Perturbaciones de ecuaciones diferenciales lineales no autónomas de segundo orden

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

Melanie Elizabeth Sánchez Pfeiffer

Diciembre, 2008

Director de Tesis Dr. Manuel Pinto

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Melanie Elizabeth Sánchez Pfeiffer

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día ... de .... de 200.... .

Director de Tesis:

Dr. Manuel Pinto Jiménez

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Gonzalo Robledo Veloso

Dr. Patricio González González

A mi querida familia

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mi profesor tutor Manuel Pinto por su gran paciencia, disposición y ayuda que me brindó en todo el proceso de desarrollo de esta Tesis.

También quiero agradecer a los que fueron mis profesores durante la Licenciatura en Matemáticas y el Magíster, por estar siempre entregando lo mejor de sí mismos para enseñarnos, la disponibilidad para responder dudas, en resumen, el ambiente grato y acogedor con que reciben a los alumnos. En especial, agradezco al profesor Rolando Pomareda por creer en mis capacidades, dándome la oportunidad de hacer el Magíster con una beca.

Gracias a los que han sido mis compañeros de carrera y de sala de estudio por su amistad y apoyo. Quiero destacar a dos amigas, con las cuales he compartido la mitad de mi vida, Romina y Leslie... quiero agradecerles por la confianza, su disposición para escuchar y compañerismo.

No puedo dejar de nombrar a mi familia, a los que les debo el estar aquí. Agradezco infinitamente a mis padres, Raúl y Rita, por su amor y ejemplo, sus sabios consejos que me han conducido y animado a llegar a este lugar. Agradezco a mis hermanos Raúl, Katherin y Marianne por su apoyo y por estar siempre a mi lado.

Índice general

Resumen

Estudiamos el comportamiento asintótico de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\{p(t)x'(t)\}' - q(t)x(t) = 0. \tag{1}$$

Siguiendo este objetivo, mediante sustituciones algebraicas, transformamos esta ecuación a un sistema lineal perturbado de la forma

$$Y'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}Y(t), \tag{2}$$

donde Λ es una matriz diagonal y R es una matriz pequeña en algún sentido que explicitaremos más adelante.
Bajo condiciones de dicotomía sobre los coeficientes de la matriz diagonal Λ y de integrabilidad sobre la matriz R, aplicamos al sistema (2) teoremas obtenidos por N.Levinson [12] y P.Hartman junto con A.Wintner [11]. También, aplicamos al sistema (2) un teorema de M.S.P Eastham [6, teo.1.6.1] bajo las condiciones $\{\lambda_i - \lambda_j\}^{-1}R \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $(\{\lambda_i - \lambda_j\}^{-1}R)' \in L^1$, donde λ_i son los coeficientes variables de la matriz Λ en (2). En cada caso encontramos fórmulas asintóticas de las soluciones de la ecuación (1).

Finalmente, desarrollamos un nuevo método algebraico que logra expresar el vector solución del sistema (2) de forma desacoplada y mejora la precisión de las aproximaciones obtenidas en los resultados clásicos. Bajo la condición de que el coeficiente de la perturbación $R(t)$ pertenezca a L^1 o L^2, estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (2). Así, obtenemos resultados generales y fórmulas asintóticas de las soluciones de la ecuación (1) que muestran explícitamente la función error de la aproximación.

Summary

We study the asymptotic behaviour of the second order differential equation

$$\{p(t)x'(t)\}' - q(t)x(t) = 0. \tag{3}$$

Following this goal, by means of algebraic transformation, we derive this equation to a diagonal perturbed system

$$Y'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}Y(t), \tag{4}$$

where Λ is a diagonal matrix and R is a matrix which is small in a sense that will be explicited later on.
Under dichotomy conditions on the diagonal system and integrability on the matrix R, we apply to the system (4) the known theorems by N.Levinson [12] and P.Hartman and A.Wintner [11]. We also use on the system (4) a theorem of M.S.P Eastham [6] asking that $\{\lambda_i - \lambda_j\}^{-1}R \to 0$, $(t \to \infty)$ and $(\{\lambda_i - \lambda_j\}^{-1}R)' \in L^1$ where λ_i are the variable coefficients of the matrix Λ in (4). In each case, we deduce asymptotic formulae of solutions of the equation (3).

Finally, we develop a new algebraic method which obtain a solution vector of the system (4) in uncoupled form and improves the precision of the approximations obtained by the classical results. Under the condition that the matrix $R(t)$ belongs to L^1 or L^2, we study the asymptotic behaviour of the solutions of system (4). Thus, we obtain general statements and asymptotic formulae of the solutions of the equation (3). Moreover, we show explicitly the errors functions of the approximation.

Indice de símbolos

diag$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, matriz diagonal con coeficientes diagonales λ_i $(i = 1, \ldots n)$.
e_k, vector canónico de $\mathbb{R}^n$.
$o(g)$, una función f tal que $\lim f/g = 0$ (Notación de Landau).
$O(g)$, una función f tal que $\limsup |f|/g < \infty$ (Notación de Landau).
L^p, espacios L^p.
$L(ds)$, espacio L^1 respecto a la variable s.
$L(dt)$, espacio L^1 respecto a la variable t.
$||$, norma usual en $\mathbb{R}$.
$\approx$, aproximación sin mostrar el error.

Introducción

Se estudiará la ecuación diferencial de segundo orden

$$\{p(t)x'(t)\}' - q(t)x(t) = 0, \tag{5}$$

donde las funciones $p(t)$ y $q(t)$ son localmente integrables en un intervalo $[a, \infty)$ y no necesariamente toman valores reales (ver libros de Bellman [1], Coddington-Levinson [2], Coppel [3], Fedoryuk [9], Eastham [6] y en los artículos de Elias-Gingold [7] y de Harris-Lutz [10] uno puede apreciar su interés).
La ecuación (5) expresada como un sistema de ecuaciones lineales 2×2 de primer orden es

$$X' = A(t)X. \tag{6}$$

En general, los coeficientes de la matriz A de tamaño $n \times n$ en (6) son funciones que pueden tomar valores reales o complejos y X es un vector columna de tamaño $n \times 1$. Se sabe que un vector solución de (6) rara vez puede escribirse a través de expresiones explícitas que involucren a los coeficientes variables de la matriz cuadrada A. Es por esta razón que la teoría asintótica que surge a partir de este problema y en la cual nos basaremos, define el sistema (6) para los t pertenecientes a un intervalo de la forma $[a, \infty)$, ya que se considerará la situación asintótica, es decir, cuando $t \to \infty$. De esta manera, se estudiará el sistema (6) que no tiene solución explícita pero que si se puede "aproximar", cuando $t \to \infty$, a un sistema diagonal de la forma

$$X' = \Lambda(t)X \tag{7}$$

el cual puede ser resuelto. De hecho, si $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, las soluciones del sistema (7) son de la forma

$$X_k(t) = \exp\left(\int_a^t \lambda_k(s)ds\right) e_k,$$

donde e_k es el vector canónico cuya k-ésima componente es 1 y todos los demás coeficientes son ceros.

En consecuencia, el sistema (6) se escribirá como un sistema asintóticamente diagonal, esto es,

$$X'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}\, X(t), \tag{8}$$

donde $R(t)$ es una matriz cuadrada $n \times n$ la cual es pequeña en algún sentido cuando $t \to \infty$. Buscamos las condiciones sobre las matrices R y Λ para que las soluciones de (8), y por lo tanto de (6), se aproximen a las soluciones del sistema diagonal (7), cuando t es grande.
Hay distintas maneras de ver la pequeñez de $R(t)$ cuando $t \to \infty$. El camino más obvio sería establecer la siguiente condición

$$R(t) \to 0 \;\; (t \to \infty).$$

Se han hecho investigaciones usando esta condición sobre $R(t)$ (ver Figueroa-Pinto [8], L. Markus [13], M. Pinto [14]) y Pinto-Rivas [15]), sin embargo, en este trabajo se supondrá la hipótesis deducida por Levinson. En el año 1948, Levinson probó que la condición que surge naturalmente sobre la matriz $R(t)$ del sistema (8) es

$$\int_a^\infty |R(t)| dt < \infty, \tag{9}$$

es decir, que cada coeficiente de R tenga una integral absolutamente convergente sobre $[a, \infty)$. Aparte de la condición (9) sobre R, el Teorema de Levinson establece condiciones de dicotomía sobre los coeficientes λ_k de la matriz diagonal Λ para llegar a soluciones X_k $(1 \leq k \leq n)$ de la forma

$$X_k(t) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^t \lambda_k(s) ds\right). \tag{10}$$

Bajo las condiciones entregadas por el Teorema de Levinson [6, teo.1.3.1] se prueba que las soluciones del sistema (8) se aproximan a las del sistema diagonal (7) cuando $t \to \infty$. Este resultado proporciona el punto de partida de todo lo que desarrollaremos en este trabajo. Además de aplicar los resultados de este Teorema al sistema (8), usaremos el Teorema de Hartman-Wintner [6, teo.1.5.1] y un Teorema de Eastham [6, teo.1.6.1]. El Teorema de Hartman-Wintner pide que $R(t) \in L^m$ con $1 < m \leq 2$, en vez de la condición de integrabilidad $R(t) \in L^1$ que pide Teorema de Levinson, y la condición de dicotomía sobre los valores de la matriz diagonal es más fuerte que la de Levinson. Entre las hipótesis del Teorema de Eastham están la integrabilidad de la derivada del cuociente entre la matriz R y los valores propios de Λ, junto con la condición de que este cuociente sea pequeño cuando t es grande. Esto es,

$$(\lambda_j - \lambda_i)^{-1} R \to 0, \text{ cuando } t \to \infty \;\text{ y }\; [(\lambda_j - \lambda_i)^{-1} R]' \in L^1, i \neq j.$$

Las fórmulas asintóticas que establecen los tres teoremas tienen la forma

$$X_k(t) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^t \tilde{\lambda}_k(s)ds\right) \ (1 \leq k \leq n),$$

donde $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k(\lambda, R)$. El Teorema de Eastham se diferencia de los dos restantes en que considera los valores propios $\tilde{\lambda}_k$ de la matriz $\Lambda + R$, los que podrían ser difíciles de calcular.
En el Capítulo 1 cada uno de estos Teoremas es presentado como Teorema 1.1.1 de Levinson, Teorema 1.1.2 de Hartman-Wintner y Teorema 1.1.3 de Eastham. En la sección 1.1.2 se calcula explícitamente el error en la aproximación asintótica de las soluciones de un sistema de la forma (8) bajo las condiciones impuestas por el Teorema de Levinson. Los errores entregados por los otros teoremas no son sencillos de explicitar debido a la serie de transformaciones matriciales que se aplican sobre el sistema (8) para la obtención de las fórmulas asintóticas de la soluciones (ver Eastham [6, teo.1.5.1,teo.1.6.1]). En la sección 1.2 del Capítulo 1, se desarrolla el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\{p(t)x'(t)\}' - q(t)x(t) = 0.$$

Mediante diversas sustituciones transformamos esta ecuación en un sistema asintóticamente diagonal de la forma (8). En la primera transformación se ve involucrada la variable independiente t, la siguiente sustitución con la que trabajamos utiliza dos diagonalizaciones, y en la última transformación que se hace al sistema, se considera la matriz R como casi constante cuando $t \to \infty$. Luego, son aplicados los tres teoremas antes mencionados obteniendo las fórmulas asintóticas de las soluciones del sistema correspondiente en cada caso. Mediante las transformaciones inversas se obtienen las expresiones explícitas de las soluciones de la ecuación original (5). Estos resultados están presentados como teoremas, los que son aplicados en distintos ejemplos (ver Eastham [6, cap.2]). Entre los ejemplos de $p(t)$ y $q(t)$ en la ecuación (5) se encuentran las funciones t^α y $\exp(t^\alpha)$, con α constante, hasta algunas un poco más sofisticadas como $p(t) = 1$ y $q(t) = \psi^\beta(t)g(\psi(t))$, donde ψ es una función real, nunca nula con primera derivada absolutamente continua en un intervalo $[a, \infty)$, β constante no negativa y g una función periódica no nula.

El principal aporte en esta tesis se encuentra en el último capítulo donde desarrollamos un método algebraico, distinto de los ya mencionados, que muestra de manera desacoplada al vector solución de la ecuación (5).

Transformamos la ecuación original (5) en un sistema 2×2 asintóticamente diagonal de la forma (8), esto es,

$$Z'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}Z(t), \tag{11}$$

donde

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1 - \lambda_k, \lambda_2 - \lambda_k\}$$

para k fijo, con $k = 1, 2$.
La solución $\Psi(t)$ del sistema diagonal $Z' = \Lambda(t)Z$, bajo las condiciones de dicotomía del Teorema de Levinson (ver Coddington-Levinson [2, teo.8.1]), se escribe como suma de dos matrices

$$\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$$

donde $\Psi_1(t)$ contiene las columnas de $\Psi(t)$ cuyos coeficientes tienden a cero cuando $t \to \infty$ y $\Psi_2(t)$ contiene las columnas cuyos coeficientes son acotados inferiormente.
Se busca una solución φ_k de la ecuación (11) como solución de la ecuación integral

$$\varphi_k(t) = e_k + \int_{t_0}^{t} \Psi_1(t)\Psi^{-1}(s)R(s)\varphi_k(s)ds - \int_{t}^{\infty} \Psi_2(t)\Psi^{-1}(s)R(s)\varphi_k(s)ds,$$

para $k = 1, 2$, donde e_k es el vector canónico en $\mathbb{R}^2$ cuya k-ésima coordenada es 1 y el resto es cero.
Reemplazando las matrices respectivas y finalmente desacoplando obtenemos las coordenadas de las soluciones φ_k $(k = 1, 2)$, para tres casos posibles:

1. $\int_0^t \mathcal{D}_{21}(s)\, ds \to -\infty$ cuando $t \to \infty$.
2. $\int_0^t \mathcal{D}_{21}(s)\, ds \to \infty$ cuando $t \to \infty$.
3. $|\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{D}_{21}(s)\, ds| < K$, con K constante y $t_2 \geq t_1 \geq 0$,

donde $\mathcal{D}_{21}(t) = \mathrm{Re}\{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\}$.
Tomando el primer caso, se tiene que las coordenadas de las soluciones $\varphi_1 = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ y $\varphi_2 = (\omega_1, \omega_2)$ satisfacen las siguientes ecuaciones integrales desacopladas:

$$\begin{aligned}
\upsilon_1(t) &= 1 - \int_t^{\infty} r_{12}(\tau) \left(\int_{\tau_0}^{\tau} e_{21}^{+}(s, \tau) r_{21}(s) \upsilon_1(s)\, ds \right) d\tau, \\
\upsilon_2(t) &= \int_{t_0}^{t} e_{21}^{+}(\tau, t) r_{21}(\tau)\, d\tau \\
&\quad - \int_{t_0}^{t} e_{21}^{+}(\tau, t) r_{21}(\tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} r_{12}(s) \upsilon_2(s)\, ds \right) d\tau
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= -\int_t^\infty e_{12}^+(\tau,t)r_{12}(\tau)d\tau \\
&\quad +\int_t^\infty e_{12}^+(\tau,t)r_{12}(\tau)\left(\int_\tau^\infty r_{21}(s)\omega_1(s)\,ds\right)d\tau \\
\omega_2(t) &= 1+\int_t^\infty r_{21}(\tau)\left(\int_\tau^\infty e_{12}^+(s,\tau)r_{12}(s)\omega_2(s)\,ds\right)d\tau,
\end{aligned}$$

donde r_{ij} son los coeficientes de la matriz R y

$$e_{ij}^{\pm}(t_0,t_1)=\exp\left(\pm\int_{t_0}^{t_1}[\lambda_i(s)-\lambda_j(s)]\,ds\right).$$

De aquí, resultan dos lemas que establecen las condiciones de integrabilidad sobre las funciones

$$\mathcal{R}_1(t)=r_{12}(t)\mathcal{L}_1(r_{21},t),\quad \mathcal{L}_1(r_{21},t)=\int_{t_0}^t |r_{21}(s)\,e_{21}^+(s,t)|ds$$

y

$$\mathcal{R}_2(t)=r_{21}(t)\mathcal{L}_2(r_{12},t),\quad \mathcal{L}_2(r_{21},t)=\int_t^\infty |r_{12}(s)\,e_{12}^+(s,t)|ds,$$

para que existan soluciones $Z_k=\varphi_k$ del sistema (11). Estas condiciones son precisamente que $\mathcal{R}_1(t)$ y $\mathcal{R}_2(t)$ deben pertenecer a $L^1(dt)$.

