UCH-FC
Doc-M
F 634
C.1

Representaciones de álgebras Casi-Jordan Generalizadas

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

MARCELO ANDRÉS FLORES HENRÍQUEZ

Marzo, 2013

Directora de Tesis: Dra. Alicia Labra Jeldres
Co Director de Tesis: Dr. Antonio Behn

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

MARCELO ANDRÉS FLORES HENRÍQUEZ

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 4 de Marzo de 2013.

Director de Tesis:

Dra. Alicia Labra J. ....

Co Director de Tesis:

Dr. Antonio Behn ....

Comisión de Evaluación de Tesis:

Dr. Jorge Soto Andrade (Presidente) ....

Dr. Iván Correa ....

Dr. Manuel Arenas ....

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

A mi familia y amigos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar gracias a todas aquellas personas que me acompañaron durante todo el período como estudiante del programa de Doctorado en Ciencias mención matemáticas.

Agradezco especialmente a todos aquellos que sin pertenecer al mundo de las matemáticas, me hacían sentir su apoyo y preocupación de distintas maneras.

A los profesores Daniel Jiménez y Jesús Juyumaya, por su apoyo y motivación para que me uniera a un programa de Doctorado.

A mi profesora guía, Alicia Labra, por su apoyo acádemico, precupación y compañía.

Al profesor Antonio Behn, por su ayuda en la confección de ejemplos por medio del programa computacional SAGE.

A mis padres, por su paciencia y cariño.

A CONICYT, por la beca de postgrado otorgada durante los primeros cuatro años de mi estadía en el programa.

Resumen

En este trabajo tratamos con álgebras conmutativas sobre un cuerpo F que satisfacen la identidad polinomial de grado cuatro

$$\beta\{(x^2y)x - ((xy)x)x\} + \gamma\{x^3y - ((xy)x)x\} = 0 \tag{1}$$

para $(\beta, \gamma) \neq (0,0), (\beta, \gamma) \in F \times F$. Estas álgebras se llaman Casi-Jordan Generalizadas, y estudiaremos sus representaciones suponiendo que $\text{char}(F) \neq 2, 3, 5$ y que éstas contienen un elemento idempotente $e \neq 0$.

Primero que nada, dada un álgebra Casi-Jordan Generalizada A y un espacio vectorial M sobre F, encontramos condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación lineal $\rho : A \to End(M)$ sea una representación de A. A partir de este resultado se consigue una descomposición del módulo M, análoga a la descomposición de Peirce de A. Ocupando esta descomposición y la descomposición de Peirce de A, se describe completamente la acción de A sobre el módulo M.

Después de esto, como el núcleo de una representación no es necesariamente un ideal de A, encontramos condiciones suficientes para que lo sea. Se estudian también otras propiedades de los elementos de dicho núcleo. Para el caso de álgebras Casi-Jordan Generalizadas simples se sabe que si $\beta \neq 0$ o si $\beta + 3\gamma \neq 0$, ellas son asociativas. Por otro lado se sabe también que si $\beta + 3\gamma = 0$, las álgebras son de Jordan y en caso $\beta = 0$, se prueba que las representaciones sobre álgebras simples son fieles. Finalmente estudiamos los módulos irreducibles sobre A, llegando en algunos casos estudiados a la conclusión que ser un módulo irreducible implica ser asociativo.

Abstract

In this work we deal with commutative algebras over a field F that satisfy the identity

$$\beta\{(x^2y)x-((xy)x)x\}+\gamma\{x^3y-((xy)x)x\}=0 \tag{1}$$

for $(\beta,\gamma)\neq(0,0), (\beta,\gamma)\in F\times F$. These type of algebras are called Generalized Almost-Jordan algebras, and we study their representations with the assumption that $\mathrm{char}(F)\neq 2,3,5$ and that they contain an idempotent $e\neq 0$.

First, given a Generalized Almost-Jordan algebra A and a vector space M over F, we find necessary and sufficient conditions for a linear application $\rho: A\to End(M)$ to be a representation of A. Through this result we obtain a decomposition of the module M analogue to Peirce decomposition of A. Using this decomposition and Peirce decomposition of A, we describe completely the action of A over the module M.

After that, since the kernel of a representation is not an ideal of A we find sufficient conditions for which this kernel is an ideal of A. We also study other properties of the elements of this kernel. For simple Generalized Almost-Jordan algebras it is known that if $\beta+3\gamma\neq 0$ or $\beta\neq 0$, they are associative algebras. On the other hand, it is also known that if $\beta+3\gamma=0$, they are Jordan algebras and in the case $\beta=0$, we prove that representations over simple algebras are faithful. Finally we study the irreducible modules of A, and we prove that in some cases to be an irreducible module implies to be an associative module.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

Hasta mediados del siglo XIX sólo se conocía la existencia de álgebras con productos asociativos y generalmente con elemento identidad, esto cambia cuando en 1845 el matemático británico Arthur Caley construye el álgebra de octoniones, la cual tiene dimensión 8 sobre $\mathbb{R}$ y es no asociativa. Años más tarde el matemático noruego Sophus Lie estudiando ecuaciones defirenciales define las álgebras de Lie, las cuales además de no ser necesariamente asociativas, no tienen identidad.

En 1934 el físico alemán J.P. Jordan, intentando dotar la mecánica cuántica de formalismos matemáticos, definió un tipo de álgebras conmutativas pero no asociativas y que satisfacen la identidad polinomial de grado cuatro $(x^2y)x = x^2(yx)$. Las álgebras de ese tipo fueron llamadas álgebras de Jordan y desde entonces fueron estudiadas por gran cantidad de matemáticos. Entre ellos ellos es importante destacar el trabajo de A. A. Albert (1939)[1] quien formuló numerosos teoremas respecto de la estructura de álgebras de Jordan.

Tomando en cuenta todas estas construcciones, fue que se hizo necesaria una teoría general sobre álgebras no asociativas. Ya dentro de esta nueva etapa en el estudio de dichas álgebras, grande ha sido el aporte de J. M. Osborn en lo que concierne a la teoría y estudio de identidades y Variedades. De hecho las álgebras con las que trabajaremos más adelante, nacen a partir de un resultado de J. M. Osborn. En efecto éste demostró en [20] que dada una álgebra A conmutativa (no asociativa) con unidad sobre un cuerpo de característica distinta a 2 ó 3, y que satisface una identidad de grado 4 o menor no implicada por la identidad conmutativa, entonces A satisface una de las siguientes identidades polinomiales:

(i) $((xx)x)x = (xx)(xx)$

(ii) $3((xx)y)x - ((xx)x)y - 2((xy)x)x = 0$

(iii) $2((yy)x)x - 2((yx)y)x - 2((yx)x)y + 2((xx)y)y - (xx)(yy) - (xy)(xy) = 0$

En 1988 este resultado fue generalizado por L. Carini, I. R. Hentzel y G. M. Piacentini-Cattaneo en [7], donde demostraron que toda álgebra conmutativa (no necesariamente con unidad) sobre un cuerpo de característica distinta de 2 ó 3, y que satisface una identidad de grado 4 o menor no implicada por la identidad conmutativa, entonces satisface una de las siguientes identidades polinomiales:

(i) $\beta(xx)(xx) + \gamma((xx)x)x = 0$

(ii) $2\beta\{(xy)(xy) - (xx)(yy)\} + \gamma\{((xy)x)y + ((xy)y)x - ((yy)x)x - ((xx)y)y\} = 0$

(iii) $\beta\{((xx)y)x - ((xy)x)x\} + \gamma\{((xx)x)y - ((xy)x)x\} = 0$

(iv) $((xy)z)t - ((xy)t)z + ((yt)x)z - ((yt)z)x + ((yz)t)x - ((yz)x)t = 0$

donde β y γ son elementos fijos del cuerpo, no ambos nulos. Con el objeto de estudiar la estructura de cualquier álgebra conmutativa que satisfaga una identidad polinomial de grado menor o igual a cuatro, el presente trabajo estudia la estructura de las álgebras que satisfacen las identidades pertenecientes a la tercera de estas familias.

1.2. Conceptos y definiciones básicas

Definición 1.2.1 *Sea F un cuerpo. Una F-álgebra o un álgebra sobre F es un F-espacio vectorial A, sobre el cual se define una aplicación F-bilineal*

$$\begin{aligned} A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

denotada por yuxtaposición, y llamada el producto del álgebra o la multiplicación del álgebra.

Definición 1.2.2 *Sea A una F-álgebra y sean $x, y, z \in A$. Definimos el asociador de los elementos x, y, z por $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$, y el conmutador de los elementos x, y por $[x, y] := xy - yx$.*

Trabajaremos con álgebras conmutativas no necesariamente asociativas, es decir que satisfacen la ley $[x, y] = 0, \quad \forall\, x, y \in A$, pero no necesariamente satisfacen la ley asocitiva $(x, y, z) = 0, \quad \forall\, x, y, z \in A$.

Para cada elemento x de un álgebra no asociativa y conmutativa A, definimos recursivamente las potencias principales de x como sigue:

$$x^1 = x, \qquad x^{i+1} = x^i x, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

1.3. Variedades y Linealización

Un magma $\mathcal{N}$ es un conjunto no vacío dotado de una operación binaria. Si X es un conjunto no vacío (llamado conjunto de símbolos), llamaremos $\mathcal{N}\{X\}$ al conjunto de todas las palabras de largo finito que se pueden formar usando los elementos de X e indicando con paréntesis el orden de cada yuxtaposición.

Diremos que dos palabras en $\mathcal{N}\{X\}$ son iguales si coinciden tanto en los elementos de X que la conforman, como en el orden de los elementos y la posición de los paréntesis.

Ejemplo 1.3.1 *Sea $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ entonces $x_1, x_2(x_1x_3), (x_2x_1)x_3$ son tres elementos distintos de $\mathcal{N}\{X\}$*

Ejemplo 1.3.2 *$x_1x_3x_2$ no está en $\mathcal{N}\{X\}$ ya que no hay paréntesis indicando en que orden se realizó la yuxtaposición.*

De esta manera $\mathcal{N}\{X\}$ con la operación yuxtaposición forma un magma, el cual es conocido como *magma libre sobre el conjunto X*.
Si z es un elemento de $\mathcal{N}\{X\}$ y $x_i \in X$, llamamos grado de x_i en z (denotado por $deg\{x_i, z\}$), al número de veces que aparece x_i en la palabra z. Usando esta notación definimos el *grado de* z por $deg\{z\} = \sum_{x_i \in X} deg\{x_i, z\}$.

Ejemplo 1.3.3 *Sea* $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ *entonces* $deg((x_1x_3)x_2)x_1 = 4$

Sea F un cuerpo, y denotemos por $F\{X\}$ al conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $\mathcal{N}\{X\}$ con coeficientes en F. Se define en $F\{X\}$ de manera natural una suma y un producto que esta dado por:

$$\Big(\sum_i \alpha_i z_i\Big)\Big(\sum_j \beta_j w_j\Big) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j z_i w_j \qquad \alpha_i, \beta_j \in F \text{ y } z_i, w_j \in \mathcal{N}\{X\}$$

Además podemos definir la ponderación $\cdot : F \times F\{X\} \to F\{X\}$, donde $\alpha \cdot \big(\sum_i \alpha_i z_i\big) = \sum_i \alpha\alpha_i z_i$. Así $F\{X\}$ junto a estas operaciones forma un álgebra sobre F no necesariamente asociativa.

Dado f un elemento de $F\{X\}$, como éste se puede expresar como combinación linael de elementos de $\mathcal{N}\{X\}$, diremos que f es homogénea si el grado de cada variable $x_i \in X$ es el mismo en todos los monomios. Por otro lado dado z un monomio en $\mathcal{N}\{X\}$, y sean $x_1, \ldots, x_m$ las variables de z tal que $n_i = deg\{x_i, z\} > 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Reordenando los x_i si es necesario de modo que $n_1 \geq \cdots \geq n_m$, diremos que z es de tipo $[n_1, n_2, \ldots, n_m]$. De la misma manera dado $f \in F\{X\}$ homogénea, podemos decir que f es del tipo $[n_1, n_2, \ldots, n_m]$ donde es $[n_1, n_2, \ldots, n_m]$ el tipo de todos de sus monomios.

1.3.4. Variedades de álgebras

Supongamos que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ y sea $\Phi = F\{X\}$. Diremos que $f \in \Phi$ es una identidad de la F- álgebra A, si $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$. También podemos decir que A satisface f, o que f es válida en A.

Definición 1.3.5 *Sea S un subconjunto de Φ, entonces la clase $V(S)$ formada por todas las F- álgebras que satisfacen todos los elementos de S, se llama Variedad de álgebras determinada por S.*

Para $f \in \Phi$, escribiremos $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ cuando f pertenezca a la subálgebra de $F\{X\}$ generada por $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Si $a_1, a_2, \ldots, a_m$ denotaremos por $f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ al elemento de A obtenido al reemplazar los x_i por los a_i en la representación de f como suma y productos de elementos de X.

Sea A una F-álgebra, si llamamos $f(A)$ al ideal de A generado por el conjunto $\{f(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_m \in A\}$, entonces de manera natural $A/f(A)$ satisface f. Por otro lado dado $\mu : A \to B$ un homomorfismo de álgebras, entonces $\mu(A)$ satisface f, si y sólo si $f(A)$ está en el núcleo de μ.

