

UCH-FC
DDC-M
B 663
C.1

**ALGUNOS ASPECTOS DE LA DINÁMICA DE LAS
FUNCIONES RACIONALES $z \mapsto 1 + 1/\omega z^d$**

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Juan Rodrigo Bobenrieth Hochfärber

Junio de 1997

Director de Tesis: Dr. Rodrigo Bamón



**FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE**

**INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO**

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Juan Rodrigo Bobenrieth Hochfärber

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el 24 de Junio de 1997.

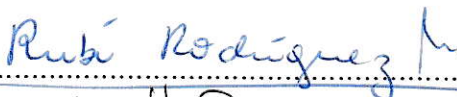
Director de Tesis:

Dr. Rodrigo Bamón


.....

Comisión de Evaluación de la Tesis:


Dra. Rubí Rodríguez


.....

Dr. Nicolás Yus


.....

Dr. Víctor Guíñez


.....



AGRADECIMIENTOS

Deseo manifestar mi agradecimiento a todos los que contribuyeron a la realización de este trabajo.

A Dios y a la Santísima Virgen María, por su constante ayuda durante mis estudios de doctorado.

Al Dr. Rodrigo Bamón, por sugerir el tema de la presente tesis, por su valiosísima ayuda en cada etapa del desarrollo de esta y por su constante estímulo.

Al Dr. Victor Guíñez, por sus valiosas ideas y comentarios.

A la Comisión, por sus útiles sugerencias.

Al Profesor Jaime Roessler, por su ayuda en la confección de algunos gráficos que aparecen en esta tesis.

A Matias Atria y a Victor Muñoz, por su apoyo en el aspecto computacional.

A mis padres por su constante apoyo y estímulo.

A mis amigos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, por su buena disposición a colaborar en el desarrollo del presente trabajo.

A mis colegas del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Bío - Bío y en especial al Prof. Humberto Valenzuela, por su constante interés y estímulo durante mis estudios de doctorado.

A la Universidad del Bío - Bío, por su permanente apoyo financiero al otorgarme una comisión de estudios durante los 4 años y medio de mis estudios de doctorado.

A Conicyt, por haberme concedido una beca de doctorado durante los 4 primeros años de mis estudios.



INDICE

	Pag.
RESUMEN	iv
SUMMARY	v
INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO 0	
PRELIMINARES	4
0.1 Definiciones básicas	4
0.2 Resultados fundamentales	6
CAPITULO 1	
CONJUNTO DE MANDELBROT DE LA FAMILIA \mathcal{F}_d	14
1.1 Introducción	14
1.2 Caracterización del conjunto de Mandelbrot	16
1.3 Las componentes hiperbólicas de \mathcal{F}_d	21
1.4 Bifurcaciones sobre $\partial M(\mathcal{F}_d)$	24
1.5 La conjetura de la hiperbolicidad	25
1.6 Numerabilidad del conjunto de parámetros parabólicos	27
1.7 Clases de conjugación cuasiconforme	28
CAPITULO 2	
ESTUDIO DE LA FAMILIA $\mathcal{F}_d\mathbb{R}$	32
2.1 Conclusiones preliminares	32
2.2 Estudio de la dinámica de $f_\omega : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, caso d par	35
2.3 Estudio de la dinámica de $f_\omega : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, caso d impar	42
APÉNDICE	50
REFERENCIAS	54



RESUMEN

Se estudia algunos aspectos de la dinámica en la esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ generada por las aplicaciones racionales en las familias $\mathcal{F}_d := \{z \mapsto 1 + 1/\omega z^d : \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ con $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.

En el capítulo 0 se da las definiciones básicas y se resumen una serie de conceptos y resultados necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores.

En el capítulo 1 se prueba que los endomorfismos racionales $z \mapsto f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^d$ (con $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$) no tienen anillos de Herman. A partir de esto se obtiene una caracterización dinámica del conjunto de Mandelbrot de \mathcal{F}_d , $M(\mathcal{F}_d)$, para todo $d \geq 2$. Se define las componentes hiperbólicas de \mathcal{F}_d y se estudia su relación con el conjunto de Mandelbrot. Luego se ve como varía el conjunto de Fatou de f_ω cuando ω recorre la frontera $\partial M(\mathcal{F}_d)$. Se continúa con una reducción de la conjetura de la hiperbolicidad a otra conjetura más simple. Se demuestra que el conjunto de parámetros parabólicos es numerable. Finalmente, se prueba que las clases de conjugación cuasiconforme en la familia \mathcal{F}_d son o bien un abierto arco-conexo de \mathbb{C} o bien se reducen a un punto.

En el capítulo 2 se estudia la subfamilia de \mathcal{F}_d que se obtiene cuando restringimos el parámetro ω a \mathbb{R} . Se prueba que en este caso existen tres posibilidades para $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$: que tenga una órbita periódica atractora contenida en $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, que tenga una órbita periódica racionalmente indiferente contenida en \mathbb{R} , y que el conjunto de Julia de f_ω sea toda la esfera $\bar{\mathbb{C}}$. Se analiza la dinámica de $f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ y las bifurcaciones que se producen cuando ω varía en \mathbb{R} . Para el caso en que d es par se prueba que existe una sucesión de duplicación de períodos, y se entrega una reducción de la conjetura de la hiperbolicidad para parámetros reales. Finalmente, si d es impar se prueba (entre otras cosas) que el conjunto $\{\omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ tiene una órbita periódica atractora}\}$ es denso en \mathbb{R} . Es decir, se prueba la conjetura de la hiperbolicidad para este caso particular.

SUMMARY

We study some aspects of the dynamics on the Riemann sphere $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ generated by the rational maps of the family $\mathcal{F}_d := \{z \mapsto 1 + 1/\omega z^d : \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ for $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.

In Chapter 0 we give the basic definitions as well as summarize various fundamental concepts and results which will be needed in the following Chapters.

In Chapter 1 we prove that the rational endomorphisms $z \mapsto f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^d$ (where $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$) have no Herman rings. From this we are able to obtain a dynamical characterization for the parameters in the Mandelbrot set associated to \mathcal{F}_d , denoted $M(\mathcal{F}_d)$, for all $d \geq 2$. Furthermore, we define the hyperbolic components of \mathcal{F}_d and investigate the relation of these with the Mandelbrot set $M(\mathcal{F}_d)$. Afterwards, we examine how the Fatou set of f_ω varies as ω varies in the boundary $\partial M(\mathcal{F}_d)$ of the Mandelbrot set. Then we give an argument which allows us to reduce the dense hyperbolicity conjecture of the family \mathcal{F}_d to a seemingly more tractable conjectural statement. In addition, we prove that the set of parabolic parameters of the family \mathcal{F}_d is countable. Finally, we prove that each quasiconformal conjugacy class of \mathcal{F}_d is either a path-connected open subset of \mathbb{C} or is just a point. This closes Chapter 1.

In Chapter 2, we study the subfamily of \mathcal{F}_d which is obtained when we restrict our attention to those values of ω which are real. We establish that in this case there are three possibilities for $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, namely: f_ω may have an attracting periodic orbit contained in $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; f_ω may have a periodic orbit which is rationally indifferent and which is fully contained in \mathbb{R} ; or, it may occur that the Julia set of f_ω is all of $\bar{\mathbb{C}}$. We analyze the dynamics of $f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ and the bifurcations that arise when ω varies in \mathbb{R} . In the case that d is even, we prove that there exists a sequence of period doubling, and we furthermore give an argument that allows us to reduce the dense hyperbolicity conjecture of real parameters to an apparently simpler conjectural statement. Finally, if d is odd, we prove (among others things) that the set $\{\omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ has an attracting periodic orbit}\}$ is dense in \mathbb{R} . That is to say, we manage to prove the dense hyperbolicity conjecture in this particular case.

INTRODUCCIÓN

Las primeras contribuciones en la teoría de la dinámica de las funciones racionales en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se deben a Pierre Fatou [Fa] y Gastón Julia [Ju], alrededor de 1920. En esta fecha Fatou planteó la conjetura de la hiperbolicidad, la cual forma parte importante en la presente Tesis. Dicha conjetura afirma que las aplicaciones hiperbólicas forman un abierto y denso en el espacio de todas las aplicaciones racionales. Probar que la hiperbolicidad es una condición abierta es sencillo; sin embargo la densidad aún no ha podido ser demostrada. Las aplicaciones hiperbólicas son de interés por cuanto tienen una dinámica simple y posiblemente son las únicas cuya dinámica sobre el conjunto de Julia es estable por perturbaciones.

Dado que estudiar la dinámica de la clase de los endomorfismos racionales en la esfera de Riemann es una tarea larga y difícil, es común considerar subfamilias de funciones racionales que dependen analíticamente de uno o más parámetros complejos. Puesto que, según veremos, la dinámica global de un endomorfismo racional depende esencialmente del comportamiento de las órbitas positivas de los puntos críticos, usualmente se estudia subfamilias caracterizadas por condiciones en dichas orbitas positivas. Es así que la familia polinomial cuadrática $\mathcal{P}_2 = \{ z \mapsto p_c(z) = z^2 + c : c \in \mathbb{C} \}$, que corresponde a la subfamilia de aplicaciones racionales de grado 2 con un punto crítico fijo, ha sido objeto de numerosos trabajos en dinámica compleja.

Para aplicaciones racionales cuadráticas, J. Milnor [Mi2] sugirió estudiar la familia de aplicaciones que envían uno de sus puntos críticos en el otro. Una forma normal para dichas aplicaciones es $z \mapsto 1 + 1/\omega z^2$.

Antes del trabajo de Milnor, la familia $\mathcal{F}_2 = \{ z \mapsto f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^2 : \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \}$ fué considerada por M. Lyubich [Ly1]. El planteó la pregunta de si las aplicaciones en esta familia tienen o no anillos de Herman. Posteriormente, M. Shishikura [Sh], usando técnicas de cirugía cuasiconforme, probó que las aplicaciones racionales de grado 2 no tienen anillos de Herman, respondiendo así a la pregunta de Lyubich como un caso particular. Por otro lado, M. Rees [Re] consideró en forma más general las familias de aplicaciones racionales que tienen dos puntos críticos y que envían uno de ellos en el otro. Una forma normal para dichas familias es $\mathcal{F}_d = \{ z \mapsto f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^d : \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \}$ donde $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.

En la presente tesis se estudia algunos aspectos de la dinámica de las funciones racionales $z \mapsto f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^d$, con $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Se prueba que dichas funciones racionales no tienen anillos de Herman. Cabe mencionar que el resultado de Shishikura [Sh] no implica este resultado para las aplicaciones en \mathcal{F}_d , con $d \geq 3$.

El conjunto de Mandelbrot de la familia \mathcal{F}_d , $M(\mathcal{F}_d)$, se define como la clausura del conjunto $\{\omega : J(f_\omega) \text{ es conexo}\}$ ($J(f_\omega)$ denota el conjunto de Julia de f_ω). Y. Yongcheng [Yo] usa el resultado de Shishikura para caracterizar dinámicamente el conjunto de las aplicaciones racionales cuadráticas cuyo conjunto de Julia es conexo. Usando el hecho que las aplicaciones en \mathcal{F}_d no tienen anillos de Herman (probado en esta tesis), e independientemente de [Yo], obtenemos una caracterización dinámica del conjunto $M(\mathcal{F}_d)$. Además, se prueba que $M(\mathcal{F}_d)$ es conexo, y que su frontera es una curva de Jordan analítica y regular excepto por un punto singular, a saber el único parámetro $\omega \in M(\mathcal{F}_d)$ en el cual $J(f_\omega)$ es desconexo.

Las componentes hiperbólicas de \mathcal{F}_d se definen como las componentes conexas de $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, donde $A_k := \{\omega : f_\omega \text{ tiene una órbita periódica atractora de período } k\}$. La caracterización dinámica de $M(\mathcal{F}_d)$ mencionada en el párrafo anterior permite afirmar que $M(\mathcal{F}_d) = \mathbb{C} \setminus A_1$ y que $\bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \subseteq M(\mathcal{F}_d)$. En la sección 3 del Capítulo 1 se entrega una representación gráfica de dichas componentes hiperbólicas para $d = 2$ y $d = 3$. También se demuestra un resultado sobre la forma en que se distribuyen en el correspondiente conjunto de Mandelbrot: se prueba que todo punto en $\bigcup_{k \geq 1} \partial A_k$ es acumulado por componentes de $\bigcup_{k \geq 1} A_k$, y que el único punto singular de la frontera $\partial M(\mathcal{F}_d)$ es acumulado por componentes de $\bigcup_{k \geq 1} A_k$ que intersectan al eje real. Por otra parte, en la sección 4 se muestra como varía el conjunto de Fatou de f_ω cuando ω recorre el borde $\partial M(\mathcal{F}_d)$. En la siguiente sección se plantea una conjetura equivalente (en apariencia mas simple) a la conjetura de la hiperbolicidad para nuestra familia \mathcal{F}_d . Se enuncia dicha conjetura para parámetros reales, la cual posteriormente en el Capítulo 2 es resuelta para d impar. En la sección 6 del Capítulo 1, utilizando el concepto algebraico de Resultante se prueba que el conjunto de parámetros parabólicos es numerable, lo cual será fundamental mas adelante en la demostración del mencionado caso particular de la conjetura de la hiperbolicidad. En la última sección del Capítulo 1 se demuestra que las clases de conjugación cuasiconforme de la familia \mathcal{F}_d son o bien un abierto arco-conexo de \mathbb{C} o bien se reducen a un punto, análogo a lo que ocurre en la familia polinomial cuadrática \mathcal{P}_2 . Este hecho en la familia \mathcal{P}_2 es una pieza fundamental en la demostración de la conjetura de la hiperbolicidad para parámetros reales realizada por G.Swiatek [Sw].

Un asunto interesante en dinámica es tomar el parámetro que parametriza a \mathcal{F}_d en la recta real. Resulta en este caso que la dinámica de $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ queda completamente determinada por la dinámica de su restricción a $\bar{\mathbb{R}}$, $f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. En el Capítulo 2, se prueba que si $\omega \in \mathbb{R}$, entonces $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ no tiene ni discos de Siegel ni puntos de Cremer; de hecho se demuestra que en este caso existen tres posibilidades: que $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ tenga una única órbita periódica atractora contenida en $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; que f_ω tenga una única órbita periódica racionalmente indiferente contenida en \mathbb{R} con multiplicador $\lambda = \pm 1$; y que $J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}}$.

Se realiza además en el Capítulo 2 un estudio de la dinámica de la familia $\{f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : \omega \in \mathbb{R}\}$. Para el caso d par se prueba que existe una sucesión de parámetros $\omega_1 = 0 > \omega_2 > \omega_3 > \dots > \omega_n > \omega_{n+1} > \dots > -1$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{ω_n} tiene una órbita superatractora de período 2^n , situación análoga a

la que ocurre para la conocida familia polinomial cuadrática real $p_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Resultados computacionales mostraron que el número que cuantifica la forma en que el árbol dobla-período se aproxima a su estado final no coincide con la conocida constante de Feigenbaum 4.669201..... de la familia polinomial cuadrática. Para d par se entrega además una reducción de la conjetura de la hiperbolicidad para parámetros reales.

Por su parte para el caso d impar, considerando el hecho que para $\omega < 0$, $f_\omega : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es un homeomorfismo del círculo que preserva orientación, se prueba (entre otras cosas) que el conjunto de parámetros $\{\omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ tiene una órbita periódica atractora}\}$ es denso en \mathbb{R} , es decir se prueba un caso particular de la conjetura de la hiperbolicidad. Lo anterior se hace introduciendo un cambio de coordenadas en la familia $\{f_\omega : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : \omega < 0\}$ para obtener una familia analíticamente equivalente $\{g_c : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : c > 0\}$. Se prueba que el número de rotación $\rho(c)$ de g_c es tal que $\rho^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tiene interior vacío y que si $\rho(c_1) = p/q$ entonces arbitrariamente cerca de c_1 existe c tal que $\rho(c) = p/q$ y una órbita de período q de g_c es atractora.

Por último, mencionemos que en el apéndice de esta tesis se adjunta una copia del trabajo *The rational maps $z \mapsto 1 + 1/\omega z^d$ have no Herman rings*, en el cual aparece una demostración del hecho que las aplicaciones f_ω no tienen anillos de Herman. ligeramente diferente (en su presentación) a la entregada en la presente tesis.

CAPITULO 0

PRELIMINARES

En este Capítulo se encuentran las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo posterior de este trabajo. Contiene una introducción a las familias de endomorfismos racionales en la esfera de Riemann.

0.1 Definiciones básicas.

0.1.1 Por $\bar{\mathbb{C}}$ denotamos a la esfera de Riemann. Una **función racional** $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es una función de la forma $R(z) = P(z)/Q(z)$, donde P y Q son polinomios con coeficientes complejos y $(P, Q) = 1$; el **grado** de R es el máximo entre los grados de P y Q . En el presente trabajo R denotará siempre una aplicación racional de grado $d \geq 2$. En esta Tesis consideramos a R como un sistema dinámico discreto en $\bar{\mathbb{C}}$. Así, $R^0 = Id$ y $R^n = R \circ R^{n-1} \forall n \geq 1$. Las funciones racionales coinciden exactamente con la clase de las funciones analíticas de $\bar{\mathbb{C}}$ en $\bar{\mathbb{C}}$.

0.1.2 Si $f : X \rightarrow Y$ es una función analítica no constante entre superficies de Riemann y a es un punto de X , la **deficiencia** (u orden de ramificación) de f en a , $\delta_f(a)$, es el entero $k - 1$ donde k es el orden de la primera derivada no-nula de f en a .

Para X e Y compactos existe $d \in \mathbb{N}$ tal que cada $y \in Y$ se alcanza exactamente d veces en X contando multiplicidades. Es decir: $\forall y \in Y, \sum_{x \in f^{-1}(y)} (1 + \delta_f(x)) = d$. Al entero d se le llama el **grado** de la función f . Para una función racional este grado coincide con el definido anteriormente.

La **fórmula de Riemann - Hurwitz** relaciona la topología de las superficies con la deficiencia total:

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función analítica no constante de grado d entre las superficies de Riemann compactas X e Y . Sean $\chi(X)$ y $\chi(Y)$ las características de Euler de X e Y respectivamente y sea $\delta_f(X) := \sum_{x \in X} \delta_f(x)$ la deficiencia total de f . Entonces:

$$\chi(X) + \delta_f(X) = d\chi(Y).$$

0.1.3 Un punto $c \in \bar{\mathbb{C}}$ es un **punto crítico** de R si R no es inyectiva en vecindad alguna de c . Si $c \neq \infty$ y $R(c) \neq \infty$ lo anterior es equivalente a $R'(c) = 0$. Por la fórmula de Riemann - Hurwitz una función racional de grado d tiene $2(d-1)$ puntos críticos contando multiplicidades. Denotaremos por $C(R)$ al conjunto de puntos críticos de R .

0.1.4 Dado $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, se define la **órbita positiva** de z_0 como la sucesión $\theta^+(z_0) := \{R^n(z_0)\}_{n \geq 0}$. Si $R^n(z_0) = z_0$ y n es el menor número natural que satisface esta relación, entonces z_0 es llamado un punto periódico de período n . En este caso z_0 es llamado **atractor**, **superatractor**, **repulsor**, o **indiferente**, de acuerdo a si $|\lambda| < 1$, $\lambda = 0$, $|\lambda| > 1$ ó $|\lambda| = 1$ respectivamente, donde $\lambda = (R^n)'(z_0)$. Además z_0 es **racionalmente** (resp. **irracionalmente**) **indiferente** si $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$ con $\theta \in \mathbb{Q}$ (resp. $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Al conjunto $\{z_0, R(z_0), \dots, R^{n-1}(z_0)\}$ lo llamamos **órbita periódica** y la denominamos atractora, superatractora, repulsora o neutral de manera similar.

0.1.5 Sea \mathcal{C} una colección de funciones analíticas definidas en un dominio U de $\bar{\mathbb{C}}$. La familia \mathcal{C} se dice **normal** en U si es equicontinua en U . Por el Teorema de Arzela-Ascoli esto equivale a decir que toda sucesión de funciones en \mathcal{C} contiene una subsucesión que converge uniformemente en los compactos de U .

0.1.6 Un punto $z \in \bar{\mathbb{C}}$ es un elemento del **Conjunto de Fatou** de R , el cual denotamos por $F(R)$, si existe una vecindad U de z en $\bar{\mathbb{C}}$ tal que la familia de iterados $\{R^n\}_{n \geq 0}$ es normal en U . El **Conjunto de Julia** de R , $J(R)$, se define como el complemento del Conjunto de Fatou.

Los nombres de estos conjuntos son en honor a Pierre Fatou y Gastón Julia, quienes en los trabajos [Fa] y [Ju] iniciaron el estudio de la dinámica de funciones racionales.

0.1.7 Si $R, S : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ son dos funciones racionales y $M : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es una Transformación de Möbius tal que $M \circ R = S \circ M$, diremos que R y S son **analíticamente conjugadas**, y denotaremos $R \sim S$. En este caso $M \circ R^n = S^n \circ M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así R y S tienen dinámicas analíticamente equivalentes.

Dos funciones racionales $R_1, R_2 : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ se dicen **topológicamente conjugadas** si existe un homeomorfismo $h : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ tal que $h \circ R_1 = R_2 \circ h$. En este caso las dinámicas de R_1 y R_2 son topológicamente equivalentes.

0.1.8 Sea \mathcal{R}_d el espacio de todas las aplicaciones racionales de grado d provisto de la topología de los coeficientes y sea $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_d$ una subvariedad compleja conexa. Un endomorfismo racional $R_0 \in \mathcal{M}$ es llamado **estructuralmente estable** (en \mathcal{M}) si para todo $R \in \mathcal{M}$ suficientemente cercano a R_0 , las transformaciones $R_0 : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ y $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ son topológicamente conjugadas, y los homeomorfismos que conjugan $h_R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ dependen continuamente de R .

0.2 Resultados fundamentales.

En esta sección se enunciará una serie de resultados fundamentales de la teoría de iteración de funciones racionales que serán utilizados durante el desarrollo de la presente Tesis. Comenzaremos con algunos resultados clásicos como el Teorema de Montel y las propiedades más conocidas de los conjuntos de Julia y de Fatou. Continuamos con el Teorema de las componentes de Sullivan y la clasificación de las dinámicas que existen en el conjunto de Fatou. Luego veremos dos versiones de la fórmula de Riemann-Hurwitz para funciones racionales, las que nos permitirán describir más adelante algunas propiedades topológicas de los Conjuntos de Julia. Seguiremos con algo básico sobre puntos periódicos indiferentes, para a continuación ver lo necesario sobre estabilidad de aplicaciones racionales e hiperbolicidad. Por último, veremos lo necesario sobre el concepto algebraico de Resultante.

Para demostraciones de los resultados de esta sección se puede consultar las referencias [Be], [Ja], [MSS], [Mi1], [Mi2] y [Su].