Mediante las transformaciones inversas, se obtienen las fórmulas de las soluciones asintóticas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación original (5), con sus respectivas funciones errores:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{\int^t\lambda_1}\left(1+O\left(\int_t^\infty\mid\mathcal{R}_1(\tau)\mid d\tau+\mathcal{L}(r_{21},t)\right)\right), \\
px_1'(t) &= (pq)^{1/2}(t)e^{\int^t\lambda_1}\left(1+O\left(\int_t^\infty\mid\mathcal{R}_1(\tau)\mid d\tau+\mathcal{L}(r_{21},t)\right)\right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= e^{\int^t\lambda_2}\left(1+O\left(\exp\left[\int_t^\infty\mid\mathcal{R}_2(\tau)\mid d\tau\right]-1+\mathcal{L}(r_{12},t)\right)\right), \\
px_2'(t) &= -(pq)^{1/2}(t)e^{\int^t\lambda_2}\left(1+O\left(\exp\left[\int_t^\infty|\mathcal{R}_2(\tau)|d\tau\right]-1+\mathcal{L}(r_{12},t)\right)\right).
\end{aligned}$$

Los errores obtenidos en la aproximación de las soluciones a través de este nuevo método son mejores que las fórmulas asintóticas que aparecen en el Teorema de Levinson y son dados de manera explícita en cada fórmula. Esta es una ventaja importante y una particular diferencia con respecto a los otros métodos desarrollados en el Capítulo 1.
Al final del Capítulo 2, los resultados obtenidos son aplicados a los distintos sistemas del Capítulo 1, llegando a fórmulas asintóticas similares a las obtenidas por Levinson y Hartman-Wintner.

Capítulo 1

Ecuación de Segundo Orden

Toda la teoría que se expondrá tanto en este capítulo como en el siguiente, se desarrollará en torno al estudio de la ecuación de segundo orden

$$\{p(t)x'(t)\}' - q(t)x(t) = 0. \tag{1.1}$$

Para facilitar el trabajo con esta ecuación, la expresaremos como un sistema matricial de la forma

$$Y'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}\, Y(t).$$

A este último sistema se le aplicarán distintas técnicas, que involucran a la variable independiente t o simplemente son transformaciones de tipo algebraicas, con las que obtendremos nuevos sistemas asintóticamente diagonales a los que se le aplicarán los teoremas de Levinson, de Hartman-Wintner y de Eastham, que son mostrados en la siguiente sección. Con las soluciones obtenidas, mediante transformaciones inversas, estableceremos las fórmulas asintóticas de las soluciones de la ecuación de segundo orden (2.1).

1.1. Preliminares

Teoremas ya conocidos como los de Levinson [6, teo.1.3.1], Hartman-Wintner [6, teo.1.5.1] y uno de Eastham [6, teo.1.6.1], que aparecerán constantemente en el desarrollo de éste y el siguiente capítulo, se expondrán en esta sección. Cada uno de estos teoremas entregan fórmulas asintóticas de las soluciones del sistema $n \times n$: $Y'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}Y(t)$. El error de cada solución al aplicar el Teorema de Levinson será detallado al final de esta sección.

1.1.1. Teoremas asintóticos de Levinson, de Hartman-Wintner y de Eastham

Consideremos el sistema

$$Y'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}Y. \tag{1.2}$$

El Teorema de Levinson resuelve sistemas asintóticamente diagonales de la forma (1.2) mediante la condición de que la matriz $R(t)$ sea pequeña en el sentido de que esta matriz debe pertenecer a L^1, es decir,

$$\int_a^\infty |R(t)|dt < \infty.$$

Se agrega a esta situación una condición de dicotomía respecto a la integral de la diferencia de los valores propios de $\Lambda(t)$.

Teorema 1.1.1. (Levinson [6, teo.1.3.1] y [12])
Sea $\Lambda(t)$ una matriz diagonal $n \times n$

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\},$$

la cual satisface la siguiente condición.
Para cada par de enteros i, j en $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(i \neq j)$ y para todo t y x tal que $a \leq x \leq t < \infty$, se tiene

(1)

$$\int_x^t \operatorname{Re}\{\lambda_i(\sigma) - \lambda_j(\sigma)\}d\sigma \leq K_1 \tag{1.3}$$

o

(2)

$$\int_x^t \operatorname{Re}\{\lambda_i(\sigma) - \lambda_j(\sigma)\}d\sigma \geq K_2 \tag{1.4}$$

donde K_1 y K_2 son constantes.
Sea la matriz $R(t)$ de tamaño $n \times n$ tal que

$$\int_a^\infty |R(t)|dt < \infty. \tag{1.5}$$

Entonces, cuando $t \to \infty$, el sistema

$$Y'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}Y(t)$$

tiene soluciones $Y_k(t)$ $(1 \leq k \leq n)$ con la forma asintótica

$$Y_k(t) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^t \lambda_k(\sigma)d\sigma\right). \tag{1.6}$$

En lo que sigue mostramos una forma fuerte de la condición de dicotomía, que es muy útil, siempre y cuando, sea fácil su verificación. Esta forma de probar la condición de dicotomía según Teorema de Levinson se usará constantemente en lo que sigue de este capítulo.

Para cada par (i, j), *sea*

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\} = f(t) + g(t), \tag{1.7}$$

donde $g(t) \in L(a, \infty)$ *y* $f(t) \geq 0$ *en* $[a, \infty)$ *o* $f(t) \leq 0$ *en el mismo intervalo.*

El teorema que enunciamos a continuación es de Hartman-Wintner el cual obtiene fórmulas asintóticas de las soluciones del sistema (1.2) bajo condiciones similares, en cierto sentido, a las del Teorema de Levinson, pero a la vez con importantes diferencias. En este caso la condición de dicotomía sobre los coeficientes de la matriz diagonal Λ se hace más fuerte que la anterior. La condición de integrabilidad (1.5) en Levinson es reemplazada por $R(t) \in L^m$ con $1 < m \leq 2$.

Teorema 1.1.2. (Hartman-Wintner [6, teo.1.5.1] y [11])
Consideremos la matriz diagonal $\Lambda(t)$ *de tamaño* $n \times n$

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$$

y $\delta > 0$ *una constante tal que*

$$|\operatorname{Re}\{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\}| \geq \delta, \tag{1.8}$$

en cierto intervalo $[a, \infty)$, *para cada par distinto de enteros* i, j *en* $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Sea la matriz* $R(t)$ *de tamaño* $n \times n$ *tal que*

$$\int_a^\infty |R(t)|^m dt < \infty \tag{1.9}$$

para algún m *tal que* $1 < m \leq 2$. *Entonces, cuando* $t \to \infty$, *el sistema (1.2) tiene soluciones* $Y_k(x)$ $(1 \leq k \leq n)$ *con la forma asintótica*

$$Y_k(t) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^t (\lambda_k(\sigma) + r_{kk}(\sigma))\, d\sigma\right), \tag{1.10}$$

donde r_{kk} *es el coeficiente diagonal de la matriz* $R(t)$.

El siguiente teorema que enunciamos es el Teorema de Eastham. Las condiciones impuestas sobre el sistema (1.2) piden que la matriz R debe ser pequeña en comparación a la matriz Λ en el sentido de (1.11) y la condición integral sobre R que aparecen tanto en el Teorema de Levinson como en el Teorema de Hartman-Wintner está dirigida ahora a la matriz R', la derivada de R.

Teorema 1.1.3. (Eastham [6, teo.1.6.1])
Consideremos una matriz diagonal $\Lambda(t)$ de tamaño $n \times n$,

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$$

en el cual $\lambda_i(t) - \lambda_j(t) \neq 0$ en algún intervalo $[a, \infty)$ para cada par de enteros $i \neq j$ en $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sea la matriz cuadrada $R(t)$ de tamaño $n \times n$ tal que

$$\{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\}^{-1} R(t) \to 0, \ (t \to \infty) \tag{1.11}$$

$$(\{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\}^{-1} R(t))' \in L^1(a, \infty) \tag{1.12}$$

para cada par de enteros distintos i y j en $\{1, 2, \ldots, n\}$. Además, suponemos que los valores propios μ_k $(1 \leq k \leq n)$ de $\Lambda(t) + R(t)$ satisfacen la condición de dicotomía del Teorema de Levinson. Entonces, cuando $t \to \infty$, el sistema (1.2) tiene soluciones $Y_k(t)$ con la forma asintótica

$$Y_k(t) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^t \mu_k(\sigma)\, d\sigma\right). \tag{1.13}$$

1.1.2. Error en la solución asintótica del Teorema de Levinson.

Nos interesa calcular el error de las soluciones obtenidas en el Teorema 1.1.1 de Levinson, para saber que tan buena es nuestra aproximación al aplicar este teorema a sistemas asintóticamente diagonales de la forma (1.2). Por condición (1.5) suponemos que para $t \geq t_0$

$$e^K \int_{t_0}^{\infty} |R(t)|\, dt < \frac{1}{2}, \tag{1.14}$$

donde $K = \operatorname{Max}\{|K_1|, |K_2|\}$ y K_1, K_2 son las constantes de la condición de dicotomía en el Teorema 1.1.1 de Levinson de la sección 1.1.1.
La sustitución

$$Y(t) = Z(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds\right),$$

transforma (1.2) en el sistema

$$Z'(t) = \{\Lambda_1(t) + R(t)\}Z(t), \tag{1.15}$$

donde

$$\tilde{\Lambda}(t) = \Lambda(t) - \lambda_k I_n,$$

siendo I_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$.
Sea $\Psi(t)$ la matriz diagonal

$$\Psi(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \tilde{\Lambda}(s)ds\right]$$

tal que

$$\Psi'(t) = \tilde{\Lambda}(t)\Psi(t).$$

Escribimos Ψ como la suma de dos matrices diagonales

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

donde Ψ_k $(k = 1, 2)$ contiene todas las columnas de índice j de la matriz Ψ que pertenezcan a H_1 o H_2 respectivamente, esto es,

$$\begin{aligned} j \in H_1 \quad \text{si} \quad & \int_0^t \mathrm{Re}\{\lambda_j - \lambda_k\}(\tau)d\tau \to -\infty \text{ cuando } t \to \infty \\ \text{y} \quad & \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\{\lambda_j - \lambda_k\}(\tau)d\tau < K, \text{ con } K \text{ constante y } t_2 \geq t_1 \geq 0 \\ j \in H_2 \quad \text{si} \quad & \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\{\lambda_j - \lambda_k\}(\tau)d\tau > -K, \text{ con } t_2 \geq t_1 \geq 0 \text{ y } K \text{ constante.} \end{aligned}$$

De la condición impuesta a H_2 cuando $t_0 \leq t \leq \tau < \infty$ se tiene que

$$|\Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau)| \leq c,$$

con c constante.

Consideremos la siguiente ecuación integral

$$\varphi(t) = e_k + \int_{t_0}^{t} \Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)R(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \int_{t}^{\infty} \Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau)R(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \tag{1.16}$$

con e_k el vector canónico. Se quiere que (1.16) tenga solución φ. Es claro que una solución φ satisface el sistema (1.15), ya que, (1.16) se obtiene de la fórmula usual de las soluciones de un sistema diferencial lineal, con la

diferencia de la aparición de un límite superior infinito en la segunda integral, como una consecuencia de estar tratando con la convergencia de soluciones cuando $t \to \infty$.
Aplicamos el método de aproximaciones sucesivas a (1.16), tomando el primer elemento φ^0 de la sucesión $\{\varphi^j\}$ igual a cero y $\varphi_1 = e_k$. Entonces,

$$\varphi^{j+1}(t) = e_k + \int_{t_0}^{t} \Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)R(\tau)\varphi^j(\tau)\,d\tau - \int_{t}^{\infty} \Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau)R(\tau)\varphi^j(\tau)\,d\tau \tag{1.17}$$

y para $t \geq t_0$,

$$|\varphi^1(t) - \varphi^0(t)| = 1. \tag{1.18}$$

Cada elemento h_l $(l \in I_1)$ de la matriz diagonal $|\Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)|$ es de la forma

$$|h_l| = \exp\left(\int_{\tau}^{t} \mathrm{Re}(\lambda_l - \lambda_k)(s)\,ds\right)$$

o es cero. Entonces, para $t_0 \leq \tau \leq t$

$$|\Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)R(\tau)| \leq e^K\,|R(\tau)|$$

y de la misma forma tenemos para $\tau \geq t$ que

$$|\Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau)R(\tau)| \leq e^K\,|R(\tau)|.$$

De (1.17) se tiene

$$|\varphi^{j+1}(t) - \varphi^j(t)| \leq e^K \int_{t_0}^{\infty} |R(\tau)||\varphi^j(t) - \varphi^{j-1}(t)|\,d\tau.$$

Usando (1.14) y (1.18), por inducción se prueba que

$$|\varphi^{j+1}(t) - \varphi^j(t)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

De aquí se deduce que la convergencia de $\{\varphi^j\}$ es uniforme en cada subintervalo de $[t_0, \infty)$. Entonces,

$$|\varphi(t)| \leq 2.$$

De (1.16) se tiene

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)-e_k| &\leq \int_{t_0}^{t}|\Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)||R(\tau)||\varphi(\tau)|d\tau+\int_{t}^{\infty}|\Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau)||R(\tau)||\varphi(\tau)|d\tau \\
&\leq 2\int_{t_0}^{t}|\Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)||R(\tau)|d\tau+2c\int_{t}^{\infty}|R(\tau)|d\tau \\
&= 2\left(\int_{t_0}^{t}|\Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)||R(\tau)|d\tau+c\int_{t}^{\infty}|R(\tau)|d\tau\right) \\
&= O\left(L_0(R)(t)+\int_{t}^{\infty}|R(\tau)|d\tau\right),
\end{aligned}$$

donde

$$L_0(R)(t)=\int_{t_0}^{t}|\Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)||R(\tau)|d\tau,$$

es tal que $L_0(R)(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$.
Entonces, $\varphi=\varphi_k$ satisface

$$\varphi_k=e_k+O\left(L_0(R)(t)+\int_{t}^{\infty}|R(\tau)|d\tau\right)$$

y por lo tanto, para (1.2) existe un sistema fundamental de soluciones $\{Y_k(t)\}_{k=1}^{n}$ tales que, cuando $t\to\infty$, satisface

$$Y_k(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)\,ds\right)\left[e_k+O\left(L_0(R)(t)+\int_{t}^{\infty}|R(\tau)|d\tau\right)\right]. \quad (1.19)$$

La expresión (1.19) es una fórmula asintótica con una estimación de los errores según las condiciones del Teorema de Levinson.

