



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

**MODELO FENOMENOLÓGICO DE PÉRDIDAS DE AGUA EN DEPÓSITOS DE RELAVE
CONVENCIONALES**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

MATÍAS ARIEL MUÑOZ DURÁN

PROFESOR GUÍA:
CHRISTIAN IHLE BASCUÑÁN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS
NELSON MORALES VARELA

SANTIAGO DE CHILE
2022

MODELO FENOMENOLÓGICO DE PÉRDIDAS DE AGUA EN DEPÓSITOS DE RELAVE CONVENCIONALES

El presente trabajo consiste en plantear un modelo fenomenológico simple, el cual estime las pérdidas de agua por atrapamiento a lo largo del escurrimiento desarrollado por un relave desde el punto de descarga hasta 800 m aguas abajo en el sector playa en un depósito de relaves convencional. El modelo consta de cinco ecuaciones fundamentales que buscan caracterizar la hidráulica del escurrimiento del relave descargado, dichas ecuaciones buscan representar la física detrás del escurrimiento y corresponden a: la conservación de volumen de la fase sólida, la conservación de volumen de la mezcla, el criterio de sedimentación, la distribución de concentraciones en volumen de la fase sólida y la ecuación de momentum lineal de la mezcla.

Una vez enunciadas y deducidas las cinco ecuaciones fundamentales del modelo, las cuales conforman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, se aplica la hipótesis cuasiestática, la cual transforma el sistema deducido en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) en el espacio que debe ser resuelto para cada instante de tiempo, o bien se debe resolver una “sucesión de regímenes permanentes”. De esta manera, se procede a resolver el sistema de EDOs para cada instante de tiempo utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4, donde en cada iteración, se resuelve el sistema de EDOs en régimen permanente y, posteriormente, se actualiza la topografía del canal. Además, en función de las condiciones operacionales, se definen las condiciones de borde, inicial y parámetros que alimentan al sistema de ecuaciones.

Posteriormente, una vez que se procede a resolver el sistema de EDOs deducido, se obtiene como un resultado importante que, para efectos del modelo, la incorrecta elección de las condiciones de borde entrega una solución matemática del problema y no así una solución físicamente interpretable, lo que ocurre al momento de analizar la solución obtenida para el espesor de escurrimiento definido en la zona de la mezcla bajo las condiciones que definen un eje hidráulico F3, puesto que presenta un cambio de monotonía respecto a la distancia, en contraste a la solución para este tipo de eje a caudal constante en la cual exhibe una monotonía creciente. De este modo, redefiniendo las condiciones de borde del problema, se obtiene una solución físicamente interpretable, en la cual el espesor presenta monotonía decreciente y, una posible explicación a dicho comportamiento es la pérdida de masa que experimenta la mezcla producto de la segregación.

Finalmente, se obtienen soluciones asociadas a la evolución en la topografía del canal en la cual el canal tiende a peraltarse en función del tiempo, razón por la cual la evolución en la variable temporal genera un aumento progresivo en la velocidad media de la mezcla y, por lo tanto, la sedimentación tiende a disminuir aguas abajo del escurrimiento en función del tiempo. Además, al cuantificar las pérdidas por atrapamiento acumuladas a lo largo del escurrimiento se obtiene que el agua atrapada en los intersticios del lecho sedimentado corresponde a aproximadamente a un 24 % del agua descargada, la cual equivale a 128 L/s.

*A mis padres,
Muchas gracias por todo*

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer profundamente a mi familia, particularmente a mis padres quienes siempre me brindan su apoyo, cariño y entusiasmo para seguir adelante en los momentos difíciles. Estoy profundamente agradecido con mi madre por todo el ánimo, confianza y seguridad que me transmite al momento de afrontar distintos desafíos y con mi padre por todo el esfuerzo y dedicación que hasta el día de hoy me ofrece para disponer de las herramientas necesarias para enfrentar mi futuro profesional.

Por otro lado, agradezco enormemente la guía y dedicación entregada por mi comisión al momento de confeccionar el presente trabajo de memoria. Quiero agradecer especialmente toda la guía y oportunidades entregadas por parte del profesor Christian Ihle durante mis años en la carrera, puesto que conforman gran parte del aprendizaje no tan sólo académico sino también personal adquirido durante el transcurso de distintos semestres. Por parte del profesor Aldo Tamburrino, si bien el tiempo compartido corresponde a un par de semestres, agradezco la enorme disposición y enseñanzas ofrecidas durante el poco tiempo compartido, conforma una experiencia muy agradable.

Quiero hacer mención especial a un amigo y a una amiga mía, quienes compartieron su tiempo conmigo durante todo el transcurso de mis estudios. El primero de ellos es Bryan Yañez a quien conozco desde la semana de inducción, sus palabras alentadoras, disposición a escuchar, ayuda en momentos difíciles, compartir momentos de alegría, en otras cosas son razones que me hacen pensar la enorme suerte que tengo de poder compartir mi día a día con él. La segunda es Macarena Muñoz a quien conozco desde que iba al colegio hace aproximadamente 8 años atrás, hasta el día de hoy comparto muchos buenos momentos con ella, puesto que siempre me apoya, alienta, anima e incluso siempre expresa una enorme preocupación respecto a cómo estoy, cosas que realmente quiero agradecer profundamente dado que hasta el día de hoy son detalles que me permiten creer más en mí y pensar que estoy rodeado de muy buenos amigos, muchas gracias de corazón a ambos.

Finalmente, quiero agradecer a todo aquellos que me apoyan hasta el día de hoy y me desean éxito para mi futuro, entre ellos menciono a Matías Vidal, Nicolás Lepiman, Tania Gómez, Jean Pinaud, Scarlett Jones, Felipe Sakuda, Francisco Vilches, Constanza Lepiman, Sebastián Caballero, entre otros. Mil gracias a todos por sus deseos!!!!

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.2. Objetivo general	2
1.3. Objetivos específicos	2
1.4. Alcances	2
2. Estudio del arte	3
2.1. Depósitos de relave convencionales	3
2.1.1. Clasificación según el material que compone el muro principal	3
2.1.2. Componentes de un depósito de relaves convencional	3
2.1.3. Métodos constructivos	4
2.2. Balance hídrico en un depósito de relaves convencional	6
2.2.1. Entradas de agua	6
2.2.2. Salidas de agua	7
2.2.3. Agua almacenada en el depósito	7
2.2.4. Ecuación general de balance hídrico	7
2.3. Mecanismos de pérdida de agua	8
2.3.1. Pérdidas por atrapamiento	9
2.3.1.1. Índice de vacíos	9
2.3.1.2. Estimación de las pérdidas por atrapamiento	12
2.3.1.3. Consolidación de medios porosos	13
2.3.2. Pérdidas por evaporación	22
2.3.2.1. Evaporación potencial	22
2.3.2.2. Balance de energía en una superficie	23
2.3.2.3. Evaporación relativa	25
2.3.3. Pérdidas por resaturación	27
2.3.3.1. Concepto de resaturación	27
2.3.3.2. Modelo de pérdidas por resaturación	27
2.3.4. Pérdidas por infiltración	28
2.3.4.1. Ley de Darcy	29
2.3.4.2. Diferencias en la medición de la permeabilidad para pequeña y gran escala	29
2.3.4.3. Distribución de tamaño de partículas en el sector playa	30
3. Metodología	33
3.1. Ecuaciones base del modelo	33
3.1.1. Supuestos del modelo	33

3.1.2.	Definición de volumen de control y variables de interés	34
3.1.3.	Formulación teórica de las ecuaciones de momentum y masa	35
3.1.4.	Consideraciones sobre la reología de la mezcla	35
3.1.5.	Segregación longitudinal de partículas	38
3.1.6.	Hipótesis cuasiestática	39
3.2.	Resolución del sistema de ecuaciones diferenciales	39
3.2.1.	Sistema de ecuaciones diferenciales acoplado	39
3.2.2.	Resolución de la sucesión de regímenes permanentes	40
3.3.	Parámetros y condiciones de borde del modelo	41
3.3.1.	Parámetros asociados a las condiciones de operación	41
3.3.2.	Parámetros asociados a la reología de la mezcla	42
3.3.3.	Parámetros asociados a la velocidad crítica de deposición	42
3.3.4.	Parámetros asociados a la geometría del canal	43
3.3.5.	Condiciones de borde	44
3.4.	Validación cualitativa del sistema de EDOs	44
3.4.1.	Caso de prueba	45
3.4.2.	Estimación de las pérdidas de agua por atrapamiento	46
4.	Resultados y análisis	47
4.1.	Sistema de ecuaciones	47
4.1.1.	Ecuación de conservación de masa de sólidos en la suspensión	47
4.1.2.	Ecuación de conservación de masa de la mezcla	48
4.1.3.	Ecuación de sedimentación o criterio de sedimentación	50
4.1.4.	Ecuación de distribución de concentraciones volumétricas	51
4.1.5.	Ecuación de momentum lineal	52
4.1.6.	Sistema de ecuaciones del modelo e hipótesis cuasiestática	56
4.1.7.	Sistema de ecuaciones diferenciales acoplado	57
4.2.	Caso de prueba: Segregación y pérdidas por atrapamiento	60
4.2.1.	Resolución del sistema en el tiempo inicial	60
4.2.2.	Análisis en el comportamiento de la altura de escurrimiento	63
4.2.3.	Discusión sobre las condiciones de borde	64
4.2.4.	Resolución del sistema a tiempo inicial corregida	67
4.2.5.	Resolución iterativa en el tiempo (sucesión de regímenes permanentes) . . .	71
4.2.6.	Pérdidas de agua por atrapamiento	76
4.2.7.	Discusión sobre clasificación de tamaños en el sector playa	78
5.	Conclusión	79
	Bibliografía	80
	Anexos	82
A.	Método de Runge-Kutta de orden 4	83
B.	Código de Python	84
C.	Resolución de método cuasiestático	101
C.1.	Etapa 1: Resolución del sistema en el tiempo inicial	101

C.2. Etapa 2: Resolución iterativa en el tiempo 101

Índice de Tablas

3.1.	Rango de operación para el caudal de descarga y el contenido en sólidos	41
3.2.	Parámetros de la distribución Rosin-Rammler	41
3.3.	Parámetros empíricos asociados a la reología de la mezcla	42
3.4.	Parámetros ley de potencia y concentración crítica de empaquetamiento	42
3.5.	Parámetros geométricos del canal	44
3.6.	Parámetros para la discretización espacial	45
3.7.	Parámetros para la discretización temporal	45

Índice de Ilustraciones

2.1.	Método constructivo aguas abajo	4
2.2.	Método constructivo eje central	5
2.3.	Método constructivo aguas arriba	5
2.4.	Componentes de un balance hídrico en un depósito de relaves convencional	6
2.5.	Balance hídrico realizado en Tranque Talabre	9
2.6.	Descripción de la geometría interna de un material granular	9
2.7.	Componentes del balance de energía en una superficie	24
2.8.	Cambios de estado debido al proceso de secado en relaves	25
2.9.	Variaciones en la tasa de evaporación real en función del contenido de humedad para relaves conformados por agua fresca y salina	26
2.10.	Variación en la tasa de evaporación	26
2.11.	Distribución del tamaño de partículas que ocurre en la playa de un depósito de relaves convencional	30
3.1.	Volumen de control el canal generado	34
3.2.	Imagen satelital en la cual se aprecian los canales formados por el proceso erosivo	43
4.1.	Esquema que representa el balance de fuerzas en la suspensión	54
4.2.	Distribución de concentraciones volumétricas en función de d_c	60
4.3.	Solución para q y ϕ en $t = t_0$	61
4.4.	Solución para \tilde{h} y relación entre \tilde{h} , h_n y h_c en $t = t_0$	61
4.5.	Solución para V y d_c en $t = t_0$	61
4.6.	Comportamiento del factor H y el término $1 - X$ en función de x	63
4.7.	$\tilde{h}(x)$ para las condiciones $\tilde{h}_0 = 0.05$ m y $\tilde{h}_0 = 0.07$ m	65
4.8.	$\tilde{h}(x)$ para las condiciones $\tilde{h}_0 = 0.075$ m y $\tilde{h}_0 = 0.08$ m	65
4.9.	Comportamiento de la solución para $q(x)$ y $\tilde{h}(x)$ (nuevas condiciones)	66
4.10.	Solución para las variables $q(x)$ y $\phi(x)$ corregidas	67
4.11.	Solución para la variable $\tilde{h}(x)$ y relación entre \tilde{h} , h_n y h_c	67
4.12.	Solución para las variables $d_c(x)$ y $V(x)$ corregidas	67
4.13.	Densidad y viscosidad de la mezcla	68
4.14.	Número de Reynolds y Número de Froude para cada x	69
4.15.	Factor de fricción y pendiente de línea de carga para cada x	70
4.16.	Solución temporal para las variables $q(t)$ y $\tilde{h}(t)$	71
4.17.	Solución temporal para las variables $\phi(t)$ y $z_s(t)$	71
4.18.	Solución temporal para las variables $V(t)$ y $d_c(t)$	71
4.19.	Evolución temporal en la pendiente del canal	72
4.20.	Solución temporal para las variables $\rho(t)$ y $\mu(t)$	74
4.21.	Solución temporal para las variables $Re(t)$ y $Fr(t)$	74
4.22.	Evolución temporal de D_h	75
4.23.	Solución temporal para las variables $f(t)$ y $J(t)$	76

4.24.	Flujo de líquido y pérdidas por atrapamiento de agua acumulada	77
4.25.	Fracción de la pérdida acumulada de agua por atrapamiento	77

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

En la actualidad, con un mercado mundial en constante expansión para los commodities minerales, tales como el cobre, oro, hierro, carbón, manganeso, cromo y zinc, indispensables para el funcionamiento de distintas industrias, las compañías mineras están explotando yacimientos minerales de menor ley a una escala cada vez mayor. Normalmente para que una mina de baja ley sea rentable en el largo plazo es necesario realizar una explotación minera a gran escala, la cual trae consigo la generación de residuos mineros a una escala proporcional (Blight, 2009).

En un contexto global, según el Informe Mundial de las Naciones Unidas sobre el Desarrollo de los Recursos Hídricos 2020 emitido por la United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO), se está en un escenario de crisis hídrica mundial, lo que establece un enorme desafío para las industrias en lograr un consumo de agua eficiente y sostenible, evitar pérdidas y optimizar sus procesos de recuperación de agua. Esto es de particular importancia para la industria minera donde se tienen altos consumos de agua pero también altas pérdidas, lo que conlleva a la necesidad de mejorar sus procesos de tratamiento de minerales y estudiar más a fondo los distintos mecanismos que generan estas pérdidas, esto con el fin de disminuir su impacto y generar un negocio rentable y sostenible en el tiempo. (UNESCO, 2020)

En lo que respecta a los desafíos de la industria minera, la disminución en las leyes de los yacimientos trae como consecuencia tasas de producción de mineral cada vez más altas en los procesos planta, lo que conlleva a un incremento progresivo en el consumo de agua. En consecuencia, para satisfacer la demanda de agua se han propuesto dos cursos de acción: la identificación y análisis de nuevas fuentes de suministro de agua y, por otro lado, la modificación de los procesos y estrategias de deposición de relaves para minimizar las pérdidas y maximizar la recuperación de agua.

Es en este escenario que la recuperación de agua desde el depósito de relaves ofrece una alternativa de gran interés, siendo el aspecto clave la caracterización de los distintos mecanismos que controlan las pérdidas de agua, los que incluyen las pérdidas por atrapamiento en los intersticios del relave depositado, la evaporación de agua en la superficie del relave, las infiltraciones que dependen de las características hidráulicas del medio granular y las pérdidas por restauración de capas de relave secas debido a la incorporación de capas de relave fresco durante la deposición.

Lo anterior, plantea un gran desafío en el campo de la ingeniería y la investigación orientado a mejorar las estrategias de deposición de relave para tener un mayor conocimiento y control sobre

los mecanismos de pérdida de agua.

La propuesta de memoria consiste en plantear un modelo fenomenológico simplificado que incorpore las variables físicas que gobiernan la hidráulica del escurrimiento de un relave y, a partir de esta, estimar las pérdidas de agua por atrapamiento, considerando los balances de momentum y masa del escurrimiento en el sector playa.

1.2. Objetivo general

Plantear un modelo fenomenológico simple que incorpore distintos parámetros asociados a la operación de descarga de relaves en la cubeta y, a partir del modelo, predecir el comportamiento hidráulico del escurrimiento de dichos relaves, permitiendo estimar las pérdidas de agua por atrapamiento en el sector playa.

1.3. Objetivos específicos

1. Modelar el escurrimiento del relave en el sector playa y estimar las pérdidas de agua por atrapamiento.
2. Plantear las ecuaciones básicas que describan la física del escurrimiento, en particular, los balances de masa, momentum y la sedimentación de partículas sólidas.
3. Analizar y predecir la hidráulica asociada al escurrimiento del relave.
4. Aplicar el modelo a un caso de prueba simplificado.

1.4. Alcances

- Los parámetros que alimentan al modelo se obtienen a partir de un estudio bibliográfico, no corresponden a mediciones propias
- El modelo propuesto pretende ser una base conceptual en la determinación de las pérdidas de agua
- La solución presentada corresponde a una solución simplificada del sistema que describe la física del modelo
- El programa utilizado en la resolución del problema corresponde al lenguaje de programación Python y el código utilizado es por elaboración propia

Capítulo 2

Estudio del arte

2.1. Depósitos de relave convencionales

Un depósito de relaves es una obra que se construye para contener en forma segura los relaves provenientes de una planta de concentración de minerales por flotación (Ministerio de Minería, 2007).

Los depósitos de relave superficiales se clasifican dependiendo del material que compone el muro principal de contención del depósito.

2.1.1. Clasificación según el material que compone el muro principal

- **Tranques de relaves**

Corresponden a depósitos de relaves donde el muro de contención es construido con la fracción más gruesa de sólidos que componen el relave (arenas). En Chile la mayoría de los depósitos de relave corresponden a tranques de relave (Ministerio de Minería, 2007).

- **Embalses de relaves**

Corresponden a aquellos depósitos de relaves donde el muro de contención está construido con material de empréstito y se encuentra impermeabilizado en el coronamiento y en su talud interno. La impermeabilización puede estar realizada con un material natural de baja permeabilidad o de material sintético como una geomembrana de alta densidad. También se llama embalses de relaves a aquellos depósitos ubicados en alguna depresión del terreno en que no se requiere la construcción de un muro de contención (Ministerio de Minería, 2007).

2.1.2. Componentes de un depósito de relaves convencional

Un depósito de relaves convencional posee distintas componentes. A continuación, se enfatiza en cinco de estas componentes.

- **Muro de contención:** Corresponde a la zona periférica del depósito de relaves, que delimita el perímetro natural para conformar la zona de la cubeta. Este muro puede estar conformado de material de empréstito, en el caso de los embalses, o arena del relave en el caso de los tranques.

- **Cubeta:** Corresponde a la zona del depósito de relaves en la cual se acumulan –según el proceso de sedimentación– los sólidos de grano más finos de los relaves, en el caso de los tranques de relaves, o la totalidad de los relaves, en los otros sistemas de deposición.
- **Laguna de aguas claras:** Corresponde al agua clarificada que es producto del proceso de sedimentación de las partículas sólidas que conforman el relave. En la operación de tranques de relave es de suma importancia que la laguna se encuentre alejada del muro de contención principal, dado que la presión de poro generada por el nivel freático pone en riesgo la estabilidad del muro.
- **Sector de playa activa:** Corresponde a la zona donde se descargan los relaves en la cubeta, se le denomina playa porque usualmente esta seca en la superficie y se asemeja a una playa de arenas finas. Es la parte del depósito de relaves o lamas situada en las cercanías de la línea de vaciado.
- **Sector de playa inactiva:** Corresponde a la zona de la cubeta que se encuentra seca en la superficie del relave. Se le llama inactiva dado que se compone principalmente de capas de relave secas las cuales se resaturan una vez que los puntos de descarga depositan relave fresco sobre ellas.

2.1.3. Métodos constructivos

Para los depósitos de relave convencionales existen tres métodos constructivos para la confección del muro mediante el transporte hidráulico de relaves (Vick, 1999).

- **Método aguas abajo**

Este método consiste en que la línea central del muro se mueva progresivamente aguas abajo mientras crece en cota. Además, como se aprecia en la Figura 2.1 este método proporciona una gran estabilidad y sustento al muro, razón por la cual se prefiere como método constructivo, en especial en los cuales existe una gran actividad sísmica.

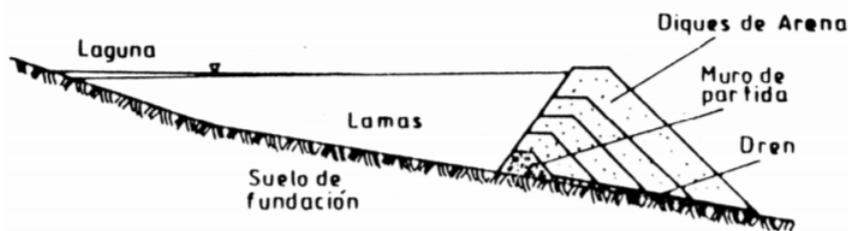


Figura 2.1: Método constructivo aguas abajo

Nota. Tomado de *Guía técnica de operación y control de depósitos de relaves* (p. 11), de N. Ramírez, 2007, (Ramírez, 2007)

Es importante mencionar que en el caso de Chile el método constructivo aguas abajo es el más utilizado dada la gran estabilidad física que ofrece, la que es consecuencia del grado de compactación que alcanza el muro de arena a medida que se va depositando el relave y a la compactación mecánica realizada por bull-dozers mientras el muro crece.

■ Método eje central

Este método consiste en que la línea central del muro permanezca en la misma posición durante toda la construcción. Como muestra la Figura 2.2, este método también proporciona un muro exterior estable para el almacenamiento.

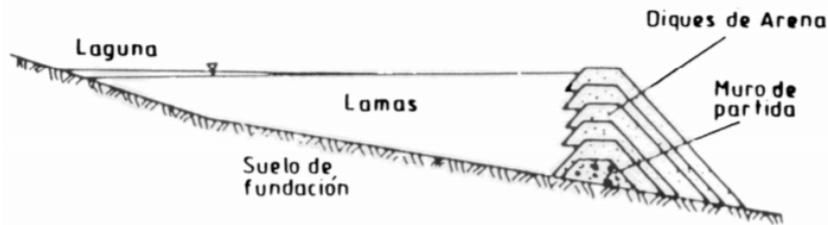


Figura 2.2: Método constructivo eje central

Nota. Tomado de *Guía técnica de operación y control de depósitos de relaves* (p. 11), de N. Ramírez, 2007, (Ramírez, 2007)

■ Método aguas arriba

Este método consiste en el que la línea central del muro se mueva progresivamente aguas arriba mientras crece en cota. Como muestra la Figura 2.3, esto da como resultado un muro exterior menos estable para el almacenamiento.

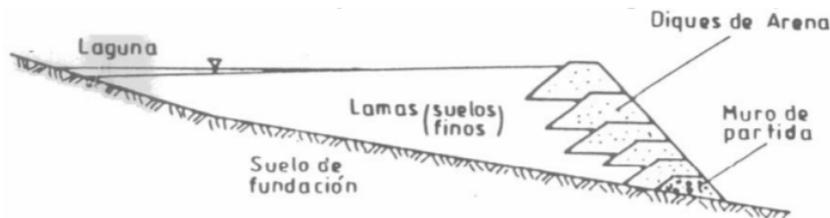


Figura 2.3: Método constructivo aguas arriba

Nota. Tomado de *Guía técnica de operación y control de depósitos de relaves* (p. 11), de N. Ramírez, 2007, (Ramírez, 2007)

Es importante hacer énfasis en que este método constructivo está prohibido por la autoridad chilena de acuerdo a lo estipulado en el decreto supremo 248 que aprueba el reglamento para la aprobación de proyectos de diseño, construcción, operación y cierre de los depósitos de relave.

En los métodos de construcción descritos se menciona que el muro de contención está compuesto de arena. La arena se obtiene a través de hidrociclones. Un hidrociclón es un dispositivo consistente en una carcasa cónica equipada con un tubo de alimentación que ingresa al cono tangencialmente. Además, segundo tubo entra en el cono sobre su eje y se introduce en el cuerpo del cono. La alimentación de relave ingresa por el primer tubo y es forzada a girar hacia el extremo del cono. En el proceso, la fuerza centrífuga genera que las partículas de mayor tamaño en el relave se muevan hacia abajo y lejos del eje, mientras que las partículas más pequeñas se concentran en el eje de rotación y se mueven, en la dirección opuesta, hacia el “vortex finder”. Consecuentemente, las partículas más finas y la mayor parte del agua salen del ciclón a través del vortex finder y forman el “overflow”, mientras que las partículas más grandes (arenas) salen por el extremo opuesto formando el “underflow” (Blight, 2009).

2.2. Balance hídrico en un depósito de relaves convencional

En la Figura 2.4 se puede apreciar las distintas componentes que se deben considerar en un balance hídrico para depósitos de relave convencionales en operación. Un balance hídrico consiste en la relación que existe entre las entradas y salidas totales de agua en un sistema.

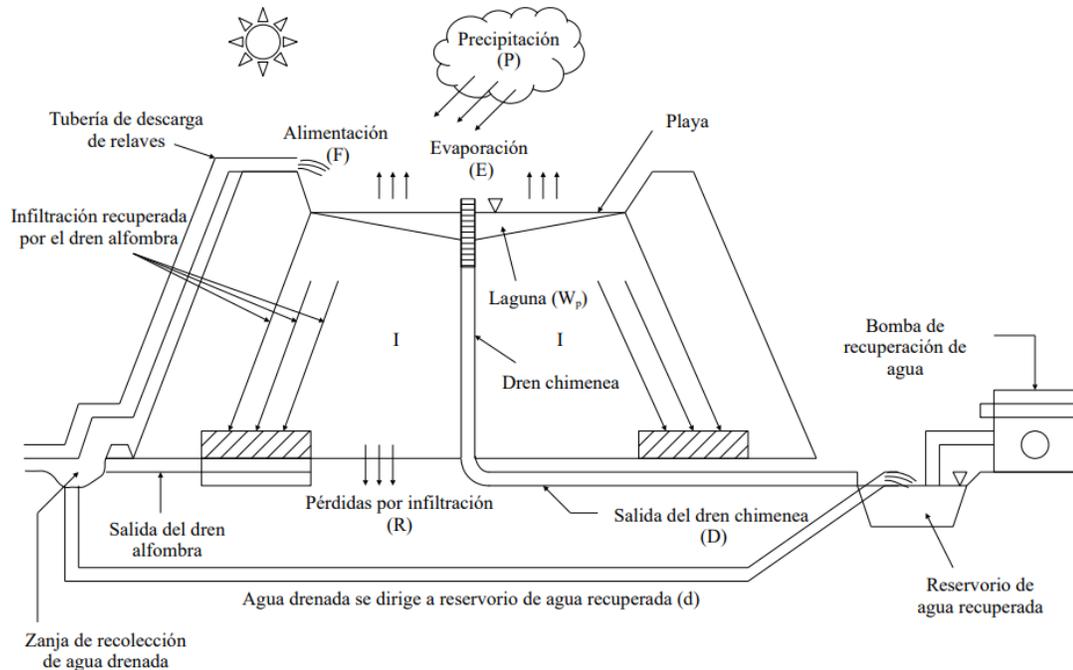


Figura 2.4: Componentes de un balance hídrico en un depósito de relaves convencional

Nota. Adaptado de *Geotechnical Engineering for Mine Waste Storage Facilities* (p. 384), de G. Blight, 2009, (Blight, 2009)

Considerando un balance global de agua en el depósito es posible distinguir tres componentes principales.

2.2.1. Entradas de agua

- Agua contenida en el relave que alimenta al depósito (F en la Figura 2.4). Esta comprende el agua intersticial (I en la Figura 2.4) que se encuentra atrapada en los poros del material granular, y el agua sobrenadante (W_p en la Figura 2.4) que es la que “sangra” a la superficie del depósito debido a la sedimentación del relave depositado y que se recolecta en la laguna.
- Agua proveniente de las precipitaciones en la superficie del depósito, la cual es recolectada en el reservorio de agua (P en la Figura 2.4).

Dado que el norte de Chile es una zona árida, la contribución por parte de las precipitaciones no supone una entrada de agua importante en el balance global.

2.2.2. Salidas de agua

- El agua descargada por el dren chimenea (D en la Figura 2.4) hacia el reservorio de agua.
- El agua infiltrada hacia el dren alfombra, que rodea al depósito de relaves, y que retorna el agua hacia el reservorio (d en la Figura 2.4).
- El agua infiltrada hacia el suelo o fundación del depósito de relaves que es irrecuperable y constituye una recarga de agua a las napas subterráneas (R en la Figura 2.4).
- El agua evaporada desde el relave en la superficie del depósito (E en la Figura 2.4).

En Chile, dado el diseño de los tranques de relave, el dren normalmente se encuentra ubicado en el muro de contención principal para controlar la subida del nivel freático y así evitar que se ponga en riesgo la integridad del muro de arena debido a la presión de poros. Además, la recuperación de agua desde la laguna se realiza mediante torres de captación de agua o mediante balsas en las cuales se instala una bomba capaz de impulsar el agua hacia la planta.

Por otro lado, las infiltraciones pueden ocurrir hacia el muro de arena o hacia la fundación en donde se encuentra construido el depósito. Cabe mencionar que la infiltración también puede ocurrir hacia la cubeta, por lo que es de suma relevancia caracterizar el relave, las arenas y la fundación.

2.2.3. Agua almacenada en el depósito

- Agua retenida en los vacíos o intersticios del relave sedimentado por acción capilar (I en la Figura 2.4). La proporción de agua retenida por este medio depende del índice de vacíos, distribución del tamaño de partículas del relave y la forma en la que se deposita el relave, es decir, si hay separación de las partículas gruesas de las finas en el depósito, ya sea por gravedad o por cicloneo.
- Agua almacenada en la laguna de aguas claras (W_p en la Figura 2.4).

2.2.4. Ecuación general de balance hídrico

En general, no hay régimen permanente al interior del depósito de relaves, es decir, la tasa de acumulación de volumen de agua es igual a los flujos de entrada de agua menos los flujos de salida de agua. La tasa de cambio de volumen de agua puede ser utilizada para predecir el nivel del agua en la cubeta.

Por lo tanto, la ecuación general de balance de agua se puede escribir como:

$$\sum(F + P) - \sum(D + d + E + I + W_p) = \sum R + losses \quad (2.1)$$

Donde el término “*losses*” en la Ecuación 2.1 corresponde a un término que surge debido a la falta de precisión en estimar los términos restantes de la ecuación, lo que se debe en parte a mediciones imprecisas, supuestos injustificados acerca de como estimar alguna de las cantidades y debido a la poca cantidad de registros de los que se dispone al momento de realizar estimaciones de balance hídrico.

Es de suma relevancia tomar en consideración que para las minas ubicadas en zonas de clima árido o semi-árido o que no posean una fuente de suministro de agua a bajo costo y en suficientes

cantidades, la disminución en los consumos de agua fresca es un desafío de alta prioridad para las compañías (Chambers, Plewes, Pottie, Murray, y Burgess, 2003). Por esta razón, si se toma en consideración la suma total de las componentes de entrada, observadas en la Figura 2.4, sólo el agua que se recupera por parte del sistema de drenaje desde la laguna de aguas claras puede ser recirculada a los procesos planta. Por otro lado, toda el agua evaporada (ya sea en el sector playa, laguna o reservorio) e infiltrada hacia la fundación o el muro, son pérdidas irrecuperables de agua. En consecuencia, hay un número limitado de alternativas para recuperar agua en depósitos de relave convencionales, entre las que se menciona:

1. Mejorar el control del agua en la laguna y en el reservorio, lo que incluye:
 - Mantener la laguna a un tamaño mínimo, considerando la limitante de permitir un tiempo mínimo para que ocurra el proceso de sedimentación de partículas sólidas y el agua se clarifique.
 - Minimizar las pérdidas por evaporación e infiltración, tanto cómo sea posible en el reservorio de recuperación de agua. Esto requiere reservorios profundos que minimicen el área de la superficie libre, junto con el uso de geomembranas respectivamente.
2. Incrementar la tasa de crecimiento del depósito. En teoría, esto incrementa la razón de agua drenada - agua evaporada, pero trae consigo el riesgo de elevar el nivel freático y, por lo tanto, disminuir la resistencia al corte del muro de contención. Además, el agua intersticial por tonelada depositada se mantiene prácticamente constante y los flujos de drenaje aumentan debido al aumento del nivel freático.
3. Reducir el tonelaje de relaves enviados al depósito. Esto puede lograrse por medio de una minería más selectiva, reduciendo la dilución del mineral por la roca estéril. Lo anterior, también trae consigo un beneficio económico asociado a la reducción de costos de transporte y procesamiento dado el menor tonelaje de estéril.

2.3. Mecanismos de pérdida de agua

En esta sección se entra en detalle respecto a las variables críticas y los fenómenos físicos que gobiernan los distintos mecanismos de pérdida de agua, en particular, se enfatiza en las pérdidas por atrapamiento, evaporación, resaturación e infiltración.

Si bien, las formulaciones y descripciones constituyen un factor esencial en el estudio de los mecanismos de pérdida, es importante considerar la magnitud relativa de las pérdidas de agua en un depósito de relaves convencional. Un estudio realizado por Wels & Robertson durante el año 2003 en Tranque Talabre (Wels y Robertson, 2003), perteneciente a la división Chuquicamata de la compañía Codelco, presenta los resultados obtenidos al realizar un balance hídrico en el tranque y la magnitud relativa de las pérdidas de agua, los que se observan en la 2.5.

En la Figura 2.5 se aprecia que el mecanismo de pérdida predominante en un depósito de relaves convencional son las pérdidas por atrapamiento, correspondientes al 52% del agua que ingresa al depósito. Le siguen las pérdidas por evaporación, las que en total equivalen a un 17% del agua que ingresa al depósito y, con menor magnitud, se encuentran las pérdidas por resaturación equivalentes al 11% del agua ingresada al tranque. Las pérdidas por infiltración se obtienen del cierre del balance.

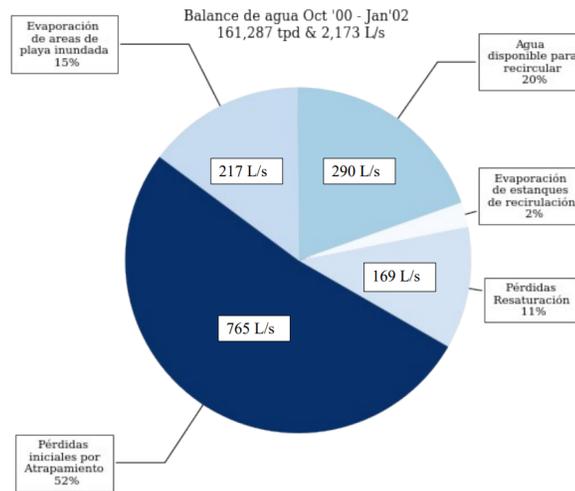


Figura 2.5: Balance hídrico realizado en Tranque Talabre

Nota. Adaptado de *Conceptual model for estimating water recovery in tailings impoundments*, de C. Wels & A. Robertson, 2003, (Wels y Robertson, 2003)

Con lo anterior, se aprecia que del total de agua que ingresa al depósito de relaves sólo un 20% corresponde al agua recuperada y recirculada hacia los procesos planta. En consecuencia, el mejor entendimiento y comprensión de los mecanismos de pérdida de agua constituye un punto clave para la implementación de estrategias que permitan aumentar la recuperación de agua desde el depósito.

2.3.1. Pérdidas por atrapamiento

Las pérdidas de agua por atrapamiento constituyen el principal mecanismo de pérdida en un depósito de relaves convencional. Dado esto, es de vital importancia identificar los fenómenos físicos y parámetros críticos que gobiernan su comportamiento.

2.3.1.1. Índice de vacíos

Para comprender los fenómenos que gobiernan las pérdidas por atrapamiento es de vital importancia establecer una terminología que describa la geometría interna de un material granular, tales como, los relaves ya sedimentados en un depósito.

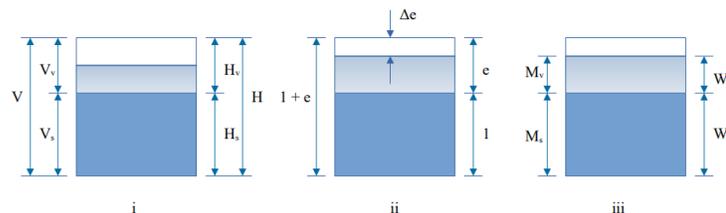


Figura 2.6: Descripción de la geometría interna de un material granular

Nota. Adaptado de *Geotechnical Engineering for Mine Waste Storage Facilities* (p. 91), de G. Blight, 2009, (Blight, 2009)

El esquema *i* de la Figura 2.6 muestra el volumen total de sólidos agrupados como V_s , el cual para una sección transversal dada A posee una altura H_s . De forma similar, los vacíos poseen un volumen V_v y una altura H_v . El índice de vacíos se define como la razón entre el volumen de vacíos y el volumen de sólidos y se denota con la letra e .