Como esta sección es una simple recopilación de resultados conocidos en dinámica compleja, puede ser omitido en una primera lectura y utilizado como referencia en lo subsiguiente.

0.2.1 A continuación, se enuncia dos resultados sobre familias normales.

Teorema (de Montel) *Sea \mathcal{C} una colección de funciones analíticas definidas en un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$. Si $\bigcup_{f \in \mathcal{C}} f(U)$ evita 3 o más puntos de \mathbb{C} entonces \mathcal{C} es normal en U .*

Teorema (de Vitali) *Supongamos que la familia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de aplicaciones analíticas es normal en un dominio D , y que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a alguna función f en algún subconjunto abierto no-vacío W de D . Entonces f se extiende a una función F analítica en D , y tal que $f_n \rightarrow F$ uniformemente en los compactos de D .*

0.2.2 Entre los resultados clásicos sobre los conjuntos $J(R)$ y $F(R)$ probados por Fatou y Julia están los siguientes:

- Ambos $J(R)$ y $F(R)$ son completamente invariantes por R . Esto es: $R^{-1}(J(R)) = J(R) = R(J(R))$ (análogamente para $F(R)$).
- $J(R^n) = J(R)$ y $F(R^n) = F(R)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $J(R)$ es no vacío y coincide con la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores de R .
- $J(R)$ es perfecto.
- Si F_0 es una componente (conexa) de $F(R)$ entonces $R(F_0)$ también lo es. Además,

$R^{-1}(F_0)$ es unión finita ($\leq \text{grado}(R)$) de componentes de $F(R)$. Por otra parte, $R(\partial F_0) = \partial R(F_0)$.

f) $J(R)$ es conexo si y sólo si toda componente de $F(R)$ es simplemente conexa.

g) $J(R)$ es conexo o bien tiene una cantidad infinita no-numerable de componentes conexas.

0.2.3 El resultado que daremos a seguir fué probado por D.Sullivan en [Su]. Es un resultado fundamental para describir la dinámica de las funciones racionales. Fatou ya sabía de la importancia de este resultado, planteándolo como pregunta. Sullivan lo probó vía aplicaciones cuasiconformes. Fue el quien hizo ver la importancia de esta clase de aplicaciones en dinámica de funciones racionales. Para enunciar el resultado, necesitamos algunos conceptos previos.

Definiciones Una componente F_0 del Conjunto de Fatou es **periódica** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^n(F_0) = F_0$. Al menor natural que satisface esta igualdad le llamamos el período de F_0 . La componente F_0 es **eventualmente periódica** si existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $R^m(F_0)$ es periódica.

Teorema de las componentes (Sullivan, 1982) *Toda componente conexa del Conjunto de Fatou es eventualmente periódica.*

0.2.4 Las dinámicas posibles sobre componentes periódicas del conjunto de Fatou ya eran conocidas por P.Fatou y G.Julia. En este apartado describiremos la clasificación de estas dinámicas. Para esto comenzamos con algunas definiciones.

Definiciones Sea D una componente periódica de período n del Conjunto de Fatou $F(R)$. Entonces D se llama:

a) **Componente atractora** si D contiene un punto periódico atractor z_0 de período n . En este caso se tiene que $R^{kn}(z) \rightarrow z_0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $z \in D$.

b) **Componente parabólica** si existe un punto periódico racionalmente indiferente z_0 en la frontera ∂D tal que $R^n(z_0) = z_0$, $(R^n)'(z_0) = 1$ y $R^{kn}(z) \rightarrow z_0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $z \in D$.

c) **Disco de Siegel** si $R^n|_D$ es conformemente conjugada a una rotación irracional del disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Es decir si existe un homeomorfismo analítico $\phi : D \rightarrow \Delta$ y un número irracional θ tal que $\phi \circ R^n = \exp(2\pi i\theta)\phi$ sobre D . Llamamos a θ (módulo 1) el **número de rotación** del disco de Siegel y a $z_0 = \phi^{-1}(0)$ su **centro**.

d) **Anillo de Herman** si $R^n|_D$ es conformemente conjugada a una rotación irracional de un anillo $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ para algún $0 < r < 1$.

Resumimos la clasificación de dinámicas sobre componentes periódicas de $F(R)$ en el siguiente Teorema.

Teorema *Toda componente periódica del Conjunto de Fatou es o bien una componente atractora, una componente parabólica, un disco de Siegel, o un anillo de Herman.*

0.2.5 Existe una importante relación entre los puntos críticos y las componentes periódicas del Conjunto de Fatou. Es la siguiente:

Teorema *Sea D una componente periódica de período n del Conjunto de Fatou.*

a) *Si D es atractora o parabólica, entonces $\bigcup_{i=0}^{n-1} R^i(D)$ contiene un punto crítico de R .*

b) *Si D es un disco de Siegel o un anillo de Herman, entonces el borde $\bigcup_{i=0}^{n-1} \partial R^i(D)$ está contenido en la clausura de las órbitas positivas de los puntos críticos de R .*

Observación: Si una componente D es parabólica o atractora (y no superatractora) la órbita positiva del punto crítico contenido en $\bigcup_{i=0}^{n-1} R^i(D)$ es infinita.

0.2.6 A continuación vemos dos versiones de la **fórmula de Riemann-Hurwitz**, las cuales son útiles en sus aplicaciones a dinámica de funciones racionales.

a) **Teorema** *Supongamos que V es un dominio acotado por un número finito de curvas de Jordan mutuamente disjuntas, que U es una componente de $R^{-1}(V)$ y que no hay valores críticos de R en ∂V . Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $R: U \rightarrow V$ es un m -recubrimiento ramificado y:*

$$\chi(U) + \delta_R(U) = m\chi(V).$$

Si F_0 es una componente conexa del conjunto de Fatou, en general su frontera es algo mucho más complicado que una unión finita de curvas de Jordan mutuamente disjuntas. Para definir la característica de Euler de F_0 , $\chi(F_0)$, se recurre a los llamados *subdominios regulares* de F_0 , los cuales tienen una característica de Euler bien definida ya que sus clausuras son triangulables. Se define la $\chi(F_0)$ como el valor límite de características de Euler de subdominios regulares que aproximan a F_0 (ver [Be] pp. 90-93 para las definiciones precisas). Con dicha definición se cumple que $\chi(F_0) \in \{-\infty\} \cup \{\dots, -2, -1, 0, 1\}$. En caso que $\chi(F_0) = -\infty$, se dice que F_0 tiene conectividad infinita.

A continuación enunciaremos una versión de la relación de Riemann-Hurwitz para componentes conexas del conjunto de Fatou.

b) **Teorema** Sean F_0 y F_1 componentes del Conjunto de Fatou y supongamos que $R(F_0) = F_1$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $R : F_0 \rightarrow F_1$ es un m -recubrimiento ramificado y:

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) = m\chi(F_1).$$

0.2.7 Veamos ahora una condición suficiente para que $J(R)$ sea totalmente desconexo.

Teorema Sea $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una aplicación racional. Si todos los puntos críticos de R pertenecen a una misma componente del Conjunto de Fatou entonces $F(R)$ tiene esa sola componente y el Conjunto de Julia es totalmente desconexo.

0.2.8 A continuación describimos algunos hechos sobre **puntos periódicos racionalmente indiferentes**. Supongamos que f es una función analítica en una vecindad del origen y que tiene la forma $f(z) = z + az^{p+1} + \dots$, con $a \neq 0$ y $p \in \mathbb{N}$. La función f es un difeomorfismo local $f : N \rightarrow N'$.

Definición: Un dominio simplemente conexo U con $\bar{U} \subseteq N \cap N'$ y $0 \in \partial U$ se dice un **pétalo atractor** para f en el origen si $f(\bar{U}) \subseteq U \cup \{0\}$ y $\bigcap_{k \geq 0} f^k(\bar{U}) = \{0\}$. Un **pétalo repulsor** para f se define como un pétalo atractor para f^{-1} .

Sobre pétalos atractores y repulsores se tiene el siguiente resultado:

a) **Teorema** Sea $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una aplicación racional con $R(z) = z + az^{p+1} + \dots$ ($a \neq 0$ y $p \in \mathbb{N}$) en una vecindad del origen. Entonces:

i) Existen p pétalos atractores disjuntos U_1, \dots, U_p , y p pétalos repulsores disjuntos U'_1, \dots, U'_p , para R en 0, de modo que la unión de los $2p$ pétalos junto al origen 0 forman una vecindad del origen.

ii) Por cada pétalo atractor U_i , existe una componente F_i de $F(R)$ que lo contiene, y que corresponde a una componente periódica parabólica de período 1 que tiene al origen 0 en su frontera. Además, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ y cada $z \in F_i$ existe $k \geq 0$ tal que $R^k(z) \in U_i$.

Cuando $R(0) = 0$ y $R'(0)$ es una raíz de la unidad distinta de 1, es decir $R(z) = \lambda z + az^{p+1} + \dots$ en vecindad del origen, con $\lambda^q = 1$, $\lambda^j \neq 1$ para $1 \leq j \leq q-1$ se tiene un resultado similar al anterior. En este caso, R^q es de la forma: $R^q(z) = z + cz^{t+1} + \dots$, con $c \neq 0$ y $t = kq$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Por a) R^q tiene t pétalos atractores en el origen. Esto implica que hay t componentes distintas F_1, \dots, F_t de $F(R^q)$ (y por lo tanto de $F(R)$) cada una de ellas conteniendo un pétalo atractor de R^q . R actúa como una permutación sobre $\{F_1, \dots, F_t\}$. Más precisamente, como una permutación de las F_j , R es una

composición de k ciclos disjuntos de longitud q .

Observación: Lo anterior se ha hecho suponiendo al origen como punto fijo racionalmente indiferente. Si el punto fijo no es el origen, y más aún, si estamos en el caso de una órbita periódica racionalmente indiferente, tenemos el siguiente resultado que generaliza el anterior.

b) **Teorema** Sea $\{z_1, \dots, z_m\}$ una órbita periódica racionalmente indiferente para R con $\lambda = (R^m)'(z_1)$ una raíz q -ésima de la unidad. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ y existen mkq componentes distintas F_1, \dots, F_{mkq} de $F(R)$ tal que en cada z_i hay exactamente kq de estas componentes cada una conteniendo un pétalo en z_i . Además, R actúa como una permutación sobre $\{F_1, \dots, F_{mkq}\}$ con k ciclos disjuntos de longitud mq . Una componente basada en z_i se aplica por R en una componente basada en z_{i+1} .

0.2.9 Ahora hablemos brevemente sobre Discos de Siegel.

Consideremos una aplicación analítica en una vecindad del 0 de la forma $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$

Definición: Se dice que f tiene un disco de Siegel en el origen si existe una vecindad abierta U de 0 simplemente conexa y tal que f aplica U sobre si mismo como un isomorfismo conforme. Por el Lema de Schwarz resulta que $f|U$ es conformemente conjugada a la rotación $z \mapsto \lambda z$ del disco unitario Δ .

En particular se deduce que $|\lambda| = 1$ y λ no es raíz de la unidad (excepto en el caso trivial $f(z) = \lambda z$).

Observación: Es claro que si $R: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es una aplicación racional con un disco de Siegel en el origen como en la definición precedente, entonces R tiene un disco de Siegel como en 0.2.4.

Consideremos la familia de polinomios cuadráticos $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$, donde $\lambda = \lambda(t) = e^{2\pi i t}$ para algún $t \in [0, 1]$, y denotemos por m a la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Entonces:

Teorema (Siegel) $m(\{t \in [0, 1] : P_{\lambda(t)} \text{ tiene un disco de Siegel en } 0\}) = 1$.

Lo anterior indica que $\{\lambda : P_\lambda \text{ tiene disco de Siegel}\}$ tiene medida total.

Otro resultado importante que necesitaremos más tarde es el siguiente:

Teorema (Bryuno - Yoccoz) Para $\lambda = e^{2\pi it}$ con $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ las siguientes tres condiciones son equivalentes:

- (1) $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ tiene un disco de Siegel.
- (2) $z \mapsto \lambda z + z^2 g(z)$ tiene disco de Siegel $\forall g$ analítica en 0.
- (3) $\sum_n q_n^{-1} \log q_{n+1} < \infty$, donde los q_n son los denominadores en la expansión en fracciones continuas de t .

0.2.10 En esta subsección, se verá algo sobre estabilidad de aplicaciones racionales.

Definiciones: Una aplicación analítica $f : W \times \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, con W una variedad compleja conexa, se llama familia analítica de endomorfismos racionales parametrizada por W . Denotamos a $f(\omega, z)$ por $f_\omega(z)$. Para cada ω , $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es una aplicación racional.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se le asocia a f el conjunto

$M_n := \{ (\omega, z) \in W \times \bar{\mathbb{C}} : f_\omega^n(z) = z, f_\omega^j(z) \neq z, 1 \leq j \leq n-1 \}$, las aplicaciones proyección $P_n : M_n \rightarrow W$, $P_n(\omega, z) = \omega$, y valor propio $\lambda_n : M_n \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda_n(\omega, z) = (f_\omega^n)'(z)$.

Se dice que un punto periódico z_0 , de período n , de f_{ω_0} es **persistentemente indiferente** si es indiferente y :

- i) Existe una vecindad W_0 de ω_0 y una función analítica $\phi : W_0 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ tal que $\phi(\omega_0) = z_0$ y su gráfico $\{ (\omega, \phi(\omega)) : \omega \in W_0 \}$ es una vecindad de (ω_0, z_0) en M_n .
- ii) λ_n es constante en una vecindad de (ω_0, z_0) en M_n .

Por la analiticidad de f , se puede reformular i) como :

- i') P_n es inyectiva en una vecindad de (ω_0, z_0) .

Observación: Si para algún $\omega_0 \in W$, f_{ω_0} tiene un punto periódico persistentemente indiferente, entonces para todo $\omega \in W$, f_ω tiene un punto periódico indiferente.

A continuación se enunciará un Teorema que da diferentes caracterizaciones de la estabilidad sobre el conjunto de Julia.

a) Teorema [MSS] Sea $\{f_\omega\}_{\omega \in W}$ una familia analítica de endomorfismos racionales y sea ω_0 un punto de W . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) Existe una vecindad W_0 de ω_0 tal que para todo $\omega \in W_0$, $f_\omega|J(f_\omega)$ es topológicamente conjugada a $f_{\omega_0}|J(f_{\omega_0})$, y $J(f_\omega)$ depende continuamente de $\omega \in W_0$ con respecto a la distancia de Hausdorff entre dos conjuntos cerrados.
- 2) Existe una vecindad W_0 de ω_0 tal que para todo $\omega \in W_0$, todo punto periódico de f_ω es atractor, o repulsor, o persistentemente indiferente.

Definición: Se dice que f_{ω_0} es **J-estable** (Julia-estable) si cualquiera de las condiciones anteriores se satisface en ω_0 .

El siguiente es un importante resultado debido a Mañé, Sad y Sullivan [MSS] .

b) Teorema Sea $\{f_\omega\}_{\omega \in W}$ una familia analítica de endomorfismos racionales. El Conjunto $\{\omega \in W : f_\omega \text{ es J-estable}\}$ es abierto y denso en W .

0.2.11 Ahora veremos el concepto de **Hiperbolicidad** .

Definición: Se dice que una aplicación racional R es **hiperbólica** si existe una métrica conforme $\omega(z)|dz|$ definida en una vecindad U de $J(R)$ con respecto a la cual R es expansiva sobre $J(R)$, es decir si existen constantes $c > 0$ y $\lambda > 1$ tales que:

$$\|(R^n)'(z)\|_\omega \geq c\lambda^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall z \in J(R) \text{ donde:}$$

$$\|(R^n)'(z)\|_\omega := \frac{\omega(R^n(z))}{\omega(z)} |(R^n)'(z)| .$$

Se tienen los dos siguientes resultados:

a) Teorema Sea $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una aplicación racional de grado ≥ 2 y sea $C^+(R) = \bigcup_{n \geq 0} R^n(C(R))$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) R es hiperbólica.
- b) La órbita positiva de cada punto crítico de R converge hacia alguna órbita periódica atractora.
- c) $\overline{C^+(R)} \cap J(R) = \emptyset$.
- d) No hay en $J(R)$ órbitas periódicas racionalmente indiferentes ni puntos críticos de R .

b) Teorema Toda aplicación racional hiperbólica es J - estable.

0.2.12 Por último, veremos lo necesario sobre el concepto algebraico de **Resultante**.

Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ dos polinomios con coeficientes en un cuerpo conmutativo K , donde $n, m \geq 1$. Se llama **resultante** entre P y Q al determinante:

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

donde, en el determinante anterior, hay m filas con a_i 's, y n filas con b_j 's. Se tiene el siguiente importante resultado (ver [Ja]. pp. 325) :

Teorema Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ dos polinomios con coeficientes en el cuerpo conmutativo K , donde $n, m \geq 1$. Entonces $\text{Res}(P, Q) = 0$ si y sólo si $a_n = b_m = 0$ o $P(x)$ y $Q(x)$ tienen un factor en común de grado positivo en $K[x]$.

CAPITULO 1

CONJUNTO DE MANDELBROT DE LA FAMILIA \mathcal{F}_d

En este Capítulo se introducen las familias \mathcal{F}_d de endomorfismos racionales con las cuales se trabajará. Se prueba que las aplicaciones racionales de dichas familias no tienen anillos de Herman. Se obtiene una caracterización dinámica del conjunto de Mandelbrot de \mathcal{F}_d , $M(\mathcal{F}_d)$, $\forall d \geq 2$. Se definen las componentes hiperbólicas de \mathcal{F}_d (para cada d) y se estudia su relación con el conjunto de Mandelbrot. Luego se ve como varía el conjunto de Fatou $F(R)$ cuando R recorre $\partial M(\mathcal{F}_d)$. Se continúa con una reducción de la conjetura de la hiperbolicidad a otra conjetura más simple. Se demuestra que el conjunto de parámetros parabólicos es numerable. Finalmente se prueba que las clases de conjugación cuasiconforme en la familia \mathcal{F}_d son o bien un abierto arco-conexo de \mathbb{C} o bien se reducen a un punto.

1.1 Introducción.

Dada la dificultad de estudiar la dinámica de la clase de las funciones racionales en la esfera de Riemann, es natural considerar subfamilias de funciones racionales que dependen analíticamente de uno o más parámetros complejos. Puesto que la dinámica global de un endomorfismo racional depende esencialmente del comportamiento de las órbitas positivas de los puntos críticos (ver 0.2.5), usualmente se estudia subfamilias caracterizadas por condiciones en dichas órbitas positivas. Por ejemplo la familia polinomial cuadrática $\mathcal{P}_2 = \{z \mapsto p_c(z) = z^2 + c : c \in \mathbb{C}\}$, que corresponde a la familia de aplicaciones racionales de grado 2 con un punto crítico fijo, ha sido ampliamente estudiada. En la presente Tesis, se considera las familias de aplicaciones racionales de grado d ($d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ cualquiera) que tienen dos puntos críticos y que envían uno de ellos en el otro. Pasemos a precisar lo anterior.

Supongamos que $R : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es una aplicación racional de grado $d \geq 2$; entonces ella tiene $2(d-1)$ puntos críticos contando multiplicidades. Si R tiene exactamente 2 puntos críticos, $c_1(R)$ y $c_2(R)$, cada $c_i(R)$ tiene necesariamente multiplicidad $d-1$. Si $\{c_1(R), c_2(R)\}$ es una órbita periódica de período 2 para R , conjugando con una transformación de Möbius M que lleve $c_1(R)$ y $c_2(R)$ en 0 e ∞ respectivamente, y algún punto fijo de R en 1, se obtiene que $S = M \circ R \circ M^{-1}$ es la aplicación $S(z) = 1/z^d$. En este caso R es

analíticamente conjugada a $z \mapsto 1/z^d$, cuya dinámica se describe trivialmente. Si $R(c_1(R)) = c_2(R)$ pero $R(c_2(R)) \neq c_1(R)$, conjugando con la transformación de Möbius M que lleva $c_1(R)$, $c_2(R)$ y $R(c_2(R))$ en 0 , ∞ y 1 respectivamente se obtiene que $S = M \circ R \circ M^{-1}$ tiene la forma $S(z) = 1 + 1/\omega z^d$ donde $\omega \in \mathbb{C}^*(:= \mathbb{C} \setminus \{0\})$; luego $R \sim z \mapsto 1 + 1/\omega z^d$. Con esto hemos probado que la familia: $\{R \in \mathcal{R}_d : C(R) = \{c_1(R), c_2(R)\}, R(c_1(R)) = c_2(R)\}$ se puede describir módulo conjugación por:

$$\mathcal{F}_d := \{z \mapsto f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^d : \omega \in \mathbb{C}^*\} \cup \{z \mapsto f_0(z) = 1/z^d\}.$$

En esta Tesis nos restringimos a estudiar la dinámica de las aplicaciones en \mathcal{F}_d con $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.

La familia \mathcal{F}_d ha sido estudiada por M. Lyubich [Ly1], J. Milnor [Mi2] (para $d = 2$), y M. Rees [Re] (para $d \geq 2$ cualquiera).

\mathcal{F}_d es una familia reducida, es decir diferentes miembros de ella no son analíticamente conjugados. Otras familias analíticamente equivalentes a \mathcal{F}_d (que en raras ocasiones consideraremos) son:

$$\{z \mapsto R_c(z) = 1/(z^d + c) : c \in \mathbb{C}\} \quad \text{y} \quad \{z \mapsto g_c(z) = c + 1/z^d : c \in \mathbb{C}\}.$$

Estas 2 últimas no son reducidas. De hecho se tiene que para $c \in \mathbb{C}^*$:

$$g_c \sim R_c \sim f_w \iff c^{d+1} = w$$

Observación: Cada $f_\omega \in \mathcal{F}_d$ tiene esencialmente una órbita de punto crítico. Esto facilita el estudio de su dinámica. De hecho, por 0.2.5, el número de componentes periódicas en $F(f_\omega)$ tiene fuertes restricciones. Por ejemplo si hay una órbita de componentes atractoras o parabólicas, sólo existe esa órbita de componentes periódicas en $F(f_\omega)$.

1.2 Caracterización del conjunto de Mandelbrot.

En el estudio de la dinámica de aplicaciones racionales interesa naturalmente describir propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou. Topológicamente un conjunto de Julia o bien es conexo o bien tiene una cantidad no numerable de componentes conexas. Por esto, al considerar una familia cualquiera de aplicaciones racionales, resulta natural definir el **conjunto de Mandelbrot** de la familia como la clausura del conjunto de aplicaciones de la familia cuyo conjunto de Julia es conexo.

En nuestro caso tenemos:

$$M(\mathcal{F}_d) := \overline{\{w \in \mathbb{C} : J(f_w) \text{ es conexo}\}}$$

En esta tesis nos interesa (entre otras cosas) obtener una caracterización dinámica del conjunto de Mandelbrot $M(\mathcal{F}_d)$.