1.2. Ecuación de segundo orden

Consideramos la ecuación de segundo orden

$$\{p(t)x'(t)\}'-q(t)x(t)=0, \quad (1.20)$$

donde las funciones p y q son funciones distintas de cero y no necesariamente toman valores reales.
Expresamos de manera natural (1.20) como un sistema diferencial de primer orden

$$X'=AX \quad (1.21)$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ px' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ q & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

Hasta aquí, la condición básica que deben satisfacer $1/p$ y q es la integrabilidad local sobre un intervalo $[a, \infty)$.

Queremos transformar el sistema (1.21) en un sistema asintóticamente diagonal de la forma

$$Y'(t) = \{\Lambda(t) + R(t)\}\, Y(t) \tag{1.23}$$

tomando

$$X = TY, \tag{1.24}$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (pq)^{1/2} & -(pq)^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

es la matriz cuyas columnas son los vectores propios asociados a los valores propios de A.

Entonces el sistema (1.21) se transforma en uno de la forma (1.23), donde la matriz diagonal $\Lambda(t)$ es

$$\Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}\{(q/p)^{1/2}, -(q/p)^{1/2}\}$$

y la matriz $R(t)$ es

$$R = -T^{-1}T' = -\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Acomodando el sistema (1.23) tenemos que

$$Y'(t) = \{\Lambda_1(t) + R_1(t)\}Y(t), \tag{1.26}$$

donde Λ_1 es la matriz diagonal

$$\Lambda_1(t) = \begin{pmatrix} (q/p)^{1/2} - r_1(t) & 0 \\ 0 & -(q/p)^{1/2} - r_1(t) \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

y R_1 es la matriz con diagonal cero

$$R_1(t) = r_1(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.28}$$

con

$$r_1 = \frac{1}{4}(pq)'/pq. \tag{1.29}$$

Un artículo interesante sobre el tema es "The Liouville-Green asymptotic theory for second order differential equations: A new approach and some extensions" (ver Eastham [4]) donde se estudia extensivamente la ecuación $\{p(t)y'(t)\}' + q(t)y(t) = 0$.

1.3. Fórmulas asintóticas de la ecuación de segundo orden obtenidas de los teoremas de Hartman-Wintner y de Eastham.

Los teoremas de Hartman-Wintner (Teo. 1.1.2) y de Eastham (Teo. 1.1.3) enunciados al comienzo de este capítulo, se aplicarán al sistema (1.23), obteniendo las fórmulas asintóticas de las soluciones en cada caso.

Teorema 1.3.1. *Supongamos que $p(t)$ y $q(t)$ son funciones no nulas y con primera derivadas absolutamente continuas en $[a,\infty)$.*
Sea

$$|\operatorname{Re}\{(q/p)^{1/2}\}| \geq \delta \tag{1.30}$$

con $\delta > 0$, en el intervalo $[a,\infty)$.
Además, para $1 < m \leq 2$, se satisface que

$$\frac{(pq)'}{pq} \in L^m(a,\infty) \tag{1.31}$$

Entonces, la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1+o(1)\}(pq)^{-1/4}(t)\exp\left(\int_a^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right), \\ px_1'(t) &= \{1+o(1)\}(pq)^{1/4}(t)\exp\left(\int_a^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \{1+o(1)\}(pq)^{-1/4}(t)\exp\left(-\int_a^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right), \\ px_2'(t) &= \{1+o(1)\}(pq)^{1/4}(t)\exp\left(-\int_a^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right). \end{aligned}$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 1.1.2 de Hartman-Wintner al sistema (1.26). Los valores propios de la matriz diagonal $\Lambda_1(t)$ son

$$\lambda_1(t) = (q/p)^{1/2}(t) - r_1(t) \quad \text{y} \quad \lambda_2(t) = -(q/p)^{1/2}(t) - r_1(t).$$

Luego, por (1.30) y para $\delta > 0$,

$$|\operatorname{Re}\{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\}| = 2|\operatorname{Re}\left\{(q/p)^{1/2}(t)\right\}| \geq 2\delta.$$

Además, (1.31) es la condición (1.9) del Teorema 1.1.2. De esta manera, todas las condiciones del Teorema son satisfechas. Por lo tanto, existen soluciones $Y_k(t)$ $(k = 1, 2)$ de la forma (1.10), esto es,

$$Y_k(t) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^t \pm(q/p)^{1/2}(\tau) - r_{1_{kk}}(\tau)d\tau\right).$$

Como en la matriz R_1 los elementos de la diagonal $r_{1_{kk}}$ son ceros $(k = 1, 2)$, tenemos que las soluciones son de la forma

$$Y_k(t) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^t \pm(q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right).$$

Notamos que

$$\int r_1(t)dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(pq)'}{pq}(t)dt = \ln(pq)^{-1/4}(t) + const. \tag{1.32}$$

Usando este resultado, la solución Y_k se transforma en

$$Y_k(t) = \{e_k + o(1)\}(pq)(t)^{-1/4} \exp\left(\int_a^t \pm(q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right).$$

Finalmente, de (1.25) y (1.24) se concluye que

$$x_1(t) = \{1 + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t) \exp\left(\int_a^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right)$$

y

$$px_1'(t) = \{1 + o(1)\}(pq)^{1/4}(t) \exp\left(\int_a^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right).$$

El caso $k = 2$ es análogo al de $k = 1$, la única diferencia de $x_2(t)$ con la solución $x_1(t)$ es la aparición de un signo negativo en la integral del término exponencial. □

Teorema 1.3.2. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones no nulas con primeras derivadas absolutamente continuas en $[a, \infty)$, tales que*

$$(pq)'/pq = o\left\{(q/p)^{1/2}\right\} \tag{1.33}$$

y

$$\{p^{-1/2}q^{-3/2}(pq)'\}' \in L^1(a, \infty). \tag{1.34}$$

Suponemos que

$$\mathrm{Re}\left\{(q/p + r_1^2)^{1/2}\right\} \tag{1.35}$$

tiene un solo signo en $[a, \infty)$, *donde*

$$r_1 = \frac{1}{4}(pq)'/pq.$$

Entonces, ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ *y* $x_2(t)$ *tales que*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1 + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t) \exp\left(\int_a^t (q/p + r_1^2)^{1/2}(\tau)d\tau\right), && (1.36)\\ px_1'(t) &= \{1 + o(1)\}(pq)^{1/4}(t) \exp\left(\int_a^t (q/p + r_1^2)^{1/2}(\tau)d\tau\right) && (1.37)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \{1 + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t) \exp\left(-\int_a^t (q/p + r_1^2)^{1/2}(\tau)d\tau\right),\\ px_2'(t) &= \{1 + o(1)\}(pq)^{1/4}(t) \exp\left(-\int_a^t (q/p + r_1^2)^{1/2}(\tau)d\tau\right).\end{aligned}$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 1.1.3 al sistema (1.26). Debido a las fórmulas (1.27) y (1.28), las condiciones (1.11) y (1.12) son equivalentes a (1.33) y (1.34).

Como los valores propios de $\Lambda_1 + R_1$ en (1.26) son

$$\mu_1 = -\frac{1}{4}\frac{(pq)'}{pq} + \left(\frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 + \frac{q}{p}\right)^{1/2}$$

y

$$\mu_2 = -\frac{1}{4}\frac{(pq)'}{pq} - \left(\frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 + \frac{q}{p}\right)^{1/2},$$

entonces,

$$\mathrm{Re}\{\mu_1(t) - \mu_2(t)\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{(q/p + r_1^2)^{1/2}(t)\right\}$$

y de esta manera (1.35) es la condición de dicotomía del Teorema de Levinson para $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$. Por lo tanto, el sistema (1.26) satisface las condiciones del Teorema 1.1.3, probando la existencia de soluciones Y_k para $k = 1, 2$, tales que

$$Y_k(t) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^t \mu_k(s)ds\right).$$

Reemplazando μ_k en $Y_k(t)$ y por (1.32), tenemos para $k = 1$ que

$$Y_1(t) = \{e_k + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t) \exp\left(\int_a^t \left(\frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 + \frac{q}{p}\right)^{1/2} ds\right).$$

Finalmente, de (1.25), (1.24) y (1.21) obtenemos las fórmulas (1.36) y (1.37). De manera similar, usando el segundo valor propio $\mu_2(t)$ obtenemos la fórmula asintótica de la solución $x_2(t)$. □

1.4. Transformación de la Variable Independiente.

Supongamos $q > 0$ y $p > 0$ en la ecuación (1.20) y sea

$$s = \int^t (q/p)^{1/2}, \tag{1.38}$$

una transformación de la variable independiente t, tal que, s tiende a infinito cuando t crece. Entonces, (1.38) transforma el sistema (1.23) en

$$\dot{Y}(s) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + h(s)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\} Y(s), \tag{1.39}$$

donde $\dot{Y}(s) = \frac{d}{ds}Y(t)$ y

$$h = \frac{r_1}{(q/p)^{1/2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(q/p)^{-1/2}. \tag{1.40}$$

Notamos que si $q < 0$, la matriz diagonal toma valores complejos, es decir, toma la forma $\text{diag}\{i, -i\}$.
Reescribiendo el sistema (1.39), tenemos que

$$\dot{Y}(s) = \left\{\begin{pmatrix} 1 - h(s) & 0 \\ 0 & -1 - h(s) \end{pmatrix} + h(s)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} Y(s) \tag{1.41}$$

y denotamos a la matriz diagonal de (1.41) por

$$\hat{\Lambda}(s) = \begin{pmatrix} 1 - h(s) & 0 \\ 0 & -1 - h(s) \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

y a la matriz de diagonal cero por

$$\hat{R}(s) = h(s)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.43}$$

El beneficio de usar la transformación (1.38) en el sistema (1.23) es la obtención de una matriz diagonal con coeficientes constantes. Esto facilita la verificación de la condición de dicotomía (1.7) según Teorema 1.1.1 de Levinson y Teorema 1.1.2 de Hartman-Wintner.

1.4.1. Fórmulas asintóticas según Transformación de la Variable Independiente

Teorema 1.4.1. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones distintas de cero, del mismo signo y con primera derivada absolutamente continua en $[b,\infty)$, tales que*

$$[(pq)']^m/p^{(m+1)/2}q^{(3m-1)/2} \in L^1(b,\infty) \tag{1.44}$$

para algún m en $(1,2]$. Entonces, la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$x_1(t) = \{1+o(1)\}(pq)^{-1/4}(t)\exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right), \tag{1.45}$$

$$px_1'(t) = \{1+o(1)\}(pq)^{1/4}(t)\exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \tag{1.46}$$

y

$$x_2(t) = \{1+o(1)\}(pq)^{-1/4}(t)\exp\left(-\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right),$$

$$px_2'(t) = \{1+o(1)\}(pq)^{1/4}(t)\exp\left(-\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right).$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 1.1.2 de Hartman-Wintner al sistema (1.41). Sean $\hat{\lambda}_1(s) = 1-h(s)$ y $\hat{\lambda}_2(s) = -1-h(s)$ los valores propios de $\hat{\Lambda}(s)$. Entonces, como

$$\mathrm{Re}\{\hat{\lambda}_1(s)-\hat{\lambda}_2(s)\} = 2$$

se verifica la condición (1.8) para todo $s \in [a,\infty)$.
Si

$$h = \frac{1}{4}\frac{(pq)'}{pq}(q/p)^{-1/2},$$

entonces por (1.38), para $1 < m \leq 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty |h(s)|^m ds &= \frac{1}{4^m}\int_b^\infty \left|\frac{(pq)'(t)}{(pq)(t)}(q/p)^{-1/2}(t)\right|^m (q/p)^{1/2}(t)dt \\
&= \frac{1}{4^m}\int_b^\infty \frac{|\,(pq)'(t)\,|^m}{(pq)^m(t)}(q/p)^{-m/2}(t)(q/p)^{1/2}(t)dt \\
&= \frac{1}{4^m}\int_b^\infty \frac{|\,(pq)'(t)\,|^m}{p^{(m+1)/2}(t)q^{(3m-1)/2}(t)}dt.
\end{aligned}$$

La segunda condición (1.9) se satisface, siempre y cuando, la integral de la derecha sea finita, es decir, si se satisface (1.44). De aquí, usando Teorema 1.1.2 se desprende la existencia de vectores solución $Y_k(s)$ $(k = 1, 2)$ de la forma (1.10). Por (1.43) la matriz $\hat{R}(s)$ del sistema (1.41) tiene diagonal cero, por lo tanto $r_{kk}(s) = 0$ $(k = 1, 2)$. Como ya conocemos los valores propios $\hat{\lambda}_k$ de la matriz diagonal $\hat{\Lambda}$, entonces para $k = 1$

$$Y_1(s) = \{e_1 + o(1)\} \exp\left(\int_a^s [1 - h(\sigma)]\, d\sigma\right).$$

Desarrollando esta última expresión, utilizando (1.38), se tiene que

$$\begin{aligned}
Y_1(s) &= \{e_1 + o(1)\} \exp\left(\int_a^s (1 - h(\sigma))\, d\sigma\right) \\
Y_1(t) &= \{e_1 + o(1)\} \exp\left(\int_b^s \left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\varsigma)(q/p)^{-1/2}(\varsigma)\right)(q/p)^{1/2}(\varsigma)\, d\varsigma\right) \\
Y_1(t) &= \{e_1 + o(1)\} \exp\left(\int_b^t \left((q/p)^{1/2}(\varsigma) - \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\varsigma)\right) d\varsigma\right).
\end{aligned}$$

Integrando obtenemos

$$Y_1(t) = \{e_1 + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t) \exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2}(\varsigma) d\varsigma\right).$$

Si denotamos por u_1 y v_1 a las coordenadas del vector $Y_1(t)$. Entonces, esta solución puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1)\right\}(pq)^{-1/4} \exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2} d\varsigma\right) \\
&= (pq)^{-1/4} \begin{pmatrix} \{1 + o(1)\} \exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2} d\varsigma\right) \\ o(1) \exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2} d\varsigma\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De (1.22), (1.25) y (1.24) deducimos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ p x_1' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (pq)^{1/2} & -(pq)^{1/2} \end{pmatrix} \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1)\right\} \\
&\quad \times (pq)^{-1/4} \exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2} d\varsigma\right) \\
&= \begin{pmatrix} (pq)^{-1/4}\{1 + o(1)\} \exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2} d\varsigma\right) \\ (pq)^{1/4}\{1 + o(1)\} \exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2} d\varsigma\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y de aquí obtenemos la fórmulas asintóticas (1.45) y (1.46), para $k = 1$, de las soluciones de la ecuación (1.20). Procediendo de la misma manera que antes con el valor propio $\hat{\lambda}_2(s) = -1 - h(s)$ en (1.10) se obtienen las fórmulas respectivas para $x_2(t)$ y $px_2'(t)$. □

Ahora veremos algunos ejemplos de funciones p y q de la ecuación (1.20) que satisfacen las condiciones del Teorema 1.4.1.