Sea $V = V(S)$ una variedad de álgebras, si consideramos $V(A) = \bigoplus_{f \in S} f(A)$, entonces $V(A)$ resulta ser un ideal de A, más aún es el menor ideal tal que $A/V(A) \in V$. Por otro lado dado $\mu : A \to B$ un homomoformismo donde $B \in V$ entonces $V(A) \subseteq Ker(\mu)$, y además $V(A)$ y $f(A)$ son invariantes bajo cualquier endomorfismo de A.

Mencionaremos las variedades más estudiadas en la teoría de álgebras no necesariamente asociativas:

- El conjunto $S = \{xy - yx\}$, define la variedad V(S) de álgebras conmutativas.
- El conjunto $S = \{(xy)z - x(yz)\}$, define la variedad V(S) de álgebras asociativas.
- El conjunto $S = \{x^2; (xy)z + (yz)x + (zx)y\}$, define la variedad V(S) de álgebras de Lie.
- El conjunto $S = \{xy - yx; (x^2y)x - x^2(yx)\}$, define la variedad V(S) de álgebras de Jordan.
- El conjunto $S = \{x^2y - x(xy); (yx)x - yx^2\}$, define la variedad V(S) de álgebras alternativas.

- El conjunto $S = \{x^{i+j} - x^i x^j |\ i,j \in \mathbb{N}\}$, define la variedad V(S) de álgebras asociativas en las potencias.

- El conjunto $S = \{(xy)x - x(yx)\}$, define la variedad V(S) de álgebras fexibles.

Definición 1.3.6 *Sea V es una variedad de F- álgebras, y sea $E \in V$ con un conjunto generador Y, E se llama álgebra V-libre si toda función de Y en A con $A \in V$, se puede extender a un homomorfismo de E en A.*

Proposición 1.3.7 *Sea $V = V(S)$ una variedad de F-álgebras no trivial, con $S \neq \{0\}$. Entonces existe una única álgebra V-libre (salvo isomorfismo) en V con un conjunto generador de cardinalidad c para cada cardinal c.*

No probaremos esta proposición, pero esencialmente se resume en que para cada $c \in \mathbb{N}$ el álgebra libre única con conjunto generador de cardinalidad c, se define naturalmente como $E_c = F\{X\}/V(F\{X\})$, donde el conjunto X tiene cardinalidad c.

1.3.8. Linealización

Sea $f(x_1, \ldots, x_m) \in F$ y sea y un elemento en X distinto de los x_i. Entonces sustituyendo x_i por $x_i + y$ y expandiendo tenemos:

$$f(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_m) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ik}(x_1, \ldots, x_m, y)$$

donde f_{ik} es la suma de todos los términos con grado de y igual a k. Esta suma es finita ya que $f_{ik} = 0$ cuando k es mayor que el más grande de los grados de x_i en los monomios de $f(x_1, \ldots, x_m)$.

Definimos el operador $\delta_i^k(y)$ actuando sobre f como sigue:

$$\delta_i^k(y)(f(x_1, \ldots, x_m)) = f_{ik}(x_1, \ldots, x_m, y)$$

es claro que el operador $\delta_i^k(y)$ es lineal. Por otra lado se puede ver fácilmente que $\delta_i^k(y)(f)$ reemplaza cada monomio de f, por la suma de todas las formas en que se pueden reemplazar k de los x_i por y. Por lo cual cada monomio f_j de f se transforma en una suma de $\binom{d}{k}$ monomios con $d = deg\{x_i, f_j\}$.

Ejemplo 1.3.9 *Sea* $f(x_1, x_2) = (x_1^2 x_2)x_1 - x_1^2(x_2 x_1)$, *entonces*

- $\delta_1^1(y)(f) = ((x_1 y)x_2)x_1 + ((y x_1)x_2)x_1 + (x_1^2 x_2)y - (x_1 y)(x_2 x_1) - (y x_1)(x_2 x_1) - x_1^2(x_2 y)$
- $\delta_1^2(y)(f) = ((y^2)x_2)x_1 + ((y x_1)x_2)y + ((x_1 y)x_2)y - (y^2)(x_2 x_1) - (y x_1)(x_2 y) - (x_1 y)(x_2 y)$

Definición 1.3.10 *Sea* $f(x_1, \ldots, x_m) \in F$ *y supongamos que* x_i *tiene grado mayor que* k *en al menos un monomio de* f, *entonces* $\delta_i^k(y)(f)$ *se llama linealización simple de f.*

Una identidad g que es obtenida a partir de aplicar una o más linealizaciones simples a f, se llama *linealización de* f. Una linealización en la que cada monomio no tiene elementos de grado mayor a 1, se llama *linealización completa.*

La propiedad más importante sobre las linealizaciones, es que dada un álgebra A que satisface f, entonces A satisface todas las linealizaciones de f. Lo que se expresa formalmente en el siguiente Teorema, ver [19], pag. 180.

Teorema 1.3.11 *Sea* F *un cuerpo de característica cero o mayor que* n, *y sea* V=$V(S)$ *una variedad de* F*-álgebras determinada por un conjunto* S *de identidades, cuyo grado en cada* $x_i \in X$ *no es mayor que* n. *Entonces* V *es igual a la variedad* $V' = V(S')$, *donde* S' *es el conjunto de todas las linealizaciones completas de las identidades de* S.

1.4. Bimódulos y birrepresentaciones

Sea A una F-álgebra, M un espacio vectorial sobre F, y supongamos que tenemos un par de aplicaciones bilineales $(a, m) \to a \cdot m$, $(a, m) \to m \cdot a$ de $A \times M$ en M. Si consideramos el espacio vectorial $A \oplus M$ con el siguiente producto

$$(a + m)(b + n) = ab + a \cdot n + m \cdot b$$

entonces $A \oplus M$ es un álgebra con $M^2 = \{0\}$, y es llamada extensión de A por aplicaciones bilineales.

De aquí hasta el final de la sección consideraremos que $S \subseteq F\{X\}$, y $V(S)$ es la variedad de álgebras que determinada por S.

Definición 1.4.1 *Sea A un elemento de $V(S)$ y M un F-espacio vectorial. Sean $(a,m) \to a \cdot m$ y $(a,m) \to m \cdot a$, dos aplicaciones bilineales de $A \times M$ en M. Diremos que M junto a las dos aplicaciones bilineales es un S-bimódulo para A o que M es un A-bimódulo, si $A \oplus M \in V(S)$.*

Observación 1.4.2 *Dada una aplicacion lineal $\rho : A \to End(M)$, si definimos $f_\rho : A \times M \to M$ por $f(a,m) = \rho(a)(m)$, entonces f es bilineal. De la misma forma, dada una aplicación bilineal $f : A \times M \to M$, y definiendo $\rho_f : A \to End(M)$ por $\rho_f(a)(m) = f(a,m)$, se obtiene que ρ_f es lineal. Llamaremos a f_ρ la aplicación bilineal asociada a ρ, y a ρ_f la aplicación lineal asociada a f.*

Definición 1.4.3 *Sea A un elemento de $V(S)$ y M un F-espacio vectorial. Un par de aplicaciones lineales (μ, ρ) de A en $End(M)$ es llamada una birrepresentación del álgebra A en la variedad $V(S)$, si y sólo si el álgebra $A \oplus M \in V(S)$ con multiplicación:*

$$(a+m)(b+n) = ab + \mu(a)(n) + \rho(b)(m) \quad \forall a, b \in A, m, n \in V$$

Dada una birrepresentación (μ, ρ) de A en $V(S)$, si consideramos el F-espacio vectorial M con las aplicaciones bilineales asociadas a μ y ρ como ponderación izquierda y derecha respectivamente, se tiene que M es un A-bimódulo. Por otro lado si M es un A- bimódulo, y consideramos el par (S,T) como las aplicaciones lineales asociadas a la ponderación izquierda y derecha del bimódulo respectivamente, tenemos que (S,T) es una birrepresentación de A en $V(S)$. Por lo tanto dado un A-bimódulo se tiene un birrepresentación asociada y viceversa, por lo cual hablar de birrepresentaciones o bimódulos es esencialmente lo mismo.

Una simplificación importante es posible si $V(S)$ contiene sólo álgebras conmutativas (o anticonmutativas). Ya que $m \cdot a = a \cdot m$ (o $m \cdot a = -a \cdot m$) implica que $S(a) = T(a)$ o $(S(a) = -T(a))$, luego sólo una aplicación $S : a \to S(a)$ está involucrada en el par (S,T), y hablamos de módulos y representaciones (ver Jacobson [16], Schafer [27]). Este estudio se ha hecho para álgebras de Jordan [14][15][16], para álgebras alternativas [26][28], para álgebras de composición [18], para álgebras de Lie [13], para álgebras Casi Jordan o Lie Triple [29], para álgebras de Novikov [23], para álgebras de Berstein [6], para train álgebras de rango 3 [17], para álgebras de rango

3 [5], para álgebras de Malcev [8], para superálgebras de Malcev [9] y para nil álgebras derechas con nil-índice 4 y dimensión 4 [10].

Definición 1.4.4 *Dada $f(x_1, \ldots, x_n) \in S \subseteq F\{X\}$. Definimos el operador $D_i : F\{X\} \to F\{X\}$ por $D_i(x_1, \ldots, x_n, y)(f) := \delta_i^1(y)(f)$.*

Sabemos que

$$f(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{m_k} f_{ik}(x_1, \ldots, x_n, y)$$

donde $m_k = deg\{x_i, f\}$, y f_{ik} es la suma de todos los términos con grado de y igual a k. Luego

$$f(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, \ldots, x_n) + D_i(x_1, \ldots, x_n, y)(f) \ (mod(y)^2) \tag{1.1}$$

donde (y) es el ideal generado por y en $F\{X\}$. Mas aún si consideramos el conjunto $Y = \{y_i\}_1^n$, entonces de (1.1) se obtiene que

$$f(x_1 + y_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n + y_n) \equiv f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} g_i \ (mod(H)^2) \tag{1.2}$$

donde $g_i = D_i(x_1, \ldots, x_n, y_i)(f)$ y H es el ideal generado por Y en $F\{X\}$.

Esto nos lleva al siguiente resultado

Teorema 1.4.5 *Sea A una F-algebra en una variedad $V(S)$, M un F-espacio vectorial, y (μ, ρ) un par de aplicaciones lineales de A en $End(M)$. Entonces el par (μ, ρ) es una birrepresentación de A o equivalentemente M es un A-bimódulo, si y sólo si $D_i(a_1, \ldots, a_n, m)(f) = 0$ en $A \oplus M$ para todo $a_i \in A$, $m \in M$ y para todo $f \in S$.*

Demostración. Supongamos que M es un A-bimódulo. Dado $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, tenemos que $f(a_1 + m_1, \ldots, a_n + m_n) = 0$ para todo $a_i + m_i \in A \oplus M$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$. En particular $f(a_1, \ldots, a_i + m, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_i \in A$ y $m \in M$, como $M^2 = \{0\}$ por (1.1) tenemos que $D_i(a_1, \ldots, a_n, m)(f) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Recíprocamente por (1.2) dado $f \in S$ se tiene que $f(a_1 + m_1, \ldots, a_i + m_i, \ldots, a_n + m_n) = \sum D_i(x_1, \ldots, x_n, y)(f) = 0$. Luego $f(b_1, \ldots, b_2) = 0$ para todo $b_i \in A \oplus M$, por lo tanto M es un A-bimódulo. ■

Ejemplo 1.4.6 *Sea $V(S)$ la variedad de las álgebras de Jordan. $S = \{f, g\}$, donde $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ y $g(x_1, x_2) = (x_1^2x_2)x_1 - x_1^2(x_2x_1)$. Entonces:*

$$D_1(f) = yx_2 - x_2y; \qquad D_2(f) = x_1y - yx_1$$

$$D_1(g) = ((x_1y + yx_1)x_2)x_1 + (x_1^2x_2)y - (x_1y + yx_1)(x_2x_1) - x_1^2(x_2y)$$

$$D_2(g) = (x_1^2y)x_1 - x_1^2(yx_1).$$

Luego M es un A- módulo si y sólo si se cumplen

- $a \cdot m = m \cdot a$
- $(a^2 \cdot m)a = a^2(a \cdot m)$
- $2((a \cdot m) \cdot b) \cdot a + (a^2b) \cdot m = 2(a \cdot m) \cdot (ab) + a^2 \cdot (b \cdot m)$

para todo $a, b \in A$ y $m \in M$. Equivalentemente $\rho : A \to End(M)$ es representación de A, si y sólo si

- $\rho_a\rho_{a^2} = \rho_{a^2}\rho_a$
- $2\rho_a\rho_b\rho_a + \rho_{a^2b} = 2\rho_{ab}\rho_a + \rho_{a^2}\rho_b$

para todo $a, b \in A$, donde $\rho_a = \rho(a) \in End(M)$ y $\rho_a\rho_b = \rho_a \circ \rho_b$.

