Álgebras Casi-Jordan generalizadas

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
En cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

Manuel Camilo Arenas Carmona

Noviembre, 2005

Director de Tesis Dra. Alicia Labra Jeldres

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato.

MANUEL CAMILO ARENAS CARMONA.

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas, en el exámen de Defensa de Tesis rendido el día, 25 de Noviembre de 2005.

Director de Tesis:

Dra. Alicia Labra ....

Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dr. Eduardo Friedman ....

Dr. Iván Correa ....

Dr. Ivan Shestakov ....

A Tania

Biografía

Manuel Camilo Arenas Carmona nace el día 25 de Febrero de 1976. La totalidad de su enseñanza escolar la recibe en el colegio Francisco De Miranda. En 1995, al finalizar el colegio, entra a estudiar ingeniería en la Pontificia Universidad Católica de Chile, pero abandona a los seis meses de estar allí. Convencido que su futuro estaba una carrera artística ingresa el año siguiente a la escuela de Cine de la Universidad Arcis, donde tampoco encuentra su vocación. Por esa razón, luego de completar un año de estudios, decide retirarse.

Su búsqueda termina en 1997, año en el que ingresa a la carrera de Licenciatura en Ciencias con mención en Física en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. Sin embargo allí nota que las Matemáticas le son más agradables y comprensibles que la Física, por esa razón, al finalizar ese año se cambia en forma interna a la carrera de Licenciatura en en Ciencias con mención en Matemáticas.

El año 2002 ingresa al programa de Doctorado en Ciencias con mención en Matemáticas, donde ha tenido la oportunidad de estudiar diversos temas intensamente apasionantes, así como el agrado de trabajar en esta tesis.

Agradecimientos

Deseo agradecer en primer lugar a mi profesora guía Alicia Labra.

Quiero agradecer a todos los profesores y funcionarios del Departamento de Matemáticas de la Universidadde Chile, en especial a aquellos profesores que han mostrado tener mucha confiaza en mi.

Quisiera agradecer A CONICYT que al otorgarme la Beca de Doctorado me permitió la realización de mis estudios de doctorado y la elaboración de esta tesis.

A mis padres y hermanos por su cariño y apoyo.

Un agradecimiento especial a Tania Palavecinos Lobos por aguantarme todos estos años.

A Cochón, Godofredo, Arvejita, Ornella y todos aquellos individuos no humanos que tanto nos alegran la vida.

Resumen

En este trabajo se estudia la estructura de álgebras conmutativas de dimensión finita sobre cuerpos con más de cuatro elementos, que satisfacen la ecuación:

$$\beta(((xx)y)x - ((xy)x)x) + \gamma(((xx)x)y - ((xy)x)x)$$

donde β y γ son dos escalares no ambos nulos.

Demostramos identidades y resultados básicos en este tipo de álgebras que se refieren a existencia de formas trazas, elementos idempotentes y elemento unidad. Encontramos condiciones bajo las cuales demostramos que nilálgebras en esta clase son nilpotentes. Por último demostramos que bajo ciertas condiciones razonables existe en estas álgebras una descomposición de Wedderburn. Para ello trabajamos con la descomposición de Peirce de álgebras en esta clase.

Abstract

In this work we study the structure of commutative finite dimensional algebras over fields with more than four elements which satisfy the equation:

$$\beta(((xx)y)x - ((xy)x)x) + \gamma(((xx)x)y - ((xy)x)x)$$

where β and γ are two scalars not both zero.

We prove some identities and we give some basics results for these kind of algebras related with the existence of trace forms, idempotent and unity elements. We find some conditions under which we prove that every nilalgebra in this class is nilpotent. Finally we prove, under some reasonable conditions, that these algebras posses a Wedderburn decomposition. With this aim we deal with the Peirce decomposition of this kind of algebras.

Álgebras Casi-Jordan generalizadas

Manuel Arenas.

Índice general

Introducción

El segundo semestre del año 2002 la profesora Alicia Labra Jeldres dictó un curso sobre álgebras no asociativas para alumnos tanto de pregrado como de postgrado. Dicho curso se basó principalmente en el libro *An introduction to nonassociative algebras* de R. D. Schafer [20] el cual muestra algunos resultados importantes de la teoría general de álgebras no asociativas, pero se centra en las llamadas álgebras alternativas y álgebras de Jordan. Otros libros usados como apoyo fueron *Rings that are nearly associative* de Zhevlakov, Shestakov, Slinko y Shirshov [23], y *Variety of álgebras* de J.M. Osborn [16], el cual me pareció particularmente interesante. Al final de aquel semestre decidí realizar mi tesis de doctorado en dicho tema.

El presente trabajo se ocupa de las álgebras Casi-Jordan generalizadas. Dichas álgebras satisfacen una identidad polinomial perteneciente a una familia parametrizada por un par de escalares (β, γ). Las álgebras de Jordan satisfacen una de estas identidades por lo que son un caso particular de este tipo de álgebras.

En el capítulo uno entregamos una reseña histórica que permite entender la aparición de las álgebras Casi-Jordan generalizadas. Vemos nociones básicas de la teoría de álgebras no asociativas, estudiamos identidades polinomiales y el proceso de linealización, damos una lista de las principales variedades de álgebras y presentamos resultados sobre la existencia de formas trazas. Damos además resultados conocidos acerca de solubilidad y nilpotencia de álgebras.

En el segundo capítulo definimos las álgebras Casi-Jordan generalizadas, damos una serie de ejemplos de dichas álgebras y estudiamos algunas características de cada uno de ellos. Luego demostramos algunas identidades y probamos que si un álgebra $\mathcal{A}$ posee un neutro multiplicativo y pertenece a una variedad contenida en la clase de las álgebras Casi-Jordan generalizadas distinta de la variedad de las álgebras Casi-Jordan, entonces es asociativa. Finamente definimos una forma bilineal y demostramos que es una traza en $\mathcal{A}$ para toda $\mathcal{A}$ es esta clase de álgebras.

El tercer capítulo trata del problema de la nilpotencia en un álgebra Casi-Jordan generalizada $\mathcal{A}$. Probamos que si $\mathcal{A}$ admite una forma traza no degenerada, entonces $\mathcal{A}$ es de Jordan. Demostramos también que si $\mathcal{A}$ es de dimensión finita y soluble, entonces es nilpotente. Además encontramos tres condiciones tales que cada una de ellas implica que si $\mathcal{A}$ es una nilálgebra derecha de dimensión finita, entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente.

Las condiciones son:

1. La dimensión de $\mathcal{A}$ es menor o igual que cinco y su nilíndice es a lo más cuatro.

2. Toda subálgebra de $\mathcal{A}$ admite una forma traza no nula.

3. $\mathcal{A}$ satisface la igualdad.

$$(xx, y, x)(aa, b, a)$$

para todo $x, y, a, b \in \mathcal{A}$.

En el capítulo cuatro estudiamos la existencia de una descomposición de Wedderburn respecto del radical soluble $\mathcal{R}$. Encontramos la descomposición de Peirce de las álgebras Casi-Jordan generalizadas y demostramos la existencia de una descomposición de Wedderburn. La demostración requiere la existencia de idempotentes no nulos en todo ideal de $\mathcal{A}$ no contenido en el radical $\mathcal{R}$ y que el álgebra cociente $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ sea separable.

El capítulo cinco resume las preguntas que quedaron abiertas, ya sea por que no fueron contestadas por el presente trabajo, o por que surgieron a partir de éste.

Finalmente damos una bibliografía citando tanto los libros, artículos y trabajos consultados para la elaboración de esta tesis, como otros fundamentales para el estudio de álgebras no asociativas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Historia

Hasta medidados del siglo XIX el estudio de álgebras se limitaba a productos que cumplieran la ley asociativa es decir $(ab)c = a(bc)$ y que poseyeran un neutro multiplicativo. Esto cambia en 1845 cuando el matemático británico A. Cayley construye el álgebra de octoniones, álgebra de dimensión 8 sobre $\mathbb{R}$ que resultó no ser asociativa. Años más tarde el noruego Sophus Lie, trabajando en ecuaciones diferenciales, creó las llamadas álgebras de Lie las cuales además de no ser necesariamente asociativas satisfacen la relación $x^2 = 0$ para todo elemento x, por lo que no poseen un neutro.

En 1934 el físico alemán J.P. Jordan, intentando dotar la mecánica cuántica de formalismos matemáticos, definió un tipo de álgebras conmutativas pero no asociativas, que satisfacen la identidad polinomial de grado cuatro $(x^2y)x = x^2(yx)$. Las álgebras de ese tipo se comenzaron a llamar álgebras de Jordan y desde entonces fueron estudiadas por gran cantidad de matemáticos. De ellos es importante destacar el trabajo de Albert quien formuló numerosos teoremas respecto de la estructura de álgebras de Jordan.

Tomando en cuenta todas estas construcciones se hizo necesaria una teoría general de álgebras no asociativas. Con el objetivo de clasificar las álgebras no asociativas Osborn [14, 15] demostró que dada un álgebra conmutativa con unidad (neutro multiplicativo) sobre un cuerpo de característica distinta de 2 o 3; si satisface una identidad de grado menor o igual a cuatro no implicada por la ley conmutativa, entonces satisface una de las siguientes identidades:

1. $((aa)a)a - (aa)(aa) = 0$

2. $3((aa)b)a - ((aa)a)b - 2((ab)a)a = 0$

3. $2((bb)a)a - 2((ba)b)a - 2((ab)a)b + 2((aa)b)b - (aa)(bb) + (ab)(ab) = 0.$

En 1988 este resultado fue generalizado por Carini, Hentzel y Piacentini-Cattaneo en [2]. Ellos demostraron que toda álgebra conmutativa (no necesariamente con unidad) sobre un cuerpo de característica distinta de 2 o 3; si satisface una identidad de grado menor o igual a cuatro no implicada por la ley conmutativa, entonces satisface una identidad perteneciente a una de las siguientes familias:

1. $\beta((aa)a)a + \gamma(aa)(aa) = 0$

2. $\beta(((aa)b)a - ((ab)a)a) + \gamma(((aa)a)b - ((ab)a)a) = 0$

3. $\gamma(((bb)a)a - ((ba)b)a - ((ab)a)b + ((aa)b)b) + 2\beta((ab)(ab) - (aa)(bb)) = 0$

4. $((ab)c)d - ((ab)d)c + ((bd)a)c - ((bd)c)a + ((bc)d)a - ((bc)a)d = 0$

donde β y γ son elementos fijos, no ambos nulos, del cuerpo. Con el objeto de estudiar la estructura de cualquier álgebra conmutativa que satisfaga una identidad polonomial de grado menor o igual a cuatro, el presente trabajo estudia la estructura de las álgebras que satisfacen las identidades pertenecientes a la segunda de esas familias.

1.2. Conceptos generales acerca de álgebras

1.2.1. Notación y definiciones básicas

Definición 1. Llamamos álgebra a un par $(\mathcal{A}, P)$ donde $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y P es una función bilineal de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$. Como es costumbre llamaremos $\mathcal{A}$ a esta álgebra $(\mathcal{A}, P)$.

Acerca de la notación: Para denotar conjuntos usaremos letras mayúsculas en negritas $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, sin embargo para estructuras algebraicas como espacios vectoriales y álgebras usaremos letras caligraficas $\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathcal{R}, \mathcal{Z}$, etc. Haremos una escepción en el caso del cuerpo de escalares para el cual usaremos negritas de pizarra $\mathbb{F}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Para elementos de un álgebra se usarán letras minúsculas como x, y, z, a, b, c, pero para escalares usaremos letras griegas

α, β, ρ, con el objeto de diferenciarlos de los elementos de un álgebra. Para clases y variedades usaremos letras góticas $\mathfrak{Com}, \mathfrak{V}, \mathfrak{Ass}$. En el caso de las funciones usaremos por lo general letras mayúsculas F, G, H, salvo si pertenecen a un álgebra de polinomios, en cuyo caso usaremos letras minúsculas f, g, h. Se utilizará siempre la yuxtaposición para denotar el producto de dos elementos, es decir $xy = P(x, y)$. Sea usará el símbolo $\cdot$ para separar los productos, teniendo preferencia la yuxtaposición por sobre $\cdot$, por ejemplo $ab \cdot c = P(P(a, b), c)$ y $a \cdot bc = P(a, P(b, c))$. En caso de haber más de dos producto se usarán paréntesis para separar, por ejemplo $(ab)(cd) \cdot e$ significa $P(P(P(a, b), P(c, d)), e)$. Sin embargo, cuando sea posible, para ahorrar notación, se escribirá sin paréntesis. En este caso se debe entender que los productos se toman de izquierda a derecha. Así $abcd = (ab)c \cdot d = P(P(P(a, b), c), d)$. Finalmente si definimos x^n de forma inductiva $x^1 = x$ y $x^n = x^{n-1}x$, para todo $n > 1$, entonces siempre tiene preferencia la potencia ante otro producto, así $x^2x^2 = (xx)(xx)$ y $x^4 = x^2xx = (xx)x \cdot x$.

Si $\mathbf{S}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$ llamaremos $[\mathbf{S}]$ al espacio vectorial generado por $\mathbf{S}$ y $< \mathbf{S} >$ a la subálgebra generada por $\mathbf{S}$. Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son dos subespacios de $\mathcal{A}$ llamaremos $\mathcal{ST}$ a $[\mathcal{ST}]$, es decir al subespacio $[st \mid s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}]$ así $\mathcal{A}^2 = \mathcal{AA}$ es el espacio vectorial generado por los productos de dos elementos de $\mathcal{A}$. Diremos que un subconjunto $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ es un *ideal* de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{I}$ es un ideal bilateral de $\mathcal{A}$, es decir si $\mathcal{I}$ es un subespacio de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{AI} \subseteq \mathcal{I}$ y $\mathcal{IA} \subseteq \mathcal{I}$. Es inmediato que $\mathcal{A}^2$ es un ideal de $\mathcal{A}$.

Diremos que un álgebra $\mathcal{A}$ es *conmutativa* si se cumple que $xy = yx$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$, y diremos que $\mathcal{A}$ es *asociativa* si se satisface que $(xy)z = x(yz)$ para todo x, y, z en $\mathcal{A}$.

Es conveniente definir ciertas funciones útiles en el estudio de álgebras: La función *asociador* $(,,)$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ definida por: $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$, la función *conmutador* $[,]$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ definida por: $[a, b] = ab - ba$, la función *producto simétrico* $*$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ definida por: $a * b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, cuando la característica de $\mathbb{F}$ no es 2 y por: $a * b = (ab + ba)$, en el caso contrario. Es importante recalcar que tanto el conmutador, como el producto simétrico son nuevamente productos en $\mathcal{A}$. Otra observación importante es que la función asociador será nula si y sólo si el álgebra es asociativa y la función conmutador será nula si y sólo si el álgebra es conmutativa.

Un concepto fundamental en el estudio de las álgebras es el operador de multiplicación. Dado un elemento a de un álgebra $\mathcal{A}$ definimos el *operador de multiplicación a la derecha* por a como la función lineal R_a de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ tal que $R_a(x) = xa$ para todo $x \in \mathcal{A}$ y definimos el *operador de multiplicación a la* *izquierda* por a como la función lineal L_a de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ tal que $L_a(x) = ax$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Es obvio que si $\mathcal{A}$ es conmutativa $R_a = L_a \quad \forall \quad a \in \mathcal{A}$. Como el conjunto de operadores lineales de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ forma un álgebra asociativa con la suma y composición de funciones, definimos el *álgebra de multiplicación* de $\mathcal{A}$ como $\mathcal{M}(\mathcal{A}) =< R_a, L_a \mid a \in \mathcal{A} >$. Dada una subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ podemos definir $\mathcal{B}^* =< R_b, L_b \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid b \in \mathcal{B} >$, es claro que $\mathcal{A}^* = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ pero $\mathcal{B}^* \neq \mathcal{M}(\mathcal{B})$ pues los elementos de $\mathcal{B}^*$ son funciones de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ y no de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$.

Respecto de la notación, en el caso de operadores omitiremos el símbolo $\circ$, o sea escribiremos GF en lugar de $G \circ F$. También es necesario notar que escribimos las composiciones de funciones de derecha a izquierda. Es decir $GF(x) = G \circ F(x) = G(F(x))$, debido a ello debemos advertir que al escribir las expresiones algebraicas en término de operadores de multiplicación es posible que el orden se invierta. Por ejemplo $R_aR_b(x) = R_a \circ R_b(x) = R_a(R_b(x)) = (xb)a = xba$ y $L_aL_b(x) = L_a(L_b(x)) = a(bx) \neq abx$.

Si $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{F}$-álgebra y $\mathbb{E}$ es una extensión del cuerpo de escalares $\mathbb{F}$ es posible definir una nueva álgebra $\mathcal{A}_{\mathbb{E}}$ tal que $A_{\mathbb{E}}$ es una $\mathbb{E}$-álgebra. Esto se logra tomando $\mathcal{A}$ y $\mathbb{E}$ como $\mathbb{F}$-espacios vectoriales y construyendo $\mathcal{A}_{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{A}$ y definiendo la multiplicación por escalares de la forma

$$\alpha(\beta \otimes x) = (\alpha\beta) \otimes x$$

y el producto

$$(\alpha \otimes x)(\beta \otimes y) = (\alpha\beta) \otimes (xy)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ y todo $x, y \in \mathcal{A}$.

1.2.2. Identidades y linealizaciones

Sea $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ un conjunto numerable de símbolos. Definimos una *palabra* como una sucesión finita de símbolos en $\mathbf{X} \cup \{(,)\}$. Definimos el subconjunto $\{\mathbf{X}\}$ del conjunto de palabras en $\mathbf{X}$ de la siguiente forma:

1. Si $x \in \mathbf{X}$ entonces $x \in \{\mathbf{X}\}$
2. Si $a, b \in \mathbf{X}$ entonces $ab \in \{\mathbf{X}\}$.
3. Si $a \in \{\mathbf{X}\} \setminus \mathbf{X}$ y $b \in \mathbf{X}$, entonces $(a)b \in \{\mathbf{X}\}$ y $b(a) \in \{\mathbf{X}\}$.
4. Si $a, b \in \{\mathbf{X}\} \setminus \mathbf{X}$ entonces $(a)(b) \in \{\mathbf{X}\}$.

5. $a \in \{\mathbf{X}\}$ si y sólo si se obtiene a partir de elementos de $\mathbf{X}$ por medio de una sucesión finita de los pasos uno a cuatro.

Como ejemplo podemos ver que las palabras:

$$x_1, \quad x_1x_2, \quad (x_1x_2)x_3, \quad x_1(x_2x_3), \quad ((x_1x_2)x_3)x_4 \quad \text{y} \quad (x_1x_2)(x_3x_4)$$

están en $\{\mathbf{X}\}$. Sin embargo las palabras:

$$x_1x_2x_3, \quad x_1x_2x_3x_4, \quad (x_1x_2)x_3x_4, \quad \text{y} \quad (x_1)(x_2)$$

no lo están.