Ejemplo 1.4.2. Si en la ecuación (1.20), $p(t) = t^\alpha$ y $q(t) = t^\beta$, donde α y β son constantes reales, entonces, la m-condición de integrabilidad (1.44) para $1 < m \leq 2$ se expresa a través de la desigualdad

$$\alpha - \beta < 2. \tag{1.47}$$

Ejemplo 1.4.3. Si $p(t) = \exp(t^\alpha)$ y $q(t) = \exp(t^\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces (1.44) se reduce a la condición

$$\beta > \alpha > 0. \tag{1.48}$$

Además, si $\alpha = \beta$ se debe tener por m-condición de integrabilidad que

$$m(1 - \alpha) > 1,$$

para $1 < m \leq 2$.

Ejemplo 1.4.4. Sean

$$p(t) = t^\alpha f(t^\gamma), \; q(t) = t^\beta g(t^\eta)$$

donde f y g son funciones periódicas distintas de cero. Además, α, β, γ y η son constantes reales. Entonces, la m-condición de integrabilidad (1.44) para $1 < m \leq 2$ se expresa a través de la desigualdad

$$\alpha - \beta + \frac{2m}{m-1}\text{Max}\{\gamma, \eta, 0\} < 2. \tag{1.49}$$

Si $m = 2$, (1.49) se reduce a la condición

$$\alpha - \beta + 4\text{Max}\{\gamma, \eta, 0\} < 2. \tag{1.50}$$

El siguiente teorema resulta de la aplicación del Teorema 1.1.3 al sistema (1.41).

Teorema 1.4.5. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones nunca nulas, positivas y con primeras derivadas absolutamente continuas en $[b,\infty)$.*
Si además

$$h(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{p^{1/2}q^{3/2}}\right)(t)\to 0,\quad (t\to\infty) \tag{1.51}$$

y

$$h'(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{p^{1/2}q^{3/2}}\right)'(t)\in L^1(b,\infty), \tag{1.52}$$

entonces la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$x_1(t)=\{1+o(1)\}(pq)^{-1/4}(t)\exp\left(\int_b^t\left[\left(\frac{q}{p}\right)(\tau)+\frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right]^{1/2}d\tau\right), \tag{1.53}$$

$$px_1'(t)=\{1+o(1)\}(pq)^{1/4}(t)\exp\left(\int_b^t\left[\left(\frac{q}{p}\right)(\tau)+\frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right]^{1/2}d\tau\right) \tag{1.54}$$

y

$$x_2=\{1+o(1)\}(pq)^{-1/4}(t)\exp\left(-\int_b^t\left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau)+\frac{1}{16}\left[\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right]^2\right)^{1/2}d\tau\right), \tag{1.55}$$

$$px_2'=\{1+o(1)\}(pq)^{1/4}(t)\exp\left(-\int_b^t\left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau)+\frac{1}{16}\left[\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right]^2\right)^{1/2}d\tau\right). \tag{1.56}$$

Demostración. Este teorema resulta de aplicar Teorema 1.1.3 al sistema (1.41). Por (1.40) y (1.38) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}h(s) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'(t)}{(pq)(t)}\right)(q/p)^{-1/2}(t)\\ &= \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\frac{(pq)'(t)}{p^{1/2}(t)q^{3/2}(t)}\end{aligned}$$

Luego, (1.51) es la condición (1.11) en la variable t del Teorema 1.1.3 . Para obtener (1.12) usamos la regla de la cadena

$$\frac{dh}{ds}=\frac{dh}{dt}\frac{dt}{ds}$$

y (1.38). Se tiene de esta forma

$$\begin{aligned}\frac{dh}{ds} &= \frac{dh}{dt}(q/p)^{-1/2}\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{(pq)'}{(pq)}(q/p)^{-1/2}\right)(q/p)^{-1/2}\\ &= \left(\frac{(pq)'}{p^{1/2}q^{3/2}}\right)'(q/p)^{-1/2},\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_a^\infty |\dot{h}(s)|ds &= \int_b^\infty \left|\left(\frac{(pq)'}{p^{1/2}q^{3/2}}\right)'(q/p)^{-1/2}\right|(q/p)^{1/2}dt\\ &= \int_b^\infty \left|\left(\frac{(pq)'}{p^{1/2}q^{3/2}}\right)'\right|dt.\end{aligned}$$

De esta última relación, usando la condición (1.52), se obtiene (1.12).
Si $\hat{\mu}_1(s) = -h(s) + (1+h^2(s))^{1/2}$ y $\hat{\mu}_2(s) = -h(s) - (1+h^2(s))^{1/2}$ son los valores propios de la matriz $\hat{\Lambda}(s) + \hat{R}(s)$ en el sistema (1.41), entonces por (1.51)

$$\mathrm{Re}\{\hat{\mu}_1(s) - \hat{\mu}_2(s)\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(1+h^2(s)\right)^{1/2}\right\} = 2\,\mathrm{Re}\{(1+o(1))^{1/2}\}. \quad (1.57)$$

Esto muestra que se tiene la condición de dicotomía según (1.7), ya que, la parte derecha de la expresión (1.57) tiene un signo en $[a,\infty)$. Entonces, las condiciones del Teorema 1.1.3 son satisfechas por el sistema (1.41), por lo tanto existen soluciones $Y_k(s)$ para $k = 1, 2$ de la forma

$$Y_k(s) = \{e_k + o(1)\}\exp\left(\int_a^s \hat{\mu}_k(\varsigma)d\varsigma\right). \quad (1.58)$$

Usando (1.38) se observa que para $k = 1$

$$Y_1(s) = \{e_1 + o(1)\}\exp\left(\int_a^s \left[-h(\varsigma) + \left(1+h^2(\varsigma)\right)^{1/2}\right]d\varsigma\right).$$

Escribiendo la solución $Y_1(s)$ respecto a la variable t

$$\begin{aligned}Y_1(t) &= \{e_1 + o(1)\}\\ &\quad\times\exp\left(\int_b^t \left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{p^{1/2}q^{3/2}}\right) + \left(1 + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{p^{1/2}q^{3/2}}\right)^2\right)^{1/2}\right\}(q/p)^{1/2}\,d\tau\right)\\ Y_1(t) &= \{e_1 + o(1)\}\\ &\quad\times\exp\left(\int_b^t -\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)d\tau + \int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2\right)^{1/2}d\tau\right).\end{aligned}$$

Integrando nos queda

$$Y_1(t) = \{e_1 + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t) \exp\left(\int_b^t \left\{\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2\right\}^{1/2} d\tau\right) \quad (1.59)$$

Finalmente, de (1.22), (1.25) y (1.24) se sigue que las fórmulas (1.53) y (1.54) corresponden a la solución $x_1(t)$ de la ecuación (1.20) y a $px_1'(t)$, respectivamente. Las solución para $k = 2$, se deduce procediendo de forma análoga usando el valor propio $\hat{\mu}_2$ y reemplazándolo en (1.58). La fórmula para $x_2(t)$ se diferencia de $x_1(t)$ en un signo negativo en la integral del factor exponencial, y está dada por (1.55). La fórmula de $px_2'(t)$ que se obtiene es (1.56).

□

Consideramos las mismas funciones p y q de los ejemplos dados para el Teorema 1.4.1, pero ahora le aplicaremos las condiciones del Teorema 1.4.5. Si escogemos $p(t)$ y $q(t)$ como en los Ejemplos 1.4.2 y 1.4.3, por (1.51) y (1.52) vemos que se obtienen respectivamente las mismas condiciones (1.47) y (1.48). En este último ejemplo, si tomamos $\alpha = \beta$ la condición cambia a $\alpha(= \beta) < 1$. Finalmente, aplicando las condiciones del Teorema 1.4.5 sobre el Ejemplo 1.4.4 se llega a la condición (1.50) que se obtiene tomando $m = 2$ en (1.49).

1.4.2. Fórmulas asintóticas para el caso particular $p \equiv 1$.

De los Teoremas 1.4.1 y 1.4.5 de la sección anterior se pueden obtener corolarios que dan fórmulas para las soluciones asintóticas tomando la función $p \equiv 1$ en la ecuación de segundo orden (1.20), esto es,

$$x'' - q(t)x = 0. \quad (1.60)$$

Corolario 1.4.6. *Supóngase que $q(t)$ es una función con primera derivada absolutamente continua en $[b, \infty)$, tal que*

$$\frac{(q')^m}{q^{(3m-1)/2}} \in L^1(b, \infty) \quad (1.61)$$

para m en $(1, 2]$. Entonces, la ecuación (1.60) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1 + o(1)\}q^{-1/4}(t) \exp\left(\int_b^t q^{1/2}(\tau)d\tau\right) && (1.62) \\ x_1'(t) &= \{1 + o(1)\}q^{1/4}(t) \exp\left(\int_b^t q^{1/2}(\tau)d\tau\right). && (1.63) \end{aligned}$$

La fórmula para $x_2(t)$ varía de la de $x_1(t)$ por un signo en la integral del término exponencial.

Corolario 1.4.7. *Sea $q(t)$ una función con primera derivada absolutamente continua en $[b,\infty)$, tal que*

$$q'/q^{3/2} = o(1) \ (t \to \infty) \tag{1.64}$$

y

$$\left(\frac{q'}{q^{3/2}}\right)' q^{-1/2} \in L^1(b,\infty). \tag{1.65}$$

Entonces la ecuación (1.60) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1+o(1)\}q^{-1/4}(t) \exp\left(\int_b^t \left[q+(q'/4q)^2\right]^{1/2}(\tau)d\tau\right) && (1.66)\\ x_1'(t) &= \{1+o(1)\}q^{1/4}(t) \exp\left(\int_b^t \left[q+(q'/4q)^2\right]^{1/2}(\tau)d\tau\right). && (1.67)\end{aligned}$$

La fórmula para $x_2(t)$ es similar a $x_1(t)$, pero con un signo negativo en la integral del factor exponencial.

1.5. Segunda Diagonalización

Se quiere transformar mediante una diagonalización a la matriz Λ_1 el sistema (1.41) en otro sistema asintóticamente diagonal de la forma

$$Y_2' = \{\Lambda_2 + R_2\}Y_2.$$

Como se está trabajando con matrices de tamaño 2×2 la aplicación de la segunda transformación diagonalizadora sobre el sistema inicial (1.21) no complica los cálculos, por lo que todavía se puede trabajar en el nuevo sistema obtenido. Lo bueno de este método es que no demandará colocar otra condición de las ya pedidas en el Teorema 1.1.1 de Levinson, el Teorema 1.1.2 de Hartman-Wintner y el Teorema 1.1.3 de Eastham. Los resultados de la aplicación de esta transformación serán nuevas condiciones que involucrarán derivadas de orden superior de las funciones p y q.

Este doble proceso de diagonalización es el caso de $m = 2$ en la sección 2 de repetidas diagonalizaciones del artículo "Repeated diagonalization and extended Liouville-Green asymptotic formulae" de Eastham [5].

Consideremos el sistema (1.39) escrito en la forma

$$\dot{Y}_1(s) = \{\Lambda_1(s) + R_1(s)\}\, Y_1(s), \tag{1.68}$$

donde Λ_1 y R_1 están dados por

$$\Lambda_1(s) = \begin{pmatrix} 1 - h(s) & 0 \\ 0 & -1 - h(s) \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

y

$$R_1(s) = h(s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.70}$$

y la función h es

$$h = \frac{1}{4} \frac{(pq)'}{(pq)} (q/p)^{-1/2}. \tag{1.71}$$

Definimos la matriz

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

con

$$a_1(s) = \left(\frac{h}{1 + (1 + h^2)^{1/2}} \right)(s). \tag{1.73}$$

Para que T_1 sea no singular en cierto intervalo suponemos que

$$a_1(s) \to 0 \tag{1.74}$$

cuando $s \to \infty$.
Si

$$Y_1 = T_1 Y_2, \tag{1.75}$$

es la transformación que diagonaliza a la matriz $\Lambda_1 + R_1$, entonces sustituyendo (1.75) en (1.68) se obtiene el sistema

$$\dot{Y}_2(s) = \left\{ T_1^{-1} \left[\Lambda_1(s) + R_1(s) \right] T_1 - T_1^{-1} \dot{T}_1 \right\} Y_2(s). \tag{1.76}$$

Desarrollando cada uno de las matrices de este sistema se tiene:

$$\begin{aligned} & T_1^{-1}(\Lambda_1 + R_1) T_1 \\ = & \frac{1}{1 + a_1^2} \begin{pmatrix} -h(1 + a_1^2) + (1 + 2a_1 h - a_1^2) & -2a_1 + h(1 - a_1^2) \\ -2a_1 + h(1 - a_1^2) & -h(1 + a_1^2) - (1 + 2a_1 h - a_1^2) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (1 + h^2)^{1/2} - h & 0 \\ 0 & -(1 + h^2)^{1/2} - h \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.77}$$

y

$$T_1^{-1}\dot{T}_1 = \frac{\dot{a}_1}{1+a_1^2}\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{1.78}$$

Finalmente, sumando los coeficientes de la diagonal de (1.78) con la matriz (1.77), el sistema (1.76) se reescribe como sigue:

$$\dot{Y}_2(s) = \{\Lambda_2(s) + R_2(s)\}\, Y_2(s), \tag{1.79}$$

donde

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} q_2-\rho_2 & 0 \\ 0 & -q_2-\rho_2 \end{pmatrix} \tag{1.80}$$

y

$$R_2 = r_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.81}$$

con

$$\rho_2 = h + \frac{a_1\dot{a}_1}{1+a_1^2}, \tag{1.82}$$

$$q_2 = (1+h^2)^{1/2} \tag{1.83}$$

y

$$r_2 = \frac{\dot{a}_1}{1+a_1^2}. \tag{1.84}$$

Reescribiendo el término r_2 en función de h, por (1.73) nos queda

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{h}}{1+h^2}\right). \tag{1.85}$$

En la siguiente sección trabajaremos con el nuevo sistema (1.79) para obtener fórmulas asintóticas de las soluciones de la ecuación (1.20).

1.5.1. Fórmulas asintóticas de la ecuación de segundo orden según el método Segunda Diagonalización.

Consideremos el sistema (1.79) donde Λ_2 y R_2 están definidos por (1.80) y (1.81). A este sistema se le aplicarán los Teoremas 1.1.1 de Levinson, 1.1.2 de Hartman-Wintner y 1.1.3 de Eastham de la sección 1.1 para obtener fórmulas asintóticas de las soluciones de la ecuación (1.20) bajo nuevas condiciones impuestas a p y q que incluyen hasta derivadas de tercer orden. Comenzamos con el establecimiento del resultado asintótico obtenido del Teorema 1.1.1 de Levinson.