Como $J(f_\omega)$ es conexo ssi toda componente de $F(f_\omega)$ es simplemente conexa, para describir $M(\mathcal{F}_d)$ debemos considerar la conectividad de las componentes de $F(f_\omega)$. Comenzamos por analizar las componentes periódicas en $F(f_\omega)$. Existen 4 posibilidades para dichas componentes: atractora, parabólica, disco de Siegel y anillo de Herman. A continuación estudiamos la conectividad en cada uno de estos casos.

1.2.1 Proposición *Si $F(f_\omega)$ tiene una componente periódica atractora de período 1, entonces esta tiene conectividad infinita y es igual a $F(f_\omega)$.*

Dem: Sea F_0 una componente fija atractora para f_ω . Veamos que ambos puntos críticos, 0 e ∞ , están en F_0 . De hecho, por 0.2.5 F_0 contiene al menos un punto crítico de f_ω . Si $0 \in F_0$ entonces $\infty = f_\omega(0) \in f_\omega(F_0) = F_0$. Por otro lado, si $\infty \in F_0 = f_\omega(F_0)$, existe $z_1 \in F_0$ tal que $f_\omega(z_1) = \infty$. Como $z = 0$ es la única solución de $f_\omega(z) = \infty$ (porque $\delta_{f_\omega}(0) = d - 1$) entonces $0 = z_1 \in F_0$. Así 0 e ∞ pertenecen a F_0 .

Aplicando la relación de Riemann - Hurwitz a $f_\omega : F_0 \rightarrow F_0$ se obtiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\chi(F_0) + \delta_{f_\omega}(F_0) = m\chi(F_0)$. Pero necesariamente $m = d$ pues $\delta_{f_\omega}(0) = d - 1$. Es decir, $\chi(F_0) + 2(d - 1) = d\chi(F_0)$.

Si $\chi(F_0)$ fuera finita, se deduce $\chi(F_0) = 2$, y por tanto $F_0 = \bar{\mathbb{C}}$, lo cual es un absurdo ya que $J(f_\omega) \neq \emptyset$. Así F_0 tiene conectividad infinita y como F_0 es completamente invariante, $F(f_\omega) = F_0$.

Observación: En el caso anterior vimos que todos los puntos críticos de f_ω pertenecen a una única componente de $F(f_\omega)$, a saber F_0 . Si usamos el resultado 0.2.7 no sólo deducimos que $J(f_\omega)$ es desconexo, sino que $J(f_\omega)$ es totalmente desconexo. Como $J(f_\omega)$ es compacto y perfecto, podemos afirmar que en el caso 1.2.1, $J(f_\omega)$ es un conjunto de Cantor.

1.2.2 Proposición *Si $F(f_\omega)$ tiene un ciclo de componentes periódicas atractoras de período $n \geq 2$, entonces toda componente de $F(f_\omega)$ es simplemente conexa.*

Dem: Sea $\{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}$ un ciclo de componentes atractoras de período $n \geq 2$, $F_i = f_\omega^i(F_0)$ para cada i . Por 0.2.5, $F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ contiene un punto crítico de f_ω . Como $\{0\} = f_\omega^{-1}(\infty)$ se deduce que tanto 0 como ∞ pertenecen a $F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$. Supongamos sin pérdida de generalidad, que $0 \in F_0$ e $\infty \in F_1$.

Sea z_0 el punto periódico atractor contenido en F_0 . Como la órbita de z_0 es atractora, existe dominio de Jordan U , vecindad de z_0 , tal que $f_\omega^n(U) \subseteq U \subseteq F_0$ y $\partial U \cap \theta^+(0) = \emptyset$. Si denotamos por U_k ($\forall k \in \mathbb{N}$) a la componente de $f_\omega^{-kn}(U)$ que contiene a z_0 , entonces por Riemann - Hurwitz existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_\omega^m : U_1 \rightarrow U$ es un m -recubrimiento ramificado, y

$$\chi(U_1) + \delta_{f_\omega}(U_1) = m\chi(U) \quad \text{con} \quad \chi(U) = 1.$$

Existe dos posibilidades. Si $0 \notin U_1$, $\chi(U_1) + 0 = m \geq 1$, de donde necesariamente $m = 1$ y $\chi(U_1) = 1$. Si $0 \in U_1$, $\delta_{f_\omega}(U_1) = \delta_{f_\omega}(0)$ y $m \geq \delta_{f_\omega}(0) + 1$. Luego $\chi(U_1) = m - \delta_{f_\omega}(U_1) \geq 1$. Es decir $\chi(U_1) = 1$. En ambos casos se obtiene $\chi(U_1) = 1$.

De la misma forma, aplicando Riemann - Hurwitz a $f_\omega : U_2 \rightarrow U_1$ se obtiene $\chi(U_2) = 1$, donde $U \subseteq U_1 \subseteq U_2$.

Se obtiene una sucesión creciente:

$$U \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_k \subseteq U_{k+1} \subseteq \dots \subseteq F_0, \text{ tal que:}$$

$$\chi(U_k) = 1, \quad \forall k \quad \text{y} \quad F_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Se deduce que $\chi(F_0) = 1$. A partir de esto último, la fórmula de Riemann - Hurwitz implica que $F_i = f_\omega^i(F_0)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) y las componentes preperiódicas del ciclo $\{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}$ son todas simplemente conexas. Así, toda componente de $F(f_\omega)$ es simplemente conexa.

1.2.3 Proposición *Si $F(f_\omega)$ tiene una componente periódica parabólica de período 1 entonces ella tiene conectividad infinita y es igual a $F(f_\omega)$.*

La demostración es exactamente la misma que la de 1.2.1.

Observación: En el caso anterior, tal como en 1.2.1, resulta que $J(f_\omega)$ es un conjunto de Cantor. De 0.2.8 vemos que 1.2.3 corresponde a cuando f_ω tiene un punto fijo z_0 con $f'_\omega(z_0) = 1$ y $f''_\omega(z_0) \neq 0$.

1.2.4 Proposición *Si $F(f_\omega)$ tiene un ciclo de componentes periódicas parabólicas de período $n \geq 2$ entonces toda componente de $F(f_\omega)$ es simplemente conexa.*

La demostración es análoga a la hecha en 1.2.2 : En este caso U se toma como un pétalo atractor para f_ω^n en el correspondiente punto periódico racionalmente indiferente $z_0 \in \partial F_0$. Obsérvese que aquí el período de z_0 es un divisor de n , que no necesariamente es igual a n .

A continuación, veremos un resultado que no sólo es fundamental en esta sección, sino también lo será mas adelante. Ver Apéndice.

1.2.5 Lema *Las aplicaciones $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^d$, con $\omega \in \mathbb{C}^*$ y $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, no tienen anillos de Herman.*

Demostración: Aquí damos más detalles respecto a la demostración presentada en el trabajo contenido en el apéndice de esta tesis. Supongamos por el absurdo que $F(f_\omega)$ tiene un ciclo de anillos de Herman $\{H_0, H_1, \dots, H_{m-1}\}$. Sea $C_0 \subseteq H_0$ una curva de Jordan analítica invariante por f_ω^m , y sean $C_j := f_\omega^j(C_0) \subseteq H_j$, para $j = 0, 1, \dots, m-1$, sus imágenes por f_ω , las cuales son también curvas de Jordan analíticas invariantes por f_ω^m . Los puntos críticos de f_ω , 0 e ∞ , no pertenecen a $\bigcup_{j=0}^{m-1} C_j$ ni a sus preimágenes. Cada C_j está contenida en \mathbb{C} , y tiene al punto crítico 0 en su región interior $I(C_j)$ ($:=$ componente acotada de $\mathbb{C} \setminus C_j$), o bien en su región exterior $E(C_j)$ ($:=$ componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus C_j$).

Por la expresión de f_ω se tiene que si $z_0, z \in \bar{\mathbb{C}}$ son tales que $f_\omega(z_0) = z$, entonces $f_\omega^{-1}(z) = \{z_0, \nu z_0, \nu^2 z_0, \dots, \nu^{d-1} z_0\}$ donde $\nu = e^{2\pi i/d}$. De lo anterior se obtiene que $f_\omega^{-1}(\mathcal{C}_{j+1}) = \bigcup_{k=0}^{d-1} \nu^k \mathcal{C}_j$, para $j = 0, 1, \dots, m-1$, donde por definición $\mathcal{C}_m := \mathcal{C}_0$. Además, del hecho que $f_\omega|_{\mathcal{C}_j}$ es inyectiva, la unión anterior es disjunta, esto es, $\nu^k \mathcal{C}_j \cap \nu^l \mathcal{C}_j = \emptyset$, si $0 \leq k < l \leq d-1$.

Consideremos las 2 siguientes posibilidades complementarias:

a) $0 \in I(\mathcal{C}_j)$, para algún $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. En este caso, si $\nu = e^{2\pi i/d}$ entonces $\nu \mathcal{C}_j := \{\nu z : z \in \mathcal{C}_j\}$ es también una curva de Jordan que tiene al 0 en su región interior. Además, por lo anterior sabemos que $\mathcal{C}_j \cap \nu \mathcal{C}_j = \emptyset$. Luego una de ellas está contenida en la región interior de la otra. Si $\nu \mathcal{C}_j \subseteq I(\mathcal{C}_j)$ (resp. $\mathcal{C}_j \subseteq I(\nu \mathcal{C}_j)$), entonces $\text{Area}(I(\nu \mathcal{C}_j)) < \text{Area}(I(\mathcal{C}_j))$, (resp. $\text{Area}(I(\mathcal{C}_j)) < \text{Area}(I(\nu \mathcal{C}_j))$), donde Area representa la medida de Lebesgue en \mathbb{C} . Esto es una contradicción ya que esta medida es invariante por rotación. Así, la posibilidad a) nos llevó a una contradicción.

b) $0 \in E(\mathcal{C}_j)$, para todo $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Se sabe que $f_\omega(\mathcal{C}_j) = \mathcal{C}_{j+1} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Sea $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Afirmación 1: $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) \subseteq I(\mathcal{C}_{j+1})$ o $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) \subseteq E(\mathcal{C}_{j+1})$.

En efecto, si no es así, existe $z \in I(\mathcal{C}_j)$ tal que $f_\omega(z) \in \mathcal{C}_{j+1}$, es decir tal que $z \in f_\omega^{-1}(\mathcal{C}_{j+1}) = \bigcup_{k=0}^{d-1} \nu^k \mathcal{C}_j$. Por lo tanto $I(\mathcal{C}_j) \cap \nu^k \mathcal{C}_j \neq \emptyset$, para algún $k \in \{1, \dots, d-1\}$, de donde como $\mathcal{C}_j \cap \nu^k \mathcal{C}_j = \emptyset$, obtenemos que $\nu^k \mathcal{C}_j \subseteq I(\mathcal{C}_j)$. De esto último concluimos que $\text{Area}(I(\nu^k \mathcal{C}_j)) < \text{Area}(I(\mathcal{C}_j))$, lo cual es un absurdo.

Afirmación 2: $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) = I(\mathcal{C}_{j+1})$.

En efecto: en primer lugar observemos que $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) \subseteq I(\mathcal{C}_{j+1})$, ya que si no fuera así, entonces $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) \subseteq E(\mathcal{C}_{j+1})$. Como la frontera $\partial f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) \subseteq f_\omega(\mathcal{C}_j) = \mathcal{C}_{j+1}$ se tendría que $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) = E(\mathcal{C}_{j+1})$. Como $0 \in E(\mathcal{C}_j)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|z| \geq \varepsilon, \forall z \in I(\mathcal{C}_j)$. Luego, existe $M > 0$ tal que $|f_\omega(z)| \leq M, \forall z \in I(\mathcal{C}_j)$. Es decir $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) \subseteq B(0, M)$, lo cual contradice el hecho que $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) = E(\mathcal{C}_{j+1})$.

Así, se ha probado que $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) \subseteq I(\mathcal{C}_{j+1})$, y como $\partial f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) \subseteq f_\omega(\mathcal{C}_j) = \mathcal{C}_{j+1}$ se tiene de hecho que $f_\omega(I(\mathcal{C}_j)) = I(\mathcal{C}_{j+1}) \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Por lo tanto: $\bigcup_{n \geq 0} f_\omega^n(I(\mathcal{C}_0)) \subseteq I(\mathcal{C}_0) \cup I(\mathcal{C}_1) \cup \dots \cup I(\mathcal{C}_{m-1})$, que obviamente evita más de 2 puntos de $\bar{\mathbb{C}}$. Por Montel (0.2.1), $\{f_\omega^n\}_{n \geq 0}$ es normal en $I(\mathcal{C}_0)$, de donde $I(\mathcal{C}_0) \subseteq F(f_\omega)$, lo cual es un absurdo ya que $I(\mathcal{C}_0)$ contiene a una de las dos componentes de ∂H_0 , y $\partial H_0 \subseteq J(f_\omega)$. Luego la posibilidad b) también nos llevó a una contradicción.

Se ha probado entonces que $F(f_\omega)$ no tiene anillos de Herman.

Observación: Vale la pena mencionar que Lyubich en [Ly1] pregunta si las aplicaciones $f_\omega \in \mathcal{F}_2$ tienen o no anillos de Herman. Una respuesta fue dada por Shishikura [Sh] quien, vía cirugía cuasiconforme, probó que las aplicaciones racionales de grado 2 no tienen anillos de Herman. La demostración aquí presentada utiliza argumentos topológicos y vale para las familias $\mathcal{F}_d, d \geq 2$.

1.2.6 Proposición Si $F(f_\omega)$ tiene un disco de Siegel, entonces toda componente de $F(f_\omega)$ es simplemente conexa.

Dem: supongamos que $F(f_\omega)$ tiene un disco de Siegel. Como los únicos 2 puntos críticos de f_ω están en una misma órbita, se deduce por 0.2.5 que $C(f_\omega) \subseteq J(f_\omega)$ y que $F(f_\omega)$ no tiene ni componentes atractoras ni componentes parabólicas. Además, como $F(f_\omega)$ no tiene anillos de Herman (por 1.2.5), entonces las componentes periódicas de $F(f_\omega)$ sólo pueden ser discos de Siegel. Por lo tanto, todas las componentes periódicas de $F(f_\omega)$ son simplemente conexas. Aplicando Riemann - Hurwitz se obtiene que toda componente preperiódica de $F(f_\omega)$ es también simplemente conexa. Esto prueba la proposición.

Observación: Por lo ya expuesto, si $J(f_\omega)$ es conexo entonces f_ω no puede tener ni un punto fijo atractor, ni un punto fijo z_0 con $f'_\omega(z_0) = 1$. Recíprocamente, si f_ω no tiene ni punto fijo atractor ni punto fijo z_0 con $f'_\omega(z_0) = 1$, entonces las posibilidades para las componentes periódicas de $F(f_\omega)$ (en caso que $F(f_\omega) \neq \emptyset$) son: un disco de Siegel; una componente parabólica de período ≥ 2 ; ó una componente atractora de período ≥ 2 . De lo anterior resulta que $J(f_\omega)$ es conexo. Así tenemos el siguiente:

1.2.7 Teorema (Caracterización) Sea $f_\omega \in \mathcal{F}_d$, con $d \geq 2$. Entonces $J(f_\omega)$ es conexo si y sólo si f_ω no tiene punto fijo atractor y no tiene punto fijo z_0 con $f'_\omega(z_0) = 1$.

Observación: Cabe mencionar que en el caso $d = 2$, la caracterización anterior ya había sido obtenida por Yongcheng (ver [Yo]), utilizando el resultado de Shishikura mencionado mas arriba.

1.2.8 Ahora, veamos una caracterización del Conjunto de Mandelbrot.

Antes que nada observemos que $\omega_0 = -d(1 + (1/d))^{d+1}$ es el único parámetro tal que f_{ω_0} tiene un punto fijo z_0 con $f'_{\omega_0}(z_0) = 1$. Para este parámetro, $J(f_{\omega_0})$ no es conexo, pero $\omega_0 \in \overline{\{\omega \in \mathbb{C} : J(f_\omega) \text{ es conexo}\}}$. De hecho este es también el único parámetro que se agrega al tomar clausura. De esto se tiene que:

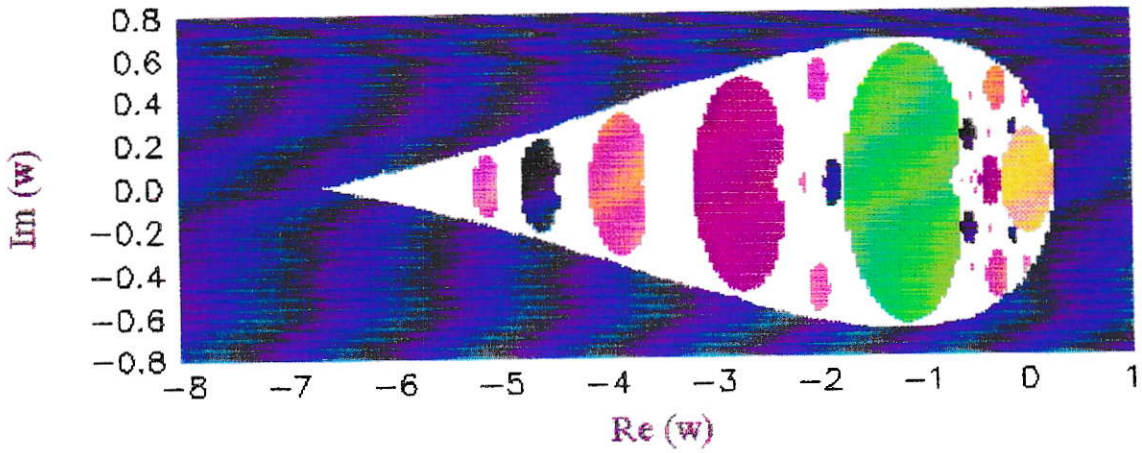
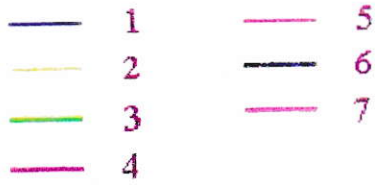
$$\begin{aligned} M(\mathcal{F}_d) &:= \overline{\{\omega \in \mathbb{C} : J(f_\omega) \text{ es conexo}\}} \\ &= \{\omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ no tiene punto fijo atractor}\}. \end{aligned}$$

Se deduce también que $\partial M(\mathcal{F}_d) = \{\omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ tiene un punto fijo indiferente}\}$
 $= \{\omega \in \mathbb{C} : \exists z \text{ con } f_\omega(z) = z \text{ y } |f'_\omega(z)| = 1\}$.

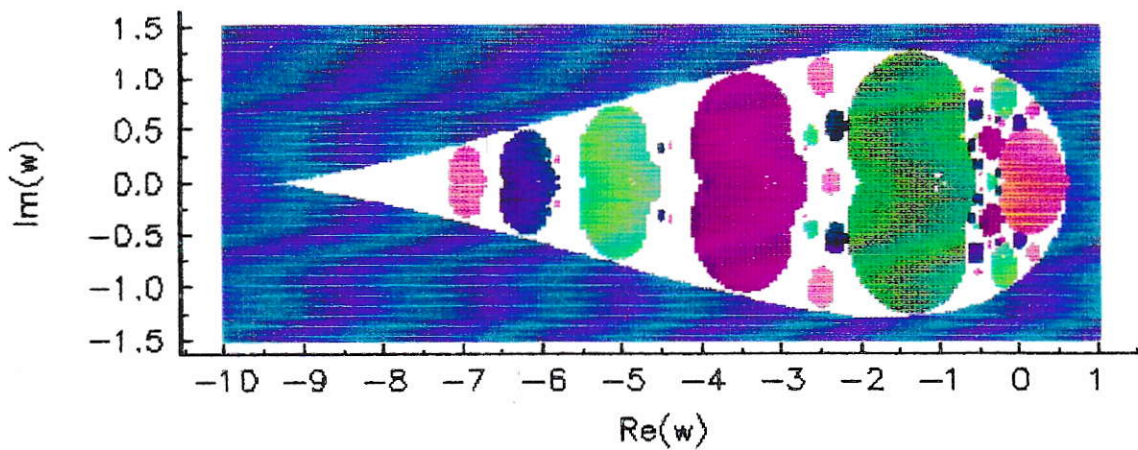
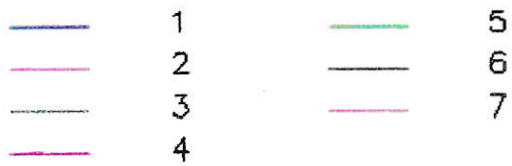
Para describir la frontera $\partial M(\mathcal{F}_d)$ resolvemos el siguiente sistema en (z, ω) :

$$\begin{cases} f_\omega(z) = z \\ |f'_\omega(z)| = 1. \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene la solución paramétrica:



$M(\mathcal{F}_2)$ con algunas componentes hiperbólicas en su interior



$M(\mathcal{F}_3)$ con algunas componentes hiperbólicas en su interior

1.3.3 Ahora estudiemos la forma en que los conjuntos A_k , $k \geq 2$, se distribuyen en el conjunto de Mandelbrot $M(\mathcal{F}_d)$. Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, el conjunto $\{\omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ tiene un punto periódico superatractor de período } k\}$ tiene una cantidad finita de elementos.

En la siguiente proposición, k representa un número natural cualquiera.

Proposición Si $\omega_0 \in \partial A_k$, entonces $\omega_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n$, donde $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de parámetros distintos tal que f_{ω_n} tiene un punto periódico superatractor. Por lo mencionado antes, el período del punto periódico superatractor de f_{ω_n} tiende a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$.

Dem: Sea $\omega_0 \in \partial A_k$ y supongamos por el absurdo que existe un dominio U , vecindad de ω_0 , tal que f_ω no tiene punto periódico superatractor, para todo $\omega \in U$. Tomando U pequeño, podemos considerar una rama de $\omega \mapsto (-1/\omega)^{1/d}$ como una función analítica definida en U . Se tiene que $\forall \omega \in U$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_\omega^n(\infty) \neq (-1/\omega)^{1/d}$ (ya que de lo contrario existirían $\omega \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ con $f_\omega^{n+2}(\infty) = \infty$, de donde f_ω tendría un punto periódico superatractor). Por la misma razón, se tiene asimismo que $\forall \omega \in U$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_\omega^n(\infty) \neq 0$ y $f_\omega^n(\infty) \neq \infty$. Por lo tanto $g_n(\omega) := f_\omega^n(\infty)/(-1/\omega)^{1/d}$ omite los valores $0, 1$ e ∞ en U , $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema de Montel (0.2.1), $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal en U , por lo que la familia $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $\Phi_n(\omega) := f_\omega^n(\infty)$ es también normal en U .