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (2.2)$$

Luego, si se considera que no se presentan distorsiones geométricas y que la sección transversal definida por el material sólido A_s no es igual a la sección transversal definida por los vacíos A_v , lo que en general es cierto, se cumple la relación presentada en la Ecuación 2.3.

$$\frac{V_v}{V_s} = \left(\frac{H_v}{H_s} \right)^3 \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el volumen total se puede escribir como:

$$V = V_s + V_v = V_s + V_s e = V_s(1 + e) \quad (2.4)$$

Si el material está sujeto a compresión (esquema *ii*), cualquier variación de volumen ocurre en los vacíos ya que generalmente se supone que los sólidos son incompresibles, y si la altura de vacíos experimenta una variación Δe , la deformación volumétrica se define como:

$$\epsilon_v = \frac{\Delta e}{1 + e} \quad (2.5)$$

Por otro lado, el esquema *iii* muestra la masa y peso de la materia sólida. El aire en los poros también posee masa y peso, pero se considera despreciable en comparación con la del sólido y agua. Entonces, la densidad aparente seca del material se define como la masa seca (masa de sólidos) por unidad de volumen total.

$$\frac{M_s}{V} = \frac{\rho_s}{1 + e} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, el peso específico aparente seco:

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V} = \frac{\gamma_s}{1 + e} \quad (2.7)$$

La densidad del material se calcula como:

$$\rho = \frac{(M_s + M_v)}{V} \quad (2.8)$$

El contenido de agua gravimétrico del material se define como:

$$w = \frac{M_w}{M_s} \quad (2.9)$$

Por lo tanto:

$$\rho = \frac{M_s(1+w)}{V} = \frac{\rho_s(1+w)}{(1+e)} = \rho_d(1+w) \quad (2.10)$$

Similarmente, el peso específico:

$$\gamma = \gamma_d(1+w) \quad (2.11)$$

La gravedad específica de las partículas se define como:

$$G_s = \frac{\rho_s}{\rho_w} \quad (2.12)$$

Reemplazando en la Ecuación 2.10, se obtiene:

$$\rho = \frac{G_s(1+w)}{(1+e)}\rho_w \quad (2.13)$$

Para el peso específico:

$$\gamma = \frac{G_s(1+w)}{(1+e)}\gamma_w \quad (2.14)$$

El grado en el cual los poros del material granular son rellenados con agua, se define como el grado de saturación S :

$$S = \frac{V_w}{V_v} = \frac{V_w}{V_w + V_a} \quad (2.15)$$

Donde V_a corresponde al volumen de aire, puesto que el volumen de vacíos corresponde a la suma del volumen de agua y volumen de aire. Luego, dado que $V_w = M_w/\rho_w$ y considerando la Ecuación 2.9 se obtiene que $M_w = wM_s = V_s w \rho_w G_s$. Pero $V_s e = V_v$. Reemplazando:

$$S = \frac{v_s w G_s}{V_s e} = \frac{w G_s}{e} \quad (2.16)$$

Por lo tanto, la densidad también se puede escribir como:

$$\rho = \frac{G_s(1 + eS/G_s)}{(1+e)}\rho_w = \frac{(G_s + eS)}{(1+e)}\rho_w \quad (2.17)$$

Lo que se cumple de forma análoga para el peso específico. Luego, si un medio se encuentra completamente saturado, es decir, $S = 1$, la densidad del medio saturado se calcula como:

$$\rho_{sat} = \frac{(G_s + e)}{(1+e)}\rho_w \quad (2.18)$$

Lo que se cumple de forma análoga para el peso específico en un medio completamente saturado. En el caso de la densidad (y peso específico) aparente, al reemplazar el resultado de la Ecuación 2.10 en la Ecuación 2.13, se obtiene la Ecuación 2.19 que se interpreta como si en la Ecuación 2.17

el contenido de humedad $S = 0$.

$$\rho_d = \frac{G_s}{(1 + e)} \rho_w \quad (2.19)$$

Además, se debe considerar que un medio granular, la porosidad queda definida como:

$$n = \frac{e}{1 + e} \quad (2.20)$$

Entonces, las pérdidas de agua por atrapamiento surgen debido a que el agua queda atrapada o retenida en los intersticios del relave ya sedimentado por la acción capilar. Donde, el agua intersticial puede ser calculada mediante el conocimiento de la gravedad específica de las partículas sólidas y el índice de vacíos del relave ya depositado y sedimentado. Esto constituye una de las principales fuentes de error con los datos, y que aporta al término "losses" en la Ecuación 2.1, porque, si bien en la actualidad las mediciones del índice de vacíos existen, el índice de vacíos puede variar ampliamente, desde valores cercanos a 0.5 a 60 metros de profundidad desde la superficie de la playa hasta valores cercanos a 2.2 a 2 metros de profundidad debido al mecanismo de consolidación (Blight, 2009).

2.3.1.2. Estimación de las pérdidas por atrapamiento

Para realizar la estimación de las pérdidas por atrapamiento se considera la utilización de las formulaciones presentadas anteriormente.

En primer lugar, supóngase que la tasa de deposición de relave seco por unidad de superficie de relave en el depósito es T , que la gravedad específica de las partículas sólidas que componen el relave es G_s , que el índice de vacíos medido es e_0 y que la densidad del agua es ρ_w . Con esto, la densidad del relave completamente saturado ρ_t se obtiene aplicando la Ecuación 2.18.

$$\rho_t = \frac{G_s + e_0}{1 + e_0} \rho_w \quad (2.21)$$

Como se tiene un medio completamente saturado, sabemos de la Ecuación 2.16 que el índice de vacíos se calcula como:

$$e_0 = wG_s \quad (2.22)$$

Entonces a partir de la Ecuación 2.21 y la Ecuación 2.22, se calcula el contenido de agua como:

$$w = \frac{G_s \rho_w - \rho_t}{G_s (\rho_w - \rho_t)} \quad (2.23)$$

Luego, de la Ecuación 2.9, si los relaves que alimentan al depósito poseen un contenido de agua constante, el flujo de alimentación de agua por unidad de área del depósito (F según la Ecuación 2.1) se puede calcular como:

$$F = wT \quad (2.24)$$

Y por lo tanto el agua contenida en los intersticios del relave (I según la Ecuación 2.1) se puede calcular como:

$$I = \frac{e_0}{G_s} T \quad (2.25)$$

Una de las variables críticas para la estimación es la densidad del relave ρ_t . Esta puede ser medida en balanzas de pulpa, que corresponde a una balanza de resorte calibrada en unidades de densidad relativa de pulpa (ρ_t/ρ_w). Para medir, un cilindro calibrado es rellenado con un litro de pulpa y es pesado en la balanza de pulpa. Las calibraciones de la balanza entregan la densidad relativa de la pulpa (ρ_t/ρ_w), como también valores de w para distintos valores de G_s .

La problemática asociada a la estimación de las pérdidas por atrapamiento, es que la densidad de la pulpa es a menudo un valor estimado y no un valor medido, que es también variable. La densidad del relave puede variar ampliamente, dado que, operacionalmente, la planta de procesamiento no puede controlar la densidad de la pulpa de tal manera de mantenerla constante en el tiempo.

Por otro lado, según mediciones realizadas en terreno, el índice de vacíos disminuye a medida que se profundiza en el depósito (Blight, 2009). Esto es de suma relevancia al momento de caracterizar las pérdidas por atrapamiento, pues existe un mecanismo físico que explica este fenómeno, el cual es conocido como consolidación.

2.3.1.3. Consolidación de medios porosos

Previo a la presentación de las ecuaciones de consolidación, se debe considerar algunos principios básicos que subyacen a la teoría de consolidación.

■ Compresión sin drenaje

Considere un elemento de medio granular de porosidad n , saturado con un fluido. El elemento es cargado, bajo condiciones de no drenaje, por un esfuerzo total isótropo de magnitud $\Delta\sigma$. La presión de poro de agua es denotada por Δp . Luego, se debe encontrar una relación entre $\Delta\sigma$ y Δp , la carga es aplicada en dos etapas. La primera está asociada al incremento de presión en el fluido y en las partículas sólidas de magnitud Δp . La segunda está asociada a la carga aplicada sobre el medio granular sin considerar la presión de poro, de magnitud $\Delta\sigma - \Delta p$.

En la primera etapa, el cambio de volumen de fluido en los poros se escribe como:

$$\Delta V_f = -nC_f\Delta pV \quad (2.26)$$

Donde C_f es la compresibilidad del fluido en los poros y V es el volumen del elemento considerado. Por otro lado, el cambio de volumen de las partículas sólidas se escribe como:

$$\Delta V_s = -(1-n)C_s\Delta pV \quad (2.27)$$

Donde C_s es la compresibilidad del material sólido. Considerando que todas las partículas tienen la misma compresibilidad, se deduce que su compresión uniforme genera un cambio en el volumen de los poros de la misma magnitud. Así, el cambio de volumen total del medio poroso es:

$$\Delta V = C_s\Delta pV \quad (2.28)$$

En la segunda etapa, la presión en el fluido se mantiene constante, en consecuencia no se genera un cambio de volumen en el fluido.

$$\Delta V_f = 0 \quad (2.29)$$

Posteriormente, el incremento de esfuerzo en el medio granular $\Delta\sigma - \Delta p$, a presión de poro constante, causa un incremento de esfuerzo promedio de magnitud $(\Delta\sigma - \Delta p)/(1 - n)$ en las partículas sólidas. En consecuencia, el cambio de volumen generado en las partículas sólidas se escribe como:

$$\Delta V_s = -C_s(\Delta\sigma - \Delta p)V \quad (2.30)$$

En esta etapa, el cambio de volumen en el medio poroso involucra en su conjunto a la deformación debido a los deslizamientos y rodaduras en los puntos de contacto entre las partículas sólidas. Suponiendo que esto es un proceso lineal, se deduce que en esta etapa el cambio de volumen se escribe como:

$$\Delta V = -C_m(\Delta\sigma - \Delta p)V \quad (2.31)$$

Donde C_m es la compresibilidad del medio poroso. Es de esperar que la compresibilidad del medio poroso sea mucho mayor que la compresibilidad de los constituyentes del sistema, el fluido y las partículas sólidas, debido a que la principal causa en la deformación de suelos se debe al reordenamiento de las partículas en el medio granular, como consecuencia del deslizamiento y rodado.

Considerando los resultados por etapa, los cambios totales en los elementos de volumen quedan descritos por:

$$\Delta V_f = -nC_f\Delta pV \quad (2.32)$$

$$\Delta V_s = -(1 - n)C_s\Delta pV - C_s(\Delta\sigma - \Delta p)V \quad (2.33)$$

$$\Delta V = -C_s\Delta pV - C_m(\Delta\sigma - \Delta p)V \quad (2.34)$$

Dado que no existe drenaje, dado el supuesto inicial, el cambio en el volumen total debe ser igual al cambio de volumen de fluido y de las partículas sólidas que componen el medio granular, es decir, $\Delta V = \Delta V_s + \Delta V_f$. Con esto, es posible obtener la siguiente relación

$$\frac{\Delta p}{\Delta\sigma} = B = \frac{1}{1 + n(C_f - C_s)/(C_m - C_s)} \quad (2.35)$$

Donde la derivación que conduce a la Ecuación 2.35 se debe a Bishop (Bishop, 1973). Cabe mencionar que en estudios previos, cómo el de Terzaghi, la compresibilidad del fluido y sólido no se tomaron en cuenta, es decir, $C_f = C_s = 0$. En este caso B bajo condiciones de esfuerzos isotropos, es igual a 1 y se utiliza frecuentemente como primera aproximación (Verruijt, 2010).

La posibilidad de que C_s sea mayor que C_w es pequeña en rocas y suelos completamente saturados. Así, en la mayoría de los trabajos geotécnicos en los cuales se trabaja con medios saturados es una buena aproximación considerar que $C_s \approx C_f \approx 0$, puesto que la teoría de consolidación de Terzaghi entrega estimaciones lo suficientemente precisas (Blight, 2009). Dentro de los trabajos geotécnicos que aplican dicha teoría se menciona aquellos relacionados a la estimación de una tasa de crecimiento segura en depósitos de relave de relleno hidráulico.

Por otro lado, hay casos en los cuales es importante considerar que C_s presenta valores mayores a C_f como ocurre en el caso de los procesos de reducción de tamaño de partículas que poseen gas ocluido (cómo las que se encuentran en las cenizas de combustible pulverizada) dada la compresibilidad presentada por el gas.

■ Relación entre esfuerzo, deformación y presión de poro

Previo a enunciar la teoría de consolidación tridimensional propuesta por Biot en el año 1941 (M. A. Biot, 1941) se definen algunas relaciones y conceptos que facilitan la comprensión de dicha teoría.

En primer lugar, deben enunciar todos los supuestos considerados en la deducción de las relaciones físicas y en la teoría de consolidación, las cuales corresponden a la siguientes:

1. Suelo isótropo
2. Reversibilidad en la relación esfuerzo-deformación bajo condiciones de equilibrio final
3. Linealidad en la relación esfuerzo-deformación
4. Deformaciones pequeñas
5. El agua contenida en los poros es incompresible
6. El agua fluye a través del esqueleto poroso de acuerdo a la ley de Darcy

Entonces, en primer lugar se debe considerar un pequeño elemento cúbico de suelo consolidado, que se encuentra en una orientación paralela a los ejes coordenados. Además, se considera que el tamaño de dicho elemento es lo suficientemente grande en comparación al tamaño de los poros, por lo que el material puede ser considerado como un material homogéneo, pero a la vez, el tamaño del elemento se considera lo suficientemente pequeño comparado con el fenómeno macroscópico que interesa analizar, de este modo dicho elemento se considera infinitesimal para efectos matemáticos.

Luego, las componentes del esfuerzo promedio que actúan sobre el elemento de suelo deben satisfacer las expresiones conocidas de condición de equilibrio para un campo de esfuerzos, las cuales se presenta a continuación:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2.38)$$

Donde σ son las componentes de los esfuerzos normales y τ son las componentes del esfuerzo de corte. Físicamente se puede pensar que estos esfuerzos están compuestos por dos partes: Una que es consecuencia de la presión hidrostática del agua que rellena los poros y la otra causada por el esfuerzo promedio en el esqueleto.

Luego, es importante definir las componentes de la deformación en el suelo. Así, considerando que u , v y w son las componentes del desplazamiento del suelo y considerando que las deformación son pequeñas, las ecuaciones que gobiernan las componentes de la deformación corresponden a las siguientes:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.39)$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.40)$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.41)$$

Luego, con el objetivo de describir completamente la condición macroscópica del suelo se debe considerar una variable adicional la cual expresa la cantidad de agua en los poros. Así, se define θ llamada variación en el contenido de agua, la cual corresponde al incremento de volumen de agua por unidad de volumen de suelo. Luego, el incremento en la presión de agua se denota con la letra σ .

Por otro lado, la presión de agua en los poros puede considerarse uniforme siempre y cuando el tamaño del elemento de suelo sea lo suficientemente pequeño o, si este no es el caso, siempre y cuando los cambios ocurran a una velocidad lo suficientemente pequeña como para que las diferencias de presión sean insignificantes.

Es claro que si los cambios en el suelo ocurren por procesos reversibles, la condición macroscópica del suelo debe ser una función definida de los esfuerzos y la presión del agua, es decir, las siete variables e_x , e_y , e_z , γ_x , γ_y , γ_z y θ deben ser una función definida de las variables σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z y σ .

Además, si se supone que las deformaciones y las variaciones en el contenido de agua son en cantidades pequeñas, la relación entre estos dos conjuntos de variables puede tomarse como lineal en una primera aproximación. Primero consideramos estas relaciones funcionales para el caso particular donde $\sigma = 0$. Así, las seis componentes de la deformación son solamente funciones de las seis componentes del campo de esfuerzos σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z . Suponiendo que el suelo tiene propiedades isotrópicas, estas relaciones deben reducirse a las conocidas expresiones de la ley de Hooke para un cuerpo elástico isotrópico en la teoría de la elasticidad, entonces se obtiene:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z), \quad \gamma_x = \frac{\tau_x}{G} \quad (2.42)$$

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z), \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G} \quad (2.43)$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad (2.44)$$

Donde E , G y ν son constantes y corresponden al modulo de deformación, al modulo de corte y al coeficiente de Poisson del esqueleto sólido. En realidad, sólo hay dos constantes dada la relación existente entre dichos modulos:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.45)$$

Sin embargo, las relaciones anteriores son válidas si no se considera el efecto de σ . Así, si se considera el efecto de σ se debe considerar que σ no produce ninguna deformación angular dado que se supone un material isótropo y, que por esta misma razón, su efecto debe ser el mismo en las tres componentes de la deformación lineal e_x , e_y y e_z . En consecuencia, al considerar la influencia de σ las deformaciones se escriben como:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{3H} \quad (2.46)$$

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \frac{\sigma}{3H} \quad (2.47)$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\sigma}{3H} \quad (2.48)$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G} \quad (2.49)$$

$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G} \quad (2.50)$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad (2.51)$$

Donde H es una constante física adicional. Así, se dispone de las seis relaciones que expresan todas las componentes de la deformación lineal y angular de un suelo como función de los esfuerzos que actúan sobre el mismo y la presión de agua en los poros. Sin embargo, aún se debe considerar la dependencia que existe de el incremento en el contenido de agua θ en función de las variables mencionadas previamente. La relación más general consiste en la siguiente:

$$\theta = a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z + a_4 \tau_x + a_5 \tau_y + a_6 \tau_z + a_7 \sigma \quad (2.52)$$

Luego, dado que el material es isótropo cambios en el signo de τ_x , τ_y y τ_z no afectan al contenido de agua, y por lo tanto $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ y el efecto de las componentes del esfuerzo de corte en θ desaparece. Mas aún, en las tres direcciones x , y y z se deben tener propiedades equivalentes $a_1 = a_2 = a_3$. Por lo tanto, la ecuación que expresa θ adquiere la forma:

$$\theta = \frac{1}{3H_1} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{R} \quad (2.53)$$

Donde H_1 y R son dos constantes físicas. De esta forma, las Ecuaciones 2.46, 2.47, 2.48, 2.49, 2.50, 2.51 y 2.53 contienen cinco constantes físicas diferentes. En realidad, el número de constantes físicas corresponden a cuatro dado que se puede demostrar que $H = H_1$ si se considera una definición adicional, la cual corresponde a la “energía potencial del suelo” o energía de deformación del suelo. Esta consideración significa que si los cambios ocurren a

una velocidad infinitamente lenta, el trabajo realizado para llevar el suelo desde la condición inicial hasta su estado final de esfuerzo y contenido de agua es independiente de la forma en que se alcanza el estado final y es un función definida de los seis componentes del esfuerzo y el contenido de agua. Esta suposición se deriva de manera bastante natural de la reversibilidad presentada anteriormente, ya que la ausencia de energía potencial implica que una cantidad indefinida de energía podría extraerse del suelo cargando y descargando a lo largo de un ciclo cerrado.

La energía potencial del suelo por unidad de volumen viene dada por:

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z + \sigma \theta) \quad (2.54)$$

Para demostrar que $H = H_1$ se considera una condición particular para los esfuerzos, tal que:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 \quad (2.55)$$

$$\tau_x + \tau_y + \tau_z = 0 \quad (2.56)$$

Así, la energía potencial se escribe como:

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon + \sigma \theta) \quad (2.57)$$

Donde $\varepsilon = e_1 + e_2 + e_3$ y a partir de las Ecuaciones 2.46, 2.47, 2.48, 2.49, 2.50, 2.51 y 2.53 se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_1 + \frac{\sigma}{H} \quad (2.58)$$

$$\theta = \frac{\sigma_1}{H_1} + \frac{\sigma}{R} \quad (2.59)$$

La cantidad ε representa el incremento de volumen de suelo por unidad inicial de volumen. Entonces, despejando σ_1 y σ se obtiene que:

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon}{R\Delta} - \frac{\theta}{H\Delta} \quad (2.60)$$

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{H_1\Delta} + \frac{3(1-2\nu)\theta}{E\Delta} \quad (2.61)$$

$$\Delta = \frac{3(1-2\nu)}{ER} - \frac{1}{HH_1} \quad (2.62)$$

La energía potencial en este caso se considera como una función de dos variables ε y θ . De este modo, en virtud a lo anterior se obtiene que:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = \sigma_1, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \sigma \quad (2.63)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \quad (2.64)$$

Lo que implica:

$$\frac{1}{H\Delta} = \frac{1}{H_1\Delta} \quad (2.65)$$

Entonces, dado que ya prueba que $H = H_1$, entonces es posible escribir θ como:

$$\theta = \frac{1}{3H} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{R} \quad (2.66)$$

De este modo, las Ecuaciones 2.46, 2.47, 2.48, 2.49, 2.50, 2.51 y 2.66 son las ecuaciones fundamentales que logran describir completamente en una primera aproximación las propiedades del suelo, para la deformación y el contenido de agua, bajo condición de equilibrio. Dichas ecuaciones contienen cuatro constantes físicas G , ν , H y R . Luego, si las ecuaciones fundamentales se escriben para los esfuerzos (y no las deformaciones) se obtienen las seis ecuaciones enunciadas:

$$\sigma_x = 2G \left(e_x + \frac{\nu \varepsilon}{1 - 2\nu} \right) - \alpha \sigma \quad (2.67)$$

$$\sigma_y = 2G \left(e_y + \frac{\nu \varepsilon}{1 - 2\nu} \right) - \alpha \sigma \quad (2.68)$$

$$\sigma_z = 2G \left(e_z + \frac{\nu \varepsilon}{1 - 2\nu} \right) - \alpha \sigma \quad (2.69)$$

$$\tau_x = G\gamma_x \quad (2.70)$$

$$\tau_y = G\gamma_y \quad (2.71)$$

$$\tau_z = G\gamma_z \quad (2.72)$$

Donde:

$$\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \frac{G}{H} \quad (2.73)$$

De la mismo forma, se puede expresar la variación en el contenido de agua como:

$$\theta = \alpha \varepsilon + \frac{\sigma}{Q} \quad (2.74)$$

Donde:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (2.75)$$

■ **Ecuación general de consolidación en tres dimensiones**

Ahora se procede a plantear las ecuaciones diferenciales para el fenómeno transiente de consolidación, es decir, aquellas ecuaciones que gobiernan la distribución de esfuerzos, contenido de agua, y compactación en función del tiempo en un suelo sometido a cargas. Así, sustituyendo las ecuaciones fundamentales para los esfuerzos (desde la Ecuación 2.70 hasta la 2.75) en la ecuación de equilibrio se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (2.76)$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0 \quad (2.77)$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \quad (2.78)$$

Las cuales corresponden a tres ecuaciones con cuatro incógnitas u , v , w y σ . Para poder resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se requiere de una ecuación adicional. Lo anterior se logra integrando la ley de Darcy la cual gobierna en flujo de agua en medios porosos. Entonces, considerando el mismo elemento diferencial de volumen de suelo utilizado para deducir las distintas relaciones y se llama V_x el volumen de agua fluyendo por segundo y unidad de área a través de la cara del elemento de suelo ortogonal al eje x . De la misma forma se definen V_y y V_z . En virtud a la ley de Darcy, estas tres componentes de flujo unitario están relacionadas con la caída de presión mediante las siguientes relaciones:

$$V_x = -k \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad V_y = -k \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad V_z = -k \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (2.79)$$

La constante física k se llama coeficiente de permeabilidad de el suelo. Cabe mencionar que k es igual en las tres direcciones dado que se considera que el esqueleto sólido es isótropo. Por otro lado, si se considera que el agua es incompresible la tasa de cambio de contenido de agua de un elemento de suelo debe ser igual al volumen de agua que entra al elemento de suelo por segundo a través de su superficie, por lo tanto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.80)$$

Luego, combinando las Ecuaciones 2.74, 2.79 y 2.80 se obtiene la cuarta ecuación diferencial que compone el sistema.

$$k\nabla^2 \sigma = \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.81)$$

■ **Interpretación física de las constantes**

Las constantes E , G y ν poseen la misma interpretación que las establecidas en la teoría de elasticidad y se consideran como constantes promedios del esqueleto sólido. En este sentido, E corresponde al modulo de elasticidad (deformaciones elásticas), G corresponde al modulo de corte y ν mide la razón entre la deformación lateral y la deformación vertical en condición de equilibrio.

Por parte de las constantes físicas H y R , el coeficiente $1/H$ es una medida de la compresibilidad del suelo bajo un cambio en la presión de agua y el coeficiente $1/R$ mide el cambio en el contenido de agua bajo un cambio en la presión de agua. Así, cabe recordar que bajo los supuestos considerados en el planteamiento de la teoría de consolidación las constantes elásticas y las constantes H y R definen completamente las proporciones físicas de un suelo isótropo en condiciones de equilibrio.

El resto de las constantes que aparecen en la deducción de la teoría se derivan de las constantes elásticas, H y R . Por ejemplo, α se define como:

$$\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \frac{G}{H} \quad (2.82)$$

La cual mide la razón entre volumen de agua sacado o exprimido del suelo y el cambio de volumen del suelo si este último se comprime mientras permite que el agua escape.

Por otro lado, el coeficiente $1/Q$ mide la cantidad de agua que puede ser forzada a entrar al suelo bajo presión mientras el volumen de suelo se mantenga constante. Así, cabe destacar que las constantes α y Q presentan un efecto más significativo en suelo no completamente saturados, puesto que dependen del grado de saturación.

Cabe destacar que en este apartado se entrega una breve descripción de las constantes físicas, sin embargo un análisis más profundo de estas se detalla en el trabajo publicado por Biot & Willis (M. Biot y Willis, 1957).

Cabe mencionar que hay otros autores que plantean relaciones de consolidación aplicable en depósitos de relave, cómo lo es el caso de Gibson (Gibson, 1958) quien plantea la siguiente relación:

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.83)$$

Donde u corresponde a la presión de poro sobre y más allá de la presión de poro de equilibrio estático, γ' corresponde al peso específico sumergido del material, C_v es el coeficiente de consolidación y $\partial h/\partial t$ es la tasa de crecimiento de las capas de relave depositado.

2.3.2. Pérdidas por evaporación

Las pérdidas por evaporación constituyen uno de los mecanismos más relevantes en las pérdidas de agua en los sectores de playa activa. En consecuencia, la identificación de los factores que influyen en la evaporación, junto con la utilización de un modelo físico que sea capaz de cuantificar apropiadamente estas pérdidas, constituye un punto clave en el balance hídrico global en un depósito de relaves convencional.

Por lo mencionado anteriormente, surge la necesidad de conceptualizar apropiadamente la distintas componentes y relaciones físicas que involucran a la evaporación.

2.3.2.1. Evaporación potencial

Existen tres factores independientes que influyen el comportamiento de la evaporación en suelos sin vegetación (Newson y Fahey, 2003).

1. Disponibilidad de energía en la superficie que evapora el agua para suplir la demanda de calor latente.

Las fuentes de radiación para esto incluye el sol (radiación directa), el cielo y las nubes (radiación difusa), y el calor transferido desde el aire o suelos adyacentes.

2. La distribución de energía en el sistema.

Esto depende del albedo (o poder reflexivo) de la superficie, la difusividad térmica del suelo y aire, y los gradientes verticales de temperatura en ambos. Estos gradientes son influenciados por un segundo factor, el cual es la capacidad del aire de transferir vapor de agua lejos de la superficie en donde se evapora el agua. Esto es dependiente a su vez del gradiente vertical de humedad y la de efectividad de la mezcla turbulenta en las capas inferiores.

3. la disponibilidad de agua en y bajo la superficie de evaporación.

En el caso de los suelos depende de la conductividad hidráulica del medio granular y del contenido de humedad remanente en el medio.

Un gran número de diferentes definiciones de evaporación potencial (E_p) han sido propuestas en la literatura. Una de las definiciones más típicas corresponde a la de Penman (H. L. Penman, 1948) que la define como "la evaporación teórica que ocurriría desde una superficie infinita, adecuadamente abastecida de humedad cuando se expone a condiciones climáticas específicas que permanecen inalteradas por la evaporación misma". La evaporación real (E_a) en una superficie usualmente se considera proporcional a la evaporación potencial. Típicamente, esto es controlado por el contenido de humedad del suelo.

En el caso de los depósitos de relave, las estimaciones utilizadas para determinar la evaporación están frecuentemente basadas en datos obtenidos de bandejas de evaporación de clase A locales, el corresponde a un recipiente cilíndrico de dimensiones estandarizadas, con un diámetro de 47.5z profundidad de 10". Si bien esto no necesariamente representa la evaporación potencial, proporciona un punto de referencia ampliamente aceptado y disponible con el que comparar las evaporaciones medidas.

Particularmente, para depósitos de relave ubicados en zonas áridas o semi-áridas, la tasa de evaporación obtenida desde una bandeja de evaporación localizada inmediatamente adyacente al

depósito (o más exactamente, cercano a la laguna) puede ser algo menor que un valor obtenido de una bandeja ubicada lejos del depósito. Esto se debe al efecto localizado del agua en el almacenamiento sobre la humedad relativa en las inmediaciones del depósito de relaves, y también depende de la velocidad y dirección del viento (condiciones de borde convectivas).

Además, es de suma relevancia considerar que la radiación solar es el único factor realmente independiente que afecta a la evaporación; Para un conjunto de condiciones en estado estacionario, el resto de los factores se ajustan para producir una tasa de evaporación particular. Cualquier cambio en alguno de ellos no genera cambios proporcionales en la tasa de evaporación, pero si causa un cambio en los otros factores y genera un nuevo balance de energía en el sistema.

2.3.2.2. Balance de energía en una superficie

Cómo se menciona previamente, el proceso de evaporación requiere de un suministro de energía lo suficientemente alto para permitir el cambio de fase del agua desde la fase líquida a la fase vapor y remover la humedad del aire para permitir que el proceso continúe. En este proceso, el único suministro independiente en el balance de energía sobre una superficie de suelo o de relaves corresponde a la radiación solar. Luego, si se cuantifica la cantidad de energía consumida por el proceso de evaporación, la cantidad de agua evaporada puede ser deducida.

La cantidad de energía solar que llega a la superficie terrestre, depende principalmente de:

- La constante solar
- La latitud de la localización que se está considerando y época del año
- Influencia de la atmósfera (polvo y nubes)
- Albedo de la superficie terrestre
- Elevación de la localización

La constante solar es la cantidad de energía recibida en forma de radiación solar por unidad de tiempo y unidad de superficie, en una superficie teórica perpendicular a los rayos del sol y a la distancia media entre la Tierra y el Sol. Parte de esta radiación incidente es reflejada o absorbida por la atmósfera y no alcanza la superficie terrestre. La mayor parte de la radiación que llega a la superficie terrestre se limita a longitudes de onda cortas, en la banda de 0.3 a 3 μm . Al llegar al suelo, parte de la radiación de onda corta también se refleja en la superficie (Newson y Fahey, 2003).

Luego, el balance general de radiación entre el espacio y la superficie de la tierra puede ser descrito por las ecuaciones:

$$(R_d + R_s) = R_A (1 - \alpha) \quad (2.84)$$

$$R_n = (R_d + R_s) (1 - a) \quad (2.85)$$

Donde en la Ecuación 2.84, R_A es la radiación solar directa recibida en el límite exterior de la atmósfera y α es el albedo planetario o reflexividad, la proporción de la radiación solar reflejada por la atmósfera. El albedo planetario α depende de la nubosidad y la latitud, pero en las latitudes

habitadas de la Tierra de 60 °N a 45 °S, se encuentra en el rango de 0.3 a 0.5, siendo 0.4 un valor promedio anual razonable (Blight, 2009).

En la Ecuación 2.85, R_n es la radiación neta incidente en la superficie del suelo, R_d es la cantidad de radiación solar incidente directa, R_s es la cantidad de radiación solar incidente difusa, y a es el albedo o reflexividad de la superficie del suelo. El albedo de la superficie varía a lo largo del día y depende del color y la textura de la superficie de la Tierra. Normalmente para agua sobre una superficie de relaves de color claro, el albedo toma el valor de 0.4.

Muchos métodos indirectos para medir la evaporación están basados en medir o estimar los flujos de energía a través de la superficie del suelo, siendo la diferencia entre el flujo de entrada y salida el calor latente de vaporización. Estos métodos consideran la radiación neta, la cual es una función de la temperatura, emisividad y reflexividad de la superficie. Luego, esta radiación neta es convertida en calor neto de vaporización en concordancia con la ecuación general de balance de energía en una superficie de suelo, la que se escribe como:

$$R_n = H + L_e E + G \quad (2.86)$$

En la Ecuación 2.86, H es el flujo de calor convectivo hacia el aire, E es la tasa de evaporación, L_e es el calor latente de vaporización, R_n es el flujo de radiación neta y G es el flujo de calor transmitido hacia el suelo. En consecuencia, si la radiación y los términos del flujo de calor pueden ser medidos, el calor utilizado para la vaporización puede ser determinado. Esto comprende la base de los métodos de estimación de evaporación mediante balances de energía. Las componentes del balance de energía en la superficie se pueden apreciar en la Figura 2.7.

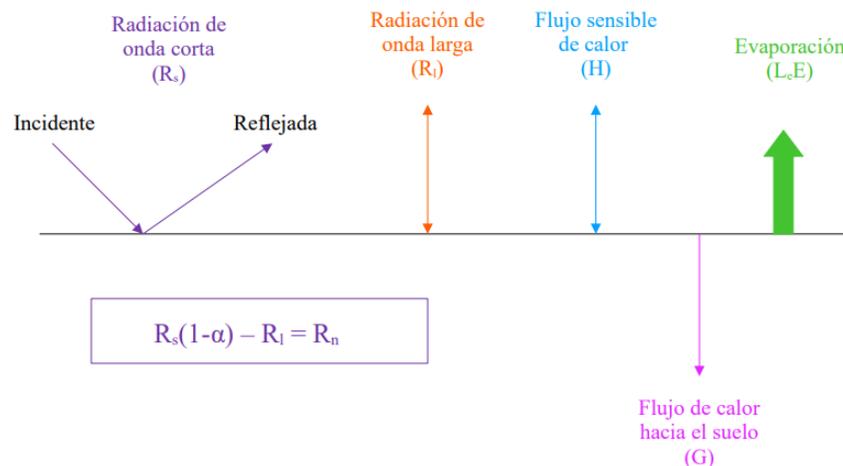


Figura 2.7: Componentes del balance de energía en una superficie

En lo que respecta a las componentes: R_n puede ser medido directamente y G puede ser estimado por los cambios en la temperatura y el gradiente de temperatura bajo la superficie junto con la capacidad calorífica específica del relave. H puede ser estimado por los gradientes de temperatura y humedad sobre la superficie. En principio, es posible hacer el cálculo de los términos de la Ecuación 2.86, pero en la práctica es complejo dado que las ecuaciones tienden a estar mal condicionadas, especialmente cuando los gradientes de temperatura y humedad son pequeños.

2.3.2.3. Evaporación relativa

La evaporación relativa se define cómo la razón entre la tasa de evaporación real y la tasa de evaporación potencial (E_a/E_p). La definición mencionada posibilita la comprensión de algunos fenómenos en términos relativos, lo que permite comparar los cambios entre una tasa de evaporación y la otra en distintos escenarios.

Un fenómeno de gran interés como consecuencia de la evaporación del agua de los relaves es el de secado. En términos generales, los cambios en el volumen de un relave conformado por agua fresca son producto del proceso de secado.

Inicialmente, cuando el relave es depositado se encuentra en el punto A de la Figura 2.8, donde el contenido de humedad se encuentra por sobre el límite líquido. Luego, a medida que el relave se seca, este pasa por el límite líquido y plástico, mientras va reduciendo su volumen. Hasta esta etapa, el relave se encuentra completamente saturado. Cuando el relave alcanza el punto B la tasa de cambio de volumen disminuye y diverge a una línea horizontal cómo se muestra en la figura (es decir, la pérdida de agua ya no es igual al cambio de volumen del relave). Este punto, corresponde al punto desde el cual el sólido comienza a desaturarse (en primer lugar, los poros de mayor tamaño). A medida que el sólido se siga secando, los poros de tamaño cada vez más pequeño comienzan a desaturarse y el aire comienza a entrar a los poros (presión de poro negativa). Cabe mencionar que la desaturación ocurre en un rango de contenido de humedad y debe considerarse que ocurre en una región más que en un punto específico. Eventualmente el sólido alcanza el límite de quiebre (shrinkage), donde no hay mayores incrementos en la densidad del relave, pero la permeabilidad continúa disminuyendo mientras el grado de saturación siga disminuyendo. (Newson y Fahey, 2003)

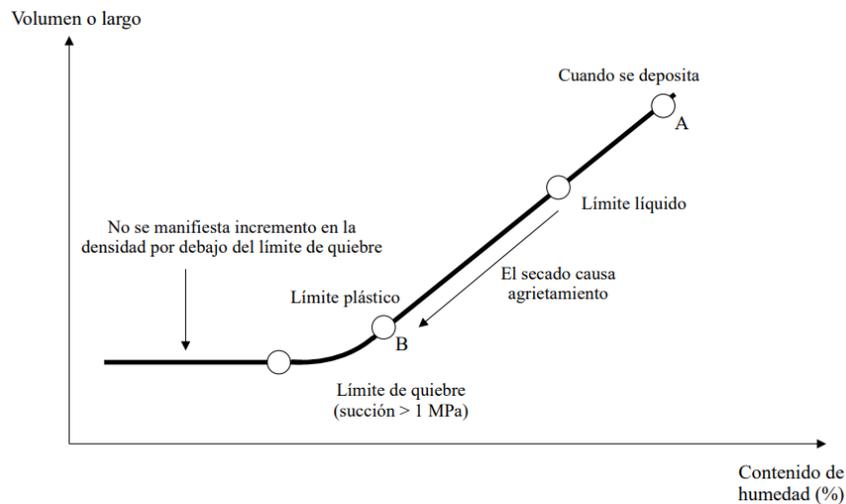


Figura 2.8: Cambios de estado debido al proceso de secado en relaves

Nota. Adaptado de *Measurement of evaporation from saline tailings storages* (p. 221), de T. Newson & M. Fahey, 2003, (Newson y Fahey, 2003)

Por otro lado, la tasa de evaporación real (E_a) varía en función del contenido de humedad como se muestra en la Figura 2.9.

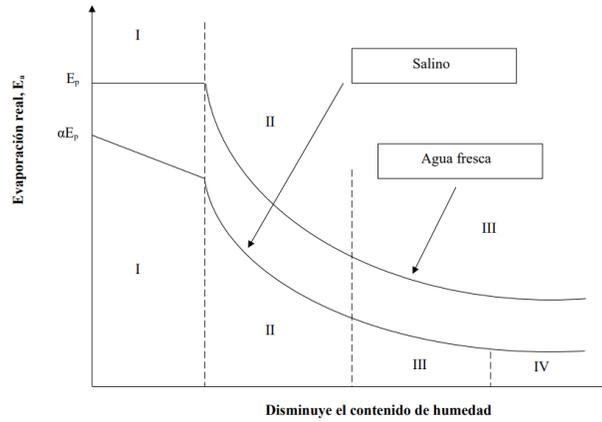


Figura 2.9: Variaciones en la tasa de evaporación real en función del contenido de humedad para relaves conformados por agua fresca y salina

Nota. Adaptado de *Measurement of evaporation from saline tailings storages* (p. 221), de T. Newson & M. Fahey, 2003, (Newson y Fahey, 2003)

En la Figura 2.9 la tasa de evaporación real en una superficie de relave conformado por agua fresca, E_a , varía desde un punto cercano a la evaporación potencial (E_p) (etapa I de secado) a casi cero (etapa III de secado), para un relave desaturado. La etapa I de secado está gobernada solamente por condiciones climáticas y ambientales, y es aplicable a condiciones de relave en o cercana a la saturación. Una vez que el relave no pueda seguir satisfaciendo la demanda del proceso de evaporación, este comienza a desaturarse. En la etapa II entonces comienza una rápida disminución en la tasa de evaporación. En este caso ambas, las condiciones climática y las propiedades del medio granular (como la permeabilidad la zona insaturada) controlan la tasa de evaporación durante esta fase. La etapa III ocurre una vez que el relave alcanza el contenido humedad residual y la tasa de evaporación es efectivamente cero. (Newson y Fahey, 2003)

Dado lo anterior, dependiendo de si se esté analizando un sector de playa activa (en donde se tiene una superficie de relave saturada) o un sector de playa inactiva (en donde dependiendo del tiempo de secado de la capa superficial de relave, esta puede encontrarse insaturada) las pérdidas por evaporación cambian en gran magnitud. Esto es respaldado por un estudio realizado en el tranque Laguna Seca de la mina Escondida en el año 1997 (Chambers et al., 2003) donde el resultado obtenido al medir la evaporación en una bandeja de evaporación en el tranque se observan en la 2.10.