En este conjunto la función de $\{\mathbf{X}\} \times \{\mathbf{X}\}$ en $\{\mathbf{X}\}$ definida por:

$$(a,b) \longrightarrow \begin{cases} ab & \text{si} \quad a,b \in \mathbf{X} \\ (a)b & \text{si} \quad a \in \{\mathbf{X}\} \setminus \mathbf{X}, b \in \mathbf{X} \\ a(b) & \text{si} \quad a \in \mathbf{X}, b \in \{\mathbf{X}\} \setminus \mathbf{X} \\ (a)(b) & \text{si} \quad a \in \{\mathbf{X}\} \setminus \mathbf{X}, b \in \{\mathbf{X}\} \setminus \mathbf{X} \end{cases}$$

constituye una operación no asociativa en $\{\mathbf{X}\}$. Si dado un cuerpo $\mathbb{F}$ definimos $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ como el espacio vectorial libre sobre $\mathbb{F}$ con base $\{\mathbf{X}\}$ y extendemos la operación de $\{\mathbf{X}\}$ a $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ por bilinealidad, obtenemos que $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ es un álgebra no asociativa llamada el álgebra libre sobre $\mathbb{F}$ con base $\mathbf{X}$.

Esta álgebra tiene la siguiente propiedad con respecto a $\mathbf{X}$:

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{F}$ y sea E una función cualquiera de $\mathbf{X}$ en $\mathcal{A}$. Entonces E se llama una *evaluación* en $\mathcal{A}$ y existe un único homomorfismo de álgebras $\hat{E}$ de $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ en $\mathcal{A}$ tal que $\hat{E}(a) = E(a)$ para todo $a \in \mathbf{X}$.

Llamaremos *identidad polinomial* (o simplemente identidad) a un elemento f de $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$. Diremos que $\mathcal{A}$ *satisface* f si $\hat{E}(f) = 0$ para toda evaluación E en $\mathcal{A}$.

Una identidad f se dice un *monomio* si $f = \alpha g$ donde $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ y $g \in \{\mathbf{X}\}$. Es inmediato de la definición de $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ que toda identidad es una suma finita de monomios. Dado un símbolo a y un monomio f llamaremos el *grado* de a en f al número de veces que a aparece en f, por ejemplo el grado de x_1 en $((x_1x_1)x_2)x_1$ es 3 y el grado de x_1 en x_2x_3 es 0. Es inmediato también que dado un monomio f existe una cantidad finita de símbolos a tales que el grado de a en f no es cero. Por ello la notación $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ significa que k es el mayor índice tal que el grado de x_k en f es estrictamente positivo. Sea $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ un monomio, sea $\mathbf{Y} = \{y \in \{x_i\}_{i=1}^k \mid$ grado de y en $f > 0\}$. Si $\mathbf{Y} = \{y_i\}_{i=1}^{j}$con $j \leq k$, enumerados de tal forma que si n_i es el grado de y_i en f entonces $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_j$. Entonces diremos que f es de *tipo* $[n_1, n_2, \ldots, n_j]$. Definiremos también el *grado* de f como el número $\partial(f) = \sum_{i=1}^{j} n_i$.

Dada una identidad $f = g_1 + \ldots + g_k$ donde los g_i son monomios, definimos el *grado* de f como $\partial(f) = \text{máx}_i\{\partial(g_i)\}$. Por último si f es una identidad, entonces f se dice *homogénea* si $f = g_1 + \ldots + g_k$, donde los g_i son monomios del mismo tipo. En este caso llama el tipo de f al tipo de cada g_i y es claro que $\partial(f) = \partial(g_i)$ para todo i.

Si $f \in \mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$, $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ y $\mathcal{A}$ es un álgebra identificaremos f con la función de F de $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$, k veces en $\mathcal{A}$, dada por $F(a_1, \ldots, a_k) = \hat{E}_{a_1,\ldots,a_k}(f)$ donde $E_{a_1,\ldots,a_k}$ es una evaluación que envía el símbolo x_i en el elemento a_i de $\mathcal{A}$. Es inmediato que $\mathcal{A}$ satisface f si y sólo si la función F es nula, por ello a menudo escribiremos:

$$f(a_1, \ldots, a_k) = 0, \quad \forall \quad a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A},$$

en lugar de $\mathcal{A}$ satisface f.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$ y una función lineal $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ diremos que que D es una *derivación* si para todo $x, y \in \mathcal{A}$ se cumple $D(xy) = D(x)y + xD(y)$. Otra propiedad de $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ es que dada una evaluación $E : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ existe una única derivación $D_E : \mathbb{F}\{\mathbf{X}\} \longrightarrow \mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ tal que $D_E(x) = E(x)$ para todo $x \in X$, a la que llamaremos la derivación generada por E. Dados un elemento g de $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$, un símbolo $y \in \mathbf{X}$ definimos la función $\delta_{(y,g)}$ de $\mathbf{X}$ en $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ tal que $\delta_{(y,g)}(y) = g$ y $\delta_{(y,g)}(z) = 0$ si $z \neq y$. Como $\delta_{(y,g)}$ es una evaluación en $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ definimos el operador $D_{(y,g)} : \mathbb{F}\{\mathbf{X}\} \longrightarrow \mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$ como la derivación generada por $\delta_{(y,g)}$. Notese que para aplicar el operador $D_{(y,g)}$ en algún $f \in \{\mathbf{X}\}$, se toma la suma de todas las palabras obtenidas reemplazando una vez y por g en f.

Ilustramos mejor esto en el siguiente ejemplo:

$$D_{(x,g)}((xx)y) = (D_{(x,g)}(xx))y + (xx)(D_{(x,g)}(y)) =$$

$$(D_{(x,g)}(xx))y + (xx)(\delta_{(x,g)}(y)) = (D_{(x,g)}(xx))y + (xx)0 =$$

$$(D_{(x,g)}(xx))y = ((D_{(x,g)}(x))x + x(D_{(x,g)}(x)))y =$$

$$((\delta_{(x,g)}(x))x + x(\delta_{(x,g)}(x)))y = (gx)y + (xg)y$$

por lo que si

$$f = (x_1x_1)x_2,$$

entonces

$$D_{(x_1,2x_1+x_2)}(f) = ((2x_1 + x_2)x_1)x_2 + (x_1(2x_1 + x_2))x_2.$$

Sea $f = f(x_1, \ldots x_k)$ una identidad y sea y un símbolo tal que su grado en f es cero. Diremos que $g_i = D_{(x_i,y)}(f)$ es una *linealización simple* de f con respecto a x_i. Dadas dos identidades f y g diremos que g es una *linealización* de f si se obtiene luego de aplicar una cantidad finita de linealizaciones simples partiendo de f por ejemplo si

$$f(x_1) = (x_1x_1)x_1$$

y

$$g((x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3+(x_2x_3)x_1+(x_3x_1)x_2+(x_2x_1)x_3+(x_3x_2)x_1+(x_1x_3)x_2$$

entonces g es una linealización de f pues:

$$g = D_{(x_1,x_3)}(D_{(x_1,x_2)}(f)).$$

Si f y g son identidades y g es una linealización de f tal que g es de tipo $[1, 1, \ldots, 1]$ entonces g se dice la *linealización completa*de f.

Una observación importante respecto de linealizaciones es la siguiente: Sea $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ una identidad homogénea. Sea j un índice fijo tal que $1 \leq j \leq n$, sea k el grado de x_j en f y sea ε un escalar no nulo. Podemos definir la identidad $g(y, x_1, \ldots, x_n)$ reemplazando x_j por $x_j + \varepsilon y$ es decir: $g(y, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_j + \varepsilon y, \ldots, x_n)$. Es sencillo ver que existen polinomios homogéneos K_i, $i = 1, \ldots, k$ tales que $g = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i K_i$. Se tiene que $K_1 = D_{(x_j,y)}(f)$, es la linealización simple de f respecto a x_j.

Observación 1. El resultado más importante respecto a linealizaciones se puede encontrar en Zhevlakov et al. ([23] Cap. 1, §5 Teorema 7) y Osborn ([16] Cap. 1, §3 Teorema 3.6), y es el siguiente:

Teorema: *Sea f una identidad homogénea en $\mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo con más elementos que el grado de f. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y g una linealización de f. Entonces si $\mathcal{A}$ satisface f, entonces $\mathcal{A}$ satisface g. Además si la característica del cuerpo es mayor que el grado de f y $\mathcal{A}$ satisface g, entonces $\mathcal{A}$ satisface f.*

1.2.3. Variedades de álgebras

Sea $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$. La clase $\mathfrak{V}(\mathbf{S})$ de todas las álgebras que satisfacen todas las identidades de $\mathbf{S}$ se llama la *Variedad definida por* $\mathbf{S}$. Dada una clase $\mathfrak{V}$ de álgebras diremos que es una variedad si $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(\mathbf{S})$ para algún $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{F}\{\mathbf{X}\}$.

Mencionaremos las variedades más estudiadas en la teoría de álgebras no asociativas:

- El conjunto $\mathbf{S} = \{xy - yx\}$, define la variedad $\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{Com}$, de álgebras conmutativas.
- El conjunto $\mathbf{S} = \{(xy)z - x(yz)\}$, define la variedad $\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{Ass}$, de álgebras asociativas.
- El conjunto $\mathbf{S} = \{x^2, (xy)z + (yz)x + (zx)y\}$, define la variedad $\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{L}$, de álgebras de Lie.
- El conjunto $\mathbf{S} = \{xy - yx, (x^2y)x - x^2(yx)\}$, define la variedad $\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{J}$, de álgebras de Jordan.
- El conjunto $\mathbf{S} = \{x^2y - x(xy), (yx)x - yx^2\}$, define la variedad $\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{Alt}$, de álgebras alternativas.
- El conjunto $\mathbf{S} = \{x^{i+j} - x^i x^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$, define la variedad $\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{Pa}$, de álgebras potencia asociativas.
- El conjunto $\mathbf{S} = \{(xy)x - x(yx)\}$, define la variedad $\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{Fl}$, de álgebras flexibles.

Podemos dar relaciones entre estas variedades. Por ejemplo toda álgebra conmutativa y asociativa es de Jordan es decir $\mathfrak{Com} \cap \mathfrak{Ass} \subseteq \mathfrak{J}$. Es conocido también que $\mathfrak{Ass}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{J}$ y $\mathfrak{Alt}$ están contenidas en $\mathfrak{Pa}$ y que la variedad $\mathfrak{Fl}$ contiene a $\mathfrak{Com}$, $\mathfrak{Ass}$, $\mathfrak{Alt}$, $\mathfrak{J}$ y $\mathfrak{L}$.

Un resultado importante aúnque no tan sencillo de demostrar es que si Car($\mathbb{F}$) es distinta de 2, 3 o 5 y $\mathbf{S} = \{xy - yx, x^4 - x^2x^2\}$, entonces $\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{Pa} \cap \mathfrak{Com}$ (ver Schafer [20] Cap. 5 §1, página 130).

Como ejemplo demostraremos que sobre cuerpos de característica distinta de 2 o 3, $\mathfrak{Alt} \cap \mathfrak{Com} \subseteq \mathfrak{Ass}$, resultado que utilizaremos más adelante.

Lema 1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa y alternativa sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tal que* Car($\mathbb{F}$) $\neq 2$ *o* 3. *Entonces $\mathcal{A}$ es asociativa.*

Demostración: Para toda álgebra $\mathcal{A}$ todo trío de elementos $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ satisface la ecuación:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) =$$

$$[[a_1, a_2], a_3] + [[a_2, a_3,]a_1] + [[a_3, a_1], a_2].$$

Es suficiente desarrollar cada lado de la igualdad y comprobar que los doce sumandos que aparecen en el lado izquierdo de la igualdad coinciden con los doce del lado derecho. Ahora bien si $\mathcal{A}$ es conmutativa el lado derecho de la igualdad es cero y si $\mathcal{A}$ es alternativa entonces el asociador $(,,)$ es una función alternante (ver Schafer [20] Cap. 3 §1, página 27), por lo que:

$$6(a_1, a_2, a_3) = 0.$$

Luego como $\mathrm{Car}(\mathbb{F}) \neq 2$ o 3, entonces $(a_1, a_2, a_3) = 0$ y $\mathcal{A}$ es asociativa.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$ en una determinada clase podemos, cambiando el producto definir una nueva álgebra que pertenezca a otra variedad. Por ejemplo si $\mathcal{A}$ es asociativa y definimos el conmutador como nuevo producto en $\mathcal{A}$, entonces obtenemos un álgebra de Lie a la que llamamos $\mathcal{A}^-$. Si en lugar de eso tomamos el producto simétrico en como nuevo producto en $\mathcal{A}$ obtenemos un álgebra de Jordan a la que llamamos $\mathcal{A}^+$.

1.2.4. Álgebras solubles, nilpotentes y nilálgebras

Definimos las *potencias principales* de un elemento x de un álgebra $\mathcal{A}$, mediante la fórmula $x^1 = x$, $x^{n+1} = x^n x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que x es *nilpotente a la derecha* si existe un natural k tal que $x^k = 0$. Llamaremos *índice de nilpotencia* de x al menor natural k tal que $x^k = 0$. Diremos que un álgebra $\mathcal{A}$ es una *nilálgebra derecha* si todo elemento de $\mathcal{A}$ es nilpotente a la derecha. Si existe un natural k tal que $x^k = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$, entonces existe un menor natural m con esta propiedad al que llamamos el *nilíndice* de $\mathcal{A}$. Es sencillo verificar que si k es el índice de nilpotencia de un elemento nilpotente a la derecha x entonces el conjunto $\{x, x^2, \ldots, x^{k-1}\}$ es linealmente independiente, por lo cual, si $\mathcal{A}$ es una nilálgebra derecha de dimensión finita, entonces el nilíndice de $\mathcal{A}$ está acotado por la dimensión de $\mathcal{A}$.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$ podemos definir diversas cadenas de subálgebras de $\mathcal{A}$ ordenadas por inclusión. Definamos:

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{<1>} = \mathcal{A}$$

y para todo n natural

$$\mathcal{A}^{n+1} = \sum_{i+j=n} \mathcal{A}^i\mathcal{A}^j, \quad \mathcal{A}^{(n+1)} = (\mathcal{A}^{(n)})^2, \quad \mathcal{A}^{<n+1>} = \mathcal{A}^{<n>}\mathcal{A}$$

Diremos que $\mathcal{A}$ es *nilpotente* si existe un índice k tal que $\mathcal{A}^k = 0$. Si para algún índice k tenemos $\mathcal{A}^{(k)} = 0$ diremos que $\mathcal{A}$ es *soluble* y si para algún k tenemos que $\mathcal{A}^{<k>} = 0$ diremos que $\mathcal{A}$ es *nilpotente a la derecha.*

Es inmediato de la definición que para todo índice m, $A^{<m>} \subseteq \mathcal{A}^m$ y $\mathcal{A}^{(m+1)} \subseteq \mathcal{A}^{2^m}$. Por ello tenemos que si $\mathcal{A}$ es nilpotente, entonces $\mathcal{A}$ es soluble y nilpotente a la derecha. También es inmediato que $x^m \in \mathcal{A}^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por lo que si $\mathcal{A}$ es nilpotente a la derecha, es una nilálgebra derecha.

También es sencillo ver que si $\mathcal{A}$ es un álgebra potencia asociativa y soluble entonces es una nilálgebra.

Observación 2. Damos aquí tres teoremas acerca de solubilidad y nilpotencia que se usarán más adelante.

El primer teorema es sumamente útil para demostrar la solubilidad de un álgebra (Schafer [20] Cap. 2 §2 Proposición 2.2).

***Teorema A**: Sea $\mathcal{A}$ álgebra e $\mathcal{I}$ un ideal soluble de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es soluble. Entonces $\mathcal{A}$ es soluble.*

El segundo teorema dice que para ciertos casos el concepto de nilpotente y nilpotente a la derecha son equivalentes y se puede encontrar en Zhevlakov et al. ([23], Cap. 4 §1 Proposición 1).

***Teorema B**: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa o anticonmutativa Entonces $\mathcal{A}^n \subseteq \mathcal{A}^{<2^n>}$, por lo que si $\mathcal{A}$ es nilpotente a la derecha es nilpotente.*

Es cierto que para ciertas variedades de álgebras, como $\mathfrak{Ass}$, los conceptos de álgebra soluble, álgebra nilpotente y nilálgebra coinciden (para álgebras dimensión finita), sin embargos existen variedades para las cuales esto no ocurre. Por ejemplo en la variedad $\mathfrak{L}$ de álgebras de Lie toda álgebra es una nilálgebra pero existen álgebras de dimensión finita no solubles y existen álgebras de dimensión finita solubles que no son nilpotentes.

Un importante resultado de Albert es el siguiente:

***Teorema C**: (Albert) Sea $\mathcal{A}$ una nilálgebra de Jordan de dimensión finita sobre un cuerpo de característica distinta de 2. Entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente.*

La demostración de este teorema aparece en Schafer ([20] Cap. 2 §2 Teorema 2.4), en ella se demuestra que bajo las condiciones dadas en el teorema, si $\mathcal{A}$ es soluble, entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente. Por lo tanto los tres conceptos coinciden.

Por último damos un resultado que relaciona la nilpotencia de un álgebra $\mathcal{A}$ con la nilpotencia de su álgebra de multiplicación $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (ver Schafer [20] Cap. 4 §1 Teorema 4.3).

Teorema D: *Sea $\mathcal{A}$ álgebra y sea $\mathcal{B}$ un ideal de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{B}$ es nilpotente si y sólo si la subálgebra $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es nilpotente.*

1.2.5. Formas trazas

Definición 2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sea $T : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ una forma bilineal. Diremos que T es *asociativa* si para todo x, y, z en $\mathcal{A}$ se cumple:

$$T(x, yz) = T(xy, z).$$

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, diremos que T es una *traza bilineal* si T es una forma bilineal simétrica y asociativa.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ y una traza bilineal T, definimos:

$$\mathcal{I}^{\perp} = \{a \in \mathcal{A} \mid T(a, y) = 0, \quad \forall y \in \mathcal{I}\}$$

Tenemos que $\mathcal{I}^{\perp}$ es también un ideal de $\mathcal{A}$. En efecto si $x \in \mathcal{I}^{\perp}$, $y \in \mathcal{I}$ y $a \in \mathcal{A}$ se tiene $T(xa, y) = T(x, ay) = 0$ pues $ay \in \mathcal{I}$ y $T(ax, y) = T(y, ax) = T(ya, x) = T(x, ya) = 0$ pues $ya \in \mathcal{I}$ luego $ax, xa \in \mathcal{I}^{\perp}$.

Definiremos una clase especial de álgebras para las que más adelante daremos resultados sobre nilpotencia.

Definición 3. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, diremos que $\mathcal{A}$ es *trácica* si toda subálgebra de $\mathcal{A}$ distinta de cero posee al menos una traza bilineal no nula. Llamaremos $\mathfrak{T}$ a la clase de todas las álgebras trácicas .

Es claro que si $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}$ y $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B} \in \mathfrak{T}$.