Sean $\omega_1 \in U \cap A_k$ y $B = B(\omega_1, r)$ una bola abierta de centro ω_1 , contenida en U , tal que $\forall \omega \in B$ f_ω tiene una órbita periódica atractora de período k , digamos $\{z_0(\omega), \dots, z_{k-1}(\omega)\}$, donde cada $z_j(\omega)$ depende analíticamente de ω . Por (0.2.5) se tiene que $\forall \omega \in B$, el punto crítico ∞ pertenece a la cuenca inmediata de atracción de algún $z_j(\omega)$, digamos $z_0(\omega)$. Esto es, $\forall \omega \in B$, $f_\omega^{nk}(\infty) \rightarrow z_0(\omega)$, cuando $n \rightarrow \infty$. Así, tenemos que $\{\Phi_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia normal en U tal que $\Phi_{nk}(\omega) \rightarrow z_0(\omega)$, $\forall \omega \in B$. Luego por el Teorema de Vitali (0.2.1), $\{\Phi_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en los compactos de U a una función analítica $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ la cual coincide con la función z_0 en B . Como la relación entre funciones analíticas $f_\omega^k(h(\omega)) = h(\omega)$ se satisface $\forall \omega \in B$, también se satisface $\forall \omega \in U$. Luego, para cada $\omega \in U$, $h(\omega)$ es un punto fijo de f_ω^k . Consideremos la función analítica $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\lambda(\omega) = (f_\omega^k)'(h(\omega))$. Como $\omega_0 \in \partial A_k$, $|\lambda(\omega_0)| = 1$, por lo cual, ya que $|\lambda(\omega_1)| < 1$, la función analítica λ es no constante (y luego abierta), con $|\lambda(\omega_0)| = 1$. Por lo tanto existe un abierto W , contenido en U , tal que $|\lambda(\omega)| > 1$, $\forall \omega \in W$. Pero $h(\omega)$ puede ser un punto fijo repulsor para f_ω^k sólo si $f_\omega^{nk}(\infty) = h(\omega)$, para algún $n \in \mathbb{N}$ (n dependiendo de ω). Lo anterior implica que para cada $\omega \in W$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_\omega^k(f_\omega^{nk}(\infty)) = f_\omega^{nk}(\infty)$. Esto último es una contradicción, ya que el conjunto de parámetros ω que satisface una relación como la anterior es numerable.

Observación: Utilizando un resultado de Lyubich (Theorem 2.4 de [Ly1]), se puede demostrar la Proposición anterior en una forma más breve. Sin embargo, hemos preferido entregar una demostración más larga, pero que utiliza sólo herramientas básicas.

Lo anterior nos da una idea de la forma en que los conjuntos A_k , $k \geq 2$, se distribuyen en el conjunto de Mandelbrot: todo punto en $\bigcup_{k \geq 1} \partial A_k$ (en particular, todo punto en $\partial M(\mathcal{F}_d)$) es acumulado por componentes de $\bigcup_{k \geq 1} A_k$.

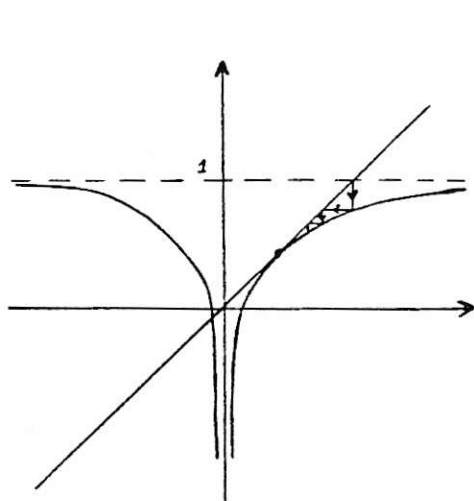
1.3.4 Veremos ahora que $\omega_0 = -d(1+1/d)^{d+1}$, el único punto singular de $\partial M(\mathcal{F}_d)$, es límite de una sucesión real $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que f_{ω_n} tiene un punto periódico superatractor.

Observemos que si z_0 es el punto fijo de f_{ω_0} tal que $f'_{\omega_0}(z_0) = 1$, entonces $f''_{\omega_0}(z_0) < 0$. Los gráficos de f_{ω_0} , casos d par y d impar, están en la figura que sigue.

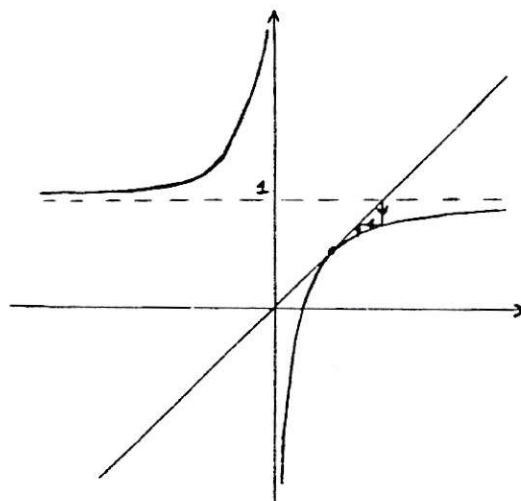
Proposición: $\forall \varepsilon > 0$, existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que $f_{\omega_0 + \varepsilon_1}$ tiene un punto periódico superatractor.

Dem: Notemos que $(\partial f_{\omega}(x)/\partial \omega)|_{\omega = \omega_0} < 0$, $\forall x \in]0, \infty[$. Luego, si ω crece desde ω_0 , la parte del gráfico de f_{ω} en $]0, \infty[$ baja.

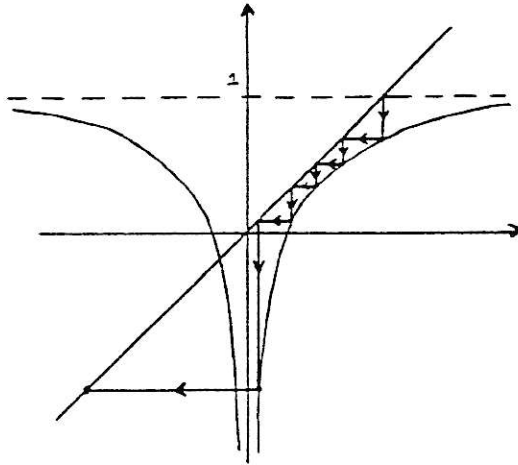
Sea $\varepsilon > 0$ pequeño. Al observar el gráfico de $f_{\omega_0 + \varepsilon/2}$ se concluye que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_{\omega_0 + \varepsilon/2}^j(1) > 0$, $\forall j = 0, 1, \dots, n-1$ y $f_{\omega_0 + \varepsilon/2}^n(1) \leq 0$. Si $f_{\omega_0 + \varepsilon/2}^n(1) = 0$ entonces $\{0, \infty, 1, \dots, 0\}$ es una órbita periódica superatractora para $f_{\omega_0 + \varepsilon/2}$. Si $f_{\omega_0 + \varepsilon/2}^n(1) < 0$ entonces como $f_{\omega_0}^n(1) > 0$, por la continuidad de $\omega \mapsto f_{\omega}^n(1)$, existe $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon/2[$ tal que $f_{\omega_0 + \varepsilon_1}^n(1) = 0$. Es decir, $f_{\omega_0 + \varepsilon_1}$ tiene una órbita periódica superatractora.



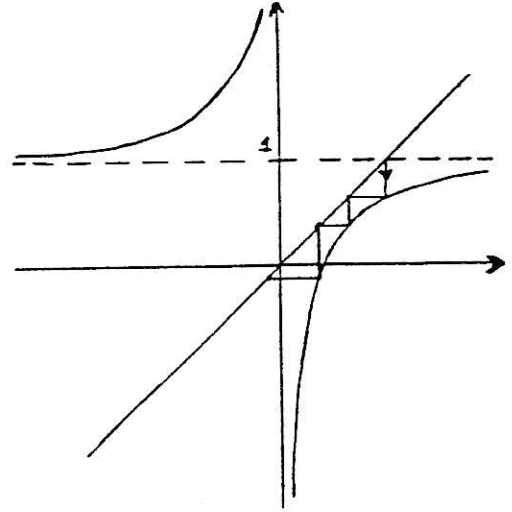
f_{ω_0} para d par.



f_{ω_0} para d impar.



$f_{\omega_0 + \epsilon/2}$ para d par



$f_{\omega_0 + \epsilon/2}$ para d impar.

1.4 Bifurcaciones sobre $\partial M(\mathcal{F}_d)$.

En este apartado estudiamos como es el conjunto de Fatou de f_ω cuando ω recorre la frontera $\partial M(\mathcal{F}_d)$.

Se sabe que para la familia polinomial cuadrática $\mathcal{P}_2 = \{z \mapsto p_c(z) = z^2 + c : c \in \mathbb{C}\}$, el correspondiente conjunto de Mandelbrot tiene la descripción $M(\mathcal{P}_2) = \{c : \text{la órbita positiva del punto crítico } 0, \{p_c^n(0)\}_{n \geq 0}, \text{ es acotada}\}$, la cual es claramente diferente a la descripción que tiene el conjunto de Mandelbrot de nuestra familia \mathcal{F}_d (ver 1.2.8). Existe un resultado para la familia \mathcal{P}_2 el cual afirma que el conjunto $\{c : p_c \text{ tiene un punto periódico racionalmente indiferente}\}$ es denso en la frontera $\partial M(\mathcal{P}_2)$ (ver [Ly1]). Por su parte, para la familia \mathcal{F}_d , mostraremos a continuación que el conjunto de parámetros $P = \{\omega : f_\omega \text{ tiene un punto fijo racionalmente indiferente}\}$ es un subconjunto denso de $\partial M(\mathcal{F}_d)$.

Por otro lado, al considerar la parametrización de la familia de polinomios cuadráticos. $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), existe un resultado (conocido como el Teorema de Siegel) el cual asegura que $\{\lambda \in S^1 : f_\lambda \text{ tiene un disco de Siegel en } 0\}$ tiene medida total en S^1 . En esta subsección mostraremos que un resultado análogo se da para la familia \mathcal{F}_d .

a) Proposición: *El conjunto de parámetros $P = \{\omega \in \partial M(\mathcal{F}_d) : f_\omega \text{ tiene un punto fijo racionalmente indiferente}\}$ es un subconjunto denso y numerable de $\partial M(\mathcal{F}_d)$.*

Dem: Por (1.2.8) $\partial M(\mathcal{F}_d)$ está parametrizada por S^1 en la forma $\omega(u) = du^{-1}(1 - u/d)^{d+1}$, $u \in S^1$. Esta función $\omega : S^1 \rightarrow \partial M(\mathcal{F}_d)$ es un homeomorfismo. También por (1.2.8), dado $\omega = \omega(u) \in \partial M(\mathcal{F}_d)$ existe un único $z \in \mathbb{C}$ tal que z es

punto fijo indiferente de f_ω . A saber $z = z(u) = d/(d-u)$. El multiplicador de este punto fijo queda dado por $\lambda = \lambda(u) = f'_{\omega(u)}(z(u)) = -u$. Esto prueba la proposición.

En este caso, el conjunto de Fatou $F(f_\omega)$ consiste de un ciclo parabólico y sus preimágenes.

b) Proposición: *El conjunto paramétrico $\{ \omega \in \partial M(\mathcal{F}_d) : f_\omega \text{ tiene un disco de Siegel } \}$ tiene medida total en $\partial M(\mathcal{F}_d)$.*

Dem: De la demostración de la Proposición anterior tenemos que el multiplicador del punto fijo indiferente se parametriza por $\lambda(u) = -u$, $u \in S^1$. Por el Teorema de Bryuno-Yoccoz (0.2.9), si $f_{-u}(z) = -uz + z^2$ tiene un disco de Siegel alrededor de $z = 0$, entonces $f_{\omega(u)}$ tiene un disco de Siegel alrededor de $z = z(u)$. Así, del Teorema de Siegel (0.2.9) se sigue la proposición.

En este caso, el conjunto de Fatou de $F(f_\omega)$ consiste sólo de discos de Siegel y de sus preimágenes.

1.5 La conjetura de la hiperbolicidad.

En esta subsección hacemos una reducción de la conjetura de la hiperbolicidad.

Esta conjetura, que fue planteada por P. Fatou en 1920 y que aún es un problema abierto, dice lo siguiente:

Conjetura HD: $\{ R \in \mathcal{R}_d : R \text{ es hiperbólica } \}$ es denso en \mathcal{R}_d .

Las aplicaciones racionales hiperbólicas son de interés por cuanto ellas tienen una dinámica simple de describir. Además de la conjetura anterior, Fatou planteó la siguiente:

Conjetura 2: $R \text{ es hiperbólica} \iff R \text{ es J-estable en } \mathcal{R}_d$.

Es decir, se plantea que las hiperbólicas son las únicas J-estables. Se sabe que la **Conjetura 2** implica la **Conjetura HD**, pero no recíprocamente.

Para nuestra familia \mathcal{F}_d la **Conjetura HD** toma la forma:

Conjetura HD \mathcal{F}_d : $\{ \omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ es hiperbólica } \}$ es denso en \mathbb{C} .

($\iff \{ \omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ tiene una órbita periódica atractora } \}$ es denso en \mathbb{C} .)

($\iff \bigcup_{k \geq 2} A_k = M(\mathcal{F}_d)$).

También se puede probar, como veremos, que la **Conjetura HD \mathcal{F}_d** equivale a la **Conjetura 2** sobre el espacio \mathcal{F}_d .

1.5.1 Proposición: *La Conjetura HDF_d es equivalente a la afirmación:*
 $\{ \omega \in \mathbb{C} : J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}} \}$ *tiene interior vacío.*

Dem:

Por lo visto en (1.3), f_ω es hiperbólica $\iff f_\omega$ tiene un punto periódico atractor. Para f_ω en \mathcal{F}_d existe tres posibilidades mutuamente excluyentes:

- 1) Que f_ω tenga un punto periódico atractor.
- 2) Que f_ω tenga un punto periódico indiferente.
- 3) Que todo punto periódico de f_ω sea repulsor.

Si f_{ω_0} satisface 1), por el Teorema de la función implícita, para todo ω suficientemente cercano a ω_0 , f_ω también tiene un punto periódico atractor. De donde para todo ω suficientemente cercano a ω_0 , todo punto periódico de f_ω es atractor o repulsor, y entonces por (0.2.10) f_{ω_0} es J-estable.

Si f_{ω_0} satisface 2), entonces z_0 no es persistentemente indiferente, ya que si lo fuera se tendría que para todo parámetro $\omega \in \mathbb{C}$, f_ω tendría un punto periódico indiferente (ver 0.2.10), lo cual es claramente falso. Así, si f_{ω_0} satisface 2), entonces por (0.2.10) f_{ω_0} no es J-estable.

Por último, si f_{ω_0} satisface 3), entonces del hecho que f_{ω_0} no tiene anillos de Herman (Lema 1.1.5) se deduce que $J(f_{\omega_0}) = \bar{\mathbb{C}}$. Ahora, si suponemos por un momento que el conjunto $\{ \omega \in \mathbb{C} : J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}} \}$ no tiene interior, entonces tendríamos que en este tercer caso f_{ω_0} tampoco es J-estable.

Se seguiría entonces que f_ω es J-estable si y sólo si f_ω es hiperbólica. Dado que el conjunto $\{ \omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ es J-estable} \}$ es denso en \mathbb{C} (ver Teorema 0.2.10.b) . concluimos que el conjunto $\{ \omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ es hiperbólica} \}$ es también denso en \mathbb{C} . Así, se ha probado que la conjetura HDF_d se reduce a probar la siguiente:

Conjetura: El conjunto $\{ \omega \in \mathbb{C} : J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}} \}$ tiene interior vacío.

Cabe mencionar aquí que M. Rees en [Re] probó que el conjunto $\{ \omega \in \mathbb{C} : J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}} \}$ tiene medida de Lebesgue positiva.

1.5.2 En este apartado veremos condiciones dinámicas suficientes para que $J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}}$. Para cada una de estas condiciones nos preguntamos si ellas son persistentes, a fin de averiguar si $\{ \omega \in \mathbb{C} : J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}} \}$ tiene interior. Recordemos que para $f_\omega \in \mathcal{F}_d$ el conjunto de puntos críticos es $C(f_\omega) = \{0, \infty\}$, y

$$0 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 1 + 1/\omega \mapsto 1 + \omega^{d-1}/(\omega + 1)^d \mapsto \dots$$

Condiciones suficientes, complementarias y exhaustivas para que $J(f_{\omega_0}) = \bar{\mathbb{C}}$ son:

Caso a) La órbita positiva de los puntos críticos es preperiódica, esto es si $f_{\omega_0}^n(\infty)$ es periódico para algún $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (y no para $n = 0$). Del Teorema de las com-

ponentes y de (0.2.5) se tiene que $J(f_{\omega_0}) = \bar{\mathbb{C}}$. En este caso f_{ω_0} no es J-estable (el hecho que $f_{\omega_0}^n(\infty)$ sea periódico implica que ω_0 satisface una ecuación polinomial, la cual de ser f_{ω_0} J-estable, debería satisfacerse para todo ω en una vecindad de ω_0 , lo cual es claramente falso). Luego por un resultado de Lyubich (ver [Ly1] pp. 94) se tiene que ω_0 es acumulado por una sucesión $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que cada f_{ω_n} tiene un punto periódico racionalmente indiferente, y por lo tanto ω_0 no pertenece al interior de $\{\omega \in \mathbb{C} : J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}}\}$. Por lo tanto, este es un caso simple y resuelto.

Caso b) La órbita positiva de los puntos críticos es densa en $\bar{\mathbb{C}}$. . . (1)

En esta situación claramente $J(f_{\omega_0}) = \bar{\mathbb{C}}$. M. Lyubich [Ly1] probó que existen parámetros ω_0 que verifican esta condición. De hecho probó que ellos son densos en $\{\omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ es J-inestable}\}$. En particular, existe un cantidad infinita de parámetros ω_0 tales que f_{ω_0} satisface (1). No se sabe si esta condición es abierta o no.

Caso c) La órbita positiva de los puntos críticos está contenida en $J(f_{\omega_0})$, es infinita y no densa en $\bar{\mathbb{C}}$, y f_{ω_0} no tiene discos de Siegel. Por el Teorema de las componentes, (0.2.5), y el Lema (1.2.5), se tiene que $J(f_{\omega_0}) = \bar{\mathbb{C}}$. No sabemos si existe ω_0 tal que f_{ω_0} verifica esta condición. Tampoco se sabe si tendrá interior no-vacío.

1.5.3 Cuando restringimos el parámetro ω a \mathbb{R} , aparece una situación análoga e interesante, y que es independiente de la anterior. Más precisamente, podemos establecer:

Conjetura $\text{HD}\mathcal{F}_d\mathbb{R}$ $\{\omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ es hiperbólica}\}$ es denso en \mathbb{R} .
 ($\iff \{\omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ tiene una órbita periódica atractora}\}$ es denso en \mathbb{R} .)

En el próximo capítulo, se considerará esta conjetura y se probará que es verdadera en el caso d impar.

Esta conjetura es independiente de la **Conjetura $\text{HD}\mathcal{F}_d$** , en el sentido que ninguna de las dos implica a la otra.

1.6 Numerabilidad del conjunto de parámetros parabólicos.

En esta sección, nos dedicamos a probar un resultado que será fundamental en la resolución de la **Conjetura $\text{HD}\mathcal{F}_d\mathbb{R}$** (caso d impar), y que también será de utilidad en una reducción de la respectiva conjetura para d par.

El mencionado resultado es el siguiente:

Proposición *El conjunto de parámetros $\{\omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ tiene un punto periódico racionalmente indiferente}\}$ es numerable.*

Dem: Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto de parámetros: $\Lambda_k := \{ \omega \in \mathbb{C} : \exists z \in \mathbb{C} \text{ tal que } f_\omega^k(z) = z \text{ y } (f_\omega^k)'(z) = 1 \}$

Queremos probar que $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ es numerable.

Notar que $f_\omega^k(z) = p_\omega(z)/q_\omega(z)$ donde p_ω, q_ω son polinomios en la variable z y cuyos coeficientes son polinomios en ω .

Se tiene las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \omega \in \Lambda_k &\iff \exists z \in \mathbb{C} \text{ tal que } f_\omega^k(z) = z \text{ y } (f_\omega^k)'(z) = 1 \\ &\iff \exists z \in \mathbb{C} \text{ tal que } p_\omega(z)/q_\omega(z) = z \text{ y } (p'_\omega(z)q_\omega(z) - p_\omega(z)q'_\omega(z))/(q_\omega(z))^2 = 1 \\ &\iff \exists z \in \mathbb{C} \text{ tal que } p_\omega(z) = zq_\omega(z) \text{ y } p'_\omega(z)q_\omega(z) - p_\omega(z)q'_\omega(z) = (q_\omega(z))^2 \\ &\iff \exists z \in \mathbb{C} \text{ tal que } P_\omega(z) = P'_\omega(z) = 0, \text{ donde } P_\omega(z) = p_\omega(z) - zq_\omega(z) \text{ es} \\ &\text{un polinomio en la variable } z \text{ y cuyos coeficientes son polinomios en } \omega. \end{aligned}$$

Supongamos $P_\omega(z) = \alpha_0(\omega) + \alpha_1(\omega)z + \dots + \alpha_m(\omega)z^m$, con $\alpha_i(\omega) \in \mathbb{C}[\omega]$, para $i = 0, 1, \dots, m$.

De acuerdo a 0.2.12 tenemos que :

$$\forall \omega \in \mathbb{C} \setminus \{ \text{ceros del polinomio } \alpha_m \} : \omega \in \Lambda_k \iff \text{Res}(P_\omega, P'_\omega) = 0.$$

Pero $\text{Res}(P_\omega, P'_\omega)$ es el determinante de una matriz cuyos coeficientes son ceros, $\alpha_i(\omega)$, y múltiplos enteros de $\alpha_i(\omega)$ (para $i \in \{0, 1, \dots, m\}$). Por lo tanto, $h(\omega) = \text{Res}(P_\omega, P'_\omega)$ es un polinomio en la variable ω y con coeficientes en \mathbb{C} , esto es $h(\omega) \in \mathbb{C}[\omega]$. Además, el polinomio h no es el polinomio nulo, ya que si lo fuera entonces por la misma equivalencia anterior tendríamos que $\mathbb{C} \setminus \{ \text{ceros del polinomio } \alpha_m \} \subseteq \Lambda_k$, lo cual es claramente falso.

De todo lo anterior concluimos que Λ_k tiene una cantidad finita de elementos. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ es un conjunto numerable. Por último, es claro que si ω es tal que f_ω tiene un punto periódico racionalmente indiferente, entonces $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$.