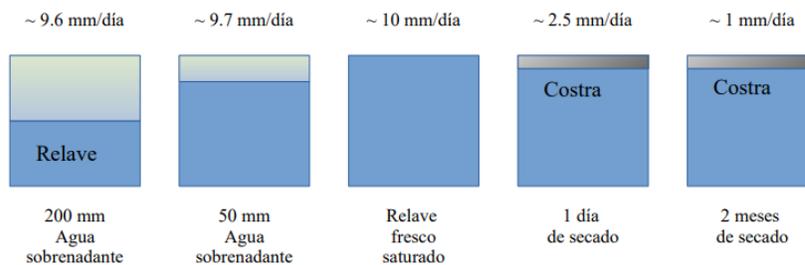


Figura 2.10: Variación en la tasa de evaporación

Nota. Adaptado de *Water recovery from a mine in the Atacama desert* (p. 12), de B. Chambers et al, 2003, (Chambers et al., 2003)

2.3.3. Pérdidas por resaturación

Las pérdidas por resaturación constituyen uno de los puntos de mayor interés en el desarrollo del presente trabajo. Estas pérdidas suponen un sumidero de agua al momento de depositar relave fresco proveniente desde la planta.

2.3.3.1. Concepto de resaturación

En primer lugar, se debe tener en consideración que después de que se realiza una descarga de relave en el depósito, pasado un determinado periodo de tiempo, ocurre un fenómeno de secado producto del proceso de evaporación ya detallado en la subsección de pérdidas por evaporación.

En consecuencia, cuando se está depositando una nueva capa de relaves fresca sobre las capas de relave previamente depositadas o secas, ocurre un proceso de infiltración del agua contenida en los relaves frescos hacia las capas de relave secas producto de la presión de poro negativa que existe debido a que el medio se encuentra desaturado. Estas pérdidas de agua que afectan a las capas de relave fresco recientemente depositadas se les conoce como pérdidas por resaturación. En consecuencia, para poder describir estas pérdidas se requiere estudiar las variables físicas que gobiernan en un medio desaturado o parcialmente saturado.

En primer lugar, según el estudio realizado por Wels & Robertson (Wels y Robertson, 2003) las pérdidas por resaturación dependen de la duración de la descarga. Inicialmente, estas pérdidas son altas, dado que los relaves frescos se depositan sobre capas de relaves desaturadas que se han secado al aire de forma significativa. La experiencia en terreno indica que estas pérdidas iniciales por resaturación consumen toda el agua disponible en un periodo de 1 a 2 días donde esencialmente no se recupera agua en este periodo de tiempo. Una vez que este déficit en el contenido de agua es solucionado y los relaves se resaturan, las pérdidas por resaturación disminuyen sustancialmente.

Sin embargo, las pérdidas por resaturación también crecen si los relaves son descargados durante un periodo extendido de tiempo, entendiéndose, durante más de 1 mes desde el mismo punto de descarga. Mientras que las áreas inundadas (o con agua sobrenadante), donde ocurre la deposición del relave, alcanzan un tamaño máximo, hay un incremento continuo en el tamaño total de área de deposición (o área húmeda) entre más relaves se depositen. Dicho en otras palabras, a medida que transcurre el tiempo, el área que define la escorrentía de agua desde el sector playa activa hacia la laguna ocupa cada vez menos porcentaje del área de deposición total, es decir, la razón entre el área inundada y el área húmeda disminuye. Esta separación natural del área inundada en un abanico de deposición activo causa pérdidas adicionales por infiltración debido a que los relaves frescos recientemente depositados comienzan un proceso de desaturación (principalmente debido a la evaporación) mientras más capas se siguen depositando en las cercanías del punto de descarga. Luego, cuando el flujo de relaves frescos proveniente de las últimas capas depositadas alcancen la zona en donde los relaves comienzan a desaturarse estos comienzan un proceso de resaturación hasta alcanzar el grado de saturación (Wels y Robertson, 2003).

2.3.3.2. Modelo de pérdidas por resaturación

Wels & Robertson (Wels y Robertson, 2003) plantean dos ecuaciones básicas que buscan describir las dos etapas más importantes asociadas a las pérdidas por resaturación mencionadas previamente.

- **Resaturación de capas desaturadas**

La ecuación que plantea Wels viene dada por:

$$IRL = DRW(1 - S_{dry}) \frac{e_f}{(1 + e_f)} A_{active} \quad (2.87)$$

Donde, DRW es la profundidad efectiva de resaturación, S_{dry} corresponde al grado (porcentaje) de saturación promedio de los relaves en el sector de playa inactiva, e_f corresponde al índice de vacíos una vez que la evaporación haya completado el proceso de secado de los relaves y A_{active} corresponde al área del sector de playa activa.

- **Resaturación por descarga prolongada**

La ecuación que plantea Wels viene dada por:

$$RWL = MD \cdot A_{flooded} \quad (2.88)$$

Donde MD corresponde al déficit de humedad, la que es una función del tiempo que los relaves frescos recientemente depositados se han expuesto al proceso de secado producto de la evaporación y $A_{flooded}$ corresponde al área inundada.

Luego, el tiempo disponible para que ocurra la evaporación entre la deposición de capas sucesivas en la misma porción del sector de playa activa, definido como tiempo de retorno, que es el tiempo que debe pasar antes de que la capa de relave siguiente llegue a la misma localización de la previa, se escribe como:

$$T_R = (R_f - 1) T_{Dep} \quad (2.89)$$

Donde R_f es la razón entre el área del sector playa activa y el área inundada y T_{Dep} es el tiempo promedio requerido para la deposición de una capa de relaves.

Luego, el tiempo promedio requerido para la deposición de una capa de relaves es una función de la tasa de deposición de sólidos T , el espesor promedio de las capas de relave depositadas D y la densidad aparente seca ρ_d .

$$T_{Dep} = D \frac{\rho_d}{T} A_{flooded} \quad (2.90)$$

2.3.4. Pérdidas por infiltración

Las pérdidas por infiltración constituyen el mecanismo de pérdida asociado a las características del medio granular por donde fluye el agua en el caso de los depósitos de relave convencionales. Si bien, este mecanismos reporta una menor cantidad de pérdidas de agua en comparación a los detallados previamente, la importancia de caracterizar apropiadamente los parámetros críticos y fenómenos físicos que gobiernan su comportamiento recae en el potencial impacto que puedan causar en la fundación o en el muro de contención.

2.3.4.1. Ley de Darcy

El fenómeno de infiltración, que se define como el proceso en el cual un fluido fluye a través de un medio granular, se puede caracterizar adecuadamente mediante el uso de la ley de Darcy, la que plantea que la velocidad del flujo a través de un medio poroso es proporcional al gradiente de carga hidráulica en la dirección del flujo. La formulación se expresa como:

$$v = ki \quad (2.91)$$

Donde v corresponde a la velocidad del flujo, k es el coeficiente de permeabilidad y i corresponde al gradiente de carga hidráulica en la dirección del flujo. La carga hidráulica se define como la presión por unidad de peso específico de fluido más la cota. (Blight, 2009)

Es importante destacar que el coeficiente de permeabilidad (k) es una medida de la resistencia del medio granular a que el fluido pueda fluir a través de él. En consecuencia, la velocidad o caudal asociado a las pérdidas por infiltración dependen fuertemente de esta propiedad del medio, por lo que caracterizar adecuadamente la permeabilidad del relave y de la fundación es un punto clave en la estimación de estas pérdidas.

El coeficiente de permeabilidad (k) depende fuertemente de las características de las estructuras y macroestructuras que componen la fundación (grietas de contracción, fisuras, estratificación, alternancia de capas gruesas y finas, capas gruesas ocasionales, etc) y los relaves (principalmente, grietas de contracción y fisuras, alternancia de capas gruesas y finas, y gradación horizontal desde partículas gruesas a finas). Como resultado de esta sensibilidad del coeficiente de permeabilidad, mediciones de permeabilidad a pequeña escala (usualmente, medidas en laboratorio) tienden a no ser una representación adecuada del medio que se está estudiando, dado que muestras de pequeña escala no contienen características asociadas a las macroestructuras, por lo tanto, el efecto generalizado de un conjunto de macroestructuras no se estima correctamente. Además, usualmente son muestras perturbadas y presentan una profundidad distinta del medio desde donde se obtiene dicha muestra. Por esta razón, en general, se prefiere realizar mediciones de gran escala en terreno del coeficiente de permeabilidad.

2.3.4.2. Diferencias en la medición de la permeabilidad para pequeña y gran escala

Según estudios realizados por distintos autores, Day and Daniel (Day y Daniel, 1985) y Chen and Yamamoto (Chen y Yamamoto, 1987) se deduce una serie de posibles razones que respaldan el hecho de que las mediciones de permeabilidad en campo difieren de las mediciones realizadas en laboratorio. Estas razones se resumen en los siguientes puntos:

- Una gran área expuesta a infiltración tiene mayor probabilidad de contener imperfecciones en forma de fracturas y zonas de mayor permeabilidad que en el caso de áreas pequeñas.
- El coeficiente de permeabilidad en la ecuación de Darcy (Ecuación 2.91) no es una constante y depende del gradiente hidráulico en la dirección del flujo. Por lo tanto, la existencia de gradientes hidráulicos distintos en campo y en laboratorio, genera que se tengan mediciones distintas en campo y en laboratorio.
- Un espécimen sujeto a un alto esfuerzo efectivo presenta una menor permeabilidad que en el caso de un espécimen similar sujeto a un esfuerzo efectivo bajo.

2.3.4.3. Distribución de tamaño de partículas en el sector playa

Para efectos de diseño, los relaves pueden ser considerados como un fluido equivalente homogéneo y así modelar el comportamiento de las pérdidas de carga en el transporte hacia el depósito de relaves. Sin embargo, esto ya no es válido una vez que los relaves se encuentran en el depósito.

En los depósitos de relave convencional, los relaves son depositados en las cercanías del perímetro del muro de contención y después escurren por el sector playa hacia la laguna desde donde el agua es recuperada y recirculada a la planta.

Los relaves se depositan usualmente en puntos de descarga múltiples, y la extensión del flujo después de la deposición trae como resultado una disminución en la velocidad a medida que el relave desciende hacia la laguna. Luego, dado que las partículas más gruesas que componen al relave sedimentan primero que las partículas más finas, se genera como resultado una distribución de tamaño de partículas playa abajo, con las partículas gruesas depositadas adyacentes a los puntos de descarga y progresivamente se tienen partículas depositadas más finas con el incremento de la distancia desde el punto de descarga. La Figura 2.11 muestra la distribución de tamaño de partículas que resulta en una gran playa (280 metros de largo) de un depósito de relaves de diamante (Blight y Bentel, 1983).

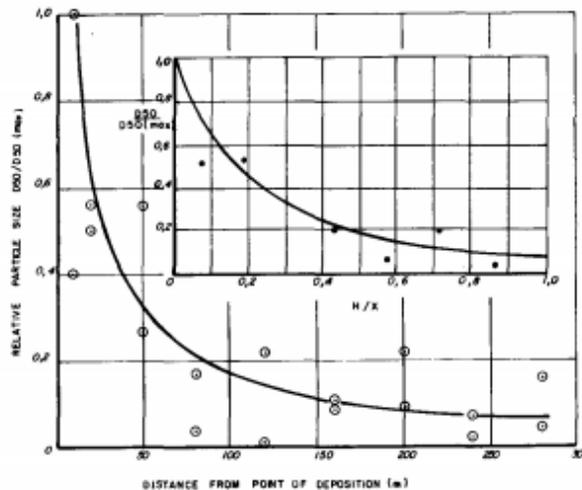


Figura 2.11: Distribución del tamaño de partículas que ocurre en la playa de un depósito de relaves convencional

Nota. Tomado de *The behaviour of mine tailings during hydraulic deposition* (p. 81), de G. Blight & G. Bentel, 1983, (Blight y Bentel, 1983)

Es importante mencionar que la distribución de tamaño de partículas en el sector playa tiene un efecto significativo en la estabilidad del muro de contención principal en un depósito de relaves. Si el muro de contención y la zona más perimetral del sector playa están compuestos de partículas gruesas, que es un material más permeable, el nivel freático disminuirá su cota y esto le ofrece mayor resistencia al muro como consecuencia de una menor presión de poros. Sin embargo, las ventajas que se puedan obtener de la distribución de tamaño de partículas en un depósito de relaves sólo pueden ser aprovechadas si se logra predecir su comportamiento en la etapa de diseño mediante un análisis completo del depósito de relaves.

A continuación, dado el fenómeno descrito, se plantean las ecuaciones propuestas por Blight & Bentel (1983) para derivar un método que sea capaz de predecir el tamaño de partícula predominante, y por lo tanto, indirectamente la permeabilidad, en cualquier punto a lo largo del sector playa. Estas ecuaciones son una herramienta que es posible utilizar para determinar la posición de la superficie freática y, por lo tanto, el esfuerzo de corte en el muro de contención principal.

Considere una partícula de diámetro D desplazándose playa abajo con una pendiente i a una velocidad horizontal v_h mientras simultáneamente sedimenta a una velocidad v_v . Si se ignora la interferencia de las partículas adyacentes en el relave, la velocidad de sedimentación viene dada por la siguiente formulación:

$$v_v^2 = \frac{4(\rho_s - \rho_w)gD}{\rho_w 3C} = KD \quad (2.92)$$

En donde, ρ_s es la densidad de las partículas, ρ_w es la densidad del fluido homogéneo y C es un coeficiente.

Luego, si la profundidad de la capa de fluido es δ , el tiempo máximo que le toma a la partícula de diámetro D sedimentar hasta llegar a la superficie de la playa es:

$$t_s = \frac{\delta}{v_v} \quad (2.93)$$

Durante este tiempo, la partícula se desplaza playa abajo hasta una distancia horizontal máxima dada por:

$$H = v_h \frac{\delta}{v_v} \quad (2.94)$$

y v_h está gobernada por la ecuación de Chézy válida en canales abiertos, dado que el escurrimiento del relave erosiona las partículas sedimentadas previamente en la superficie de la playa y forma pequeños canales por donde preferentemente escurre el relave, de la forma:

$$v_h = C(\delta i)^{\frac{1}{2}} \quad (2.95)$$

Por lo tanto, despejando el diámetro de la partícula:

$$D = \frac{C\delta^{\frac{3}{2}}i^{\frac{1}{2}}}{KH} \quad (2.96)$$

En otras palabras, el tamaño de partícula predominante que se encuentra a una distancia H desde el punto de deposición es aproximadamente inversamente proporcional a H . Esta es la forma de la curva que se observa en la Figura 2.11. Alternativamente, si la velocidad de sedimentación está gobernada por la ley de Stokes:

$$v_v = \frac{(\rho_s - \rho_w)dD^2}{18\eta} = K^1 D^2 \quad (2.97)$$

y, por lo tanto:

$$D = \left[\frac{C\delta^{\frac{3}{2}}i}{K^1H} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.98)$$

Es decir, el tamaño de partícula predominante que se encuentra a una distancia H desde el punto de deposición es inversamente proporcional al cuadrado de H .

Este análisis es aproximado, dadas las idealizaciones en las que está basado. Además, de que la interferencia entre partículas deba ocurrir, la pendiente de la playa i varía en función de H , y como el flujo se expande desde el punto de deposición, δ disminuye. Esto se traduce en que existen más factores que afectan a la distribución de tamaño, cómo el movimiento generado por la rodadura de las partículas depositadas a lo largo de la superficie de la playa inducida por el flujo y los cambios de pendiente. También es posible que el material depositado durante un ciclo de deposición, pueda ser erosionado y arrastrado por el flujo, redepositándolo en el ciclo de deposición siguiente.

Es de suma relevancia tener presente de que las condiciones de flujo laminar que se suponen para el análisis no siempre ocurren. En vez de esto, un flujo inestable, desordenado y turbulento es comúnmente observado en el sector playa. Este desorden en el flujo causa que el régimen de sedimentación se vea alterado y por lo tanto las partículas finas pueden sedimentar antes que lo predicho por la Ecuación 2.98.

Cabe mencionar que el análisis realizado por Blight & Bentel supone que el perfil de distribución de velocidades es constante en la sección de escurrimiento, lo cual es válido en fluidos ideales. En contraste, en fluidos reales se desarrolla un perfil de velocidades $v_h = f(y)$ donde y corresponde a la distancia medida perpendicularmente desde el fondo del canal y f corresponde a la forma de perfil de distribución de velocidades. En el análisis considerado Blight et al. supone condiciones de flujo laminar y escurrimiento uniforme, donde para este caso particular la forma del perfil de velocidades viene dado por la Ecuación 2.99.

$$v_h(y) = \frac{\rho_w g i}{\eta} y \left(\delta - \frac{y}{2} \right) \quad (2.99)$$

Por lo tanto, al calcular la distancia recorrida horizontalmente por una partícula ubicada inicialmente en la superficie libre de escurrimiento y suponiendo que la densidad y la viscosidad del fluido homogéneo son constantes para cada sección de escurrimiento se obtiene la Ecuación 2.100.

$$H = \frac{1}{v_v} \int_0^{\delta} v_h(y) dy = \frac{1}{v_v} \frac{\rho_w g i}{3\eta} \delta^3 \quad (2.100)$$

Capítulo 3

Metodología

3.1. Ecuaciones base del modelo

En primer lugar, se debe enunciar cuales son las ecuaciones básicas que componen el modelo físico. El modelo posee cinco ecuaciones fundamentales, las cuales se deducen al analizar la descarga de un flujo de relave en el sector playa, donde dicho flujo corresponde al de una mezcla (relave) que se compone tanto de una fase líquida como de una fase sólida. En consecuencia, dependiendo de qué fase se busque analizar (sólido, líquido o mezcla) se obtienen distintas formulaciones que buscan expresar conceptualmente la física detrás del escurrimiento del relave.

La existencia de un flujo de relave en el sector playa es consecuencia de la descarga del relave en cada punto de descarga, dado que el relave descargado de dichos puntos al impactar contra la superficie de la playa genera un proceso erosivo de las partículas que componen la superficie, formando así, canales por donde circula el relave desde las cercanías del punto de descarga hasta el sector laguna. Se supone que la descarga de cada punto sólo puede generar un canal por punto (dado que la posibilidad de que se generen ramificaciones del canal se considera un proceso de segundo orden para efectos del presente estudio).

Entonces, previo a detallar el cómo se deducen cada una de las ecuaciones, se enuncian los supuestos considerados y se esquematiza el volumen de control utilizado junto con las variables de interés necesarias para dicha deducción. Finalmente, se enuncia una hipótesis adicional clave en el modelo que permite obtener una solución simple al sistema de ecuaciones, esta hipótesis corresponde a la hipótesis cuasiestática.

3.1.1. Supuestos del modelo

A continuación, se especifican los supuestos considerados para la confección del modelo físico.

1. Modelo cuasiestático
2. La fase sólida y líquida son incompresibles
3. Los canales generados por el proceso erosivo se suponen rectangulares y de ancho constante
4. El escurrimiento de relave en el sector playa es gradualmente variado
5. La concentración volumétrica de sólidos es constante en una misma sección de escurrimiento

6. La concentración crítica de empaquetamiento se supone constante a lo largo del escurrimiento
7. Se considera que la mezcla sólido-líquida se comporta como un fluido equivalente homogéneo de comportamiento no Newtoniano, en particular, el fluido es Herschel-Bulkley. Sin embargo, se supone que existe un mecanismo de deposición de partículas
8. Se considera que por el rango de tamaño de partículas que componen el relave en la descarga, la velocidad que adquieren las partículas sólidas en la dirección del flujo es igual a la velocidad media de escurrimiento
9. Al alcanzar la velocidad crítica de deposición, las partículas sólidas sedimentan y conforman una zona llamada “lecho”.
10. Las líneas de corriente son aproximadamente paralelas, por lo tanto, la ley hidrostática de presiones es válida en la dirección ortogonal al flujo
11. La ley de resistencia responde a la ley de Darcy-Weisbach
12. El factor de fricción considerado corresponde al factor de Chilton y Stainsby
13. La segregación de partículas se describe a través de un modelo de velocidad de depósito

3.1.2. Definición de volumen de control y variables de interés

En virtud a lo previamente detallado, si se estudia un volumen de control de largo dx para uno de los canales generados producto de la descarga, se obtiene el esquema observado en la Figura 3.1.

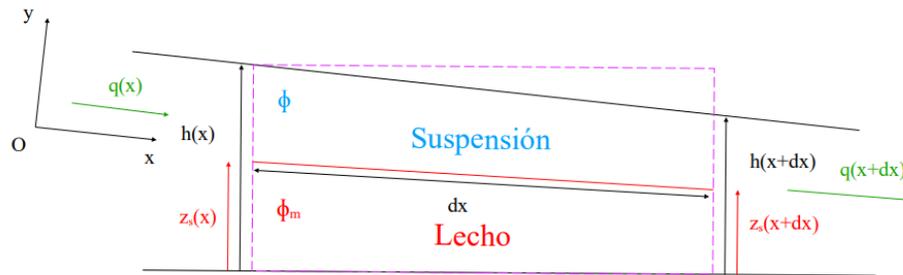


Figura 3.1: Volumen de control el canal generado

Las variables indicadas en el esquema de la Figura 3.1 corresponden a las siguientes:

- $q(x)$: Flujo volumétrico o caudal de mezcla unitario
- $z_s(x)$: Altura del lecho conformado por aquellas partículas sólidas que sedimentan a lo largo del escurrimiento
- $h(x)$: Altura de escurrimiento
- $\phi(x)$: Concentración volumétrica de sólidos en la zona de la mezcla o suspensión
- $\phi_m(x)$: Concentración crítica de empaquetamiento de sólidos en la zona del lecho

En la Figura 3.1 la línea punteada representa el volumen de control utilizado para analizar las variaciones en las propiedades físicas al interior y los flujos de dichas propiedades en las fronteras del volumen de control. Las propiedades físicas utilizadas en el análisis son la masa de la fase sólida, la masa de la fase líquida y el momentum lineal de la mezcla.

Además, dada la definición de las variables asociadas a la Figura 3.1 se define una nueva variable la cual resulta conveniente definir para las deducciones y estimaciones del modelo. Esta variable corresponde al espesor de escurrimiento \tilde{h} el cual se define según la Ecuación 3.1.

$$\tilde{h}(x) \equiv h(x) - z_s(x) \quad (3.1)$$

3.1.3. Formulación teórica de las ecuaciones de momentum y masa

Anteriormente, se menciona que el modelo físico se compone de cinco ecuaciones fundamentales, donde cada una de ellas busca expresar conceptualmente la física detrás del escurrimiento del relave. Así, tres de dichas ecuaciones se formulan teóricamente a partir de las ecuaciones de momentum y masa.

En una primera instancia, se busca expresar la conservación de masa de la fase sólida en el volumen de control detallado en la subsección 3.1.2. dado que el proceso de segregación de partículas sólidas naturalmente supone una acumulación de sólidos al interior del volumen de control, la cual es la responsable de la formación del lecho de partículas sólidas. Por otro lado, también se busca expresar la conservación de masa de la mezcla sólido-líquida puesto que la segregación longitudinal de partículas no sólo genera una acumulación de sólidos al interior del volumen de control, sino también una acumulación de líquido al interior del mismo. En consecuencia, la ecuación de conservación de masa para la mezcla permite expresar aquellas pérdidas de líquido producto del proceso de segregación, además de que permite integrar aquellas pérdidas de líquido generadas por otros mecanismo, cómo lo son la infiltración y la evaporación.

En lo que respecta a la ecuación de momentum lineal, esta busca representar la dinámica detrás del escurrimiento del relave. Así, al formular la ecuación de momentum lineal se debe identificar aquellas fuerzas que impulsan y resisten el movimiento de la mezcla. Para efectos del modelo, se integran en el balance de fuerzas la fuerza peso, las fuerzas de presión y la fuerza de fricción.

3.1.4. Consideraciones sobre la reología de la mezcla

Dado que el modelo propuesto considera el uso de un modelo de velocidad depósito para caracterizar la segregación longitudinal de partículas sólidas debido al efecto de la gravedad en una mezcla sólido-líquido, el asociar una reología específica a la mezcla no representa exactamente su comportamiento debido a dicha segregación (Ihle y Tamburrino, 2012a). Por esta razón, se considera que la mezcla se comporta aproximadamente como un fluido equivalente homogéneo, puesto que resulta conveniente utilizar la reología que caracteriza a dicho fluido homogéneo para obtener una estimación adecuada del factor de fricción.

Entonces, puesto que el uso de un modelo reológico tiempo independiente resulta una aproximación razonable, se considera que en particular el modelo plástico de Herschel-Bulkley corresponde a una representación reológica razonable. El modelo de Herschel-Bulkley describe el comportamiento generalizado de un plástico de Bingham y algunos modelos simples de fluido no Newtoniano corresponden a casos particulares del modelo de Herschel-Bulkley como lo son los el modelo

plástico de Bingham y de ley de potencia. La ecuación constitutiva que gobierna a los fluidos de Herschel-Bulkley viene dada por la Ecuación 3.2.

$$\tau = \tau_y + j(\gamma)^n \quad (3.2)$$

Donde τ corresponde al esfuerzo de corte, τ_y a la tensión de fluencia, j al factor de consistencia, γ es la tasa de deformación angular y n el índice de flujo.

Por otro lado, es importante destacar que, en el caso de los fluido Newtonianos, la ecuación de Darcy-Weisbach es ampliamente utilizada para relacionar la caída de presión longitudinal con la altura de velocidad en tuberías para flujos turbulentos y laminares. Sin embargo, la ecuación de Darcy-Weisbach requiere determinar un parámetro adimensional f el cual corresponde al factor de fricción de Fanning, el cual en flujos laminares viene dado por lo expresado en la Ecuación 3.3.

$$f = \frac{16}{Re} \quad (3.3)$$

Donde Re corresponde al número de Reynolds, el cual en fluidos Newtonianos viene dado por la Ecuación 3.4.

$$Re = \frac{\rho V D_h}{\mu} \quad (3.4)$$

Donde ρ corresponde a la densidad del fluido, V la velocidad media de escurrimiento, D_h el diámetro hidráulico y μ a la viscosidad del fluido. Posteriormente, Reed & Metzner (Metzner y Reed, 1955) en su estudio logran obtener una expresión para el factor de fricción no Newtoniano en el caso de flujos laminares relacionando su expresión general para la caída de presión con la ecuación de Darcy-Weisbach, obteniendo una expresión similar a la presentada en la Ecuación 3.3 pero considerando un número de Reynolds generalizado. Así, en el estudio presentado por Chilton & Stainsby (Chilton y Stainsby, 1998) dicho número de Reynolds generalizado se obtiene para el caso de un fluido Herschel-Bulkley, de tal manera que viene dado por la Ecuación 3.5.

$$R = \frac{\rho V D_h}{j \left(\frac{8V}{D_h} \right)^{(n-1)} \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \left(\frac{1}{1-X} \right) \left(\frac{1}{1-aX-bX^2-cX^3} \right)^n} \quad (3.5)$$

Donde X corresponde a la razón entre la tensión de fluencia τ_y y el esfuerzo de corte en la pared τ_w y a, b y c corresponden a coeficientes adimensionales dependientes del índice de flujo.

Alternativamente, el número de Reynolds generalizado se puede escribir en función de la viscosidad aparente en la pared μ_w , entregando la expresión presentada en la Ecuación 3.6.

$$R = \frac{\rho V D_h}{\mu_w \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \left(\frac{1}{1-aX-bX^2-cX^3} \right)} \quad (3.6)$$

Donde la viscosidad aparente en la pared para un fluido Herschel-Bulkley se define según la Ecuación 3.7.

$$\mu_w = \frac{\tau_w}{\gamma_w} = \tau_w^{\frac{(n-1)}{n}} \left(\frac{j}{1-X} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.7)$$

Donde τ_w corresponde al esfuerzo de corte en la pared, γ_w corresponde a la tasa de deformación angular en la pared. Luego, para el caso particular de un fluido Herschel-Bulkley la relación presentada por Chilton & Stainsby para la caída de presión longitudinal permite deducir una expresión para τ_w a partir de la cual se deduce la Ecuación 3.8 para μ_w .

$$\mu_w = j \left(\frac{8V}{D} \right)^{(n-1)} \left(\frac{1}{1-X} \right) \left(\frac{1}{1-aX-bX^2-cX^3} \right)^{(n-1)} \quad (3.8)$$

Como se menciona previamente, uno de los modelos más simples para representar el comportamiento de un fluido No-Newtoniano corresponde al modelo plástico de Bingham, el cual se procede a utilizar para las estimaciones y cálculos del modelo físico dado que corresponde a una aproximación razonable para representar el comportamiento de un relave. Así, desde el modelo Herschel-Bulkley se rescata el modelo plástico de Bingham de considerar que el índice de flujo (n) es igual a la unidad y considerando que el factor de consistencia (j) es igual a la viscosidad (dinámica) de Bingham la cual se denota con la letra η .

Cabe mencionar que para efectos del modelo plástico de Bingham el número de Reynolds generalizado se reduce a la expresión presentada en la Ecuación 3.9.

$$R = \frac{\rho V D_h}{\left(\frac{\eta}{1-X} \right) \left(\frac{1}{1-aX-bX^2-cX^3} \right)} \quad (3.9)$$

Donde se que tiene que la viscosidad aparente viene definida por la Ecuación 3.10.

$$\mu_w = \frac{\eta}{1-X} \quad (3.10)$$

Entonces, dado que ya se tiene definido el modelo reológico a considerar en el estudio, resta caracterizar los parámetros que definen la reología del fluido, los cuales para un fluido plástico de Bingham corresponden a la viscosidad de Bingham ν y a la tensión de fluencia τ_y .

Por parte de la viscosidad de Bingham, el modelo utilizado para su estimación corresponde al modelo de Krieger-Dougherty (Krieger y Dougherty, 1959) dada su utilización en la caracterización de la viscosidad de mezclas densas de partículas no coloidales inmersas en un fluido Newtoniano (Ovarlez, Bertrand, y Rodts, 2006) y su uso para estimar la viscosidad de Bingham (Ihle y Kracht, 2018). La ecuación enunciada por Krieger-Dougherty se presenta en la Ecuación 3.11.

$$\frac{\eta}{\mu} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-\chi} \quad (3.11)$$

Los valores adoptados por los parámetros χ y ϕ_m se detallan en la subsección 3.3.2.

En lo que respecta a la tensión de fluencia, el modelo empírico utilizado para su determinación corresponde al modelo enunciado por Alejo & Barrientos (Alejo y Barrientos, 2009) el cual se presenta en la Ecuación 3.12.

$$\tau_y = \left[\frac{k_A}{(\phi_m - \phi)} \right]^{\frac{1}{m^*}} \quad (3.12)$$

Donde m^* y k_A son coeficientes empíricos y se detallan en la subsección 3.3.2.

3.1.5. Segregación longitudinal de partículas

En lo que respecta al proceso de segregación de partículas sólidas, se requiere emplear un modelo acorde a las condiciones del presente estudio, en particular, al rango de tamaño de partículas que conforma al relave. El modelo a emplear debe caracterizar adecuadamente el proceso de sedimentación de partículas, por lo que se considera un modelo de velocidad de depósito.

En la literatura se plantean múltiples formulaciones que relacionan el diámetro de las partículas con la velocidad crítica. Sin embargo, la mayoría de estas tienen un rango de aplicabilidad de tamaño de partículas desde $200 \mu\text{m}$ hasta 1 mm (Miedema y Ramsdell, 2015). En el caso de partículas finas, es decir, con un tamaño menor a $200 \mu\text{m}$, también se plantean relaciones empíricas que buscan representar el fenómeno de la deposición de partículas en conductos cerrados. (Poloski et al., 2010) realiza un estudio en pulpas de desecho radiactivo compuestas por partículas de pequeño diámetro (Número de Arquímedes menor a 80) para el U.S. Department of Energy's Hanford, en donde obtiene una relación que expresa un límite superior para la velocidad crítica de deposición y, por lo tanto, una condición de operación segura para evitar el embancamiento. Es importante mencionar que el rango de tamaño de partículas con el cual se trabaja en dicho estudio es similar al del relave. La relación obtenida en el estudio corresponde a una ley de potencia entre el número de Froude de Durand y el número de Arquímedes.

El número de Froude de Durand corresponde al expresado en la Ecuación 3.13.

$$Fr = \frac{V_c}{\sqrt{gD(S-1)}} \quad (3.13)$$

Donde V_c es la velocidad crítica de deposición, g es la aceleración de gravedad, D es el diámetro hidráulico y S es la gravedad específica de los sólidos. El número de Froude de Durand es un número adimensional que relaciona la fuerza inercial del flujo y la fuerza gravitacional, lo que define una velocidad crítica adimensional.

Por otro lado, el número de Arquímedes corresponde al expresado en la Ecuación 3.14.

$$Ar = \frac{4gd^3(S-1)\rho_\phi^2}{3\eta^2} \quad (3.14)$$

Donde g es la aceleración de gravedad, d es el diámetro de la partícula, S es la gravedad específica del sólido, ρ_ϕ corresponde a la densidad de la mezcla y η es la viscosidad la mezcla que según las consideraciones reológicas del modelo corresponde a la viscosidad estimada con el modelo de Krieger-Dougherty. El número de Arquímedes relaciona la fuerza de gravedad corregida por la fuerza boyante que actúa sobre las partículas sólidas y las fuerzas viscosas que actúan sobre la misma. La formulación se plantea para partículas con forma esférica.

Así, una vez definido ambos números adimensionales, en la Ecuación 3.15 se expresa la relación existente entre dichos adimensionales.

$$Fr = aAr^b \quad (3.15)$$

Donde a y b son constantes empíricas, Fr es el número de Froude de Durand y Ar es el número de Arquímedes.

Por parte de la densidad de la mezcla, esta sigue la expresión presentada en la Ecuación 3.16.

$$\rho_{\phi} = \rho_s \phi + \rho_l (1 - \phi) \quad (3.16)$$

Donde ρ_s corresponde a la densidad de las partículas sólidas que componen la suspensión, ρ_l corresponde a la densidad del líquido que compone la suspensión y ϕ es la concentración volumétrica de sólidos en la mezcla.

Cabe destacar que las relaciones detalladas previamente son aplicables a flujos turbulentos en conductos cerrados. Sin embargo, se puede extender su uso a conductos abiertos considerando como dimensión característica del flujo el diámetro hidráulico. También cabe destacar que las relaciones planteadas por Miedema y Ramsdell, y por Poloski et al. consideran que el mecanismo que mantiene las partículas en suspensión son las fuerzas de arrastre generadas por las fluctuaciones de la velocidad del flujo, y no la resuspensión viscosa, el cual es el mecanismo que mantiene las partículas en suspensión en un flujo laminar.

3.1.6. Hipótesis cuasiestática

Una vez deducidas las cinco ecuaciones básicas del modelo físico, se construye, a partir de dichas ecuaciones, el sistema de ecuaciones que a resolverse para caracterizar el escurrimiento del relave. El sistema de ecuaciones deducido corresponde a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) el cual debe resolverse simultáneamente en el tiempo y en el espacio en todo el dominio definido.

Es en este punto en el cual se enuncia y se propone el uso de la hipótesis cuasiestática, la cual es capaz de transformar el sistema de EDPs deducido a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinario (EDOs) el cual utiliza el tiempo de forma paramétrica. La razón detrás de la utilización de la hipótesis cuasiestática es que comprende una simplificación lo suficientemente razonable del sistema de ecuaciones sin perder la física detrás de las formulaciones originalmente deducidas y, por otro lado, supone una simplificación en términos de la resolución numérica del sistema de ecuaciones, puesto que en vez de resolver un sistema de EDPs, el cual debe resolverse de forma simultánea en el espacio y el tiempo definido para todo el dominio, se resuelve un sistema de EDOs en todo el espacio definido en el dominio en cada instante de tiempo, o bien se resuelve lo que desde ahora se denomina “sucesión de regímenes permanentes”, lo que se detalla en la sección 3.2.

3.2. Resolución del sistema de ecuaciones diferenciales

En esta sección se detalla los pasos a seguir para encontrar una solución al sistema de EDO's obtenido una vez aplicada la hipótesis cuasiestática al sistema de EDP's deducido en un comienzo. De esta forma, en una primera instancia se plantea un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales y, posteriormente, se detalla el cómo resolver de forma iterativa dicho sistema acoplado, en términos físicos, el cómo resolver cada sucesión de regímenes permanentes.

3.2.1. Sistema de ecuaciones diferenciales acoplado

Una vez se obtiene el sistema de EDO's cómo consecuencia de utilizar la hipótesis cuasiestática es posible acoplar las ecuaciones de tal manera que se obtenga un sistema de tres ecuaciones

diferenciales ordinarias con incógnitas q , $h - z_s$ y ϕ , es decir, caudal de mezcla, espesor de escurrimiento y concentración volumétrica de sólidos. Así, dicho sistema permite despejar las variables mencionadas y, a partir de estas, obtener el resto de incógnitas del problema.

3.2.2. Resolución de la sucesión de regímenes permanentes

En esta sección establece el cómo encontrar la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales acoplado en todo el dominio definido para el espacio y el tiempo.