Observación 1.4.7 *Sea A una F-álgebra en $V(S)$ y M un espacio vectorial. Dada una representación $\rho : A \to End(M)$, sabemos por Teorema 1.4.5 que se cumple que $D_i(a_1, \ldots, a_n, m)(f) = 0$ en $A \oplus M$, para todo $a_i \in A$, $m \in M$ y $f \in S$. Como se ve en el ejemplo anterior estas relaciones, implican identidades $f_{i\rho}(a_1, \ldots, a_n) = 0$ expresadas en función ρ, ya que $a \cdot m = \rho_a(m)$ en $A \oplus M$.*

Como se ve en la definición del operador D_i, éste es una linealización de f. Si consideramos $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, y suponemos que alguna variable x_k de $g = D_i(x_1, \ldots, x_n, y)(f)$ tiene grado mayor o igual a 2, luego podemos aplicar D_k a la identidad g, por lo tanto $D_k(x_1 \ldots, x_n, z, y)(g)$ también se cumplirá en $A \oplus M$ y por lo tanto se tendrá otra identidad $g_{k\rho}(x_1 \ldots, x_n, z)$ expresada como una relación del operador ρ. A esta última identidad le llamaremos linelización de $f_{i\rho}(a_1, \ldots, a_n)$. En la práctica este proceso simplemente es reemplazar cada expresión de la identidad f por la suma de las formas en que se puede reemplazar un elemento $b \in A$ en un elemento $a \in A$ de grado mayor que 2, fijado anteriormente. Por ejemplo la linealizacion de la expresión $\rho_a\rho_{a^2} = \rho_{a^2}\rho_a$ del Ejemplo 1.4.6, es $\rho_b\rho_{a^2} + 2\rho_a\rho_{ab} = 2\rho_{ab}\rho_a + \rho a^2\rho_b$.

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

1.5. Descomposición de Peirce

Comenzaremos con algunas notaciones. Sea b un elemento de un F-álgebra A, R_b denotara la aplicación de A en A, definida por $R_b(a) = ab$ para todo $a \in A$. Es inmediato que R_b es lineal y por lo tanto $R_b \in End(A)$. Escribiremos R_b en vez de $R(b)$, y R_bR_c en vez de $R_b \circ R_c$.

Sea V una variedad de álgebras conmutativas sobre un cuerpo F, sea f una identidad homogénea de tipo $[n, 1]$ que se satisface para las álgebras en V, y sean x e y las variables de f, de grado n y 1 respectivamente. Como V contiene sólo álgebras conmutativas, podemos modificar f intercambiando el orden de cualquier producto, en particular podemos reordenar los factores de cada monomio de f, para que esta quede expresada de la siguiente forma

$$f = \sum \alpha_i R(z_{im_i}) \dots R(z_{i2})R(z_{i1})(y) \tag{1.3}$$

donde cada $\alpha_i \in F$ y cada z_{ij} es un monomio en la varible x. Reemplazando cada z_{ij} en (1.3) por x obtenemos la nueva identidad

$$f' = \sum \alpha_i (R_x)^{m_i}(y)$$

la cual no es homogénea en general. Combinando los términos de f' que tienen monomios iguales, podemos escribir f' como sigue

$$f' = q(R_x)(y), \qquad \text{donde} \qquad q(R_x) = \sum \beta_j R_x^j, \qquad \text{con } \beta_j \in F. \tag{1.4}$$

El polinomio q obtenido de f de la forma anterior se llama *Polinomio de Peirce asociado a* f. La importancia de este polinomio es que para todo idempotente e en un álgebra A y para todo $a \in A$, se tiene que al sustituir e por x y a por y en (1.3) obtenemos igual resultado que al hacer estas sustituciones en (1.4), por lo tanto como f es una identidad en A, tenemos que $q(R_e)(a) = 0$ para todo $a \in A$, luego $q(R_x) = 0$ como elemento de $End(A)$. Es decir, para todo idempotente $e \in A$, la transformacion lineal R_e satisface la relación polinomial $q(R_e) = 0$.

Consideremos $F[t]$ el anillo de todos los polinomios asociativos en la variable t, con coeficientes en F. Esto es, si U es la variedad de las álgebras asociativas, entonces $F[t] = F\{t\}/U(F\{t\})$. Sabemos de teoría de anillos que dado $Q = \{q_1(t), q_2(t)\} \subseteq F[t]$ existe $q(t)$ máximo común divisor del conjunto Q, el cual es único salvo múltiplos de F. Además existen $s_1(t), s_2(t) \in F[t]$ tal que

$$q(t) = s_1(t)q_1(t) + s_2(t)q_2(t) \tag{1.5}$$

Más generalmente, para cualquier conjunto Q definimos

$$\overline{Q} = \{s_1(t)q_1(t) + \cdots + s_n(t)q_n(t) | s_1(t), \ldots, s_n(t) \in F[t], q_1(t), \ldots, q_n(t) \in Q\}$$

Entonces $\overline{Q}$ es un ideal de $F[t]$ que contiene Q. Como $F[t]$ es un dominio de ideales principales, entonces existe $q(t) \in \overline{Q}$ tal que $\overline{Q} = q(t)F[t]$. Luego $q(t)$ es un divisor común de Q tal que

$$q(t) = s_1(t)q_1(t) + \cdots + s_n(t)q_n(t) \tag{1.6}$$

para ciertos $s_1(t), \ldots, s_n(t) \in F[t]$ y $q_1(t), \ldots, q_n(t) \in Q$, y por lo tanto $q(t)$ es el máximo común divisor de Q. Este resultado sera ocupado para probar.

Lema 1.5.1 *Sea F un cuerpo, sea $G \subseteq F\{X\}$ un conjunto de identidades homogéneas de tipo [n,1], donde n recorre los enteros positivos, y A es un álgebra conmutativa sobre F que satisface los elementos de G, y contiene un idempotente $e \neq 0$. Si Q es el conjunto de los polinomios de Peirce asociados a las identidades de G y $q(t)$ es el m.c.d. de Q, entonces $q(R_e) = 0$ en A.*

Demostración. Sea U la variedad de todas las álgebras asociativas, como habíamos observado al comienzo $F[t]$ es una U-libre álgebra con un generador t. Por lo tanto existe un único homomorfismo φ de $F[t]$ en End(A) tal que $\varphi(t) = R_e$. Ya vimos que $q_i(R_e) = 0$ en A para cada $q_i(t) \in Q$, lo que implica que cada $q_i(t) \in Q$ esta en el kernel de φ. Luego, eligiendo $q_1(t), \ldots, q_n(t) \in Q$ y $s_1(t), \ldots, s_n(t) \in F[t]$ tal que se satisfaga (1.6), se tiene que $q(t)$ está en el kernel de φ. Por lo tanto $q(R_e) = 0$ en A. ■

Supongamos ahora que V es una variedad F-álgebras conmutativas, y que $K = V(F\{X\})$ es el ideal de $\Phi = F\{X\}$ correspondiente a V. Sea K_1 el conjunto de identidades homogéneas de K que tienen grado positivo en x_1, grado 1 en x_2, y grado 0 en x_i, para $i > 2$, y sea $Q \subseteq F[t]$ el conjunto de los polinomios de Peirce asociados a las identidades de K_1. Entonces si consideramos el m.c.d. $q(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} \ldots a_1t + a_0$ de Q, llamaremos *polinomio de Peirce de V* al polinomio mónico $q'(t) = \frac{1}{a_n}q(t)$.

Sea A un álgebra conmutativa sobre F, sea $e \in A$ un idempotente, y sea $q(t) \in F[t]$ un polinomio tal que $q(R_e) = 0$ en A. Si A tiene dimensión finita ocupando álgebra lineal, podemos descomponer A en una suma directa de espacios invariantes por R_e. De hecho este resultado se mantiene para espacios de dimensión infinita, lo que se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.5.2 *Sea F un cuerpo, sea A una F-álgebra conmutativa, sea $e \in A$ un idempotente, y sea $q(t)$ un polinomio tal que $q(R_e) = 0$. Si $q(t) = p_1(t)^{k_1} \ldots p_m(t)^{k_m}$, donde $p_1(t) \ldots p_m(t)$ son polinomios monicos irreducibles distintos de $F[t]$, entonces*

$$A = A_{(1)} \oplus A_{(2)} \oplus \cdots \oplus A_{(m)}$$

donde $A_{(i)} = \{a \in A \mid p_i(R_e)^{k_i}(a) = 0\}$.

Demostración. Consideremos los polinomios $q_i(t) = \frac{q(t)}{p_i(t)^{k_i}}$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Observemos que $q_1(t), \ldots, q_m(t)$ son relativamente primos, por lo tanto existen $s_1(t), \ldots, s_m(t) \in F[t]$ tal que

$$s_1(t)q_1(t) + \cdots + s_m(t)q_m(t) = 1 \tag{1.7}$$

Nuevamente ocupando φ el homomorfismo de $F[t]$ en $End(A)$, que envia t in R_e, tenemos que (1.7) implica la siguiente relación

$$I = s_1(R_e)q_1(R_e) + \cdots + s_m(R_e)q_m(R_e) \tag{1.8}$$

en A, donde I es el operador identidad. Definamos $A_{(i)} = q_i(R_e)(A)$, y notemos que

$$p_i(t)(R_e)^{k_i}(A_{(i)}) = p_i(t)(R_e)^{k_i}q_i(R_e)(A) = q(R_e)(A) = 0$$

luego $A_{(i)} \subseteq \{a \in A \mid p_i(R_e)^{k_i}(a) = 0\}$. Por otro lado dado $a \in A$ tal que $p_i(R_e)^{k_i}(a) = 0$, al evaluar Ec. (1.8) en a se tiene que $a = q_i(R_e)(s_i(R_e)(a))$, ya que $q_j(R_e)(a) = 0$ para todo $j \neq i$, luego tenemos que $a = q_i(R_e)(b)$ donde $b = s_i(R_e)(a)$, es decir $a \in A_{(i)}$. Por consiguiente $A_{(i)} = \{a \in A \mid p_i(R_e)^{k_i}(a) = 0\}$.

Para $a \in A$ sea $a_{(i)} = q_i(R_e)s_i(R_e)(a)$ para cada $i = 1, \dots, m$ y notemos que $a_{(i)} \in A_{(i)}$. Luego por (1.8) tenemos que

$$a = a_{(1)} + \cdots + a_{(m)}$$

para todo $a \in A$, lo que implica que $A = A_{(1)} + A_{(2)} + \cdots + A_{(m)}$. Para demostrar la suma directa, supongamos que existen elementos $b_{(i)} \in A_{(i)}$ para $1 \leq i \leq m$ tal que

$$0 = b_{(1)} + \cdots + b_{(m)} \tag{1.9}$$

y supongamos que $b_{(j)} \neq 0$ para algun j. Como $p_j(t)^{k_j}$ y $q_j(t)$ son relativamente primos, existen $r_1(t), r_2(t) \in F[t]$ tal que

$$1 = r_1(t)p_j(t)^{k_j} + r_2(t)q_j(t),$$

lo que implica

$$I = r_1(R_e)p_j(R_e)^{k_j} + r_2(R_e)q_j(R_e).$$

Aplicando el operador $r_2(R_e)q_j(R_e)$ a (1.9) vemos que b_i es aniquilado por el operador cuando $i \neq j$ ya que en este caso $p_i(t)^{k_i}$ divide a $q_j(t)$. Luego (1.9) con el operador aplicado se convierte en

$$0 = r_2(R_e)q_j(R_e)(b_{(j)}) = b_{(j)}[I - r_1(R_e)p_j(R_e)^{k_j}] = b_{(j)}$$

esto contradice la elección de j y por lo tanto se tiene que

$$A = A_{(1)} \oplus A_{(2)} \oplus \cdots \oplus A_{(m)}.$$

■

Corolario 1.5.3 *Sea F un cuerpo, sea A una F-álgebra conmutativa, sea $e \in A$ un idempotente. Supongamos que $q(t) \in F[t]$ es un polinomio tal que $q(R_e) = 0$ en A y tal que todas sus raíces $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ esten en F, y tengan multiplicidad k_i en $q(t)$ para $1 \leq i \leq m$ y si $A_{(i)} = \{a \in A \mid (R_e - I)^{k_i}(a) = 0\}$, entonces $A = A_{(1)} \oplus A_{(2)} \oplus \cdots \oplus A_{(m)}$.*

Definición 1.5.4 *La descomposición dada por el Teorema 1.5.2 o equivalentemente por el Corolario 1.5.3 se llama descomposición de Peirce de A respecto a e.*

Capítulo 2

Álgebras Casi-Jordan Generalizadas

Definición 2.0.5 *Sea A una F-álgebra conmutativa. Se dice que A es Casi-Jordan Generalizada si existen elementos β y γ en F, no ambos nulos, tal que*

$$\beta\{(x^2y)x - ((xy)x)x\} + \gamma\{x^3y - ((xy)x)x\} = 0 \tag{2.1}$$

para todo $x, y \in A$

Esta clase de álgebras aparece como una de las cuatro familias de álgebras commutativas sobre un cuerpo de característica distinta de $2, 3$ y que satisface una identidad polinomial de grado cuatro no implicada por la ley conmutativa, dadas por L. Carini, I. R. Hentzel y G. M. Piacentinni-Cattaneo en [7]. Cabe destacar que no hay una correspondencia biunivoca entre los pares $(\beta, \gamma) \in F \times F$ y las variedades determinadas por ellos, ya que A satisface (2.1) si y sólo si A satisface (2.1) para el par $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ para todo $\alpha \neq 0$ en F.