1.7 Clases de conjugación cuasiconforme.

Así como nosotros hemos considerado la **Conjetura HD \mathcal{F}_d** y la **Conjetura HD $\mathcal{F}_d\mathbb{R}$** , diversos trabajos han sido publicados en torno a las respectivas conjeturas en la familia polinomial cuadrática \mathcal{P}_2 ([Ly2], [Mc] y [Sw], entre otros). En 1992, G. Swiatek en [Sw] resolvió la **Conjetura HD $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$** , trabajando con la parametrización $f_a(x) = ax(1-x)$, $0 < a \leq 4$. El trabajo de Swiatek consistió en probar que si f_{a_1}, f_{a_2} tienen ambos la órbita positiva del punto crítico $1/2$ acotada, y tienen una misma sucesión kneading aperiódica, entonces la conjugación topológica entre f_{a_1} y f_{a_2} sobre $[0, 1]$ es cuasisimétrica. A partir de esto, y utilizando algunos resultados anteriores, Swiatek responde positivamente a la **Conjetura HD $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$** . Entre dichos resultados anteriores está un corolario (concluido a partir de [MSS]) el cual establece que las clases de conjugación cuasiconforme de polinomios cuadráticos complejos

normalizados son o bien un abierto conexo o bien se reducen a un punto.

En la presente sección se demuestra el análogo corolario para nuestra familia \mathcal{F}_d , el cual quedará como un antecedente para ser (probablemente) utilizado a futuro.

El enunciado preciso de lo que se prueba es:

Proposición: *Las clases de conjugación cuasiconforme en la familia \mathcal{F}_d son o un abierto arco-conexo de \mathbb{C} o bien se reducen a un punto.*

1.7.1 En este apartado vemos algunas definiciones y resultados que son clásicos en la teoría de aplicaciones cuasiconformes. Para más detalles referirse a [LV].

Definiciones

1) Un homeomorfismo que preserva orientación $\phi : G \rightarrow G'$ entre dos dominios G y G' de $\bar{\mathbb{C}}$ se dice **cuasiconforme**, si :

a) La parte real $Re(\phi)$ y la parte imaginaria $Im(\phi)$ de ϕ son absolutamente continuas sobre casi todas las líneas verticales y sobre casi todas las líneas horizontales en el sentido de Lebesgue, y

b) Existe $k < 1$ tal que para $\mu_\phi(z) = \phi_{\bar{z}}(z)/\phi_z(z)$ se tiene que $|\mu_\phi(z)| \leq k$ c.t.p. en G .

2) Un **coeficiente de Beltrami** sobre un dominio G de $\bar{\mathbb{C}}$ es una función Lebesgue-medible $\mu : G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|\mu|$ tiene supremo esencial $\|\mu\|_\infty < 1$.

Si $\phi : G \rightarrow G'$ es una aplicación cuasiconforme entonces μ_ϕ es un coeficiente de Beltrami. Recíprocamente, si $\mu : G \rightarrow \mathbb{C}$ es un coeficiente de Beltrami, una pregunta natural es ¿ existe alguna aplicación cuasiconforme ϕ tal que $\mu_\phi = \mu$ c.t.p. en G ?. La respuesta es afirmativa; de hecho se tiene:

Teorema (de la aplicación medible de Riemann) [AB]

Sea $\mu : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ un coeficiente de Beltrami. Entonces existe una única aplicación cuasiconforme $\phi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ la cual satisface la ecuación diferencial de Beltrami $\phi_{\bar{z}}(z)/\phi_z(z) = \mu(z)$ c.t.p. $z \in \bar{\mathbb{C}}$, y tal que fija los puntos $0, 1, e \infty$.

Observación: Si $\phi_1, \phi_2 : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ son dos homeomorfismos cuasiconformes, entonces: $\mu_{\phi_1} = \mu_{\phi_2}$ c.t.p. en $\bar{\mathbb{C}} \iff \exists M : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ transformación de Möbius tal que $\phi_2 = M \circ \phi_1$.

Notaciones:

i) Dada un coeficiente de Beltrami $\mu : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, denotaremos por $\phi_\mu : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ al homeomorfismo cuasiconforme tal que $\mu_\phi = \mu$ c.t.p. en $\bar{\mathbb{C}}$ y $\phi_\mu(0) = 0, \phi_\mu(1) = 1, \phi_\mu(\infty) = \infty$.

ii) Si $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es una aplicación racional y $\mu : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ es un coeficiente de Beltrami, entonces anotaremos $f^*\mu = \mu$ si se cumple : $\mu(f(z)) = [f'(z)/\overline{f'(z)}]\mu(z)$ c.t.p. $z \in \bar{\mathbb{C}}$. En este caso diremos que el campo de elipses μ es invariante por f .

Se tienen los dos siguientes Lemas:

Lema 1

a) Si $\mu, \mu_n : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ($n = 1, 2, \dots$) son coeficientes de Beltrami tal que $\|\mu_n\|_\infty \leq k < 1$ y $\mu_n(z) \rightarrow \mu(z)$ c.t.p., entonces $\phi_{\mu_n} \rightarrow \phi_\mu$ uniformemente en $\bar{\mathbb{C}}$ en la métrica esférica.

b) Si $\mu : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ es un coeficiente de Beltrami, entonces para cada $t \in \Delta := \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$, $t\mu : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ también lo es, y $\phi_{t\mu} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ depende analíticamente de t , esto es, para cada $z \in \bar{\mathbb{C}}$ fijo, $t \mapsto \phi_{t\mu}(z)$ es una función analítica de $t \in \Delta$.

Lema 2 Sea $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una aplicación racional y sea $\mu : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ un coeficiente de Beltrami. Entonces $f^*\mu = \mu$ si y sólo si $g := \phi_\mu \circ f \circ \phi_\mu^{-1}$ es una aplicación racional.

Volvamos a la familia $\mathcal{F}_d := \{f_\omega : \omega \in \mathbb{C}\}$.

Definiciones: a) Diremos que f_{ω_1} es **cuasiconformemente conjugada** con f_{ω_2} (y lo denotaremos por $f_{\omega_1} \simeq f_{\omega_2}$) si existe $\phi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ homeomorfismo cuasiconforme tal que $\phi \circ f_{\omega_1} \circ \phi^{-1} = f_{\omega_2}$.

b) Dada f_{ω_0} en \mathcal{F}_d , llamaremos **clase de conjugación cuasiconforme** de f_{ω_0} al conjunto de parámetros $[f_{\omega_0}] := \{\omega \in \mathbb{C} : f_\omega \simeq f_{\omega_0}\}$.

Observemos que para $z \mapsto f_0(z) = 1/z^d$ se tiene que $[f_0] = \{0\}$.

1.7.2 Demostración de la Proposición:

Supongamos que $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son tales que $f_{\omega_1} \simeq f_{\omega_2}$ via ϕ , y $\omega_1 \neq \omega_2$. El homeomorfismo ϕ fija los puntos $0, 1$, e ∞ , de donde $\phi = \phi_\mu$, con $\mu = \mu_\phi$. Por el Lema 2 $f_{\omega_1}^*\mu = \mu$. De esto último, resulta que $f_{\omega_1}^*t\mu = t\mu, \forall t \in \Delta$. Por el Lema 2, $g_t := \phi_{t\mu} \circ f_{\omega_1} \circ \phi_{t\mu}^{-1}$ es también una aplicación racional (de grado d obviamente) $\forall t \in \Delta \cup \{1\}$ (notar que $g_1 = f_{\omega_2}$). Además los puntos críticos de g_t son $\phi_{t\mu}(C(f_{\omega_1})) = \phi_{t\mu}(\{0, \infty\}) = \{0, \infty\}$ y $g_t(0) = g_t(\phi_{t\mu}(0)) = \phi_{t\mu}(f_{\omega_1}(0)) = \phi_{t\mu}(\infty) = \infty$. Es decir $g_t \in \mathcal{R}_d, C(g_t) = \{0, \infty\}$ y $g_t(0) = \infty$. Se deduce que g_t tiene la forma $g_t(z) = \beta(t) + 1/(\alpha(t)z^d)$, con $\beta(t), \alpha(t) \in \mathbb{C}$ y $\alpha(t) \neq 0$.

Del hecho que $g_t(\phi_{t\mu}(z)) = \phi_{t\mu}(f_{\omega_1}(z)) \forall z$, se obtiene evaluando en $z = \infty$ que $\beta(t) = 1 (\forall t)$. Evaluando en $z = 1$ se obtiene $1 + 1/\alpha(t) = \phi_{t\mu}(1 + 1/\omega_1)$. De donde por el Lema 1, $t \mapsto \alpha(t)$ es analítica en Δ y es continua en $t = 1$ (porque $t_n \rightarrow 1 \implies t_n\mu \rightarrow \mu$ c.t.p. $\implies \phi_{t_n\mu}(1 + 1/\omega_1) \rightarrow \phi_\mu(1 + 1/\omega_1) \implies \alpha(t_n) \rightarrow \alpha(1)$). Además, como $\phi_0 = Id$ entonces $\alpha(0) = \omega_1$, y debido a que $g_1 = f_{\omega_2}$ se tiene $\alpha(1) = \omega_2$.

Por lo tanto, $\alpha : \Delta \cup \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en Δ y continua en $t = 1$, con $\alpha(0) = \omega_1$ y $\alpha(1) = \omega_2 \neq \omega_1$. Está claro de esto último que α no puede ser constante en Δ . Luego, $\alpha : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y no-constante, de donde $\alpha(\Delta)$ es un abierto en \mathbb{C} que contiene a $\alpha(0) = \omega_1$. Por lo tanto $U = \alpha(\Delta)$ es una vecindad abierta de ω_1 tal que $\forall \omega \in U, f_\omega \simeq f_{\omega_1}$, y luego $U \subseteq [f_{\omega_1}]$. Procediendo exactamente de la misma forma anterior se obtiene que existe V , vecindad abierta de ω_2 tal que $V \subseteq [f_{\omega_2}] = [f_{\omega_1}]$.

De todo lo anterior concluimos que $[f_{\omega_1}]$ es un abierto en \mathbb{C} . También, de la continuidad de α hasta 1 se concluye que existe camino en $[f_{\omega_1}]$ que une ω_1 y ω_2 , y por lo tanto $[f_{\omega_1}]$ es arco-conexo.

1.7.3 Observación importante: La clase de conjugación de f_{ω_0} es un abierto arco-conexo si y sólo si f_{ω_0} es estructuralmente estable (ver 0.1.8 para definición). En efecto: Dado f_{ω_0} en \mathcal{F}_d existen dos posibilidades:

1) f_{ω_0} es estructuralmente estable. En este caso existe U vecindad de ω_0 tal que para todo $\omega \in U$, f_ω y f_{ω_0} son topológicamente conjugadas y el homeomorfismo de conjugación $h_\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ depende continuamente de ω . Es posible probar que los homeomorfismos de conjugación se pueden escoger cuasiconformes (ver [Ly1], pp. 95). Luego en este caso $[f_{\omega_0}]$ es un abierto arco-conexo de \mathbb{C} .

2) f_{ω_0} no es estructuralmente estable. En este caso afirmamos que $[f_{\omega_0}] = \{\omega_0\}$. En efecto: si no fuera así, existiría $\omega \neq \omega_0$ tal que $f_\omega \simeq f_{\omega_0}$, y por la construcción anterior existiría $U = \alpha(\Delta)$ vecindad de ω_0 tal que $\forall \omega \in U, f_\omega \simeq f_{\omega_0}$, donde el homeomorfismo de conjugación es $\phi_\omega = \phi_{\alpha(t)} = \phi_{t\mu}$. Por el Lema 1 a) y el hecho que α es una aplicación abierta, ϕ_ω depende continuamente de ω . Por lo tanto concluimos que f_{ω_0} es estructuralmente estable, lo cual es una contradicción.

Cabe mencionar aquí que Mañé, Sad, Sullivan, y Thurston probaron que el conjunto de parámetros $\{\omega \in \mathbb{C} : f_\omega \text{ es estructuralmente estable}\}$ es abierto y denso en \mathbb{C} (ver [MSS], p. 200).

CAPITULO 2

ESTUDIO DE LA FAMILIA $\mathcal{F}_d\mathbb{R}$.

En este capítulo se estudia la subfamilia de \mathcal{F}_d que se obtiene cuando restringimos el parámetro ω a \mathbb{R} . Más precisamente, consideramos la familia $\mathcal{F}_d\mathbb{R} := \{f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} : \omega \in \mathbb{R}\}$. Se prueba que en este caso existen tres posibilidades para $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$: que tenga una órbita periódica atractora contenida en $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, que tenga una órbita periódica racionalmente indiferente contenida en \mathbb{R} con multiplicador $\lambda = \pm 1$, y que $J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}}$. Se deduce de lo anterior que la conjetura de la hiperbolicidad en esta familia equivale a la afirmación: $\{\omega \in \mathbb{R} : J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}}\}$ tiene interior vacío en \mathbb{R} . Se analiza la dinámica de $f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, y las bifurcaciones que experimenta cuando ω varía en \mathbb{R} . Si d es par se prueba que existe una sucesión de duplicación de períodos. Si d es impar, considerando el hecho que para $\omega < 0$, $f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es un homeomorfismo del círculo que preserva orientación, se prueba (entre otras cosas) que el conjunto $\{\omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ tiene una órbita periódica atractora}\}$ es denso en \mathbb{R} . Es decir se prueba la conjetura de la hiperbolicidad para este caso particular.

2.1 Conclusiones preliminares.

En esta sección f_ω denota una función en $\mathcal{F}_d\mathbb{R}$. Como $\omega \in \mathbb{R}$, existe una simetría respecto al eje real: $f_\omega^n(\bar{z}) = \overline{f_\omega^n(z)}$, $\forall n \geq 0$, donde la barra denota la conjugación compleja.

2.1.1 Proposición: *$F(f_\omega)$ no tiene discos de Siegel.*

Dem: Supongamos que $F(f_\omega)$ tiene un ciclo de discos de Siegel. Sea D una componente de este ciclo. Por 0.2.5 ∂D está contenida en la clausura de la órbita positiva del punto crítico 0 , la cual está contenida en $\bar{\mathbb{R}}$. Así $\partial D \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Más aún $\partial D = \bar{\mathbb{R}}$. De hecho, como ∂D es conexo, si $\partial D \neq \bar{\mathbb{R}}$ sería un intervalo en $\bar{\mathbb{R}}$ y $D = F(f_\omega)$. Entonces aplicando Riemann - Hurwitz a $f_\omega : D \rightarrow D$ se obtiene $1 + 0 = d \geq 2$, lo cual es una contradicción.

Como $\partial D = \bar{\mathbb{R}}$, D es uno de los dos semiplanos $\mathbf{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ o $\mathbf{H}^- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $D = \mathbf{H}^+$. Por la simetría en la dinámica de f_ω respecto al eje real, \mathbf{H}^- es también un disco de Siegel del mismo período de \mathbf{H}^+ . Luego $F(f_\omega) = \mathbf{H}^+ \cup \mathbf{H}^-$ y $J(f_\omega) = \bar{\mathbb{R}}$. Así, $D = \mathbf{H}^+$ tiene período 1 ó 2. Si \mathbf{H}^+ tiene período 1 entonces

$f_\omega(H^+) = H^+$ y $f_\omega(H^-) = H^-$. De donde $f_\omega^{-1}(H^+) = H^+$ lo cual es un absurdo ya que $f_\omega : H^+ \rightarrow H^+$ es uno a uno, y $d \geq 2$. Por otro lado, si $D = H^+$ tiene período 2, el ciclo de Siegel es $\{H^+, H^-\}$. Es decir $f_\omega^{-1}(H^+) = H^-$, lo cual implica que las $d \geq 2$ preimágenes de cada elemento de H^+ están en H^- , pero ocurre que $f_\omega : H^- \rightarrow H^+$ es inyectiva.

Esto prueba que $F(f_\omega)$ no tiene discos de Siegel.

2.1.2 En este apartado se estudia los tipos de puntos periódicos que puede tener f_ω .

Observaciones: a) Supongamos que z_0 es un punto periódico de período m de una aplicación racional cualquiera $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $(R^m)'(z_0) = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Existen dos posibilidades:

i) $z_0 \in F(R)$. En este caso existe disco de Siegel D con centro z_0 .

ii) $z_0 \in J(R)$. En este caso se dice que z_0 es un **punto de Cremer** y se cumple que z_0 es acumulado por las órbitas positivas de los puntos críticos (ver [Be], pp. 195).

b) Toda f_ω , $\omega \in \mathbb{R}$, no tiene puntos de Cremer. En efecto: si z_0 fuera un punto de Cremer entonces sería acumulado por $\{f_\omega^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, y por lo tanto estaría en \mathbb{R} . En consecuencia $\lambda = (f_\omega^m)'(z_0) \in \mathbb{R}$, lo cual es una contradicción.

Proposición: Si z_0 es un punto periódico de período m de f_ω y $\lambda = (f_\omega^m)'(z_0)$, existen 3 posibilidades:

1) z_0 es un atractor contenido en $\overline{\mathbb{R}}$, con $\lambda \in]-1, 1[$.

2) z_0 es racionalmente indiferente, $z_0 \in \mathbb{R}$, con $\lambda = \pm 1$.

3) z_0 es repulsor.

Dem: Si z_0 es atractor entonces por 0.2.5 existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$ tal que $f_\omega^{n_k}(0) \rightarrow z_0$ ($k \rightarrow \infty$). Como $\omega \in \mathbb{R}$ entonces deducimos de lo anterior que $z_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Luego, $\lambda = (f_\omega^m)'(z_0) \in \mathbb{R}$ de donde $\lambda \in]-1, 1[$.

Si z_0 es indiferente, como $F(f_\omega)$ no tiene discos de Siegel y no tiene puntos de Cremer, z_0 es racionalmente indiferente. Por 0.2.5 existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$ tal que $f_\omega^{n_k}(0) \rightarrow z_0$ ($k \rightarrow \infty$) y así $z_0 \in \mathbb{R}$ y $\lambda = \pm 1$.

2.1.3 Conclusión De lo anterior, del Teorema de las componentes, del Teorema de clasificación de componentes periódicas (0.2.4), de (0.2.5), y del hecho que f_ω no tiene anillos de Herman, podemos concluir que:

Si $\omega \in \mathbb{R}$, existe 3 posibilidades (mutuamente excluyentes) para f_ω :

i) Existe una órbita periódica atractora $\theta^+(z_0) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ con $F(f_\omega)$ igual a la cuenca de atracción de $\theta^+(z_0)$, Esto es, $\forall z \in F(f_\omega)$ se cumple que $f_\omega^n(z) \rightarrow \theta^+(z_0)$ ($n \rightarrow \infty$).

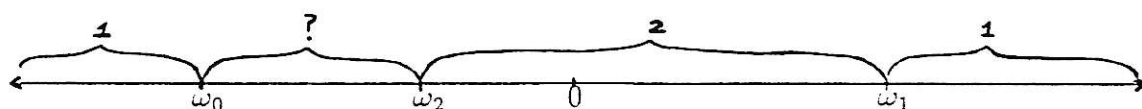
ii) Existe una órbita periódica racionalmente indiferente $\theta^+(z_0) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\forall z \in F(f_\omega)$, $f_\omega^n(z) \rightarrow \theta^+(z_0)$ ($n \rightarrow \infty$).

iii) $J(f_\omega) = \overline{\mathbb{C}}$.

En vista de lo anterior, la dinámica de $f_\omega : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (con $\omega \in \mathbb{R}$) queda completamente determinada por la dinámica de $f_\omega : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

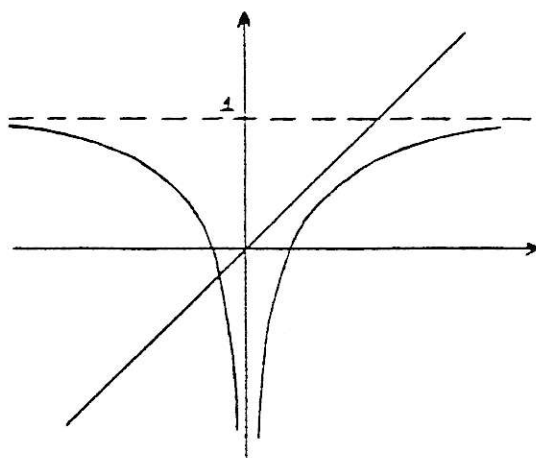
2.1.4 En este apartado indicamos para cuales $\omega \in \mathbb{R}$, f_ω tiene o bien un punto fijo atractor ó bien una órbita periódica atractor de período 2. En lo que sigue de este capítulo nos interesa los valores complementarios a estos.

Si $\omega \in \partial M(\mathcal{F}_d) \cap \mathbb{R}$, f_ω tiene un punto fijo $z \in \mathbb{R}$ racionalmente indiferente con $\lambda = f'_\omega(z) = \pm 1$. Se deduce que $\partial M(\mathcal{F}_d) \cap \mathbb{R} = \{\omega_0, \omega_1\}$ con $\omega_0 = -d(1+1/d)^{d+1} < 0$ (caso $\lambda = 1$) y $\omega_1 = d(1-1/d)^{d+1} > 0$ (caso $\lambda = -1$). Calculando se muestra que si $\omega \in]-\infty, \omega_0[\cup]\omega_1, +\infty[$, entonces f_ω tiene un punto periódico atractor de período 1. Es decir $M(\mathcal{F}_d) \cap \mathbb{R} = [\omega_0, \omega_1]$. Por otro lado, existe $\omega_2 \in]\omega_0, 0[$ tal que si $\omega_2 < \omega < \omega_1$ entonces f_ω tiene una órbita periódica atractor de período 2. Así, la situación en el eje real de los parámetros es como sigue:

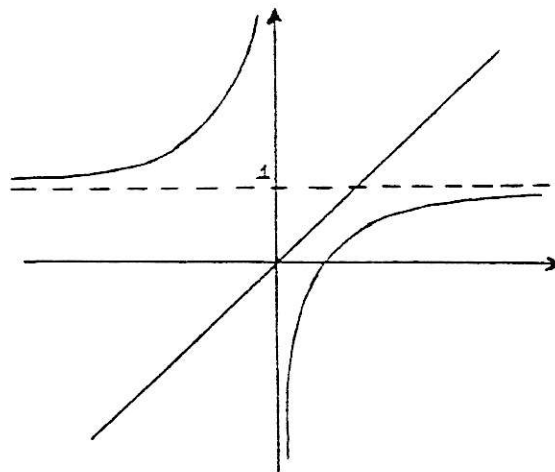


Nos interesa estudiar la dinámica de f_ω para $\omega \in]\omega_0, \omega_2[$.

Para $\omega_0 < \omega < 0$, el gráfico de f_ω es :



Caso d par



Caso d impar

Los gráficos nos sugieren que los casos d par y d impar deben ser tratados como casos apartes.