Entonces, previo a detallar cada una de las etapas se requiere discretizar tanto la variable tiempo t como la variable espacio x para la obtención de la solución numérica del problema. Las discretizaciones de dichas variables se detallan en las Ecuaciones 3.17 y 3.18, respectivamente.

$$x_i = x_0 + i\Delta x \quad (3.17)$$

$$t_j = t_0 + j\Delta t \quad (3.18)$$

Donde x_0 y t_0 son la distancia y tiempo iniciales, i y j corresponden al número de pasos de cada discretización y Δx y Δt corresponden al paso de cada discretización. Además, el máximo número de pasos de la discretización espacial y temporal son n y m , respectivamente, definiendo así la distancia máxima (x_n) y tiempo máximo (t_m), los cuales se aprecian en las Ecuaciones 3.19 y 3.20.

$$x_n = x_0 + n\Delta x \quad (3.19)$$

$$t_m = t_0 + m\Delta t \quad (3.20)$$

Por otro lado, antes de resolver cualquier sistema de ecuaciones diferenciales se requiere definir tanto las condiciones de borde como las condiciones iniciales. La condición inicial viene dada por la topografía inicial del canal, la cual ingresa al modelo como un dato ya conocido. Así, la condición inicial se expresa en la Ecuación 3.21.

$$z_s(x_i, t_0) = z_{s_0}(x_i) \quad \forall i \in [0, n] \quad (3.21)$$

Por otro lado, las condiciones de borde se suponen invariantes en el tiempo para efectos del modelo, es decir, las condiciones de borde no varían en cada instante de tiempo. La razón detrás del supuesto, es que se considera que las condiciones de operación en la descarga de relaves son constantes en el tiempo, y por lo tanto, las condiciones de borde para el caudal de mezcla, concentración volumétrica de sólidos y espesor de escurrimiento se mantienen. Estas condiciones de borde se presentan en las Ecuaciones 3.22, 3.23 y 3.24.

$$q(x_0, t_j) = q_0 \quad \forall j \in [0, m] \quad (3.22)$$

$$\tilde{h}(x_0, t_j) = \tilde{h}_0 \quad \forall j \in [0, m] \quad (3.23)$$

$$\phi(x_0, t_j) = \phi_0 \quad \forall j \in [0, m] \quad (3.24)$$

Con estas consideraciones, el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado se procede a resolver con el método de Runge-Kutta de orden 4 (detallado en Anexo A) considerando la actualización temporal en la topografía (Anexo C). El lenguaje de programación utilizado para resolver el sistema de ecuaciones corresponde a Python y el código implementado se presenta en el Anexo B.

3.3. Parámetros y condiciones de borde del modelo

Una vez establecidas las ecuaciones base del modelo se deben plantear las condiciones de borde y definir los parámetros para la resolución de estas. Las condiciones de borde responden a las ecuaciones diferenciales que se plantean en el sistema de EDO's acopladas, mientras que los parámetros responden, principalmente, a definir numéricamente constantes empíricas o valores referenciales que alimenten a las ecuaciones.

3.3.1. Parámetros asociados a las condiciones de operación

En primer lugar, se debe tener una aproximación de qué valores adoptan normalmente tanto el caudal de descarga de lamas como la concentración volumétrica de sólidos durante la operación normal de descarga de lamas hacia la cubeta de un depósito de relaves.

Por lo ya mencionado, se deben definir rangos de caudal de operación en líneas de descarga de lamas y, del mismo modo, también es necesario definir un rango de operación para la concentración en volumen de sólidos transportados. Entonces, si se considera que la densidad de las partículas sólidas es en promedio 2.7 t/m^3 , el cual es un valor referencial típico para la densidad media de gangas que componen la fase sólida de los relaves y se considera que la densidad del agua es en promedio 1 t/m^3 , se obtiene los rangos de operación presentados en la Tabla 3.1, los cuales son valores de operación presentados por Misle en su estudio para la confección de un manual de operación (Misle Salah, 2020).

Tabla 3.1: Rango de operación para el caudal de descarga y el contenido en sólidos

Parámetro	Valor mín	Valor máx	Unidades
Q_p	150	350	L/s
C_V	31.1	37.7	%

Además de los parámetros de control utilizados en la operación normal de descarga de relaves, se debe definir adecuadamente los parámetros que definen la distribución de tamaño de partículas sólidas. Previo a la formación propiamente tal de un relave, el mineral a procesar pasa a través de dos procesos de conminución, los cuales son el chancado y la molienda, y múltiples procesos de concentración físico-química, los cuales corresponden al proceso de flotación. Así, el material no seleccionado de dicho proceso de concentración forma el relave, donde se considera que para efectos del presente estudio posee un tamaño característico de $300 \mu\text{m}$ dado los requerimientos del proceso de flotación y dado que es un valor en torno al cual el proceso de flotación resulta ineficiente operacionalmente. En base a lo mencionado, se observa en la Tabla 3.2 los parámetros que definen la granulometría de las partículas sólidas según la distribución Rosin-Rammler.

Tabla 3.2: Parámetros de la distribución Rosin-Rammler

Parámetro	Valor	Unidad
n	2	-
$d_{63.2}$	300	μm

3.3.2. Parámetros asociados a la reología de la mezcla

Por parte de la reología de la mezcla, según lo detallado en la subsección 3.1.5, se requiere definir adecuadamente la viscosidad (dinámica) de Bingham y la tensión de fluencia de la mezcla. Por parte de la viscosidad de Bingham se utiliza el modelo de Krieger-Dougerthy donde el parámetro que se requiere definir es χ , así dado los estudios presentados por Ovarlez et. al (Ovarlez et al., 2006) e Ihle & Kracht (Ihle y Kracht, 2018) el valor considerado para dicho parámetro se presenta en la Tabla 3.3. En lo que respecta a la tensión de fluencia, se utiliza el modelo de Alejo-Barrientos para su estimación, donde el valor considerado para el parámetro m^* corresponde al estimado por Ihle & Tamburrino (Ihle y Tamburrino, 2012b) en suspensiones de cuarzo, al igual que la forma adoptada por el parámetro k_A el cual depende del tamaño característico de la distribución de tamaños. Estos dos últimos parámetros también se adjuntan en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Parámetros empíricos asociados a la reología de la mezcla

Parámetro	Valor	Unidad
χ	2	-
m^*	0.55	-
k_A	0.161	Pa

3.3.3. Parámetros asociados a la velocidad crítica de deposición

Por otro lado, para estimar adecuadamente la velocidad crítica deposición se requiere definir adecuadamente cinco parámetros: la densidad y viscosidad de la mezcla (los cuales son función de la concentración volumétrica de sólidos y, por lo tanto, dependiente de las condiciones de borde), la gravedad específica de los sólidos y las constantes adimensionales a y b planteadas en la Ecuación 3.15. Los últimos dos parámetros mencionados se aprecian en la Tabla 3.4 y que corresponden a los establecidos por Poloski en su estudio con partículas finas. Por otro lado, la gravedad específica de los sólidos se considera igual a 2.7 dado que la densidad de partículas sólidas se supone igual a 2.7 t/m^3 y la densidad del líquido que compone la suspensión (agua) se supone igual a 1 t/m^3 .

Cabe mencionar que la viscosidad de la mezcla depende de un parámetro adicional, el cual es la concentración crítica de empaquetamiento, la cual corresponde a la concentración a la cual se encuentran las partículas sólidas en el lecho de sólidos una vez estas se “ordenan” en el lecho. El valor de la concentración crítica de empaquetamiento (ϕ_m) también se aprecia en la Tabla 3.4. Para efectos del presente estudio el valor de ϕ_m se considera constante pese a la variabilidad que pueda presentar.

Tabla 3.4: Parámetros ley de potencia y concentración crítica de empaquetamiento

Parámetro	Valor	Unidad
a	0.59	-
b	0.15	-
ϕ_m	0.6	-

3.3.4. Parámetros asociados a la geometría del canal

Respecto a los parámetros del modelo, sólo resta definir las características geométricas del canal por el cual se transporta el relave. Como bien se menciona en los supuestos de cada fase para el planteamiento del modelo, los canales se suponen rectangulares y de ancho constante. Por otro lado, según estudios presentes en la literatura (Wels y Robertson, 2003) y (Blight, 2009) se sabe que el escurrimiento de relave en el sector playa corresponde a un escurrimiento somero o de “aguas poco profundas”, aunque no se encuentran mediciones o estimaciones precisas de la profundidad de estos canales. De esta forma, valores asociados a la altura de escurrimiento son del orden del centímetro y se entra en mayor detalle en la subsección de condiciones de borde.

Luego, se debe definir cual será el ancho del canal. La determinación del ancho de escurrimiento en estos canales es un problema de alta complejidad dado que se debe considerar tanto el proceso de erosión como el de sedimentación producto del escurrimiento del relave, el cual depende de las características del flujo, del lecho o medio granular, de las partículas que componen el relave, las propiedades del fluido, entre otros. Es por esta razón que se supone por simplicidad del modelo un ancho de escurrimiento constante, el cual se mide a partir de imágenes satelitales en canales detectados entre la descarga de lamas en las cercanías del muro y el sector de la laguna de aguas claras.

En la Figura 3.2 se presenta una imagen satelital en la cual se pueden apreciar los canales previamente mencionados por donde escurre la mezcla sólido-líquida.

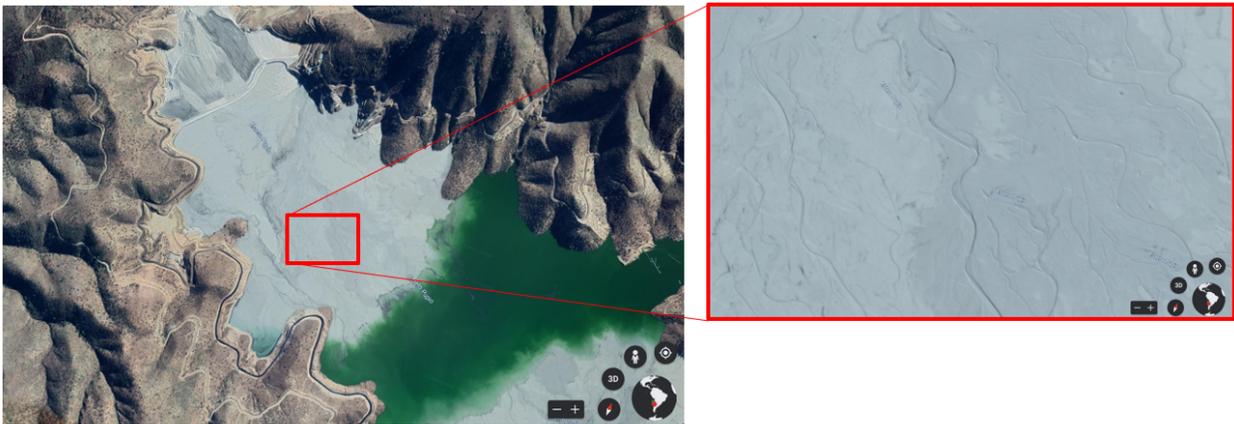


Figura 3.2: Imagen satelital en la cual se aprecian los canales formados por el proceso erosivo

A partir de las imágenes satelitales observadas se procede a medir un posible valor que puede adquirir el ancho promedio de escurrimiento en el canal. Este ancho presenta una gran variabilidad dependiendo de la descarga y direcciones preferenciales de flujo, es por esta razón que se acota el rango de ancho para los canales que presentan una mayor frecuencia de aparición a escala visual. Estos canales presentan un ancho promedio de 1 m.

Por otro lado, la pendiente inicial del canal se supone constante por simplicidad del modelo, dado que en realidad los procesos de erosión y sedimentación generan cambios temporales y espaciales en las pendientes que se desarrollan a lo largo del sector playa. El valor que se considera para la pendiente del canal considera el estudio realizado por Bligh en depósitos de relave de cobre (Bligh y Bentel, 1983).

Entonces, los parámetros geométricos del canal se resumen en la Tabla 3.5:

Tabla 3.5: Parámetros geométricos del canal

Parámetro	Valor promedio	Unidades
B (ancho)	1	m
i (pendiente)	0.01	m/m

3.3.5. Condiciones de borde

Las condiciones de borde necesarias para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales vienen dadas por el caudal por unidad de ancho, el espesor de escurrimiento y la concentración volumétrica de sólidos.

Por parte del caudal de mezcla y la concentración volumétrica de sólidos, es posible definir las condiciones de borde para resolver el sistema de EDO's acopladas aguas arriba, las cuales vienen dadas por las condiciones operacionales de descarga de lamas. Entonces, se escogen valores de caudal de mezcla y concentración volumétrica dentro del rango de operación en la descarga, los cuales quedan expresados por las condiciones de borde apreciadas en las Ecuaciones 3.25 y 3.26.

$$q(x = 0, t) = q_0 = 0.2 \text{ m}^2/s \quad (3.25)$$

$$\phi(x = 0, t) = \phi_0 = 0.36 \quad (3.26)$$

Por parte del espesor de escurrimiento, la elección de la condición de borde depende de si el escurrimiento a lo largo del canal es subcrítico, caso en el cual la condición de borde debe imponerse aguas abajo del escurrimiento, o supercrítico, caso en el cual la condición de borde debe imponerse aguas arriba del escurrimiento, lo que depende del número de Froude.

Para efectos del caso de prueba, el cual se detalla en la siguiente subsección, la elección de la condición de borde es aguas arriba del escurrimiento, por lo tanto, se presume que el escurrimiento es supercrítico y, por lo tanto, $Fr > 1$. Posteriormente, se debe considerar la relación existente entre el espesor de escurrimiento (\tilde{h}), la altura crítica (h_c) y la altura normal (h_n).

Entonces, dado que el escurrimiento es supercrítico, el espesor de escurrimiento es menor a la altura crítica y dependiendo de la relación que exista entre h_c y h_n es posible definir tres ejes hidráulicos. Luego, en el presente trabajo se analiza un caso de estudio en el cual la condición de borde cumpla dos restricciones $h < h_c$ (flujo supercrítico) y $h_n < h_c$ (pendiente fuerte), lo cual sólo deja dos posibles escenarios a analizar: eje hidráulico peraltado en pendiente fuerte (F2) y eje hidráulico deprimido en pendiente fuerte (F3).

3.4. Validación cualitativa del sistema de EDOs

En esta sección se presenta un caso de prueba y, a partir de dicho caso, se valida cualitativamente la solución presentada por el sistema de EDOs en lo que respecta al comportamiento de las diversas variables que lo componen, junto con analizar el efecto de las condiciones de borde.

3.4.1. Caso de prueba

En la presente sección se detalla el caso de prueba con el cual se analizan los resultados entregados por el modelo físico planteado. Este caso de prueba considera los parámetros ya detallados en las subsecciones anteriores: operacionales, reología, velocidad crítica, y geométricos.

Por otro lado, en lo que respecta a las condiciones de borde, se escoge una condición de borde para el espesor de escurrimiento de la mezcla tal que cumpla la restricción de que el escurrimiento sea supercrítico y en pendiente fuerte. En otras palabras, si \tilde{h}_0 corresponde a la condición de borde esta debe cumplir que $\tilde{h}_0 < h_n < h_c$. De esta manera, el sistema de ecuaciones se resuelve con el set de condiciones de borde presentado en las Ecuaciones 3.27, 3.28 y 3.29.

$$q(x = 0, t) = q_0 = 0.2 \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.27)$$

$$\phi(x = 0, t) = \phi_0 = 0.36 \quad (3.28)$$

$$\tilde{h}(x = 0, t) = \tilde{h}_0 = 0.066 \text{ m} \quad (3.29)$$

Luego, se especifica la discretización utilizada para la variable espacio y tiempo. Entonces, la variable x y t se discretizan según lo apreciado en las Ecuaciones 3.17 y 3.18.

Así, en la Tabla 3.6 y en la Tabla 3.7 se explicitan los valores mínimos, máximos, el paso y el número de pasos de la discretización espacial y temporal, respectivamente.

Tabla 3.6: Parámetros para la discretización espacial

Parámetros	Valores	Unidades
t_0	0	s
t_m	7200	s
Δt	1	s
m	7200	

Tabla 3.7: Parámetros para la discretización temporal

Parámetros	Valores	Unidades
x_0	0	m
x_n	800	m
Δx	1	m
n	800	

Por otro lado, resulta relevante mencionar que para efectos del caso prueba sólo se considera el efecto de la segregación de partículas sólidas en la determinación de las pérdidas de agua, es decir, sólo se estiman las pérdidas por atrapamiento y no aquellas producidas por el efecto de la evaporación e infiltración. Así, pese al hecho de que las pérdidas por evaporación e infiltración se encuentren integradas en la formulación del modelo, sólo para efectos del caso de prueba no se considera su efecto.

Dado lo anterior, en la sección 3.5 se detalla la forma en la que se estiman las pérdidas por atrapamiento acumuladas debido al efecto de la segregación de partículas, tanto de forma absoluta como de forma porcentual.

3.4.2. Estimación de las pérdidas de agua por atrapamiento

En esta sección, en base a los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se estiman las pérdidas por atrapamiento acumuladas que ocurren a lo largo del canal para las condiciones y parámetros impuestos en el caso de prueba.

El cálculo de las pérdidas involucra, en una primera instancia, obtener la solución para el caudal de mezcla en todo el espacio y tiempo $q(x,t)$ y, a partir de esta, relacionar el flujo de agua en todo el canal con el flujo de agua descargado en $x = 0$. Entonces, en términos matemáticos, la cantidad de agua, en volumen, inicial descargada por el punto de descarga viene dada por la Ecuación 3.30.

$$q_l(x = 0, t) = q_0 (1 - \phi_0) \quad (3.30)$$

Por otro lado, si se quiere estimar la pérdida de agua por atrapamiento acumulada en cada punto del espacio tan sólo se debe realizar la resta entre el flujo de líquido registrado en la descarga, el cual depende de las condiciones de borde, y el flujo volumétrico de agua que escurre a lo largo del canal en la zona de la mezcla, el cual depende de la solución obtenida para el sistema de ecuaciones respecto a las variables $q(x,t)$ y $\phi(x,t)$. Así, con el uso de la Ecuación 3.31 se estima la pérdida acumulada de agua en función de x y t .

$$I(x,t) = q_l(x = 0, t) - q(x,t) (1 - \phi(x,t)) \quad (3.31)$$

Por otro lado, si se quiere estimar la pérdida de agua porcentual respecto al volumen de líquido descargado, se requiere del uso de la Ecuación 3.32.

$$I(x,t) = 1 - \frac{q(x,t) (1 - \phi(x,t))}{q_0 (1 - \phi_0)} \quad (3.32)$$

Capítulo 4

Resultados y análisis

4.1. Sistema de ecuaciones

4.1.1. Ecuación de conservación de masa de sólidos en la suspensión

En primer lugar, considerando el volumen de control presentado en la Figura 3.1, es posible estudiar las dos fases que componen tanto la suspensión como el lecho de forma separada (fase sólida y líquida). A partir del estudio de la fase sólida se plantea la primera ecuación fundamental del modelo que se obtiene de aplicar el teorema de transporte de Reynolds a la masa total de sólidos en la suspensión y el lecho, obteniéndose así, la Ecuación 4.1.

$$\frac{DM_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho_s \phi_s dV + \int_{S_c} \rho_s \phi_s (\vec{v}_s \cdot \hat{n}) dS \quad (4.1)$$

Donde M_s corresponde a la masa total de la fase sólida (propiedad extensiva), ρ_s corresponde a la densidad de la fase sólida y ϕ_s corresponde a la concentración volumétrica de sólidos totales. Posteriormente, en virtud al principio de conservación de masa de sólidos totales, el término de la derivada material es nulo y, dado que la densidad de las partículas sólidas es constante, independientemente del tamaño, esta sale como una constante de las integrales y las derivadas. En consecuencia, se deduce la Ecuación 4.2 que representa la conservación de volumen total de sólidos en el volumen de control.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \phi_s dV + \int_{S_c} \phi_s (\vec{v}_s \cdot \hat{n}) dS \quad (4.2)$$

Para continuar con el desarrollo de la Ecuación 4.2, se supone que en la zona de la suspensión se cumple que $\vec{v}_s \approx \vec{v}_m$, es decir, la velocidad de las partículas sólidas a través de la frontera del volumen de control en la dirección del flujo es aproximadamente igual a la velocidad de la mezcla a través de la frontera del volumen de control. En consecuencia, separando las integrales respecto a la zona del lecho y la zona de suspensión resulta la Ecuación 4.3.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-z_s}^0 \phi_m dz + \int_0^{h-z_s} \phi dz \right) dx + \int_{S_{salida}} \phi_s (\vec{v}_m \cdot \hat{n}) dS - \int_{S_{entrada}} \phi_s (\vec{v}_m \cdot \hat{n}) dS \quad (4.3)$$

Cabe destacar que en la Ecuación 4.3 el término de acumulación se separa en dos integrales. La primera integral está referida al lecho de partículas y la segunda integral está referida a la suspensión y, debido a esto, la primera se escribe en función de la concentración crítica de empaquetamiento (ϕ_m) y la segunda se escribe en función de la concentración volumétrica de sólidos totales en la suspensión (ϕ). Los límites de cada integral corresponden a las cotas que delimitan tanto la zona del lecho como la zona de la suspensión.

Por otro lado, se debe esclarecer que en el término convectivo la velocidad de la mezcla (\vec{v}_m) es distinta de cero en la zona de la suspensión e igual a cero en la zona del lecho. La aseveración anterior es correcta dado que el modelo físico supone la formación de un lecho fijo. En consecuencia, la concentración con la cual se trabaja en el término convectivo es la concentración volumétrica de sólidos totales en la suspensión (ϕ). Además, la sección de escurrimiento en la cual existe flujo de suspensión está delimitada entre la altura de lecho z_s y la altura de escurrimiento h .

Por lo tanto, considerando que la concentración volumétrica de sólidos es constante en la sección de flujo y evaluando las integrales en las superficies de entrada y salida, aguas arriba y aguas abajo respectivamente, se obtiene la Ecuación 4.4.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_m \int_{-z_s}^0 dz + \phi \int_0^{h-z_s} dz \right) dx + \phi q \Big|_{x+dx} - \phi q \Big|_x \quad (4.4)$$

Donde, sacando el término ϕ de las integrales del término convectivo, naturalmente aparece el caudal de mezcla q . En base a lo anterior, se deduce la Ecuación 4.5.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_m \int_{-z_s}^0 dz + \phi \int_0^{h-z_s} dz \right) dx + \frac{\partial}{\partial x} (\phi q) dx \quad (4.5)$$

Simplificando los dx e integrando, se obtiene finalmente la Ecuación 4.6.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\phi [h - z_s]) + \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m z_s) + \frac{\partial}{\partial x} (\phi q) \quad (4.6)$$

En consecuencia, la primera ecuación básica del modelo corresponde a la conservación de volumen total de sólidos, la cual se encuentra expresada en la Ecuación 4.6.

Por lo tanto, al expresar la primera ecuación básica del modelo en función del espesor de escurrimiento (\tilde{h}), variable que fue introducida en la subsección 3.1.2 del capítulo 3 (metodología), finalmente se obtiene lo apreciado en la Ecuación 4.7.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \tilde{h}) + \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m z_s) + \frac{\partial}{\partial x} (\phi q) \quad (4.7)$$

4.1.2. Ecuación de conservación de masa de la mezcla

Es importante recordar que, según las hipótesis del modelo, tanto los sólidos como el líquido que componen la mezcla son incompresibles. Además, la primera ecuación básica del modelo entrega una expresión para la conservación de masa total de sólidos. Por lo anterior, se plantea el balance de masa en la fase líquida el cual considera el efecto de la evaporación e infiltración y así, formular el balance de masa de la mezcla.

Entonces, en virtud a lo ya mencionado, se expresa el teorema de transporte de Reynolds aplicado a la masa de la fase líquida en la Ecuación 4.8.

$$\frac{DM_l}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho_l \phi_l dV + \int_{S_c} \rho_l \phi_l (\vec{v}_l \cdot \hat{n}) dS \quad (4.8)$$

Donde M_l corresponde a la masa de la fase líquida (propiedad extensiva), ρ_l corresponde a la densidad de la fase líquida y ϕ_l corresponde a la concentración volumétrica de líquido total. Por otro lado, dado que el líquido es incompresible, las densidades son constantes para efectos de la integración y derivación. En consecuencia, simplificando por la densidad del líquido, el término de la derivada material ahora expresa el cambio total en el volumen de líquido. Posteriormente, el término de la derivada material es distinto de cero puesto que existen pérdidas de líquido producto del proceso de evaporación e infiltración (los cuales se detallan en Capítulo 2), las cuales se expresan en términos de las tasas L_E y L_I , respectivamente. Así, se obtiene la Ecuación 4.9 que representa el balance de volumen de líquido en el volumen de control.

$$-L_E - L_I = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \phi_l dV + \int_{S_c} \phi_l (\vec{v}_l \cdot \hat{n}) dS \quad (4.9)$$

Luego, en la zona de suspensión, se supone que $\vec{v}_l \approx \vec{v}_m$, es decir, la velocidad del líquido a través de la frontera del volumen de control es aproximadamente igual a la velocidad de la mezcla.

Por otro lado, se debe recordar que en la mezcla existe una relación entre la concentración volumétrica total de sólidos y la de líquido. Esta relación está explícita en la Ecuación 4.10.

$$\phi_l = 1 - \phi_s \quad (4.10)$$

Entonces, dado todo lo anterior, se obtiene la Ecuación 4.11.

$$-L_E - L_I = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-z_s}^0 (1 - \phi_m) dz + \int_0^{h-z_s} (1 - \phi) dz \right) dx + (1 - \phi_s) q \Big|_{x+dx} - (1 - \phi_s) q \Big|_x \quad (4.11)$$

Cabe destacar que en la Ecuación 4.11 el término de acumulación se separa en dos integrales. La primera integral está referida al lecho de partículas y la segunda integral está referida a la suspensión y, debido a esto, la primera se escribe en función de la concentración crítica de empaquetamiento (ϕ_m) y la segunda se escribe en función de la concentración de sólidos totales (ϕ). Los límites de cada integral corresponden a las alturas que delimitan la zona del lecho y la zona de la suspensión.

Por otro lado, en el término convectivo, se debe esclarecer que la velocidad de la mezcla (\vec{v}_m) es distinta de cero en la zona de la suspensión e igual a cero en la zona del lecho. Dado lo anterior, la concentración con la cual se trabaja en el término convectivo es ϕ . Además, la sección de escurrimiento en la cual existe flujo de suspensión está delimitada entre las alturas z_s y h .

Por lo tanto, considerando que la concentración volumétrica de sólidos es constante en la sección de flujo y evaluando las integrales en las superficies de entrada y salida, aguas arriba y aguas abajo respectivamente, se obtiene la Ecuación 4.12.

$$-L_E - L_I = \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - \phi_m) \int_{-z_s}^0 dz + (1 - \phi) \int_0^{h-z_s} dz \right) dx + (1 - \phi_s) q \Big|_{x+dx} - (1 - \phi_s) q \Big|_x \quad (4.12)$$

En base a lo anterior, se deduce la Ecuación 4.13.

$$-L_E - L_I = \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - \phi_m) \int_{-z_s}^0 dz + (1 - \phi) \int_0^{h-z_s} dz \right) dx + \frac{\partial}{\partial x} ([1 - \phi] q) dx \quad (4.13)$$

Simplificando los dx e integrando, se obtiene finalmente la Ecuación 4.14.

$$-L_E - L_I = \frac{\partial}{\partial t} ([1 - \phi] [h - z_s]) + \frac{\partial}{\partial t} ([1 - \phi_m] z_s) + \frac{\partial}{\partial x} ([1 - \phi] q) \quad (4.14)$$

Posteriormente, al sumar la Ecuación 4.14 y la Ecuación 4.6 se obtiene la Ecuación 4.15.

$$-L_E - L_I = \frac{\partial (h - z_s)}{\partial t} + \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.15)$$

En consecuencia, al aplicar el mismo cambio variables que se propuso en la deducción de la ecuación de conservación de volumen de sólidos totales en la mezcla, se obtiene la Ecuación 4.16 que corresponde a la segunda ecuación básica del modelo y que expresa la conservación de volumen de la mezcla en el volumen de control.

$$-L_E - L_I = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.16)$$

4.1.3. Ecuación de sedimentación o criterio de sedimentación

En lo que respecta a esta ecuación, se recuerda que la formulación del problema físico involucra el proceso de sedimentación de partículas sólidas en suspensión y, por lo tanto, el modelo requiere de un criterio para discernir bajo qué circunstancias una partícula de tamaño d sedimenta o se mantiene en la suspensión bajo las hipótesis de flujo turbulento. Así, la formulación empírica que cuantifica dicho criterio viene dada por la relación que existe entre el número de Froude de Durand y el número de Arquímedes.

Es sabido, en base al criterio mencionado previamente, que existe una relación entre el diámetro de partícula d y la velocidad crítica de deposición V_c . Para efectos del modelo, se considera que la velocidad crítica de deposición para cada x es representada por la velocidad media del escurrimiento, lo que trae como consecuencia directa, que sea posible determinar cual es el diámetro crítico de deposición o el diámetro de corte de partícula para cada x . Así, para cada x es posible discernir qué partículas poseen un diámetro menor al diámetro de corte, y por lo tanto se mantienen en suspensión, y qué partículas poseen un diámetro mayor al diámetro de corte, y por lo tanto sedimentan, pasando a formar parte del lecho.

Entonces, se procede a plantear la relación existente entre el número de Froude de Durand y el número de Arquímedes, la cual se expresa en la Ecuación 4.17.

$$\frac{V_c}{\sqrt{g D_h (S - 1)}} = a \left(\frac{4 g d^3 (S - 1) \rho_\phi^2}{3 \eta^2} \right)^b \quad (4.17)$$

Luego, dado que $V_c = \bar{V}$ para efectos del modelo y que D_h corresponde al diámetro hidráulico, el cual es una función del espesor de escurrimiento, es posible despejar el diámetro de corte d_c

de la Ecuación 4.17. Por lo tanto, el diámetro de corte se calcula según la Ecuación 4.18 y que corresponde a la tercera ecuación básica del modelo.

$$d_c = \left(\frac{3}{4} \frac{\eta^2}{g(S-1)\rho_\phi^2} \left[\frac{q}{a\tilde{h}\sqrt{gD_h(S-1)}} \right]^{1/b} \right)^{1/3} \quad (4.18)$$

Se recuerda que ρ_ϕ y η son parámetros de la mezcla que dependen de ϕ , en particular, η es la viscosidad de Bingham. En consecuencia, la función diámetro de corte es una función $d_c = d_c(q, \tilde{h}, \phi_s)$. En otras palabras, el diámetro de corte es función de la concentración volumétrica de sólidos, el espesor de escurrimiento y el caudal de mezcla, siendo la consecuencia de esto, que el diámetro de corte sea un parámetro dependiente de las características del escurrimiento, y por lo tanto, se logra ligar la hidráulica del flujo con la sedimentación de partículas sólidas.

4.1.4. Ecuación de distribución de concentraciones volumétricas

Cabe recordar que la ecuación de sedimentación tan sólo entrega un criterio que le permite al modelo discernir cuáles partículas permanecen o no en suspensión, sin embargo, no actualiza el valor de la concentración volumétrica de sólidos en función de la cantidad de partículas que sedimentan en cada coordenada x . Así, la ecuación de distribución de concentraciones volumétricas se encarga de realizar dicha actualización, lo que es posible dado que esta ecuación relaciona de forma directa la concentración volumétrica de sólidos en la mezcla con el diámetro de corte.

Entonces, la expresión general que considera el modelo para estimar la concentración total de la mezcla en función de la función densidad de distribución de concentraciones viene dada por la Ecuación 4.19.

$$\phi = \int_{d_{min}}^{d_c} \phi_d(d) dd \quad (4.19)$$

Donde d_{min} es el tamaño mínimo de la distribución de tamaños, d_c es el diámetro de corte y ϕ_d corresponde a una función densidad de distribución de concentraciones arbitraria.

Luego, se recuerda que en la subsección 3.3.1 se menciona que para efectos del caso de estudio se considera que las partículas sólidas siguen una distribución granulométrica del tipo Rosin-Rammler. En consecuencia, si se conoce la condición de borde para la concentración volumétrica de sólidos totales en el punto de descarga de relaves ($\phi(x_0, t_i) \equiv \phi_0$) y se define un diámetro mínimo para la distribución de tamaño de partículas (d_{min}), entonces la expresión que adopta la ecuación general de distribución de concentraciones volumétrica, para la condición $d_c \geq d_{min}$, viene dada por la Ecuación 4.20.

$$\phi = \phi_0 \left(\exp \left\{ - \left(\frac{d_{min}}{d_{63.2}} \right)^n \right\} - \exp \left\{ - \left(\frac{d_c}{d_{63.2}} \right)^n \right\} \right) \quad (4.20)$$

Cabe mencionar que en el caso de que el diámetro de corte sea menor que el diámetro mínimo, toda la distribución de tamaños sedimenta (ya que toda la distribución posee un tamaño mayor al corte) y, consecuentemente, la concentración volumétrica de sólidos en suspensión será igual a cero. Por lo tanto, en estricto rigor la función de distribución de concentración es una función por partes, la cual es dependiente de la hidráulica del escurrimiento dada su dependencia con d_c .

De esta manera, la función por partes mencionada previamente se observa en la Ecuación 4.21.

$$\phi = \begin{cases} \phi = \phi_0 \left(\exp \left\{ - \left(\frac{d_{min}}{d_{63.2}} \right)^n \right\} - \exp \left\{ - \left(\frac{d_c}{d_{63.2}} \right)^n \right\} \right) & \text{si } d_c \geq d_{min} \\ 0 & \text{si } d_c < d_{min} \end{cases} \quad (4.21)$$

Luego, dada la ecuación general enunciada en la Ecuación 4.20 se debe notar que ϕ se escribe como una función distribución de concentraciones por tamaño. Por lo tanto, a partir de dicha expresión general es posible obtener la función densidad de concentraciones por tamaño derivando ϕ respecto a d_c , lo que se expresa en la Ecuación 4.22.

$$\frac{\partial \phi}{\partial d_c} = \phi_d(d_c) \quad (4.22)$$

Que en el caso particular de la distribución Rosin-Rammler se rescata la expresión enunciada en la Ecuación 4.23.

$$\frac{\partial \phi}{\partial d_c} = \phi_0 \left(n \left(\frac{1}{d_{63.2}} \right) \left(\frac{d_c}{d_{63.2}} \right)^{n-1} \exp \left\{ - \left(\frac{d_c}{d_{63.2}} \right)^n \right\} \right) \quad (4.23)$$

Así, la Ecuación 4.21 corresponde a la cuarta ecuación fundamental del modelo y se puede interpretar físicamente cómo que el diámetro de corte en cada x “retira” de la distribución de tamaños aquellas partículas que posean un diámetro mayor a d_c y, consecuentemente, actualiza ϕ en función de las partículas que retire de la distribución.

4.1.5. Ecuación de momentum lineal

Previo a deducir la ecuación de momentum lineal, se requiere conocer algunas definiciones que facilitan la deducción de dicha ecuación.

Entonces, la primera definición que se debe recordar es que la fuerza de presión que actúa sobre una superficie plana puede expresarse según la Ecuación 4.24.

$$F_{PG} = P_G S \quad (4.24)$$

Donde F_{PG} corresponde a la fuerza de presión total que actúa sobre la superficie plana, P_G es la presión aplicada en el centro de gravedad y S corresponde al área de la superficie.

Por otro lado, la fuerza de corte que actúa sobre la mezcla producto del movimiento del fluido viene dada por la Ecuación 4.25.

$$F_\tau = \tau_0 A \quad (4.25)$$

Donde F_τ corresponde a la fuerza total de corte aplicada sobre la mezcla, τ_0 corresponde al esfuerzo de corte medio en la pared y A corresponde a la superficie en la cual actúan los esfuerzos de corte. Luego, se define el esfuerzo de corte medio en la pared según la Ecuación 4.26.

$$\tau_0 = \gamma J R_h \quad (4.26)$$

Donde γ corresponde al peso específico de la mezcla, J corresponde a la pendiente de la línea de carga y R_h corresponde al radio hidráulico. A su vez, la pendiente de la línea de carga cumple con la relación de Darcy-Weisbach, la que se aprecia en la Ecuación 4.27.

$$J = f \frac{1}{D_h} \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad (4.27)$$

Donde f corresponde al factor de fricción de Darcy, \bar{V} la velocidad media de escurrimiento y g la aceleración de gravedad. Luego, en virtud a los supuestos del modelo, el factor de fricción sigue la relación propuesta por Chilton y Stainsby (Chilton y Stainsby, 1998) la cual es válida en régimen de flujo turbulento y se puede apreciar en la Ecuación 4.28.

$$f = 0.079 \left(\frac{R}{n^2 (1-X)^4} \right)^{-0.25} \quad (4.28)$$

Donde R corresponde al número de Reynolds generalizado, n el índice de flujo y X corresponde a la relación que existe entre el esfuerzo de corte en la pared y la tensión de fluencia, todos estos parámetros corresponden a los mismos que se expresan en la subsección 3.1.4. Luego, la definición de X queda expresada según la Ecuación 4.29.

$$X = \frac{1}{8} f \frac{\rho}{\tau_f} \bar{V}^2 \quad (4.29)$$

Donde f es el factor de fricción, ρ corresponde a la densidad de la mezcla, τ_f es la tensión de fluencia y \bar{V} corresponde a la velocidad media del flujo. Se debe mencionar, que debido a la definición de X la Ecuación 4.28 se convierte en una ecuación iterativa en f .

Así, con las definiciones establecidas previamente se procede a deducir la quinta ecuación fundamental del modelo. Esta ecuación refleja el balance de fuerzas en la zona de la suspensión en el volumen de control, dado que en esta zona la mezcla se encuentra en movimiento, y considera que las fuerzas involucradas en el balance son el peso, las fuerzas de presión y la fuerza de corte.

En primer lugar, en la zona de la suspensión o mezcla se debe plantear el teorema de transporte de Reynolds aplicado al momentum lineal de la mezcla, obteniéndose la Ecuación 4.30.

$$\frac{DM\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho_\phi \vec{v} dV + \int_{S_c} \rho_\phi \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS \quad (4.30)$$

En la Ecuación 4.30 el término \vec{v} corresponde a la velocidad de la mezcla y ρ_ϕ corresponde a la densidad de la mezcla. Además, el lado izquierdo de la ecuación representa la suma de fuerzas, en virtud a la segunda ley de Newton, y el lado derecho la variación total de momentum lineal. En lo que respecta al lado derecho de la Ecuación 4.30 se separan las integrales por zona (lecho y suspensión) en el término de acumulación y se expresa el término convectivo para la sección de entrada y salida, obteniéndose la Ecuación 4.31.