Definición 4. Sea $\mathcal{A}$ álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, y sea $L : \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ una forma lineal. Entonces L se dice una *traza lineal* si $L([x, y]) = L((x, y, z)) = 0$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$ llamaremos $(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$ al espacio generado por asociadores, es decir:

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) = [(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathcal{A}].$$

Lema 2. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa tal que $\mathcal{A} \neq (\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$ entonces existe una traza bilineal $T \neq 0$ en $\mathcal{A}$.*

Demostración: Es claro que si $(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$ entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) \neq \mathcal{A}^2$ o bien $\mathcal{A}^2 \neq \mathcal{A}$. Demostraremos que en ambos casos $\mathcal{A}$ es trácica. Dada una traza lineal L en un álgebra $\mathcal{A}$, es sencillo encontrar una traza bilineal definiendo $T(a, b) = L(ab)$. La simetría es consecuencia de: $T(a,b)-T(b,a) = L(ab) - L(ba) = L(ab - ba) = L([a,b]) = 0$, y la asociatividad lo es de: $T(ab, c)-T(a, bc) = L((ab)c)-L(a(bc)) = L(a(bc)-(ab)c) = L((a, b, c)) = 0$. La forma T será no nula si y sólo si L no se anula sobre $\mathcal{A}^2$.

Dado esto si un álgebra conmutativa $\mathcal{A}$ satisface $\mathcal{A}^2 \neq (\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$, podemos encontrar una traza lineal que no se anule sobre $\mathcal{A}^2$ y por ende una traza bilineal no trivial. Basta tomar un elemento x de $\mathcal{A}^2 \setminus (\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$ junto con una base $\mathbf{B}$ de $(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$. El conjunto $\mathbf{B} \cup \{x\}$ es linealmente independiente por lo que podemos completarlo a una base de $\mathcal{A}$. Definiendo L en la base de $\mathcal{A}$ de modo que $L(x) = 1$ y $L(b) = 0$ para todo $b \in \mathbf{B}$ se obtiene una traza lineal que no se anula en $x \in \mathcal{A}^2$.

También si $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}^2$ podemos tomar una base $\mathbf{B}'$ de $\mathcal{A}^2$ y extenderla a una base $\mathbf{B}$ de $\mathcal{A}$. Si definimos T en la base de forma que $T(a,b) = 1$ si $a, b \in \mathbf{B}\setminus\mathbf{B}'$ y $T(a,b) = 0$ si $a \in \mathbf{B}'$ o bien $b \in \mathbf{B}'$, tendremos $T(x, yz) = 0 = T(xy, z)$ con $T \neq 0$. □

Corolario 1. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa y soluble. Entonces $\mathcal{A}$ es trácica.

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ conmutativa y soluble. Entonces para toda subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ se cumple $\mathcal{B}^2 \neq \mathcal{B}$ por lo que $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}$ □

Corolario 2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa y asociativa. Entonces $\mathcal{A}$ es trácica.

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ conmutativa y asociativa. Entonces $(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \{0\}$ para toda subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$. Debido a lo cual tenemos que $\mathcal{B} \neq (\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ si $\mathcal{B} \neq \{0\}$. Luego $\mathcal{A}$ es trácica. □

En particular toda álgebra de dimensión 1 está en $\mathfrak{T}$ pues toda álgebra de dimensión 1 es asociativa y conmutativa.

Capítulo 2

Álgebras Casi-Jordan generalizadas

2.1. Conceptos Básicos

En los capítulos que siguen $\mathbb{F}$ será un cuerpo con más de cuatro elementos.

Definición 5. Sea $\mathcal{A}$ álgebra conmutativa sobre $\mathbb{F}$. Entonces $\mathcal{A}$ se dice un álgebra *Casi-Jordan generalizada* si existe un par de elementos β, γ fijos no ambos nulos de $\mathbb{F}$ tales que para todo $x, a \in \mathcal{A}$ se satisface:

$$\beta(x^2ax - xaxx) + \gamma(x^3a - xaxx) = 0. \tag{2.1}$$

Definimos esta clase de álgebra mediante la ecuación (2.1) gracias a que ésta es una de las familias de ecuaciones dadas por Carini, Hentzel y Piacentini-Cattaneo en [2], pero existen otras ecuaciones equivalentes que nos pueden ser más útiles.

Una desventaja de esta definición es que no hay una correspondencia biunívoca entre los pares $(\beta, \gamma) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ y las variedades determinadas por ellos, pues un álgebra $\mathcal{A}$ satisface (2.1) para un par (β, γ) si y sólo si $\mathcal{A}$ satisface (2.1) para el par $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ para todo $\alpha \neq 0$ en $\mathbb{F}$. Damos otra presentación de estas álgebras que resuelve el problema.

Dados β y γ escalares tales que $\beta + \gamma \neq 0$ definimos:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{\beta + \gamma}.$$

Podemos ver que si sumamos y restamos x^2ax en el segundo sumando de (2.1) tendremos:

$$\beta(x^2ax - xaxx) + \gamma(x^3a - x^2ax + x^2ax - xaxx) = 0$$

lo que implica que

$$(\beta + \gamma)(x^2ax - xaxx) + \gamma(x^3a - x^2ax) = 0$$

de donde se obtiene

$$(\beta + \gamma)(x, x, a)x + \gamma(x, x^2, a) = 0 \tag{2.2}$$

Tenemos que si $\beta + \gamma = 0$ entonces la ecuación (2.2) implica que $(x, x^2, a) = 0$, resultado que se obtiene también reeplazando en (2.1) $\beta = 1$ y $\gamma = -1$. Por ello vamos a definir la variedad

$$\mathfrak{G}_\infty = \mathfrak{V}(\mathbf{S})$$

cuando

$$\mathbf{S} = \{xy - yx, x^2yx - x^3y\}.$$

Ahora bien si $\beta + \gamma \neq 0$ entonces (2.2) implica:

$$(x, x, a)x = \lambda(x, x^2, a) \tag{2.3}$$

Entonces para todo elemento λ la ecuación (2.3) define una única variedad de $\mathbb{F}$-álgebras que llamaremos $\mathfrak{G}_\lambda$, es decir si

$$\mathbf{S} = \{xy - yx, (x, x, a)x - \lambda(x, x^2, a)\},$$

entonces

$$\mathfrak{V}(\mathbf{S}) = \mathfrak{G}_\lambda.$$

Es claro que si definimos $\mathfrak{G}$ como la clase de todas las álgebras Casi-Jordan generalizadas sobre $\mathbb{F}$ entonces:

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}} \mathfrak{G}_\lambda.$$

Otra consecuencia de (2.3) es que si un álgebra $\mathcal{A}$ satisface (2.3) para dos valores distintos de $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ entonces satisface dicha ecuación para cualquier valor de λ, es decir dados dos elementos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ se tiene que

$$\mathfrak{G}_{\lambda_1} \cap \mathfrak{G}_{\lambda_2} = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}} \mathfrak{G}_\lambda.$$

Esta última intersección es también una variedad de álgebras (la definida por $\mathrm{S} = \{xy - yx\} \cup \{\beta(x^2yx - xyxx) + \gamma(x^3y - xyxx) \mid \beta, \gamma \in \mathbb{F}\}$) y la llamaremos $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$.

La variedad de álgebras $\mathfrak{G}_\lambda$, esta definida también por una ecuación de la forma $\mu\beta + \nu\gamma$ para un par fijo de escalares μ, ν. La siguiente tabla da una correspondencia entre algunas combinaciones lineales de β y γ que dan cero y el valor de λ de la variedad que definen.

$0 =$	β	$\beta - \gamma$	γ	$\beta + 3\gamma$	$\beta + 2\gamma$	$3\beta + \gamma$	$\beta + \gamma$
$\lambda =$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	∞

Para la mayor parte de los cálculos que haremos no usaremos (2.1) o (2.3) pues nos interesa tener el menor número posible de sumandos con el fin obtener ecuaciones más simples al linealizar. Debido a ello veamos una tercera forma de presentar la clase de las álgebra Casi-Jordan generalizadas. Notemos que $\mathcal{A}$ satisface (2.1) si y sólo si $\mathcal{A}$ satisface:

$$\alpha(xaxx) + \beta(x^2ax) + \gamma(x^3a) = 0 \tag{2.4}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ tales que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Una observación sencilla pero importante es que si $\mathcal{A}$ es conmutativa y asociativa se tiene que $x^3a = xaxx = x^2ax$, por lo que $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{G})$.

Una variedad conocida de álgebras Casi-Jordan generalizadas es $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}$ (esto es cuando $\beta + 3\gamma = 0$ es decir cuando se satisface $3x^2ax - x^3a - 2xaxx = 0$). Un resultado conocido (ver Osborn [16]) es que $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}} \cap \mathfrak{P}a = \mathfrak{J}$, es decir toda álgebra $\mathcal{A}$ es de Jordan si y sólo si es potencia asociativa y está en $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}$. Por eso un álgebra en esta clase se le llama un álgebra Casi-Jordan. Para ver propiedades de las álgebras Casi-Jordan ver Osborn [14], Hentzel y Peresi [8], o Peterson [18, 19] (el cual las llama álgebras triples de Lie).

2.2. Ejemplos

Ahora veremos algunos ejemplos de álgebras Casi-Jordan generalizadas. Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra tal que $A^{<4>} = 0$. Entonces para todo $x, y \in \mathcal{A}$ se tiene $x^2yx = x^3y = xyxx = 0$ por lo que $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Los ejemplos uno y dos aparecen en [7].

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{A}$ generada por elementos x_1, x_2, x_3, y, con la siguiente tabla de multiplicación:

	x_1	x_2	x_3	y
x_1	x_2	x_3	0	0
x_2	x_3	x_3	0	x_3
x_3	0	0	0	0
y	0	x_3	0	$x_2 + x_3$

Observando la tabla podemos ver que $\mathcal{A}^2 \subseteq [x_2, x_3]$. Una vez hecha esta observación vemos que $\mathcal{A}^{<3>} \subseteq [x_3]$ lo que implica que $(\mathcal{A}^{<4>} = 0$ pues cualquier elemento multiplicado por x_3 da como resultado cero. Por lo que $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Por otro lado no es un álgebra de Jordan pues $x_1^4 = x_1^3 x_1 = (x_1^2 x_1)x_1 = (x_2 x_1)x_1 = x_3 x_1 = 0$ y $x_1^2 x_1^2 = x_2 x_2 = x_3 \neq 0$, por lo que no es potencia asociativa.

Ejemplo 2. Sea $\mathcal{A}$ generada por elementos t, u, v, w con la siguiente tabla de multiplicación:

	t	u	v	w
t	u	v	0	0
u	v	w	0	0
v	0	0	0	0
w	0	0	0	0

Observando la tabla podemos ver que $\mathcal{A}^2 \subseteq [u, v, w]$. Una vez hecha esta observación vemos que $\mathcal{A}^{<3>} \subseteq [v, w]$ lo que implica que $\mathcal{A}^{<4>} = 0$ pues cualquier elmento multiplicado por v o por w da como resultado cero. Obtenemos que $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Sin embargo no es un álgebra de Jordan pues $t^4 = t^3 t = (t^2 t)t = (ut)t = vt = 0$ y $t^2 t^2 = uu = v \neq 0$, por lo que no es potencia asociativa.

Ejemplo 3. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ y sea $\mathcal{A}$ generada por elementos e, v con la siguiente tabla de multiplicación:

	e	v
e	e	λv
v	λv	0

entonces $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{G}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$. Para demostrarlo tomemos un elemento $x = (\mu, \nu) = \mu e + \nu v$ y calculemos $\alpha R_x^3 + \beta R_x R_{x^2} + \gamma R_{x^3}$. Tenemos que en la base e, v la mariz de R_e es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y la de } R_v \text{ es } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \text{ por lo que la de } R_x \text{ es } \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \lambda\nu & \lambda\mu \end{pmatrix}.$$

Luego

$$x^2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \lambda\nu & \lambda\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^2 \\ 2\lambda\mu\nu \end{pmatrix}$$

por lo que la matriz de R_{x^2} es

$$\begin{pmatrix} \mu^2 & 0 \\ 2\lambda^2\mu\nu & \lambda\mu^2 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$x^3 = \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 \\ 2\lambda^2\mu\nu & \lambda\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^3 \\ (2\lambda^2 + \lambda)\mu^2\nu \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que la matriz de R_{x^3} es

$$\begin{pmatrix} \mu^3 & 0 \\ (2\lambda^3 + \lambda^2)\mu^2\nu & \lambda\mu^3 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos $R_x R_{x^2}$

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \lambda\nu & \lambda\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 \\ 2\lambda^2\mu\nu & \lambda\mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^3 & 0 \\ (2\lambda^3 + \lambda)\mu^2\nu & \lambda^2\mu^3 \end{pmatrix}.$$

Por último calculamos R_x^3

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \lambda\nu & \lambda\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \lambda\nu & \lambda\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \lambda\nu & \lambda\mu \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \mu^2 & 0 \\ (\lambda^2 + \lambda)\mu\nu & \lambda^2\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \lambda\nu & \lambda\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^3 & 0 \\ (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)\mu^2\nu & \lambda^3\mu^3 \end{pmatrix}.$$

Si $\beta = \lambda + 1$ y $\gamma = -\lambda$ entonces $\alpha = -1$ y tenemos:

$$\alpha R_x^3 + \beta R_x R_{x^2} + \gamma R_{x^3} = -R_x^3 + (\lambda + 1) R_x R_{x^2} - l R_{x^3} =$$

$$-\begin{pmatrix} \mu^3 & 0 \\ (\lambda^3+\lambda^2+\lambda)\mu^2\nu & \lambda^3\mu^3 \end{pmatrix} + (\lambda+1)\begin{pmatrix} \mu^3 & 0 \\ (2\lambda^3+\lambda)\mu^2\nu & \lambda^2\mu^3 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda\begin{pmatrix} \mu^3 & 0 \\ (2\lambda^3+\lambda^2)\mu^2\nu & \lambda\mu^3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\mu^3 & 0 \\ -(\lambda^3+\lambda^2+\lambda)\mu^2\nu & -\lambda^3\mu^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\lambda+1)\mu^3 & 0 \\ (\lambda+1)(2\lambda^3+\lambda)\mu^2\nu & (\lambda+1)\lambda^2\mu^3 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} -\lambda\mu^3 & 0 \\ -\lambda(2\lambda^3+\lambda^2)\mu^2\nu & -\lambda^2\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\mathcal{A}_\lambda$ satisface (2.1) con $\beta = \lambda+1$ y $\gamma = -\lambda$, es decir $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{G}_\lambda$. Este ejemplo nos permite encontrar un álgebra en cada variedad $\mathfrak{G}_\lambda$ salvo en la variedad $\mathfrak{G}_\infty$.

Es inmediato ver que en los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ el álgebra $\mathcal{A}_\lambda$ es asociativa. En este caso $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ veamos que estos son los únicos dos casos. En efecto si $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ en particular $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{G}_0$ por lo que satisface $x^2yx = xyxx$, de ello obtenemos $e^2te = etee$ lo que implica $\lambda^2 t = \lambda^3 t$ es decir $\lambda^2 = \lambda^3$, por lo que $\lambda \in \{0,1\}$. Por ello sólo $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ están en $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}$, y enconsecuencia sólo $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{A}_0$ o $\mathcal{A}_1$ pueden ser de Jordan. Sabemos que $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ lo son pues son asociativas. Fijando $x = (\mu,\nu)$ tenemos que

$$(\mu,\nu)^2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \nu/2 & \mu/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \mu x.$$

Por lo que $x^4 = \mu^3 x = (\mu x)(\mu x) = x^2x^2$. Esto implica que $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ es potencia asociativa y Casi-Jordan por lo que es efectivamente de Jordan.

Ejemplo 4. (Osborn) Sea $\mathbb{F}$ de característica distinta de dos y sea $\mathcal{A}$ generada por elementos s, t con la siguiente tabla de multiplicación:

	s	t
s	$s+t$	$\frac{1}{2}t$
t	$\frac{1}{2}t$	0

$\mathcal{A}$ está en $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}$, es decir es una álgebra Casi-Jordan. Calculando obtenemos que $s^4 = (s^2s)s = (s+t)s\cdot s = (s+\frac{3}{2}t)s = s+\frac{7}{4}t$ y $s^2s^2 = s^2+2st+t^2 = s+2t$. Por lo que $s^4 \neq s^2s^2$, es decir $\mathcal{A}$ no es potencia asociativa, luego no es un álgebra de Jordan.

Ejemplo 5. Tomemos el conjunto de los números complejos y definamos el producto $\bullet$ mediante la fórmula $x \bullet y = \overline{xy}$, donde $\overline{z}$ es el complejo conjugado de z. A esta álgebra la llamamos $\overline{\mathbb{C}}$. Podemos observar que:

$$\begin{aligned} ((x \bullet x) \bullet x) \bullet y &= \overline{\overline{\overline{xx}x}y} = \overline{x}^2\overline{y}x \\ &= \overline{\overline{\overline{xy}x}x} = ((x \bullet y) \bullet x) \bullet x \end{aligned}$$

por lo que $\overline{\mathbb{C}} \in \mathfrak{G}_{-1}$. Por otro lado $i^2 = i \bullet i = \overline{-1} = -1$ por lo que $(i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ sin embargo $i^4 = ((i^2) \bullet i) \bullet i = ((-1) \bullet i) \bullet i = \overline{-i} \bullet i = i \bullet i = -1$, por lo que $\mathcal{A}$ no es potencia asociativa, luego no es de Jordan.

2.3. Resultados

2.3.1. Algunas identidades

Procederemos a deducir algunas identidades que se satisfacen en toda álgebra conmutativa que satisface (2.4).

Si linealizamos una vez la ecuación (2.4), obtendremos:

$$\alpha(xaxb + xabx + abxx) + \beta(x^2ab + 2xbax) + \gamma(x^2ba + 2xbxa) = 0 \quad (2.5)$$

para todo $x, a, b \in \mathcal{A}$, en virtud del Teorema de la Observación 1.

Si linealizamos completamente (2.4) tenemos:

$$\begin{aligned} f_{(\beta,\gamma)}(a; x, y, z) &= \alpha(xayz + xazy + yaxz + yazx + zaxy + zayx) \quad (2.6) \\ &+2\beta(xyaz + xzay + yzax) + 2\gamma(xyza + xzya + yzxa) = 0 \end{aligned}$$

La función $f_{(\beta,\gamma)}$ es 4-lineal y simétrica en las variables x, y y z.