Teorema 1.5.1. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones nunca nulas, de igual signo y con primeras derivadas absolutamente continuas en $[b,\infty)$, tales que*

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(q/p)^{-1/2}$$

y

$$h(t) \to 0 \quad (t \to \infty). \tag{1.86}$$

Supongamos que

$$\mathrm{Re}\left\{\left(1 + h^2(t)\right)^{1/2}\right\} \tag{1.87}$$

tiene un solo signo en $[b,\infty)$ y además

$$h'(t) \in L^1(b,\infty). \tag{1.88}$$

Entonces, cuando $t \to \infty$, la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1 + o(1)\}\left(1 + a_1(t)\right)\left(1 + a_1^2(t)\right)^{-1/2}(pq)^{-1/4}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p}(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}(\tau)\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right), \qquad (1.89) \\ px_1'(t) &= \{1 + o(1)\}\left(1 - a_1(t)\right)\left(1 + a_1^2(t)\right)^{-1/2}(pq)^{1/4}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p}(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}(\tau)\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right) \qquad (1.90) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \{1 + o(1)\}\left(1 - a_1(t)\right)\left(1 + a_1^2(t)\right)^{-1/2}(pq)^{-1/4}(t) \\ &\quad \times \exp\left(-\int_b^t \left(\frac{q}{p}(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}(\tau)\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right), \qquad (1.91) \\ px_2'(t) &= \{1 + o(1)\}\left(-1 - a_1(t)\right)\left(1 + a_1^2(t)\right)^{-1/2}(pq)^{1/4}(t) \\ &\quad \times \exp\left(-\int_b^t \left(\frac{q}{p}(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}(\tau)\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right). \qquad (1.92) \end{aligned}$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 1.1.1 de Levinson al sistema (1.79). Los valores propios de $\Lambda_2(s)$ son

$$\lambda_1(s) = q_2(s) - \rho_2(s) \;\text{ y }\; \lambda_2(s) = -q_2(s) - \rho_2(s),$$

entonces,

$$\mathrm{Re}\{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)\} = 2\,\mathrm{Re}\{q_2(s)\} = 2\,\mathrm{Re}\{(1+h^2)^{1/2}(s)\}$$

en $[a,\infty)$.
De aquí notamos que (1.87) es la condición de dicotomía (1.7).
De (1.85), (1.38), (1.74) y (1.86) se tiene que

$$\begin{aligned}\int_a^\infty |r_2(s)|ds &= \int_a^\infty \left|\frac{\dot{h}(s)}{1+h^2(s)}\right| ds \\ &= \int_b^\infty \left|\frac{h'(t)}{1+h^2(t)}\right| dt \\ &\leq \int_b^\infty |h'(t)|dt\end{aligned}$$

De esta manera se satisfacen las condiciones del Teorema 1.1.1 de Levinson, por lo tanto, existen soluciones de la forma (1.6) para el sistema (1.79). Esto es,

$$Y_{2,1}(s) = \{e_1+o(1)\}\exp\left(\int_a^s [q_2(\sigma)-\rho_2(\sigma)]\,d\sigma\right) \quad \text{e}$$

$$Y_{2,2}(s) = \{e_2+o(1)\}\exp\left(\int_a^s [-q_2(\sigma)-\rho_2(\sigma)]\,d\sigma\right).$$

Usando las definiciones (1.82) y (1.83) reescribimos las soluciones $Y_{2,k}(s)$ como sigue

$$\begin{aligned}Y_{2,k}(s) &= \{e_k+o(1)\}\,\exp\left(\int_a^s \left[\pm(1+h^2)^{1/2}(\sigma)-h(\sigma)-\left(\frac{a_1\dot{a}_1}{1+a_1^2}\right)(\sigma)\right] d\sigma\right) \\ &= \{e_k+o(1)\}\,\exp\left(\int_a^s \left[\pm(1+h^2)^{1/2}(\sigma)-h(\sigma)\right] d\sigma\right) \\ &\quad \times\exp\left(-\int_a^s \left(\frac{a_1\dot{a}_1}{1+a_1^2}\right)(\sigma)\,d\sigma\right),\end{aligned}$$

donde e_k es el vector canónico en $\mathbb{R}^2$ para $k=1,2$.
Desarrollando la integral del primer factor exponencial usando (1.71) y (1.38) se obtiene

$$\int_b^t \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau) \pm \left(1+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(q/p)^{-1/2}(\tau)\right)^2\right)^{1/2}(q/p)^{1/2}(\tau)\right] d\tau$$

$$= \int_b^t \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau) \pm \left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right)^{1/2}\right] d\tau.$$

Evaluando esta integral en la función exponencial encontramos la expresión

$$(pq)^{-1/4}(t)\exp\left(\pm\int_b^t \left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right). \tag{1.93}$$

También, observamos que

$$\begin{aligned} \int \frac{a_1 \dot{a}_1}{1+a_1^2}\, ds &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+a_1^2}\left(\frac{d}{ds}(1+a_1^2)\right) ds \\ &= \int \frac{(1+a_1^2)'}{1+a_1^2} dt \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+a_1^2(t)). \end{aligned} \tag{1.94}$$

Entonces, por (1.93) y (1.94), la solución $Y_{2,k}(t)$ toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} Y_{2,k}(t) &= \{e_k + o(1)\}(1+a_1^2(t))^{-1/2}(pq)^{-1/4}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\pm\int_b^t \left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right). \end{aligned}$$

De (1.72) y (1.75), tenemos que las soluciones del sistema (1.68) para $k = 1, 2$ son

$$Y_{1,1} = (1+a_1^2)^{-1/2}(pq)^{-1/4}\begin{pmatrix} \{1+o(1)\}\exp\left(\int_b^t (q/p + r_1^2)^{1/2}\, d\tau\right) \\ a_1\{1+o(1)\}\exp\left(\int_b^t (q/p + r_1^2)^{1/2}\, d\tau\right) \end{pmatrix}$$

e

$$Y_{1,2} = (1+a_1^2)^{-1/2}(pq)^{-1/4}\begin{pmatrix} -a_1\{1+o(1)\}\exp\left(-\int_b^t (q/p + r_1^2)^{1/2}\, d\tau\right) \\ \{1+o(1)\}\exp\left(-\int_b^t (q/p + r_1^2)^{1/2}\, d\tau\right) \end{pmatrix}$$

donde $r_1 = (pq)'/(4pq)$.
Finalmente, por (1.25), (1.22) y (1.24) llegamos a las fórmulas (1.89) y (1.91) para $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y las expresiones (1.90) y (1.92) para sus respectivas derivadas . $\square$

La condición de dicotomía (1.87) obtenida según (1.7) claramente es satisfecha cuando p y q son funciones con valores reales, ya que, la función h^2 es siempre mayor que cero. Si p y q toman valores complejos, tenemos por (1.86) que cuando $t \to \infty$

$$1 + h^2 = 1 + o(1),$$

luego,

$$\mathrm{Re}\{(1 + h^2)\} = \mathrm{Re}\{(1 + o(1))^{1/2}\}$$

en $[b, \infty)$, lo que permite que se tenga (1.87). Tomando los Ejemplos 1.4.2 y 1.4.3, vistos en la sección anterior, al aplicarles las condiciones (1.86) y (1.88) se obtienen las mismas condiciones (1.47) y (1.48) respectivamente.

El siguiente ejemplo que mostraremos es más general y sofisticado; involucra a todas las funciones de los distintos ejemplos mostrados hasta aquí.

Ejemplo 1.5.2. Sea $\psi(t)$ una función real y nunca cero en $[a_o, \infty)$ con primera derivada absolutamente continua, tal que

$$\psi(t) \to \infty \tag{1.95}$$

cuando $t \to \infty$. Sea $\beta > 0$ una constante y consideremos $p(t) = 1$ y

$$q(t) = \psi^{\beta}(t) g(\psi(t)) \tag{1.96}$$

en la ecuación (1.20), donde g es una función periódica y nunca nula. Además, de la condición (1.95), suponemos que

$$\psi'(t)/\psi^{\beta/2}(t) \to 0 \ \ (t \to \infty), \tag{1.97}$$

una de las condiciones necesarias para tener (1.86), y sea

$$\psi''(t) = O\left(\{\psi'(t)\}^2\right) \tag{1.98}$$

cuando $t \to \infty$. Finalmente, condición de integrabilidad (1.88) se tiene por (1.98) junto con

$$(\psi^{-\beta/2}\psi')^2 \psi^{\beta/2} \in L^1(a_0, \infty). \tag{1.99}$$

En lo que sigue presentamos algunos casos particulares de la función $\psi(t)$ en (1.96). Si

$$\psi(t) = t^{\gamma}. \tag{1.100}$$

entonces de las condiciones (1.95) y (1.97) se obtiene

$$0 < \gamma < 1 + \frac{\beta\gamma}{2} \tag{1.101}$$

y las restantes, (1.98) y (1.99), entregan la expresión

$$\left(\frac{\beta\gamma}{2} + 1 - \gamma\right) > \gamma. \tag{1.102}$$

Por (1.101) la inecuación (1.102) no es tan fácil de que se verifique. Es más, habrá soluciones del sistema (1.79) según Teorema 1.1.1 de Levinson cuando $\beta, \gamma > 0$ verifican

$$1 > \gamma\left(2 - \frac{\beta}{2}\right).$$

Notamos también que condición (1.102) es la expresión (1.50) en el Ejemplo 1.4.4 de la sección 1.4.1, tomando $\alpha = 0$ en (1.50) y haciendo el cambio de notación respectiva.

Finalmente, cuando $\gamma < 1$ en (1.100) se puede decir que la función $q(t)$ en (1.96) varía lentamente, en cambio cuando $\gamma > 1$, la variación es rápida.

Otro caso interesante es tomar

$$\psi(t) = \exp\left(t^{\gamma}\right).$$

De (1.95) $\gamma > 0$ y por (1.97) y (1.99) se deduce que $\beta > 4$. El hecho de que γ sea positivo en este caso permite una rápida variación de $q(t)$.

Además del caso anterior, podemos elegir la función ψ como

$$\psi(t) = (\ln t)^{\gamma}$$

con $\gamma > 0$. La variación de función $q(t)$, descrita en (1.96), es muy lenta en esta situación.

Teorema 1.5.3. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones nunca nulas, de igual signo y con primeras derivadas absolutamente continuas en $[b, \infty)$. Se define*

$$h = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(q/p)^{-1/2}$$

tal que

$$h(t) \to 0 \quad (t \to \infty). \tag{1.103}$$

Para $\delta > 0$, sea

$$\left|\mathrm{Re}\left\{\left(1+h^2\right)^{1/2}\right\}\right| \geq \delta \tag{1.104}$$

en el intervalo $[b,\infty)$ y supóngase que para $1 < m \leq 2$

$$\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^m (q/p)^{\frac{1}{2}(1-m)} \in L^1(b,\infty). \tag{1.105}$$

Entonces, cuando $t \to \infty$, la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \{1+o(1)\}\left(1+a_1(t)\right)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}(pq)^{-1/4}(t) \times \\
&\quad \exp\left(\int_b^t \left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right), \quad (1.106)\\
px_1'(t) &= \{1+o(1)\}\left(1-a_1(t)\right)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}(pq)^{1/4}(t) \times \\
&\quad \exp\left(\int_b^t \left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right) \quad (1.107)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \{1+o(1)\}\left(1-a_1(t)\right)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}(pq)^{-1/4}(t) \times \\
&\quad \exp\left(-\int_b^t \left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right), (1.108)\\
px_2'(t) &= -\{1+o(1)\}\left(1+a_1(t)\right)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}(pq)^{1/4}(t) \times \\
&\quad \exp\left(-\int_b^t \left(\left(\frac{q}{p}\right)(\tau) + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'(\tau)}{(pq)(\tau)}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right). (1.109)
\end{aligned}$$

Demostración. Al sistema (1.79) se le aplicará el Teorema 1.1.2 de Hartman-Wintner. De la matriz diagonal (1.80) se tiene que los valores propios de Λ_2 son

$$\lambda_1 = q_2 - \rho_2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -q_2 - \rho_2,$$

luego

$$\mathrm{Re}\{\lambda_1 - \lambda_2\} = 2\,\mathrm{Re}\{q_2\}.$$

Por (1.83) y la condición (1.104) se cumple la propiedad (1.8). Además, usando (1.84), (1.73) y la transformación (1.38) se tiene que

$$\begin{aligned}\int_a^\infty |r_2(s)|^m ds &= \frac{1}{2}\int_b^\infty \left|\frac{h'(q/p)^{-1/2}}{1+h^2}\right|^m (q/p)^{1/2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_b^\infty \left|\frac{h'}{1+h^2}\right|^m (q/p)^{\frac{1}{2}(1-m)}dt\end{aligned}$$

De esta manera (1.105) es la condición (1.9) del Teorema 1.1.2. Entonces, el sistema (1.79) tiene soluciones asintóticas $Y_k(s)$ de la forma

$$Y_{2,k}(s) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^s [\lambda_k(\sigma) + r_{kk}(\sigma)]\, d\sigma\right),$$

donde el término r_{kk} corresponde a los coeficientes diagonales nulos de la matriz R_2. Entonces, la solución $Y_{2,k}$ se reesccribe como

$$Y_{2,k}(s) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^s [\pm q_2(\sigma) - \rho_2(\sigma)]\, d\sigma\right).$$

Finalmente, de manera análoga a como se procedió en el Teorema 1.5.1 se prueba que la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la forma (1.106) y (1.108) y sus respectivas derivadas con fórmulas (1.107) y (1.109). □

Hacemos notar que para funciones p y q tanto reales como complejas la condición de dicotomía (1.104) siempre se verifica porque usando (1.103) la función q_2 se puede reescribir como $(1+o(1))^{1/2}$ cuando $t \to \infty$.
En lo que sigue mostraremos solamente las funciones p y q del Ejemplo 1.5.2

bajo las condiciones impuestas en el Teorema 1.5.3.

Ejemplo 1.5.4. En la ecuación (1.20) sean

$$p(t) = 1,\ q(t) = \psi^\beta(t) g(\psi(t))$$

con ψ función real y nunca cero en $[a_0, \infty)$, con primeras derivadas absolutamente continuas y $\beta > 0$ una constante. Se mantienen condiciones (1.95) y (1.97) necesarias para que $h \to 0$ cuando $t \to \infty$. Suponemos que

$$\psi''(t) = O\left(\{\psi'(t)\}^2\right)$$

y condición de integrabilidad (1.99) es remplazado por

$$\psi^{\beta/2}\left(\psi^{-\beta/2}\psi'\right)^{2m} \in L^1(a_0, \infty) \tag{1.110}$$

para algún $m \in (1, 2]$, debido a m-condición de integrabilidad (1.105) del Teorema 1.5.3.