2.1. Ejemplos

Ahora veremos algunos ejemplos de álgebras Casi-Jordan Generalizadas, con idempotente $e \neq 0$

Ejemplo 2.1.1 *Sea A un álgebra sobre F con base $\{e, a\}$, y con tabla de multiplicación*

	e	a
e	e	0
a	0	e

Entonces A satisface Ec. (2.1) con $\beta = 1$ y $\gamma = -1$. Por otro lado se tiene que A no es Jordan, ya que $a^2(aa) \neq (a^2a)a$.

Ejemplo 2.1.2 *Sea A una álgebra sobre F con base $\{e, a\}$ con la siguiente tabla de multiplicación*

	e	a
e	e	$-e-a$
a	$-e-a$	$e+a$

Entonces A satisface Ec. (2.1) con $\beta = 0$ y $\gamma \neq 0$. Es decir se cumple $x^3y = ((xy)x)x$ para todo $x, y \in A$.

Ejemplo 2.1.3 *Sea A una F-álgebra con base $\{e, a, b\}$ con la siguiente tabla de multiplicación.*

	e	a	b
e	e	0	0
a	0	0	b
b	0	b	0

Entonces A satisface Ec. (2.1) con $\beta = 1$ y $\gamma = -1$.

2.2. Descomposición de Peirce

Dada A un algebra Casi-Jordan Generalizada con idempotente $e \neq 0$. Se conocen los siguientes resultados acerca de su descomposición de Peirce.

Primero que nada se tiene por [3] que el polinomio de Peirce correspondiente a esta variedad es $q(x) = x^3 - \frac{\beta}{\beta+\gamma}x^2 - \frac{\gamma}{\beta+\gamma}x$. Por lo cual se tiene lo siguiente

Lema 2.2.1 *Sea A un algebra Casi-Jordan Generalizada con β y γ satisfaciendo $0 \notin \{\gamma, \beta+\gamma, \beta+2\gamma\}$. Supongamos que A tiene un elemento idempotente $e \neq 0$. Entonces* supondremos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, ya que esta condición garantiza que el álgebra tenga una descomposición de Peirce. Además cabe destacar que no hay ningún resultado hasta el momento que asegure la existencia de idempotentes en esta variedad de álgebras, ni que se caracterizen los idempotentes de éstas.

Capítulo 3

Representaciones

Veremos ahora propiedades de las representaciones de las álgebras Casi-Jordan Generalizadas. Dado M un F- espacio vectorial, comenzamos dando una condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal $\rho : A \to End(M)$ sea una representacion de A.

Lema 3.0.3 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada, y $\rho : A \to End(M)$ una aplicación lineal. Entonces ρ es una representación de A, si y sólo si para todo $a, b \in A$ se cumplen*

$$(\beta + \gamma)\rho_a^3 - \beta\rho_a\rho_{a^2} - \gamma\rho_{a^3} = 0 \tag{3.1}$$

$$(\beta+\gamma)(\rho_a\rho_{ab}+\rho_a^2\rho_b+\rho_{(ab)a})-\beta(2\rho_a\rho_b\rho_a+\rho_{a^2b})-\gamma(2\rho_b\rho_a^2+\rho_b\rho_{a^2}) = 0 \tag{3.2}$$

donde $\rho_a := \rho(a) \in End(M)$, y para cualquier $a, b \in A$, $\rho_a \circ \rho_b$ se denotará por $\rho_a\rho_b$.

Demostración. Sabemos que ρ es representación de A si y sólo si, para todo $a + m, b + n \in A \oplus M$ se satisface la identidad (2.1). Es fácil verificar los siguientes cálculos

$$[(a+m)^2(b+n)](a+m) = (a^2b)a + 2\rho_a(\rho_b(\rho_a(m))) + \rho_a(\rho_{a^2}(n)) + \rho_{a^2b}(m)$$

$$[(a+m)^3](b+n) = a^3b + 2\rho_b(\rho_a(\rho_a(m))) + \rho_b(\rho_{a^2}(m)) + \rho_{a^3}(n)$$

$$\begin{aligned}[][(a+m)(b+n)](a+m)](a+m) &= ((ab)a)a + \rho_a(\rho_a(\rho_b(m))) + \\ &\quad \rho_a(\rho_{ab}(m)) + \rho_a^3(n) + \rho_{(ab)a}(m)\end{aligned}$$

Al reemplazar $x = a + m, y = b + n$ en (2.1) se obtiene

$$\beta\{2\rho_a(\rho_b(\rho_a(m)))+\rho_a(\rho_{a^2}(n))+\rho_{a^2b}(m)-\rho_a^2((\rho_b(m))-\rho_a(\rho_{ab}(m))-\rho_a^3(n)-\rho_{(ab)a}(m)\}$$
$$+\gamma\{2\rho_b(\rho_a^2(m))+\rho_b(\rho_{a^2}(m))+\rho_{a^3}(n)-\rho_a^2((\rho_b(m))-\rho_a(\rho_{ab}(m))-\rho_a^3(n)-\rho_{(ab)a}(m)\} = 0$$

Es claro que esta igualdad se cumple, si y sólo si son ciertas (3.1) y (3.2). ∎

Ejemplo 3.0.4 *Sea $A =< e, a >$ el álgebra dada en Ejemplo 2.1.2, y sea M un espacio vectorial, con dim $M = 2$. Definimos $\rho : A \to End(M)$ en la base de A por*

$$\rho_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \rho_a = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces ρ satiface las Ecs. (3.1) y (3.2), y por lo tanto ρ es una representación de A.

Observación 3.0.5 *Sean A_1 y A_2 álgebras Casi-Jordan Generalizadas, que cumplen Ec. (2.1) con los mismos escalares β, $\gamma \in F$. Entonces $A_1 \oplus A_2$ con producto $(a_1 + a_2)(a_1' + a_2') = a_1a_1' + a_2a_2'$, satisface Ec. (2.1) para los escalares β,γ, y por lo tanto es un álgebra Casi-Jordan Generalizada. Además ocupando Lema 3.0.3, concluimos que dada un homomorfismo $\rho : A_1 \oplus A_2 \to End(M)$, éste es representación de $A_1 \oplus A_2$ si y sólo si se cumplen*

(i) $\phi := \rho|_{A_1}$ *y* $\epsilon := \rho|_{A_2}$ *son representaciones de A_1 y A_2 respectivamente*

(ii) $(\beta+\gamma)(\phi_{a_1}\epsilon_{a_2}\phi_{a_1} + \epsilon_{a_2}\phi_{a_1}^2 + \phi_{a_1}\epsilon_{a_2}^2 + \epsilon_{a_2}\phi_{a_1}\epsilon_{a_2}) - \beta(\phi_{a_1}\epsilon_{a_2}^2 + \epsilon_{a_2}\phi_{a_1}^2) = 0$

(iii) $(\beta + \gamma)(\phi_{a_1}\epsilon_{a_2a_2'} + \epsilon_{a_2}\phi_{a_1a_1'} + \epsilon_{a_2}^2\phi_{a_1'} + \phi_{a_1}\epsilon\phi_{a_1'} + \epsilon_{a_2}\phi_{a_1}\phi_{a_1'} + \phi_{a_1}^2\epsilon_{a_2'} +$
$\epsilon_{a_2}\phi_{a_1}\epsilon_{a_2'} + \phi_{a_1}\epsilon_{a_2}\epsilon_{a_2'}) +$
$-2\beta(\phi_{a_1}\epsilon_{a_2'}\phi_{a_1}+\epsilon_{a_2}\phi_{a_1'}\phi_{a_1}+\epsilon_{a_2}\epsilon_{a_2'}\phi_{a_1}+\phi_{a_1}\phi_{a_1'}\epsilon_{a_2}+\phi_{a_1}\epsilon_{a_2'}\epsilon_{a_2}+\epsilon_{a_2}\phi_{a_1}\epsilon_{a_2})-$
$\gamma(2(\phi_{a_1'}\epsilon_{a_2}^2 +$
$\phi_{a_1'}\phi_{a_1}\epsilon_{a_2}+\phi_{a_1'}\epsilon_{a_2}\phi_{a_1}+\epsilon_{a_2'}\phi_{a_1}^2+\epsilon_{a_2'}\phi_{a_1}\epsilon_{a_2}+\epsilon_{a_2'}\epsilon_{a_2}\phi_{a_1})+\phi_{a_1'}\epsilon_{a_2^2}+\epsilon_{a_2'}\phi_{a_1^2}) = 0$

para todo $a_1, a_1' \in A_1$ y $a_2, a_2' \in A_2$.

Supongamos que existe elemento idempotente e en A. Al reemplazar $a = e$ en (3.1), se obtiene.

$$(\beta + \gamma)\rho_e^3 - \beta\rho_e^2 - \gamma\rho_e = 0 \tag{3.3}$$

Luego ρ_e satisface el polinomio $p(x) = (\beta+\gamma)x^3 - \beta x^2 - \gamma x = 0$. Si suponemos que $\beta + \gamma \neq 0$ podemos definir $\lambda = \frac{-\gamma}{\beta+\gamma} \in F$ y $p(x) = (\beta + \gamma)x(x-1)(x-\lambda)$. Si añadimos las condiciones $\gamma \neq 0, \beta + 2\gamma \neq 0$, se tiene que $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, por lo tanto $p(x)$ sólo tiene raíces simples. Por otro lado $p(x)$ es dividido por el polinomio minimal del operador ρ_e, por lo cual éste también tiene sólo raíces simples. Luego ρ_e es diagonalizable y tenemos

$$M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_\lambda$$

donde $M_i = \{m \in M | \rho_e(m) = im\}$, con $i \in \{0, 1, \lambda\}$. Esto se resume en la siguiente proposición.

Proposición 3.0.6 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con β y γ satisfaciendo $0 \notin \{\gamma, \beta+\gamma, \beta+2\gamma\}$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Entonces*

$$M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_\lambda.$$

Nuestro siguiente objetivo es obtener relaciones similares a las dadas en el Teorema 2.2.2 (M. Arenas), entre los espacios A_i y M_i, con $i \in \{0, 1, \lambda\}$. Con este fin procedemos a linealizar la ecuación (3.1). Tenemos

$$(\beta+\gamma)(\rho_a\rho_b\rho_a + \rho_b\rho_a^2 + \rho_a^2\rho_b) - 2\beta\rho_a\rho_{ab} - \beta\rho_b\rho_{a^2} - 2\gamma\rho_{(ab)a} - \gamma\rho_{a^2b} = 0 \quad (3.4)$$

Además al restar (3.2) y (3.4), se obtiene

$$(\gamma-\beta)\{\rho_a\rho_b\rho_a + \rho_a\rho_{ab} - \rho_b\rho_a^2 - \rho_{(ab)a}\} + (\beta+\gamma)\{2\rho_a^2\rho_b - \rho_b\rho_{a^2} - \rho_{a^2b}\} = 0. \quad (3.5)$$

Teorema 3.0.7 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con β y γ satisfaciendo $0 \notin \{\gamma, \beta+\gamma, \beta+2\gamma\}$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Entonces tenemos las siguientes relaciones entre los espacios A_i y M_i:*

$$A_0 \cdot M_0 \subseteq M_0,\ A_0 \cdot M_1 = \{0\},\ A_0 \cdot M_\lambda \subseteq M_\lambda$$

$$A_1 \cdot M_0 = \{0\},\ A_1 \cdot M_1 \subseteq M_1,\ A_1 \cdot M_\lambda \subseteq M_\lambda$$

$$A_\lambda \cdot M_0 \subseteq M_\lambda,\ A_\lambda \cdot M_1 \subseteq M_\lambda,\ A_\lambda \cdot M_\lambda = M_0 \oplus M_1$$

Más aún, si añadimos las condiciones $\beta \neq 0$ y $\beta + 3\gamma \neq 0$, entonces $A_0 \cdot M_\lambda = A_\lambda \cdot M_0 = \{0\}$ y $A_\lambda \cdot M_\lambda = \{0\}$, donde $\lambda = \frac{-\gamma}{\beta+\gamma}$.

Demostración.

Consideremos el álgebra $S = A \oplus M$, por definición de representación se tiene que S cumple Eq. (2.1) para el mismo par $(\beta, \gamma) \in F \times F$ con el cual A satisface ésta. Además e sigue siendo un idempotente en S, por lo tanto como suponemos $0 \notin \{\gamma, \beta + \gamma, \beta + 2\gamma\}$, la descomposición de Peirce de S relativa a e es $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_\lambda$, donde $S_i = \{a+m \in S \mid e(a+m) = i(a+m)\}$ para $i = 0, 1, \lambda$.