Otra identidad interesante se obtiene intercambiando a y b en (2.5) y restando la igualdad resultante de (2.5), con ello obtenemos:

$$\begin{aligned} &\alpha(xaxb - xbxa + xaxb - xbxa + baxx - abxx) \\ &\quad +\beta(x^2ab - x^2ba) + 2\beta(xbax - xabx) \\ &\quad +\gamma(x^2ba - x^2ab) + 2\gamma(xbxa - xbxa) = 0 \end{aligned}$$

Reduciendo términos y reemplazando $\alpha = -(\beta + \gamma)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} &\rho(x^2ab - x^2ba) + \eta(xbax - xabx) \quad (2.7) \\ &\quad +\theta(xbxa - xaxb) = 0 \end{aligned}$$

donde $\rho = (\beta - \gamma)$, $\eta = 3\beta + \gamma$ y $\theta = \beta + 3\gamma$. Ecuación que podemos escribir como:

$$\rho(a, x^2, b) + \eta(b, x, a)x + \theta(xbxa - xaxb) = 0 \tag{2.8}$$

Linealizando obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} &2\rho(a, xy, b) + \eta((b, x, a)y + (b, y, a)x) \\ &+\theta(xbya + ybxa - xayb - yaxb) = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

También son de suma utilidad las identidades que involucran operadores:

Por ejemplo la ecuación (2.4) en terminos de operadores evaluados en a queda:

$$\alpha R_x^3 + \beta R_{x^2} R_x + \gamma R_{x^3} = 0, \ \forall\, x \in \mathcal{A}. \tag{2.10}$$

Tomemos (2.9) y consideremos los operadores R_x, R_y y R_a actuando en b. Esto nos da la siguiente igualdad:

$$2\rho R_{xya}(b) - 2\rho R_a(R_{xy}(b)) + \eta R_y(R_a(R_x(b))) - \eta R_y(R_{xa}(b)) + \eta R_x(R_a(R_y(b)))$$

$$-\eta R_x(R_{ya}(b)) + \theta R_a(R_y(R_x(b))) + \theta R_a(R_x(R_y(b))) - \theta R_{xay}(b) - \theta R_{yax}(b) = 0.$$

Esto significa que dados $a, x, y \in \mathcal{A}$, los respectivos operadores multiplicación satisfacen:

$$\begin{aligned} \eta R_y R_a R_x + \eta R_x R_a R_y + \theta R_a R_x R_y + \theta R_a R_y R_x &= \\ \eta R_y R_{xa} + \eta R_x R_{ya} + 2\rho R_a R_{xy} - 2\rho R_{xya} + \theta R_{xay} + \theta R_{yax}& . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Otra identidad útil que satisfacen los operadores de multiplicación la podemos deducir escribiendo la ecuación (2.9) en términos de operadores evaluados en y:

$$\begin{aligned} 2\rho(R_b R_a R_x - R_a R_b R_x) + \eta(R_x R_a R_b - R_x R_b R_a + R_{(b,x,a)}) \\ +\theta(R_a R_{xb} + R_a R_x R_b - R_b R_{xa} - R_b R_x R_a) = 0. \end{aligned}$$

Haciendo $2\rho = 2(\beta - \gamma) = 3\beta + \gamma - (\beta + 3\gamma) = \eta - \theta$ tenemos

$$\begin{aligned} &\eta(R_bR_aR_x - R_aR_bR_x + R_xR_aR_b - R_xR_bR_a + R_{(b,x,a)}) \\ +&\theta(R_aR_bR_x - R_bR_aR_x + R_aR_{xb} + R_aR_xR_b - R_bR_{xa} - R_bR_xR_a) = 0 \end{aligned}$$

Lo que reagrupando términos nos da

$$\begin{aligned} &\eta([[R_b, R_a], R_x] + R_{(b,x,a)}) \\ +&\theta([R_a, R_bR_x] + [R_aR_x, R_b] + R_aR_{xb} - R_bR_{xa}) = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Otro resultado importante que tomaremos en consideración más adelante se relaciona con la existencia de una unidad en un álgebra Casi-Jordan generalizada.

Lema 3. *Sea $\mathbb{F}$ de característica distinta de 2 o 3 y sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{F}$-álgebra en $\mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \neq \frac{1}{2}$ tal que posee una unidad 1. Entonces $\mathcal{A}$ es asociativa.*

Demostración: Reemplazando $z = 1$ en (2.5) nos queda:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(x^2y1 + 2x1yx) + \gamma(x^21y + 2x1xy) + \alpha(xyx1 + xy1x + 1yxx) \\ &= \beta(x^2y + 2xyx) + \gamma(x^2y + xxy) + \alpha(xyx + xyx + yxx) \\ &= (\beta + 3\gamma)x^2y + (2\beta + 3\alpha)x(xy) = (\beta + 3\gamma)(x, x, y) = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \frac{1}{2}$, entonces $\beta + 3\gamma \neq 0$, esto implica que $(x, x, y) = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es conmutativa, es flexible, lo que implica que $(y, x, x) = -(x, x, y) = 0$. De allí que $\mathcal{A}$ es alternativa, pero toda álgebra alternativa y conmutativa es asociativa por Lema 1. $\square$

2.3.2. Existencia de formas trazas

Vamos a demostrar que nuestros cinco ejemplos de álgebras Casi-Jordan generalizadas pertenecen a la clase $\mathfrak{T}$. En los ejemplos 3, 4 y 5, al tener dimensión 2, toda subálgebra propia no trivial de cualquiera de ellas tiene dimensión 1, por lo que sólo falta comprobar que las tres posean una traza bilineal no nula. En el Ejemplo 3 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, pues $e^2 = e$ y $(\lambda^{-1}e)v = v$, además es fácil ver que $(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) \subseteq [v]$ por lo que existe una traza lineal que no se anula en $\mathcal{A}^2$. En el Ejemplo 4 se obtiene lo mismo, pues $(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) \subseteq [s]$ y además $s^2 - 2st = s + t - 2(1/2)t = s$ y $2st = t$, por lo que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. En el Ejemplo 5 hay mayor complicación, ya que $\overline{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}}^2 = (\overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}})$. Pero el producto punto usual $< a + bi, c + di >= ac + bd$ nos da una forma asociativa no nula, es más, la forma $<,>$ es no degenerada. Esto nos dice que en el Teorema 3 más adelante la hipótesis $\lambda \neq -1$ es necesaria, pues en este ejemplo tenemos un álgebra en $\mathfrak{G}_{-1}$ que posee una traza bilineal no degenerada y no es de Jordan.

En los Ejemplos 1 y 2 tenemos que al satisfacer $\mathcal{A}^{<4>} = 0$ son nilpotentes a la derecha, luego debido al Teorema B de la Observación 2 son nilpotentes, por lo tanto solubles y gracias al corolario 1 en ambos ejemplos $\mathcal{A}$ es trácica.

Por lo tanto nuestros cuatro ejemplos están en la clase $\mathfrak{T}$.

Es posible definir una traza bilineal particular para álgebras de dimensión finita en $\mathfrak{G}$. Para ello definimos $M(x, y) = \eta R_{xy} + \theta R_x R_y$.

Teorema 1. *Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}$ de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Sea T una forma definida por $T(x, y) = tr(M(x, y))$, donde $tr(E)$ es la traza de la matriz E. Entonces T es una traza en $\mathcal{A}$.*

Demostración La función M es claramente bilineal y como tr es una forma lineal, T es una forma bilineal. Es simétrica pues $xy = yx$ y $tr(R_x R_y) = tr(R_y R_x)$. Falta demostrar que es asociativa.

Aplicando la función traza a la ecuación (2.12) obtenemos:

$$\begin{aligned} &\eta([[R_b, R_a], R_x] + R_{(b,x,a)}) \\ &+\theta([R_a, R_b R_x] + [R_a R_x, R_b] + R_a R_{xb} - R_b R_{xa}) = 0 \end{aligned}$$

Usando la linealidad de la traza y el hecho que $tr([A, B]) = 0$, se obtiene:

$$\eta tr R_{(b,x,a)} + \theta tr(R_a R_{xb} - R_b R_{xa}) = 0 \tag{2.13}$$

Volviendo a la definición de T tenemos:

$$\begin{aligned} T(bx, a) - T(b, xa) &= \eta tr(R_{(bx)a}) + \theta tr(R_{bx} R_a) - \eta tr(R_{b(xa)}) - \theta tr(R_b R_{xa}) \\ &= \eta tr(R_{(b,x,a)}) + \theta tr((R_a R_{bx}) - (R_b R_{xa})) = 0 \end{aligned}$$

Por lo que T es asociativa.

$\square$

Observación 3. Un hecho relevante con respecto de esta traza T es que como toda álgebra de Jordan pertenece a $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}$ entonces se tiene que $\eta = \frac{8}{3}$ y $\theta = 0$, por lo que $T(x, y) = \frac{8}{3}tr(R_{xy})$. La función $tr(R_{xy})$ es una traza para álgebras de Jordan y se ha utilizado para estudiar la estructura de dichas álgebras (ver Schafer [20], Cap. 1 §5). Por ejemplo podemos deducir de lo expresado en esa sección de este libro que para toda álgebra de Jordan $\mathcal{A}$ sobre un cuerpo de característica 0, $tr(R_{xy}) = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es nilpotente.

La existencia de esta forma traza en esta clase de álgebras no implica que estas sean trácicas pues dada un álgebra Casi-Jordan generalizada $\mathcal{A}$, $tr(\eta R_{xy} + \theta R_x R_y)$ puede ser igual a cero para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Capítulo 3

Nilpotencia

Como las álgebras Casi-Jordan generalizadas son conmutativas, usando el Teorema B de la Observación 2, asumiremos que los conceptos de álgebra nilpotente y álgebra nilpotente a la derecha son equivalentes. Veremos como se relacionan los conceptos de nilálgebra, álgebra nilpotente y álgebra soluble en álgebras en $\mathfrak{G}$.

Nuestro objetivo es dar una generalización del Teorema de Albert (Teorema C de la Observación 2), es decir, demostrar que toda nilálgebra en $\mathfrak{G}$ es nilpotente, sin embargo sólo podremos demostrarlo para ciertas subclases de $\mathfrak{G}$.

Antes de ver cada uno de estos casos demostraremos un lema previo, el cual nos permitirá relacionar solubilidad y nilpotencia.

Lema 4. *Sea $\mathcal{S}$ una subálgebra soluble y de dimensión finita de un álgebra $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$, sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica $\neq 2$, con $\lambda \notin \{\infty, -\frac{1}{2}\}$. Entonces $\mathcal{S}^*$ es nilpotente.*

Demostración: Procederemos por inducción sobre la dimensión de $\mathcal{S}$. Si $\dim(\mathcal{S}) = 1$ tenemos que, como $\mathcal{S}$ es soluble, $\mathcal{S}^2 \neq \mathcal{S}$ por lo que $\mathcal{S}^2 = 0$. Por ser unidimensional $\mathcal{S} = \mathbb{F}s$ con $s \in \mathcal{A}$ no nulo. Como $\mathcal{S}^2 = 0$ en particular $s^2 = 0$. Si tal es la situación entonces $\mathcal{S}^* =< R_s >$. Reemplazando x por s en la ecuación (2.10), se tiene

$$(\alpha R_s^3 + \beta R_{s^2} R_s + \gamma R_{s^3}) = 0 \tag{3.1}$$

Usando en (3.1) que $s^2 = 0$ y $\alpha = -(\beta + \gamma) \neq 0$ obtenemos $R_s^3 = 0$, por lo que $\mathcal{S}^*$ es nilpotente.

Supongamos que el lema se cumple para toda subálgebra $\mathcal{T}$ de dimensión menor o igual a n. Sea $\mathcal{S}$ de dimensión $n+1$. Como es soluble, existe un $v \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^2$. Tomemos una base $\mathbf{B}_2$ de $\mathcal{S}^2$. El conjunto $\mathbf{B}_2 \cup \{v\}$ es linealmente independiente por lo que se puede completar a una base $\mathbf{B}$ de $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{T}$ el espacio generado por $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} \setminus \{v\}$. Como $\mathcal{S}^2 \subseteq \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T}^2 \subseteq \mathcal{T}$ por lo que $\mathcal{T}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S} = \mathcal{T} + \mathbb{F}v$. Por hipótesis inductiva $\mathcal{T}^*$ es nilpotente. Vamos a demostrar que para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$(\mathcal{S}^*)^{3i+1} \subseteq \mathcal{S}^*(\mathcal{T}^*)^i \tag{3.2}$$

Para demostrarlo procedamos nuevamente por inducción.

Definamos $\mathcal{U} = \mathcal{S}^*\mathcal{T}^* + \mathcal{T}^*$ y la función H de $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ en $\mathcal{S}^*$ dada por: $H(x,y,a) = \eta R_y R_{xa} + \eta R_x R_{ya} + 2\rho R_a R_{xy} - 2\rho R_{xya} + \theta R_{xay} + \theta R_{yax}$. Es claro que cada sumando del lado derecho de esta igualdad (que es igual al lado derecho de la igualdad (2.11)) está en $\mathcal{T}^*$ o en $\mathcal{S}^*\mathcal{T}^*$ lo que significa que para todo $x, y, a \in \mathcal{S}$, $H(x,y,a) \in \mathcal{U}$. Notemos también que (2.11) implica:

$$H(x,y,a) = \eta R_y R_a R_x + \eta R_x R_a R_y + \theta R_a R_x R_y + \theta R_a R_y R_x. \tag{3.3}$$

Observamos que $\lambda \neq \infty$ y $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ implica que $\mathcal{A}$ satisface (2.4) donde $\beta \neq \pm\gamma$. Notar además que $\eta - \theta = (3\beta + \gamma) - (\beta + 3\gamma) = 2(\beta - \gamma) \neq 0$ y $\eta + \theta = (3\beta + \gamma) + (\beta + 3\gamma) = 4(\beta + \gamma) \neq 0$, por lo que $\eta^2 - \theta^2 \neq 0$.

La función $F : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^*$ tal que $F(x,y,z) = R_x R_y R_z$ es multilineal. Por ello para probar que $R_x R_y R_z \in \mathcal{U}$ para todo $x, y, z \in \mathcal{S}$, basta con escoger una base de $\mathcal{S}$ y demostrar que $F(x,y,z) \in \mathcal{U}$ para todo trío de elementos de la base.

Tomando la base $\mathbf{B}$ de $\mathcal{S}$ tenemos que $\mathbf{B}_1$ es base de $\mathcal{T}$. El hecho de que $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{S}^*$ nos deja concluír que $x, y, z \in \mathbf{B}_1$ implica que $F(x,y,z) \in \mathcal{U}$. Además como $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \{v\}$ sólo falta comprobar que $F(x,y,z) \in \mathcal{U}$ si al menos uno de ellos es v. Es claro que si $z \neq v$ entonces $R_z \in \mathcal{T}^*$, pues $z \in \mathcal{T}$, por lo que $F(x,y,z) \in \mathcal{U}$. Haciendo $x = v$, $y = d_1 \in \mathbf{B}_1$, $a = d_2 \in \mathbf{B}_1$ en (3.3). Obenemos:

$$\eta R_{d_1} R_{d_2} R_v + \eta R_v R_{d_2} R_{d_1} + \theta R_{d_2} R_v R_{d_1} + \theta R_{d_2} R_{d_1} R_v = H(v, d_1, d_2)$$

Como $d_1, d_2 \in \mathcal{T}$ entonces $H(v, d_1, d_2) - \eta R_v R_{d_1} R_{d_2} - \theta R_{d_2} R_v R_{d_1}$ está en $\mathcal{U}$. Por lo que

$$\eta R_{d_1} R_{d_2} R_v + \theta R_{d_2} R_{d_1} R_v \in \mathcal{U}. \tag{3.4}$$

Intercambiando d_1 y d_2 en (3.4) tenemos:

$$\eta R_{d_2}R_{d_1}R_v + \theta R_{d_1}R_{d_2}R_v \in \mathcal{U}. \tag{3.5}$$

Como tenemos que:

$$\begin{vmatrix} \eta & \theta \\ \theta & \eta \end{vmatrix} = \eta^2 - \theta^2 \neq 0 \tag{3.6}$$

tenemos que $F(v, d_1, d_2) \in \mathcal{U}$.

Haciendo $x = y = v$ y $a = d \in \mathbf{B}_1$ en (3.3). Tenemos:

$$H(x, y, z) = 2(\eta R_v R_d R_v + \theta R_d R_v R_v)$$

Por lo que al ser la característica distinta de 2, tenemos:

$$\eta R_v R_d R_v + \theta R_d R_v R_v \in \mathcal{U} \tag{3.7}$$

Luego haciendo $x = y = v$ y $a = d \in \mathbf{B}_1$ en (3.3) se tiene:

$$\eta R_d R_v R_v + \theta R_v R_d R_v = H(x, y, z) - \theta R_v R_v R_d - \eta R_v R_v R_d$$

Por lo que:

$$\eta R_d R_v R_v + \theta R_v R_d R_v \in \mathcal{U} \tag{3.8}$$

En virtud de (3.7), (3.8) y (3.6) se tiene:

$$R_d R_v R_v \in \mathcal{U}, \quad \text{y} \quad R_v R_d R_v \in \mathcal{U}. \tag{3.9}$$

Finalmente haciendo $x = y = a = v$ en (3.3) se tiene $2(\eta + \theta)R_v^3 \in \mathcal{U}$, con $2(\eta + \theta) \neq 0$. Demostramos que $F(x, y, z) \in \mathcal{U}$ para cualquier x, y, z en $\mathcal{S}$ por lo que $(\mathcal{S}^*)^3 \subseteq \mathcal{U} = \mathcal{S}^*\mathcal{T}^* + \mathcal{T}^*$ lo que implica que $(\mathcal{S}^*)^4 \subseteq \mathcal{S}^*(\mathcal{S}^*\mathcal{T}^* + \mathcal{T}^*) = (\mathcal{S}^*)^2\mathcal{T}^* + \mathcal{S}^*\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{S}^*\mathcal{T}^*$ lo cual prueba la afirmación para $i = 1$.

Para terminar supongamos que se cumple para i, es decir, $(\mathcal{S}^*)^{3i+1} \subseteq \mathcal{S}^*(\mathcal{T}^*)^i$. Multiplicando por $(\mathcal{S}^*)^3$ por la izquierda nos da $(\mathcal{S}^*)^{3(i+1)+1} = (\mathcal{S}^*)^{3i+4} \subseteq (\mathcal{S}^*)^4(\mathcal{T}^*)^i \subseteq \mathcal{S}^*(\mathcal{T}^*)^{i+1}$.

Demostrada la afirmación tenemos que como por hipótesis $(\mathcal{T}^*)^k = 0$ para algún k, entonces $(\mathcal{S}^*)^{3k+1} \subseteq \mathcal{S}^*(\mathcal{T}^*)^k = 0$. Por lo que $\mathcal{S}^*$ es nilpotente. $\square$

Ahora veremos en cuales casos es efectivo que si $\mathcal{A}$ es nilálgebra en $\mathfrak{G}$ de dimensión finita, entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente.

3.1. Dimensiones bajas

El primero de los casos que analizaremos es aquel en que el nilíndice y la dimensión son pequeñas.

Observación 4. En la demostración del resultado principal de esta subsección usaremos los siguientes teoremas que aparecen en Correa, Hentzel y Labra [5, 6]:

Teorema A: *Sea $\mathcal{A}$ una nilálgebra derecha conmutativa sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica distinta de 2 o 3 que satisface las identidades $x^4 = 0$ y $x^3x^2 = 0$. Entonces para todo $a \in \mathcal{A}$ el operador lineal R_a es nilpotente y $R_a^7 = 0$.*

Teorema B: *Sea $\mathcal{A}$ una nilálgebra derecha sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica distinta de 2 o 3 que satisface la identidad $x^4 = 0$. Entonces para todo $a \in \mathcal{A}$ la subálgebra generada por a es nilpotente de índice a lo más 7. Además los términos no necesariamente cero son a, a^2, a^3, $(a^2)^2$, a^3a^2, a^3a^3 y se cumplen las siguientes identidades:*

	grado	*elementos no cero*
a)	5	$a^3a^2 = -((a^2)^2)a$
b)	6	$a^3a^3 = -(a^3a^2)a = -((a^2)^2)a^2 = (a^2a^2)a \cdot a$

Teorema C: *Sea $\mathcal{A}$ una nilálgebra derecha conmutativa de dimensión 4 sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica distinta de 2 o 3 que satisface la identidad $x^4 = 0$. Entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente.*

El siguiente lema será de utilidad para nuestro resultado principal.