Se expondrán los mismos casos particulares de la función ψ del Ejemplo 1.5.2, los que serán analizados bajo el nuevo Teorema 1.5.3.
Sea $\psi(t) = t^\gamma$. De las condiciones (1.95), (1.97), (1.98) y (1.110) se obtienen las expresiones

$$0 < \gamma < \frac{\beta\gamma}{2} + 1$$

y

$$2m\left(\frac{\beta\gamma}{2} + 1 - \gamma\right) > \frac{\beta\gamma}{2} + 1, \quad (1 < m \leq 2). \tag{1.111}$$

De la penúltima inecuación tenemos que en (1.111) la variable m tiene que ser lo adecuadamente grande para que el sistema (1.79) tenga solución según el Teorema 1.1.2 de Hartman-Wintner. Esto se puede ver mejor reescribiendo (1.111) como

$$(2m - 1)\left(\frac{1}{2}\beta\gamma + 1\right) > 2m\gamma.$$

Veamos que ocurre cuando

$$\psi(t) = \exp\left(t^\gamma\right).$$

Por (1.95) y (1.97) tenemos que $\gamma > 0$ y $\beta > 2$. De (1.110) se deduce que

$$2m\left(\frac{\beta}{2} - 1\right) > \frac{\beta}{2}, \quad (1 < m \leq 2).$$

Como $\beta > 2$ esto nos dice que $\beta/2 > 1$, entonces para m suficientemente grande el sistema (1.79) tendrá soluciones de la forma mostradas en el Teorema 1.5.3.
Finalmente, si

$$\psi(t) = (\ln t)^\gamma$$

entonces todas las condiciones se reducen a que $\gamma > 0$. Además, la variación de la función $q(t)$ para esta ψ es muy lenta..

El último teorema de esta sección es el resultado de aplicar el Teorema 1.1.3 al sistema (1.79).

Teorema 1.5.5. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones nunca nulas, de igual signo y con primeras derivadas absolutamente continuas en $[b, \infty)$. Supongamos que*

$$\left(\frac{h'(q/p)^{-1/2}}{(1 + h^2)^{3/2}}\right) \to 0 \quad (t \to \infty), \; h = \frac{1}{4}\frac{(pq)'}{pq}(q/p)^{-1/2} \tag{1.112}$$

y

$$\left(\frac{h'(q/p)^{-1/2}}{(1+h^2)^{3/2}}\right)' \in L^1(b,\infty). \tag{1.113}$$

Si además,

$$\mathrm{Re}\left\{\left(q_2^2 - r_2^2\right)^{1/2}\right\} \tag{1.114}$$

tiene un solo signo en $[b,\infty)$, *donde* q_2 *y* r_2 *están dados por (1.83) y (1.85). Entonces la ecuación (1.20) tiene soluciones* $x_1(t)$ *y* $x_2(t)$ *tales que*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1+o(1)\}\left(1+a_1(t)\right)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}}(pq)^{-\frac{1}{4}}(t) \times \\ &\quad \exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\tau\right) \\ px_1'(t) &= \{1+o(1)\}\left(1-a_1(t)\right)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}}(pq)^{\frac{1}{4}}(t) \times \\ &\quad \exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\tau\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \{1+o(1)\}\left(1-a_1(t)\right)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}}(pq)^{-\frac{1}{4}}(t) \times \\ &\quad \exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\tau\right) \quad (1.115) \\ px_2'(t) &= -\{1+o(1)\}\left(1+a_1(t)\right)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}}(pq)^{\frac{1}{4}}(t) \times \\ &\quad \exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\tau\right) \quad (1.116) \end{aligned}$$

donde

$$a_1 = \frac{h}{1+(1+h^2)^{1/2}} \text{ y } h = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(q/p)^{-1/2}.$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 1.1.3 de Eastham al sistema (1.79). Notamos que de (1.83) y (1.85) se tiene que

$$\frac{r_2}{q_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h'}{(1+h^2)^{3/2}}\right)(q/p)^{-1/2}$$

y además usando la transformación (1.38) se obtiene

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{r_2}{q_2}\right)(s)\right| ds &= \int_b^\infty \left|\left(\frac{h'(q/p)^{-1/2}}{(1+h^2)^{3/2}}\right)'(q/p)^{-1/2}\right|(q/p)^{1/2}dt \\ &= \int_b^\infty \left|\left(\frac{h'(q/p)^{-1/2}}{(1+h^2)^{3/2}}\right)'\right| dt,\end{aligned}$$

por lo tanto, de esta igualdad de integrales infinitas se ve que las condiciones (1.11) y (1.12) del Teorema 1.1.3 son satisfechas por (1.112) y (1.113).

Sean

$$\mu_1 = -\rho_2 + (q_2^2 - r_2^2)^{1/2} \text{ y } \mu_2 = -\rho_2 - (q_2^2 - r_2^2)^{1/2},$$

los valores propios de la matriz $\Lambda_2 + R_2$, entonces

$$\operatorname{Re}\{\mu_1 - \mu_2\} = 2\operatorname{Re}\left\{\left(q_2^2 - r_2^2\right)^{1/2}\right\}.$$

De esta manera (1.114) es la condición de dicotomía según (1.7). Como se satisfacen las condiciones del Teorema 1.1.3, existen soluciones $Y_{2,k}(s)$ ($k = 1, 2$) del sistema (1.79) de la forma

$$Y_{2,k}(s) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^s \mu_k(\sigma)\, d\sigma\right).$$

Tomando $k = 1$ se tiene

$$Y_{2,1}(s) = \{e_1 + o(1)\} \exp\left(\int_a^s \left[-\rho_2(\sigma) + \left(q_2^2 - r_2^2\right)^{1/2}(\sigma)\right] d\sigma\right).$$

De las definiciones (1.82),(1.83) y (1.84), se ve que

$$Y_{2,1}(s) = \{e_1 + o(1)\} \exp\left(\int_a^s \left[-h - \frac{a_1\dot{a}_1}{1+a_1^2} + \left((1+h^2) - \left(\frac{\dot{a}_1}{1+a_1^2}\right)^2\right)^{1/2}\right] d\sigma\right).$$

Usando (1.38), (1.71) y (1.85) en la integral del término exponencial de la solución $Y_{2,1}$ se obtiene

$$\int -\frac{1}{4}\frac{(pq)'}{pq} - \frac{a_1 a_1'}{1+a_1^2} + \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \left(\frac{a_1'}{1+a_1^2}\right)^2\right)^{1/2} dt$$

$$= \ln(pq)^{-1/4}(t) + \ln(1+a_1^2)^{-1/2}(t) + \int \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \left(\frac{h'}{2(1+h^2)}\right)^2\right)^{1/2} dt.$$

Entonces, la solución $Y_{2,1}$ escrita en la variable t es

$$\begin{aligned} Y_{2,1}(t) &= \{e_1 + o(1)\} \left(1 + a_1^2\right)^{-1/2} (pq)^{-1/4} \times \\ &\exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right). \end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos la siguiente expresión para la solución cuando $k = 2$

$$\begin{aligned} &Y_{2,2}(t) = \{e_1 + o(1)\}(1 + a_1^2)^{-1/2}(pq)^{-1/4} \times \\ &\exp\left(-\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right). \end{aligned} \tag{1.117}$$

Usando la transformación (1.75) tenemos que las coordenadas $u(t)$ y $v(t)$ del vector solución $Y_{1,1}(t)$ están dadas por

$$\begin{aligned} u(t) &= \{1 + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t) \left(1 + a_1^2\right)^{-1/2}(t) \times \\ &\exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{(pq)'}{4pq}\right)^2 - \left[\left(\frac{h'}{2(1+h^2)}\right)^2\right]^{1/2}\right) d\tau\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v(t) &= \{1 + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t)\, a_1 \left(1 + a_1^2\right)^{-1/2}(t) \times \\ &\exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{(pq)'}{4pq}\right)^2 - \left[\left(\frac{h'}{2(1+h^2)}\right)^2\right]^{1/2}\right) d\tau\right). \end{aligned}$$

Finalmente por (1.25), (1.22) y (1.24), se obtiene la solución $x_1(t)$ de la ecuación (1.20)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1 + o(1)\} (1 + a_1(t)) \left(1 + a_1^2(t)\right)^{-1/2} (pq)^{-1/4}(t) \times \\ &\exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} px_1'(t) &= \{1 + o(1)\} (1 - a_1(t)) \left(1 + a_1^2(t)\right)^{-1/2} (pq)^{1/4}(t) \times \\ &\exp\left(\int_b^t \left(\frac{q}{p} + \frac{1}{16}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)^2\right)^{1/2} d\tau\right). \end{aligned}$$

La solución $x_2(t)$ se obtiene de forma similar, a partir de la solución $Y_{2,2}(t)$ en (1.117) y devolviéndose vía (1.75) y (1.24) para obtener las expresiones (1.115) y (1.116). □

Por (1.83) y (1.84) se tiene que

$$\begin{aligned}\left(q_2^2 - r_2^2\right)^{1/2} &= \left(1 + h^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{1+h^2}(q/p)^{-1/2}\right)^2\right)^{1/2} \\ &= \left(1+h^2\right)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{(1+h^2)^{3/2}}(q/p)^{-1/2}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Entonces, por (1.74) y (1.112) el término $(q_2^2 - r_2^2)^{1/2}$ se puede escribir como $1 + o(1)$. Por lo tanto, la condición de dicotomía (1.114) es satisfecha para los p y q que toman valores reales y complejos.

A continuación, aplicaremos al Ejemplo 1.5.2 las nuevas condiciones del Teorema 1.5.5.

Ejemplo 1.5.6. En la ecuación (1.20) sean

$$p(t) = 1,\ q(t) = \psi^{\beta}(t)g(\psi(t)),$$

con ψ función real y nunca cero en $[a_0, \infty)$, con primeras derivadas absolutamente continuas y $\beta > 0$ es una constante. Las condiciones (1.95) y (1.97) se mantienen y agregamos la condición

$$\psi^{(n)}(t) = O\left(\{\psi'(t)\}^n\right)\ (n = 2, 3), \tag{1.118}$$

cuando $t \to \infty$. Por (1.74) la función $h(t) \to 0$ y junto a la condición de integrabilidad (1.113) se tiene que

$$\psi^{\beta/2}\left(\psi^{-\beta/2}\psi'\right)^3 \in L^1(a_0, \infty). \tag{1.119}$$

Analizaremos los mismos casos de la función ψ tratados en el Ejemplo 1.5.2.

Si $\psi(t) = t^{\gamma}$, entonces las condiciones (1.95) y (1.97) entregan la relación

$$0 < \gamma < \frac{\beta\gamma}{2} + 1.$$

Por (1.118) y condición de integrabilidad (1.119) se llega a que

$$3\left(\frac{\beta\gamma}{2} + 1 - \gamma\right) > \frac{\beta\gamma}{2} + 1. \tag{1.120}$$

Observamos que la inecuación (1.120) resulta de tomar el valor $m = 3/2$ en la condición (1.111) del Ejemplo 1.5.4. Notamos que condición (1.111) es mejor que la (1.120), porque mientras mayor sea el número que mutiplique el lado izquierdo de la desigualdad, hay más posibilidades de encontrar constantes β y γ que satisfagan la relación.

Otro caso particular que analizado, se presenta cuando

$$\psi(t) = \exp(t^\gamma).$$

Las condiciones mostradas al comienzo de este ejemplo se reducen a $\gamma > 0$ y $\beta > 3$. Si comparamos con los resultados obtenidos en el Ejemplo 1.5.2 se deduce que el Teorema 1.5.5 mejora las condiciones del Teorema 1.5.1.

Finalmente, para $\psi(t) = (\ln t)^\gamma$ se tiene que $\gamma > 0$. Esta condición es la misma que la del Ejemplo 1.5.4.

1.6. Perturbación Tendiendo a una Constante

En la sección anterior sobre Segunda Diagonalización, consideramos la situación cuando los valores propios $(q/p)^{1/2}$ de la matriz diagonal original del sistema (1.23) eran grandes comparada a la perturbación $(pq)'/pq$ cuando $t \to \infty$, es decir, cuando la función h tende a cero a medida que t crece. Ahora, veremos un caso de borde donde $(q/p)^{1/2}$ y $(pq)'/pq$ tienen tamaños comparables cuando $t \to \infty$. Este hecho se expresa por la condición

$$(pq)'/pq = (q/p)^{1/2}\,(\alpha + \phi)\,,$$

donde ϕ es una función que tiende a cero cuando t es grande y α es una constante.

Consideremos el sistema

$$\dot{Y}(s) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + h(s) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} Y(s), \tag{1.121}$$

donde

$$h = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(q/p)^{-1/2}. \tag{1.122}$$

Denotamos a la matriz diagonal de este sistema por

$$\hat{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y a la matriz no diagonal por

$$\hat{R}_0 = h(s) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Suponemos que

$$h(s) = \alpha + \phi(s) \tag{1.123}$$

con α una constante y ϕ es una función tal que

$$\lim_{s\to\infty} \phi(s) = 0. \tag{1.124}$$

A continuación damos un ejemplo de una función h de la forma (1.123).

Ejemplo 1.6.1. Supongamos que los coeficientes p y q de la ecuación (1.20) tienen la forma

$$p(t) = At^{\beta} \exp\left(t^{\eta}\right), \; q(t) = Bt^{\gamma} \exp\left(t^{\eta}\right)$$

donde β, γ, η son constantes reales, $\eta > 0$ y A, B son constantes. Si además,

$$\gamma - \beta = 2(\eta - 1), \tag{1.125}$$

entonces (1.123) es

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{B}{A}\right)^{-1/2} t^{\eta-1-(\gamma-\beta)/2}\left((\beta+\gamma)t^{-\eta} + 2\eta\right)$$

y usando (1.125) se sigue que

$$\alpha = \frac{\eta}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2} \;\; \text{y} \;\; \phi(t) = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/2} \frac{(\beta+\gamma)}{4} t^{-\eta}.$$

En la sección anterior se necesitó que $h \to 0$, en cambio ahora tratamos el caso cuando h tiende a una constante no nula cuando t es grande. Entonces, reescribiendo el sistema (1.121) usando (1.123) se llega a

$$\dot{Y}(s) = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & -1-\alpha \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} Y(s), \tag{1.126}$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & -1-\alpha \end{pmatrix} \tag{1.127}$$

es una matriz constante no diagonal y

$$\tilde{R} = \phi \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.128}$$

Como la matriz (1.127) no es diagonal, los tres teoremas mostrados en la sección 1.1 no pueden ser aplicados al sistema (1.126), por lo que se tendrá que diagonalizar esta matriz. Sean

$$\nu_1 = -\alpha + (1+\alpha^2)^{1/2} \ \text{ y } \ \nu_2 = -\alpha - (1+\alpha^2)^{1/2} \tag{1.129}$$

los valores propios de C y sea

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -1+(1+\alpha^2)^{1/2} & 1+(1+\alpha^2)^{1/2} \end{pmatrix} \tag{1.130}$$

la matriz no singular cuando $\alpha \neq 0$ y $\alpha^2 \neq -1$, cuyas columnas son los vectores propios de ν_k. Entonces,

$$D = P^{-1}CP = \operatorname{diag}\{\nu_1, \nu_2\}. \tag{1.131}$$

La sustitución

$$Y = PU \tag{1.132}$$

transforma (1.126) en un sistema del tipo (1.23)

$$\dot{U} = \left\{ D + P^{-1}\tilde{R}P \right\} U, \tag{1.133}$$

donde

$$P^{-1}\tilde{R}P = \frac{\phi}{\alpha(1+\alpha^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \alpha^2 - \alpha(1+\alpha^2)^{1/2} & 1+(1+\alpha^2)^{1/2} \\ -1+(1+\alpha^2)^{1/2} & -\alpha^2-\alpha(1+\alpha^2)^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{1.134}$$

Redistribuyendo términos en (1.133), sumando los términos diagonales de (1.134) a la matriz (1.131), es posible reescribir la matriz del sistema como suma de una matriz diagonal y una matriz antidiagonal. Se obtiene

$$\dot{U}(s) = \left\{ \hat{\Lambda}_1(s) + \hat{R}_1(s) \right\} U(s), \tag{1.135}$$

donde

$$\hat{\Lambda}_1 = \operatorname{diag}\{\nu_1 - \varrho_1, \nu_2 - \varrho_2\}, \tag{1.136}$$

con

$$\varrho_1 = \phi\left(\frac{-\alpha + (1+\alpha^2)^{1/2}}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right) \text{ y } \varrho_2 = \phi\left(\frac{\alpha + (1+\alpha^2)^{1/2}}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right) \tag{1.137}$$

y

$$\hat{R}_1 = \frac{\phi}{\alpha(1+\alpha^2)^{1/2}}\begin{pmatrix} 0 & 1+(1+\alpha^2)^{1/2} \\ -1+(1+\alpha^2)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.138}$$

Como el sistema (1.135) es de la misma forma que el sistema (1.26), podemos aplicar los Teoremas de Levinson, de Hartman-Wintner y de Eastham. Mostraremos los resultados obtenidos en la siguiente sección.