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-z_s}^0 \rho_{\phi_m} \vec{v} dz + \int_0^{h-z_s} \rho_\phi \vec{v} dz \right) dx + \int_{S_{salida}} \rho_\phi \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS - \int_{S_{entrada}} \rho_\phi \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS \quad (4.31)$$

Luego, la primera integral del término de acumulación es igual a cero dado que el lecho es fijo y, por otro lado, dado que la concentración de sólidos es constante en la sección de escurrimiento, la densidad es constante para efectos de la integración, obteniéndose la Ecuación 4.32.

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{\phi} \int_0^{h-z_s} \vec{v} dz \right) dx + \rho_{\phi} \frac{q^2}{\bar{h}} \Big|_{x+dx} - \rho_{\phi} \frac{q^2}{\bar{h}} \Big|_x \quad (4.32)$$

Posteriormente, al desarrollar la integral del término de acumulación de la Ecuación 4.32 se obtiene la Ecuación 4.33. En esta ecuación se aprecia que ya se encuentra desarrollada la parte de la ecuación que involucra la variación material o total de momentum lineal.

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\phi} q) dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_{\phi} \frac{q^2}{\bar{h}} \right) dx \quad (4.33)$$

Entonces, para desarrollar el lado izquierdo de la Ecuación 4.33 se esquematizan las fuerzas que actúan en la zona de la suspensión y también el peraltamiento del canal producto de la sedimentación de partículas. El esquema se aprecia en la Figura 4.1.

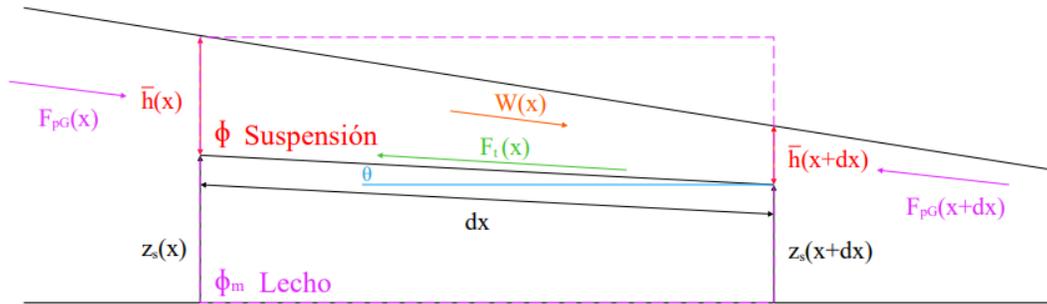


Figura 4.1: Esquema que representa el balance de fuerzas en la suspensión

En el esquema W representa la fuerza peso, F_{τ} es la fuerza de corte y F_{pG} es la fuerza de presión. Por otro lado, el ángulo θ es al ángulo que se forma naturalmente producto de la sedimentación de partículas sólidas. Así, se procede a determinar la expresión asociada a cada una de las fuerzas.

En lo que respecta a la fuerza peso, esta se puede escribir en función de la densidad de la suspensión, el volumen de mezcla y la aceleración de gravedad como expresa la Ecuación 4.34. El peraltamiento del canal es el responsable de que exista una componente del peso en el balance de fuerzas.

$$W = \rho_{\phi} g \tilde{h} \sin(\theta) dx \quad (4.34)$$

Por parte de la fuerza de corte se debe recordar que en un escurrimiento gradualmente variado la expresión que cuantifica el esfuerzo de corte medio en las paredes de un canal viene dada por la Ecuación 4.26. Entonces desarrollando la expresión del esfuerzo de corte medio considerando el uso de la Ecuación 4.27 se obtiene la Ecuación 4.35

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \rho_{\phi} f \left(\frac{q}{\bar{h}} \right)^2 \quad (4.35)$$

Por lo tanto, dado que la superficie en donde actúa el esfuerzo de corte medio viene dada por la superficie del lecho, entonces la fuerza de corte que actúa en la suspensión viene dada por la Ecuación 4.36.

$$F_{\tau} = \frac{1}{8} \rho_{\phi} f \left(\frac{q}{\tilde{h}} \right)^2 dx \quad (4.36)$$

Por otro lado, en lo que respecta a las fuerzas de presión, se recuerda que en superficies planas la fuerza de presión se calcula como el producto entre el área de la superficie y la presión aplicada sobre esta en su centro de gravedad. Dado esto, la fuerza de presión que actúa en la superficie definida en x se calcula según dicta la Ecuación 4.37.

$$F_{pG}(x) = \rho_{\phi} g \cos(\theta) \frac{\tilde{h}^2}{2} \quad (4.37)$$

En consecuencia, si se considera la fuerza de presión que actúa en la sección de flujo aguas arriba y en la sección de flujo aguas abajo, la fuerza neta resultante viene dada por la Ecuación 4.38.

$$F_{pG} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{\phi} g \cos(\theta) \tilde{h}^2) dx \quad (4.38)$$

Posteriormente, se recuerda que la topografía inicial del canal exhibe una pendiente del 1% y, consecuentemente, la sedimentación de partículas sólidas es tal que peralta el canal con pendientes en torno al 1%. En consecuencia, considerando la geometría del canal producto del peraltamiento generado por las partículas sólidas se obtienen las relaciones geométricas expresadas en las Ecuaciones 4.39 y 4.40.

$$\sin(\theta) = -\frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (4.39)$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z_s}{\partial x} \right)^2} \approx 1 \quad (4.40)$$

Finalmente, reemplazando la expresión determinada en las Ecuaciones 4.34, 4.36, 4.38, 4.39 y 4.40 en el lado izquierdo la Ecuación 4.33, se obtiene la quinta y última ecuación básica del modelo físico que corresponde al balance de momentum lineal. La quinta ecuación fundamental delo modelo se encuentra expresada en la Ecuación 4.41.

$$-\rho_{\phi} g \tilde{h} \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) - \frac{1}{8} \rho_{\phi} f \left(\frac{q}{\tilde{h}} \right)^2 - \frac{1}{2} \tilde{h}^2 g \frac{\partial \rho_{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\phi} q) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_{\phi} \frac{q^2}{\tilde{h}} \right) \quad (4.41)$$

4.1.6. Sistema de ecuaciones del modelo e hipótesis cuasiestática

En virtud a las ecuaciones previamente deducidas y enunciadas, se presenta el sistema de EDP's del modelo físico. Así, el sistema de ecuaciones fundamental del modelo se encuentra conformado por la ecuación de conservación de volumen de sólidos (Ecuación 4.42), la ecuación de conservación de volumen de la mezcla (Ecuación 4.43), la ecuación de sedimentación o criterio de sedimentación (Ecuación 4.44), la ecuación de distribución de concentraciones volumétricas (Ecuación 4.45) y la ecuación de balance de momentum lineal en la zona de la suspensión (Ecuación 4.46).

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \tilde{h}) + \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m z_s) + \frac{\partial}{\partial x} (\phi q) \quad (4.42)$$

$$-L_E - L_I = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.43)$$

$$d_c = \left(\frac{3}{4} \frac{\eta^2}{g(S-1)\rho_\phi^2} \left[\frac{q}{a\tilde{h}\sqrt{gD_h(S-1)}} \right]^{1/b} \right)^{1/3} \quad (4.44)$$

$$\phi = \phi_0 \left(\exp \left\{ - \left(\frac{d_{min}}{d_{63.2}} \right)^n \right\} - \exp \left\{ - \left(\frac{d_c}{d_{63.2}} \right)^n \right\} \right) \quad (4.45)$$

$$-\rho_\phi g \tilde{h} \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) - \frac{1}{8} \rho_\phi f \left(\frac{q}{\tilde{h}} \right)^2 - \frac{1}{2} \tilde{h}^2 g \frac{\partial \rho_\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\phi q) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_\phi \frac{q^2}{\tilde{h}} \right) \quad (4.46)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales enunciado corresponde a un sistema de EDP's no lineales, de orden 1 y homogéneo. Las variables a despejar del sistema de ecuaciones corresponden al caudal de la mezcla (q), al espesor de escurrimiento en la zona de la mezcla (\tilde{h}), a la altura del lecho de partículas sólidas (z_s), la concentración volumétrica de sólidos en la zona de la suspensión (ϕ) y el diámetro de corte (d_c). Sin embargo, es posible reducir la cantidad de variables a despejar a tan sólo tres, utilizando la hipótesis cuasiestática.

La hipótesis cuasiestática permite trabajar el sistema de ecuaciones diferenciales previamente enunciado simplificando algunos términos. En particular, la hipótesis permite considerar que la derivada temporal del caudal de mezcla, la derivada temporal del espesor de escurrimiento y la derivada temporal de la concentración volumétrica de sólidos son despreciables. Físicamente, esta hipótesis permite suponer lo enunciado en las Ecuaciones 4.47, 4.48 y 4.49.

$$\frac{\partial q}{\partial t} \approx 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \approx 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx 0 \quad (4.49)$$

Es interesante notar que la hipótesis cuasiestática no supone que la tasa de crecimiento del lecho de partículas es despreciable ($\partial z_s / \partial t \neq 0$). La razón detrás de lo mencionado, es que el uso de dicha suposición entra en contradicción con la ecuación de conservación de volumen de la fase sólida,

dado que el modelo supone la existencia de un proceso de sedimentación de partículas a lo largo del escurrimiento, y debido a esto, existe acumulación de partículas al interior del volumen de control, siendo el término en la ecuación que refleja esto aquel relacionado a $\partial z_s / \partial t$.

Por lo anteriormente argumentado, si se aplica la hipótesis cuasiestática al sistema de EDP's deducido originalmente, dicha hipótesis entrega todo su potencial en este punto dado que permite plantear un nuevo sistema de ecuaciones, el cual corresponde a un sistema de EDO's el se resuelve para cada instante de tiempo en todo el espacio y se escribe según lo que expresan las Ecuaciones 4.50 hasta la 4.54.

$$\phi_m \frac{\partial z_s}{\partial t} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} - L_E - L_I \quad (4.51)$$

$$d_c = \left(\frac{3}{4} \frac{\eta^2}{g(S-1)\rho_\phi^2} \left[\frac{q}{a\tilde{h}\sqrt{gD_h(S-1)}} \right]^{1/b} \right)^{1/3} \quad (4.52)$$

$$\phi = \phi_0 \left(\exp \left\{ -\left(\frac{d_{min}}{d_{63.2}} \right)^n \right\} - \exp \left\{ -\left(\frac{d_c}{d_{63.2}} \right)^n \right\} \right) \quad (4.53)$$

$$-\rho_\phi g \tilde{h} \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) - \frac{1}{8} \rho_\phi f \left(\frac{q}{\tilde{h}} \right)^2 = \Delta \rho \left(\frac{1}{2} \tilde{h}^2 g + \frac{q^2}{\tilde{h}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2\rho_\phi \frac{q}{\tilde{h}} \frac{\partial q}{\partial x} - \rho_\phi \frac{q^2}{\tilde{h}^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (4.54)$$

Donde $\Delta \rho$ corresponde a la diferencia de densidad que existe entre el sólido y el líquido que componen la suspensión.

Cabe mencionar que en este nuevo sistema de ecuaciones, la Ecuación 4.51 toma un valor fundamental en la resolución del sistema de ecuaciones, dado que esta ecuación es la que permite actualizar la topografía del canal en cada instante de tiempo en función de la variación longitudinal del caudal unitario y las tasas de evaporación e infiltración.

Luego, cabe recordar que para efectos del caso de prueba no se considera el efecto de las pérdidas por evaporación e infiltración, razón por la cual a partir de la sección 4.2 toda la resolución del sistema de ecuaciones se plantea sin considerar estas pérdidas, dado que se busca estudiar la pérdida de agua por atrapamiento debido al proceso de segregación de partículas sólidas desde la suspensión. En consecuencia, de ahora en adelante $L_E = 0$ y $L_I = 0$. Es importante destacar que esta simplificación tan sólo surte efecto para el caso de prueba. En contraste, si se quiere integrar de forma simple dichas pérdidas se puede considerar que las pérdidas por infiltración y evaporación obedecen a la ley de Darcy y la ley de Dalton, respectivamente, las cuales se mencionan en el Capítulo 2.

4.1.7. Sistema de ecuaciones diferenciales acoplado

A continuación, se detalla cómo se deduce el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado principal del modelo a partir del cual se obtiene la solución numérica.

Entonces, sin considerar aún el uso de condiciones de borde ni inicial, es posible acoplar las Ecuaciones 4.50, 4.51, 4.52 y 4.53 obteniéndose la Ecuación 4.55.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q}{(\phi_m - \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.55)$$

Luego, aplicando la regla de la cadena a la derivada espacial de la concentración volumétrica de sólidos se obtiene la Ecuación 4.56. Cabe mencionar que el uso de la regla de cadena es válido puesto que la Ecuación 4.53 plantea que $\phi = \phi(d_c)$ y la Ecuación 4.52 plantea que $d_c = d_c(x)$.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q}{(\phi_m - \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial d_c} \frac{\partial d_c}{\partial x} \quad (4.56)$$

Según los términos observados en la Ecuación 4.56, la derivada de la concentración volumétrica de sólidos respecto al diámetro de corte requiere del uso de la Ecuación 4.53. Por otro lado, la derivada del diámetro de corte respecto a x requiere del uso de la Ecuación 4.52. Entonces, se procede a calcular ambas derivadas, las cuales corresponden con las Ecuaciones 4.57 y 4.58, respectivamente.

$$\frac{\partial \phi}{\partial d_c} = \phi_0 \left(n \left(\frac{1}{d_{63.2}} \right) \left(\frac{d_c}{d_{63.2}} \right)^{n-1} \exp \left\{ - \left(\frac{d_c}{d_{63.2}} \right)^n \right\} \right) \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial d_c}{\partial x} = \frac{1}{3} \left(A(C)^{1/b} \right)^{-2/3} \left[(E+L) \frac{\partial \phi}{\partial x} + F \left[G \frac{\partial q}{\partial x} + H \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right] \right] \quad (4.58)$$

Donde A , C , E , F , G y H son coeficientes variables que pueden depender de q , \tilde{h} , ϕ , o bien alguna combinación de estas variables. Luego, desde la Ecuación 4.59 hasta la Ecuación 4.64 se define cada uno de los factores utilizados en la Ecuación 4.58.

$$A = \frac{3}{4} \frac{\mu_f^2}{g(S-1)\rho_\phi^2} \quad (4.59)$$

$$C = \frac{q}{\tilde{h}a\sqrt{gD_h(S-1)}} \quad (4.60)$$

$$E = 2A \left(\frac{2}{\phi_m} \frac{\mu_a}{\mu_\phi} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-3} - \frac{\Delta\rho}{\rho_\phi} \right) (C)^{1/b} \quad (4.61)$$

$$F = \frac{1}{b} A(C)^{1/b-1} \quad (4.62)$$

$$G = \frac{1}{\tilde{h}a\sqrt{gD_h(S-1)}} \quad (4.63)$$

$$H = \frac{q}{a\sqrt{g(S-1)}} \left[\frac{(2\tilde{h}+B)^{-1/2} \tilde{h}^{3/2} B^{1/2} - 1.5\tilde{h}^{1/2} B^{1/2} (2\tilde{h}+B)^{1/2}}{\tilde{h}^3 B} \right] \quad (4.64)$$

Donde S corresponde a la gravedad específica de las partículas sólidas y B corresponde al ancho del canal.

Es interesante notar que una vez despejadas las derivadas, se llega a una expresión que permite obtener la derivada espacial de la concentración volumétrica de sólidos como una derivada implícita, tal como indica la Ecuación 4.65.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial d_c} \frac{\partial d_c}{\partial x} = f \left(q, \tilde{h}, \phi, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (4.65)$$

Al hacer explícita la función f se obtiene la Ecuación 4.66.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{3} \left(A(C)^{1/b} \right)^{-2/3} \frac{\partial \phi}{\partial d_c} \left[E \frac{\partial \phi}{\partial x} + FG \frac{\partial q}{\partial x} + FH \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right] \quad (4.66)$$

Luego, se definen tres variables para despejar explícitamente la derivada de la concentración. Estas tres variables se expresan desde la Ecuación 4.67 hasta la Ecuación 4.69.

$$X = \frac{1}{3} \left(A(C)^{1/b} \right)^{-2/3} \frac{\partial \phi}{\partial d_c} E \quad (4.67)$$

$$K_1 = \frac{1}{3} \left(A(C)^{1/b} \right)^{-2/3} \frac{\partial \phi}{\partial d_c} FG \quad (4.68)$$

$$K_2 = \frac{1}{3} \left(A(C)^{1/b} \right)^{-2/3} \frac{\partial \phi}{\partial d_c} FH \quad (4.69)$$

De esta manera, finalmente se llega a la Ecuación 4.70.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{K_1}{1-X} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{K_2}{1-X} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (4.70)$$

De esta manera, a partir del sistema de EDO's deducido de la hipótesis cuasiestática, se plantea un nuevo sistema de ecuaciones el cual expresa las derivadas espaciales de q , \tilde{h} y ϕ y que se constituye por la Ecuación 4.55, la Ecuación 4.54 y la Ecuación 4.70.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q}{(\phi_m - \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.71)$$

$$-\rho_\phi g \tilde{h} \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) - \frac{1}{8} \rho_\phi f \left(\frac{q}{\tilde{h}} \right)^2 = \Delta \rho \left(\frac{1}{2} \tilde{h}^2 g + \frac{q^2}{\tilde{h}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2\rho_\phi \frac{q}{\tilde{h}} \frac{\partial q}{\partial x} - \rho_\phi \frac{q^2}{\tilde{h}^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{K_1}{1-X} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{K_2}{1-X} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (4.73)$$

El sistema de ecuaciones enunciado corresponde al sistema de ecuaciones diferenciales acoplado y es un sistema de EDO's, no lineales y homogéneas. Así, el sistema de ecuaciones acoplado se deduce en virtud a la hipótesis cuasiestática y es a partir del cual se obtiene la solución numérica, la cual se detalla en el Anexo C.

4.2. Caso de prueba: Segregación y pérdidas por atrapamiento

4.2.1. Resolución del sistema en el tiempo inicial

En primer lugar, se debe recordar que la ecuación de distribución de concentraciones volumétricas requiere de la definición de un diámetro mínimo (d_{min}) de acuerdo a la deducción realizada en la subsección 4.1.4. Así, dado que el tamaño característico de la distribución $d_{63.2}$ se define, en base a los requerimientos de eficiencia operacional del proceso de flotación, el diámetro mínimo el cual es dos ordenes de magnitud inferior al diámetro característico, puesto que para tamaños inferiores a $10 \mu\text{m}$ el fenómeno de adhesión partícula-burbuja se vuelve altamente ineficiente dado que para estos tamaños las partículas comienzan a exhibir un comportamiento coloidal con el agua, o bien siguen las líneas de flujo.

De esta forma, el diámetro mínimo seleccionado se presenta en la Ecuación 4.74 y, por otro lado, en la Figura 4.2 se aprecia la función distribución de concentraciones volumétricas en función del diámetro de corte (d_c) considerando los parámetros definidos en la subsección 3.3.1 y la condición de borde para la concentración volumétrica de sólidos (ϕ_0) detallada en la subsección 3.3.5.

$$d_{min} = 1 \mu\text{m} \quad (4.74)$$

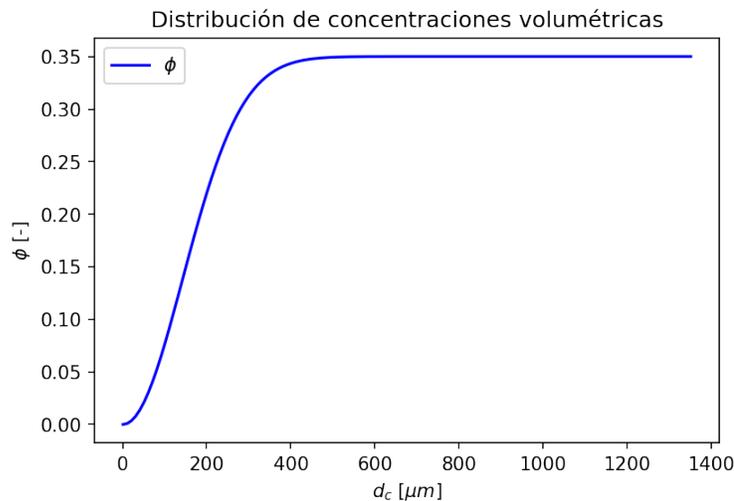


Figura 4.2: Distribución de concentraciones volumétricas en función de d_c

Entonces, al observar la Figura 4.2 se aprecia que al evaluar la Ecuación 4.53 para $d_c = d_{min}$ la concentración de la mezcla es igual a cero, lo que es coherente dado que en este escenario todo tamaño superior al tamaño mínimo sedimenta y, por lo tanto, la concentración total de la mezcla es nula. Por otro lado, al evaluar la ecuación para $d_c \approx 1000 \mu\text{m}$ la concentración de la mezcla se encuentra en torno a ϕ_0 , la razón detrás de esto es que la distribución exhibe una mayor densidad de concentraciones en torno a los tamaños finos (del orden de $300 \mu\text{m}$) abarcando prácticamente en su totalidad a la distribución, en cambio, a partir de aquellos tamaños superiores a 1 mm las concentraciones por tamaño son marginales y no aportan a la concentración total de la mezcla.

Posteriormente, una vez definida adecuadamente la distribución de concentraciones se procede a ejecutar la etapa 1 de la subsección 3.2.2. Entonces, al considerar que el tiempo en el cual se trabaja corresponde a t_0 se aprecia en las Figuras 4.3.a y 4.3.b la solución obtenida para las variables q y

ϕ , en las Figura 4.4.a y 4.4.b la solución obtenida para la variable \tilde{h} y la relación existente entre \tilde{h} , h_n y h_c , y en las Figuras 4.5.a y 4.5.b la solución obtenida para las variables V y d_c . Por otro lado, con el objetivo de simplificar notación, a partir de ahora se expresa $\bar{V} \equiv V$.

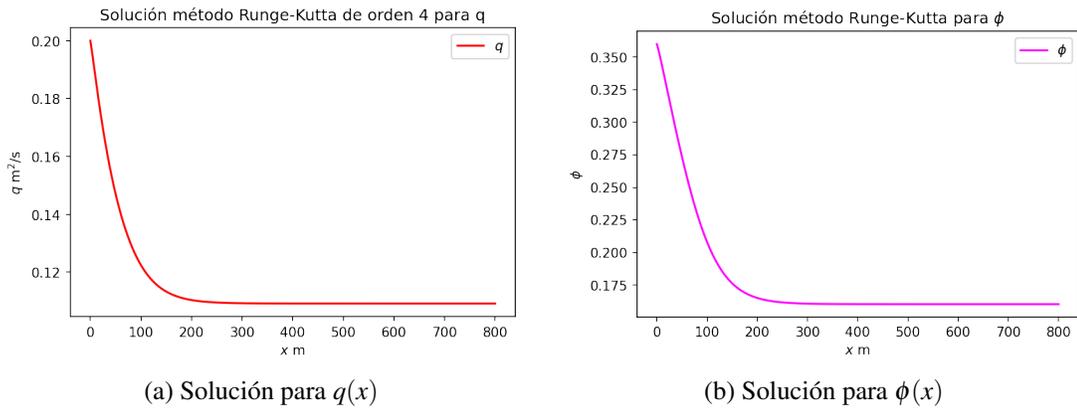


Figura 4.3: Solución para q y ϕ en $t = t_0$

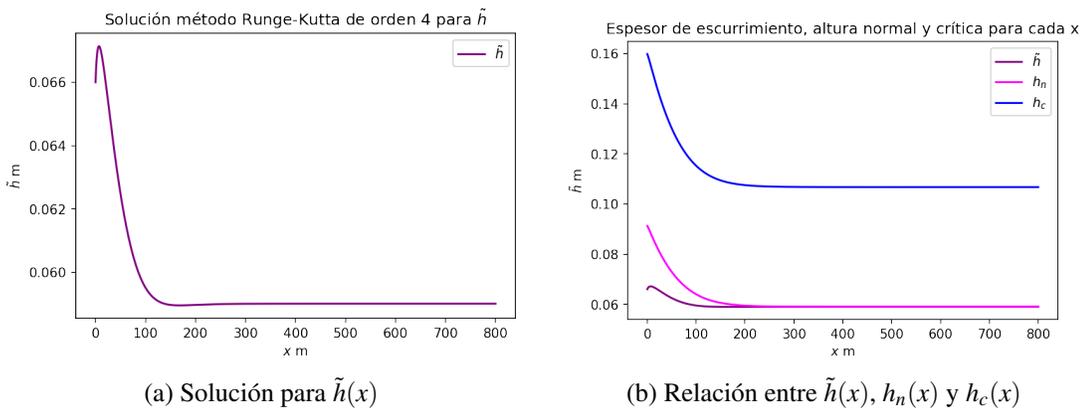


Figura 4.4: Solución para \tilde{h} y relación entre \tilde{h} , h_n y h_c en $t = t_0$

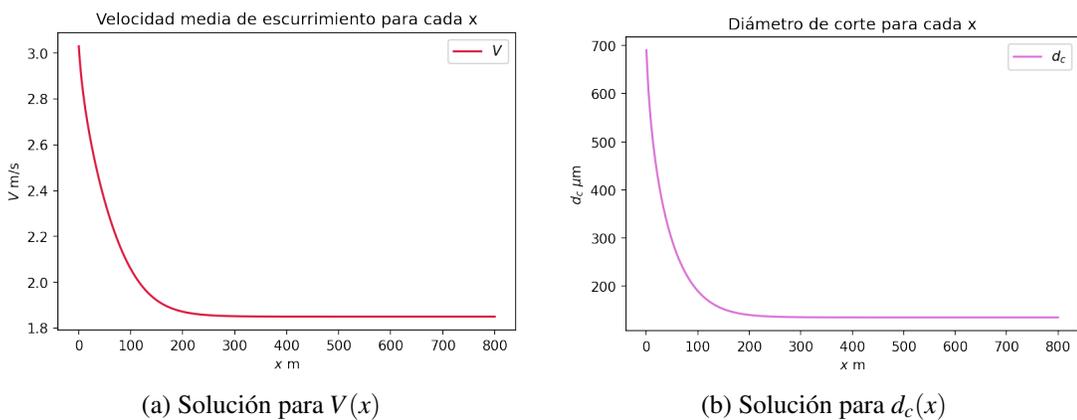


Figura 4.5: Solución para V y d_c en $t = t_0$

Entonces, a partir de los resultados obtenidos en esta etapa, se aprecia en una primera instancia que según lo observado en la Figura 4.5.b el diámetro de corte es una función decreciente con

la distancia y , más aún, alcanza un diámetro igual a $300 \mu\text{m}$, el cual corresponde al diámetro característico de la distribución ($d_{63.2}$), a una distancia de 53 m. Lo anterior, implícitamente indica que a lo largo del escurrimiento está ocurriendo un proceso de sedimentación de partículas, dado que el diámetro de corte está, efectivamente, “cortando” a la distribución de concentraciones y , consecuentemente, es esperable que exista una disminución de la concentración volumétrica de sólidos a medida que avanza el escurrimiento. Además, se aprecia que la concentración volumétrica de sólidos varía desde un valor máximo $\phi = 0.36$ a un valor mínimo $\phi = 0.16$, donde el mínimo de concentración se alcanza cuando el diámetro de corte es $d_c \approx 135 \mu\text{m}$.

Otra consecuencia generada por el decrecimiento en la función d_c es que el caudal de la mezcla disminuye a lo largo del escurrimiento. El decaimiento progresivo en la función $d_c(x)$ se interpreta físicamente cómo que a lo largo del flujo están, progresivamente, depositando partículas sólidas, las cuales una vez se reordenan conforman un lecho. De esta forma, la deposición de partículas sólidas se traduce cómo una “pérdida de sólido” para la mezcla y una “ganancia de sólido” para el lecho, así, dicha pérdida de sólidos para la mezcla, el sistema de ecuaciones la manifiesta cómo un decrecimiento progresivo del caudal unitario q , lo que se condice con lo apreciado en la Figura 4.3.a. Además, el decaimiento en el flujo volumétrico de la mezcla en función de la distancia no sólo es responsabilidad de la fase sólida (partículas), puesto que dada las hipótesis del modelo el lecho de partículas que se forma producto de la sedimentación posee una concentración crítica de empaquetamiento $\phi_m = 0.6$ constante, en otras palabras, el lecho se encuentra conformado en un 60% por la fase sólida y un 40% por la fase líquida, lo que indirectamente está expresando que la deposición de sólidos conlleva consigo un “atrapamiento” de líquido al formar el lecho, dicho atrapamiento es lo que comúnmente se le llama “pérdidas de agua por atrapamiento”.

Hasta el momento, el comportamiento de las variables q y ϕ es el esperado dada la tendencia manifestada por d_c , o bien, V . Cabe mencionar que todo el análisis efectuado previamente bien puede explicarse en términos de V y no de d_c , esto es posible dado que las hipótesis del modelo establecen que la velocidad media de escurrimiento representa adecuadamente a la velocidad crítica de deposición, que es a partir de la cual se define el diámetro de corte. De esta manera, tanto d_c como V expresan de manera equivalente el fenómeno de la deposición.

Lo que resulta de gran interés para el análisis es el comportamiento que exhibe el espesor de escurrimiento, el cual se aprecia en la Figura 4.4.a. En primer lugar, en base a lo observado en la Figura 4.4.b es claro que la condición de borde escogida para el espesor de escurrimiento (\tilde{h}_0) es menor que la altura normal y que la altura crítica evaluadas en $x = 0$, es más, para todo x definido en el dominio se cumple que $\tilde{h}(x) < h_n(x) < h_c(x)$, en particular, esto se cumple a partir de $x = 250$ m que es la distancia desde la cual q es aproximadamente constante, por lo que el tipo de eje hidráulico que se espera que se desarrolle a partir de esta distancia sea F3, o bien torrente deprimido en pendiente fuerte. Cabe destacar que la particularidad que posee el eje hidráulico F3 a caudal constante, es que la altura de escurrimiento manifiesta un crecimiento monótono y cóncavo, de tal manera que cuando $x \rightarrow \infty$ entonces $\tilde{h} \rightarrow h_n$. Entonces, en contraste al comportamiento exhibido por el espesor de escurrimiento para el caso F3 a caudal constante, el resultado entregado por el modelo manifiesta cambios en la tendencia del espesor de escurrimiento respecto a la distancia, en particular, presenta un máximo en $x = 9$ m y presenta un punto de inflexión en $x = 46$ m, en otras palabras, exhibe un cambio de monotonía y un cambio de concavidad, respectivamente. Por otra parte, es interesante notar a partir de $x = 250$ m en todo momento es menor a h_n por lo que se sigue respetando que para $x \rightarrow \infty$ se tiene que $h \rightarrow h_n$, pero con una tendencia decreciente de \tilde{h} .

4.2.2. Análisis en el comportamiento de la altura de escurrimiento

La razón que explica el cambio en la monotonía del espesor de escurrimiento se obtiene a partir de efectuar un análisis de el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado. Así, si en el sistema acoplado se reemplaza la Ecuación 4.70 en la Ecuación 4.55 se obtiene la Ecuación 4.75.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q}{(\phi_m - \phi)} \left(\frac{K_1}{1-X} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{K_2}{1-X} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right) \quad (4.75)$$

Trabajando algebraicamente la Ecuación 4.75 se llega a la Ecuación 4.76.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{C_2}{(1-AC_1)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (4.76)$$

Donde A , C_1 y C_2 se expresan en las Ecuaciones 4.77, 4.78 y 4.79.

$$A = \frac{q}{(\phi_m - \phi)} \quad (4.77)$$

$$C_1 = \frac{K_1}{1-X} \quad (4.78)$$

$$C_2 = \frac{K_2}{1-X} \quad (4.79)$$

De esta manera, al observar la Ecuación 4.76 resulta lógico pensar que el signo que adopte la derivada de la altura de escurrimiento depende de los signos que adquieran los coeficientes variables A , C_1 y C_2 . De este modo, por simple inspección $A > 0$ en todo el dominio definido en x para las condiciones del modelo y el signo de C_1 y C_2 dependen de K_1 y X y de K_2 y X , respectivamente.

Entonces, al analizar los signos de cada una de las componentes de K_1 , las cuales se observan en la Ecuación 4.68, se obtiene que A , C , F y G son funciones positivas y $\partial \phi / d_c$ es una función no negativa para todo x bajo las condiciones del modelo y, por lo tanto, $K_1 \geq 0$ en todo el dominio. Por otro lado, al analizar los signos de las componentes de K_2 , las que se observan en la Ecuación 4.69, la única componente que controla el signo del factor K_2 es H y al graficar el factor H en función de x se obtiene la Figura 4.6.a. En lo que respecta al factor X , es posible graficar directamente el comportamiento del término $(1-X)$ con lo que se obtiene la Figura 4.6.b.

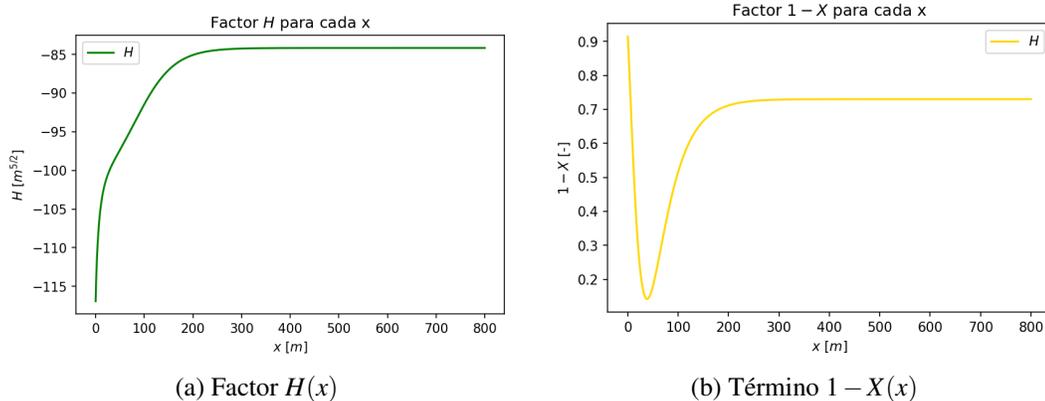


Figura 4.6: Comportamiento del factor H y el término $1-X$ en función de x

Al observar el comportamiento de H y $1 - X$ bajo las condiciones del modelo se deduce lo explicitado en las Ecuaciones 4.80, 4.81 y 4.82.

$$A > 0 \quad \forall x \quad (4.80)$$

$$K_1 \geq 0 \quad \wedge \quad (1 - X) > 0 \implies C_1 \geq 0 \quad \forall x \quad (4.81)$$

$$K_2 \leq 0 \quad \wedge \quad (1 - X) > 0 \implies C_2 \leq 0 \quad \forall x \quad (4.82)$$

En consecuencia, el signo que adopte la derivada del espesor de escurrimiento depende exclusivamente de los valores que adopte el término $(1 - AC_1)$ dado que se conoce el signo que adopta C_2 en todo el espacio y, en base a la Figura 4.3.a, se deduce que $\partial q / \partial x < 0$ en todo el espacio. Entonces, analizando nuevamente la Figura 4.4.a se observa que para todos los valores de x menores a 9 m se cumple que $\partial \tilde{h} / \partial x > 0$ y que para todos los valores de x mayores a 9 m se tiene que $\partial \tilde{h} / \partial x < 0$. Por lo tanto, se expresa en las Ecuaciones 4.83 y 4.84 los valores que adopta el término $(1 - AC_1)$ y, cómo a partir de este, se obtiene el signo de $\partial \tilde{h} / \partial x$ en todo el espacio.

$$\frac{\partial q}{\partial x} < 0 \quad \wedge \quad C_2 < 0 \quad \wedge \quad (1 - AC_1) > 0 \implies \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} > 0 \quad \forall x < 9 \text{ [m]} \quad (4.83)$$

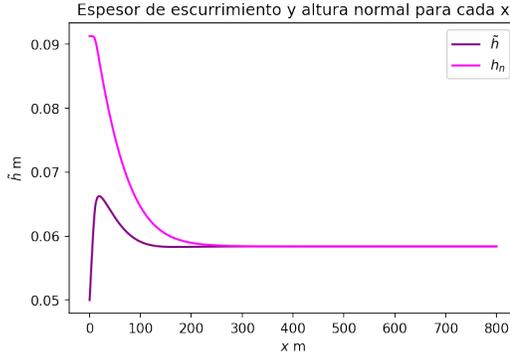
$$\frac{\partial q}{\partial x} < 0 \quad \wedge \quad C_2 < 0 \quad \wedge \quad (1 - AC_1) < 0 \implies \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} < 0 \quad \forall x > 9 \text{ [m]} \quad (4.84)$$

Posterior al análisis, resulta ineludible preguntarse qué parámetros o factores son los responsables de que se manifieste el cambio de signo en la derivada del espesor de escurrimiento. La respuesta a dicha pregunta son las condiciones de borde que se ingresan al modelo físico, sobre las que se discute en mayor detalle en la siguiente subsección.

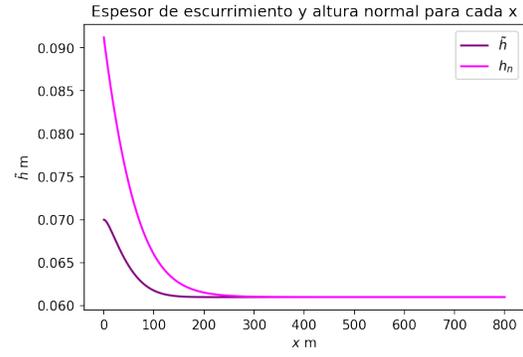
4.2.3. Discusión sobre las condiciones de borde

A partir del análisis efectuado para el comportamiento que exhibe el espesor de escurrimiento, es posible conjeturar que dependiendo de las condiciones de borde del sistema de ecuaciones q_0 , \tilde{h}_0 , ϕ_0 y la evolución que presenten las variables q , \tilde{h} y ϕ a lo largo del escurrimiento, el cambio en la monotonía del espesor de escurrimiento puede no presentarse. Para respaldar dicha conjetura se presentan en las Figuras 4.7.a, 4.7.b, 4.8.a y 4.8.b el comportamiento presentando para la solución de la variable \tilde{h} y el comportamiento presentado por h_n , considerando distintos valores de h_0 e iguales valores de q_0 y ϕ_0 . Es importante destacar que a nivel operacional es poco factible alterar las condiciones de borde asociadas a q_0 y ϕ_0 dado que estas se encuentran definidas por parámetros que aumentan la eficiencia operacional en los procesos de flotación, por ejemplo optimizar el tiempo medio de residencia de las partículas sólidas al interior de una celda, y por la capacidad de los equipos planta que dispone la faena en cuestión.