Lema 5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica distinta de 2 o 3, tal que $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ y satisface la identidad $x^4 = 0$. Entonces para todo $a \in \mathcal{A}$, R_a es nilpotente.*

Demostración: Gracias a la igualdad *a)* del Teorema B de la Observación 4, como $\mathcal{A}$ es conmutativa y cumple $x^4 = 0$ tenemos:

$$(x^2x^2)x = -x^3x^2, \quad \forall \quad x \in \mathcal{A} \tag{3.10}$$

Reemplazando a por x^2 en (2.4) obtenemos que $\beta((x^2x^2)x - (xx^2)x \cdot x) + \gamma(x^3x^2 - (xx^2)x \cdot x) = 0$ es decir $\beta((x^2x^2)x - x^5) + \gamma(x^3x^2 - x^5) = 0$ Pero $x^5 = 0$ por lo que:

$$\beta(x^2x^2)x = -\gamma x^3x^2, \quad \forall \quad x \in \mathcal{A} \tag{3.11}$$

pero

$$\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta - \gamma \neq 0$$

pues $\beta = \gamma$ implica $\lambda = -\frac{1}{2}$. Entonces las ecuaciones (3.10) y (3.11) implican que $x^3x^2 = 0$ y por el Teorema A de la Observación 4 todo operador R_a es nilpotente, es más $R_a^7 = 0$. □

Observación 5. Como demostramos que para álgebras que satisfacen (2.4) con $\beta \neq \gamma$, $x^4 = 0$ implica que $x^3x^2 = 0$, entonces debido a las igualdades del Teorema B todos los términos de grado 5 y 6 son cero.

Teorema 2. *Sea $\mathcal{A}$ una nilálgebra de dimensión $n \leq 5$ y nilíndice $k \leq 4$, sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica distinta de 2 o 3. Supongamos que $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \notin \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente.*

Demostración: Supongamos $k = 2$ y n arbitrario, entonces se cumple $x^2 = 0$ en $\mathcal{A}$. Se cumple entonces su linealización $xy + yx = 0$, como la caracteristica no es 2 y $\mathcal{A}$ es conmutativa esto implica que $xy = 0$ es decir $\mathcal{A}^2 = 0$. Luego $\mathcal{A}$ es nilpotente.

Sea $k = 3$ y n arbitrario. Tenemos $x^3 = 0$, luego linealizando $x^2y + 2(xy)x = 0$. Si por un lado multiplicamos la ecuación por x y por otro reemplazamos y por xy obtenemos: $(x^2y)x + 2(xy)x \cdot x = 0$ y $x^2(yx) + 2(xy)x \cdot x = 0$ por lo que $(x^2y)x = x^2(yx)$. Entonces $\mathcal{A}$ es de Jordan y por el Teorema C de la Observación 4 toda nilálgebra de Jordan es nilpotente. Falta el caso $k = 4$.

Sea $n = 1$. En este caso $\mathcal{A} = \mathbb{F}b$ con $b^2 = 0$ pues es nilálgebra, luego $\mathcal{A}$ nilpotente. Sea n=2. Sea b tal que $b^2 \neq 0$. Si $b^2 \in \mathbb{F}b$ entonces hay un idempotente en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ no es nilálgebra. Por ello $\{b, b^2\}$ es una base de $\mathcal{A}$. Además $b^3 = \mu b + \nu b^2$ implica $0 = b^5 = \mu b^3 + \nu b^4 = \mu b^3$, por lo que $b^3 = 0$ o bien $\mu = 0$ pero entonces $b^3 = \nu b^2$ y en este caso $0 = b^4 = \nu b^3$ por lo que $b^3 = 0$ o bien $\nu = 0$ pero esto último implica $b^3 = 0b + 0b^2 = 0$. En cualquier caso $b^3 = 0$ entonces $\mathcal{A}$ es de Jordan, por lo que es nilpotente.

Si $n = 3$ y $b \in \mathcal{A}$ tal que $b^3 \neq 0$ por lo hecho en el párrafo anterior $\{b, b^2, b^3\}$ es una base de $\mathcal{A}$, es decir $\mathcal{A} =< b >$. Por el Teorema B, $\mathcal{A}$ es nilpotente. El caso n=4 es consecuencia del Teorema C.

Sólo falta el caso n=5.

Sea $b \in \mathcal{A}$ tal que $b^3 \neq 0$, por lo hecho en los caso n=2 y n=3 b, b^2, b^3 es un conjunto linealmente independiente. Sea $\mathcal{B} =< b >$. Sea $m = \dim(\mathcal{B})$. Si

$m = 3$ entonces $(b^2)^2$ es combinación lineal de b,b^2 y b^3. Usando la Observación 5 tenemos $(b^2)^2 = \mu b + \nu b^2 + \xi b^3$. Luego $0 = \mu b^2 + \nu b^3$ y $0 = \mu b^3$ por lo que $(b^2)^2 = \xi b^3$. La conclusión es que $\mathcal{B}^2 =< b^2, b^3 >$. Como $R_b(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ obtenemos R_b induce una función lineal del espacio vectorial $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ en sí mismo. Llamaremos $\overline{R}_b$ a dicho operador. Por el Lema 5, R_b es nilpotente por lo que lo es $\overline{R}_b$. Como $\dim(\mathcal{A}/\mathcal{B}) = 2$, se deduce que $(\overline{R}_b)^2 = 0$ por lo que si $c \in \mathcal{A}$, $R_b^2(c) \in \mathcal{B}$, es decir $(cb)b = \mu b + \nu b^2 + \xi b^3$. Sea $d = cb - \nu b^2 - \xi b^2$, nos da que $R_d(b) = \mu b$ entonces μ es un valor propio del operador nilpotente R_d. Luego $\mu = 0$, es decir $(cb)b \in \mathcal{B}^2$, de donde $(cb)b \cdot b \in \mathcal{B}^3 =< b^3 >$. Por otro lado linealizando $x^4 = 0$ y tomando la ecuación (2.4) obtenemos:

$$\rho(x^3y) + \eta(xy)x \cdot x = 0 \tag{3.12}$$

$$\rho(x^2y)x - \theta(xy)x \cdot x = 0 \tag{3.13}$$

donde $\rho = \beta - \gamma$, $\eta = 3\beta + \gamma$ y $\theta = \beta + 3\gamma$. Además tenemos que $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ implica $\beta \neq \gamma$ por lo que $\rho \neq 0$ y $\lambda \neq \frac{3}{2}$ implica $3\beta + \gamma \neq 0$ por lo que $\eta \neq 0$.

La ecuación (3.12) implica que si $\rho \neq 0$ entonces $R_{b^3}(y) \in< b^3 >$, es decir $b^3y = R_y(b^3) = \varsigma b^3$ para cierto $\varsigma \in \mathbb{F}$, pero como R_y es nilpotente, tendremos $R_{b^3}(y) = 0$. Si $\mathcal{I} =< b^3 >$ tenemos que $\mathcal{I}$ es un ideal y $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es nilpotente por Teorema C (pues $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ tiene dimensión 4). Esto implica que existe un natural l tal que $\mathcal{A}^{<l>} \subseteq \mathcal{A}^l \subseteq \mathcal{I}$, por lo que $\mathcal{A}^{<l+1>} \subseteq \mathcal{I}\mathcal{A} = 0$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es nilpotente.

En el caso $\dim(\mathcal{B}) = 4$ tenemos que dada la Observación 5 entonces $\mathcal{B} = [b, b^2, b^3, (b^2)^2]$ y $\dim(\mathcal{A}/\mathcal{B}) = 1$. Usando los mismos argumentos que antes, para todo $z \in \mathcal{A}$, $R_z(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B}$ es un ideal y $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ es un álgebra. Como $\dim(\mathcal{A}/\mathcal{B}) = 1$ entonces $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ es una nilálgebra de nilíndice 1 o 2 pero nilíndice 1 lleva a contradicción pues esto implica $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{B}$ y tenemos $\mathcal{B}^2 = [b^2, b^3, (b^2)^2]$ y $\mathcal{B}^3 = [b^3, (b^2)^2]$. Vamos a demostrar:

1. $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^2$

2. $\mathcal{A}\mathcal{B}^2 \subseteq \mathcal{B}^3$

3. $\mathcal{A}\mathcal{B}^3 = 0$.

Demostración de 1: Tomemos un elemento ab con $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. $ab \in \mathcal{B}$ por lo que $ab = \mu b + \nu b^2 + \xi b^3 + \zeta(b^2)^2$. Aplicando R_b^2 a esta igualdad se obtiene: $(ab)b \cdot b = \mu b^3$. La ecuación (3.12) implica que si $\eta \neq 0$ entonces

$(ab)b \cdot b = (-\rho/\eta)ab^3$ por lo que $\mu b^3 = (-\rho/\eta)ab^3$. Luego μ es valor propio del operador $R_{(-\rho/\eta)a}$ el cual es nilpotente, debido a lo cual $\mu = 0$. Tenemos que $ab \in \mathcal{B}^2$.

Demostración de 2: Notemos que como demostramos que $\mu = 0$ y $(ab)b \cdot b = \mu b^3$ entonces tenemos que $(ab)b \cdot b = 0$. Esto implica, en virtud de las ecuaciones (3.12) y (3.13), que $ab^3 = 0$ y $(ab^2)b = 0$. Supongamos ahora $ab^2 = \mu b + \nu b^2 + \xi b^3 + \zeta(b^2)^2$ entonces multiplicando por b obtenemos $0 = (ab^2)b = \mu b^2 + \nu b^3$ por lo que μ, ν son cero, y $ab^2 \in \mathcal{B}^3 \subseteq \mathcal{B}^2$. Linealizando (3.13) tenemos: $\rho(x^2yz + 2rxzyx) - \theta(xyxz + xyzx + zyxx) = 0$. Reemplazando x por b, y por b^2 y z por a obtenemos:

$$\rho(b^2b^2a + 2(ba)b^2 \cdot b) - \theta(bb^2ba + (bb^2)a \cdot b + (ab^2)b \cdot b) = 0$$

es decir

$$\rho(a(b^2)^2 + 2(ab)b^2 \cdot b) - \theta(b^4a + (b^3a)b + (ab^2)b \cdot b) = 0.$$

Reduciendo los términos que son cero tenemos

$$\rho a(b^2)^2 + 2\rho(ab)b^2 \cdot b = 0.$$

Pero sabemos que $ab = \nu b^2 + \xi b^3 + \zeta(b^2)^2$, luego $(ab)b^2 = \nu(b^2)^2$ por lo que tenemos $(ab)b^2 \cdot b = \nu(b^2)^2 \cdot b = 0$ de donde $\rho a(b^2)^2 = 0$.

Si $a \in \mathcal{A}$ hemos probado que $ab^2 \in \mathcal{B}^3$ y $ab^3 = a((b^2)^2) = 0$. Luego $\mathcal{AB}^2 \subseteq \mathcal{BB}^2 = \mathcal{B}^3$.

Demostración de 3: Como $\mathcal{B}v^3 = [b^3, (b^2)^2]$ y hemos probado que $ab^3 = a((b^2)^2) = 0$ tenemos que $\mathcal{AB}^3 = 0$.

Por último tenemos que $\mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A}^3 \subseteq \mathcal{AB} \subseteq \mathcal{B}^2$ y $\mathcal{A}^{<4>} = \mathcal{A}^{<3>}\mathcal{A} = \mathcal{A}^3\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^3$ por lo que $\mathcal{A}^{<5>} = \mathcal{A}^{<4>}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{AB}^3 = 0$. Por lo que $\mathcal{A}$ es nilpotente.

Finalmente si $\dim(\mathcal{B}) = 5$ entonces $\mathcal{A}$ está generada por b por lo que es nilpotente por Teorema B. $\square$

3.2. Álgebras trácicas

El siguiente caso es para nilálgebras en la clase $\mathfrak{T}$.

El siguiente resultado relaciona álgebras Casi-Jordan generalizadas trácicas con álgebras de Jordan.

Teorema 3. *Sea $\mathcal{A}$ álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tal que $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \neq -1$, tal que $\mathcal{A}$ posee una traza bilineal T. Entonces para todo $x, y \in \mathcal{A}$ se cumple que $(x^2, y, x) \in \mathcal{A}^\perp$.*

Demostración La ecuación (2.4) implica que para todo x, y, z en $\mathcal{A}$ tenemos:

$$T(\alpha xyxx + \beta x^2yx + \gamma x^3y, z) = 0$$

luego

$$\alpha T(xyxx, z) + \beta T(x^2yx, z) + \gamma T(x^3y, z) = 0 \tag{3.14}$$

Intercambiando z e y en (3.14) y restando esta igualdad de (3.14) obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha(T(xyxx, z) - T(xzxx, y)) + \beta(T(x^2yx, z) - T(x^2zx, y))\\ +\gamma(T(x^3y, z) - T(x^3z, y)) = 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por otro lado tenemos que

$$T(xyxx, z) = T(xyx, xz) = T(xy, xzx) = T(y, xzxx) = T(xzxx, y)$$

usando que la forma bilineal es simétrica y asociativa. Tenemos además que

$$T(x^3y, z) = T(x^3, yz) = T(x^3z, y).$$

Utilizando estos resultados en (3.15) concluimos que $\beta(T(x^2yx, z) - T(x^2zx, y)) = 0$ y como $\lambda \neq -1$ implica $\beta \neq 0$, entonces

$$T(x^2yx, z) - T(x^2zx, y) = 0 \tag{3.16}$$

para todo x, y, z en $\mathcal{A}$.

Podemos ver que $T(x^2zx, y) = T(x^2z, xy) = T(x^2, (xy)z) = T(x^2(xy), z)$.

Reemplazando esto en (3.16) se concluye que:

$$0 = T(x^2yx, z) - T(x^2(yx), z) = T(x^2yx - x^2(yx), z) = T((x^2, y, x), z)$$

para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$, por lo que $(x^2, y, x) \in \mathcal{A}^\perp$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. $\square$

Corolario 3. Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \neq -1$ y sea T un traza bilineal en $\mathcal{A}$. Se tiene que $\mathcal{A}/\mathcal{A}^\perp$ es un álgebra de Jordan. En particular si T es no degenerada, entonces $\mathcal{A}$ es de Jordan.

Teorema 4. *Sea $\mathcal{A}$ una nilálgebra de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, de característica $\neq 2$. Supongamos que $A \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \notin \{\infty, -\frac{1}{2}, -1\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente.*

Demostración: Vamos a proceder por inducción sobre la dimensión de $\mathcal{A}$. Supongamos $\dim_{\mathbb{F}}(A) = 1$. Entonces $A = \mathbb{F}b$ algún $b \neq 0$ en $\mathcal{A}$, donde $b^2 = b$ o bien $b^2 = 0$. Como $\mathcal{A}$ es nilálgebra entonces $b^2 = 0$. Si $\{x_1, x_2\}$ son elementos de $\mathcal{A}$ existen elementos μ_1, μ_2 en $\mathbb{F}$ tales que $x_i = \mu_i b, i = 1, 2$. Entonces $x_1 x_2 = \mu_1\mu_2 b^2 = 0$, luego $\mathcal{A}$ es nilpotente. Supongamos que el resultado es cierto para toda álgebra de dimensión menor que $\dim_{\mathbb{F}}(A) = n$. Como $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}$, existe una traza bilineal no nula T. $\mathcal{A}^\perp$ es un ideal de $\mathcal{A}$, y como T es no trivial $\mathcal{A}^\perp \neq \mathcal{A}$. Por hipótesis inductiva $\mathcal{A}^\perp$ es soluble y en virtud del Teorema 3, $\mathcal{A}/\mathcal{A}^\perp$ es de Jordan. Por esa razón el Teorema C de la Observación 4 implica que $\mathcal{A}/\mathcal{A}^\perp$ es nilpotente, luego es soluble. Finalmente usando el Teorema A de la Observación 4, $\mathcal{A}$ es soluble. Por último el Lema 4 implica que $\mathcal{A}^*$ es nilpotente lo que, gracias al Teorema D de la Observación 4, implica que $\mathcal{A}$ es nilpotente.

□

Es posible formular el resultado que nos interesa para una tercera subclase de $\mathfrak{G}$.

3.3. Álgebras Jordan-reducibles

Definición 6. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra en $\mathfrak{G}$ tal que para todo $x, y, a, b \in \mathcal{A}$ se satisface

$$(x^2, y, x)(a^2, b, a) = 0.$$

Entonces $\mathcal{A}$ se llama un álgebra *Jordan-reducible.*

Observación 6. Para la siguiente proposición usaremos el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en Hentzel y Peresi [8].

Lema: *Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto aditivamente cerrado de un anillo $\mathcal{R}$ y sea G una función n-lineal en $\mathcal{R}$. Supongamos que $G(x, x, \ldots, x) \in \mathcal{S}$ para todo $x \in \mathfrak{R}$. Si G es linealizada, y sus partes homogéneas son $K_0, K_1 \ldots K_n$, entonces $tK_i \in \mathcal{S}$ para todo $0 \leq i \leq n$ y $t = \prod_{i=1}^{n} i!$.*

Los componentes homogéneos K_i se obtienen al expandir $G(a+b, a+b, \ldots, a+b)$ por multilinealidad y recolectar los términos con i veces a y $n-i$ veces b. Por ejemplo $K_1 = G(a, a, \ldots, a, b) + G(a, a, \ldots, b, a) + \ldots + G(b, a, a, \ldots, a)$.

Lema 6. *Sea $\mathcal{V}$ un subespacio de un álgebra $\mathcal{A}$ tal que para una identidad homogénea f se tiene $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}$ para $x_i \in \mathcal{A}$ cualesquiera. Supongamos que $\mathrm{Car}(\mathbb{F}) > \partial(f)$. Sea g una linealización de f. Entonces $g(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}$ para toda k-tupla de elementos $x_i \in \mathcal{A}$.*

Demostración: Es evidente que es suficiente con demostrar el lema para el caso en el que g es la linealización simple de f respecto a x_1. Sea r el grado de x_1 en f. Sean $a_2, \ldots, a_n$ elementos fijos pero arbitrarios de $\mathcal{A}$. Consideremos la función F de $\mathcal{A}$ en si mismo definida por $F(a) = f(a, a_2, \ldots, a_n)$. Puesto que F es una función polinomial homogénea en un argumento de grado r existe una función G r-lineal de $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$ (r veces) en $\mathcal{A}$ tal que $G(a, a, \ldots, a) = F(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Más aun se tiene $G(a, a, \ldots, a) = F(a) = f(a, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}$ por lo que podemos aplicar el Lema de la Observación 6 a G, de donde obtenemos $t(G(a, \ldots, a, b) + G(a, \ldots, b, a) + \ldots + G(b, a, \ldots, a)) \in \mathcal{V}$. En este caso $t = \prod_{i=1}^{r} i!$, por lo que si $\mathrm{Car}(\mathbb{F}) > \partial(f)$, entonces $t \neq 0$. Tenemos por lo tanto que $\forall\ a, b \in \mathcal{A}$, $G(a, \ldots, a, b) + G(a, \ldots, b, a) + \ldots + G(b, \ldots, a, a) = g(a, b, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}$. $\square$

Teorema 5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica $\neq 2$, 3 ó 5, tal que $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \notin \{-1/2, -1\}$. Definimos $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ el espacio vectorial generado por todos los elementos de la forma (x^2, y, x) para ciertos $x, y \in \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ es un ideal de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Si tenemos tres elementos x, a, b de un álgebra conmutativa $\mathcal{C}$ tenemos que existen a lo más 25 elementos distintos de $\mathcal{C}$ que son producto de 3 veces x una vez a y una vez b, a saber: $w_1 = abxxx$, $w_2 = axbxx$, $w_3 = axxbx$, $w_4 = axxxb$, $w_5 = bxaxx$, $w_6 = bxxax$, $w_7 = bxxxa$, $w_8 = xxabx$, $w_9 = xxaxb$, $w_{10} = xxbax$, $w_{11} = xxbxa$, $w_{12} = xxxba$, $w_{13} = xxxab$, $w_{14} = (ab)(xx)x$, $w_{15} = (ax)(bx)x$, $w_{16} = (ax)(xx)b$, $w_{17} = (bx)(xx)a$, $w_{18} = (ab)(xxx)$, $w_{19} = (ax)(xxb)$, $w_{20} = (ax)(bxx)$, $w_{21} = (bx)(xxa)$, $w_{22} = (bx)(axx)$, $w_{23} = (xx)(abx)$, $w_{24} = (xx)(bxa)$, $w_{25} = (xx)(axb)$.