2.2 Estudio de la dinámica de $f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, caso d par.

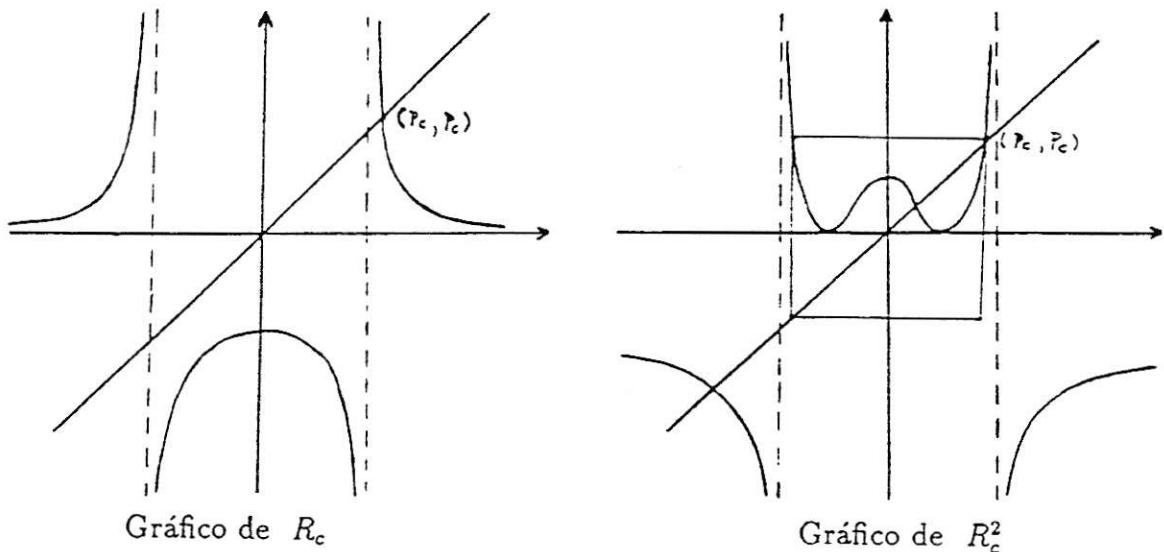
2.2.1 Observación preliminar: Recordemos de que si $R_c(z) = 1/(z^d + c)$ entonces $R_c \sim f_\omega \iff c^{d+1} = \omega$. Luego, si d es par, para cada $\omega \in \mathbb{R}$ existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $R_c \sim f_\omega$, y recíprocamente. Es decir, existe una correspondencia uno a uno entre aplicaciones de dinámicas conjugadas de las familias $\{R_c : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : c \in \mathbb{R}\}$ y $\{f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : \omega \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto para estudiar la dinámica y las bifurcaciones que ocurren en la familia $\{f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : \omega \in \mathbb{R}\}$ basta hacer lo mismo para la familia $\{R_c : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : c \in \mathbb{R}\}$. Por razones de simplicidad, haremos nuestro estudio con esta última familia.

Por lo visto en el apartado anterior, estudiamos $R_c : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ con $c_0 < c \leq 0$, siendo $c_0 = \sqrt[d+1]{\omega_0} = -\sqrt[d+1]{d}(1 + 1/d)$.

2.2.2 Para simplificar la exposición consideremos primero el caso $d = 2$.

En $c = 0$, R_c tiene una órbita de período 2 superatractora y en $c = -1$, R_c presenta una órbita de período 3 superatractora. Analizemos que ocurre para $-1 < c < 0$.

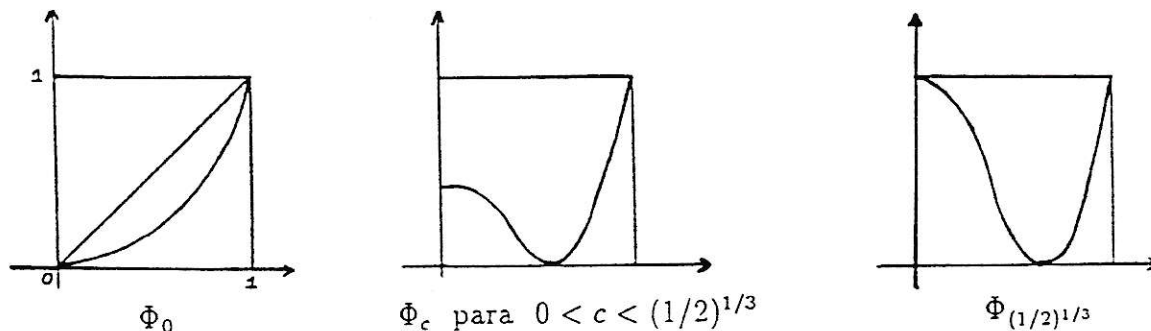
Consideremos la familia $R_c^2(x) = (x^2 + c)^2 / (1 + c(x^2 + c)^2)$ para $-1 < c \leq 0$. Los gráficos de R_c y R_c^2 , para $-1 < c < 0$, son como sigue:



Para $c = 0$ tenemos $R_0(x) = 1/x^2$, $R_0^2(x) = x^4$.

Un simple cálculo muestra que para $-(1/2)^{1/3} \leq c \leq 0$, $R_c^2([-p_c, p_c]) \subseteq [-p_c, p_c]$, donde p_c es el único punto fijo (repulsor) de R_c . Nos restringiremos a estudiar la dinámica en $[-p_c, p_c]$, ya que es un intervalo invariante que contiene a la órbita positiva de los puntos críticos. Por la simetría del gráfico con respecto al eje y y a la no negatividad de R_c^2 podemos reducirnos a $[0, p_c]$. De esta forma hemos llegado a considerar la familia $R_c^2 : [0, p_c] \rightarrow [0, p_c]$, $-(1/2)^{1/3} \leq c \leq 0$. Para uniformizar el intervalo hacemos el cambio de coordenadas $h_c : [0, p_c] \rightarrow [0, 1]$, $h_c(x) = x/p_c$,

obteniendo $\varphi_c := h_c \circ R_c^2 \circ h_c^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $-(1/2)^{1/3} \leq c \leq 0$. Resultará mas conveniente para la exposición, considerar parámetros positivos. Por lo tanto trabajaremos con la familia $\{ \Phi_c : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \Phi_c := \varphi_{-c} / 0 \leq c \leq (1/2)^{1/3} \}$ cuyo gráfico es:



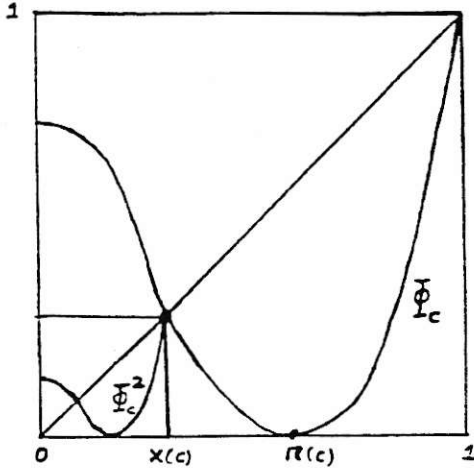
Si $\alpha = 0$ y $\beta = (1/2)^{1/3}$ entonces de lo anterior resulta que $\{ \Phi_c \}_{\alpha \leq c \leq \beta}$ es una familia de aplicaciones de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisface :

- 1.- $(x, c) \mapsto \Phi_c(x)$ es de clase C^1 en $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$.
- 2.- $\Phi'_c(0) = 0$ y $\Phi_c(1) = 1$, $\forall c$.
- 3.- Para cada c : $\Phi'_c(x) < 0$ en $]0, r(c)[$ y $\Phi'_c(x) > 0$ en $]r(c), 1[$, donde $\Phi_c^{-1}(0) = \{r(c)\}$.
- 4.- $r(c) \in]0, 1[$ y $\Phi_c(0) \in]0, 1[$, $\forall c \in]\alpha, \beta[$.
- 5.- $\Phi_\alpha(0) = 0$, $\Phi_\beta(0) = 1$.

Del hecho que $\Phi'_\alpha(0) = 0$, de la continuidad uniforme de $(x, c) \mapsto \Phi'_c(x)$ en $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$, y de la continuidad de $c \mapsto r(c)$ en $c = \alpha$, se obtiene que $\exists \delta > 0$ tal que $\Phi_c(0) < r(c) \forall c \in]\alpha, \alpha + \delta[$. Luego, como $\Phi_\beta(0) = 1 > r(\beta)$, por la continuidad de $c \mapsto \Phi_c(0) - r(c)$, $\exists c \in]\alpha, \beta[$ con $\Phi_c(0) = r(c)$ (es decir, $\exists c \in]\alpha, \beta[$ tal que Φ_c tiene una órbita superatractora de período 2 $\{0, r(c)\}$).

Sea $\tilde{\alpha} := \sup\{c \in]\alpha, \beta[: \Phi_c(0) = r(c)\}$; es claro que $\alpha < \tilde{\alpha} < \beta$ y que $\Phi_{\tilde{\alpha}}(0) = r(\tilde{\alpha})$. Como $\Phi_\beta(0) = 1 > r(\beta)$ entonces $\Phi_c(0) > r(c)$, $\forall c \in]\tilde{\alpha}, \beta[$. Por otro lado observamos que para cada $c \in]\alpha, \beta[$, Φ_c tiene un punto fijo $x(c)$ en $]0, r(c)[$ el cual depende en forma C^1 de $c \in]\alpha, \beta[$. Sucede que $\Phi_{\tilde{\alpha}}^2(0) - x(\tilde{\alpha}) = -x(\tilde{\alpha}) < 0$, y $\Phi_\beta^2(0) - x(\beta) = 1 - x(\beta) > 0$, de donde $\exists c \in]\tilde{\alpha}, \beta[$ tal que $\Phi_c^2(0) = x(c)$.

Sea $\tilde{\beta} := \inf\{c \in]\tilde{\alpha}, \beta[: \Phi_c^2(0) = x(c)\}$. Se tiene que $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta} < \beta$ y $\Phi_{\tilde{\beta}}^2(0) = x(\tilde{\beta})$. Además, $\forall c \in]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$ se cumple que $\Phi_c(0) > r(c)$ y $0 < \Phi_c^2(0) < x(c)$. La situación gráfica de Φ_c y Φ_c^2 , para $c \in]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$, se muestra a continuación:



Para $c \in]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$ el gráfico de $\Phi_c^2 : [0, x(c)] \rightarrow [0, x(c)]$ es similar al de $\Phi_c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Más precisamente, si consideramos la renormalización $g_c : [0, x(c)] \rightarrow [0, 1]$, $g_c(x) = x/x(c)$, $\tilde{\Phi}_c := g_c \circ \Phi_c^2 \circ g_c^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, se tiene que la familia $\{\tilde{\Phi}_c\}_{\tilde{\alpha} \leq c \leq \tilde{\beta}}$ satisface las hipótesis 1, 2, 3, 4, y 5, esta vez con $\alpha = \tilde{\alpha}$ y $\beta = \tilde{\beta}$. Por lo anterior $\exists c \in]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$ tal que $\tilde{\Phi}_c$ (y por lo tanto Φ_c^2) tiene una órbita superatractora de período 2. En consecuencia $\exists c \in]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$ tal que Φ_c tiene una órbita superatractora de período $2^2 = 4$.

De esta forma hemos llegado a la siguiente:

Proposición: Si $\{\Phi_c\}_{\alpha \leq c \leq \beta}$ es una familia de aplicaciones de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisface las hipótesis 1 a la 5, entonces existe una sucesión de parámetros $c_0 = \alpha < c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} < \dots < \beta$ tales que $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, Φ_{c_n} tiene una órbita superatractora de período 2^n .

Corolario: Para la familia $\mathcal{F}_2\mathbb{R}$ existe sucesión de parámetros $\omega_1 = 0 > \omega_2 > \omega_3 > \dots > \omega_n > \omega_{n+1} > \dots > -(1/2)$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{ω_n} tiene una órbita superatractora de período 2^n .

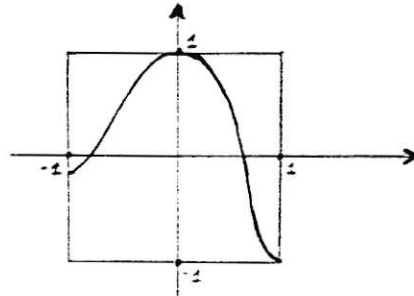
2.2.3 Ahora consideremos el caso general $d = 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

En $c = 0$, $R_c(x) = 1/(x^{2m} + c)$ tiene una órbita de período 2 superatractora, y en $c = -1$, R_c presenta una órbita de período 3 superatractora. También aquí nos restringiremos a $-1 < c \leq 0$.

Consideremos la familia $R_c^2(x) = (x^{2m} + c)^{2m} / (1 + c(x^{2m} + c)^{2m})$ para $-1 < c \leq 0$. Los gráficos de R_c y R_c^2 son similares a los mostrados para $d = 2$. En este caso también existe $c^* > 0$ tal que para $0 \leq c \leq c^*$, $R_c^2([-p_c, p_c]) \subseteq [-p_c, p_c]$ donde $p_c > 0$ es el único punto fijo (repulsor) de R_c , y $R_{c^*}^2(0) = p_{c^*}$. Análogamente al caso $d = 2$ nos podemos restringir a $[0, p_c]$ y finalmente considerar la familia $\{\Phi_c : [0, 1] \rightarrow [0, 1] / 0 \leq c \leq c^*\}$, donde $\Phi_c = h_{-c} \circ R_{-c}^2 \circ h_{-c}^{-1}$ con $h_c : [0, p_c] \rightarrow [0, 1]$, $h_c(x) = x/p_c$. La familia $\{\Phi_c\}_{0 \leq c \leq c^*}$ cumple las hipótesis 1 a 5. Por lo visto anteriormente, para la familia $\mathcal{F}_{2m}\mathbb{R}$ se cumple:

Corolario: Existe sucesión de parámetros $\omega_1 = 0 > \omega_2 > \omega_3 > \dots > \omega_n > \omega_{n+1} > \dots > -(c^*)^{2m+1}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{ω_n} tiene una órbita superatractora de período 2^n .

2.2.4 Consideremos la familia $R_c : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $R_c(x) = 1/(x^2 + c)$, para $c < 0$. Para visualizar la duplicación de período es usual hacer computacionalmente el gráfico “parámetro” versus “estado final de la órbita crítica”. Para esto hacemos un cambio de coordenadas a la familia R_c , de tal forma de obtener una familia de funciones de un intervalo acotado en si mismo. Puesto que $R_c(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}} \setminus]1/c, 0[$, elegimos un punto de $]1/c, 0[$, por ejemplo $1/(2c)$ y lo “enviamos” al ∞ . Sea entonces $M(x) = 1/(x - 1/(2c))$ y consideremos $\tilde{R}_c := M \circ R_c \circ M^{-1} : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se cumple que $\tilde{R}_c(\overline{\mathbb{R}}) = [2c, -2c]$, y luego para estudiar la dinámica de \tilde{R}_c en $\overline{\mathbb{R}}$ basta con analizar $\tilde{R}_c : [2c, -2c] \rightarrow [2c, -2c]$. Finalmente, observemos que al normalizar por $M_1(x) = (-1/(2c))x$ se obtiene $g_c := M_1 \circ \tilde{R}_c \circ M_1^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ que viene dado explícitamente por $g_c(x) = (-4c^3x^2 - (x-1)^2)/(4c^3x^2 - (x-1)^2)$, y su gráfico es:



Los puntos críticos de g_c son 0 y 1 con $g_c(0) = 1, g_c(1) = -1$ y $g_c(-1) = (1 + c^3)/(1 - c^3)$.

Si llamamos λ a $-4c^3$ entonces la familia anterior queda descrita como $g_\lambda : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $g_\lambda(x) = (\lambda x^2 - (x-1)^2)/(-\lambda x^2 - (x-1)^2)$, con $\lambda > 0$.

A continuación se muestra el gráfico “parámetro” versus “estado final de la órbita de los puntos críticos” para $0 < \lambda \leq 30$ y un zoom del sector $1.6 \leq \lambda \leq 3.2$. Notar que el primer gráfico muestra que no sólo existen parámetros con órbitas atractoras de período 2^n , $\forall n \in \mathbb{N}$, sino que también existen con órbitas atractoras de período $3 \cdot 2^n, 4 \cdot 2^n, 5 \cdot 2^n, \dots, k \cdot 2^n, \dots$, etc..

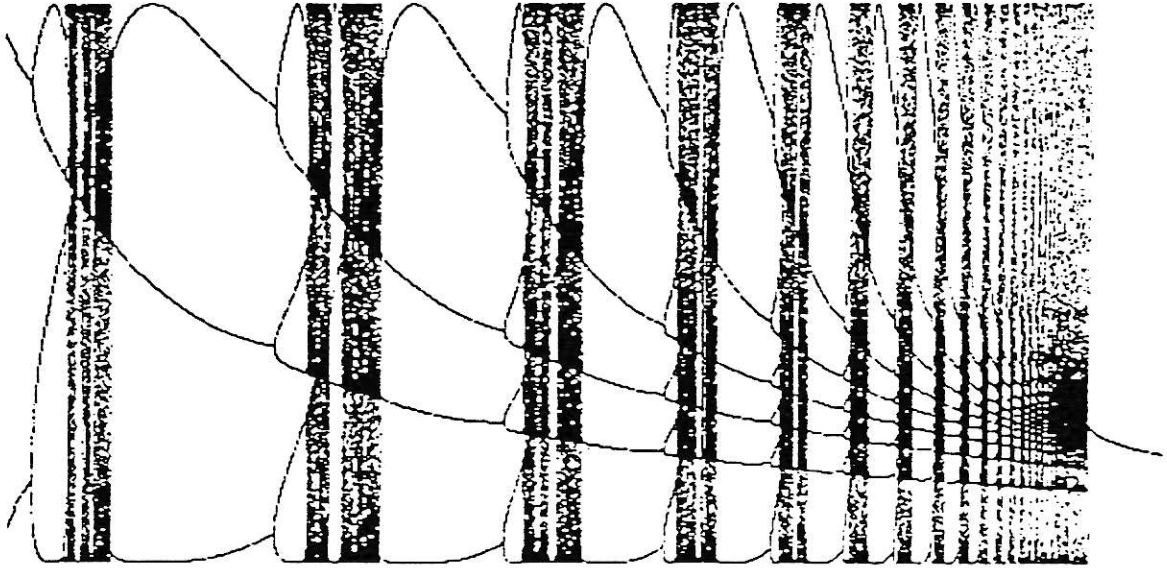
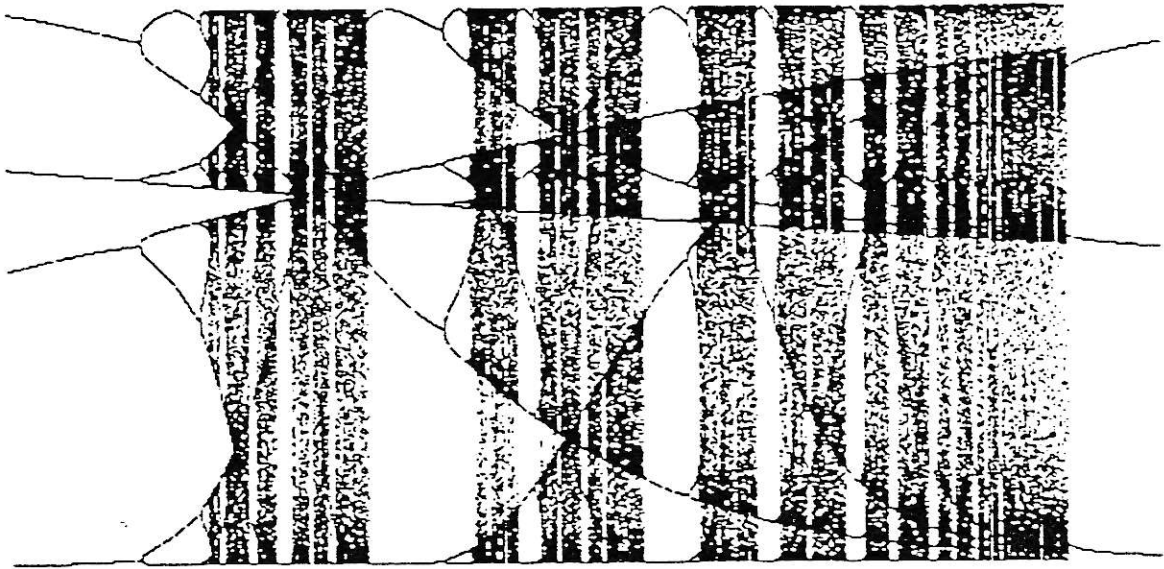


Gráfico para $0 < \lambda \leq 30$.



Zoom del sector $1.6 \leq \lambda \leq 3.2$.

2.2.5 Al observar el último gráfico vemos que entre 1.6 y 1.9 (aproximadamente) existe parte de una ventana de duplicación de períodos $\{2^k : k = 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Existe un número que cuantifica la forma en que el árbol de doblamiento de período se aproxima a su estado final. En el caso de la familia polinomial cuadrática $p_\mu(x) = \mu x(1-x)$ dicho número es conocido como la constante de Feigenbaum y es aproximadamente igual a 4.669201..... La definición precisa de dicho número es $\delta := \lim_{k \rightarrow \infty} l_k/l_{k+1}$, donde l_k es la longitud del intervalo paramétrico en que existen órbitas atractoras de período 2^k .

Nos propusimos el problema de calcular aproximadamente el valor de dicho número en la familia $\{g_\lambda\}_\lambda$ y compararla con la cte. de Feigenbaum.

Se confeccionó un programa computacional para MATLAB que calcula aproximadamente los cuocientes $\delta_k := l_k/l_{k+1}$. El programa busca en la región de parámetros $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$. Luego de iterar $x = 0$ (punto crítico) un número N_T de veces (transiente), se graban en un archivo los N_{PT} siguientes resultados de la iteración (post-transiente), siempre que estén en el intervalo $[x_{min}, x_{max}]$. Esto permite seleccionar una bifurcación específica. Los datos se grafican y se determina visualmente (y también comparando con la tabla de datos) el punto α_k en el cual ha ocurrido la bifurcación k que permite pasar a una órbita de período $T = 2^k$. Los valores de α_k sucesivamente obtenidos permiten calcular $\delta_k = (\alpha_k - \alpha_{k-1})/(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$. Los resultados se dan en la siguiente tabla:

λ_0	λ_1	α_k	x_{min}	x_{max}	k	T	N_T	N_{PT}	δ_{k-2}
0.9	1.1	1.002	0	1	2	4	5000	50	-
1.7	1.8	1.783	0	0.3	3	8	5000	50	-
1.84	1.87	1.8616	0.2	0.3	4	16	5000	50	9.936386768
1.871	1.873	1.87218	0.2	0.23	5	32	5000	50	7.429111531
1.8731	1.8736	1.87356	0.2	0.21	6	64	5000	1000	7.666666667
1.87374	1.87375	1.8737484	0.2	0.203	7	128	5000	1000	7.324840764
1.873770	1.873775	1.8737741	0.2	0.2021	8	256	5000	1000	7.330739300
1.873777	1.873778	1.87377762	0.2	0.20198	9	512	5000	1000	7.301136364

Por lo tanto la constante δ para nuestra familia $\{g_\lambda\}$ es aproximadamente $\delta \approx 7.301136364$, que no coincide con la constante de Feigenbaum. Este hecho se explica por lo siguiente: la familia polinomial cuadrática $p_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ($0 < \mu \leq 4$) tiene un sólo punto crítico ($x = 1/2$) el cual es cuadrático (es decir $p''_\mu(1/2) \neq 0$). Nuestra familia $g_\lambda : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ($\lambda > 0$) tiene 2 puntos críticos ($x = 0$ y $x = 1$). Conjugando g_λ con el homeomorfismo $h : [-3, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $h(x) = -\sqrt{1-x} + 1$ se obtiene $\tilde{g}_\lambda := h^{-1} \circ g_\lambda \circ h : [-3, 1] \rightarrow [-3, 1]$, donde \tilde{g}_λ tiene a $x = 0$ como único punto crítico, el cual es cuártico (la cuarta es la primera derivada no-nula). Cabe mencionar aquí que Delbourgo en su trabajo [De] menciona que para la familia $F_a(x) = 1 - ax^4$ de "contacto cuártico" el δ que se encuentra es $\delta \approx 7.2851\dots$.