Cabe mencionar que los valores de \tilde{h}_0 seleccionados cumplen con la condición $\tilde{h} < h_n < h_c$ puesto que se busca que en todos los casos se desarrolle un eje hidráulico F3 para comparar el cómo varía el comportamiento de la variable \tilde{h} . Además, dado que se cumplen las condiciones para el desarrollo de un eje hidráulico F3, se debe cumplir en todos los casos que cuando $x \rightarrow \infty$ entonces $\tilde{h} \rightarrow h_n$ dado que a una distancia lo suficientemente alejada de la condición de borde impuesta aguas arriba del escurrimiento, el espesor de escurrimiento tiende a la altura de escurrimiento uniforme.

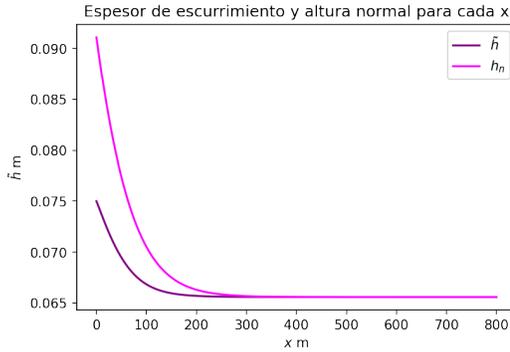


(a) Condición de borde $\tilde{h}_0 = 0.05$ m

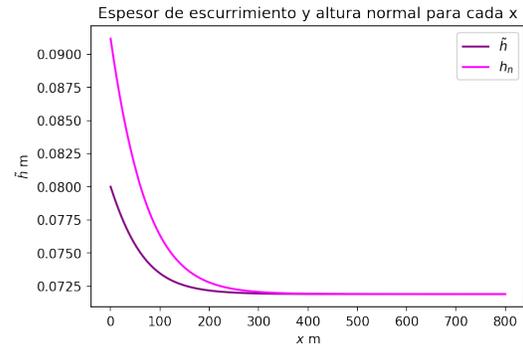


(b) Condición de borde $\tilde{h}_0 = 0.07$ m

Figura 4.7: $\tilde{h}(x)$ para las condiciones $\tilde{h}_0 = 0.05$ m y $\tilde{h}_0 = 0.07$ m



(a) Condición de borde $\tilde{h}_0 = 0.075$ m



(b) Condición de borde $\tilde{h}_0 = 0.08$ m

Figura 4.8: $\tilde{h}(x)$ para las condiciones $\tilde{h}_0 = 0.075$ m y $\tilde{h}_0 = 0.08$ m

En lo que respecta a los dos casos presentados en la Figura 4.7 se observa que para las condiciones de borde para el espesor de escurrimiento mencionadas, la variable \tilde{h} sigue exhibiendo el cambio de monotonía apreciado en la subsección 4.2.2. Por el contraste, en la Figura 4.8 se aprecia que en el caso de la Figura 4.8.a la tendencia a cambiar de monotonía por parte de \tilde{h} se mantiene de forma perceptible y en el caso de la Figura 4.8.b la variable \tilde{h} es monótonamente decreciente con la distancia. Entonces, a partir de los resultados observados se deduce que la elección de las condiciones de borde condiciona el comportamiento que manifiesta la variable \tilde{h} .

Por lo tanto, en base a lo analizado en la subsección 4.2.3. y en la subsección 4.2.4, si q es una función monótona, existe un set de condiciones de borde q_0, \tilde{h}_0, ϕ_0 tal que la solución entregada por el sistema de ecuaciones $q(x), \tilde{h}(x), \phi(x)$ en todo el dominio cumpla con que la función $\tilde{h}(x)$ sea una función monótona. En otras palabras, si q es monótona, existe q, \tilde{h} y ϕ tal que $\forall x \in [x_0, x_n]$ se tiene que $(1 - AC_1)$ no cambia de signo.

Un set de condiciones de borde que cumpla con lo ya mencionado es el definido por las Ecuaciones 4.85, 4.86 y 4.87. Las cuales se relacionan con el máximo observado en la Figura 4.4.a.

$$q_0 = 0.19 \text{ m}^2/\text{s} \quad (4.85)$$

$$h_0 = 0.07 \text{ m} \quad (4.86)$$

$$\phi_0 = 0.34 \quad (4.87)$$

Así, el comportamiento de las funciones $q(x)$ y $\tilde{h}(x)$ para estas nuevas condiciones de aprecia en las Figuras 4.9.a y 4.9.b, respectivamente.

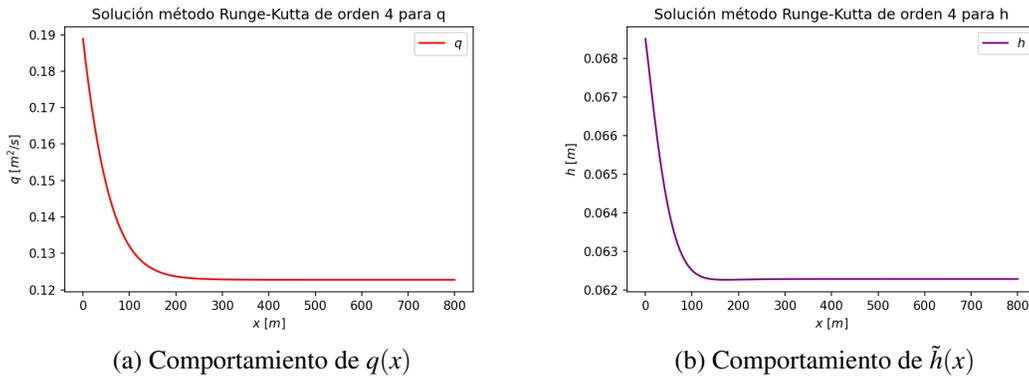


Figura 4.9: Comportamiento de la solución para $q(x)$ y $\tilde{h}(x)$ (nuevas condiciones)

Entonces, dado que las soluciones q y \tilde{h} presentan la misma monotonía en todo el dominio espacial, es posible inferir el signo que adopta el denominador en la Ecuación 4.76, de tal manera que se cumple lo expresado en la Ecuación 4.88.

$$(1 - AC_1) < 0 \quad \forall x \in [x_0, x_n] \quad (4.88)$$

La importancia y el por qué se efectúa el análisis asociado al cambio de monotonía de la función $\tilde{h}(x)$ y a la correcta elección de las condiciones de borde, es que si bien el sistema de ecuaciones acepta determinados sets de condiciones de bordes no todos entregan una solución físicamente interpretable para efectos del problema en estudio. Por ejemplo, para las condiciones de borde analizadas en las Figuras 4.4.a, 4.7.a, 4.7.b y 4.8.a la solución entregada por el modelo corresponde a una solución matemática del problema, sin embargo no hay sustento físico asociado a la hidráulica del escurrimiento que permita explicar de forma fundamentada dicha solución. Por otro lado, en el caso de la solución entregada para $\tilde{h}(x)$ con la condición de borde estudiada en la Figura 4.8.b esta corresponde a una solución tanto física como matemática del problema dado que una posible explicación detrás de la monotonía decreciente que presenta la solución esté asociada al fenómeno de la sedimentación o pérdida de masa sólida y líquida a lo largo del escurrimiento.

Entonces, en virtud a lo discutido, resulta interesante el definir adecuadamente las condiciones de borde que entreguen una solución físicamente interpretable del problema, puesto que no basta solamente con encontrar un set adecuado de condiciones de borde que entreguen una solución razonable para q , \tilde{h} y ϕ sino que además deben cumplir con las restricciones operacionales asociadas a la operación minera, puesto que aquellas condiciones que suponen grandes ineficiencias en el uso de los equipos o en el rendimiento de los procesos no son condiciones operacionalmente factibles, un ejemplo de esto es considerar $\phi_0 = 0.5$ salvo que no se esté trabajando en un depósito de relaves convencional sino en sistemas de relave espesado o caudales de operación $q_0 = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ que subutilizan la capacidad de las bombas de impulsión o no sea una condición acorde a la infraestructura que compone los sistemas de impulsión de lamas con descarga a cubeta. De esta manera, la correcta elección de las condiciones del borde utilizadas para resolver el sistema de ecuaciones no es un problema trivial.

4.2.4. Resolución del sistema a tiempo inicial corregida

En esta sección se presentan y analizan los resultados obtenidos del sistema de ecuaciones diferenciales acoplado a tiempo inicial (t_0) considerando el set de condiciones de borde presentado en la subsección anterior. Así, se presentan en las Figuras 4.10.a, 4.10.b, 4.11.a, 4.11.b, 4.12.a y 4.12.b la solución obtenida para q , ϕ , \tilde{h} , la relación entre \tilde{h} , h_n y h_c , d_c y V para todo x .

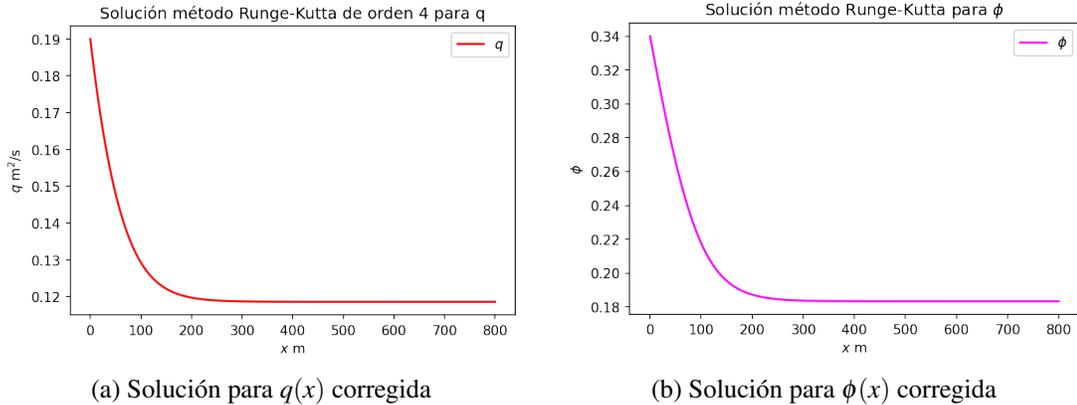


Figura 4.10: Solución para las variables $q(x)$ y $\phi(x)$ corregidas

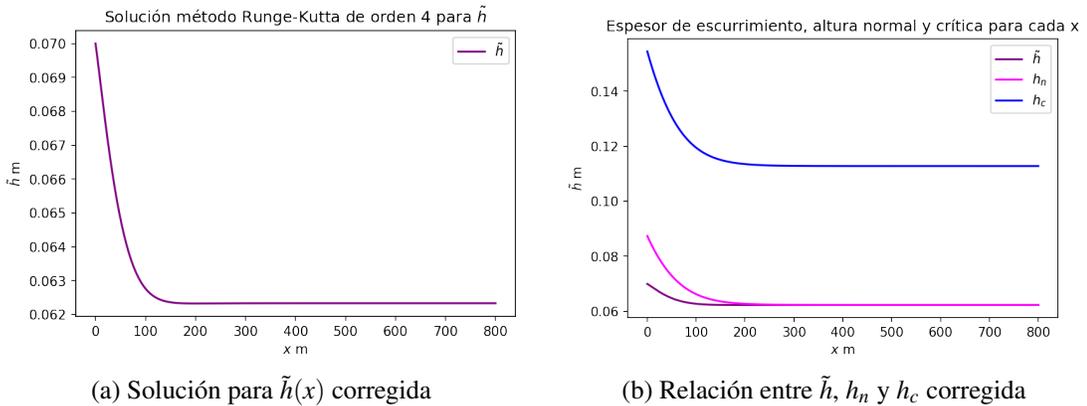


Figura 4.11: Solución para la variable $\tilde{h}(x)$ y relación entre \tilde{h} , h_n y h_c

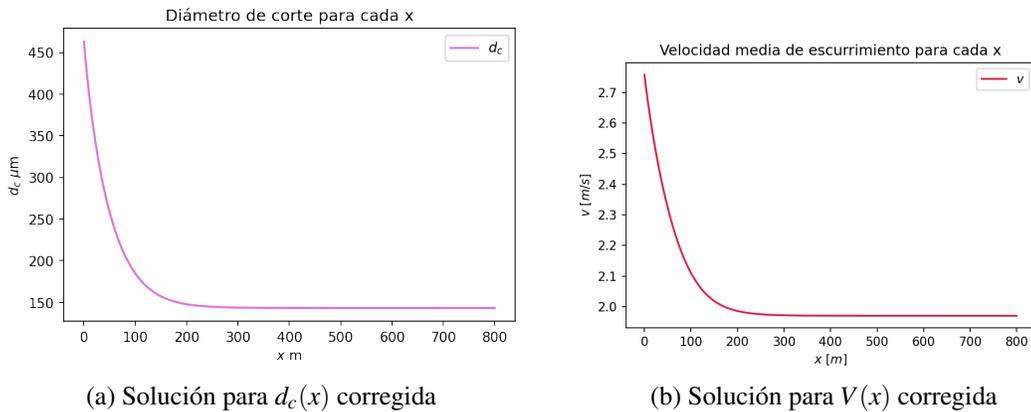


Figura 4.12: Solución para las variables $d_c(x)$ y $V(x)$ corregidas

A partir de los resultados, se aprecia en las Figuras 4.12.a y 4.12.b que tanto el diámetro de corte como la velocidad media del escurrimiento son decrecientes en función de la distancia respecto al punto de descarga. Además, se observa que el diámetro de corte varía desde un diámetro inicial de $463 \mu\text{m}$ hasta un diámetro final de $143 \mu\text{m}$ y, dado que la distribución de tamaños se encuentra definida a partir de un diámetro característico de $300 \mu\text{m}$, entonces la evolución en el diámetro de corte genera un proceso de sedimentación de partículas sólidas. En consecuencia, la sedimentación de la fase sólida genera un decaimiento en el caudal de la mezcla y en la concentración volumétrica de sólidos, lo que se condice con lo observado en las Figuras 4.10.a y 4.10.b, en donde el caudal de la mezcla varía desde $0.19 \text{ m}^2/\text{s}$ hasta $0.118 \text{ m}^2/\text{s}$ puesto que la sedimentación de la fase sólida trae consigo una “pérdida” de sólido y líquido en la mezcla, y en donde la concentración de sólidos varía desde 0.34 hasta 0.183, respectivamente.

Por otro lado, al observar la Figura 4.11.a se aprecia que el espesor de escurrimiento presenta un comportamiento monótonamente decreciente respecto a la distancia variando desde una altura de 7 cm hasta 6.34 cm. Además, al observar la Figura 4.11.b en la cual se compara el espesor de escurrimiento, con la altura normal y la altura crítica, se aprecia que para todo $x > 200 \text{ m}$ se cumple que $h < h_n < h_c$ y que q se mantiene aproximadamente constante que corresponden a las condiciones que definen el eje hidráulico torrente deprimido en pendiente fuerte o F3. Lo que resulta interesante de analizar respecto al comportamiento exhibido por la altura de escurrimiento, es que para las condiciones bajo las cuales se desarrolla un eje hidráulico F3 a caudal constante, la altura de escurrimiento presenta una monotonía creciente respecto a la distancia de tal manera que para $x \rightarrow \infty$ se cumple que $h \rightarrow h_n$. Sin embargo, al observar el resultado presentado en la Figura 4.11.b se aprecia que el espesor de escurrimiento, en contraste con lo que ocurre para el caso en el que se desarrolla un eje hidráulico F3 a caudal constante, presenta una monotonía decreciente respecto a la distancia, pero aún así cumple con que si $x \rightarrow \infty$ entonces $\tilde{h} \rightarrow h_n$. Una posible explicación respecto a la monotonía decreciente presentada por el espesor de escurrimiento, es que el proceso de sedimentación de partículas trae consigo una disminución en el caudal de mezcla, el cual es el resultado de una disminución tanto en el flujo de sólidos como en flujo de líquido, tal que dicha disminución afecta de forma significativa a la hidráulica del escurrimiento respecto al caso en el cual se tiene caudal constante, lo que se plantea cómo una posible razón detrás del contraste de monotonía exhibido por \tilde{h} . Cabe mencionar la disminución del espesor respecto a la condición de borde es tan sólo de un 9.5%.

Por parte de las Figuras 4.13.a y 4.13.b se observan los valores entregados para la densidad y la viscosidad de la mezcla para todo x , respectivamente.

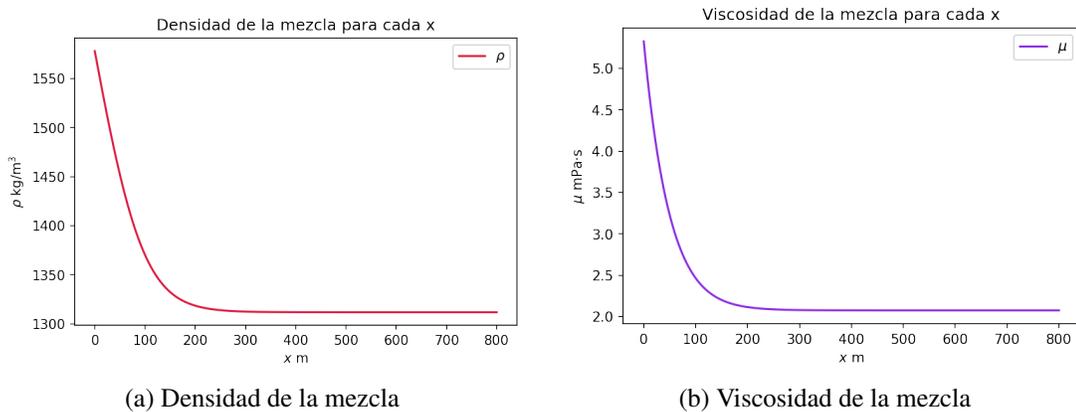


Figura 4.13: Densidad y viscosidad de la mezcla

En lo que respecta a la Figura 4.13.a se observa que la densidad de la mezcla progresivamente disminuye a lo largo del escurrimiento, lo que es una consecuencia lógica dado que a medida que se desarrolla el flujo la mezcla sedimenta y, en consecuencia, la componente de la ecuación de densidad de mezcla que pondera la densidad de la fase sólida cobra cada vez menos influencia. La densidad de la mezcla varía desde de 1578 kg/m^3 hasta un valor de 1311 kg/m^3 , así resulta relevante mencionar que los sólidos que componen a la mezcla cuando esta presenta su densidad más baja corresponden a los sólidos más finos que componen a la distribución de tamaños o las llamadas “lamas”.

Por otro lado, en lo que respecta a la Figura 4.13.b se observa que la viscosidad de la mezcla, al igual que la densidad, disminuye progresivamente a medida que se desarrolla el flujo. Dada la expresión propuesta por Krieger-Dougherty la disminución progresiva en la concentración de sólidos trae consigo una disminución de la viscosidad de la mezcla, la cual varía desde un valor inicial de $5.3 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, la cual equivale a 5.3 veces la viscosidad del agua a un valor de $2.0 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, la cual equivale a 2.0 veces la viscosidad del agua. Dado estos resultados, se deduce que el proceso de sedimentación de partículas genera que aquella parte de la distribución de concentraciones que controla mayormente la reología de la mezcla pase a formar parte del lecho de partículas, logrando que a medida que avanza el escurrimiento la viscosidad de la mezcla tiende a asemejarse más a la viscosidad de la fase líquida.

Por parte de las Figuras 4.14.a y 4.14.b se observan los valores entregados para los números adimensionales correspondientes al número de Reynolds y al número de Froude.

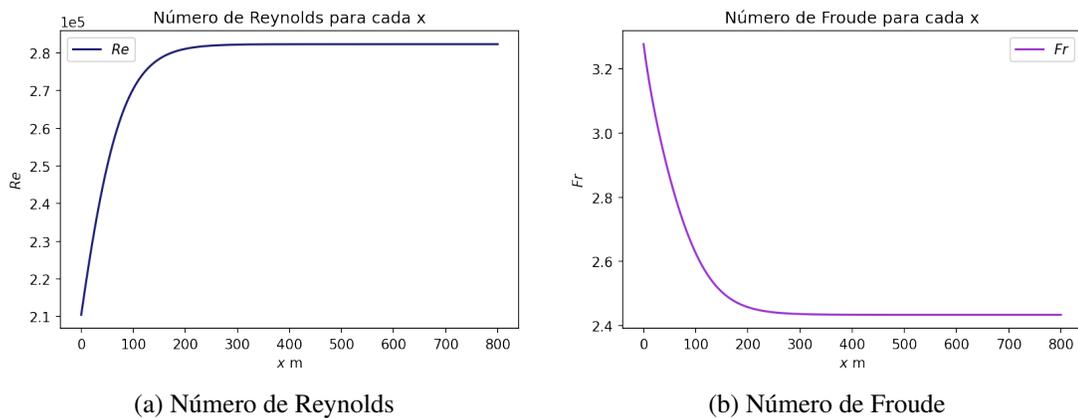


Figura 4.14: Número de Reynolds y Número de Froude para cada x

Entonces, en lo que respecta a la Figura 4.14.a se observa que el número de Reynolds es del orden de 10^5 por lo que el flujo es altamente turbulento, lo que válida sólidamente la hipótesis del modelo de utilizar el modelo de Chilton y Stainsby para la estimación del factor de fricción, puesto que el modelo propuesto por estos autores es válido sólo en régimen de flujo turbulento dada las consideraciones utilizadas en su estudio. Del mismo modo, dada la turbulencia que presenta el flujo es razonable suponer que el mecanismo que mantiene a las partículas sólidas en suspensión es el arrastre generado por el fluido producto de las fluctuaciones de velocidad características del flujo turbulento.

Por otro lado, en lo que respecta a la Figura 4.14.b se aprecia que el número de Froude decrece a medida que evoluciona el flujo y que durante todo el escurrimiento presenta valores mayores a 1. Lo anterior, indica que el escurrimiento es supercrítico o tipo torrente por lo que el imponer la condición de borde aguas arriba del escurrimiento es consecuente con este resultado. Además,

el número de Froude varía desde 3.25 a 2.42 lo que es indicio de que la componente inercial del escurrimiento es mucho más predominante que la componente asociada a la fuerza gravitacional y, por lo tanto, las condiciones impuestas al problema no permiten que exista un escenario en el cual exista una transición desde un escurrimiento tipo torrente a un escurrimiento tipo río.

Posteriormente, por parte de las Figuras 4.15.a y 4.15.b se observan los valores entregados para el factor de fricción de Chilton y Stainsby y la pendiente de la línea de carga.

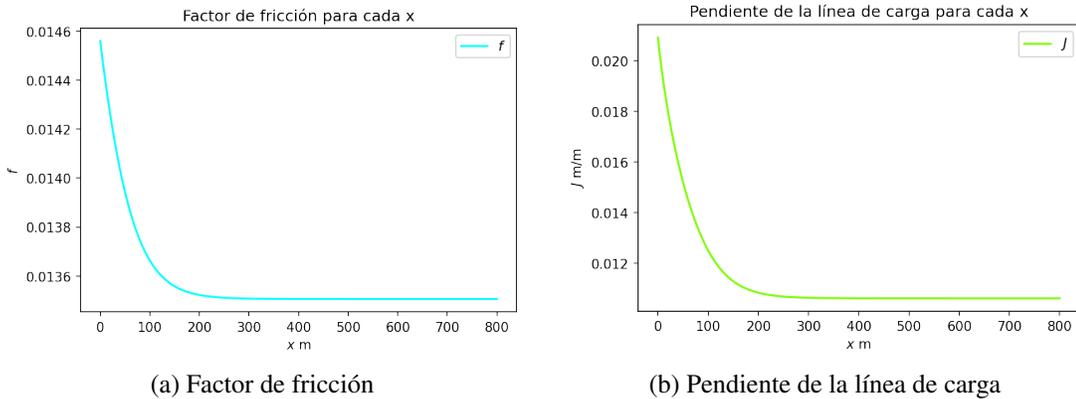


Figura 4.15: Factor de fricción y pendiente de línea de carga para cada x

En lo que respecta a la Figura 4.15.a se observa la evolución que presenta el factor de fricción de Chilton y Stainsby a medida que transcurre el flujo. El factor de fricción al inicio del escurrimiento posee un valor de 0.0146 y disminuye hasta un valor de 0.0135 al término del escurrimiento. El rango de valores que adopta el factor de fricción es un rango razonable dada las condiciones que presenta el escurrimiento, y el decaimiento observado en dicho parámetro se explica principalmente por el aumento progresivo en el número de Reynolds. En consecuencia, la fuerza de corte disminuye progresivamente a medida que avanza el escurrimiento dada la caída del factor de fricción, la densidad de la mezcla y del caudal de mezcla, o dicho de otra forma, la sedimentación de la fase sólida genera que la mezcla progresivamente tengo una menor “resistencia” al flujo dada la pérdida de masa en la mezcla y el efecto que esta tiene en la reología de la mezcla.

Por otro lado, en lo que respecta a la Figura 4.15.b se aprecia la evolución que presenta la pendiente de la línea de carga a medida que evoluciona el escurrimiento. Si bien la pendiente de la línea de carga se utiliza normalmente para cuantificar la pérdida de altura de energía en el flujo por unidad de longitud, permite comprender de mejor manera el efecto producido por parte de la fuerza de corte en el escurrimiento, la cual es la responsable de generar dicha pérdida de energía por unidad de peso del fluido. Para efectos del problema, la pérdida de energía en el flujo se traduce principalmente en una disminución en la energía cinética, lo que explica la caída progresiva en la velocidad media del escurrimiento. Así, la pendiente de la línea de carga varía desde un valor de 2.3 % hasta un valor de 1.12 % exhibiendo una monotonía decreciente en función de la distancia, lo cual es consecuencia del decaimiento en la velocidad media del flujo y en el factor de fricción.

Hasta el momento el análisis efectuado comprende lo que ocurre en el flujo para el tiempo inicial t_0 sin considerar el efecto de la evolución en la topografía del canal, o dicho de otra forma, la solución presentada y analizada corresponde a la solución en régimen permanente para $t = t_0$. Sin embargo, cómo se menciona en el Capítulo 3 el problema realmente se compone de una sucesión de regímenes permanentes, la que se analiza en la subsección 4.2.6.

4.2.5. Resolución iterativa en el tiempo (sucesión de regímenes permanentes)

En esta sección se presenta la solución entregada por el sistema de ecuaciones en todo el dominio espacial y temporal definido en el problema. Así, se presentan en las Figuras 4.16.a, 4.16.b, 4.17.a, 4.17.b, 4.18.a y 4.18.b la solución obtenida para $q(t)$, $\phi(t)$, $\tilde{h}(t)$, $z_s(t)$, $V(t)$ y $d_c(t)$.

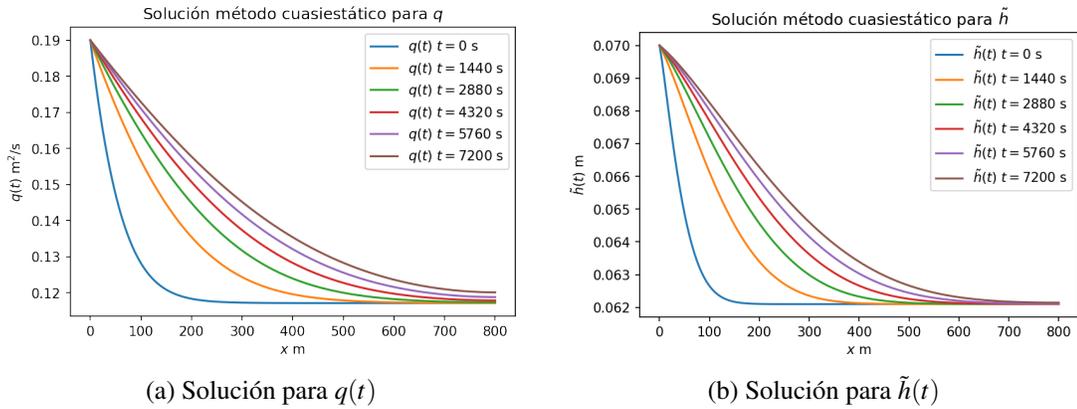


Figura 4.16: Solución temporal para las variables $q(t)$ y $\tilde{h}(t)$

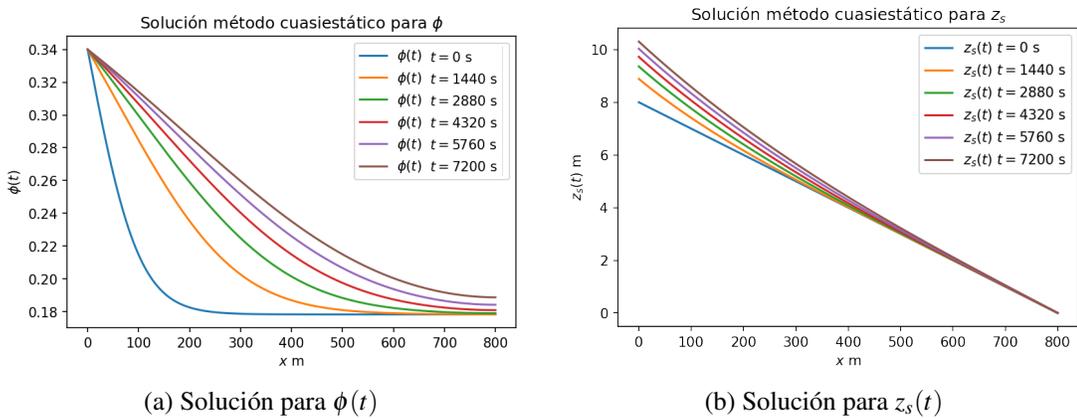


Figura 4.17: Solución temporal para las variables $\phi(t)$ y $z_s(t)$

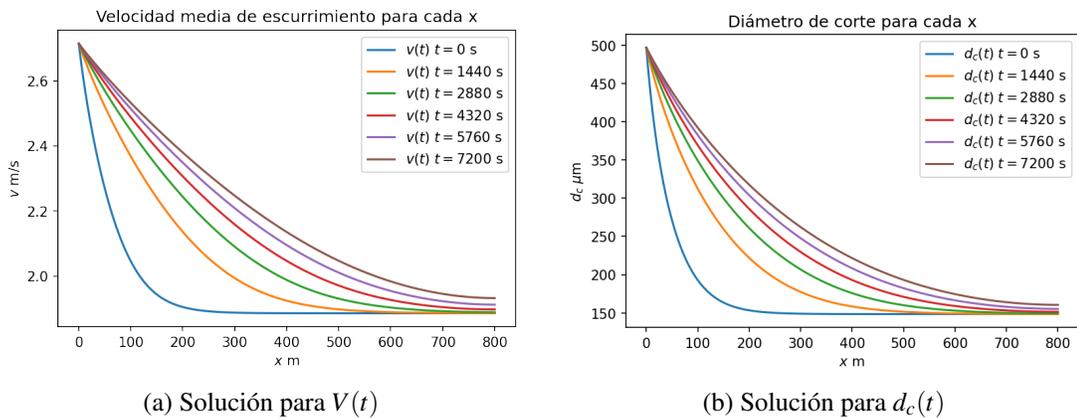


Figura 4.18: Solución temporal para las variables $V(t)$ y $d_c(t)$

A partir de las soluciones temporales se aprecia que a medida que evoluciona el tiempo todas las variables exhiben cambios en su comportamiento, por lo que, si bien se resuelve una “sucesión de regímenes permanentes”, el problema no es independiente del tiempo. Además, la variable fundamental que promueve variaciones en el resto de las variables del sistema corresponde a la altura del lecho de sólidos $z_s(t)$.

Entonces, al observar la Figura 4.17.b se aprecia que el lecho de sólidos progresivamente se “peralta” en función del tiempo. El peraltamiento del canal es consecuencia del constante proceso de sedimentación de partículas en cada instante de tiempo, dado que al observar nuevamente la Ecuación 4.51, se observa que las variaciones temporales en la altura de lecho son producto de la tasa de cambio espacial en el caudal de mezcla, la cual es consecuencia del proceso de sedimentación de partículas.

En lo que respecta a la Figura 4.16.a se aprecia que el caudal de mezcla disminuye aguas abajo en función de la distancia para un determinado instante de tiempo, lo cual es consecuencia del proceso de sedimentación de partículas. Además, el caudal de mezcla paulatinamente, en función del tiempo, aumenta aguas abajo del escurrimiento. Así, considerando la distancia $x = 800$ m el caudal de mezcla varía desde $0.1185 \text{ m}^2/\text{s}$ en el instante de tiempo $t = 0$ s hasta $0.1216 \text{ m}^2/\text{s}$ en el instante de tiempo $t = 7200$ s o dos horas después. El aumento progresivo en el caudal de mezcla aguas abajo del escurrimiento, a medida que transcurre el tiempo, se debe al paulatino peraltamiento del canal, el cual se complementa con lo presentado en la Figura 4.19 que muestra la evolución temporal que presenta la pendiente del canal.

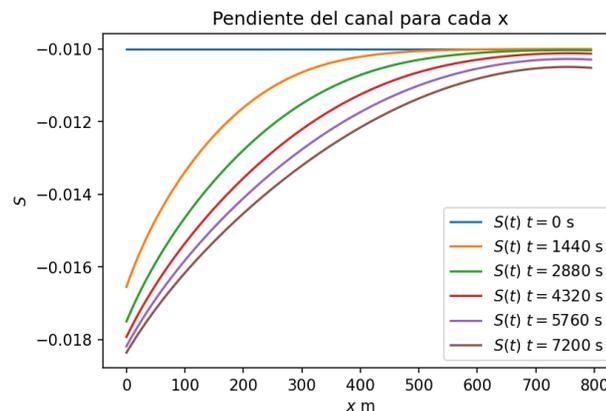


Figura 4.19: Evolución temporal en la pendiente del canal

Entonces, cómo se aprecia en la Figura 4.19 en los primeros 600 m de canal, las pendientes, a medida que transcurre el tiempo progresivamente se empinan evolucionando desde un valor inicial de -1% constante en el espacio para el instante de tiempo $t = 0$ s hasta un valor máximo de -1.845% dos horas después de iniciada la primera descarga para $x = 0$ m. Por otro lado, para un determinado instante de tiempo la pendiente del canal decrece aguas abajo del canal, donde para el caso $t = 7200$ s la pendiente decrece desde un valor de -1.845% para $x = 0$ m hasta un valor de -1.11% para $x = 800$ m, la razón detrás de dicho decrecimiento espacial se explica en el siguiente párrafo. Entonces, el aumento paulatino en el ángulo de inclinación del lecho de sólidos, en función del tiempo, genera que la componente gravitacional de las fuerzas que se encuentran en el lado izquierdo de la ecuación de balance de momentum adquiera mayor importancia y, por lo tanto, la componente que impulsa el movimiento del fluido es mayor lo que genera un aumento progresivo en la velocidad media de escurrimiento aguas abajo respecto al tiempo, lo que se condice con lo

apreciado en la Figura 4.18.a. Consecuentemente, el aumento temporal en la velocidad media de escurrimiento implica que, en virtud a la ecuación o criterio de sedimentación, el diámetro de corte aumente paulatinamente en función del tiempo aguas abajo, que efectivamente corresponde a lo que se observa en la Figura 4.18.b, lo cual se puede interpretar cómo que el transcurso del tiempo gradualmente “inhibe la sedimentación” producto del peraltamiento del canal. En otras palabras, la tendencia mostrada por $q(x,t)$ y $S(x,t)$ es tal que para tiempos de descarga lo suficientemente grandes ($t \rightarrow \infty$) la velocidad de escurrimiento y la pendiente del canal son tales que no ocurre sedimentación del relave descargado.

Por otro lado, resulta válido cuestionar el por qué, para un determinado instante de tiempo, las pendientes del canal decrecen aguas abajo, distinto del caso inicial donde la pendiente es constante en todo el canal. La razón detrás de este decrecimiento de las pendientes en función de la distancia es el comportamiento que exhibe la derivada del caudal de mezcla, o bien la convexidad de la función q . Entonces, observando las cinco curvas mostradas en la Figura 4.16.a se aprecia que las pendientes del caudal de mezcla en función de la distancia son más pronunciadas en los primeros 400 m de canal y, para distancias mayores, las derivadas comienzan a achatarse, dicho de otra manera, el módulo de la derivada de la función q es decreciente respecto a x . Entonces, la interpretación asociada al hecho de que $|\partial q/\partial x|$ sea una función decreciente, apoyándose del resultado de la Ecuación 4.51, es que progresivamente en el espacio la tasa de crecimiento temporal del lecho disminuye, lo que implica que la topografía del canal evoluciona desde pendientes más pronunciadas a pendientes menos pronunciadas. Una forma más intuitiva de entender este comportamiento, es que durante los primeros 400 m de canal existe una mayor sedimentación de partículas sólidas que para distancias mayores y, por lo tanto, hay más “pérdida de caudal de mezcla” en la primera parte del trazado que para la parte final del trazado, lo que explica el por qué el módulo de la derivada de q evoluciona de forma decreciente a lo largo del escurrimiento. Siguiendo la misma lógica, en los primeros metros de trazado el lecho dispone de más material sólido para aumentar la altura del mismo, distinto de los metros finales en los cuales el lecho dispone de menos material sólido y la altura se modifica marginalmente, lo que genera el comportamiento observado para las pendientes aguas abajo.

Complementando lo anterior, se observa en la Figura 4.17.a que la concentración volumétrica de sólidos paulatinamente, en función del tiempo, aumenta aguas abajo del escurrimiento, lo cual es una consecuencia directa del progresivo aumento en el tiempo del diámetro de corte o la velocidad media de escurrimiento, lo que es producto del peraltamiento observado en la Figura 4.17.b.