Definamos las siguientes funciones

$$g(b; a, c, d) = 2((ac, b, d) + (ad, b, c) + (cd, b, a))$$

que es la linealización completa de (x^2, y, x) y

$$f(p;q,r,s) = f_{1,\gamma}(p;q,r,s) = (-\gamma-1)(qprs+qpsr+rpqs+rpsq+spqr+sprq)$$
$$+2(qrps+qspr+rspq)+2\gamma(qrsp+qsrp+rsqp)$$

para cierto $\gamma \in \mathbb{F}, \gamma \neq 1$, pues esta es la linealización completa de la ecuación (2.4) con $\beta = 1$. Podemos asumir que $\beta = 1$ pues $\lambda \neq -1$ implica que $\beta \neq 0$.

Dados entonces x, a, b en $\mathcal{C}$ definamos los siguientes veintidos elementos de $\mathcal{C}$:

- $v_1 = g(ab; x, x, x) = 6(xx, ab, x) = 6(ab)(xx)x - 6(xx)(abx)$.
- $v_2 = g(ax; x, x, b) = 2((xx, ax, b)+(xb, ax, x)+(xb, ax, x)) = 2(ax)(xx)b - 2(xx)(axb) + 4(ax)(bx)x - 4(bx)(axx)$.
- $v_3 = g(b; x, x, ax) = 2((xx, b, ax)+(axx, b, x)+(axx, b, x)) = 2(ax)(xxb) - 2(xx)(axb) + 4axxbx - 4(bx)(axx)$.
- $v_4 = g(x; x, ax, b) = 2((axx, x, b) + (xb, x, ax) + (axb, x, x)) = 2axxxb + 2axbxx + 2(ax)(bxx) - 4(bx)(axx) - 2(xx)(axb)$.
- $v_5 = g(bx; x, x, a) = 2((xx, bx, a)+(xa, bx, x)+(xa, bx, x)) = 2(bx)(xx)a - 2(xx)(bxa) + 4(ax)(bx)x - 4(ax)(bxx)$.
- $v_6 = g(a; x, x, bx) = 2((xx, a, bx)+(bxx, a, x)+(bxx, a, x)) = 2(bx)(xxa) - 2(xx)(bxa) + 4bxxax - 4(ax)(bxx)$.
- $v_7 = g(x; x, a, bx) = 2((xa, x, bx)+(bxx, x, a)+(bxa, x, x)) = 2(xax(bx) - xa(x(bx)) + bxxxa - bxx(xa) + bxaxx - bxa(xx)) = 2(bx)(axx) - 2(ax)(bxx) + 2bxxxa - 2(ax)(bxx) + 2bxaxx - 2(xx)(bxa)$.
- $v_8 = g(xx; x, a, b) = 2((xa, xx, b)+(xb, xx, a)+(ab, xx, x)) = 2(ax)(xx)b - 2(ax)(xxb) + 2(bx)(xx)a - 2(bx)(xxa) + 2(ab)(xx)x - 2(ab)(xxx)$.
- $v_9 = g(a; x, xx, b) = 2((xxx, a, b) + (xb, a, xx) + (xxb, a, x)) = 2xxxab - 2(ab)(xxx) + 2(xx)(bxa) - 2(bx)(xxa) + 2xxbax - 2(ax)(xxb)$.
- $v_{10} = g(b; x, xx, a) = 2((xxx, b, a)+(xa, b, xx)+(xxa, b, x)) = 2xxxba - 2(ab)(xxx) + 2(xx)(axb) - 2(ax)(xxb) + 2xxabx - 2(bx)(xxa)$.
- $v_{11} = g(x; xx, a, b) = 2((xxa, x, b)+(xxb, x, a)+(ab, x, xx)) = 2xxaxb - 2(bx)(xxa) + 2xxbxa - 2(ax)(xxb) + 2(xx)(abx) - 2(ab)(xxx)$.

- $v_{21} = f(b; x, xx, a) = (-\gamma-1)(xb(xx)a + xba(xx) + (xx)bxa + (xx)bax + abx(xx) + ab(xx)x) + 2(x(xx)ba + xab(xx) + (xx)abx) + 2\gamma(x(xx)ab + xa(xx)b + (xx)axb) = (-\gamma-1)(bx)(xx)a + (-\gamma-1)(xx)(bxa) + (-\gamma-1)xxbxa + (-\gamma-1)xxbax + (-\gamma-1)(xx)(abx) + (-\gamma-1)(ab)(xx)x + 2xxxba + 2(xx)(axb) + 2xxabx + 2\gamma xxxab + 2\gamma(ax)(xx)b + 2\gamma xxaxb$.

- $v_{22} = g(b; x, x, x)a = 6(xx, b, x)a = 6xxbxa - 6(bx)(xx)a$.

Ahora definamos el siguiente elemento de $\mathcal{C}$:

$$u = -5(\gamma-1)v_1 - 9(\gamma-1)v_2 + 3(2\gamma^2-\gamma+3)v_3 + 3(\gamma-5)v_4$$

$$+9(\gamma-1)v_5 - 3(2\gamma^2-\gamma+3)v_6 - 3(\gamma-5)v_7 + 15(\gamma-1)v_8$$

$$-6(\gamma^2-2\gamma-1)v_9 + 6(\gamma^2-2\gamma-1)v_{10} - 15(\gamma-1)v_{11} - 2(\gamma-3)v_{12}$$

$$+2(\gamma-3)v_{13} + 3(2\gamma-1)v_{14} - 3(2\gamma-1)v_{15} - 3(2\gamma-1)v_{16} - 9v_{17}$$

$$+3(2\gamma-1)v_{18} + 9v_{19} - 6v_{20} + 6v_{21} + 10(\gamma-1)v_{22}.$$

Demostraremos que $u = 0$. Para ello observemos primero que como u es una combinación lineal de $v_1 \ldots, v_{22}$ y cada v_i es combinación lineal de $w_1, \ldots, w_{25}$, entonces u es una combinación lineal de $w_1, \ldots, w_{25}$. Tenemos que si llamamos ξ_i al coeficiente correspondiente a w_i en la descomposición de u entonces:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{22} \mu_j \nu_{i,j}$$

donde μ_j es el coeficiente de v_j en la descomposición de u respecto de los v_k y $\nu_{i,j}$ es el coeficiente de w_i en el desarrollo de v_j como combinación lineal de los w_k. Un cálculo directo nos dice que $\xi_i = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, 25$; por lo que $u = 0$ (para revisar los cálculos ver el apéndice en página 59).

Ahora bien sea $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ un álgebra que satisface las hipótesis de la proposición. Usando el Lema 6 tenemos que $g(b; a, c, d) \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$ para todos $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Por otro lado se cumple que $f(b; a, c, d) = 0$ para todo $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Deducimos que $v_i \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 21$. Como $u = 0$ entonces $10(\gamma-1)v_{(22)} = 10(\gamma-1)6(x^2, b, x)a \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$. Por lo tanto si la característica es distinta de dos, tres o cinco y $\gamma \neq 1$ pues $\lambda \neq -1/2$, tendremos que $(x^2, b, x)a \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$, lo que implica que $\mathcal{J}(\mathcal{A})a \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{A})$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Luego $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ es un ideal de $\mathcal{A}$.

Teorema 6. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de característica $\neq 2$, 3 ó 5. Sea $\mathcal{A}$ una nilálgebra Jordan-reducible en $\mathfrak{S}_\lambda$ con $\lambda \notin \{\infty, -1/2, -1\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente.*

Demostración: En la proposición anterior demostramos que el espacio vectorial $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ generado por los elementos de la forma (x^2, y, x) constituye un ideal de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ es $Jordan - reducible$ entonces $\mathcal{J}(\mathcal{A})^2 = 0$, por lo que $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ es soluble. Como $\mathcal{A}/\mathcal{J}(\mathcal{A})$ es un nilálgebra de Jordan entonces por Teorema C de la Observación 4 es nilpotente, por lo tanto soluble. Usando el Teorema A de dicha observación concluímos que $\mathcal{A}$ es soluble. Finalmente por Lema 4, $\mathcal{A}$ es nilpotente. □

obtenemos $p(x) = x(x-1)(\alpha x-\gamma)$. Debido a que hemos asumido $\alpha = \beta+\gamma \neq 0$ definimos $\lambda = \frac{\gamma}{\alpha} \in F$ y tenemos $p(x) = \alpha x(x-1)(x-\lambda)$. Las condiciones $\gamma \neq 0$ y $\beta + 2\gamma \neq 0$ implican $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, por lo que $p(x)$ posee sólo raíces simples. Por otro lado podemos ver que el polinomio minimal del operador R_e divide a $p(x)$. Esto implica que R_e es un operador cuyo polinomio minimal tiene sólo raices simples y por lo tanto es diagonalizable. Así definiendo $\mathcal{A}_\rho$ como el subespacio propio de A respecto al valor propio ρ tenemos:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_\lambda$$

lo que demuestra el lema. □

El siguiente paso es encontrar relaciones de multiplicación entre los espacios $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_\lambda$.

Lema 8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra Casi-Jordan generalizada de dimensión finita con $\lambda \notin \{\infty, 0, 1\}$. Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene un elemento idempotente $e \neq 0$ y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_\lambda$ es la descomposición de Peirce de $\mathcal{A}$ respecto de e. Consideremos μ y ν dos elementos no necesariamente diferentes de $\{0, 1, \lambda\}$, sea $q(x) = q_{\mu,\nu}(x)$ un polinomio en $F[x]$ tal que $yz \cdot q(R_e) = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}_\mu$, y $z \in \mathcal{A}_\nu$. Entonces*

$$\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu \subseteq \sum_{\rho\in C} \mathcal{A}_\rho$$

donde $C = \{\rho \in \{0, 1, \lambda\} \mid q_{\mu,\nu}(\rho) = 0\}$ es el conjunto de raíces comunes de $p(x)$ y $q_{\mu,\nu}(x)$.

Demostración: Tomemos $y \in \mathcal{A}_\mu$, $z \in \mathcal{A}_\nu$ y supongamos $yz \cdot q(R_e) = 0$ para algún polinomio $q(x) = q_{\mu,\nu}(x) \in F[x]$. Como $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_\lambda$ tenemos que existen elementos $x_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 0, 1, \lambda$ tales que $yz = x_0 + x_1 + x_\lambda$. De ello se deduce que $x_0 \cdot q(R_e) + x_1 \cdot q(R_e) + x_\lambda \cdot q(R_e) = 0$ y dada la definición de $\mathcal{A}_i$ tenemos que $q(0)x_0 + q(1)x_1 + q(\lambda)x_\lambda = 0$. Ya que el elemento $q(\rho)x_\rho$ está en A_ρ y la suma es directa deducimos que para todo $\rho = 0, 1, \lambda$ se cumple $q(0)x_0 = q(1)x_1 = q(\lambda)x_\lambda = 0$. Así si para algún $\rho \in \{0, 1, \lambda\}$, $q(\rho) \neq 0$, entonces $x_\rho = 0$ y $\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu \cap \mathcal{A}_\rho = \{0\}$. Por lo tanto

$$\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu \subseteq \sum_{\rho\in C} \mathcal{A}_\rho$$

donde $C = \{\rho \in \{0, 1, \lambda\} \mid q_{\mu,\nu}(\rho) = 0\}$ concluyendo así la demostración del lema. □

Observación 7. Si tenemos dos polinomios distintos $q_{\mu,\nu}$ y $r_{\mu,\nu}$ tales que $yz \cdot q_{\mu,\nu}(R_e) = yz \cdot r_{\mu,\nu}(R_e) = 0$, entonces la única posibilidad que posee un elemento $\rho \in \{0, 1, \lambda\}$ de aparecer en la descomposición de yz (es decir $yz = x_0 + x_1 + x_\lambda$ con $x_\rho \neq 0$) es siendo raíz de ambos polinomios. Concluímos que

$$\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \subseteq \sum_{\rho \in C} \mathcal{A}_\rho$$

donde C es ahora el conjunto de raíces comunes de p , $q_{\mu,\nu}$ y $r_{\mu,\nu}$.

Nuestro objetivo es encontrar polinomios que posean esta característica. Reemplacemos x por e en la ecuación (2.5) y supongamos $y \in \mathcal{A}_\mu$ y $z \in \mathcal{A}_\nu$. Esto nos da

$$\alpha(\mu^2 yz + \mu yz \cdot e + zy \cdot e \cdot e) + \beta(\mu yz + 2\nu zy \cdot e) + \gamma(\nu zy + 2\nu^2 zy) = 0$$

y

$$\alpha yz \cdot e \cdot e + (2\beta\nu + \alpha\mu) yz \cdot e + (\beta\mu + \gamma\nu + 2\gamma\nu^2 + \alpha\mu^2) yz = 0. \tag{4.3}$$

Así si definimos

$$q_{\mu,\nu}(x) = \alpha x^2 + (2\beta\nu + \alpha\mu)x + (\beta\mu + \gamma\nu + 2\gamma\nu^2 + \alpha\mu^2) \tag{4.4}$$

tendremos que $yz \cdot q_{\mu,\nu}(R_e) = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}_\mu$ y $z \in \mathcal{A}_\nu$.

Por otro lado reemplazando x por e y suponiendo $y \in \mathcal{A}_\mu$ y $z \in \mathcal{A}_\nu$ en la ecuación (2.7) y usando que $\rho = \beta - \gamma$, $\eta = 3\beta + \gamma$ y $\theta = \beta + 3\gamma$ obtenemos

$$(\beta - \gamma)(\mu yz - \nu zy) + (3\beta + \gamma)(\nu zye - \mu yze)$$

$$+(\beta + 3\gamma)(\nu z\nu y - \mu y\mu z) = 0$$

lo que implica

$$(3\beta + \gamma)(\nu - \mu) yz \cdot e + (\beta - \gamma)(\mu - \nu) zy$$
$$+(\beta + 3\gamma)(\nu^2 - \mu^2) yz = 0.$$

Si $\mu = \nu$ esta identidad es la trivial $(0 = 0)$, pero si $\mu \neq \nu$ podemos dividir por $\mu - \nu$ y obtener

$$(3\beta + \gamma) yz \cdot e + ((\beta + 3\gamma)(\mu + \nu) - (\beta - \gamma)) zy = 0. \tag{4.5}$$

Por lo tanto si definimos

$$r_{\mu,\nu}(x) = (3\beta+\gamma)x + ((\beta+3\gamma)(\mu+\nu) - (\beta-\gamma)) \tag{4.6}$$

cuando $\mu \neq \nu$, entonces la ecuación (4.5) implica que $yz \cdot r_{\mu,\nu}(R_e) = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}_\mu$ y $z \in \mathcal{A}_\nu$.

Teorema 7. *Sea A un álgebra en $\mathfrak{G}_\lambda$ de dimensión finita con $\gamma \notin \{\infty, 0, 1\}$. Supongamos que existe un elemento idempotente $e \neq 0$ en $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_\lambda$ con $\lambda = \frac{-\gamma}{\beta+\gamma}$ la descomposición de Peirce de $\mathcal{A}$ respecto de e. Entonces se tienen las siguientes relaciones de multiplicación entre estos subspacios de $\mathcal{A}$*

$$(\mathcal{A}_0)^2 \subseteq \mathcal{A}_0 \quad (\mathcal{A}_1)^2 \subseteq \mathcal{A}_1 \quad \mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 = \{0\}$$

$$\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_\lambda \quad \mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_\lambda \quad (\mathcal{A}_\lambda)^2 \subseteq \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1.$$

Más aún, si agregamos las condiciones $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1/2$, entonces $\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_0 = \{0\}$ y $\mathcal{A}_\lambda^2 = \{0\}$.

Demostración: Debido al Lema 8 y la Observación 7 sólo debemos verificar para todo ν y μ en $\{0, 1, \lambda\}$ si 0, 1 y λ son raíces de los polinomios $q_{\mu,\nu}(x)$ y $r_{\mu,\nu}(x)$. Primero tomemos $\mu = \nu = 0$ en la ecuación (4.4) entonces $q_{0,0}(x) = \alpha x^2$, por lo que 0 es su única raíz. Se deduce que

$$(\mathcal{A}_0)^2 \subseteq \mathcal{A}_0$$

lo que significa que $\mathcal{A}_0$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$.

Haciendo $\mu = \nu = 1$ en la ecuación (4.4) concluimos que $q_{1,1}(x) = \alpha x^2 + (2\beta+\alpha)x + (\beta+3\gamma+\alpha) = \alpha x^2 + (\beta-\gamma)x + 2\gamma$. Ya que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ tenemos que 1 es raíz de $q_{1,1}(x)$, por ello podemos factorizar por $(x-1)$ y obtener $q_{1,1}(x) = (x-1)(\alpha x - 2\gamma)$. Se deduce de esta manera que 0 y λ no son raíces de $q_{1,1}(x)$ pues $\gamma \neq 0$, así

$$(\mathcal{A}_1)^2 \subseteq \mathcal{A}_1$$

y $\mathcal{A}_1$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$.