2.2.6 La Conjetura $HD\mathcal{F}_{2m}\mathbb{R}$.

Recordemos que la Conjetura $HD\mathcal{F}_{2m}\mathbb{R}$ dice lo siguiente:

$\{ \omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ tiene una órbita periódica atractora } \}$ es denso en \mathbb{R} .

Antes de enunciar una reducción de la conjetura recién mencionada, necesitamos hablar algo sobre aplicaciones unimodales e itinerarios.

Definiciones:

1) Se dice que una aplicación $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ es unimodal si f es continua, $f(0) = 1$, f es estrictamente creciente en $[-1, 0]$ y estrictamente decreciente en $[0, 1]$.

2) Dada una aplicación unimodal f , se define para cada $x \in [-1, 1]$ el itinerario de x como la sucesión de símbolos:

$I(x) := (I_0 I_1 I_2 \dots)$ donde $I_j = L$ si $f^j(x) < 0$, $I_j = R$ si $f^j(x) > 0$, e $I_j = C$ si $f^j(x) = 0$.

3) Se dice que un itinerario $I(x)$ es eventualmente periódico si es de una de las siguientes formas: $I(x) = (BBB \dots)$ o $I(x) = (I_0 I_1 \dots I_n BBB \dots)$ donde B es un bloque finito de símbolos que se repite indefinidamente.

4) El itinerario de f (o sucesión kneading de f) se define por $I_f := I(f(0)) = I(1)$.

Lema ([CE], pp. 83) Si f es unimodal y $x \in [-1, 1]$, entonces el itinerario $I(x)$ es eventualmente periódico si y sólo si $f^j(x)$ converge hacia una órbita periódica de f cuando $j \rightarrow \infty$.

Ahora veamos la reducción de la conjetura.

Proposición: La conjetura $HD\mathcal{F}_{2m}\mathbb{R}$ es equivalente al enunciado:

$\{ \omega \in \mathbb{R} : J(f_\omega) = \bar{\mathbb{C}} \}$ tiene interior vacío en \mathbb{R} .

Dem: Usaremos el hecho que para $\omega < 0$, $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es analíticamente conjugada con $g_\lambda : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $g_\lambda(z) = (\lambda z^{2m} - (z-1)^{2m}) / (-\lambda z^{2m} - (z-1)^{2m})$, donde $\lambda = -2^{2m}\omega$. g_λ tiene la propiedad de que $g_\lambda(\bar{\mathbb{R}}) = [-1, 1]$ y $g_\lambda : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ es unimodal tal como en la definición anterior.

Suponemos que existe intervalo abierto J tal que g_λ no tiene órbita periódica atractora $\forall \lambda \in J$, y queremos probar que $J(g_\lambda) = \bar{\mathbb{C}}$, $\forall \lambda \in J$.

Probaremos dos hechos respecto de los itinerarios $I_\lambda := I_{g_\lambda}$, con $\lambda \in J$.

1) Si $\exists \lambda_0 \in J$ tal que g_{λ_0} tiene una órbita periódica racionalmente indiferente, entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \lambda_1$ tal que $|\lambda_0 - \lambda_1| < \varepsilon$ y $I_{\lambda_1} \neq I_{\lambda_0}$.

En efecto: sea λ_0 como arriba y $\varepsilon > 0$ pequeño. Por (2.1.3), si $\lambda \in]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$ ($\subseteq J$), entonces o bien g_λ tiene una órbita periódica racionalmente indiferente o bien $J(g_\lambda) = \bar{\mathbb{C}}$. Como el conjunto $\{ \omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ tiene una órbita periódica racionalmente indiferente } \}$ es numerable (ver 1.6), y el conjunto $\{ \omega \in \mathbb{R} : \text{la órbita positiva de los puntos críticos de } f_\omega \text{ es preperiódica} \}$ es también numerable (evidente), entonces existe $\lambda_1 \in]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$ tal que $J(g_{\lambda_1}) = \bar{\mathbb{C}}$ y tal que la órbita crítica $\{g_{\lambda_1}^n(0)\}_{n \geq 0}$ no es preperiódica. Resulta que el itinerario I_{λ_0} es eventualmente periódico (porque

la órbita positiva de los puntos críticos converge hacia la órbita periódica racionalmente indiferente). Por otro lado, el itinerario I_{λ_1} no es eventualmente periódico (si lo fuera, por el Lema anterior $\{g_{\lambda_1}^n(1)\}_{n \geq 0}$ convergería hacia una órbita periódica repulsora de g_{λ_1} , lo cual implicaría que la órbita crítica $\{g_{\lambda_1}^n(0)\}_{n \geq 0}$ es preperiódica). Por lo tanto $I_{\lambda_1} \neq I_{\lambda_0}$.

2) Si $I_{\lambda_0} \neq I_{\lambda_1}$ para $\lambda_0 < \lambda_1$ en J entonces $\exists \tilde{\lambda} \in]\lambda_0, \lambda_1[$ tal que $g_{\tilde{\lambda}}$ tiene una órbita periódica superatractora.

En efecto: sea $n \geq 1$ el menor entero tal que $I_{\lambda_0, n} \neq I_{\lambda_1, n}$. Entonces $g_{\lambda_0}^n(1) < 0 < g_{\lambda_1}^n(1)$ (o viceversa). Por la continuidad de $\lambda \mapsto g_{\lambda}^n(1)$ existe $\tilde{\lambda} \in]\lambda_0, \lambda_1[$ tal que $g_{\tilde{\lambda}}^n(1) = 0$, esto es, $g_{\tilde{\lambda}}$ tiene una órbita periódica superatractora.

Estos dos hechos junto con (2.1.3) implican que $J(g_\lambda) = \bar{\mathbb{C}}, \forall \lambda \in J$. Esto prueba la proposición.

Observación: De la demostración anterior se deduce además que: si f_{ω_1} (para $\omega_1 < 0$) tiene una órbita periódica racionalmente indiferente, entonces \forall intervalo abierto J que contiene a ω_1 , $\exists \omega \in J$ tal que f_ω tiene una órbita periódica atractora.

2.3 Estudio de la dinámica de $f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, caso d impar.

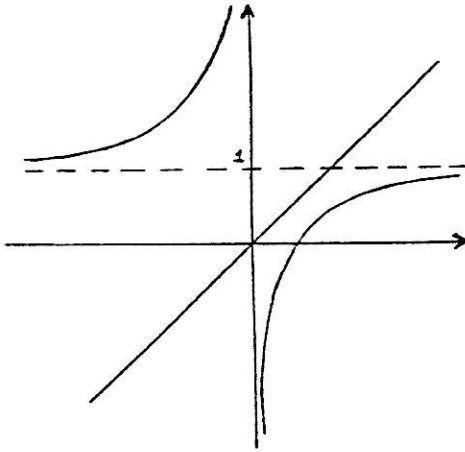
En esta sección consideramos la familia $\mathcal{F}_d \mathbb{R}$, con d impar. Por lo visto en 2.1.4. debemos estudiar f_ω para $\omega_0 < \omega < 0$, con $\omega_0 = -d(1 + 1/d)^{d+1}$.

2.3.1 Observación preliminar: Introducimos un cambio de coordenadas en la familia $\{f_\omega\}$ obteniendo una familia $\{g_c\}$, la que es una nueva normalización para la familia \mathcal{F}_d .

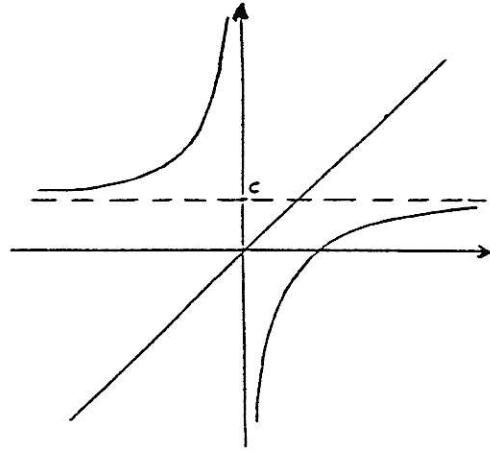
Sea $f_\omega : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^d$ con $\omega < 0$. Si $M : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es la transformación de Möbius $M(z) = \sqrt[d+1]{-\omega} z$ entonces $(M \circ f_\omega \circ M^{-1})(z) = \sqrt[d+1]{-\omega} - 1/z^d$. Es decir f_ω es analíticamente conjugada con $g_c : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, g_c(z) = c - 1/z^d$ donde $c = \sqrt[d+1]{-\omega} (> 0)$. Además $M(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$, es decir M conjugua a $f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ con $g_c : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Existe una correspondencia uno a uno entre aplicaciones conjugadas de las familias $\{f_\omega : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : \omega < 0\}$ y $\{g_c : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : c > 0\}$. Basta entonces estudiar la dinámica y las bifurcaciones en la familia $\{g_c : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : 0 < c < c_0\}$ donde $c_0 = \sqrt[d+1]{-\omega_0}$.

Los puntos críticos de g_c siguen siendo 0 e ∞ con $g_c(0) = \infty$. Esta vez $g_c(\infty) = c$. Comparemos los gráficos de f_ω y de g_c :



f_ω para $\omega_0 < \omega < 0$



g_c para $0 < c < c_0$.

La propiedad clave de la familia $\{g_c\}_{0 < c < c_0}$ (que no posee la familia $\{f_\omega\}_{\omega_0 < \omega < 0}$), y que usaremos a seguir es: $\frac{\partial g_c(x)}{\partial c} = 1 > 0 \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Es decir, la función g_c , y su gráfico, crecen uniformemente con c en $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Por otra parte, $g_c(0) = \infty$ es constante con c .

Como $\overline{\mathbb{R}}$ es analíticamente igual a S^1 , $g_c : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es en realidad una aplicación de $S^1 \rightarrow S^1$ la cual es un homeomorfismo que preserva orientación. Más precisamente, la transformación de Möbius $N : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $N(z) = (z - i)/(1 - iz)$ envía $\overline{\mathbb{R}}$ en S^1 . De esta forma tenemos que $\tilde{g}_c := N \circ g_c \circ N^{-1}$ con $\tilde{g}_c : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo de grado 1, analítica, con puntos críticos $\{-i, i\}$ y $\tilde{g}_c(-i) = i$. Además $\frac{\partial \tilde{g}_c(\theta)}{\partial c} > 0, \forall \theta \neq -i$. Es decir los puntos de $S^1 \setminus \{-i\}$ rotan positivamente con c .

2.3.2 En este apartado, damos un resumen sobre hechos básicos acerca de aplicaciones de $S^1 \rightarrow S^1$.

Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ es una aplicación continua y $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es el recubrimiento $e(x) = e^{2\pi i x}$, entonces a toda aplicación $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $e \circ F = f \circ e$ se le llama un **levantamiento** de f a \mathbb{R} . Existe una cantidad numerable de levantamientos de f : si F es uno de ellos entonces $\{F + m : m \in \mathbb{Z}\}$ es el conjunto con todos los levantamientos de f . Si $x \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = e^{2\pi i x}$ y $q \in \mathbb{N}$, entonces: $f^q(\bar{x}) = \bar{x} \iff F^q(x) = x + p$, para algún $p \in \mathbb{Z}$. De esto último se concluye que $\bar{x} = e(x)$ es un punto periódico de período q para f si y sólo si $F^q(x) = x + p$, para algún $p \in \mathbb{Z}$.

En el caso que f sea un homeomorfismo que preserva orientación se cumple que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo estrictamente creciente que satisface la identidad $F(x+1) = F(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Se tiene por Poincaré que para todo $x \in \mathbb{R}$ el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)/n$ existe y no depende del punto inicial x . Este límite es llamado el **número de rotación** del levantamiento F , y es denotado por $\rho(F)$. No es difícil

probar que:

$$F^q(x) = x + p \text{ para algún } x \in \mathbb{R} \iff \rho(F) = p/q.$$

Si F_1 es otro levantamiento de f entonces $\rho(F_1) = \rho(F) + m$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. El número de rotación $\rho(f)$ de un homeomorfismo que preserva orientación $f : S^1 \rightarrow S^1$ se define como la clase de equivalencia de $\rho(F)$ módulo 1, donde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un levantamiento de f . De lo anterior se deduce la siguiente:

a) Proposición: Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación. Entonces:

- 1) f tiene puntos periódicos $\iff \rho(f)$ es racional.
- 2) f tiene un punto periódico de período $q \iff \rho(f)$ es racional con denominador q .

El concepto de número de rotación fue introducido por H. Poincaré alrededor de 1885. El probó que un homeomorfismo de $S^1 \rightarrow S^1$ con número de rotación irracional α es semiconjugado a la rotación irracional $R_\alpha(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(t+\alpha)}$. Más precisamente:

Definición: Se dice que $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ son **semiconjugadas** si $\exists h : S^1 \rightarrow S^1$ continua, monótona y sobreyectiva tal que $h \circ f = g \circ h$. Si h es un homeomorfismo entonces se dice que f y g son (topológicamente) **conjugadas**.

Teorema (Poincaré) Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo de grado 1 con $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces f es semiconjugada a la rotación irracional R_α .

En el Teorema anterior, si la aplicación $h : S^1 \rightarrow S^1$ que semiconjuga f con R_α no es inyectiva, entonces existe $z \in S^1$ tal que $I := h^{-1}(z)$ es un subconjunto conexo no trivial de S^1 . Dado que $h \circ f = R_\alpha \circ h$, se tiene que $h(f^n(I)) = R_\alpha^n(z) \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y luego los intervalos $I, f(I), f^2(I), \dots, f^n(I), \dots$ son disjuntos dos a dos. A un tal arco I se le llama **intervalo errante** de f . Del Teorema de Poincaré, f es conjugada a R_α si y sólo si f no tiene intervalos errantes.

Poincaré probó que existe $f : S^1 \rightarrow S^1$ homeomorfismo con $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, con intervalos errantes. Además preguntó si existen difeomorfismos con intervalos errantes.

Alrededor de 1930, A. Denjoy contestó afirmativamente a la pregunta de Poincaré, construyendo un difeomorfismo de clase C^1 $f : S^1 \rightarrow S^1$ con $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y con intervalos errantes. Más aún, Denjoy probó lo siguiente:

Teorema (Denjoy) Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ es un difeomorfismo de clase C^2 , que preserva orientación y $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces f es conjugada a R_α .

Varios años después (en 1981), G. R. Hall [Ha] dió un ejemplo de un homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ de clase C^∞ con $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con intervalos errantes (necesaria-

mente f tiene puntos críticos.)

Finalmente mencionamos que en 1984, J. - C. Yoccoz [Yoc] probó que un homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ de clase C^∞ con $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, y cuyos puntos críticos son no-planos, no tiene intervalos errantes. Se dice que un punto crítico c de una aplicación $f : S^1 \rightarrow S^1$ de clase C^∞ es **no-plano** si alguna derivada de f en c es no-nula. Precisemos lo anterior en el siguiente enunciado:

Teorema (Yoccoz) Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo de clase C^∞ que preserva orientación y con $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si los puntos críticos de f son no-planos (en particular si f es analítica real), entonces f es conjugada a R_α .

2.3.3 Volvamos ahora al estudio de la familia $\{ \tilde{g}_c : S^1 \rightarrow S^1 : 0 < c < c_0 \}$. Estudiemos propiedades de monotonicidad con c de los respectivos levantamientos. Sabemos que $\tilde{g}_c : S^1 \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo que preserva orientación. De acuerdo a lo anterior, un levantamiento de \tilde{g}_c , $G_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo estrictamente creciente tal que $G_c(x+1) = G_c(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Por definición, $\tilde{g}_c(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i G_c(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Como los puntos críticos de \tilde{g}_c son $\{-i, i\}$ se tiene que $G'_c(3/4 + m) = G'_c(1/4 + m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ y $G'_c(x) > 0$ para todo otro punto x . Como $\tilde{g}_c(-i) = i$, $G_c(3/4) = 1/4 + m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Tomando $m = 1$ obtenemos $G_c(3/4) = 5/4$. De ahora en adelante, G_c denotará el levantamiento de \tilde{g}_c tal que $G_c(3/4) = 5/4$.

Notamos que $0 < c_1 < c_2 \implies g_{c_1}(x) < g_{c_2}(x) \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ y $g_c(0) = \infty \quad \forall c$. Luego si $0 < c_1 < c_2$ entonces $G_{c_1}(x) < G_{c_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3/4 + m : m \in \mathbb{Z}\}$, y $G_c(3/4) = 5/4 \quad \forall c$. De lo anterior deducimos que si $0 < c_1 < c_2$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, entonces :

$$G_{c_1}^n(x) < G_{c_2}^n(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad \dots \quad (1)$$

En particular:

$$0 < c_1 < c_2 \implies \rho(G_{c_1}) \leq \rho(G_{c_2}).$$

De ahora en adelante, denotaremos $\rho(G_c)$ por $\rho(c)$.

2.3.4 En este apartado, nos dedicamos a probar la siguiente:

Proposición El conjunto de parámetros $\{ c \in]0, c_0 [: \rho(c) \text{ es irracional} \}$ tiene interior vacío.

Dem Por la continuidad de $c \mapsto \rho(c)$ en $]0, c_0 [$ (ver [MS] pp. 33) basta probar que el conjunto $\rho^{-1}(\alpha) = \{ c \in]0, c_0 [: \rho(c) = \alpha \}$ tiene interior vacío $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Supongamos por absurdo que existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $I \subseteq]0, c_0 [$ intervalo abierto tal que $\rho(c) = \alpha \forall c \in I$. Por lo visto en 2.3.2, $\tilde{g}_c : S^1 \rightarrow S^1$ no tiene puntos periódicos. Lo mismo ocurre con $g_c : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Escojamos dos parámetros $c_1 < c_2$ cualesquiera en I .

Afirmación: $\forall n \in \mathbb{N}, g_{c_1}^n(c_1) \cdot g_{c_2}^n(c_2) > 0$.

En efecto: recordemos que para todo c la órbita positiva del punto crítico 0 es:

$$g_c : 0 \mapsto \infty \mapsto c \mapsto g_c(c) \mapsto \dots \mapsto g_c^n(c) \mapsto \dots$$

Como $g_c : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ no tiene puntos periódicos entonces $g_c^n(c) \neq 0, \infty \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall c \in I$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g_{c_1}^n(c_1) \cdot g_{c_2}^n(c_2) < 0$. Entonces $g_{c_1}^n(c_1) < 0 < g_{c_2}^n(c_2)$ (o al revés). Por la continuidad de $c \mapsto g_c^n(c)$ se obtiene que $\exists \tilde{c} \in]c_1, c_2 [$ tal que $g_{\tilde{c}}^n(\tilde{c}) = 0$. Es decir 0 es punto periódico de $g_{\tilde{c}}$, lo cual es una contradicción.

Observemos que si $x_1 < x_2$ y $x_1 \cdot x_2 > 0$ entonces $g_{c_2}(x_2) - g_{c_1}(x_1) > c_2 - c_1$. Como $c_1 < c_2$ y $c_1 \cdot c_2 > 0$ se obtiene que $g_{c_2}(c_2) - g_{c_1}(c_1) > c_2 - c_1 (> 0)$. De esto y de la afirmación anterior se obtiene que:

$$g_{c_2}^n(c_2) - g_{c_1}^n(c_1) > c_2 - c_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Como cada $\tilde{g}_c : S^1 \rightarrow S^1$ es analítica real, por el Teorema de Yoccoz enunciado en 2.3.2, se deduce que \tilde{g}_c es conjugada a la rotación irracional R_α . De donde la órbita positiva del punto crítico $-i$, $\{\tilde{g}_c^n(-i)\}_{n \geq 0}$ es densa en S^1 y a su vez la órbita positiva del punto crítico 0 , $\{g_c^n(0)\}_{n \geq 0}$ es densa en $\overline{\mathbb{R}}$. En particular existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $-(c_2 - c_1)/2 < g_{c_1}^m(c_1) < 0$. Por (2) se obtiene que $g_{c_1}^m(c_1) < 0 < g_{c_2}^m(c_2)$ lo cual nos lleva a una contradicción tal como antes. Así, se ha probado la Proposición.

Observación A continuación probaremos la proposición anterior sin usar el Teorema de Yoccoz. De hecho veremos que la Proposición no depende de que las \tilde{g}_c no tengan intervalos errantes.

En efecto: supongamos que tenemos probado hasta la desigualdad (2), y escojamos un parámetro cualquiera $c \in I$. Si \tilde{g}_c no tuviera intervalos errantes ya probamos la proposición. Si $\tilde{g}_c : S^1 \rightarrow S^1$ tiene intervalos errantes entonces afirmamos que el punto crítico $-i$ no pertenece al interior de algún intervalo errante. Efectivamente, si $-i$ perteneciera al interior de un intervalo errante I entonces el otro punto crítico $i = \tilde{g}_c(-i)$ pertenece al interior del intervalo errante $\tilde{g}_c(I)$. En esta situación podemos perturbar \tilde{g}_c en los intervalos I y $\tilde{g}_c(I)$ (esto se puede hacer en el levantamiento G_c , sumándole en los respectivos intervalos funciones "cototo" apropiadas) de tal forma que la función resultante sea un difeomorfismo de clase C^2 , que preserva orientación, sin puntos periódicos, y tal que la nueva función siga teniendo a I como intervalo errante. Esto contradice el Teorema de Denjoy. Así se ha probado que el punto crítico $-i$ no pertenece al interior de ningún intervalo errante.

Si $-i$ no está en el interior de ningún intervalo errante entonces podemos probar:

Afirmación: $-i \in \omega(-i)$ donde $\omega(p) := \{y \in S^1 : \exists (n_j) \rightarrow \infty \text{ con } \tilde{g}_c^{n_j}(p) \rightarrow y\}$ es el ω -límite del punto p . Es decir $-i$ es acumulado por su propia órbita positiva.