1.6.1. Fórmulas asintóticas de la ecuación de segundo orden según el método Perturbación Tendiendo a una Constante.

Teorema 1.6.2. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones no nulas y cuyas primeras derivadas son absolutamente continuas en $[b,\infty)$.*
Sea

$$h(s) = \alpha + \phi(s)$$

donde la función h está dada por (1.122), α es una constante no nula tal que $\alpha^2 \neq -1$ y ϕ es una función que satisface

$$\lim_{s\to\infty} \phi(s) = 0 \tag{1.139}$$

y

$$\phi(s) \in L^1(a,\infty). \tag{1.140}$$

Supongamos que

$$\mathrm{Re}\left\{(1+\alpha^2)^{1/2} + \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)\phi(s)\right\} \tag{1.141}$$

tiene un solo signo en $[a,\infty)$.
Entonces, la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1+o(1)\}\left(-1+\alpha+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{-1/4+c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right), \\ px_1'(t) &= \{1+o(1)\}\left(1+\alpha-(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{1/4+c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \{1+o(1)\}\left(1-\alpha+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{-1/4-c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(-\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \qquad (1.142) \\ px_2'(t) &= -\{1+o(1)\}\left(1+\alpha+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{1/4-c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(-\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right), \qquad (1.143) \end{aligned}$$

donde

$$c=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right). \qquad (1.144)$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 1.1.1 de Levinson al sistema (1.135). De (1.136), (1.129) y (1.137) se tiene

$$\mathrm{Re}\{(\nu_2-\varrho_2)-(\nu_1-\varrho_1)\}=-2\,\mathrm{Re}\left\{(1+\alpha^2)^{1/2}+\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)\phi\right\},$$

entonces por (1.141) se tiene condición de dicotomía según (1.7). Además, de (1.138) y (1.140) se satisface condición de integrabilidad (1.5). Luego, las condiciones del Teorema 1.1.1 de Levinson son satisfechas y existen soluciones $U_k(s)$ $(k=1,2)$ del sistema (1.135) de la forma

$$U_k(s)=\{e_k+o(1)\}\,\exp\left(\int_a^s(\nu_k-\varrho_k)(\varsigma)\,d\varsigma\right). \qquad (1.145)$$

Por (1.38) tenemos que la solución U_1 escrita en la variable t es

$$U_1(t)=\{e_1+o(1)\}\,\exp\left(\left(-\alpha+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)\int_b^t\left(1-\frac{\phi(\tau)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)(q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right). \qquad (1.146)$$

Desarrollando la integral del factor exponencial, usando (1.123) y (1.122), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_b^t\left(1-\frac{\phi}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)(q/p)^{1/2}\,d\tau &= \int_b^t\left(1+\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}-\frac{h}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)(q/p)^{1/2}d\tau \\ &= \int_b^t\left(1+\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)(q/p)^{1/2}d\tau-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)\int_b^t\frac{(pq)'}{pq}\,d\tau. \qquad (1.147) \end{aligned}$$

Entonces, si reemplazamos (1.147) en (1.146) nos queda

$$U_1(t)=\{e_1+o(1)\}(pq)^{-1/4+c}(t)\,\exp\left(\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t(q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right) \qquad (1.148)$$

donde

$$c = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right).$$

Usando (1.130) y (1.132) se deduce que las coordenadas $u_1(t)$ y $v_1(t)$ de $Y_1(t)$ son

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \{1+o(1)\}\,\alpha(pq)^{-1/4+c}(t)\,\exp\left(\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right) \\ v_1(t) &= o(1)\,\left(-1+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{-1/4+c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right). \end{aligned}$$

Finalmente por (1.25), (1.24) y el vector X en (1.22), se obtienen las siguientes fórmulas para $x_1(t)$ y $px_1'(t)$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1+o(1)\}\left(\alpha-1+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{-1/4+c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right) \\ px_1'(t) &= o(1)\,\left(\alpha+1-(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{1/4+c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right). \end{aligned}$$

De manera análoga, reemplazando $\nu_2 - \varrho_2$ en (1.145), deducimos los resultados para $k=2$. Luego, la solución $x_2(t)$ de la ecuación (1.20) está dada por (1.142) y la fórmula de $px_2'(t)$ es (1.143). □

Teorema 1.6.3. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones no nulas y que tienen primeras derivadas absolutamente continuas en $[b,\infty)$.*
Sea

$$h = \alpha + \phi$$

donde la función h está dada por (1.122), α es una constante no nula tal que $\alpha^2 \neq -16$ y ϕ es una función que satisface (1.124). Suponemos que para $1 < m \leq 2$

$$\phi(s) \in L^m(a,\infty). \tag{1.149}$$

Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\mathrm{Re}\left\{(1+\alpha^2)^{1/2} + \frac{\alpha\,\phi(s)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right\}\right| \geq \delta \tag{1.150}$$

en $[a, \infty)$.
Entonces, la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ *y* $x_2(t)$ *de la forma*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{1+o(1)\}(-1+\alpha+(1+\alpha^2)^{1/2})(pq)^{-1/4+c}(t) \\ &\quad \times \exp\left((1+\alpha^2)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right), \\ px_1'(t) &= \{1+o(1)\}(1+\alpha-(1+\alpha^2)^{1/2})(pq)^{1/4+c}(t) \\ &\quad \times \exp\left((1+\alpha^2)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \{1+o(1)\}(1-\alpha+(1+\alpha^2)^{1/2})(pq)^{-1/4-c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(-(1+\alpha^2)^{-1/2}\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right) \\ px_2'(t) &= \{1+o(1)\}(-1-\alpha-(1+\alpha^2)^{1/2})(pq)^{1/4-c}(t) \\ &\quad \times \exp\left(-(1+\alpha^2)^{-1/2})\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)\,d\tau\right). \end{aligned}$$

donde

$$c = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right).$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 1.1.2 de Hartman-Wintner al sistema (1.135). De (1.136), (1.129) y (1.137), tenemos que (1.150) es la condición (1.8) en el Teorema 1.1.2. Además, por (1.138) tenemos que la condición (1.9) se satisface por (1.149) para $1 < m \leq 2$. Entonces se sigue por el Teorema 1.1.2 que hay soluciones U_k $(k = 1, 2)$ del sistema (1.135) de la forma

$$U_k(s) = \{e_k + o(1)\}\exp\left(\int_a^s (\nu_k - \varrho_k)(\varsigma)\,d\varsigma\right),$$

donde ν_k y ϱ_k están dados por (1.129) y (1.137), respectivamente. Notamos que las soluciones U_k son iguales a (1.145), luego las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación (1.20) se obtienen de la misma forma que en la demostración del Teorema 1.6.2. □

Teorema 1.6.4. *Sean* $p(t)$ *y* $q(t)$ *funciones no nulas con primeras derivadas absolutamente continuas en* $[b, \infty)$ *y*

$$h = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(q/p)^{-1/2}.$$

Escribimos

$$h = \alpha + \phi$$

donde α es una constante no nula y ϕ es una función que satisface las condiciones

$$\lim_{s\to\infty} \phi(s) = 0 \tag{1.151}$$

y

$$\phi'(s) \in L^1(a,\infty). \tag{1.152}$$

Suponemos que

$$\mathrm{Re}\{\left(1+h^2(s)\right)^{1/2}\} \tag{1.153}$$

tiene un solo signo en $[a,\infty)$, donde

$$r = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right). \tag{1.154}$$

Entonces, la ecuación (1.20) tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \{1+o(1)\}\left(-1+\alpha+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{-1/4+d}(t) \\
&\quad \times \exp\left(\frac{1}{4}\int_b^t \left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau)\,K_\phi(\tau)\,d\tau\right), && (1.155)\\
px_1'(t) &= \{1+o(1)\}\left(1+\alpha-(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{1/4+d}(t) \\
&\quad \times \exp\left(\frac{1}{4}\int_b^t \left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau)\,K_\phi(\tau)\,d\tau\right), && (1.156)\\
x_2(t) &= \{1+o(1)\}\left(1-\alpha+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{-1/4+d}(t) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{4}\int_b^t \left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau)\,K_\phi(\tau)\,d\tau\right), && (1.157)\\
px_2'(t) &= \{1+o(1)\}\left(-1-\alpha-(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{1/4+d}(t) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{4}\int_b^t \left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau)\,K_\phi(\tau)\,d\tau\right), && (1.158)
\end{aligned}$$

donde

$$K_\phi = \frac{-16\alpha^{-3}\phi}{(1+16\alpha^{-2})^{1/2}} + O(\phi^2)$$

y

$$d = \frac{1}{4}(1+16\alpha^{-2})^{1/2}.$$

Demostración. La matriz $\hat{\Lambda}_0(s)+\hat{R}_0(s)$ del sistema (1.121) tiene valores propios

$$\hat{\mu}_1 = -h + (1+h^2)^{1/2} \ \text{ y } \ \hat{\mu}_2 = -h - (1+h^2)^{1/2}. \tag{1.159}$$

Como
$$\hat{\Lambda}_0 + \hat{R}_0 = D + P^{-1}\tilde{R}P,$$
por propiedad de los determinantes se tiene que $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ en (1.159) también son valores propios de la matriz $D + P^{-1}\tilde{R}P$ en el sistema (1.133).
Si
$$\operatorname{Re}\{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2\} = 2\operatorname{Re}\left\{\left(1+h^2\right)^{1/2}\right\},$$
entonces (1.153) es la condición de dicotomía según (1.7) en el Teorema 1.1.1 de Levinson. De las matrices (1.131) y (1.134) se deduce que (1.151) y (1.152) son las condiciones (1.11) y (1.12) del Teorema 1.1.3 de Eastham. Entonces, las condiciones del Teorema 1.1.3 son satisfechas por (1.133) lo que permite que hayan soluciones $U_k(s)$ para $k = 1, 2$ de la forma
$$U_k(s) = \{e_k + o(1)\}\ \exp\left(\int_a^s \hat{\mu}_k(\sigma)d\sigma\right).$$
Por (1.122) y (1.123) se reescribe $\hat{\mu}_k$ como
$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_k &= -h \pm \left(1+h^2\right)^{1/2} \\
&= \frac{(pq)'}{pq}(q/p)^{-1/2}\left\{-\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\left(1+16(\alpha+\phi)^{-2}\right)^{1/2}\right\} \\
&= \frac{(pq)'}{pq}(q/p)^{-1/2}\left\{-\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\left(1+16\alpha^{-2}(1+\phi/\alpha)^{-2}\right)^{1/2}\right\}. \qquad (1.160)
\end{aligned}$$
Entonces, por (1.160) y (1.38), la solución U_1 se reescribe como
$$\begin{aligned}
U_1(t) &= \{e_1 + o(1)\}(pq)^{-1/4}(t)\ \times \\
&\qquad \exp\left(\int_b^t \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau)\left(1+16\alpha^{-2}\left(1+\frac{\phi}{\alpha}(\tau)\right)^{-2}\right)^{1/2} d\tau\right).
\end{aligned}$$
Si al integrando del factor exponencial le sumamos y restamos el témino $(1+16\alpha^{-2})^{1/2}$, expandiendo luego en potencias de ϕ hasta ϕ^2 se tiene
$$\begin{aligned}
&\left(1+16\alpha^{-2}\left(1+\tfrac{\phi}{\alpha}(\tau)\right)^{-2}\right)^{1/2} - (1+16\alpha^{-2})^{1/2} + (1+16\alpha^{-2})^{1/2} = \\
&= \left(1+16\alpha^{-2}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{1+16\alpha^{-2}(1-2\phi/\alpha+O(\phi^2))}{(1+16\alpha^{-2})}\right)^{1/2} - 1\right] + \left(1+16\alpha^{-2}\right)^{1/2} \\
&= \left(1+16\alpha^{-2}\right)^{1/2}\left[\left(1-\frac{(16\alpha^{-2})(2\phi/\alpha)}{(1+16\alpha^{-2})} + O(\phi^2)\right)^{1/2} - 1\right] + \left(1+16\alpha^{-2}\right)^{1/2} \\
&= -\frac{16\alpha^{-3}\phi}{(1+16\alpha^{-2})^{1/2}} + O(\phi^2) + \left(1+16\alpha^{-2}\right)^{1/2}. \qquad (1.161)
\end{aligned}$$

De (1.161) se sigue que

$$U_1(t) = \{e_1 + o(1)\}(pq)^{-1/4+d}(t) \exp\left(\frac{1}{4}\int_b^t \left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau)\, K_\phi(\tau)\, d\tau\right),$$

donde

$$K_\phi = \frac{-16\alpha^{-3}\phi}{(1+16\alpha^{-2})^{1/2}} + O(\phi^2) \quad \text{y} \quad d = \frac{1}{4}\left(1+16\alpha^{-2}\right)^{1/2}.$$

Usando la sustitución (1.132) y la matriz (1.130), se deduce que las coordenadas u_1 y v_1 del vector $Y_1(t)$ son

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \{1+o(1)\}\alpha\,(pq)^{-1/4+d}(t) \exp\left(\frac{1}{4}\int_b^t \left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau)\, K_\phi(\tau)\, d\tau\right) \\ v_1(t) &= \{1+o(1)\}(-1+(1+\alpha^2)^{1/2})(pq)^{-1/4+d}(t) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{4}\int_b^t \left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(\tau)\, K_\phi(\tau)\, d\tau\right). \end{aligned}$$

Finalmente, de (1.25), (1.22) y (1.24) obtenemos (1.155) y (1.156) y de manera similar se obtienen las fórmulas para $k = 2$, (1.157) y (1.158). □

La condición (1.153) en el Teorema 1.6.4 es claramente satisfecha cuando p y q son funciones con valores reales. Ahora, si $h = (pq)'/(4p^{1/2}q^{3/2})$ toma valores complejos, entonces por (1.151) se tiene

$$\mathrm{Re}\{\left(1+h^2\right)^{1/2}\} = \mathrm{Re}\{(1+\alpha^2+o(1))^{1/2}\},$$

razón por lo cual siempre se satisface (1.153).