Si tomamos $\mu = 0$, $\nu = 1$ en la ecuación (4.6) observamos que $r_{1,0}(x) = (2\beta-\alpha)x + ((2\gamma-\alpha) - (\beta-\gamma)) = (3\beta+\gamma)x + 4\gamma$. Como hemos asumido $4\gamma \neq 0$

lo que multiplicando por α y dividiendo por γ nos da $2\gamma = \alpha$, de donde obtenemos

$$\beta + 3\gamma = 0.$$

Por lo tanto $0 \notin \{\gamma, \beta + \gamma, \beta + 2\gamma, \beta + 3\gamma\}$ implica

$$\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_0 = \{0\}$$

Consideremos ahora $q_{\lambda,1}(x)$, para ello reemplacemos μ por λ y ν por 1 en la ecuación (4.4). Tendremos

$$q_{\lambda,1}(x) = \alpha x^2 + (2\beta + \alpha\lambda)x + (\beta\lambda + 3\gamma + \alpha\lambda^2)$$

usando $\alpha\lambda = \gamma$ nos da

$$q_{\lambda,1}(x) = \alpha x^2 + (2\beta + \gamma)x + (\frac{(\beta + \gamma)\gamma}{\alpha} + 3\gamma)$$

reemplazando $\beta + \gamma$ por $-\alpha$

$$q_{\lambda,1}(x) = \alpha x^2 + (2\beta + \gamma)x + 2\gamma.$$

Substituyendo $x = \lambda$ obtenemos

$$\begin{aligned} q_{\lambda,1}(\lambda) = \alpha\lambda^2 + (2\beta + \gamma)\lambda + 2\gamma &= \frac{\gamma^2}{\alpha} + \frac{2\beta\gamma + \gamma^2}{\alpha} + 2\gamma \\ &= 2\frac{(\beta + \gamma)\gamma}{\alpha} + 2\gamma = -2\gamma + 2\gamma = 0. \end{aligned}$$

De esta forma λ es siempre una raíz de $q_{\lambda,1}(x)$, por lo que podemos factorizar $q_{\lambda,1}(x)$ por $(x - \lambda)$ y obtener $q_{\lambda,1}(x) = \alpha x^2 + (2\beta + \gamma)x + 2\gamma = \alpha(x^2 - (\lambda - 2)x + 2\lambda\alpha) = \alpha(x - \lambda)(x - 2)$.

Este hecho implica que tanto 0 como 1 no son raíces de $q_{\lambda,1}(x)$ y

$$\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_\lambda.$$

Con el objeto de demostrar que $\mathcal{A}_\lambda^2 \subseteq \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ consideraremos $q_{\lambda,\lambda}(x)$. Haciendo $\mu = \nu = \lambda$ en la ecuación (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned} q_{\lambda,\lambda}(x) &= \alpha x^2 + (2\beta\lambda + \alpha\lambda)x + (\beta\lambda + \gamma\lambda + 2\gamma\lambda^2 + \alpha\lambda^2) \\ &= \alpha x^2 + (2\beta + \alpha)\lambda x + (\beta + \gamma)\lambda + (2\gamma + \alpha)\lambda^2 \end{aligned}$$

Definición 7. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con radical soluble $\mathcal{R}$. Diremos que $\mathcal{A}$ posee una descomposición de Wedderburn si existe una subálgebra $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S} \quad \text{y} \quad \mathcal{S} \cong \mathcal{A}/\mathcal{R}$$

Observación 8. Un resultado conocido (ver [1] Cap. 3 Teorema 23) es que si $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa de dimensión finita con un elemento unidad tal que A/R is separable si $\mathcal{R}$ es su radical soluble, entonces A posee una descomposición de Weddernburn. También es posible encontrar contraejemplos a este resultado en el caso no separable.

Definición 8. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con radical soluble $\mathcal{R}$. Diremos que $\mathcal{A}$ es *débilmente conservativa* si para todo ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{I}$ posee un elemento idempotente no nulo o $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$. Diremos que $\mathcal{A}$ es *conservativa* si toda subálgebra de $\mathcal{A}$ es débilmente conservativa. Por último diremos que $\mathcal{A}$ es *estrictamente conservativa* si $\mathcal{A}_{\mathbb{E}}$ es conservativa para toda extensión $\mathbb{E}$ del cuerpo de escalares $\mathbb{F}$.

Observación 9. En [18] Petersson da una definición muy similar de conservatividad en álgebras Casi-Jordan (de hecho es la misma salvo que para un radical diferente, sin embargo es posible probar, usando ([18] §1 Corolario 5), ([18] §3 Lema 3.6) y ([8] Teorema principal), que, en este tipo de álgebras, el radical usado por Petersson coincide con el radical soluble.) Petersson demuestra en ([19] §4 Th 4.1) que toda álgebra Casi-Jordan de dimensión finita que es estrictamente conservativa tal que $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ es separable, posee una descomposición de Wedderburn.

Observación 10. Podemos observar que el Ejemplo 4 constituye un contraejemplo para el resultado de Petersson en el caso no conservativo. Veamos primero que $\mathcal{A}$ no es conservativa. Para ello veamos que pese a no ser soluble no posee idempotentes no nulos.

Es claro que $s^2 - 2st = s + t - 2(\frac{1}{2}t) = s$ y $2st = t$ por lo que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, luego $\mathcal{A}$ no es soluble. Escogiendo la base $\{s,t\}$ de $\mathcal{A}$ el producto por coordenadas está dado por:

$$(a,b) \bullet (x,y) = (ax, ax + \frac{bx + ay}{2})$$

por lo que si (a,b) es un idempotente tenemos:

$$(0,0) = (a,b)^2 - (a,b) = (a^2 - a, a^2 + ab - b)$$

por lo que $a = 0$ o $a = 1$ pero como $1 + b - b \neq 0$ se tiene que $a \neq 1$ y por lo tanto $(a, b) = (0, 0)$. Ahora bien supongamos que $\mathcal{A}$ posee una descomposición de Wedderburn. Es claro que $\mathcal{R} = \mathbb{F}t$ por lo que existe una subálgebra $\mathcal{S}$ de dimensión 1 tal que $\mathcal{A} = \mathcal{R} \dot{+} \mathcal{S}$. Tenemos que $\mathcal{S}$ no es soluble y de dimensión 1 por lo que posee un idempotente no nulo, luego $\mathcal{A}$ posee un idempotente no nulo, lo cual es falso.

Con el fin de estudiar la existencia de una descomposición de Wederburn demostraremos una serie de lemas que serán usados en la demostración del teorema principal de esta sección.

Definición 9. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y sea $e \in \mathcal{A}$ un idempotente no nulo. Diremos que e es *principal* si para todo idempotente e' se tiene que $ee' = 0$ o $e'e = 0$, entonces $e' = 0$.

Lema 9. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de dimensión finita en $\mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \notin \{0, 1, \infty\}$. Supongamos $\mathcal{A}$ posee un idempotente no nulo f. Entonces A posee un idempotente principal e.*

Demostración: Definimos el conjunto $Id(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid x^2 = x \neq 0\}$. Sea D la función $Id(\mathcal{A})$ en $\mathbb{N}$ definida mediante $D(u) = \dim_F(A_1(u))$, donde $\mathcal{A}_1(u)$ es el espacio $\mathcal{A}_1$ de la descomposición de Peirce de $\mathcal{A}$ respecto del idempotente u. El conjunto $Id(\mathcal{A})$ no es vacío pues $f \in Id(Ac)$ y la función D está acotada por la dimensión de $\mathcal{A}$. Por ello existe un elemento $e \in Id(\mathcal{A})$ tal que $D(u) \leq D(e)$ para todo $u \in Id(\mathcal{A})$. Si e no es principal, entonces hay un elemento e' en $Id(\mathcal{A})$ tal que $ee' = 0$. Supongamos que $e + e' = 0$, luego $e' = -e$ y $0 = ee' = -e^2$. Esto querría decir que $e = 0$, por lo que tenemos $e + e' \neq 0$ y

$$(e + e')^2 = ee + 2ee' + e'e' = e^2 + (e')^2 = e + e'.$$

Por lo tanto $e + e' \in Id(\mathcal{A})$ y $D(e + e') \leq D(e)$. Por otro lado $e' \in \mathcal{A}_0(e)$ y si $x \in \mathcal{A}_1(e)$ tenemos $xe' = 0$. Esto implica que

$$x(e + e') = xe + xe' = xe = x$$

y $x \in \mathcal{A}_1(e+e')$. Concluimos que $\mathcal{A}_1(e) \subseteq \mathcal{A}_1(e+e')$, sin embargo $e'(e+e') = ee' + (e')^2 = (e')^2 = e'$, luego $e' \in (e')^2 = e'$, luego $e' \in \mathcal{A}_1(e + e')$ pero $e' \notin \mathcal{A}_1(e)$ pues pertenece a $\mathcal{A}_0(e)$. Por lo tanto $D(e) < D(e + e')$ y tenemos una contradición. Concluimos que e es principal. $\square$

Durante todo lo que sigue en esta sección $\mathbb{F}$ srá un cuerpo de característica distinta de dos o tres y $\mathcal{A}$ será un álgebra Casi-Jordan generalizada de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$ con λ distinta de -1, 0, 1, $1/2$ o ∞ y que además posee un elemento idempotente.

Observación 11. Bajo tales condiciones $\mathcal{A}_1$ es una subálgebra asociativa, conmutativa con unidad de $\mathcal{A}$ (debido al Lema 3). Llamaremos R_1 al radical de $\mathcal{A}_1$. Como consecuencia se tiene que $\mathcal{R}_1$ es el conjunto de todos los elementos nilpotentes de $\mathcal{A}_1$ (ver Albert [1] Cap. 2 §7 Teorema 10).

Observación 12. Las relaciones del Teorema 7 implican que $\mathcal{A}_0$ es un ideal de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_\lambda$ es un ideal soluble de $\mathcal{A}$ por lo que está contenido en el radical $\mathcal{R}$.

Definición 10. Dado un elemento x de un álgebra $\mathcal{A}$ definimos *las potencias plenarias de x* de la siguiente manera:

$$x^{(1)} = x, \quad x^{(n)} = (x^{(n-1)})^2$$

para $n > 1$.

Lema 10. *Dado $x \in \mathcal{A}$, $x = x_1 + x_0 + x_\lambda$ con $x_\rho \in \mathcal{A}_\rho$. Entonces para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^{(i)} - x_1^{(i)} - x_0^{(i)} \in \mathcal{A}_\lambda$.*

Demostración: Procedamos por inducción en i. Para $i = 1$ es trivial. Supongamos $x^{(i)} - x_1^{(i)} - x_0^{(i)} = a_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$, luego

$$\begin{aligned} x^{(i+1)} - x_1^{(i+1)} - x_0^{(i+1)} &= (x_1^{(i)} + x_0^{(i)} + a_\lambda)^2 - x_1^{(i+1)} - x_0^{(i+1)} \\ &= x_1^{(i+1)} + x_0^{(i+1)} + a_\lambda^2 + 2x_1^{(i)}x_0^{(i)} \\ &+2x_1^{(i)}a_\lambda + 2x_0^{(i)}a_\lambda - x_1^{(i+1)} - x_0^{(i+1)} \\ &= a_\lambda^2 + 2x_1^{(i)}x_0^{(i)} + 2x_1^{(i)}a_\lambda + 2x_0^{(i)}a_\lambda + a_\lambda x_1^{(i)}. \end{aligned}$$

Usando las relaciones del Teorema 7 deducimos que todos los términos de esta última expresión son iguales a cero excepto $2x_1^{(i)}a_\lambda$ elemento que pertenece a $\mathcal{A}_\lambda$. □

Definamos el siguiente subespacio de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda$$

Lema 11. *El espacio $\mathcal{P}$ es un ideal de $\mathcal{A}$ y para todo índice natural i se satisface*

$$\mathcal{P}^{(i)} \subseteq \mathcal{R}_1^{(i)} + \mathcal{A}_0^{(i)} + \mathcal{A}_\lambda$$

Demostración: Demostremos primero que $\mathcal{P}$ es un ideal de $\mathcal{A}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\mathcal{A} &= \mathcal{P}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda)\\
&\subseteq \mathcal{P}\mathcal{A}_1 + \mathcal{P}\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda\\
&\subseteq (\mathcal{R}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda)\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda\\
&\subseteq (\mathcal{R}_1\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_1) + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda\\
&\subseteq (\mathcal{R}_1 + \mathcal{A}_\lambda) + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda\\
&= \mathcal{R}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{P}
\end{aligned}$$

Es decir $\mathcal{P}$ es un ideal de $\mathcal{A}$. para probar la segunda afirmación del lema procederemos por inducción en i. El caso $i = 1$ es immediato de la definición. Supongamos que

$$\mathcal{P}^{(i)} \subseteq \mathcal{R}_1^{(i)} + \mathcal{A}_0^{(i)} + \mathcal{A}_\lambda,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(i+1)} = \mathcal{P}^{(i)}\mathcal{P}^{(i)} &\subseteq (\mathcal{R}_1^{(i)} + \mathcal{A}_0^{(i)} + \mathcal{A}_\lambda)\mathcal{P}^{(i)}\\
&\subseteq \mathcal{R}_1^{(i)}(\mathcal{R}_1^{(i)} + \mathcal{A}_0^{(i)} + \mathcal{A}_\lambda) + \mathcal{A}_0^{(i)}(\mathcal{R}_1^{(i)} + \mathcal{A}_0^{(i)} + \mathcal{A}_\lambda) + \mathcal{A}_\lambda\mathcal{P}^{(i)}\\
&\subseteq \mathcal{R}_1^{(i)}(\mathcal{R}_1^{(i)} + \mathcal{A}_0^{(i)}) + \mathcal{A}_0^{(i)}(\mathcal{R}_1^{(i)} + \mathcal{A}_0^{(i)}) + \mathcal{A}_\lambda
\end{aligned}$$

pues $\mathcal{A}_\lambda$ es un ideal de $\mathcal{A}$. Por otro lado $\mathcal{R}_1^{(i)} \subseteq \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0 = \{0\}$ implican:

$$\mathcal{P}^{(i+1)} \subseteq \mathcal{R}_1^{(i+1)} + \mathcal{A}_0^{(i+1)} + \mathcal{A}_\lambda$$

y hemos probado el lema. □

Teorema 8. *Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \notin \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \infty\}$, de dimensión finita tal que es débilmente conservativa y $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ es separable. Entonces $\mathcal{A}$ posee una descomposición de Wedderburn.*

Demostración: Si $\mathcal{A}$ es soluble, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ y no hay nada que demostrar. Si $\mathcal{A}$ no es soluble, entonces, ya que es débilmente conservativa, existe un idempotente no nulo y por Lema 9, hay un idempotente principal e en $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\lambda$ la descomposición de Peirce de $\mathcal{A}$ respecto de e. El hecho que e sea principal implica que $\mathcal{A}_0$ no posee elementos idempotentes no nulos. Ya que $\mathcal{A}_0$ es un ideal de $\mathcal{A}$ (ver Observación 12), el hecho que $\mathcal{A}$ sea débilmente conservativa implica que $\mathcal{A}_0$ está contenida en el radical, es decir, es soluble. Sea k el índice de solubilidad de $\mathcal{A}_0$. El radical $\mathcal{R}_1$ de $\mathcal{A}_1$ es a su vez soluble. Sea l el índice de solubilidad de $\mathcal{R}_1$ y sea $m = max\{k, l\}$. Si definimos $\mathcal{P} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda$, entonces Lema 11 implica $\mathcal{P}^{(m)} \subseteq \mathcal{R}_1^{(m)} + \mathcal{A}_0^{(m)} + \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_\lambda$. Deducimos que $\mathcal{P}^{(m+1)} \subseteq (\mathcal{A}_\lambda)^2 = \{0\}$ por lo que $\mathcal{P}$ es un ideal soluble de $\mathcal{A}$ lo que significa que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$.

Recíprocamente si tomamos $x \in \mathcal{R}$, entonces, ya que $\mathcal{R}$ es soluble, hay una potencia plenaria de x que es cero, digamos $x^{(r)} = 0$. Si escribimos $x = x_1 + x_0 + x_\lambda$, debido a que $\mathcal{A}_0$ es soluble, existe un índice s tal que $x_0^{(s)} = 0$. Sea $m = max\{r, s\}$. Entonces el Lema 11 implica $x_1^{(m)} = -(x^{(m)} - x_1^{(m)} - x_0^{(m)}) \in \mathcal{A}_\lambda$. Deducimos que $x_1^{(m+1)} = 0$. El hecho que $\mathcal{A}_1$ sea asociativa nos permite concluir que $x_1^{2^m} = 0$, luego x_1 es un elemento nilpotente de el álgebra asociativa $\mathcal{A}_1$. Por lo tanto $x_1 \in \mathcal{R}_1$ (ver Observación 11) y $x \in \mathcal{P}$. Así que tenemos que

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\lambda$$

Este resultado tiene dos consecuencias. Primero $\mathcal{R} \cap \mathcal{A}_1 = \mathcal{R}_1$, así es que

$$\mathcal{A}/\mathcal{R} \cong (\mathcal{A}_1 + \mathcal{R})/\mathcal{R} \cong \mathcal{A}_1/(\mathcal{R} \cap \mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_1/\mathcal{R}_1$$

y $\mathcal{A}_1/\mathcal{R}_1$ es separable. Esto implica que $\mathcal{A}_1$ posee una descomposición de Weddernburn en virtud de la Observación 11. Por lo tanto $\mathcal{A}_1 = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{S}_1$ para alguna subálgebra $\mathcal{S}_1$ of $\mathcal{A}_1$ con $\mathcal{S}_1 \cong \mathcal{A}_1/\mathcal{R}_1$. La segunda consecuencia de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_\lambda$ es que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\lambda \\ &= \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{R} \end{aligned}$$

así si definimos $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$, tendremos

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$$

con

$$\mathcal{A}/\mathcal{R} \cong \mathcal{A}_1/\mathcal{R}_1 \cong \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$$

lo que finaliza la demostración del teorema. $\square$

Capítulo 5

Problemas abiertos

5.1. $(x^2, y, x)(a^2, b, a) = 0$

Podemos decir que el principal problema que ha quedado abierto es el de investigar para cuales λ se cumple que para toda álgebra en $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ es Jordan-reducible. Es decir si se satisface la relación:

$$(x^2, y, x)(a^2, b, a) = 0 \tag{5.1}$$

para todo $x, y, a, b \in \mathcal{A}$. Existen diversas razones para intentar demostrar que aquella identidad efectivamente se satisface. Aquí menciono las que considero más relevantes:

- Conjeturamos que la identidad (5.1) se cumple para toda variedad $\mathfrak{G}_\lambda$ salvo, quizás, para una cantidad finita de elementos λ. Lo que nos induce a formular esta conjetura es el hecho de que el program Albert [10, 11] del professor Jacobs nos ha arrojado el siguiente resultado:

Degree	Current Dimension	Elapsed Time (in seconds)
1	4	0
2	12	0
3	38	0
4	115	1
5	313	1
6	666	3
7	886	33
8	897	269

Build completed. Last matrix 12.98 % dense

$\rightarrow$ p $(xx, y, x)(aa, b, a)$

Polynomial is an identity

Defining identities are:

1.$ab - ba$

2.$((xx)y)x + 3((xx)x)y - 4((yx)x)x$

Field = 251.

Using Sparse matrix structure.

Problem type = $[3a, b, 3x, y]$; Total degree = 8.

Multiplication table present.

Esto significa que generando el álgebra de todos los productos posibles de 3 veces x, 3 veces a, una vez b, y una vez y que satisfaga las identidades $uv = vu$ y $((uu)v)u + 3(uu)u)v - 4((vu)u)u$ (es decir la ecuación (2.4) con $\beta = 1$ y $\gamma = 3$), se tiene que $(x^2, y, x)(a^2, b, a))$ es una identidad del álgebra.

- Se podra demostrar la equivalencia de los conceptos de solubilidad y nilpotencia para todas las variedades $\mathfrak{G}_\lambda$ para las que se satisfaga la igualdad con λ distinto de ∞ o $-1/2$.