En lo que respecta al espesor de escurrimiento, el cual se observa en la Figura 4.16.b se observa que en el transcurso del tiempo, el espesor sigue exhibiendo el comportamiento monótonamente decreciente, analizado en la subsección 4.2.5. Las variaciones asociadas al espesor de escurrimiento es que éste paulatinamente aumenta aguas abajo en función del tiempo. Sin embargo, a diferencia de las demás variables, este comportamiento se exhibe sólo hasta una distancia de $x = 600$ m puesto que para distancias mayores el espesor exhibe una tendencia constante en torno a $h = 0.062$ m. El hecho de que el espesor de escurrimiento mantenga la monotonía presentada para la solución entregada por el sistema en $t = 0$ s es que para las condiciones de flujo impuestas en cada instante de tiempo (condiciones de borde y topografía del canal) el término que controla el signo de la derivada de $\tilde{h}(x)$ mantiene un signo constante a lo largo del escurrimiento, para cada instante de tiempo, o bien el término apreciado en la Ecuación 4.76 es negativo en todo el espacio. Además, cabe mencionar que en cada instante de tiempo el espesor de escurrimiento mantiene la relación $\tilde{h}(t) < h_n(t) < h_c(t)$ manteniendo las condiciones para el desarrollo de un eje hidráulico tipo torrente deprimido en pendiente fuerte.

Por otro lado, en las Figuras 4.20.a y 4.20.b se aprecian las soluciones temporales para la densidad de la mezcla y para la viscosidad de la mezcla, respectivamente.

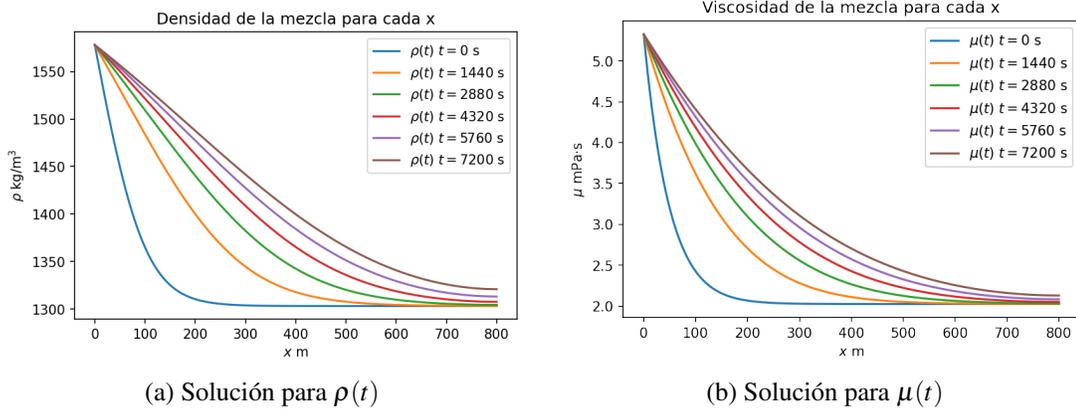


Figura 4.20: Solución temporal para las variables $\rho(t)$ y $\mu(t)$

En la Figura 4.20.a se aprecia que a medida que progresa el tiempo la densidad la mezcla aumenta aguas abajo. La explicación detrás de esto es el aumento progresivo en la concentración volumétrica de sólidos en función del tiempo aguas abajo del escurrimiento, dado que el aumento de concentración de sólidos en la mezcla, genera que haya una mayor preponderancia por parte del término de la densidad de sólidos en la Ecuación 3.16. Por otro lado cabe mencionar que para $x = 800$ m la densidad crece desde un valor de 1304 kg/m^3 para el instante de tiempo inicial a un valor de 1342 kg/m^3 a dos horas desde el inicio de la primera descarga. Intuitivamente, este resultado se puede interpretar que dado el peraltamiento del canal y el aumento paulatino en la velocidad media de flujo en función del tiempo, genera que sedimenten menos partículas, cómo se menciona anteriormente, obteniéndose una mezcla más concentrada.

Por parte de la Figura 4.20.b se aprecia una tendencia similar que la exhibida por parte de $\rho(t)$. En este caso, en virtud a la expresión de Krieger-Dougerthy, el paulatino aumento de la concentración volumétrica de sólidos en función del tiempo genera un aumento progresivo en la viscosidad de la mezcla, de tal manera que a una distancia $x = 800$ m la viscosidad varía desde un valor inicial de $2.0 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ para la condición $t = 0$ s hasta un valor de $2.13 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ para $t = 7200$ s.

En lo que respecta a las Figuras 4.21.a y 4.21.b se observa la solución presentada para el número de Reynolds y el número de Froude en función del tiempo.

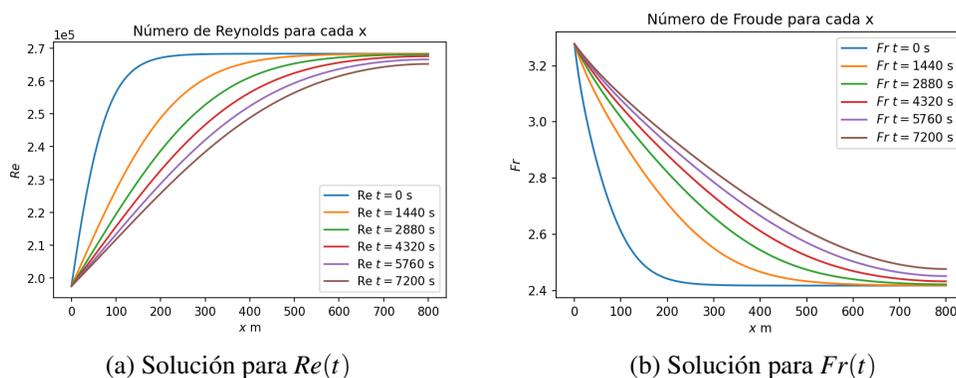


Figura 4.21: Solución temporal para las variables $Re(t)$ y $Fr(t)$

Por parte de la Figura 4.21.a se aprecia una paulatina disminución del número de Reynolds en función del tiempo. Sin embargo, dado el orden de valores que presenta el número de Reynolds, su progresiva disminución no afecta al régimen de flujo, puesto que este se mantiene turbulento para todo x y t . La consecuencia directa de lo anterior, es que dada las condiciones del escurrimiento es válido, para efectos del modelo, el estimar con la ecuación de Chilton y Stainsby el factor de fricción, dado que según las hipótesis de sus estudios dicha formulación es válida en régimen de flujo turbulento. Por otro lado, la paulatina disminución en el número de Reynolds se explica principalmente por tres factores: la disminución paulatina de la densidad de la mezcla, el aumento paulatino en la viscosidad de la mezcla y el aumento de q en función de t y su disminución en función de x . En contraste, el resto de los parámetros que definen al número de Reynolds, los cuales corresponden a la velocidad media de escurrimiento y al diámetro hidráulico, donde el comportamiento exhibido por el diámetro hidráulico se observa en la Figura 4.22, exhiben un comportamiento tal que buscan aumentar progresivamente en el tiempo el valor del número de Reynolds.

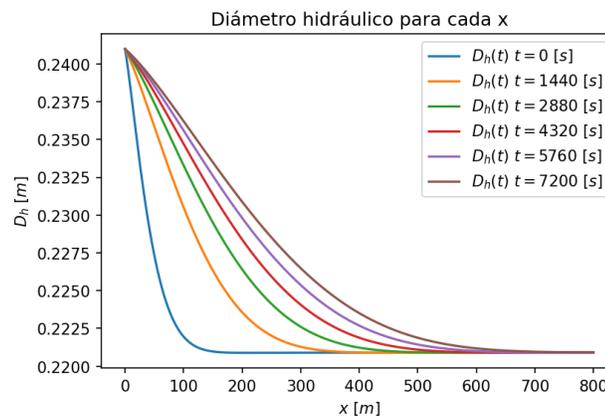


Figura 4.22: Evolución temporal de D_h

Entonces, observando la Figura 4.22 se aprecia que el diámetro hidráulico aumenta progresivamente en el tiempo aguas abajo del escurrimiento, donde dicho aumento se presenta durante los primeros 600 m de canal. El aumento en la dimensión característica del flujo depende principalmente del comportamiento mostrado por parte del espesor de escurrimiento, el cual se menciona previamente en esta subsección. Así, pese al aumento progresivo de la velocidad media y en el diámetro hidráulico, lo que impulsa un crecimiento progresivo en el Reynolds, dicho adimensional disminuye en función del tiempo, siendo la causa principal las variaciones en las propiedades del fluido.

En lo que respecta a la evolución temporal del número de Froude, la cual se aprecia en la Figura 4.21.b, se observa que dicha evolución es creciente en el tiempo, lo que implica que el avance de la variable tiempo no afecta al régimen de escurrimiento, manteniendo el hecho de que $F_r > 1$ de tal manera que el escurrimiento es supercrítico o tipo torrente en todo el dominio espacial y temporal definido en el problema, de hecho el rango de números de Froude para efectos de este problema es entre 3.4 y 2.5, quedando así lejos de la condición subcrítica o tipo río. El aumento observado para el número de Froude se explica principalmente por el aumento en la velocidad media del escurrimiento en función del tiempo, lo que consecuentemente aumenta paulatinamente la inercia del flujo y, por lo tanto, progresivamente la componente inercial del flujo comienza a predominar con mayor intensidad en el escurrimiento.

Por parte de las Figuras 4.23.a y 4.23.b se observa la solución temporal presentada para el calculo del factor de fricción de Chilton y Stainsby y para la pendiente de la línea de carga.

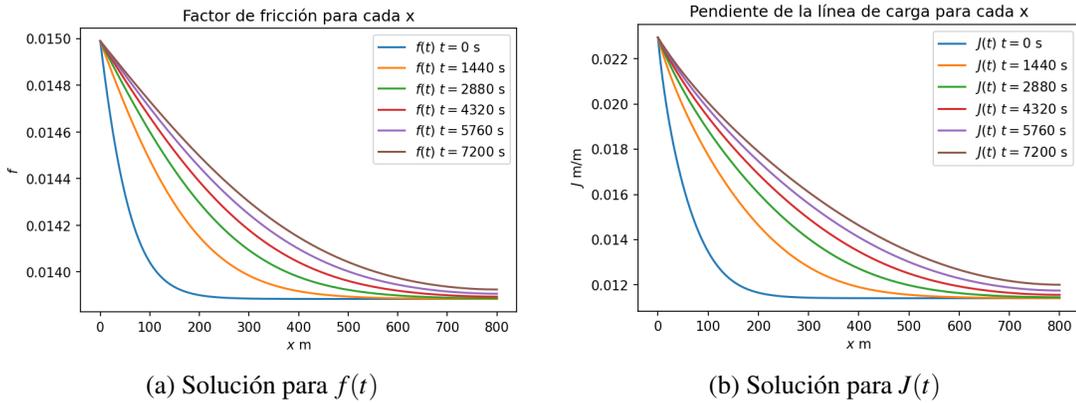


Figura 4.23: Solución temporal para las variables $f(t)$ y $J(t)$

En lo que respecta a la Figura 4.23.a se aprecia la evolución temporal que presenta el factor de fricción de Chilton y Stainsby, el cual aumenta en función del tiempo aguas abajo del escurrimiento. El crecimiento temporal exhibido por f es consecuencia directa del aumento temporal presentado por la viscosidad de la mezcla y la disminución temporal presentada por el número de Reynolds. El efecto del aumento paulatino en el factor de fricción genera que el flujo a medida que se desarrolla en el tiempo presente una mayor pendiente de línea de carga, lo que se traduce en una mayor pérdida de energía en el flujo.

Entonces, al observar la Figura 4.23.b se aprecia la evolución temporal en la pendiente de la línea de carga, la cual aumenta en función del tiempo aguas abajo y decrece en función del espacio. El aumento presentado por la pendiente de la línea de carga es consecuencia del aumento en el factor de fricción, cómo se menciona en el párrafo anterior, y del aumento temporal en la velocidad media de escurrimiento, en virtud a la ley de resistencia que sigue el cálculo de J . Físicamente, esto está ligado al hecho de que el aumento en la velocidad de escurrimiento y en el factor de fricción genera que las fuerzas de corte se opongan con mayor intensidad al movimiento, generando mayores pérdidas de energía cinética aguas abajo del escurrimiento, explicando enérgicamente la causa en el decaimiento espacial de la velocidad media del flujo.

4.2.6. Pérdidas de agua por atrapamiento

En virtud a los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se logra caracterizar adecuadamente la hidráulica del escurrimiento de un relave que fluye aguas abajo desde el punto de descarga y la sedimentación progresiva de partículas sólidas a lo largo del trazado del canal. Entonces, a partir de la relación existente entre el comportamiento hidráulico del escurrimiento y la sedimentación a lo largo de dicho escurrimiento se logra cuantificar las pérdidas de agua por atrapamiento.

Las pérdidas de agua por atrapamiento, para efectos del modelo, se producen debido a la formación del lecho de partículas sólidas, las cuales al reordenarse en el lecho alcanzan una concentración crítica de empaquetamiento $\phi_m = 0.6$. Consecuentemente, parte del lecho de partículas está conformado por la fase líquida, la cual conforma un 40 % del volumen y dicho volumen corresponde a las pérdidas de agua por atrapamiento. Otra forma de verlo es que la sedimentación de partículas sólidas arrastra y deja “atrapada” agua entre los intersticios.

Entonces, al observar las Figuras 4.24.a y 4.24.b se aprecia el flujo volumétrico de líquido a lo largo del escurrimiento y las pérdidas por atrapamiento que se calcula a partir de la disminución paulatina del flujo de líquido, respectivamente.

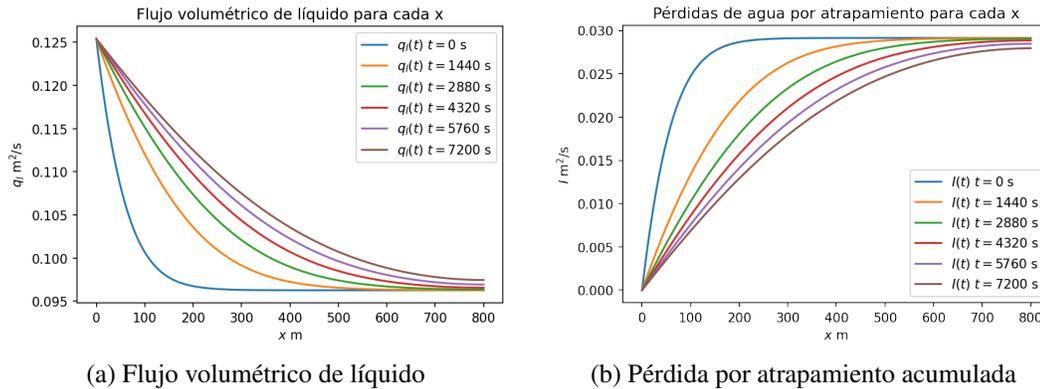


Figura 4.24: Flujo de líquido y pérdidas por atrapamiento de agua acumulada

Al observar la Figura 4.24.b se aprecia que, aproximadamente, a finales del escurrimiento para el instante de tiempo $t = 0 \text{ s}$ la pérdida acumulada de agua por atrapamiento converge a un valor de 28 L/s las cuales equivalen a aproximadamente el 24% del flujo volumétrico de agua inicial. Lo interesante, es que independientemente del tiempo, las pérdidas de agua por atrapamiento tienden a valores alrededor de los 28 - 29 L/s indicando que para cada instante de tiempo se están registrando pérdidas de tan sólo del 24% para el atrapamiento (sin considerar infiltración ni evaporación), lo cual es un dato coherentes dado el estudio bibliográfico realizado en el Capítulo 2, puesto que este mecanismo de pérdida comprende el principal mecanismo de pérdida de agua en los depósitos de relave convencionales. En consecuencia, el modelo logra mostrar esta esencia que es característica en los depósitos de relave convencionales, y dicha estimación en las pérdidas se logra caracterizando adecuadamente la hidráulica del escurrimiento y, a partir de esta, alimentar a la ecuación de sedimentación quien es la responsable en el modelo de la formación del lecho. Así, en la Figura 4.25 se aprecia la fracción de agua atrapada acumulada respecto a la cantidad de agua inicial descargada.

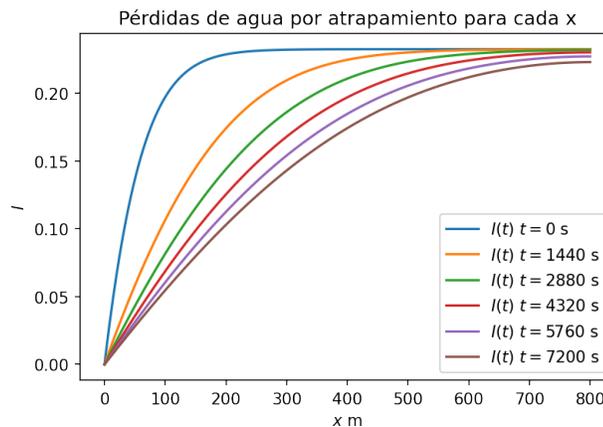


Figura 4.25: Fracción de la pérdida acumulada de agua por atrapamiento

Entonces, al observar la Figura 4.25 se aprecia que el decaimiento más pronunciado en el flujo de líquido ocurre en torno a los 100 - 200 m de canal que es donde ocurre el proceso de sedimentación con mayor intensidad dado el comportamiento exhibido por el diámetro de corte y la concentración de sólidos, observadas en las Figuras 4.18.b y 4.17.a, respectivamente.

4.2.7. Discusión sobre clasificación de tamaños en el sector playa

Dado los resultados ya presentados, resulta interesante el comparar los resultados presentados por el modelo propuesto en el presente trabajo de memoria con los resultados obtenidos por Blight & Bentel en su trabajo (Blight y Bentel, 1983) en el cual plantean un modelo simplificado para determinar cual es el tamaño predominante que es posible encontrar a una distancia x desde el punto de descarga a lo largo del sector playa, modelo que se encuentra detallado en la subsección 2.3.4.3.

En primer lugar, el resultado obtenido por el modelo de Blight & Bentel en la determinación del tamaño de partícula predominante depositado en la playa corresponde al observado en la Figura 2.11 en el cual se aprecia que a lo largo de la playa se genera una clasificación natural por tamaños, en la cual el tamaño decrece desde el punto de descarga a aguas abajo, de tal manera que los tamaños más gruesos se concentran en los primeros metros de playa desde el punto de descarga y los tamaños más finos se concentran en los sectores cercanos a la laguna de aguas claras. Por otro lado, según los resultados presentados en el modelo para d_c el cual corresponde al tamaño de corte para cada posición espacial y, por lo tanto, puede considerarse como el tamaño más probable de encontrar en una posición x desde el punto de descarga, el cual dado los resultados observados en las Figuras 4.18.b y 4.12.a se aprecia que, al igual que en el modelo planteado por Blight & Bentel, el tamaño depositado para cada x decrece desde sectores cercanos al punto de descarga (material grueso) hasta sectores cercanos a la laguna (material fino).

Por otro lado, resulta de gran interés notar que ambos modelos se plantean a partir de hipótesis y consideraciones distintas, puesto que el modelo propuesto por Blight & Bentel considera el uso de una velocidad de sedimentación (ley de Stokes) para las partículas, escurrimiento uniforme y considera el uso de la ecuación de Chézy para caracterizar la velocidad de escurrimiento a lo largo del canal (ecuación de movimiento). En cambio, el modelo propuesto considera un modelo de velocidad de depósito (Poloski et al., 2010), escurrimiento gradualmente variado y el uso de la ecuación de Darcy, además de las ecuaciones de conservación de masa. Sin embargo, pese a dichas diferencias se destaca el hecho de que el comportamiento de los resultados presentados por ambos es similar, más aún, es interesante notar que en ambos modelos la caída más brusca en el tamaño de partículas más probable de encontrar en la playa ocurre en los primeros metros de la playa, aproximadamente a 1/6 del largo total de la playa.

En consecuencia, dado los resultados presentados en ambos modelos la concordancia en el comportamiento de d_c en el caso del modelo propuesto y D en el modelo de Blight & Bentel se puede interpretar de que, efectivamente, el tamaño de las partículas que componen al relave es un factor preponderante en este comportamiento puesto que ya sea con el uso de un modelo de velocidad de sedimentación (ley de Stokes) o con un modelo de velocidad de depósito (Poloski et al., 2010) para caracterizar el proceso de sedimentación, el comportamiento exhibido responde a una tendencia similar.

Capítulo 5

Conclusión

En conclusión se tiene que a partir del modelo propuesto se obtiene una solución espacial y temporal para las variables que caracterizan la hidráulica del problema, las cuales corresponden al caudal de mezcla $q(x,t)$, al espesor de escurrimiento $\tilde{h}(x,t)$ y la concentración en volumen de sólidos $\phi(x,t)$ para el caso de prueba estudiado, y a partir de dicha solución, se estiman cuales son las pérdidas de agua acumuladas por atrapamiento para las condiciones del caso de estudio. La estimación realizada por el modelo indica que las pérdidas de agua por atrapamiento equivalen a 29 L/s para la condición inicial y a 28 L/s dos horas después de iniciada la descarga de los relaves a cubeta, donde dichas pérdidas corresponden a aproximadamente al 24 % del flujo volumétrico de agua descargado en la cubeta, el cual corresponde a 128 L/s.

Por otro lado, se concluye que dadas las hipótesis del modelo, la monotonía que presenta la solución asociada al espesor de escurrimiento $\tilde{h}(x,t)$ es dependiente de las condiciones de borde impuestas al problema y, en consecuencia, dependiendo de las condiciones de borde es posible obtener tan sólo una solución matemática al problema, sin sustento físico que explique el comportamiento exhibido por $\tilde{h}(x,t)$, o una solución tanto física como matemática del problema para efectos de la hidráulica del escurrimiento del relave en la cubeta. Para efectos del caso de estudio, el set de condiciones de borde $q_0 = 0.19 \text{ m}^2/\text{s}$, $\tilde{h}_0 = 7 \text{ cm}$ y $\phi_0 = 0.34$ entrega una solución físicamente interpretable del problema, siendo ésta la correspondiente al eje hidráulico tipo torrente deprimido en pendiente fuerte, tal que $\tilde{h}(x,t)$ es monótonamente decreciente, donde dicho resultado contrasta con la solución monótonamente creciente exhibida por la altura de escurrimiento para el caso del eje hidráulico F3 a caudal constante. Así, una posible explicación que se propone a dicho contraste presentado en la solución de $\tilde{h}(x,t)$ corresponde a la pérdida de caudal de mezcla asociada al proceso de sedimentación de partículas sólidas.

Finalmente, se concluye que para las condiciones operacionales y físicas del problema, la solución asociada a la altura del lecho de partículas $z_s(x,t)$ establece que paulatinamente, en función del tiempo, el canal se peralta exhibiendo pendientes cada vez más empinadas en los primeros 600 m de trazado, donde el canal evoluciona desde una topografía inicial con una pendiente constante en el espacio de 1 % para $t = 0 \text{ s}$ a una topografía final con una pendiente máxima de 1.85 % en el punto de descarga, la cual progresivamente decrece hasta una pendiente mínima de 1.11 % en $x = 800 \text{ m}$ para $t = 7200 \text{ s}$. De esta manera, la razón física detrás de la forma de la topografía final del canal está relacionada con el continuo proceso de sedimentación de partículas sólidas, el cual es mucho más intenso en los primeros 200 m de trazado y casi nulo en los últimos 200 m de trazado. Además, la solución $q(x,t)$ es una función convexa por lo que paulatinamente la pérdida de material va decayendo en función de x .

Bibliografía

- [1] Alejo, B., y Barrientos, A. (2009). Model for yield stress of quartz pulps and copper tailings. *International Journal of Mineral Processing*, 93(3-4), 213–219. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.minpro.2009.08.002> doi: 10.1016/j.minpro.2009.08.002
- [2] Biot, M., y Willis, D. (1957). The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. *Applied Mechanics*, 8–34.
- [3] Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12(2), 155–164. doi: 10.1063/1.1712886
- [4] Bishop, A. W. (1973). The influence of an undrained change in stress on the pore pressure in porous media of low compressibility. *Geotechnique*, 23(3), 435–442. doi: 10.1680/geot.1973.23.3.435
- [5] Blight, G. E. (2009). *Geotechnical Engineering for Mine Waste Storage Facilities*. doi: 10.1201/9780203859407
- [6] Blight, G. E., y Bentel, G. M. (1983). The behaviour of mine tailings during hydraulic deposition. *South African Institute of Mining and Metallurgy*(APRIL), 73–86.
- [7] Chambers, B., Plewes, H., Pottie, J., Murray, L., y Burgess, A. (2003). Water recovery from a mine in the atacama desert. *Water in mining*, 1–28.
- [8] Chen, H., y Yamamoto, L. (1987). Permeability Tests for Hazardous Waste Management with Clay Liners. *Geotechnical and Geohydrological Aspects of Waste Management*, 229–243.
- [9] Chilton, R., y Stainsby, R. (1998). Pressure Loss Equations For Laminar And Turbulent Non-Newtonian Pipe Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 12(1929), 522–529.
- [10] Day, S. R., y Daniel, D. E. (1985). Hydraulic Conductivity of Two Prototype Clay Liners. *ASCE*, 8, 957–970. Descargado de [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1985\)111:8\(957\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1985)111:8(957))
- [11] Gibson, R. E. (1958). The Progress of Consolidation in a Clay Layer Increasing In Thickness With Time. *Geotechnique*, 171–182.
- [12] H. L. Penman. (1948). Natural Evaporation from Open Water, Bare Soil and Grass. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 193(1032), 120–145.
- [13] Ihle, C. F., y Kracht, W. (2018). The relevance of water recirculation in large scale mineral processing plants with a remote water supply. *Journal of Cleaner Production*, 177, 34–51. Descargado de <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.12.219> doi: 10.1016/j.jclepro.2017.12.219

- [14] Ihle, C. F., y Tamburrino, A. (2012a). Uncertainties in key transport variables in homogeneous slurry flows in pipelines. *Minerals Engineering*, 32, 54–59. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.mineng.2012.03.002> doi: 10.1016/j.mineng.2012.03.002
- [15] Ihle, C. F., y Tamburrino, A. (2012b). Variables affecting energy efficiency in turbulent ore concentrate pipeline transport. *Minerals Engineering*, 39, 62–70. doi: 10.1016/j.mineng.2012.07.017
- [16] Krieger, I. M., y Dougherty, T. J. (1959). A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres. *Transactions of the Society of Rheology*, 3(1), 137–152. doi: 10.1122/1.548848
- [17] Metzner, A. B., y Reed, J. C. (1955). Flow of Non-Newtonian Fluids-Correlation of the Laminar, Transition, and Turbulent-flow Regions. *A.I.Ch.E.*(4).
- [18] Miedema, S. A., y Ramsdell, R. C. (2015). The Limit Deposit Velocity model, a new approach. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 63(4), 273–286. doi: 10.1515/johh-2015-0034
- [19] Ministerio de Minería, S. (2007). Decreto Supremo N° 248: Reglamento para la Aprobación de Proyectos de Diseño, Construcción, Operación y Cierre de los Depósitos de Relaves. *Diario Oficial*, 159–182. Descargado de http://www.sernageomin.cl/wp-content/uploads/2018/01/DS248_Reglamento_DepositosRelave.pdf
- [20] Misle Salah, M. (2020). *Manual de operación sistema de transporte y disposición de relaves* (Tesis Doctoral, Universidad de Chile). Descargado de <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/176679>
- [21] Newson, T. A., y Fahey, M. (2003). Measurement of evaporation from saline tailings storages. *Engineering Geology*, 70(3-4), 217–233. doi: 10.1016/S0013-7952(03)00091-7
- [22] Ovarlez, G., Bertrand, F., y Rodts, S. (2006). Local determination of the constitutive law of a dense suspension of noncolloidal particles through magnetic resonance imaging. *Journal of Rheology*, 50(3), 259–292. doi: 10.1122/1.2188528
- [23] Poloski, A. P., Etchells, A. W., Chun, J., Adkins, H. E., Casella, A. M., Minette, M. J., y Yokuda, S. T. (2010). A pipeline transport correlation for slurries with small but dense particles. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 88(2), 182–189. doi: 10.1002/cjce.20260
- [24] Ramírez, N. A. (2007). Guía técnica de operación y control de depósitos de relaves. *Servicio Nacional de Geología y Minería, Departamento de Seguridad Minera*, 1–42.
- [25] UNESCO. (2020). *Informe Mundial de las Naciones Unidas sobre el Desarrollo de los Recursos Hídricos 2020: Agua y Cambio Climático* (Vol. 167) (n.º 3618). París. Descargado de www.unwater.org.
- [26] Verruijt, A. (2010). An Introduction to Soil Dynamics. *An Introduction to Soil Dynamics*(December 2009). doi: 10.1007/978-90-481-3441-0
- [27] Vick, S. G. (1999). *Planning, Design, and Analysis of Tailings Dams*. Vancouver : University of British Columbia Library. doi: 10.14288/1.0394902
- [28] Wels, C., y Robertson, A. M. (2003). Conceptual model for estimating water recovery in tailings impoundments. *Tailings and Mine Waste: Proceedings of the Tenth International Conference*, 15(2003), 87–94.

Anexos

Anexo A

Método de Runge-Kutta de orden 4

El método de Runge-Kutta de orden 4 permite obtener una solución numérica al problema de valor inicial y estima el valor en el paso siguiente de la solución del sistema de EDO's en función del paso actual y una pendiente estimada. Escrito de forma matemática, el método de Runge-Kutta, en esta etapa en particular, entrega una solución en todo el espacio para q , \tilde{h} y ϕ considerando el uso de las condiciones de borde e inicial para el tiempo t_0 . La solución que entrega el método para cada una de las variables ya mencionadas se aprecia en las Ecuaciones A.1, A.2 y A.3.

$$q(x_{i+1}, t_0) = q(x_i, t_0) + \frac{1}{6}\Delta x (k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \quad \forall i \in [0, n-1] \quad (\text{A.1})$$

$$\tilde{h}(x_{i+1}, t_0) = \tilde{h}(x_i, t_0) + \frac{1}{6}\Delta x (k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \quad \forall i \in [0, n-1] \quad (\text{A.2})$$

$$\phi(x_{i+1}, t_0) = \phi(x_i, t_0) + \frac{1}{6}\Delta x (k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43}) \quad \forall i \in [0, n-1] \quad (\text{A.3})$$

Donde en las Ecuaciones A.4, A.5, A.6 y A.7 se aprecian las expresiones asociadas a las distintas pendientes en distintas partes del intervalo espacial.

$$k_{1l} = g_l(q(x_i, t_0), \tilde{h}(x_i, t_0), \phi(x_i, t_0)) \quad (\text{A.4})$$

$$k_{2l} = g_l\left(q\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x k_{1l}, t_0\right), \tilde{h}\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x k_{1l}, t_0\right), \phi\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x k_{1l}, t_0\right)\right) \quad (\text{A.5})$$

$$k_{3l} = g_l\left(q\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x k_{2l}, t_0\right), \tilde{h}\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x k_{2l}, t_0\right), \phi\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x k_{2l}, t_0\right)\right) \quad (\text{A.6})$$

$$k_{4l} = g_l(q(x_i + \Delta x k_{3l}, t_0), \tilde{h}(x_i + \Delta x k_{3l}, t_0), \phi(x_i + \Delta x k_{3l}, t_0)) \quad (\text{A.7})$$

Donde $l \in [1, 3]$ dado que en el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado sólo se definen las funciones g_1 , g_2 y g_3 que corresponden a las derivadas de cada una de las variables de interés.

Anexo B

Código de Python

A continuación se presenta el código implementado para resolver las ecuaciones diferenciales planteadas en el modelo. Se especifica en que consiste que cada parte del código fuente.

Código B.1: Código principal con el método cuasiestático

```
1
2 #Importar librerías
3 import numpy as np
4 import math
5 from matplotlib import pyplot as plt
6
7 #
8 def Metodo_Cuasiestatico(f,g,m,q0,h0,phi0,zs0,S0,a,b,delta_x,t0,tf,delta_t):
9
10 # Vector que indica el paso y los límites en donde se evalúa el tiempo
11 t = np.arange(t0,tf+delta_t,delta_t)
12
13 # Número de nodos para el tiempo
14 nt = len(t)
15
16 # Vector que indica el paso y los límites en donde se evalúa el espacio
17 x = np.arange(a,b+delta_x,delta_x)
18
19 # Número de nodos para el espacio
20 nx = len(x)
21
22 # Vector Solución para el vector S (pendiente del canal) para cada t en todo x
23 S = np.zeros((nt,nx))
24
25 # Vector solución para el vector zs (cota del fondo del canal) para cada t en todo x
26 zs = np.zeros((nt,nx))
27
28 # Vector que representa cada componente del vector solución S
29 S_t = np.zeros(nx)
30 for l in range(nx):
31     S_t[l] = S0
32
33 # Vector que representa cada componente del vector solución zs
```

```

34 zs_t = np.zeros(nx)
35 for i in range(nx):
36     zs_t[i] = zs0 + delta_x*i*S0
37
38 # Vectores solución del método cuasiestático en x y t
39 q = np.zeros((nt,nx)); h = np.zeros((nt,nx)); phi = np.zeros((nt,nx));
40 dq_dx = np.zeros((nt,nx)); dh_dx = np.zeros((nt,nx)); d_corte = np.zeros((nt,nx))
41
42 # Parámetros globales del sistema
43 rho_s = 2700; rho_l = 1000; Ty = 0.5; B = 1; n0 = 2; d0 = 0.0003
44 Tolerancia = 10**(-20); Parametro = 0.000001;
45 d_max = d0*(-1*math.log(Tolerancia))*(1/n0)+Parametro
46 d_min = d0*(-1*math.log(1+Tolerancia))*(1/n0)+Parametro
47
48 # Iteración
49 for j in range(nt):
50     S[j] = S_t
51     zs[j] = zs_t
52     RK = Runge_Kutta_System(f,g,m,S[j],q0,h0,phi0,a,b,delta_x)
53     q[j] = RK[0]
54     h[j] = RK[1]
55     phi[j] = RK[2]
56     dq_dx[j] = RK[3]
57     dh_dx[j] = RK[4]
58     d_corte[j] = RK[5]
59     for k in range(nx):
60         zs_t[k] = zs_t[k] - delta_t*dq_dx[j][k]
61     for i in range(nx-1):
62         S_t[i] = (zs_t[i+1] - zs_t[i])/delta_x
63
64 # Graficar la solución de q
65 fig = plt.figure(dpi=150)
66 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
67     tiempo = str(j)
68     plt.plot(x,q[j],label='$q(t)$ $t=$'+str(j)+' [s$]$')
69     plt.xlabel('$x$ [$m$]')
70     plt.ylabel('$q(t)$ [$m^2/s$]')
71     plt.title('Solución método cuasiestático para $q$')
72     plt.legend()
73     plt.savefig('Solucion-caudal-por-unidad-de-ancho.png', dpi=fig.dpi)
74     plt.show()
75
76 # Graficar la solución de h
77 fig = plt.figure(dpi=150)
78 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
79     tiempo = str(j)
80     plt.plot(x,h[j],label='$h(t)$ $t=$'+str(j)+' [s$]$')
81     plt.xlabel('$x$ [$m$]')
82     plt.ylabel('$h(t)$ [$m$]')
83     plt.title('Solución método cuasiestático para $h$')
84     plt.legend()
85     plt.savefig('Solucion-altura-de-escurrimiento.png', dpi=fig.dpi)

```

```

86 plt.show()
87
88 # Graficar la solución de phi
89 fig = plt.figure(dpi=150)
90 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
91     tiempo = str(j)
92     plt.plot(x,phi[j],label='$\phi(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
93 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
94 plt.ylabel('$\phi(t)$ [-]')
95 plt.title('Solución método cuasiestático para $\phi$')
96 plt.legend()
97 plt.savefig('Solucion-concentracion-volumetrica-de-solidos.png', dpi=fig.dpi)
98 plt.show()
99
100 # Graficar la solución de zs
101 fig = plt.figure(dpi=150)
102 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
103     tiempo = str(j)
104     plt.plot(x,zs[j],label='$z_{s}(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
105 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
106 plt.ylabel('$z_{s}(t)$ [$m$]')
107 plt.title('Solución método cuasiestático para $z_{s}$')
108 plt.legend()
109 plt.savefig('Solucion-cota-lecho.png', dpi=fig.dpi)
110 plt.show()
111
112 # Graficar la solución de dq_dx
113 fig = plt.figure(dpi=150)
114 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
115     plt.plot(x,dq_dx[j],label='Derivada del caudal unitario en t'+str(j))
116 plt.xlabel('x [m]')
117 plt.ylabel('dq_dx [m/s]')
118 plt.title('Solución método cuasiestático para dq_dx')
119 plt.legend()
120 plt.savefig('Solucion-derivada-caudal-unitario.png', dpi=fig.dpi)
121 plt.show()
122
123 # Graficar la solución de dh_dx
124 fig = plt.figure(dpi=150)
125 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
126     plt.plot(x,dh_dx[j],label='Derivada de la altura de escurrimiento en t'+str(2*j))
127 plt.xlabel('x [m]')
128 plt.ylabel('dh_dx [m/s]')
129 plt.title('Solución método cuasiestático para dh_dx')
130 plt.legend()
131 plt.savefig('Solucion-derivada-altura-escurrimiento.png', dpi=fig.dpi)
132 plt.show()
133
134 # Se definen los vectores solución para diversas variables de interés
135 # para cada x
136 #
137 # Variables:

```

```

138 # Rho_slurry: (kg/m^3) Densidad de la mezcla
139 # N_Fr: (-) Número de Froude
140 # V: (m/s) Velocidad media de escurrimiento
141 # D_h: (m) Diámetro hidráulico
142 # f_D: (-) Factor de fricción de Chilton y Stainsby
143 # J: (m/m) Pendiente del plano de carga
144 # S: (m/m) Pendiente del canal
145 # N_Re: (-) Número de Reynolds
146 # Numerador: (-) Numerador en la ecuación del eje hidráulico
147 # Denominador: (-) Denominador en la ecuación del eje hidráulico
148 # dq_dx: (m/s) Variación espacial del caudal por unidad de ancho
149 # dh_dx: (-) Variación espacial de la altura de escurrimiento
150 # X: (-) razón esfuerzo de fluencia/esfuerzo de pared
151 # hn: (m) Altura normal de escurrimiento
152 # hc: (m) Altura de escurrimiento crítica (minima energía esp.)
153 # Dc: (m) Diámetro crítico de deposición
154
155 Rho_slurry = np.zeros((nt,nx)); N_Fr = np.zeros((nt,nx)); V = np.zeros((nt,nx));
156 D_h = np.zeros((nt,nx)); f_D = np.zeros((nt,nx)); J = np.zeros((nt,nx));
157 N_Re = np.zeros((nt,nx)); d_c = np.zeros((nt,nx)); qs = np.zeros((nt,nx));
158 ql = np.zeros((nt,nx)); mu = np.zeros((nt,nx)); hn = np.zeros((nt,nx));
159 hc = np.zeros((nt,nx)); I = np.zeros((nt,nx)); I_p = np.zeros((nt,nx))
160
161
162 for j in range(nt):
163     for i in range(nx):
164         Rho_slurry[j][i] = rho_slurry(rho_s,rho_l,phi[j][i])
165         mu[j][i] = mu_slurry(phi[j][i])
166         N_Fr[j][i] = Adimensional(q[j][i],h[j][i],phi[j][i],Rho_slurry[j][i],B)[1]
167         V[j][i] = q[j][i]/h[j][i]
168         D_h[j][i] = Dh(h[j][i],B)
169         f_D[j][i] = f_ChiltonSainsby(V[j][i],D_h[j][i],mu[j][i],Ty,Rho_slurry[j][i])[0]
170         J[j][i] = J_Darcy(q[j][i],h[j][i],B,f_D[j][i])
171         N_Re[j][i] = Adimensional(q[j][i],h[j][i],phi[j][i],Rho_slurry[j][i],B)[0]
172         d_c[j][i] = dc(q[j][i],h[j][i],phi[j][i],B,rho_s,rho_l)
173         qs[j][i] = q[j][i]*phi[j][i]
174         ql[j][i] = q[j][i]*(1-phi[j][i])
175         I[j][i] = q0*(1-phi0) - ql[j][i]
176         I_p[j][i] = (q0*(1-phi0) - ql[j][i])/(q0*(1-phi0))
177         hn[j][i] = Altura_normal(q[j][i],h[j][i],phi[j][i],x[i],S[j][i],
178             B,rho_s,rho_l,Ty,d_corte[j][i],d_min,n0,d0,phi0)
179         hc[j][i] = Altura_critica(q[j][i])
180
181 # Graficar el Número de Froude en función de x
182 fig = plt.figure(dpi=150)
183 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
184     plt.plot(x,N_Fr[j],label='Fr $t=$'+str(j)+' ['$s$'])
185     plt.xlabel('$x$ [$m$]')
186     plt.ylabel('Fr [-]')
187     plt.title('Número de Froude para cada x')
188     plt.legend()
189     plt.savefig('Numero-de-Froude.png', dpi=fig.dpi)

```

```

190 plt.show()
191
192 # Graficar el Número de Reynolds en función de x
193 fig = plt.figure(dpi=150)
194 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
195     plt.plot(x,N_Re[j],label='Re $t=$'+str(j)+' [$s$]')
196 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
197 plt.ylabel('Re [-]')
198 plt.title('Número de Reynolds para cada x')
199 plt.legend()
200 plt.ticklabel_format(style='sci', axis='y', scilimits=(0,5))
201 plt.savefig('Numero-de-Reynolds.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
202 plt.show()
203
204 # Graficar la velocidad media de escurrimiento en función de x
205 fig = plt.figure(dpi=150)
206 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
207     plt.plot(x,V[j],label='$v(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
208 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
209 plt.ylabel('$v$ [$m/s$]')
210 plt.title('Velocidad media de escurrimiento para cada x')
211 plt.legend()
212 plt.savefig('Velocidad-media-de-escurrimiento.png', dpi=fig.dpi)
213 plt.show()
214
215 # Graficar el factor de fricción en función de x
216 fig = plt.figure(dpi=150)
217 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
218     plt.plot(x,f_D[j],label='$f(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
219 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
220 plt.ylabel('$f$ [-]')
221 plt.title('Factor de fricción para cada x')
222 plt.legend()
223 plt.savefig('Factor-de-friccion.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
224 plt.show()
225
226 # Graficar la pendiente de la línea de carga en función de x
227 fig = plt.figure(dpi=150)
228 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
229     plt.plot(x,J[j],label='$J(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
230 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
231 plt.ylabel('$J$ [$m/m$]')
232 plt.title('Pendiente de la línea de carga para cada x')
233 plt.legend()
234 plt.savefig('Pendiente-linea-de-carga.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
235 plt.show()
236
237 # Graficar el flujo volumétrico de líquido en función de x
238 fig = plt.figure(dpi=150)
239 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
240     plt.plot(x,q1[j],label='$q_{1}(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
241 plt.xlabel('$x$ [$m$]')

```

```

242 plt.ylabel('$q_{1}$ $[m^2/S]$')
243 plt.title('Flujo volumétrico de líquido para cada x')
244 plt.legend()
245 plt.savefig('Flujo-volumetrico-liquido.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
246 plt.show()
247
248 # Graficar las pérdidas por atrapamiento acumuladas en función de x
249 fig = plt.figure(dpi=150)
250 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
251     plt.plot(x,I[j],label='$I(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s]$')
252 plt.xlabel('$x$ $[m]$')
253 plt.ylabel('$I$ $[m^2/S]$')
254 plt.title('Pérdidas de agua por atrapamiento para cada x')
255 plt.legend()
256 plt.savefig('Perdidas-de-agua-por-atrapamiento.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
257 plt.show()
258
259 # Graficar las pérdidas por atrapamiento acumuladas en función de x
260 fig = plt.figure(dpi=150)
261 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
262     plt.plot(x,I_p[j],label='$I(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s]$')
263 plt.xlabel('$x$ $[m]$')
264 plt.ylabel('$I$ [-]')
265 plt.title('Pérdidas de agua por atrapamiento para cada x')
266 plt.legend()
267 plt.savefig('Perdidas-de-agua-por-atrapamiento.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
268 plt.show()
269
270 # Graficar el diámetro de corte en función de x
271 fig = plt.figure(dpi=150)
272 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
273     d_c[j] = d_c[j]*1000000
274     plt.plot(x,d_c[j],label='$d_{c}(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s]$')
275 plt.xlabel('$x$ $[m]$')
276 plt.ylabel('$d_{c}$ $[\mu m]$')
277 plt.title('Diámetro de corte para cada x')
278 plt.legend()
279 plt.savefig('Diametro-de-corte.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
280 plt.show()
281
282 # Graficar la densidad de la mezcla en función de x
283 fig = plt.figure(dpi=150)
284 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
285     plt.plot(x,Rho_slurry[j],label=r'$\rho (t)$ $t=$'+str(j)+' [$s]$')
286 plt.xlabel('$x$ $[m]$')
287 plt.ylabel(r'$\rho$ $[kg/m^3]$')
288 plt.title('Densidad de la mezcla para cada x')
289 plt.legend()
290 plt.savefig('Densidad-de-la-mezcla.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
291 plt.show()
292
293 # Graficar la viscosidad de la mezcla en función de x

```

```

294 fig = plt.figure(dpi=150)
295 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
296     mu[j] = mu[j]*1000
297     plt.plot(x,mu[j],label='$\mu (t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
298 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
299 plt.ylabel('$\mu$ [$mPa \cdot s$]')
300 plt.title('Viscosidad de la mezcla para cada x')
301 plt.legend()
302 plt.savefig('Viscosidad-de-la-mezcla.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
303 plt.show()
304
305 # Graficar el diámetro hidráulico en función de x
306 fig = plt.figure(dpi=150)
307 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
308     plt.plot(x,D_h[j],label='$D_{h}(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
309 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
310 plt.ylabel('$D_{h}$ [$m$]')
311 plt.title('Diámetro hidráulico para cada x')
312 plt.legend()
313 plt.savefig('Diametro-hidraulico.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
314 plt.show()
315
316 # Graficar la pendiente del canal en función de x
317 fig = plt.figure(dpi=150)
318 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
319     plt.plot(x,S[j],label='$S(t)$ $t=$'+str(j)+' [$s$]')
320 plt.xlabel('$x$ [$m$]')
321 plt.ylabel('$S$ [$-]$')
322 plt.title('Pendiente del canal para cada x')
323 plt.legend()
324 plt.savefig('Pendiente-canal.png', dpi=fig.dpi, bbox_inches='tight')
325 plt.show()
326
327 # Se importa una librería con la que se puede exportar resultados a excel
328 import openpyxl
329
330 # Se crea un workbook y luego se activa
331 wb = openpyxl.Workbook()
332 hoja = wb.active
333 for j in range(0,nt,int((nt-1)/5)):
334     hoja = wb.create_sheet(index=1, title='Hoja '+str(j))
335     hoja = wb['Hoja '+str(j)]
336     wb.active = hoja
337
338 # Encabezados de la primera fila de los resultados exportados
339 hoja.append(('x [m]', 'q [m^2/s]', 'h [m]', 'phi [-]', 'V [m/s]', 'Dh [m]', 'Re [-]', 'Fr [-]',
340            'fD [-]', 'J [m/m]', 'dc [m]', 'rho', 'mu', 'S'))
341
342 # crear tuplas
343 tupla = []
344
345 # Se insertan fila a fila las soluciones de cada variable para cada x

```

```

346 for i in range(nx):
347     tupla.append([x[i], q[j][i], h[j][i], phi[j][i], V[j][i], D_h[j][i], N_Re[j][i], N_Fr[j][i], f_D[j][i],
348                 J[j][i], d_c[j][i], Rho_slurry[j][i], mu[j][i], S[j][i]])
349
350 # agregar las tuplas al excel
351 for fila in tupla:
352     hoja.append(fila)
353
354 # Se guarda la hoja creada en un excel
355 wb.save('Valores-eje-hidraulico.xlsx')

```

Código B.2: Código principal con el método de Runge-Kutta de orden 4

```

1
2 #Importar librerías
3 import numpy as np
4 import math
5 from matplotlib import pyplot as plt
6
7 # Método de Runge-Kutta de orden 4 para resolver sistema de ecuaciones diferenciales
8 def Runge_Kutta_System(f,g,m,S,q0,h0,phi0,a,b,t):
9
10 # Vector que indica el paso y los límites en donde se evalúa x
11 x = np.arange(a,b+t,t)
12
13 # Número de nodos
14 n = len(x)
15
16 # Vectores solución para q, h y phi
17 q = np.zeros(n); h = np.zeros(n); phi = np.zeros(n)
18
19 # Condiciones de borde para q, h y phi en x=0
20 q[0] = q0; h[0] = h0; phi[0] = phi0
21
22 # Variables globales del sistema
23 rho_s = 2700; rho_l = 1000; Ty = 0.5; B = 1; n0 = 2; d0 = 0.0003
24 Tolerancia = 10**(-20); Parametro = 0.000001;
25 d_max = d0*(-1*math.log(Tolerancia))*(1/n0)+Parametro
26 d_min = d0*(-1*math.log(1+Tolerancia))*(1/n0)+Parametro
27
28 # Vector solución para la derivada espacial del caudal y de la altura de escurrimiento
29 dq_dx = np.zeros(n); dh_dx = np.zeros(n); dphi_dx = np.zeros(n)
30
31 #Vector solución para el diámetro de corte y su valor inicial (defecto)
32 d_corte = np.zeros(n); d_corte[0] = d_max
33
34 # Iteración
35 for i in range(n-1):
36
37     if d_corte[i] < dc(q[i], h[i], phi[i], B,
38         rho_s, rho_l):
39         d_corte[i+1] = d_corte[i]

```

```

40 else:
41     d_corte[i+1] = dc(q[i], h[i], phi[i], B,
42         rho_s, rho_l)
43
44     k1 = t*f(q[i], h[i], phi[i], x[i], S[i], B,
45         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
46     l1 = t*g(q[i], h[i], phi[i], x[i], S[i], B,
47         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
48     m1 = t*m(q[i], h[i], phi[i], x[i], S[i], B,
49         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
50
51     k2 = t*f(q[i]+k1/2, h[i]+l1/2, phi[i]+m1/2, x[i]+t/2, S[i], B,
52         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
53     l2 = t*g(q[i]+k1/2, h[i]+l1/2, phi[i]+m1/2, x[i]+t/2, S[i], B,
54         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
55     m2 = t*m(q[i]+k1/2, h[i]+l1/2, phi[i]+m1/2, x[i]+t/2, S[i], B,
56         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
57
58     k3 = t*f(q[i]+k2/2, h[i]+l2/2, phi[i]+m2/2, x[i]+t/2, S[i], B,
59         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
60     l3 = t*g(q[i]+k2/2, h[i]+l2/2, phi[i]+m2/2, x[i]+t/2, S[i], B,
61         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
62     m3 = t*m(q[i]+k2/2, h[i]+l2/2, phi[i]+m2/2, x[i]+t/2, S[i], B,
63         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
64
65     k4 = t*f(q[i]+k3, h[i]+l3, phi[i]+m3, x[i]+t, S[i], B,
66         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
67     l4 = t*g(q[i]+k3, h[i]+l3, phi[i]+m3, x[i]+t, S[i], B,
68         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
69     m4 = t*m(q[i]+k3, h[i]+l3, phi[i]+m3, x[i]+t, S[i], B,
70         rho_s, rho_l, Ty, d_corte[i], d_min, d0, n0, phi0)
71
72     q[i+1] = q[i] + (1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
73     h[i+1] = h[i] + (1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4)
74     phi[i+1] = phi[i] + (1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4)
75
76     dq_dx[i] = ((1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4))/t
77     dh_dx[i] = ((1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4))/t
78     dphi_dx[i] = ((1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4))/t
79
80 return [q,h,phi,dq_dx,dh_dx,d_corte]

```

Código B.3: Función que cuantifica la densidad de la mezcla

```

1 # Función que determina la densidad de la mezcla sólido-líquida
2 #
3 # Inputs:
4 # rho_s:      (kg/m^3) Densidad de las partículas sólidas que componen la mezcla
5 # rho_l:      (kg/m^3) Densidad del líquido que compone la mezcla
6 # phi:        (-) Concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
7 #
8 # Outputs:

```

```

9 # rho_slurry: (kg/m^3) Densidad total de la mezcla
10
11 def rho_slurry(rho_s,rho_l,phi):
12     return rho_s*phi + rho_l*(1-phi)

```

Código B.4: Función que cuantifica la viscosidad de la mezcla

```

1 # Función que determina la densidad de la mezcla sólido-líquida
2 #
3 # Inputs:
4 # phi: (-) Concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
5 # mu_a: (Pa*s) Viscosidad del agua
6 # phi_m: (-) Concentración crítica de empaquetamiento
7 #
8 # Outputs:
9 # mu_slurry: (Pa*s) Viscosidad de la mezcla
10
11 def mu_slurry(phi,mu_a=0.001,phi_m=0.6):
12     return mu_a*(1 - phi/phi_m)**(-2)

```

Código B.5: Función que cuantifica la tensión de fluencia

```

1 # Función que determina la tensión de fluencia
2 #
3 # Inputs:
4 # phi: (-) Concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
5 # mu_a: (Pa*s) Viscosidad del agua
6 # phi_m: (-) Concentración crítica de empaquetamiento
7 #
8 # Outputs:
9 # mu_slurry: (Pa*s) Viscosidad de la mezcla
10
11 def ty(phi,d0,m=0.55,phi_m=0.6):
12     Ka = 0.16 + 2.4*10**(-7)/d0
13     return (Ka/(phi_m - phi))**(1/m)

```

Código B.6: Función que determina el diámetro hidráulico

```

1 # Función que determina el diámetro hidráulico del escurrimiento
2 #
3 # Inputs:
4 # h: (m) Altura de escurrimiento
5 # B: (B) Ancho del canal
6 #
7 # Outputs:
8 # Dh: (m) Diámetro hidráulico
9
10 def Dh(h,B):
11     R_h = h*B/(2*h+B)
12     D_h = 4*R_h
13     return D_h

```

Código B.7: Función que cuantifica la pendiente de la línea de carga

```

1 # Función que calcula la pendiente de la línea de carga según la expresión
2 # de Darcy-Weisbach
3 #
4 # Inputs:
5 # ff:      (-) Factor de fricción de Chilton y Stainsby
6 # h:      (m) Altura de escurrimiento
7 # B:      (m) Ancho del canal
8 # q:      (m2/s) Caudal de mezcla por unidad de ancho
9 # gr:     (m/s2) Aceleración de gravedad
10 #
11 # Outputs:
12 # J:      (m/m) Pendiente de la línea de carga
13
14 def J_Darcy(q,h,B,ff,gr = 9.8):
15     D_h = Dh(h,B)
16     J = ff*(1/D_h)*((q**(2))/(2*gr*h**(2)))
17     return J

```

Código B.8: Función que cuantifica la altura normal de escurrimiento

```

1 # Función que calcula la altura normal de escurrimiento
2 #
3 # Inputs:
4 # q:      (m2/s) Caudal de mezcla unitario
5 # h:      (m) Altura de escurrimiento (por defecto) que inicia la iteración
6 # phi:    (-) Concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
7 # S:      (-) Pendiente del canal
8 # B:      (m) Ancho del canal
9 # rho_s:  (kg/m3) Densidad de las partículas sólidas que componen la mezcla
10 # rho_l:  (kg/m3) Densidad del líquido que compone la mezcla
11 # mu_slurry: (Pa*s) Viscosidad de la mezcla
12 # Ty:     (Pa) Tensión de fluencia de la mezcla
13 # d_max:  (m) Diámetro máximo de la distribución de tamaños
14 # d_min:  (m) Diámetro mínimo de la distribución de tamaños
15 # gr:     (m/s2) Aceleración de gravedad
16 # phi_m:  (-) Concentración crítica de empaquetamiento de la mezcla
17 #
18 # Outputs:
19 # hn:     (m) Altura normal de escurrimiento
20
21 def Altura_normal(q,h,phi,x,S,B,rho_s,rho_l,Ty,d_corte,
22                 d_min,n0,d0,phi0,gr=9.8,phi_m=0.6):
23     hn = h
24     epsilon = 10**(-8)
25     G = 1
26     F = 2
27     while G + F > epsilon:
28         rho = rho_slurry(rho_s,rho_l,phi)
29         mu = mu_slurry(phi)
30         C1 = Factores(q,hn,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)[0]

```

```

31 C2 = Factores(q,hn,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)[1]
32 A = q/(phi_m - phi)
33 C = A*C2/(1 - A*C1)
34 D = rho*gr*hn + (rho_s - rho_l)*C2*((q**2)/(hn)) - rho*(q/hn)**2)
35 E = C1*(rho_s - rho_l)*((q**2)/hn) + 2*(q/hn)*rho
36 F = -(1/8)*f_ChiltonSainsby(q/hn,Dh(hn,B),mu,Ty,rho)[0]*rho*(q/hn)**2)
37     - rho*gr*hn*S
38 dq_dx = (C*F/D)/(1 + C*E/D)
39 G = -1*dq_dx*(C1*(rho_s-rho_l)*q**2)/hn + 2*(q/hn)*rho)
40 hn = (-1*(1/8)*f_ChiltonSainsby(q/hn,Dh(hn,B),mu,Ty,rho)[0]*q**2)/(gr*S))**(1/3)
41 return hn

```

Código B.9: Función que cuantifica la altura crítica de escurrimiento

```

1 # Función que calcula la altura crítica del escurrimiento
2 #
3 # Inputs:
4 # q:          (m^2/s) Caudal de mezcla unitario
5 #
6 # Outputs:
7 # hc:        (m) Altura crítica de escurrimiento
8 def Altura_critica(q,gr=9.8):
9     hc = (q**2)/gr)**(1/3)
10    return hc

```

Código B.10: Función que retorna los número adimensionales (Re y Fr)

```

1 # Función que determina el número de Reynolds y el número de Froude
2 #
3 # Inputs:
4 # q:          (m^2/s) Caudal de mezcla por unidad de ancho
5 # h:          (m) Altura de escurrimiento
6 # rho:        (kg/m^3) Densidad de la mezcla
7 # mu_slurry: (Pa*s) Viscosidad dinámica de la mezcla
8 # gr:         (m/s^2) aceleración de gravedad
9 # B:          (m) ancho del canal
10 #
11 # Outputs:
12 # Re:         (-) Número de Reynolds
13 # Fr:         (-) Número de Froude
14
15 def Adimensional(q,h,phi,rho,B,gr = 9.8):
16     Rh = h*B/(2*h+B)
17     D_h = 4*Rh
18     mu = mu_slurry(phi)
19     Re = rho*(q/h)*D_h/mu
20     Fr = (q/h)/(gr*h)**(1/2)
21     return [Re, Fr]

```

Código B.11: Función que cuantifica el diámetro de corte

```

1 # Función que determina el diámetro de corte según la relación deducida por Poloski
2 # entre el número de Froude de Durand y el número de Arquímedes de las partículas sólidas
3 #
4 # Inputs:
5 # q:      (m2/s) Caudal de mezcla por unidad de ancho
6 # h:      (m) Altura de escurrimiento
7 # phi:    (-) Concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
8 # B:      (m) Ancho del canal
9 # rho_s:  (kg/m3) Densidad de las partículas sólidas que componen la mezcla
10 # rho_l:  (kg/m3) Densidad del líquido que compone la mezcla
11 # mu_slurry: (Pa*s) Viscosidad de la mezcla
12 # gr:     (m/s2) Aceleración de gravedad
13 # a,b:    Coeficientes empíricos en la relación entre Fr y Ar
14 #
15 # Outputs:
16 # dc:     (m) Diámetro de corte
17
18 def dc(q,h,phi,B,rho_s,rho_l,gr=9.8,a=0.59,b=0.15):
19     rho = rho_slurry(rho_s,rho_l,phi)
20     mu = mu_slurry(phi)
21     S = rho_s/rho_l
22     D = (3/4)*((mu**(2))/(gr*(S - 1)*(rho)**(2)))
23     C = q/(a*h*(gr*(S - 1)*Dh(h,B))**(1/2))
24     return (D*C**(1/b))**(1/3)

```

Código B.12: Función que expresa la función densidad de la distribución de concentraciones

```

1 import math
2 # Función que expresa la forma de la distribución de concentraciones volumétricas
3 # de sólidos en la mezcla sólido-líquida por tamaño de partícula
4 #
5 # Inputs:
6 # d:      (m) Tamaño de partícula
7 # d_max:  (m) Tamaño máximo de partícula en el intervalo de integración
8 # d_min:  (m) Tamaño mínimo de partícula en el intervalo de integración
9 #
10 # Outputs:
11 # phi_d:  (-) Distribución de concentraciones por tamaño
12
13 def phi_distribution(d,d_corte,d_min,n0,d0,phi0):
14     if d >= d_min and d <= d_corte:
15         phi = phi0*(1/d0)*n0*(d/d0)**(n0-1)*math.exp(-1*(d/d0)**n0)
16     else:
17         phi = 0
18     return phi

```

Código B.13: Función que calcula los factores utilizados para calcular la derivada de d_c

```

1 # Factores utilizados para expresar la derivada espacial de la concentración
2 # volumétrica de sólidos de la mezcla (en la dirección del flujo) en función de
3 # la derivada espacial de la altura de escurrimiento y la derivada espacial
4 # del caudal del mezcla (en la dirección del flujo)
5 #
6 # Inputs:
7 # q:      (m^2/s) Caudal de mezcla por unidad de ancho
8 # h:      (m) Altura de escurrimiento
9 # phi:    (-) Concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
10 # B:      (m) Ancho del canal
11 # rho_s:  (kg/m^3) Densidad de las partículas sólidas que componen la mezcla
12 # rho_l:  (kg/m^3) Densidad del líquido que compone la mezcla
13 # mu_slurry: (Pa*s) Viscosidad de la mezcla
14 # d_max:  (m) Diámetro máximo de la distribución de tamaños
15 # d_min:  (m) Diámetro mínimo de la distribución de tamaños
16 # d_anterior: (m) Diámetro de corte de la iteración anterior
17 # gr:     (m/s^2) Aceleración de gravedad
18 # a,b:    Coeficientes empíricos en la relación entre Fr y Ar
19 #
20 # Outputs:
21 # C1, C2: Factores variables en función de q, h y phi
22
23 def Factores(q,h,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0
24             ,gr=9.8,a=0.59,b=0.15,phi_m=0.6,mu_a=0.001):
25     rho = rho_slurry(rho_s,rho_l,phi)
26     mu = mu_slurry(phi)
27     S = rho_s/rho_l
28     A = (3/4)*((mu**(2))/(gr*(S - 1)*rho**(2)))
29     C = q/(a*h*(gr*Dh(h,B)*(S - 1))**(1/2))
30     d_c = dc(q,h,phi,B,rho_s,rho_l)
31     D = phi_distribution(d_c,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)
32     E = -1*2*A*((rho_s-rho_l)/rho)*(C)**(1/b)
33     L = 4*A*(mu_a/mu)*(1-phi/phi_m)**(-3)*(1/phi_m)*(C)**(1/b)
34     F = A*(1/b)*(C)**(1/b - 1)
35     G = 1/(h*a*(gr*Dh(h,B)*(S-1))**(1/2))
36     I = (q/(a*(gr*(S-1))**(1/2)))*(((2*h+B)**(-1/2)*h**(3/2)*B**(1/2) -
37     (3/2)*h**(1/2)*B**(1/2)*(2*h+B)**(1/2))/(h**(3)*B))
38     K1 = (1/3)*(A*(C)**(1/b))**(-2/3)*D*F*G
39     K2 = (1/3)*(A*(C)**(1/b))**(-2/3)*D*F*I
40     X0 = (1/3)*(A*(C)**(1/b))**(-2/3)*D*(E+L)
41     C1 = K1/(1-X0)
42     C2 = K2/(1-X0)
43     return [C1,C2]

```

Código B.14: Función que expresa la derivada del caudal unitario

```

1 # Función que expresa la derivada del caudal por unidad de ancho
2 #
3 # Inputs:

```

```

4 # q:      (m^2/s) Caudal por unidad de ancho
5 # h:      (m) Altura de escurrimiento
6 # phi:    (-) Concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
7 # dzs_dx: (-) Pendiente del canal para cada x
8 # B:      (m) Ancho del canal
9 # rho_s:  (kg/m^3) Densidad de las partículas sólidas que componen la mezcla
10 # rho_l:  (kg/m^3) Densidad del líquido que compone la mezcla
11 # mu_slurry: (Pa*s) Viscosidad de la mezcla
12 # Ty:     (Pa) Tensión de fluencia de la mezcla
13 # d_max:  (m) Diámetro máximo de la distribución de tamaños
14 # d_min:  (m) Diámetro mínimo de la distribución de tamaños
15 # gr:     (m/s^2) Aceleración de gravedad
16 # a,b:    Coeficientes empíricos en la relación entre Fr y Ar
17 # phi_m:  (-) Concentración crítica de empaquetamiento del lecho de partículas
18 #
19 # Outputs:
20 # f:      (m/s) Derivada espacial en la dirección del flujo del caudal unitario
21
22 def f(q,h,phi,x,S,B,rho_s,rho_l,Ty,d_corte,d_min,d0,n0,phi0,gr=9.8,phi_m=0.6):
23     rho = rho_slurry(rho_s,rho_l,phi)
24     mu = mu_slurry(phi)
25     C1 = Factores(q,h,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)[0]
26     C2 = Factores(q,h,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)[1]
27     A = q/(phi_m - phi)
28     C = A*C2/(1 - A*C1)
29     D = rho*gr*h + (rho_s - rho_l)*C2*((q**2)/(h)) - rho*(q/h)**2
30     E = C1*(rho_s - rho_l)*((q**2)/h) + 2*(q/h)*rho
31     F = -(1/8)*f_ChiltonSainsby(q/h,Dh(h,B),mu,Ty,rho)[0]*rho*(q/h)**2 - rho*gr*h*S
32     hc = Altura_critica(q)
33     hn = Altura_normal(q,h,phi,x,S,B,rho_s,rho_l,Ty,d_corte,d_min,d0,n0,phi0)
34     if hc > h and h > hn:
35         C = 0
36     return (C*F/D)/(1 + C*E/D)

```

Código B.15: Función que cuantifica la el factor de fricción de Chilton y Stainsby

```

1 # Calcula el factor de fricción de Darcy empleando del modelo de
2 # Chilton & Sainsby (J. Hydraul. Eng. 124, pp. 522-529)
3 #
4 # Inputs:
5 # v:      (m/s) Velocidad media del flujo
6 # D:      (m) Diámetro hidráulico
7 # eta:    (Pa*s) Viscosidad equivalente en la pared
8 # ty:     (Pa) Esfuerzo de fluencia
9 # rho:    (kg/m^3) Densidad de la mezcla
10 # n:      (-) Índice de flujo
11 # X0:     (-) Valor inicial para la razón ty/esf. en la pared
12 #
13 # Outputs:
14 # fD:     (-) Factor de fricción de Darcy
15 # X:      (-) Razón esfuerzo de fluencia/esfuerzo de pared
16 # Ren:    (-) Número de Reynolds definido por Chilton y Stainsby

```

```

17
18 def f_ChiltonSainsby(v,D,mu,Ty,rho,n=1,X0=0.1,ep=1e-10):
19     nit=0
20     X=1
21     a = 1/(2*n+1)
22     b = 2*n/((n+1)*(2*n+1))
23     c = 2*n**2/((n+1)*(2*n+1))
24     while np.abs(X/X0-1)>ep:
25         X=X0
26         eta = mu*((3*n+1)/(4*n))**(n-1)*(1/(1-X))*(1/(1-a*X-b*X**2-c*X**3))**(n-1)
27         Ren = rho*v*D/(eta*((3*n+1)/4*n)*(1/(1-a*X-b*X**2-c*X**3)))/np.power(1-X,4)/np.power(n,2)
28         fD = 0.316/np.power(Ren,0.25)
29         X0 = 8*Ty/rho/np.power(v,2)/fD;
30         nit += 1
31     return [fD,Ren,X,nit]

```

Código B.16: Función que cuantifica la derivada de la altura de escurrimiento

```

1  # Función que expresa la derivada de la altura de escurrimiento
2  #
3  # Inputs:
4  # q:      (m2/s) Caudal por unidad de ancho
5  # h:      (m) Altura de escurrimiento
6  # phi:    (-) concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
7  # dzs_dx: (m/m) pendiente del canal
8  # B:      (m) ancho del canal
9  # rho_s:  (kg/m3) densidad de las partículas sólidas que componen la mezcla
10 # rho_l:  (kg/m3) densidad del líquido que compone la mezcla
11 # mu_slurry: (Pa*s) viscosidad equivalente en la pared
12 # Ty:     (Pa) tensión de fluencia
13 # d_max:  (m) Diámetro máximo de la distribución de tamaños
14 # d_min:  (m) Diámetro mínimo de la distribución de tamaños
15 # gr:     (m/s2) aceleración de gravedad
16 #
17 # Outputs:
18 # g:      (m/m) derivada espacial de la altura de escurrimiento
19
20 def g(q,h,phi,x,S,B,rho_s,rho_l,Ty,d_corte,d_min,d0,n0,phi0,gr=9.8,phi_m=0.6):
21     rho = rho_slurry(rho_s,rho_l,phi)
22     mu = mu_slurry(phi)
23     C1 = Factores(q,h,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)[0]
24     C2 = Factores(q,h,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)[1]
25     A = q/(phi_m - phi)
26     C = A*C2/(1 - A*C1)
27     D = rho*gr*h + (rho_s - rho_l)*C2*((q**(2))/(h)) - rho*(q/h)**(2)
28     E = C1*(rho_s - rho_l)*((q**(2))/h) + 2*(q/h)*rho
29     F = -(1/8)*f_ChiltonSainsby(q/h,Dh(h,B),mu,Ty,rho)[0]*rho*(q/h)**(2) - rho*gr*h*S
30     hc = Altura_critica(q)
31     hn = Altura_normal(q,h,phi,x,S,B,rho_s,rho_l,Ty,d_corte,d_min,d0,n0,phi0)
32     if hc > h and h > hn:
33         C = 0
34     return (F/D)/(1 + C*E/D)

```

Código B.17: Función que expresa la derivada de la concentración volumétrica de sólidos

```

1  # Función que expresa la derivada de la concentración volumétrica
2  #
3  # Inputs:
4  # q:      (m2/s) Caudal por unidad de ancho
5  # h:      (m) Altura de escurrimiento
6  # phi:    (-) concentración volumétrica de sólidos de la mezcla
7  # dzs_dx: (m/m) pendiente del canal
8  # B:      (m) ancho del canal
9  # rho_s:  (kg/m3) densidad de las partículas sólidas que componen la mezcla
10 # rho_l:  (kg/m3) densidad del líquido que compone la mezcla
11 # mu_slurry: (Pa*s) viscosidad equivalente en la pared
12 # Ty:     (Pa) tensión de fluencia
13 # d_max:  (m) Diámetro máximo de la distribución de tamaños
14 # d_min:  (m) Diámetro mínimo de la distribución de tamaños
15 # gr:     (m/s2) aceleración de gravedad
16 #
17 # Outputs:
18 # m:      (1/m) derivada espacial de la altura de escurrimiento
19
20 def m(q,h,phi,x,S,B,rho_s,rho_l,Ty,d_corte,d_min,d0,n0,phi0,gr=9.8,phi_m=0.6):
21     rho = rho_slurry(rho_s,rho_l,phi)
22     mu = mu_slurry(phi)
23     C1 = Factores(q,h,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)[0]
24     C2 = Factores(q,h,phi,B,rho_s,rho_l,d_corte,d_min,n0,d0,phi0)[1]
25     A = q/(phi_m - phi)
26     C = A*C2/(1 - A*C1)
27     D = rho*gr*h + (rho_s - rho_l)*C2*((q**2)/(h)) - rho*(q/h)**2
28     E = C1*(rho_s - rho_l)*((q**2)/h) + 2*(q/h)*rho
29     F = -(1/8)*f_ChiltonSainsby(q/h,Dh(h,B),mu,Ty,rho)[0]*rho*(q/h)**2 - rho*gr*h*S
30     hc = Altura_critica(q)
31     hn = Altura_normal(q,h,phi,x,S,B,rho_s,rho_l,Ty,d_corte,d_min,d0,n0,phi0)
32     if hc > h and h > hn:
33         C = 0
34     return C1*(C*F/D)/(1 + C*E/D) + C2*(F/D)/(1 + C*E/D)

```

Anexo C

Resolución de método cuasiestático

C.1. Etapa 1: Resolución del sistema en el tiempo inicial

En esta etapa se detalla el cómo resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado para el tiempo inicial t_0 y así obtener la solución de $q(x_i)$, $\tilde{h}(x_i)$ y $\phi(x_i)$ en todo el espacio, o bien, para todo $i \in [0, n]$.

Para resolver el sistema de EDO's acoplado expresado en las Ecuaciones 4.71, 4.72 y 4.73, dadas las condiciones de borde e inicial presentadas en las Ecuaciones 3.22, 3.23 y 3.24 y 3.21, respectivamente, se procede a utilizar el método de Runge-Kutta de orden 4. La elección del método de Runge-Kutta se respalda por el hecho de que el sistema de ecuaciones es de orden 1, no lineal y homogéneo.

C.2. Etapa 2: Resolución iterativa en el tiempo

En esta etapa se detalla el cómo resolver el sistema de EDO's acoplado para todo instante de tiempo t_j y así obtener la solución de $q(x_i, t_j)$, $\tilde{h}(x_i, t_j)$ y $\phi(x_i, t_j)$ para todo i y j .

Para resolver el problema para todo instante de tiempo, tan sólo se requiere la implementación de una solución del tipo iterativa que registre la evolución en la topografía del canal producto del proceso de sedimentación de partículas sólidas que se acumulan en el lecho. En otras palabras, a partir del sistema de ecuaciones diferenciales obtenido una vez empleada la hipótesis cuasiestática es posible obtener una expresión asociada a la tasa de crecimiento del lecho de partículas sólidas, la cual modifica la topografía del canal en cada instante de tiempo.

Entonces, suponiendo que la tasa de crecimiento del lecho corresponde con una función ψ que depende de q , \tilde{h} y ϕ , entonces se tiene la relación presentada en la Ecuación C.1 la cual es válida para instante de tiempo t y en todo el espacio definido para x .

$$\frac{\partial z_s}{\partial t}(x, t) = \psi(q, \tilde{h}, \phi) \quad (\text{C.1})$$

Al escribir numéricamente la expresión anterior, se obtiene la Ecuación C.2.

$$\frac{z_s(x_i, t_{j+1}) - z_s(x_i, t_j)}{\Delta t} = \psi(q(x_i, t_j), \tilde{h}(x_i, t_j), \phi(x_i, t_j)) \quad \forall i \in [0, n] \wedge \forall j \in [0, m] \quad (\text{C.2})$$

En consecuencia, reordenando los términos de la ecuación de la Ecuación C.2 se obtiene la Ecuación C.3 la que corresponde a la ecuación iterativa que le permite al sistema encontrar una solución para todo x_i para cada t_j .

$$z_s(x_i, t_{j+1}) = z_s(x_i, t_j) + \Delta t \psi(q(x_i, t_j), \tilde{h}(x_i, t_j), \phi(x_i, t_j)) \quad (\text{C.3})$$

Luego, es fácil notar que la etapa 1 entrega como resultado $q(x_i, t_0)$, $\tilde{h}(x_i, t_0)$ y $\phi(x_i, t_0)$ y, por lo tanto, dado que $z_s(x_i, t_0)$ es condición inicial (conocida) del problema, con el uso de la Ecuación C.3 se obtiene $z_s(x_i, t_1)$ o la topografía del canal actualizada al instante de tiempo t_1 .

Posteriormente, dado que ahora se conoce la cota lecho (z_s) en todo el espacio para t_1 esta ingresa cómo condición al sistema de ecuaciones diferenciales válido en todo t_j , por lo que empleando nuevamente la etapa 1 pero aplicada al instante de tiempo t_1 se obtienen las soluciones de $q(x_i, t_1)$, $\tilde{h}(x_i, t_1)$ y $\phi(x_i, t_1)$ en todo el espacio. Luego, empleando nuevamente la etapa 2, se obtiene $z_s(x_i, t_2)$ y así sucesivamente se repite el procedimiento hasta t_n , lo que entrega la solución requerida en todo el dominio definido para el espacio y tiempo, lo que concluye la etapa 2.

Cabe mencionar que en esta etapa es posible apreciar la evolución temporal de cada una de las variables en estudio, pese a estar resolviendo para cada instante de tiempo un problema en régimen permanente, es en esta etapa particular en la cual la hipótesis cuasiestática demuestra todo su potencial y supone una enorme simplificación del modelo, conservando la física detrás del escurrimiento del relave.