Por otro lado afirmamos que $A_i = S_i \cap A$ y $M_i = S_i \cap M$, en efecto $S_i \cap A = \{a+m \in S \mid e(a+m) = i(a+m)\} \cap A = \{a \in A \mid ea = ia\} = A_i$, y análogamente se tiene que $M_i = S_i \cap M$. Sabíamos por Teorema 2.2.2 que se cumplen las siguientes relaciones entre los espacios S_i

$$(S_0)^2 \subseteq S_0, \quad (S_1)^2 \subseteq S_1, \quad (S_\lambda)^2 \subseteq S_0 \oplus S_1$$
$$S_\lambda S_0 \subseteq S_\lambda, \quad S_\lambda S_1 \subseteq S_1, \quad S_0 S_1 = \{0\}$$

de estas relaciones se concluye que

$A_0 \cdot M_0 = (S_0 \cap A)(S_0 \cap M) \subseteq (S_0 \cap M) = M_0$

$A_1 \cdot M_1 = (S_1 \cap A)(S_1 \cap M) \subseteq (S_1 \cap M) = M_1$

$A_\lambda \cdot M_\lambda = (S_\lambda \cap A)(S_\lambda \cap M) \subseteq (S_0 \cap M) \oplus (S_1 \cap M) = M_0 \oplus M_1$

$(S_0 \cap A)(S_1 \cap M) = (S_0 \cap M)(S_1 \cap A) = \{0\}$, es decir $A_0 \cdot M_1 = A_1 \cdot M_0 = \{0\}$.

$A_\lambda \cdot M_1 = (S_\lambda \cap A)(S_1 \cap M) \subseteq (S_\lambda \cap M) = M_\lambda$, similarmente se tiene que $A_1 \cdot M_\lambda \subseteq M_\lambda$.

$A_\lambda \cdot M_0 = (S_\lambda \cap A)(S_1 \cap M) \subseteq (S_\lambda \cap M) = M_\lambda$, análogamente se tiene que $A_0 \cdot M_\lambda \subseteq M_\lambda$.

Finalmente si agregamos las condiciones $\beta \neq 0$ y $\beta + 3\gamma \neq 0$, se tiene que $(S_\lambda)^2 = S_0 S_\lambda = \{0\}$, de lo cual se concluyen las relaciones $A_0 \cdot M_\lambda = A_\lambda \cdot M_0 = \{0\}$ y $A_\lambda \cdot M_\lambda = \{0\}$. ∎

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

3.1. Propiedades del núcleo de una representación

Observación 3.1.1 *Sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A y sea $K := Ker(\rho) = \{a \in A \mid \rho_a = 0\}$. Sabemos por definición que ρ es una función lineal, luego solamente podemos asegurar que K es un subespacio de A, pero no podemos decir más respecto a su estructura, por ejemplo si éste es subálgebra o ideal de A (lo que se podría asegurar si ρ fuese un homomorfismo de álgebras). En efecto, si consideramos el álgebra descrita en el Ej. 2.1.1, y definimos $\rho : A \to End(M)$ por $\rho(e) = id_M$ y $\rho(a) = 0$, ρ resulta ser una representación de A, ya que satisface Ecs. (3.1) y (3.2). Por otro lado tenemos que $K =< a >$, y $\rho(a^2) = \rho(e) = id_M$, por lo tanto K no es un ideal de A, más aún no es subálgebra.*

Esto motiva a estudiar propiedades del conjunto K, y de sus elementos. Con este fin procedemos a linealizar las Ec. (3.2) y (3.4).

$$(\beta+\gamma)(\rho_c\rho_{ab} + \rho_a\rho_{cb} + \rho_a\rho_c\rho_b + \rho_c\rho_a\rho_b + \rho_{(ab)c} + \rho_{(cb)a}) - \\ 2\beta(\rho_a\rho_b\rho_c + \rho_c\rho_b\rho_a + \rho_{(ac)b}) - 2\gamma(\rho_b\rho_a\rho_c + \rho_b\rho_c\rho_a + \rho_b\rho_{ac}) = 0 \quad (3.6)$$

$$(\beta+\gamma)(\rho_c\rho_b\rho_a + \rho_a\rho_b\rho_c + \rho_b\rho_a\rho_c + \rho_b\rho_c\rho_a + \rho_c\rho_a\rho_b + \rho_a\rho_c\rho_b) - \\ 2\beta(\rho_c\rho_{ab} + \rho_a\rho_{cb} + \rho_b\rho_{ac}) - 2\gamma(\rho_{(ab)c} + \rho_{(cb)a} + \rho_{(ac)b}) = 0 \quad (3.7)$$

Ademas si intercambiamos a y b en Ec. (3.6), se obtiene una nueva identidad

$$(\beta+\gamma)(\rho_c\rho_{ab} + \rho_b\rho_{ca} + \rho_b\rho_c\rho_a + \rho_c\rho_b\rho_a + \rho_{(ab)c} + \rho_{(ca)b}) - \\ 2\beta(\rho_b\rho_a\rho_c + \rho_c\rho_a\rho_b + \rho_{(bc)a}) - 2\gamma(\rho_a\rho_b\rho_c + \rho_a\rho_c\rho_b + \rho_a\rho_{bc}) = 0 \quad (3.8)$$

Proposición 3.1.2 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con β y γ satisfaciendo $0 \notin \{\beta, \gamma, \beta+\gamma, \beta+2\gamma, \beta+3\gamma, 3\beta+5\gamma, \}$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$. Sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Si ρ_e es inyectiva, entonces K es ideal de A.*

Demostración. Para probar que K es un ideal de A, basta verificar que $A_iK \subseteq K$, para $i = 0, 1, \lambda$. Para comenzar, es fácil ver que $A_0K \subseteq K$, en efecto por hipótesis tenemos que $M_0 = \{0\}$, y como para $a \in A_0$ y $b \in K$ se tiene que $ab \in A_0$, se concluye por Teorema 3.0.7 que $\rho_{ab} = 0$, por lo tanto $ab \in K$.

Por otro lado si consideramos $b \in K$ y $c = e$ en Ecs. (3.6), (3.7) y (3.8) obtenemos las siguientes ecuaciones respectivamente

$$\begin{aligned}
(\beta+\gamma)(\rho_e\rho_{ab} + \rho_a\rho_{eb} + \rho_{(ab)e} + \rho_{(eb)a}) - 2\beta(\rho_{(ae)b}) &= 0 \quad (3.9)\\
2\beta(\rho_e\rho_{ab} + \rho_a\rho_{eb}) + 2\gamma(\rho_{(ab)e} + \rho_{(eb)a} + \rho_{(ae)b}) &= 0 \quad (3.10)\\
(\beta+\gamma)(\rho_e\rho_{ab} + \rho_{(ab)e} + \rho_{(ea)b}) - 2\beta(\rho_{(be)a}) - 2\gamma(\rho_a\rho_{be}) &= 0 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

de la operación 2·(3.9)-(3.10)+(3.11) se obtiene la siguiente ecuación

$$(\beta+3\gamma)\rho_e\rho_{ab} + (3\beta+\gamma)(\rho_{(ab)e} - \rho_{(ae)b}) = 0 \qquad (3.12)$$

Supongamos ahora que $a \in A_1$, como podemos escribir $b = b_0 + b_1 + b_\lambda$, con $b_i \in A_i$ para $i = 0, 1, \lambda$. Tenemos que $ab = ab_1 + ab_\lambda$, luego al considerar $a \in A_1$ en Ec. (3.12) y al evaluar en $m \in M_1$ se obtiene lo siguiente.

$$(\beta+3\gamma)(\rho_{ab_1}(m) + \lambda\rho_{ab_\lambda}(m)) + (3\beta+\gamma)(\lambda\rho_{ab_\lambda}(m) - \rho_{ab_\lambda}(m)) = 0$$

como M_1 y M_λ son disjuntos se tiene que

$$(\beta+3\gamma)\rho_{ab_1}(m) = 0$$

$$(\beta+3\gamma)\lambda\rho_{ab_\lambda}(m) + (3\beta+\gamma)(\lambda\rho_{ab_\lambda}(m) - \rho_{ab_\lambda}(m)) = 0$$

por lo tanto como $(\beta+3\gamma) \neq 0$ y $(\beta+3\gamma)\lambda + (3\beta+\gamma)(\lambda-1) = -5\gamma - 3\beta \neq 0$, tenemos que $\rho_{ab}(m) = 0$, para todo $m \in M_1$. Análogamente si evaluamos en $m \in M_\lambda$ se obtiene que $\rho_{ab}(m) = 0$ y por lo tanto $ab \in K$.

Finalmente si suponemos $a \in A_\lambda$, tenemos que $ab = ab_1 \in A_\lambda$, luego al considerar $a \in A_\lambda$ en Ec. (3.12) y al evaluar en $m \in M_1$ se obtiene que $(\beta+3\gamma)\lambda\rho_{ab}(m) = 0$, por lo tanto $ab \in K$, lo que implica que $A_iK \subseteq K$ y por lo tanto K es ideal de A ■

Observación 3.1.3 *En la Proposición 3.1.2 anterior es de gran importancia las condiciones sobre los coeficientes β y γ. La prueba de esto es el ejemplo de representación dado en la Observación 3.1.1, ya que en este caso se tiene que $\rho_e = Id_M$, pero con $\beta + \gamma = 0$, y K resulta no ser un ideal.*

Veamos otras propiedades de los elementos de K

Proposición 3.1.4 *Para todo elementos $a, b, c \in K$ se cumple que*

(i) $(a,b,c) + (b,a,c) \in K$*, si* $\gamma = 0$

(ii) $J(a,b,c) \in K$*, si* $\gamma \neq 0$

donde $J(a,b,c) := (ab)c + (bc)a + (ca)b$.

Demostración. Para probar (i), consideremos $a, b, c \in K$ en Ec. (3.6), y se obtiene

$$(\beta+\gamma)(\rho_{(ab)c} + \rho_{(cb)a}) - 2\beta\rho_{(ac)b} = 0$$

como supusimos $\gamma = 0$, entonces $\beta \neq 0$ y por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}
\beta(\rho_{(ab)c} + \rho_{(cb)a}) - 2\beta\rho_{(ac)b} &= 0 \\
\rho_{(ab)c} + \rho_{(cb)a} - 2\rho_{(ac)b} &= 0 \\
\rho_{(ab)c} - \rho_{(ac)b} + \rho_{(cb)a} - \rho_{(ac)b} &= 0 \\
\rho_{(c,a,b)} + \rho_{(a,c,b)} &= 0 \\
\rho_{(c,a,b)+(a,c,b)} &= 0
\end{aligned}$$

lo que prueba (i). Por otro lado de manera análoga a la anterior, pero ahora ocupando la Ec. (3.7) y suponiendo que $\gamma \neq 0$, se obtiene directo (ii). ∎

Proposición 3.1.5 *K satisface las siguientes propiedades:*

(i) $A \cdot (K^2 \cdot M) = 0$*, si* $\gamma = 0$

(ii) $J(K, A, A) \subseteq K$*, si* $\beta = 0$

Demostración. Consideremos $a, c \in K$ y $b \in A$ en Ec.(3.7) y así

$$2\beta\rho_b\rho_{ac} - 2\gamma(\rho_{(ab)c} + \rho_{(cb)a}) + \rho_{(ac)b}) = 0$$

como $\gamma = 0$, entonces $\beta \neq 0$ y se tiene

$$\beta\rho_b\rho_{ac} = 0 \Rightarrow \rho_b\rho_{ac} = 0$$

lo que prueba (i). El caso (ii) es directo al ocupar Ec. (3.7), con $a \in K$ y $b, c \in A$. ∎

Ahora veremos algunas propiedades de K, en el caso en que $\beta + \gamma = 0$, es decir las álgebras que cumplen

$$(x^2y)x = x^3y \;\forall x, y \in A \tag{3.13}$$

Proposición 3.1.6 *Sea A álgebra de Casi-Jordan Generalizada, con $\beta+\gamma = 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ representación de A. Entonces K satisface las siguientes propiedades.*

(i) $A \cdot ((AK) \cdot M) = (A(AK)) \cdot M$

(ii) $(K, A, A) \subseteq K$

(iii) $K^3 \subseteq K$

(iv) $H = K + K^2$ *es subálgebra de* A.

Demostración. Para probar (i) consideramos $a \in K$ y $b, c \in A$ en Ec. (3.6), de lo cual se obtiene

$$(\beta+\gamma)(\rho_c\rho_{ab} + \rho_{(ab)c} + \rho_{(cb)a}) - 2\beta\rho_{(ac)b} - 2\gamma\rho_b\rho_{ac} = 0 \tag{3.14}$$

si suponemos $\beta + \gamma = 0$, tenemos que $\beta \neq 0$ y $\gamma \neq 0$, luego se obtiene directamente de (3.14)

$$\rho_{b(ac)} = \rho_b\rho_{ac}$$

lo que prueba (i). Para probar (ii) consideremos $a \in K$ y $b, c \in A$ en Ec. (3.8)

$$(\beta+\gamma)(\rho_c\rho_{ab} + \rho_b\rho_{ca} + \rho_{(ab)c} + \rho_{(ca)b}) - 2\beta\rho_{(bc)a} = 0$$

restémosle (3.14) a la ecuación anterior

$$(\beta+\gamma)(\rho_b\rho_{ca} + \rho_{(ca)b} - \rho_{(cb)a}) - 2\beta(\rho_{(bc)a} - \rho_{(ac)b}) = 0$$

si $\beta + \gamma = 0$, se obtiene

$$\rho_{(bc)a} - \rho_{(ac)b} = 0 \Rightarrow \rho_{(a,c,b)} = 0$$

lo que prueba (ii). Por otro lado, si consideramos $a, b, c \in K$ en Ec. (3.6), se obtiene directamente (iii).