- Otra consecuencia importante es que podemos ver que toda álgebra $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \notin \{-1/2, \infty\}$ que es semisimple, es de Jordan. Por ello podemos deducir que $\mathcal{A} \in \mathfrak{G}_\lambda$ con $\lambda \notin \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1, \infty\}$ implica $\mathcal{A} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ con $\mathcal{S}$ álgebra de Jordan semisimple. Por lo que la estructura de éstas álgebras sería bastante conocida.

Por último podemos afirmar que para $\lambda = -1$ la afirmación es falsa. El Ejemplo 5 constituye un contraejemplo. En $\overline{\mathbb{C}}$ se tiene que el subespacio $\mathcal{J}$ generado por los elementos (x^2, y, x) con $x, y \in \overline{\mathbb{C}}$ coincide con $\overline{\mathbb{C}}$, por lo que $\mathcal{J}^2 \neq 0$.

5.2. Casos particulares

También está pendiente analizar los resultados obtenidos en aquellas variedades donde las demostraciones dadas no funcionan. Estos son:

5.2.1. $\mathfrak{G}_{-1}$: $(\beta = 0)$

Para álgebras en esta variedad el Teorema 3 es falso. De hecho el Ejemplo 5 constituye un contraejemplo pues en $\overline{\mathbb{C}}$ no es de Jordan y el producto punto usual $<,>$ es una forma traza no degenerada. También la demostración de los Teoremas 5 y 8 fallan. Sin embargo esta variedad tiene una propiedad interesante que puede ayudar a enfocar el problema desde otro punto de vista. Un álgebra en $\mathfrak{G}_{-1}$ satisface

$$x^3y - xyxx = 0. \tag{5.2}$$

Reemplazando y por $-yx$ en la ecuación (5.2) obtenemos

$$xyxxx - x^3(yx) = 0. \tag{5.3}$$

Multiplicando la ecuación (5.2) por x obtenemos

$$x^3yx - xyxxx = 0. \tag{5.4}$$

Finalmente sumando las ecuaciones (5.3) y (5.4) tenemos

$$(x^3, y, x) = x^3y - x^3(yx) = 0. \tag{5.5}$$

Álgebras que satisfacen la ecuación (5.5) se llaman álgebras 3-Jordan y han sido estudiadas ampliamente. Un resultado interesante (ver Hentzel y Peresi [9]) dice que bajo ciertas condiciones razonables toda álgebra 3-Jordan es de Jordan o es de Pseudo-composición. Las álgebras de Pseudo-composición son álgebras que poseen una forma bilineal B tal que para todo x se tiene $x^3 = B(x,x)x$. Esta clase de álgebras es sumamente conocida y su estructura es sencilla de determinar (ver Meyberg y Osborn [13]). El Ejemplo 5 es un ejemplo de álgebra de pseudo-composición, donde la función bilineal es el producto punto usual $<,>$.

5.2.2. $\mathfrak{G}_{-1/2}$: $(\beta - \gamma = 0)$

Queda pendiente saber si el Lema 4 o los Teoremas 4 y 5 se satisfacen para álgebras en esta clase. Sería particularmente interesante saber si existe un álgebra soluble pero no nilpotente en $\mathfrak{G}_{-1/2}$.

5.2.3. $\mathfrak{G}_0 : \quad (\gamma = 0)$

Esta clase es una de las más problemáticas, prácticamente todas las demostraciones fallan, por lo que sería interesante un estudio exclusivo de esta variedad. Sólo hemos demostrado la equivalencencia entre solubilidad y nilpotencia. En cuanto a la descomposión de Peirce, el problema radica en que 0 es una raíz de $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \beta x^2(x-1)$ de multiplicidad 2. Esto implica que si e es un idempotente principal y $e' \in \mathcal{A}_0$ no significa que $e'e = 0$ por lo que no podemos afirmar que $\mathcal{A}_0$ sea soluble.

5.2.4. $\mathfrak{G}_1 : \quad (\beta + 2\gamma = 0)$

Aquí sólo falla el Teorema 8. Queda pendiente estudiar la existencia de una descomposición de Wedderburn. El problema radica es que no podemos asegurar la existencia de una descomposición de Wedderburn para $\mathcal{A}_1$ pues en este caso $\mathcal{A}_1$ no es necesariamente asociativa pues $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} \mid (R_e - I)^2(x) = 0\}$ donde I es la identidad de $\mathcal{A}$. Esto implica que $\mathcal{A}_1$ no tiene necesariamente un elemento unidad por lo cual no es necesariamente asociativa.

5.2.5. $\mathfrak{G}_\infty : \quad (\beta + \gamma = 0)$

Esta clase es definitivamente la más problemática, no sólo como en el caso de $\mathfrak{G}_0$ prácticamente todas las demostraciones fallan, sino que además no poseemos ejemplos de álgebras en esta variedad, salvo aquellos que están en $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$.

APÉNDICE: Cálculos.

Para calcular los elemento ξ_i de la demostración del Teorema 5 podemos observar las siguientes tablas:

coeficiente		$w_1 =$ $abxxx$	$w_2 =$ $axbxx$	$w_3 =$ $axxbx$	$w_4 =$ $axxxb$	$w_5 =$ $bxaxx$
$-5(\gamma-1)$	v_1	0	0	0	0	0
$-9(\gamma-1)$	v_2	0	0	0	0	0
$3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_3	0	0	4	0	0
$3(\gamma-5)$	v_4	0	2	0	2	0
$9(\gamma-1)$	v_5	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_6	0	0	0	0	0
$-3(\gamma-5)$	v_7	0	0	0	0	2
$15(\gamma-1)$	v_8	0	0	0	0	0
$-6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_9	0	0	0	0	0
$6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_{10}	0	0	0	0	0
$-15(\gamma-1)$	v_{11}	0	0	0	0	0
$-2(\gamma-3)$	v_{12}	0	0	0	0	0
$2(\gamma-3)$	v_{13}	0	0	0	$-6\gamma-6$	0
$3(2\gamma-1)$	v_{14}	$-2\gamma-2$	$-2\gamma-2$	$-2\gamma-2$	0	4
$-3(2\gamma-1)$	v_{15}	$-2\gamma-2$	4	4γ	0	$-2\gamma-2$
$-3(2\gamma-1)$	v_{16}	0	$-2\gamma-2$	$-2\gamma-2$	$-2\gamma-2$	0
-9	v_{17}	0	$-2\gamma-2$	4	4γ	0
$3(2\gamma-1)$	v_{18}	0	0	0	0	$-2\gamma-2$
9	v_{19}	0	0	0	0	$-2\gamma-2$
-6	v_{20}	0	0	0	0	0
6	v_{21}	0	0	0	0	0
$10(\gamma-1)$	v_{22}	0	0	0	0	0

$coeficiente$		$w_6 =$ $bxxax$	$w_7 =$ $bxxxa$	$w_8 =$ $xxabx$	$w_9 =$ $xxaxb$	$w_{10} =$ $xxbax$
$-5(\gamma-1)$	v_1	0	0	0	0	0
$-9(\gamma-1)$	v_2	0	0	0	0	0
$3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_3	0	0	0	0	0
$3(\gamma-5)$	v_4	0	0	0	0	0
$9(\gamma-1)$	v_5	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_6	4	0	0	0	0
$-3(\gamma-5)$	v_7	0	2	0	0	0
$15(\gamma-1)$	v_8	0	0	0	0	0
$-6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_9	0	0	0	0	2
$6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_{10}	0	0	2	0	0
$-15(\gamma-1)$	v_{11}	0	0	0	2	0
$-2(\gamma-3)$	v_{12}	0	$-6\gamma-6$	0	0	0
$2(\gamma-3)$	v_{13}	0	0	0	6	0
$3(2\gamma-1)$	v_{14}	4γ	0	2	0	2γ
$-3(2\gamma-1)$	v_{15}	$-2\gamma-2$	0	2γ	0	2
$-3(2\gamma-1)$	v_{16}	0	0	0	0	0
-9	v_{17}	0	0	0	0	0
$3(2\gamma-1)$	v_{18}	$-2\gamma-2$	$-2\gamma-2$	0	0	0
9)	v_{19}	4	4γ	0	0	0
-6	v_{20}	0	0	$-\gamma-1$	$-\gamma-1$	2
6	v_{21}	0	0	2	2γ	$-\gamma-1$
$10(\gamma-1)$	v_{22}	0	0	0	0	0

$coeficiente$		$w_{11} =$ $xxbxa$	$w_{12} =$ $xxxab$	$w_{13} =$ $xxxba$	$w_{14} =$ $(ab)(xx)x$	$w_{15} =$ $(ax)(xx)b$
$-5(\gamma-1)$	v_1	0	0	0	6	0
$-9(\gamma-1)$	v_2	0	0	0	0	2
$3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_3	0	0	0	0	0
$3(\gamma-5)$	v_4	0	0	0	0	0
$9(\gamma-1)$	v_5	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_6	0	0	0	0	0
$-3(\gamma-5)$	v_7	0	0	0	0	0
$15(\gamma-1)$	v_8	0	0	0	2	2
$-6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_9	0	2	0	0	0
$6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_{10}	0	0	2	0	0
$-15(\gamma-1)$	v_{11}	2	0	0	0	0
$-2(\gamma-3)$	v_{12}	6	0	6γ	0	0
$2(\gamma-3)$	v_{13}	0	6γ	0	0	0
$3(2\gamma-1)$	v_{14}	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma-1)$	v_{15}	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma-1)$	v_{16}	0	0	0	0	2
-9	v_{17}	0	0	0	0	2γ
$3(2\gamma-1)$	v_{18}	0	0	0	0	0
9	v_{19}	0	0	0	0	0
-6	v_{20}	2γ	2	2γ	$-\gamma-1$	$-\gamma-1$
6	v_{21}	$-\gamma-1$	2γ	2	$-\gamma-1$	2γ
$10(\gamma-1)$	v_{22}	6	0	0	0	0

$coeficiente$		$w_{16} =$ $(ax)(bx)x$	$w_{17} =$ $(bx)(xx)a$	$w_{18} =$ $(ab)(xxx)$	$w_{19} =$ $(ax)(bxx)$	$w_{20} =$ $(ax)(xxb)$
$-5(\gamma-1)$	v_1	0	0	0	0	0
$-9(\gamma-1)$	v_2	4	0	0	0	0
$3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_3	0	0	0	0	2
$3(\gamma-5)$	v_4	0	0	0	2	0
$9(\gamma-1)$	v_5	4	2	0	-4	0
$-3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_6	0	0	0	-4	0
$-3(\gamma-5)$	v_7	0	0	0	-4	0
$15(\gamma-1)$	v_8	0	2	-2	0	-2
$-6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_9	0	0	-2	0	-2
$6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_{10}	0	0	-2	0	-2
$-15(\gamma-1)$	v_{11}	0	0	-2	0	-2
$-2(\gamma-3)$	v_{12}	0	0	0	0	0
$2(\gamma-3)$	v_{13}	0	0	0	0	0
$3(2\gamma-1)$	v_{14}	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma-1)$	v_{15}	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma-1)$	v_{16}	4	0	0	4γ	2γ
-9	v_{17}	$-2\gamma-2$	0	0	$-2\gamma-2$	2
$3(2\gamma-1)$	v_{18}	4	2	0	0	0
9	v_{19}	$-2\gamma-2$	2γ	0	0	0
-6	v_{20}	0	2γ	0	0	0
6	v_{21}	0	$-\gamma-1$	0	0	0
$10(\gamma-1)$	v_{22}	0	-6	0	0	0

coeficiente		$w_{21} =$ $(bx)(axx)$	$w_{22} =$ $(bx)(xxa)$	$w_{23} =$ $(xx)(abx)$	$w_{24} =$ $(xx)(axb)$	$w_{25} =$ $(xx)(bxa)$
$-5(\gamma-1)$	v_1	0	0	-6	0	0
$-9(\gamma-1)$	v_2	-4	0	0	-2	0
$3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_3	-4	0	0	-2	0
$3(\gamma-5)$	v_4	-4	0	0	-2	0
$9(\gamma-1)$	v_5	0	0	0	0	-2
$-3(2\gamma^2-\gamma+3)$	v_6	0	2	0	0	-2
$-3(\gamma-5)$	v_7	2	0	0	0	-2
$15(\gamma-1)$	v_8	0	-2	0	0	0
$-6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_9	0	-2	0	0	2
$6(\gamma^2-2\gamma-1)$	v_{10}	0	-2	0	2	0
$-15(\gamma-1)$	v_{11}	0	-2	2	0	0
$-2(\gamma-3)$	v_{12}	0	0	0	0	0
$2(\gamma-3)$	v_{13}	0	0	0	0	0
$3(2\gamma-1)$	v_{14}	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma-1)$	v_{15}	0	0	0	0	0
$-3(2\gamma-1)$	v_{16}	0	0	0	0	0
-9	v_{17}	0	0	0	0	0
$3(2\gamma-1)$	v_{18}	4γ	2γ	0	0	0
9	v_{19}	$-2\gamma-2$	2	0	0	0
-6	v_{20}	0	0	$-\gamma-1$	$-\gamma-1$	2
6	v_{21}	0	0	$-\gamma-1$	2	$-\gamma-1$
$10(\gamma-1)$	v_{22}	0	0	0	0	0

Para cada w_i la columna respectiva contiene al vector $(\nu_{i,1}, \ldots, \nu_{i,22})$ y la columna de coeficientes contiene al vector $(\mu_1, \ldots, \mu_{22})$, por lo que ξ_i es el producto punto entre ambos vectores columnas. Aquí realizamos el cálculo para algunos de los w_i.

Para w_1

$$(-2\gamma - 2)(3(2\gamma - 1)) + (-2\gamma - 2)(-3(2\gamma - 1)) = 0$$

Para w_2

$$2(3(\gamma - 5)) + (-2\gamma - 2)(3(2\gamma - 1)) + 4(-3(2\gamma - 1)) + (-2\gamma - 2)(-3(2\gamma - 1))$$
$$+(-2\gamma - 2)(-9) = 2(3(\gamma - 5)) + 4(-3(2\gamma - 1) + (-2\gamma - 2)(-9) =$$
$$6\gamma - 30 - 24\gamma + 12 + 18\gamma + 18 = 0$$

Para w_3

$$4(3(2\gamma^2 - \gamma + 3)) + (-2\gamma - 2)(3(2\gamma - 1)) + 4\gamma(-3(2\gamma - 1)) + (-2\gamma - 2)(-3(2\gamma - 1))$$
$$+4(-9) = 4(3(2\gamma^2 - \gamma + 3)) + 4\gamma(-3(2\gamma - 1)) + 4(-9) =$$
$$24\gamma^2 - 12\gamma + 36 - 24\gamma^2 + 12\gamma - 36 = 0$$

Para w_4

$$2(3(\gamma - 5)) + (-6\gamma - 6)(2(\gamma - 3)) + (-2\gamma - 2)(-3(2\gamma - 5)) + 4\gamma(-9) =$$
$$6\gamma - 30 - 18\gamma^2 + 24\gamma + 18 + 18\gamma^2 - 18\gamma - 30 - 36\gamma = 0$$

Para w_8

$$2(6(\gamma^2 - 2\gamma - 1)) + 2(3(2\gamma - 1)) + 2\gamma(-3(2\gamma - 1)) + (-\gamma - 1)(-6) + 2 \cdot 6$$
$$= 12(\gamma^2 - 2\gamma - 1) + 6(2\gamma - 1) - 6\gamma(2\gamma - 1) + 6(\gamma - 1) + 12 = 0.$$

Bibliografía

[1] A.A. Albert: *Structure of algebras.* Amer. Math. Soc. Colloquium publications 24 New York (1939).

[2] L. Carini, I. R. Hentzel, G. M. Piacentini-Cattaneo: *Degree four identities not implied by commutativity*, Comm. in Algebra **16** (2)(1988), 339-356.

[3] I. Correa, A. Labra: *On Nilpotence in Almost-Jordan Right NilAlgebras of low dimension.* Int. Journal of Math., Game Theory and Alg. **Accepted** (2003).

[4] I. Correa, A. Labra: *On Nilpotence of Almost-Jordan Right NilAlgebras.* Int. Journal of Math., Game Theory and Alg. **Accepted** (2004).

[5] I. Correa, I.R. Hentzel, A. Labra: *On the Nilpotence of the Multiplication Operator in Commutative Right Nil Algebras.* Comm. in Alg. 37(7) (2002), 3473-3488.

[6] I. Correa, I.R. Hentzel, A. Labra: On the Nilpotence of Commutative Right Nil Algebras of low dimension. Int. Journal of Math., Game Theory and Alg. **13** (3), (2003), 199-202.

[7] R. I. Hentzel, A. Labra: *On represetations on nilalgebras of right nilindex four.* Linear algebra and applications 404 (2005), 389-400.

[8] R. I. Hentzel, L. A. Peresi: *Almost Jordan Rings*, Proc. of A. M. S. **104** (2) (1988), 343-348.

[9] R. I. Hentzel, L. A. Peresi: *A Variety Containig Jordan and Pseudocomposition Algebras*, **Submitted** (2004).

[10] D. P. Jacobs, S. V. Muddana, A. J. Offutt: A computer algebra system for nonassociative identities in *Proceedings of the Fifth International Conference on Hadronic Mechanics and Nonpotential Interactions* (H. C. Myung, Ed.), Nova Science Publishers, Inc.: New York, 1993.

[11] D. P. Jacobs, D. Lee, S.V. Muddana, A. J. Offutt, K. Prabhu, T. Whiteley: *Albert's user guide.* Department of Computer Science, Clemson University, 1993.

[12] N. Jacobson: *Lie Algebras,* Interscience tracts in pure and applied mathematics, number 10. John Wiley & Sons, USA. 1962.

[13] K. Meyberg, M. Osborn: *Pseudo-composition Algebras*, Math. Z. **214** (1993), 67-77.

[14] J. M. Osborn: *Commutative algebras satisfying an identity of degree four*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 1114-1120.

[15] J. M. Osborn: *Identities of non-associative algebras*, Canad. J. Math. **17** (1965), 78-92.

[16] J. M. Osborn: *Variety of algebras*, Advances in Math 8, 163-369.

[17] A.J. Penico: *The Wedderburn principal Theorem for Jordan algebras*, Trans. Amer. Math. Soc, **70** (1951), 404-420.

[18] H.P. Petersson: *Zur Theorie der Lie-Tripel-Algebren*, Math. Z. **97** (1967), 1-15.

[19] H.P. Petersson: *Über den Wedderburnshen Struktursats fur Lie-Tripel-Algebren*, Math. Z. **98** (1967), 104-118.

[20] R. D. Schafer: *An introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York - London, 1966.

[21] A. V. Sidorov: *Solvabiltity and nilpotency in Lie triple algebras*, Deposited in VINITI N^o 1125-77, (1977).

[22] A. V. Sidorov: *On Lie Triple algebras*, Translated from Algebra i Logika. **20** (1) (1981), 101-108.

[23] K. A. Zhevlakov, I.P.Shestakov: A.I. Shirshov, A.M. Slinko. *Rings that are nearly associative*, Academic Press N. York, London. (1992).