H})^G = $

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
4	1	-2	0	0

$$(\chi_{2_H})^G = \chi_{2_H} + \chi_{5_G}$$

$$D_1 = S_3\ 1\ S_3 = S_3$$

$$D_2 = S_3\ \sigma\ S_3 = S_4 \setminus S_3$$

$$S_3^{\sigma^3} = \{1,\ \sigma^2\zeta^2,\ \sigma^2,\ \sigma\tau,\ \sigma^3\tau\zeta^2,\ \sigma^2\tau\}$$

$$S_3 \cap S_3^{\sigma^3} = \{1,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^3\tau\zeta^2\}$$

$$\chi_{2_H}(1) = \chi_{2_H}(1^{\sigma^3}) = \chi_{2_H}^{\sigma^3}(1)$$

$$\chi_{2_H}(\sigma^3\tau) = -1 = \chi_{2_H}(\sigma\tau) = \chi_{2_H}((\sigma^3\tau)^{\sigma^3}) = \chi_{2_H}^{\sigma^3}(\sigma^3\tau)$$

$$\chi_{2_H}(\sigma^3\tau\zeta^2) = -1 = \chi_{2_H}(\sigma^3\tau) = \chi_{2_H}((\sigma^3\tau\zeta^2)^{\sigma^3}) = \chi_{2_H}^{\sigma^3}(\sigma^3\tau\zeta^2)$$

Luego:

$$J = \{1,\ 2\}.$$

$$e = \frac{1}{6}(1 + \zeta + \zeta^2 - \sigma^3\tau - \sigma^3\tau\zeta - \sigma^3\tau\zeta^2) = \frac{1}{6}(1 - \sigma^3\tau)(1 + \zeta + \zeta^2)$$

$$\beta_1 = [H:H \cap H^1] \cdot e1e = 1 \cdot e$$

$$\beta_2 = [H:H \cap H^{\sigma}]\cdot e\sigma e = 3\cdot\frac{1}{9}(\sigma^3 + \sigma^3\zeta + \sigma^3\zeta^2 - \tau - \tau\zeta - \tau\zeta^2)$$

$$= \frac{1}{3}(\sigma^3 - \tau)(1 + \zeta + \zeta^2)$$

$$\chi_5(\beta_1) = \frac{1}{6}(3+0+0+(-1)(-1)+(-1)(-1)+(-1)(-1)) = 1$$

$$\chi_5(\beta_2) = \frac{1}{3}(1 +(-1) + 1 -(-1) - (0)) = \frac{2}{3}$$

$$\chi_5(1) = 3$$

$$3 = \chi_5(1)/[G:H] \quad \text{m.c.m.} \quad \{\ldots\} = 4\cdot 3.$$

Observación: Estos ejemplos muestran claramente que el resultado del teorema es un caso extremo, por lo que dificilmente se podrá llegar a una generalización mejor que la presentada.

BIBLIOGRAFIA.

DORNHOFF, LARRY: Groups representation theory. Part A. Marcel Dekker Inc. New York, 1972.

ISAACS, MARTIN : Character theory of finite groups. Academic Press, 1976.

CURTIS, CHARLES-FOSSUM, TIMOTHY: On centralizer rings and characters of representation of finite groups. Mathematisch Zeits Chrift 107. Springer-Verlag, 1968.

BARRIGA, OSCAR : Caracteres de grupos finitos. Depto.de Matemáticas. Facultad de Ciencias Universidad de Chile, 1980.