Finalmente para probar (iv), debemos verificar que $H^2 \subseteq H$, es decir $K^2 + K^3 + K^3 + K^2K^2 \subseteq (K + K^2)$, como por (iii) se tiene que $K^3 \subseteq K$, luego sólo basta probar que $K^2K^2 \subseteq H$. Primero tenemos que $K^2K^2 \subseteq [K, K, K^2] + K^3K$, y ocupando (i) se obtiene $K^2K^2 \subseteq K + K^2 \subseteq K + K^2 = H$, por lo tanto H es una subálgebra. ■

Observación 3.1.7 *Ocupando lo hecho en la prueba de la parte (i) de la proposición anterior, pero esta vez suponiendo que $\gamma = 0$ y que $a, c \in K$ y $b \in A$, se obtiene de manera análoga a lo hecho en Proposición 3.1.4 (i) que $(a, b, c) + (b, a, c) \in K$.*

Gracias a lo probado en la parte (ii) de la Proposición 3.1.6, se tiene de manera análoga a lo hecho en [24, Lemma 1.1], que $L := \{k \in K \mid kA \subseteq K\}$ y $K + KA$ son ideales de A. Mas aún, L es el ideal más grande contenido en K, y $K + KA$ es el ideal más pequeño que contiene a K. Diremos que A es un álgebra *esencial*, si se cumple que $L = \{0\}$.

Definición 3.1.8 *Definimos el núcleo N del A-módulo M, como el conjunto*

$$N = \{n \in A \mid mx \cdot n = m(xn) = mn \cdot x, \quad \textit{para todo } m \in M, x \in A\}$$

Proposición 3.1.9 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada, con $\beta + \gamma = 0$, y sea M un A-módulo no trivial. Si A es esencial , entonces*

(i) $K \cap K^2 = \{0\}$ y $K \cap N = \{0\}$

(ii) N es subálgebra de A

Demostración. Sea $x \in K \cap K^2$ y $a \in A$, digamos $x = bc$ con $b, c \in K$, luego por Prop. 3.1.6 (i) tenemos que $(xa)m = a(xm) = 0$, por lo tanto $xa \in K$ para todo $a \in A$, es decir $x \in L$, lo que implica que $K \cap K^2 \subseteq L = \{0\}$. Por otro lado si $x \in K \cap N$, tenemos por definición del conjunto N, que $(xa)m = a(xm) = 0$, luego de manera ánaloga, se tiene que $K \cap N = \{0\}$

Dado $n_1, n_2 \in N$, queremos probar que $n_1n_2 \in N$. Al reemplazar $a = n_1, b = x, c = n_2$ en Ec. (3.6) se obtiene $(\rho_{n_1}\rho_x\rho_{n_2} + \rho_{n_2}\rho_x\rho_{n_1} + \rho_{(n_1n_2)x}) = (\rho_x\rho_{n_1}\rho_{n_2} + \rho_x\rho_{n_2}\rho_{n_1} + \rho_x\rho_{n_1n_2})$, y al evaluar en m,

$$\begin{aligned}
((n_1n_2)x)m &= -((n_1m)x)n_2 - ((mn_2)x)n_1 + ((n_1n_2)m)x + ((mn_2)n_1)x + \\
&\quad ((mn_1)n_2)x \\
&= -((n_1m)x)n_2 - ((mn_2)x)n_1 + ((mn_1)n_2)x + ((mn_2)n_1)x + \\
&\quad ((n_1n_2)m)x \\
&= ((n_1n_2)m)x = n_1(x(n_2m)) = n_1((mx)n_2) = n_1n_2(mx)
\end{aligned}$$

por lo tanto $n_1 n_2 \in N$, lo que prueba (ii). ■

Daremos otro resultado acerca el comportamiento de K pero en este caso, para cuando $\beta = 0$

Proposición 3.1.10 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\beta = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$ y que $(A_{-1})^2 \subseteq A_1$. Sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Si ρ_e es inyectiva, entonces K es ideal de A*

Demostración. Primero que nada sabemos que cuando $\beta = 0$, se tiene que $\lambda = -1$, y por lo tanto $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_{-1}$. Además se sabe por demostración del Teorema 2.2.2 en [3], que en este caso particular $A_0 A_{-1} = \{0\}$. Y por demostración de la Teorema 3.0.7 tenemos que $A_0 M_{-1} = A_{-1} M_0 = \{0\}$. Luego dado $a \in A_0$ y $b \in K$, como ρ_e inyectiva, es decir $M_0 = \{0\}$, se obtiene directamente $ab \in K$, ya que $ab \in A_0$ y $A_0 M_1 = A_0 M_{-1} = \{0\}$.

Por otro lado al considerar $\beta = 0$ en (3.12) obtenemos que

$$3\rho_e \rho_{ab} + \rho_{(ab)e} - \rho_{(ae)b} = 0 \tag{3.15}$$

para todo $b \in K$ y $a \in A$. Si consideramos $a \in A_1$ y escribimos $b = b_0 + b_1 + b_{-1}$ con $b_i \in A_i$, tenemos que $ab = ab_1 + ab_{-1}$, y por lo tanto

$$3\rho_e \rho_{ab_1} + 3\rho_e \rho_{ab_{-1}} + \rho_{(ab_1)e} + \rho_{(ab_{-1})e} - \rho_{ab_1} - \rho_{ab_{-1}} = 0$$

como $(A_1)^2 \subseteq A_1$ y $A_1 A_{-1} \subseteq A_{-1}$, obtenemos

$$3\rho_e \rho_{ab_1} + 3\rho_e \rho_{ab_{-1}} - \rho_{ab_{-1}} - \rho_{ab_{-1}} = 0$$

y al evaluar en $m \in M_1$ se tiene que

$$3\rho_e \rho_{ab_1}(m) + 3\rho_e \rho_{ab_{-1}}(m) - \rho_{ab_{-1}}(m) - \rho_{ab_{-1}}(m) = 0$$

luego como $\rho_{ab_1}(m) \in M_1$ y $\rho_{ab_{-1}}(m) \in M_{-1}$ se obtiene

$$\begin{aligned} 3\rho_{ab_1}(m) - 3\rho_{ab_{-1}}(m) - \rho_{ab_{-1}}(m) - \rho_{ab_{-1}}(m) &= 0 \\ 3\rho_{ab_1}(m) - 5\rho_{ab_{-1}}(m) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto como $3\rho_{ab_1}(m) \in M_1$ y $5\rho_{ab_{-1}}(m) \in M_{-1}$, se tiene que ambos terminos son cero simultánemente, luego como siempre suponemos $\mathrm{char} F \neq$

$2, 3, 5$ se concluye que $\rho_{ab}(m) = 0$ para todo $m \in M_1$. Análogamente se obtiene que $\rho_{ab}(m) = 0$ para todo $m \in M_{-1}$, y por lo tanto $ab \in K$.

Si consideremos $a \in A_{-1}$ se tiene que $ab = ab_1 + ab_{-1}$. Sabemos que $ab_1 \in A_{-1}$ y por hipotesis tenemos que $ab_{-1} \in A_1$, por lo tanto al reemplazar en Ec. (3.15) obtenemos

$$\begin{aligned} 3\rho_e\rho_{ab_1} + 3\rho_e\rho_{ab_{-1}} + \rho_{ab_{-1}} - \rho_{ab_1} - \rho_{ab_1} - \rho_{ab_{-1}} &= 0 \\ 3\rho_e\rho_{ab_1} + 3\rho_e\rho_{ab_{-1}} - 2\rho_{ab_1} &= 0 \end{aligned}$$

si evaluamos en $m \in M_1$ tenemos

$$\begin{aligned} 3\rho_e\rho_{ab_1}(m) + 3\rho_e\rho_{ab_{-1}}(m) - 2\rho_{ab_1}(m) &= 0 \\ 3\rho_{ab_{-1}}(m) - 5\rho_{ab_1}(m) &= 0 \end{aligned}$$

luego por el mismo argumento ocupado en el caso anterior se concluye que $3\rho_{ab_{-1}}(m) = 0$ y $5\rho_{ab_1}(m) = 0$, y por lo tanto $\rho_{ab}(m) = 0$ para todo $m \in M_1$. Finalmente si evaluamos en $m \in M_\lambda$ de manera similar se obtiene que $\rho_{ab_1}(m) = 0$ y $3\rho_{ab_{-1}}(m) = 0$, lo que implica que $\rho_{ab}(m) = 0$ para todo $m \in M_{-1}$. Por lo tanto $ab \in K$, y por consiguiente K es ideal de A. ■

3.2. Representaciones de álgebras simples

Sabemos por [7] que dada un álgebra A Casi-Jordan Generalizada simple, para β y γ tal que $\beta \neq 0$, $\beta + 3\gamma \neq 0$, entonces A es asociativa. Por otro lado en [20] se prueba que un álgebra Casi-Jordan (es decir cuando $\beta + 3\gamma = 0$) simple es Jordan. Por lo tanto sólo es interesante estudiar las álgebras Casi-Jordan Generalizadas simples cuando $\beta = 0$. En esta caso se sabe que existen álgebras simples no necesariamente asociativas. En efecto

Ejemplo 3.2.1 *Sea F un cuerpo con $car(F) \neq 2$. Consideremos $A = F \times F$ con suma y multiplicación por escalar usual, y con multiplicación definida por*

$$(a, b)(c, d) = (ac + bd\alpha, -ad - bc)$$

para $\alpha \neq 0$, $\alpha \in F$. Esta es un álgebra conmutativa y (1,0) es un idempotente distinto de cero. Probemos que A es simple. Sea I un ideal no cero de A, y sea $(a, b) \neq 0 \in I$. Luego $(1, 0)(a, b) = (a, -b) \in I$, y por lo tanto $(2a, 0) \in I$. Análogamente se tiene que $(0, 1)(a, b) = (b\alpha, -a) \in I$ y por condiguiente$(2b\alpha, 0) \in I$. Como $(a, b) \neq 0$ implica que $2a \neq 0$ o $2b\alpha \neq 0$, por lo cual I contiene un elmento $(x, 0)$ con $x \neq 0$. Pero entonces $(1, 0) \in I$, y por lo tanto $(r, s) = (1, 0)(r, -s) \in I$ para todo $(r, s) \in A$, lo que implica $A = I$.

Por otro lado si ponemos $\overline{(a, b)} = (a, -b)$, es fácil ver que se cumple la siguiente relación:

$$(wu)v = \overline{w}(u\overline{v}), \quad \forall w, u, v \in A$$

y por lo tanto

$$((yx)x)x = (\overline{y}(x\overline{x}))x = \overline{\overline{y}}((x\overline{x})\overline{x}) = y(\overline{x}(x\overline{x})) = y((xx)x)$$

luego A cumple (2.1) para $\beta = 0$ y además se tiene que $(1, 0)((1, 0)(a, b)) = (a, b)$ y $(1, 0)^2(a, b) = (a, -b)$, por lo cual A no es asociativa.

Proposición 3.2.2 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada para $\beta = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Si A es simple, entonces ρ es fiel.*

Demostración. Como A es simple por lo dicho al comienzo en Proposición 3.1.10 se tiene que A_0 es un ideal de A, por lo cual se concluye que $A = A_1 \oplus A_{-1}$, ya que $e \neq 0 \in A_1$. Luego se tiene que $A_{-1}^2 \subseteq A_1$, y por Proposición 3.1.10 se tiene que K es un ideal de A, como A es simple, luego $K = \{0\}$, es decir ρ es fiel. ∎

3.3. Casos especiales

En esta sección estudiaremos las representaciones para los casos excluidos en la Teorema 3.0.7. Veremos las relaciones que se cumplen entre los espacios dados por la descomposición de Peirce, sobre los subespacios en que se descompone el módulo M en cada caso.

3.3.1. Caso $\gamma = 0$

Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\gamma = 0$, es decir que cumple $(x^2y)x - ((xy)x)x = 0$, para todo $x, y \in A$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Para estas álgebras el polinomio minimal del operador $R_e : A \to A$, es el mismo que el ρ_e y esta dado por $p(t) = t^2(t-1)$, ver (3.3). Por lo cual se tiene que la descomposición de Peirce del álgebra es $A = A_0 \oplus A_1$, donde $A_0 = \{x \in A \mid (ex)e = 0\}$ y $A_1 = \{x \in A \mid (ex) = x\}$. De manera similar tenemos que $M = M_0 \oplus M_1$, donde $M_0 = \{m \in M \mid \rho_e^2(m) = 0\}$ y $M_1 = \{m \in M \mid \rho_e(m) = m\}$.

Además sabemos que se tiene las siguientes relaciones entre los subespacios de la descomposición de Peirce

$$A_0A_1 \subseteq A_0, \ (A_0)^2 \subseteq A_0$$

ver [7]. Al igual que en la Proposición 3.0.7, queremos obtener relaciones similares entre los espacios A_i y M_i, para $i = 0, 1$. Lo cual se resume en el siguiente resultado.