En efecto, sabemos que $\omega(-i)$ es no - vacío, cerrado y completamente invariante. Si $-i \in S^1 \setminus \omega(-i)$ entonces llamando I a la componente conexa de $S^1 \setminus \omega(-i)$ que contiene a $-i$ (I es abierto), se tendría que los intervalos $I, \tilde{g}_c(I), \dots, \tilde{g}_c^n(I), \dots$ son disjuntos dos a dos (ya que si no, $\tilde{g}_c^k(I) = \tilde{g}_c^{k+j}(I)$ para algún k, j y luego $\tilde{g}_c^j(\tilde{g}_c^k(I)) = \tilde{g}_c^k(I)$, de donde \tilde{g}_c^j tendría un punto fijo, es decir periódico para \tilde{g}_c , lo que contradice el hecho que $\rho(c) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Si los $\tilde{g}_c^n(I)$ ($n \in \mathbb{N}$) son disjuntos dos a dos, ellos son errantes, con $-i$ en el interior de I , lo que se probó que no es posible. Por lo tanto, $-i \in \omega(-i)$.

Luego, $\exists(n_j) \rightarrow \infty$ tal que $\tilde{g}_c^{n_j}(-i) \rightarrow -i$, o lo que es equivalente, $g_c^{n_j}(0) \rightarrow 0$. Concluimos que existe una subsucesión de $\{g_c^{n_j}(0)\}_{n_j}$ que converge a 0 por la izquierda o por la derecha. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que converge por la izquierda. Tomando entonces como c_1 a c y como c_2 a cualquier parámetro de I mayor que c , concluimos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $-(c_2 - c_1)/2 < g_{c_1}^m(c_1) < 0$ y al igual que antes se obtiene contradicción.

2.3.5 Ahora se probará la Conjetura $\text{HD}\mathcal{F}_d\mathbb{R}$ para el caso d impar. En primer lugar, recordémosla:

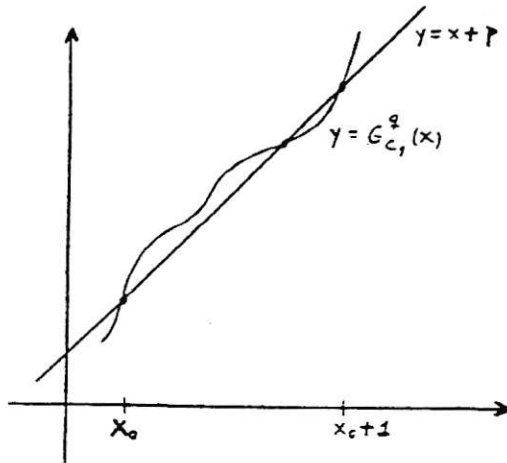
Conjetura $\text{HD}\mathcal{F}_d\mathbb{R}$ $\{ \omega \in \mathbb{R} : f_\omega \text{ tiene un punto periódico atractor } \}$ es denso en \mathbb{R} .

Por lo visto anteriormente, es claro que debemos probar lo siguiente:

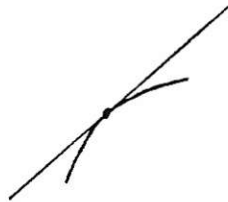
Teorema $\{ c \in]0, c_0 [: g_c \text{ tiene un punto periódico atractor } \}$ es denso en $]0, c_0 [$.

Dem Por lo visto en 2.3.4, basta con probar que si $\rho(c_1) = p/q$ entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists c$ con $|c - c_1| < \varepsilon$ tal que $\rho(c) = p/q$ y una órbita de período q de \tilde{g}_c es atractora. Supongamos entonces que $\rho(c_1) = p/q$ y sea $\varepsilon > 0$. Luego $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $G_{c_1}^q(x_0) = x_0 + p$. Supongamos que x_0 no es atractor. Es decir supongamos que $(G_{c_1}^q)'(x_0) \geq 1$ (recordar que $G_{c_1}^q$ es estrictamente creciente).

Si $(G_{c_1}^q)'(x_0) > 1$ (es decir x_0 es repulsor) entonces el gráfico de $G_{c_1}^q$ debe atravesar de abajo hacia arriba a la recta $y = x + p$ en $x = x_0$. Como $G_{c_1}^q(x+1) = G_{c_1}^q(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ entonces lo mismo debe ocurrir en $x = x_0 + 1$. Por la analiticidad de $G_{c_1}^q$ necesariamente en al menos un punto $x_1 \in]x_0, x_0 + 1 [$ el gráfico de $G_{c_1}^q$ debe atravesar a la recta $y = x + p$ de arriba hacia abajo con derivada $(G_{c_1}^q)'(x_1) \in [0, 1]$. La situación gráfica es como se muestra en la figura (la analiticidad de $G_{c_1}^q$ implica que ésta corta en finitos puntos a la recta $y = x + p$, y que tiene finitos cambios de concavidad en $[x_0, x_0 + 1]$.)



Si $(G_{c_1}^q)'(x_1) < 1$ entonces el mismo \tilde{g}_{c_1} tiene una órbita de período q atractora. Si $(G_{c_1}^q)'(x_1) = 1$ por la continuidad de $c \mapsto G_c^q$ se tiene que para todo c suficientemente cercano a c_1 , el gráfico de G_c^q sigue atravesando de arriba hacia abajo (y por lo tanto con derivada $\in [0, 1]$) a la recta $y = x + p$ en un punto vecino a x_1 . Como el conjunto de parámetros c donde se produce un punto periódico con multiplicador 1 es a lo sumo numerable (ver 1.6), concluimos que $\exists c$ con $|c - c_1| < \varepsilon$ tal que $\rho(c) = p/q$ y la órbita de período q de \tilde{g}_c es atractora. Si $(G_{c_1}^q)'(x_0) = 1$, entonces tenemos cuatro posibilidades para el gráfico de $G_{c_1}^q$ con respecto a la recta $y = x + p$ en una vecindad de x_0 :



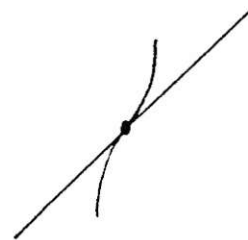
Caso 1.



Caso 2.



Caso 3.



Caso 4.

Los casos 3 y 4 son análogos a la situación anterior.

Por (1) (ver 2.3.3) se tiene:

$$c_2 < c_1 < c_3 \implies G_{c_2}^q(x_0) < G_{c_1}^q(x_0) < G_{c_3}^q(x_0). \quad (q \geq 2.)$$

Por la continuidad de $c \mapsto G_c^q$ y por la enumerabilidad del conjunto de parámetros donde se producen puntos periódicos con multiplicador 1, se deduce que en los Casos 1 y 2 existe c con $|c - c_1| < \varepsilon$ tal que $\rho(c) = p/q$ y hay una órbita de período q de \tilde{g}_c atractora.

Así, se ha probado la Conjetura $\text{HDF}_d\mathbb{R}$ para el caso en que el grado d es impar.

2.3.6 La función número de rotación $c \mapsto \rho(c)$ es continua, creciente (no estrictamente), localmente constante en cada valor racional y no localmente constante en cada valor irracional.

Para terminar mostramos el gráfico de la función número de rotación $c \mapsto \rho(c)$ para $d = 3$.

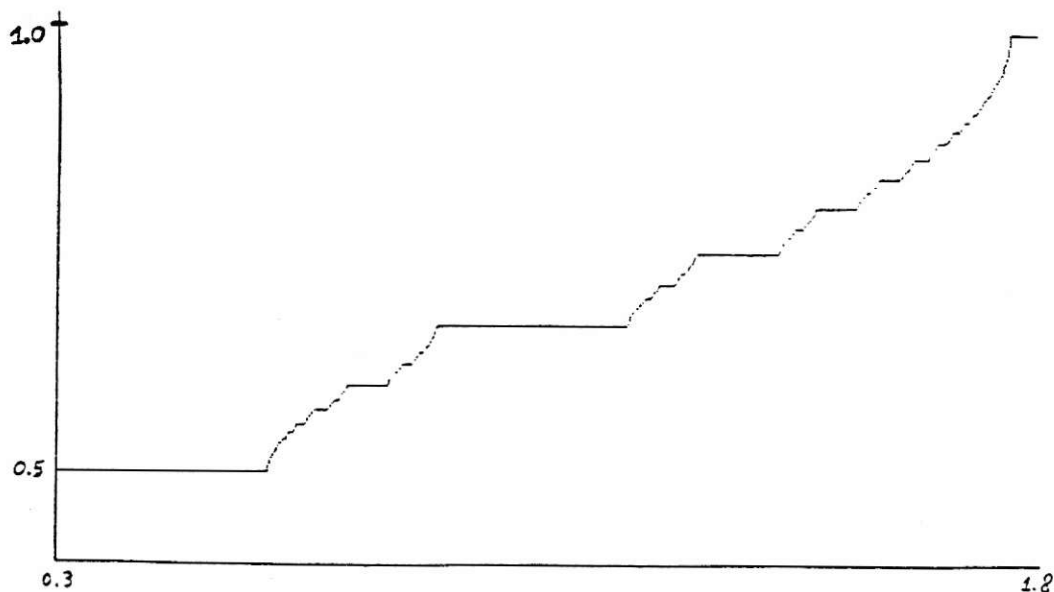


Gráfico de $c \mapsto \rho(c)$ para $d = 3$.

Este tipo de gráfico recibe el nombre de escalera del diablo.

Nota: El gráfico de arriba fué facilitado por el Profesor Jaime Roessler.

APENDICE

The rational maps $z \mapsto 1 + 1/\omega z^d$ have no Herman rings

Rodrigo Bamón* and Juan Bobenrieth

Abstract

We prove that for every $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, the rational maps in the family $\{z \mapsto 1 + 1/\omega z^d : \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ have no Herman rings. From this we conclude a dynamical characterization for the parameters in the Mandelbrot set of these families. Further, we show that hyperbolic maps are dense in this family if and only if the set of parameters for which the Julia set is the whole sphere has no interior.

1 Introduction

It is well known that the dynamics of a rational map $R(z) = P(z)/Q(z)$ is very much influenced by the forward orbits of its critical points. Natural families of rational maps are defined by imposing conditions on these forward orbits. For example the polynomial maps are the rational maps that have a fixed critical point of maximal degree.

For quadratic rational maps, J. Milnor [M] suggested to consider, among others, the family of those maps that takes one critical point to the other. In appropriate coordinates these maps take the form $z \mapsto 1 + 1/\omega z^2$.

Before the work of Milnor, the family $\mathcal{F}_2 = \{z \mapsto 1 + 1/\omega z^2 : \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ was considered by M. Lyubich [L]. He asked whether the maps in this family have Herman rings. M. Shishikura [Sh], using quasi-conformal surgery techniques, proved that the quadratic rational maps have no Herman rings, thus solving Lyubich's question in a particular case.

In this work we consider the families $\mathcal{F}_d = \{z \mapsto 1 + 1/\omega z^d : \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$, with $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. The family \mathcal{F}_d is a normal form for the set of rational maps of degree d which have exactly two critical points, one of which maps onto the other under one iteration.

Although Shishikura's analytical methods might also imply that the rational maps in these families have no Herman rings, we have established this result through purely topological methods. Our main result is:

Theorem 1 *The rational maps in the family \mathcal{F}_d have no Herman rings.*

*Partially supported by Fondecyt, Proyecto 1960848
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 58F23, 30D05.

The Mandelbrot set of a family of rational maps $\{f_\omega\}$, $\mathcal{M}(\{f_\omega\})$, is defined as the closure of the set $\{\omega : J(f_\omega) \text{ is connected}\}$. Here $J(f_\omega)$ denotes the Julia set of f_ω .

In [Y], Y. Yongcheng uses Shishikura's result to characterize dynamically the set of quadratic rational maps with connected Julia set.

From Theorem 1 we derive the following characterization theorem:

Theorem 2 *The set $\mathcal{M}(\mathcal{F}_d)$ is equal to the set $\{\omega : f_\omega \text{ has no attracting fixed point}\}$. Further, $\mathcal{M}(\mathcal{F}_d)$ is connected, its boundary is a regular analytic curve except for one singular point, namely the unique parameter in $\mathcal{M}(\mathcal{F}_d)$ where the Julia set is disconnected.*

In this Theorem, and in what follows, $f_\omega(z)$ denotes $1 + 1/\omega z^d$.

We prove Theorem 1 in Section 2, while Theorem 2 is proved in Section 3. In Section 3 also we point out the fact that Theorem 1 allows us to reduce the HD-conjecture: $\{\omega : f_\omega \text{ is hyperbolic}\}$ is dense in \mathbb{C} , to the following one:

Conjecture: $\{\omega : J(f_\omega) = \overline{\mathbb{C}}\}$ has empty interior.

2 Proof of Theorem 1

Assume that for some $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f_\omega(z) = 1 + 1/\omega z^d$ has a periodic cycle of Herman rings $\{H_0, H_1, \dots, H_{m-1}\}$. Let $C_0 \subset H_0$ be an f_ω^m -invariant analytic Jordan curve and define $C_j = f_\omega^j(C_0)$, $j = 1, \dots, m-1$. Let ν be the d -th root of unity $e^{2\pi i/d}$.

For a Jordan curve C in \mathbb{C} denote by $I(C)$ the bounded component of $\mathbb{C} \setminus C$ and by $E(C)$ the unbounded component. Call them respectively the interior and the exterior of C .

No C_j passes through the critical values 1 and ∞ because the boundary of a Herman ring is contained in the closure of the forward orbit of the critical set $\{0, \infty\}$. Since each C_j is mapped injectively onto C_{j+1} and both critical points are of maximal degree, we have that for every $j = 0, \dots, m-1$, $f_\omega^{-1}(C_{j+1}) \pmod{m}$ is the disjoint union of the sets $\nu^k C_j$, $k = 0, 1, \dots, d-1$.

We have that $0 \in E(C_j) \forall j = 1, \dots, m-1$. In fact, if $0 \in I(C_j)$ for some j , then $\nu C_j \cap C_j \neq \emptyset$ which contradicts the disjointness of the union $\cup_{k=0}^{d-1} \nu^k C_j$.

It then follows that for every j , $0 \in E(\nu^k C_j) \forall k = 0, \dots, d-1$. Also $\nu^k C_j \subseteq E(\nu^l C_j)$ for $k \neq l$. Since 0 is mapped to ∞ with multiplicity d we conclude that

$$f_\omega : \cap_{k=0}^{d-1} E(\nu^k C_j) \cup \{\infty\} \longrightarrow E(C_{j+1}) \cup \{\infty\}$$

is a d -ramified covering. Hence, f_ω maps bijectively each $I(\nu^k C_j)$, $k = 0, 1, \dots, d-1$, onto $I(C_{j+1})$.

In particular, for every $j = 0, \dots, m-1$, $f_\omega(I(C_j)) = I(C_{j+1}) \pmod{m}$. Therefore:

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} f_\omega^n(I(C_0)) = \cup_{j=0}^{m-1} I(C_j).$$

Then, by Montel's Theorem, $I(C_0)$ belongs to the Fatou set of f_ω . But this is impossible because C_0 is an f_ω^m -invariant Jordan curve of a cycle of Herman rings.

3 Proof of Theorem 2

For rational maps, the Julia set is connected if and only if every component of the Fatou set is simply connected. We would like then to obtain a dynamical characterization for the parameters in the set $\{\omega : \text{every component of } F(f_\omega) \text{ is simply connected}\}$.

From Theorem 1, and the classification of the periodic Fatou components, it follows that every periodic component of $F(f_\omega)$ is either attractive, parabolic or Siegel disk. Furthermore, by Sullivan's No-Wandering Domains theorem [Su] every component of the Fatou set $F(f_\omega)$ is eventually periodic.

Since, for every ω , f_ω has essentially one forward orbit of critical points, there cannot exist two or more cycles of periodic components of $F(f_\omega)$ unless all of them are Siegel disks.

In this last case (that is, existence of several cycles of Siegel disks), the critical points lie in the Julia set. By the Riemann-Hurwitz formula we conclude that every component of $F(f_\omega)$ is simply connected.

Assume now that f_ω has a unique cycle of Fatou components which is of attractive type. This cycle contains at least one critical point. Since f_ω has exactly two critical points and takes one to the other, both critical points are contained in this cycle.

If the period of the attractive cycle is one (i.e. the cycle is composed of just one fixed attractive component), then the two critical points belong to the corresponding component. By the Riemann-Hurwitz relation we conclude that the Euler characteristic of this component is $-\infty$ and so it has multiple connectivity. Further, the Fatou set coincides with this attractive component.

If the period of the attractive cycle is greater than one then the two critical points lie in different components of the cycle. By standard arguments (using the Riemann-Hurwitz relation) one can prove that the Euler characteristic of every component of $F(f_\omega)$ is one. Thus they are all simply connected.

Finally, if f_ω has a unique cycle of Fatou components which is of parabolic type, then by exactly the same arguments as before we conclude that every component of $F(f_\omega)$ is simply connected, unless $F(f_\omega)$ consists of a unique fixed parabolic component, in which case $\chi(F(f_\omega)) = -\infty$.

A fixed attractive component has a corresponding attractive fixed point. Associated to a fixed parabolic component we have a fixed point with derivative equal to one (i.e. a multiple parabolic fixed point). For our family \mathcal{F}_d the second derivative of a multiple parabolic fixed point is non-zero.

So $J(f_\omega)$ is connected if and only if f_ω has neither an attractive fixed point nor a multiple parabolic fixed point. The parameter $\omega_0 = -d(1 + 1/d)^{d+1}$ is the unique one where f_ω has a multiple parabolic fixed point. The analytic curve $\{\omega(u) = du^{-1}(1 - u/d)^{d+1} : u \in S^1\}$ in the ω -plane is the set of parameters where f_ω has a neutral fixed point. In fact this is a Jordan curve since $\omega(z^{d+1}) = c(z)^{d+1}$ where $c : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $c(z) = \sqrt[d+1]{d}z^{-1}(1 - z^{d+1}/d)$, is a one to one map. The parameter ω_0 is the unique singular point in this curve. Further, this Jordan curve separates the ω -plane in two components. The unbounded component coincides with the set of parameters where f_ω has an attractive fixed point.

Putting all this together gives Theorem 2.

We now proceed to point out an equivalent statement for the HD-conjecture that follows from Theorem 1.

The ω plane is a disjoint union of the sets:

$$\mathcal{H} = \{ \omega : f_\omega \text{ has an attracting periodic point } \}$$

$$\mathcal{N} = \{ \omega : f_\omega \text{ has a neutral periodic point } \}$$

$$\mathcal{R} = \{ \omega : \text{every periodic point of } f_\omega \text{ is repelling } \}$$

Since the two critical points of f_ω has the same forward orbit, f_ω is hyperbolic if and only if $\omega \in \mathcal{H}$.

The set of parameters for which $J(f_\omega) = \bar{C}$ is contained in $\mathcal{N} \cup \mathcal{R}$. So, if the HD-conjecture for \mathcal{F}_d is true, then the set $\{ \omega : J(f_\omega) = \bar{C} \}$ has an empty interior.

Reciprocally, for parameters in \mathcal{H} , f_ω is J-stable, while for parameters in \mathcal{N} , f_ω is J-unstable (see [MSS]). By Theorem 1 and the classification of Fatou components, \mathcal{R} is contained in $\{ \omega : J(f_\omega) = \bar{C} \}$. Now if $\{ \omega : J(f_\omega) = \bar{C} \}$ has an empty interior, then it is contained in the J-unstable parameters. We then conclude that, in this case, \mathcal{H} coincides with the set of J-stable parameters.

Since by [MSS] we know in addition that the set of J-stable parameters is dense in \mathbb{C} we conclude that if $\{ \omega : J(f_\omega) = \bar{C} \}$ has an empty interior, then the HD-conjecture for \mathcal{F}_d holds.

REFERENCES:

- [L] M. Lyubich, *The dynamics of rational transforms: the topological picture*, Russian Math. Surveys (4) 41 (1986), 43 - 117.
- [M] J. Milnor, *Geometry and dynamics of quadratic rational maps*, Experimental Mathematics (1) 2 (1993), 37 - 83.
- [MSS] R. Mañé, P. Sad and D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 16 (1983), 193 - 217.
- [Sh] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 20 (1987), 1 - 29.
- [Su] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I, Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. of Math. 122 (1985), 401 - 418.
- [Y] Y. Yongcheng *On the Julia sets of quadratic rational maps*, Complex variables 18 (1992), 141 - 147.

R. BAMON: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Casilla 653 Santiago - CHILE. e-mail: rbamon@abello.dic.uchile.cl

J. BOBENRIETI: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Casilla 5-C, Concepción - CHILE.

REFERENCIAS

- [AB] L. Ahlfors and L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. Math. 72 (1960), 385 - 404.
- [Be] A. Beardon, *Iteration of rational functions*, Springer - Verlag, New York (1991).
- [CE] P. Collet and J. Eckmann, *Iterated maps of the interval as dynamical systems*, Birkhäuser, Boston (1980).
- [De] R. Delbourgo, *Universal facets of chaotic processes*, Asia - Pacific Physics News Vol. 1 (1986), 7 - 11.
- [Fa] P. Fatou, *Sur les equations fonctionelles*, Bull. Soc. Math. France, 47 (1919), 161 - 271 y 48 (1920), 33-94, 208 - 314.
- [Ha] G. R. Hall, *A C^∞ Denjoy counterexample*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 1 (1981), 261 - 272.
- [Ja] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, Second edition, W.H. Freeman and company, New York (1985).
- [Ju] G. Julia, *Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles*, J. Math. Pures Appl., 8 (1918), 47 - 245.
- [Ly1] M. Lyubich, *The dynamics of rational transforms : the topological picture*, Russian Math. Surveys, 41 : 4 (1986), 43 - 117.
- [Ly2] M. Lyubich, *Geometry of quadratic polynomials: moduli, rigidity and local connectivity*, Preprint IMS at Stony Brook 1993-9 (1993).
- [LV] O. Lehto and K. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag (1973).
- [MSS] R. Mañé, P. Sad and D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 16 (1983), 193 - 217.

- [Mc] C. McMullen, *Complex dynamics and renormalization*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1994).
- [MS] W. de Melo and S. van Strien, *One - dimensional dynamics*, Springer - Verlag, New - York (1993).
- [Mi1] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable : Introductory Lectures*, SUNY Stony Brook, IMS preprint, 1990-5 (1990).
- [Mi2] J. Milnor, *Geometry and dynamics of quadratic rational maps*, Experimental Mathematics, Vol. 2, N. 1, (1993), 37 - 83.
- [Re] M. Rees, *Positive measure sets of ergodic rational maps*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 19 (1986), 383 - 407.
- [Sh] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 20 (1987), 1 - 29.
- [Su] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I : Solution of the Fatou - Julia problem on wandering domains*. Annals of Mathematics, 122 (1985). 401 - 418.
- [Sw] G. Swiatek. *Hyperbolicity is dense in the real quadratic family*, SUNY Stony Brook, IMS preprint, 1992-10 (1992).
- [Yoc] J.- C. Yoccoz. *Il n'y a pas de contre - exemple de Denjoy analytique*, C. R. Acad. Sci. Paris. 298, série I N°7 (1984), 141 - 144.
- [Yo] Y. Yongcheng. *On the Julia sets of quadratic rational maps*, Complex variables. Vol. 18 (1992). 141 - 147.