Lema 3.3.2 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\gamma = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Entonces se cumple lo siguiente:*

$$A_0 \cdot M_1 \subseteq M_0, \ A_1 \cdot M_0 \subseteq M_0, \ A_0 \cdot M_0 \subseteq M_0.$$

Demostración. Al igual que en Teorema 3.0.7, si consideramos el álgebra $S = A \oplus M$, por definición de representación se tiene que S cumple Eq. (2.1) para $\beta \neq 0$ y $\gamma = 0$. Además e es un idempotente en S, por lo tanto en este caso la descomposición de Peirce de S relativa a e es $S = S_0 \oplus S_1$, donde $S_0 = \{a+m \in S \mid e(e(a+m)) = 0\}$ y $S_1 = \{a+m \in S \mid e(a+m) = a+m\}$.

Por otro lado se tiene que $A_i = S_i \cap A$ y $M_i = S_i \cap M$, en efecto $S_1 \cap A = \{a+m \in S \mid e(a+m) = (a+m)\} \cap A = \{a \in A \mid ea = a\} = A_1$ y $S_0 \cap A = \{a \in a \mid e(ea) = 0\} = A_0$, análogamente se tiene que $M_i = S_i \cap M$. Además sabemos que se cumplen las siguientes relaciones entre los espacios S_i

$$S_0 S_1 \subseteq S_0,\ (S_0)^2 \subseteq S_0$$

de las cuales se concluye que

$A_0 \cdot M_0 = (S_0 \cap A)(S_0 \cap M) \subseteq (S_0 \cap M) = M_0$

$A_1 \cdot M_0 = (S_1 \cap A)(S_0 \cap M) \subseteq (S_0 \cap M) = M_0$ y similarmente se tiene que $A_0 \cdot M_1 \subseteq M_0$.

■

3.3.3. Caso $\beta + 2\gamma = 0$

Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\beta + 2\gamma = 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Para estas álgebras el polinomio minimal del operador $R_e : A \to A$, es el mismo que el de ρ_e y esta dado por $p(t) = t(t-1)^2$, ver (3.3). Por lo cual se tiene que la descomposición de Peirce del álgebra es $A = A_0 \oplus A_1$, donde $A_0 = \{x \in A \mid (ex) = 0\}$ y $A_1 = \{x \in A \mid (ex)e - 2(ex) + x = 0\}$. De manera similar tenemos que $M = M_0 \oplus M_1$, donde $M_0 = \{m \in M \mid \rho_e(m) = 0\}$ y $M_1 = \{m \in M \mid (\rho_e(m) - id(m))^2 = 0\}$.

Además sabemos que se tienen las siguientes relaciones entre los subespacios de la descomposición de Peirce

$$A_0 A_1 = \{0\},\ (A_0)^2 \subseteq A_0$$

ver [7]. Queremos obtener relaciones similares entre los espacios A_i y M_i, para $i = 0, 1$. Lo cual se resume en el siguiente resultado.

Lema 3.3.4 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\beta + 2\gamma = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Entonces se cumple lo siguiente:*

$$A_0 \cdot M_1 = A_1 \cdot M_0 = \{0\},\ A_0 \cdot M_0 \subseteq M_0$$

Demostración.

Consideremos el álgebra $S = A \oplus M$, por definición de representación se tiene que S cumple Eq. (2.1) para β y γ tal que $\beta + 2\gamma = 0$. Además e es un idempotente en S, por lo tanto en este caso la descomposición de Peirce de S relativa a e es $S = S_0 \oplus S_1$, donde $S_0 = \{a + m \in S \mid e(a + m) = 0\}$ y $S_1 = \{a + m \in S \mid e(e(a + m)) - 2e(a + m) + (a + m) = 0\}$.

De manera similar a lo visto en Lema 3.3.2 se tiene que $A_i = S_i \cap A$ y $M_i = S_i \cap M$. Además sabemos que se cumplen las siguientes relaciones entre los espacios S_i

$$S_0 S_1 = \{0\},\ (S_0)^2 \subseteq S_0$$

y por lo tanto se tiene que

$A_0 \cdot M_0 = (S_0 \cap A)(S_0 \cap M) \subseteq (S_0 \cap M) = M_0$

$A_1 \cdot M_0 = (S_1 \cap A)(S_0 \cap M) = \{0\}$, de la misma manera se tiene que $A_0 \cdot M_1 = \{0\}$.

■

3.3.5. Caso $\beta + \gamma = 0$

Sea M un espacio vectorial y $\rho : A \to End(M)$ una respresentación de A. Sabemos por (3.3) que el polinomio característico de ρ_e y R_e en este caso es $p(x) = x^2 - x$. Por lo tanto se tiene que la descomposición de Peirce del álgebra es $A = A_0 \oplus A_1$, donde $A_i = \{a \in A \mid ea = ia\}$ para $i = 0, 1$. Y de manera similar se tiene que $M = M_0 \oplus M_1$, donde $M_i = \{m \in M \mid \rho_e(m) = im\}$ para $i = 0, 1$.

Sabemos por [7] que $A_0 A_1 = \{0\}$ y $(A_1)^2 \subseteq A_1$, y probaremos relaciones similares entre los espacios A_i y M_i en el siguiente lema.

Lema 3.3.6 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\beta + \gamma = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación de A. Entonces tenemos las siguientes relaciones entre los espacios A_i y M_i:*

$$A_0 \cdot M_1 = A_1 \cdot M_0 = \{0\}; \ A_1 \cdot M_1 \subseteq M_1$$

Demostración.

Si consideramos el álgebra $S = A \oplus M$, se tiene que S cumple Eq. (2.1) para β y γ tal que $\beta + \gamma = 0$. Además e es un idempotente en S, por lo tanto en este caso la descomposición de Peirce de S relativa a e es $S = S_0 \oplus S_1$, donde $S_i = \{a + m \in S \mid e(a + m) = i(a + m)\}$ para $i = 0, 1$.

Al igual que en los casos anteriores se tiene que $A_i = S_i \cap A$ y $M_i = S_i \cap M$, y en este caso tenemos las siguientes relaciones entre los espacios S_i

$$S_0 S_1 = \{0\}, \ (S_1)^2 \subseteq S_1$$

y por lo tanto se tiene que

$A_1 \cdot M_1 = (S_1 \cap A)(S_1 \cap M) \subseteq (S_1 \cap M) = M_1$

$A_1 \cdot M_0 = (S_1 \cap A)(S_0 \cap M) = \{0\}$, de la misma manera se tiene que $A_0 \cdot M_1 = \{0\}$.

■

Capítulo 4

Módulos irreducibles

Sea A una F-algebra y $\rho : A \to End(M)$ una representación de A.

Definición 4.0.7 *Sea N subespacio vectorial de M, diremos que N es submódulo de M si y sólo si $A \cdot N \subseteq N$.*

Definición 4.0.8 *ρ es una representación irreducible, o equivalentemente que M es un módulo irreducible, si y sólo si $M \neq 0$ y no tiene submódulos no triviales.*

Proposición 4.0.9 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con β y γ satisfaciendo $0 \notin \{\beta, \gamma, \beta+\gamma, \beta+2\gamma, \beta+3\gamma\}$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación irreducible de A. Entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones*

(i) $M = M_\lambda$

(ii) $M = M_0$

(iii) $M = M_1$

donde $\lambda = -\frac{\gamma}{\beta+\gamma}$.

Demostración. Ocupando el Teorema 3.0.7, se obtiene fácilmente que M_0 y M_λ son submódulos de M, luego como M es irreducible, se tiene que $M = M_0$ ó $M_0 = \{0\}$, y por otro lado que $M = M_\lambda$ ó $M_\lambda = \{0\}$. De estas opciones nacen directamente las enumeradas anteriormente. ∎

Teorema 4.0.10 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con β y γ satisfaciendo $0 \notin \{\beta, \gamma, \beta+\gamma, \beta+2\gamma, \beta+3\gamma\}$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y que M es un A-módulo irreducible. Si $M = M_1$, entonces M es un módulo asociativo.*

Demostración. Primero que nada por Teorema 1.4.5 se concluye que M es asociativo si y sólo si se cumple que

$$
\begin{aligned}
(a, b, m) &= 0 \qquad \forall a, b \in A,\ m \in M && (4.1)\\
(a, m, b) &= 0 \qquad \forall a, b \in A,\ m \in M && (4.2)
\end{aligned}
$$

Por hipótesis se tiene que $M = M_1$ (es decir $\rho_e = id_M$). Debemos probar que se cumplen Ecs. (4.1) y (4.2). Dado $a, b \in A$ y $m \in M$, podemos escribir $a = a_0 + a_1 + a_\lambda$ y $b = b_0 + b_1 + b_\lambda$ con $a_i, b_i \in A_i$ para $i = 0, 1, \lambda$ y tenemos que

$$(a, b, m) = (a_0 + a_1 + a_\lambda, b_0 + b_1 + b_\lambda, m) = (a_1, b_1, m)$$

análogamente se tiene que $(a, m, b) = (a_1, m, b_1)$, luego para probar que M es asociativo, basta verificar que las Ecs. (4.1) y (4.2) se cumplen para todo $a, b \in A_1$ y $m \in M = M_1$. Para esto consideramos $a, b \in A_1$ y $c = e$ en Ec. (3.6) y tenemos

$$
\begin{aligned}
(\beta+\gamma)(3\rho_{ab} + 3\rho_a\rho_b) - 2\beta(\rho_a\rho_b + \rho_b\rho_a + \rho_{ab}) - 6\gamma(\rho_b\rho_a) &= 0\\
(\beta+3\gamma)\rho_{ab} + (\beta+3\gamma)\rho_a\rho_b - 2(\beta+3\gamma)\rho_b\rho_a &= 0\\
\rho_{ab} + \rho_a\rho_b - 2\rho_b\rho_a &= 0 \quad (4.3)
\end{aligned}
$$

Al intercambiar a y b en Ec. (4.3) se obtiene

$$\rho_{ab} + \rho_b\rho_a - 2\rho_a\rho_b = 0 \qquad (4.4)$$

Finalmente si restamos Ecs. (4.3) y (4.4) obtenemos que $\rho_a\rho_b = \rho_b\rho_a$, y por consiguiente se tiene que $\rho_{ab} = \rho_a\rho_b$. Es decir Ecs. (4.1) y (4.2) se cumplen para todo $a, b \in A_1$, y por lo tanto M es un módulo asociativo. ■

En el caso que $M = M_\lambda$ se cumple algo cercano a la asociatividad al agregar la condición $\beta - \gamma \neq 0$, en efecto se tiene el siguiente resultado

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

Teorema 4.0.11 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con β y γ satisfaciendo $0 \notin \{\beta, \gamma, \beta+\gamma, \beta+2\gamma, \beta+3\gamma, \beta-\gamma\}$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y que M es un A-módulo irreducible. Si $M = M_\lambda$, entonces en M se cumple que*

(i) $(a, m, b) = 0 \qquad \forall\, a, b \in A,\ m \in M$

(ii) $(ab)m = \lambda^{-1}a(bm) \qquad \forall\, a, b \in A,\ m \in M.$

Demostración. Por hipótesis se tiene que $M = M_\lambda$ (es decir $\rho_e = \lambda id$). Luego por Teorema 2.2.2 y Teorema 3.0.7, se concluye que basta verificar (i) y (ii) para todo $a, b \in A_1$ y $m \in M$. Al reemplazar $a, b \in A_1$ y $c = e$ en Ec. (3.6)

$$\begin{aligned}(\beta+\gamma)(\lambda\rho_{ab} + \rho_a\rho_b + 2\lambda\rho_a\rho_b + 2\rho_{ab}) - 2\beta(\lambda\rho_a\rho_b + \lambda\rho_b\rho_a + \rho_{ab}) \\ -2\gamma(2\lambda\rho_b\rho_a + \rho_b\rho_a) &= 0 \\ ((\beta+\gamma)(\lambda+2) - 2\beta)\rho_{ab} + ((\beta+\gamma)(2\lambda+1) - 2\beta\lambda)\rho_a\rho_b \\ -2(2\gamma\lambda + \gamma + \beta\lambda)\rho_b\rho_a &= 0 \\ \gamma\rho_{ab} + (\beta - \gamma - 2\beta\lambda)\rho_a\rho_b - 2((2\gamma+\beta)\lambda - (\beta+\gamma)\lambda)\rho_b\rho_a &= 0 \\ \gamma\rho_{ab} + (\beta - \gamma + 2\gamma + 2\gamma\lambda)\rho_a\rho_b - 2\gamma\lambda\rho_b\rho_a &= 0 \\ \gamma\rho_{ab} + (\beta + \gamma + 2\gamma\lambda)\rho_a\rho_b - 2\gamma\lambda\rho_b\rho_a &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Al intercambiar a y b en Ec. (4.5) se tiene

$$\gamma\rho_{ab} + (\beta + \gamma + 2\gamma\lambda)\rho_b\rho_a - 2\gamma\lambda\rho_a\rho_b = 0 \tag{4.6}$$

y al restar Ecs. (4.5) y (4.6)

$$\begin{aligned}(\beta + \gamma + 4\gamma\lambda)(\rho_a\rho_b - \rho_b\rho_a) &= 0 \\ \frac{(\beta+3\gamma)(\beta-\gamma)}{\beta+\gamma}(\rho_a\rho_b - \rho_b\rho_a) &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

como por hipotesis $(\beta + 3\gamma) \neq 0$ y $(\beta - \gamma) \neq 0$, tenemos que $\rho_a\rho_b = \rho_b\rho_a$, luego al reemplazar esto en Ec. (4.5)

$$\begin{aligned}\gamma\rho_{ab} + (\beta+\gamma)\rho_a\rho_b &= 0 \\ \lambda\rho_{ab} - \rho_a\rho_b &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

por lo tanto se tiene que $\rho_{ab} = \lambda^{-1}\rho_a\rho_b$, lo que concluye la demostración. ∎

Observación 4.0.12 *De la demostración del Teorema 4.0.10 se concluye que en general dada $\rho : A \to End(M)$ una representación de A no necesariamente irreducible, si se cumple $\rho_e = id$, entonces M es un módulo asociativo. Las propiedades dadas en el Teorema 4.0.11 también se cumplen para un módulo M no necesariamente irreducible, donde $\rho_e = \lambda id$.*

Observación 4.0.13 *En trabajos como [4], [5], [10] y [17] se prueba que para los distintos tipos de álgebras consideradas en éstos, sus módulos irreducibles son de dimensión uno. Lo cual nos hace preguntarnos si sucede algo parecido al trabajar con álgebras Casi-Jordan Generalizadas, o al menos ver bajo que condiciones se cumple eso. Supongamos que M es un módulo irreducible de A, y que $A_1 = Fe$. Por la Proposición 4.0.9 se tiene que M debe ser M_0 ó M_1 ó M_λ. En los 2 últimos se concluye que M es de dimensión uno. En efecto si $M = M_\lambda$, y fijamos $m \in M$ con $m \neq 0$, se tiene que Fm es submódulo de M, ya que $e \cdot m = \lambda m$ y por lo tanto se tiene $A \cdot (Fm) = A_1 \cdot (Fm) = Fe \cdot (Fm) = Fm$. Finalmente como M es irreducible, se obtiene que $M = Fm$. De manera análoga se concluye lo mismo al suponer que $M = M_1$.*

4.1. Casos especiales

Hasta ahora hemos estudiado módulos irreducibles sobre álgebras que cumplen que $0 \notin \{\beta, \gamma, \beta + \gamma, \beta + 2\gamma, \beta + 3\gamma\}$. Por lo que nos gustaría conocer más sobre los casos no considerados. Cabe destacar que ningún par de estos términos puede ser cero simultáneamente, ya que se tendría que $\beta = \gamma = 0$, por lo tanto los casos que faltan estudiar son cinco, cuando cada uno de estos terminos es cero. Empezaremos estudiando cuando $\beta + \gamma = 0$.

4.1.1. Caso $\beta + \gamma = 0$

En este caso se llega a un resultado análogo al de la Proposición 4.0.9, ya que por lo visto en el Lema 3.3.6 se tiene que M_1 es un submódulo de M y por lo tanto

Lema 4.1.2 *Sea A un algebra Casi-Jordan Generalizada con $\beta + \gamma = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación irreducible de A. Entonces $M = M_0$ ó $M = M_1$.*

Observación 4.1.3 *Por otra parte si suponemos que $A_1 = Fe$ y M es un módulo irreducible sobre A. Si $M = M_1$, de manera análoga a lo hecho en Observación 4.0.13, se obtiene que $dimM = 1$. Por otro lado, en el caso en que $M = M_0$ sabemos que no necesariamente se tiene que $dimM = 1$. Esto se prueba por medio del siguiente ejemplo.*

Ejemplo 4.1.4 *Probaremos a continuación la existencia de un módulo irreducible de dimensión 2.*

Consideremos el álgebra dada en el Ejemplo 2.1.1, y un espacio $\mathbb{R}$-vectorial M con $dimM = 2$, es decir $M =< v, w >$. Definimos $\rho : A \to End(M)$ sobre la base de A por: $\rho_e = 0$ y $\rho_a(\lambda_1 v + \lambda_2 w) = (2\lambda_2 - \lambda_1)v + (\lambda_2 - \lambda_1)w$. Es fácil verificar que ρ es una representación de A.
Supongamos ahora que M no es irreducible, es decir existe $N = \mathbb{R}m$ para algún $m \in M$, submódulo de M. Sea $m = \lambda_1 v + \lambda_2 w \neq 0$, luego como N es submódulo de M, se tiene que $\rho_x(m) = b_x m$ para algún $b_x \in \mathbb{R}$, para todo $x \in A$. Por lo tanto en particular se tiene que $\rho_a(m) = b_a m$, es decir se tiene que

$$\begin{aligned} (2\lambda_2 - \lambda_1) &= b_a\lambda_1 \\ (\lambda_2 - \lambda_1) &= b_a\lambda_2 \end{aligned}$$

De la primera igualdad se obtiene que $\lambda_2 = \frac{(b_a+1)}{2}\lambda_1$, y al reemplazar en la segunda igualdad tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(b_a+1)}{2}\lambda_1 - \lambda_1 &= b_a\tfrac{(b_a+1)}{2}\lambda_1 \\ (b_a+1)\lambda_1 - 2\lambda_1 &= b_a(b_a+1)\lambda_1 \\ ((b_a)^2 + b_a - b_a - 1 + 2)\lambda_1 &= 0 \\ ((b_a)^2 + 1)\lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

como el polinomio $x^2 + 1 = 0$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$, se concluye que $\lambda_1 = 0$, y por consiguiente $\lambda_2 = 0$, llegando a una contradicción, ya que habíamos supuesto que $m \neq 0$. Por lo tanto M es un módulo irreducible y $dimM = 2$.

Proposición 4.1.5 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\beta + \gamma = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación irreducible de A. Si $(A_0)^2 \subseteq A_0$ y $\rho_e \neq 0$, entonces M es un módulo asociativo.*

Demostración. Al igual que en Teorema 4.0.10 debemos probar $(a,b,m) = (a,m,b) = 0$ para todo $a,b \in A$ y $m \in M$. Como $\rho_e \neq 0$ se concluye por Lema 4.1.2 que $\rho_e = id_M$. Además por hipotesis se tiene que $(A_0)^2 \subseteq A_0$, por lo cual si consideramos $a = a_0 + a_1$ y $b = b_0 + b_1$ con $a_i, b_i \in A_i$, se tiene que $(a,b,m) = (a_1,b_1,m)$ y $(a,m,b) = (a_1,m,b_1)$. Por lo tanto sólo debemos considerar $a,b \in A_1$.

Si tomamos $a,b \in A_1$ y $c = e$ en Ec. (3.6) se tiene

$$\rho_a\rho_b + \rho_a b - 2\rho_b\rho_a = 0$$

luego como ya vimos en Teorema 4.0.10 esto implica que el modulo es asociativo ∎

4.1.6. Caso $\gamma = 0$

Nuevamente en este caso se llega a un resultado similar, ya que por lo visto Lema 3.3.2 se tiene que M_0 es un submódulo de M, luego al suponer M irreducible se tiene que

Lema 4.1.7 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\gamma = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación irreducible de A. Entonces $M = M_0$ ó $M = M_1$, donde $M_0 = \{m \in M \mid \rho_e^2(m) = 0\}$ y $M_1 = \{m \in M \mid \rho_e(m) = m\}$.*

Por otro lado si suponemos que $(A_1)^2 \subseteq A_1$ y que $M = M_1$, al igual que en el caso anterior se tiene que $(a,b,m) = (a,m,b) = 0$ para todo $a,b \in A$, $m \in M$, si y sólo si $(a,b,m) = (a,m,b) = 0$ para todo $a,b \in A_1$, $m \in M$. Finalmente si reemplazamos $a,b \in A_1$ y $c = e$ en Ec. (3.6) obtenemos $\rho_a\rho_b + \rho_{ab} - 2\rho_b\rho_a = 0$, y por lo tanto se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.1.8 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\gamma = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación irreducible de A. Si $(A_1)^2 \subseteq A_1$ y $\rho_e^2 \neq 0$, entonces M es un módulo asociativo.*

4.1.9. Caso $\beta = 0$

En este caso se tiene por Teorema 3.0.7 que M_0 es submódulo. Por lo tanto si M es irreducible se tiene que $M = M_0$ ó $M = M_1 \oplus M_{-1}$, de donde el resultado

Lema 4.1.10 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\beta = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación irreducible de A. Entonces $M = M_0$ ó $M = M_1 \oplus M_{-1}$, donde $M_i = \{m \in M \mid \rho_e(m) = im\}$ para $i = 0, 1, -1$.*

4.1.11. $\beta + 2\gamma = 0$

Finalmente al igual que en los demás casos aquí también se tiene por Lema 3.3.4 que M_0 es un submódulo de M, por lo cual se obtiene el siguiente resutado

Lema 4.1.12 *Sea A un álgebra Casi-Jordan Generalizada con $\beta + 2\gamma = 0$. Supongamos que A contiene un elemento idempotente $e \neq 0$, y sea $\rho : A \to End(M)$ una representación irreducible de A. Entonces $M = M_0$ ó $M = M_1$, donde $M_0 = \{m \in M \mid \rho_e(m) = 0\}$ y $M_1 = \{m \in M \mid (\rho_e - id)^2(m) = 0\}$.*

Capítulo 5

Problemas abiertos

En esta sección nombraremos algunos de los problemas que pueden brindar más información de la ya obtenida. En orden de aparición en este trabajo queda pendiente lo siguiente:

- Suponiendo $0 \notin \{\beta, \gamma, \beta+\gamma, \beta+2\gamma, \beta+3\gamma\}$, sería útil encontrar mas propiedades en el caso en que el módulo es irreducible y se tiene que $M = M_0$, ya que al tener esta caracterización sólo sabemos que la representación ρ, satisface que $\rho_e = 0$. A diferencia de los casos restantes, donde en un caso se obtiene que el módulo es asociativo y en el otro una condición cercana a la asociativiadad del módulo, lo cual nos da mucha más información de como se comporta la representación.

- También queda pendiente encontrar propiedades de los módulos irreducible en los casos $\gamma = 0$ y $\beta + \gamma = 0$, cuando no se supone que A_1 y A_0 son subálgebras de A respectivamente, ya que en estos casos se tiene que el módulo es asociativo.

- Finalmente encontrar más propiedades en el caso en que el módulo es irreducible y se supone $\beta = 0$ o $\beta + 2\gamma = 0$, ya que por la información obtenida en este trabajo, sólo podemos concluir que en ambos casos M_0 es un submódulo, lo cual no da demasiada información sobre la representación.

Bibliografía

[1] A.A. Albert: *Structure of algebras.* Amer. Math. Soc. Colloquium publications 24 New York (1939).

[2] M. Arenas, A. Labra, *On nilpotency of generalized Almost-Jordan right-nilalgebras.* Algebra Colloquium, **15** (1) (2008), 69-82.

[3] M. Arenas, *The Wedderburn principal theorem for generalized almost-Jordan algebras.* Comm. Algebra **35** (2) (2007), 675-688.

[4] A. Behn, A. Labra, C. Reyes *Representations of Power-Associative Train Algebras of Rank 4*, Sometido 2012.

[5] G. Benkart, A. Labra, *Representations of algebras of rank 3*, Communications in Algebra, **34** (8) (2006), 2867-2877.

[6] J. Bernard, A. Iltyacov, C. Martnez, *Bernstein representations*, Proceedings of the 3rd. Int. Conference on non associative algebras. (S. Gonzlez, Ed.) Kluwer Academic Publisher (1994).

[7] L. Carini, I. R. Hentzel, G. M. Piacentini-Cattaneo, *Degree four Identities not implies by commutativity*, Comm. in Algebra, **16** (2) (1988), 339-357.

[8] A. Elduque, I. P. Shestakov, *Irreducible Malcev modules*, J. of Algebra, **173** (1995),622-637.

[9] A. Elduque, I. P. Shestakov, *Irreducible non-Lie modules for Malcev superalgebras*, J. of Algebra,**246** (2001), 897-914

[23] J. M. Osborn, *Modules for Novikov algebras, Contemporary Mathematics*, vol. **184**, (1995), 327-338.

[24] J. M. Osborn, *Representations and radicals of Jordan algebras*, Scripta Mathematica, Vol. **29**, No. 3-4 (1971), 297-329.

[25] W. Stein, *Sage Mathematics Software (Version 3.1.1)*, The SAGE Group, 2008, `http://www.sagemath.org`.

[26] R. Schafer, *Representations of alternatives algebras*, Trans. Am. Math. Soc.**72** No 1, (1952), 1-17.

[27] R. Schafer, *Introduction to nonassociative algebras*, Academic Press N. York, London 1966.

[28] I.P. Shestakov: *Irreducible representations of Alternative algebras*, Translated from Mathematicheskie Zametki, Vol.**26**, (5), (1979), 673-686.

[29] A. V. Sidorov, *Lie triple algebras*, Translated from Algebra i Logika, Vol. **20**, No1, January. February, (1981), 101-108.