Capítulo 2

Desacoplamiento

2.1. Introducción

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\{p(t)x'(t)\}' - q(t)x(t) = 0. \tag{2.1}$$

En la sección 1.2, usando (1.24) y (1.25), se transformó el sistema (1.21) asociado a la ecuación (2.1) en el sistema

$$Y'(t) = \left\{ \begin{pmatrix} (q/p)^{1/2}(t) - r(t) & 0 \\ 0 & -(q/p)^{1/2}(t) - r(t) \end{pmatrix} + r(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} Y(t) \tag{2.2}$$

donde

$$r = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right).$$

Denotamos por

$$\lambda_1(t) = (q/p)^{1/2}(t) - r(t) \quad \text{y} \quad \lambda_2(t) = -(q/p)^{1/2}(t) - r(t)$$

a los valores propios de la matriz diagonal

$$\Lambda_1(t) = \begin{pmatrix} (q/p)^{1/2}(t) - r(t) & 0 \\ 0 & -(q/p)^{1/2}(t) - r(t) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

del sistema (2.2).
La transformación

$$Z = Ye^{-\int^t \lambda_k(s)ds} \ (k = 1, 2) \tag{2.4}$$

permite expresar el sistema (2.2) en la forma

$$Z'(t) = \{(\Lambda_1(t) - \lambda_k(t)I_2) + R_1(t)\} Z(t), \tag{2.5}$$

donde

$$\tilde{\Lambda}(t) = \Lambda_1(t) - \lambda_k(t) I_2 \tag{2.6}$$

es una matriz diagonal, I_2 es la matriz identidad de tamaño 2×2 y

$$R_1(t) = r(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Consideremos la matriz diagonal

$$\Psi(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \tilde{\Lambda}(s) ds\right], \tag{2.8}$$

que para $k = 1$ es

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(\int_{t_0}^{t} \{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)\} ds\right) \end{pmatrix}$$

y para $k = 2$ toma la forma

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\} ds\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tal que,

$$\Psi'(t) = \tilde{\Lambda}(t) \Psi(t).$$

Para cada k, definimos

$$\mathcal{D}_{jk}(t) = \operatorname{Re}\{\lambda_j(t) - \lambda_k(t)\}. \tag{2.9}$$

Sea $k = \{1, 2\}$ fijo y supongamos que cada $j = 1, 2$ pertenece a una de las dos clases H_1 y H_2, donde

$$\begin{aligned} j \in H_1 \quad \text{si} \quad & \int_0^t \mathcal{D}_{jk}(s) ds \to -\infty \quad \text{cuando } t \to \infty \text{ y} \\ & \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{D}_{jk}(s) ds < K, \quad \text{con } K \text{ constante y } t_2 \geq t_1 \geq 0 \quad (2.10) \\ j \in H_2 \quad \text{si} \quad & \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{D}_{jk}(s) ds > -K, \text{ con } t_2 \geq t_1 \geq 0 \text{ y } K \text{ const.} \quad (2.11) \end{aligned}$$

De los conjuntos de índices H_1 y H_2 definidos según (2.10) y (2.11) respectivamente, escribimos

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \tag{2.12}$$

donde las matrices diagonales Ψ_1 y Ψ_2 contienen las columnas de Ψ con índice j pertenecientes a H_1 y H_2, respectivamente, y las restantes son columnas de ceros. Por lo tanto, para $j = 1, 2$ se tiene que

$$\Psi_j' = \tilde{\Lambda}\Psi_j.$$

Para encontrar una solución asintótica de (2.1), buscamos una solución φ_k de (2.5) como solución de la ecuación integral

$$\varphi_k(t) = e_k + \int_{t_0}^{t} \Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)R(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} \Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau)R(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau \tag{2.13}$$

para $k = 1, 2$ y donde e_k es el vector columna con todas las componentes nulas excepto la k-ésima la cual es 1. No es difícil verificar que φ_k es efectivamente solución de (2.5), es decir,

$$\varphi_k' = \left\{\tilde{\Lambda} + R_1\right\}\varphi_k.$$

2.2. Buscando el desacoplamiento

Ahora, demostraremos que la solución del sistema (2.5) está dada por (2.13) y en esta sección nos ocuparemos de representar esta solución en forma desacoplada. Todas las fórmulas posibles de la solución φ_k se presentan más abajo separadas en tres casos. Estas divisiones dependen del comportamiento de la integral

$$\int_0^t \mathcal{D}_{21}(s)\, ds \quad (t \to \infty),$$

donde $\mathcal{D}_{21}(t) = \mathrm{Re}\{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\}$.

Observación 2.2.1. En lo que sigue

$$e_{ij}^{\pm}(t_0, t_1) = \exp\left(\pm \int_{t_0}^{t_1} [\lambda_i(s) - \lambda_j(s)]ds\right)$$

y

$$e_{ii}^{\pm}(t_0, t_1) = 1.$$

CASO 1: Suponemos primero que

$$\int_0^t \mathcal{D}_{21}(s)ds \to -\infty \quad (t \to \infty), \tag{2.14}$$

es decir, $j = 2 \in H_1$. Observamos, también que $j = 1 \in H_2$ según (2.11). Entonces, por (2.8) y (2.12), las matrices Ψ_i $(i = 1, 2)$ están dadas por

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{21}^{+}(t_0, t) \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} e_{11}^{+}(t_0, t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \Psi_1(t)\,\Psi^{-1}(\tau) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{21}^{+}(t_0, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}^{-}(t_0, \tau) & 0 \\ 0 & e_{21}^{-}(t_0, \tau) \end{pmatrix} \\ &= e_{21}^{+}(\tau, t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\Psi_2(t)\,\Psi^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}^{-}(t_0, \tau) & 0 \\ 0 & e_{21}^{-}(t_0, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, para $k = 1$, usando la matriz (2.7) y tomando $\varphi_1 = (\upsilon_1, \upsilon_2)$, escribimos la ecuación integral (2.13) como sigue

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \upsilon_1(t) \\ \upsilon_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \Psi_1(t)\,\Psi^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau) \\ \upsilon_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} \Psi_2(t)\,\Psi^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau) \\ \upsilon_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{21}^{+}(\tau, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau) \\ \upsilon_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau) \\ \upsilon_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{21}^{+}(\tau, t) r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau) \\ \upsilon_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau) \\ \upsilon_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{21}^{+}(\tau, t) r_{21}(\tau) \upsilon_1(\tau) \end{pmatrix} d\tau - \int_{t}^{\infty} \begin{pmatrix} r_{12}(\tau) \upsilon_2(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

Entonces, las coordenadas υ_1 y υ_2 de φ_1 verifican

$$\upsilon_1(t) = 1 - \int_{t}^{\infty} r_{12}(\tau) \upsilon_2(\tau)\, d\tau \tag{2.15}$$

y

$$\upsilon_2(t) = \int_{t_0}^{t} e_{21}^{+}(\tau, t) r_{21}(\tau) \upsilon_1(\tau)\, d\tau, \tag{2.16}$$

donde $e_{21}^{+}(\tau,t)=\exp\left(\int_\tau^t(\lambda_2-\lambda_1)(s)\,ds\right)$.

Reemplazando (2.15) en (2.16), y viceversa, obtenemos el sistema desacoplado:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 1-\int_t^\infty r_{12}(\tau)\left(\int_{\tau_0}^{\tau} e_{21}^{+}(s,\tau)r_{21}(s)v_1(s)\,ds\right)d\tau, \qquad (2.17)\\ v_2(t) &= \int_{t_0}^{t} e_{21}^{+}(\tau,t)r_{21}(\tau)\,d\tau\\ &\quad -\int_{t_0}^{t} e_{21}^{+}(\tau,t)r_{21}(\tau)\left(\int_\tau^\infty r_{12}(s)v_2(s)\,ds\right)d\tau. \end{aligned}$$

Ahora, para $k=2$ los índices $j=1,2$ pertenecen a H_2, ya que, por (2.14) se tiene, para $j=1$, la situación descrita en (2.11). Por (2.8) y (2.12), las matrices Ψ_i $(i=1,2)$ están dadas por $\Psi_1=0$ y $\Psi_2=\Psi$. Así,

$$\begin{aligned} \Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau) &= \begin{pmatrix} e_{12}^{+}(t_0,t) & 0\\ 0 & e_{22}^{+}(t_0,t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{12}^{-}(t_0,\tau) & 0\\ 0 & e_{22}^{-}(t_0,\tau)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} e_{12}^{+}(\tau,t) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, la solución φ_2 con coordenadas ω_1 y ω_2 se escribe en forma vectorial como sigue

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}\omega_1(t)\\ \omega_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\int_t^\infty \Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau)\begin{pmatrix}0 & r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1(\tau)\\ \omega_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\ &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\int_t^\infty \begin{pmatrix} e_{12}^{+}(\tau,t) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1(\tau)\\ \omega_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\ &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1(\tau)\\ \omega_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\ &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\int_t^\infty \begin{pmatrix} e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)\omega_2(\tau)\\ r_{21}(\tau)\omega_1(\tau)\end{pmatrix}d\tau. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\omega_1(t)=-\int_t^\infty e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)\omega_2(\tau)d\tau \qquad (2.18)$$

y

$$\omega_2(t)=1-\int_t^\infty r_{21}(\tau)\omega_1(\tau)d\tau, \qquad (2.19)$$

donde $e_{12}^{+}(\tau,t)=\exp\left(\int_\tau^t(\lambda_1-\lambda_2)(s)\,ds\right)$.

Reemplazando (2.18) en (2.19), y viceversa, obtenemos la forma desacoplada de φ_2:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= -\int_t^\infty e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)d\tau \\
&\quad +\int_t^\infty e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)\left(\int_\tau^\infty r_{21}(s)\omega_1(s)ds\right)d\tau, \\
\omega_2(t) &= 1+\int_t^\infty r_{21}(\tau)\left(\int_\tau^\infty e_{12}^{+}(s,\tau)r_{12}(s)\omega_2(s)\,ds\right)d\tau. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

CASO 2: Supongamos que

$$\int_0^t \mathcal{D}_{21}(s)ds\to\infty \quad (t\to\infty). \qquad (2.21)$$

De esta manera, si $k=1$ el valor $j=2$ satisface la condición (2.11). Por (2.8) y (2.12), las matrices Ψ_i $(i=1,2)$ son $\Psi_1=0$ y $\Psi_2=\Psi$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau) &= \begin{pmatrix} e_{11}^{+}(t_0,t) & 0\\ 0 & e_{21}^{+}(t_0,t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{11}^{-}(t_0,\tau) & 0\\ 0 & e_{21}^{-}(t_0,\tau)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & e_{21}^{+}(\tau,t)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces, usando la matriz (2.7), la solución φ_1 de la ecuación integral (2.13) se escribe como sigue

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \upsilon_1(t)\\ \upsilon_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}-\int_t^\infty \Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau)\\ \upsilon_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\
&= \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}-\int_t^\infty \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & e_{21}^{+}(\tau,t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau)\\ \upsilon_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\
&= \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}-\int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau)\\ e_{21}^{+}(\tau,t)r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \upsilon_1(\tau)\\ \upsilon_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau.
\end{aligned}$$

Así,

$$\upsilon_1(t)=1-\int_t^\infty r_{12}(\tau)\upsilon_2(\tau)\,d\tau \qquad (2.22)$$

y

$$\upsilon_2(t)=-\int_t^\infty e_{21}^{+}(\tau,t)r_{21}(\tau)\upsilon_1(\tau)\,d\tau, \qquad (2.23)$$

donde $e_{21}^{+}(\tau,t)=\exp\left(\int_{\tau}^{t}(\lambda_2-\lambda_1)(s)\,ds\right)$.

Reemplazando (2.22) en (2.23), y viceversa, obtenemos el sistema desacoplado:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 1+\int_t^{\infty} r_{12}(\tau)\left(\int_{\tau}^{\infty} e_{21}^{+}(s,\tau)r_{21}(s)v_1(s)\,ds\right)d\tau, \qquad (2.24)\\ v_2(t) &= -\int_t^{\infty} e_{21}^{+}(\tau,t)r_{21}(\tau)\,d\tau \\ &\quad +\int_t^{\infty} e_{21}^{+}(\tau,t)r_{21}(\tau)\left(\int_{\tau}^{\infty} r_{12}(s)v_2(s)\,ds\right)d\tau. \end{aligned}$$

Ahora, para $k=2$, de (2.21) se deduce que $j=1$ pertenece a H_1, mientras que para $j=2$ tenemos que se satisface (2.11). Entonces, por (2.8) y (2.12), las matrices Ψ_i $(i=1,2)$ están dadas por

$$\Psi_1=\begin{pmatrix} e_{12}^{+}(t_0,t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \Psi_2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \Psi_1(t)\,\Psi^{-1}(\tau) &= \begin{pmatrix} e_{12}^{+}(t_0,t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{12}^{-}(t_0,\tau) & 0\\ 0 & e_{22}^{-}(t_0,\tau)\end{pmatrix}\\ &= e_{12}^{+}(\tau,t)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\Psi_2(t)\,\Psi^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{12}^{-}(t_0,\tau) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Entonces, la solución φ_2 toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega_1(t)\\ \omega_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}+\int_{t_0}^{t}\Psi_1(t)\,\Psi^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1(\tau)\\ \omega_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\ &\quad -\int_t^{\infty}\Psi_2(t)\,\Psi^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1(\tau)\\ \omega_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\ &= \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}+\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} e_{12}^{+}(\tau,t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1(\tau)\\ \omega_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\ &\quad -\int_t^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau)\\ r_{21}(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1(\tau)\\ \omega_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 0 & e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(\tau) \\ \omega_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&\quad - \int_{t}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(\tau) \\ \omega_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)\omega_2(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau - \int_{t}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ r_{21}(\tau)\omega_1(\tau) \end{pmatrix} d\tau.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas de φ_2 son

$$\omega_1(t) = \int_{t_0}^{t} e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)\omega_2(\tau)\,d\tau, \tag{2.25}$$

$$\omega_2(t) = 1 - \int_{t}^{\infty} r_{21}(\tau)\omega_1(\tau)\,d\tau. \tag{2.26}$$

donde $e_{12}^{+}(\tau,t) = \exp\left(\int_{\tau}^{t}(\lambda_1-\lambda_2)(s)\,ds\right)$.

Reemplazando (2.25) en (2.26), y viceversa, obtenemos el sistema desacoplado:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= \int_{t_0}^{t} e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)\,d\tau - \\
&\quad \int_{t_0}^{t} e_{12}^{+}(\tau,t)r_{12}(\tau)\left(\int_{\tau}^{\infty} r_{21}(s)\omega_1(s)\,ds\right) d\tau, \\
\omega_2(t) &= 1 - \int_{t}^{\infty} r_{21}(\tau)\left(\int_{\tau_0}^{\tau} e_{12}^{+}(s,\tau)r_{12}(s)\omega_2(s)\,ds\right) d\tau. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

CASO 3: En este caso suponemos que

$$\left|\int_{0}^{\infty} \mathcal{D}_{21}(s)ds\right| < K,$$

siendo K una constante. Luego, para $k=1$, los índices $j=1,2$ pertenencen a la clase H_2.
Por (2.8) y (2.12), las matrices Ψ_i $(i=1,2)$ son $\Psi_1 = 0$ y $\Psi_2 = \Psi$. Así,

$$\begin{aligned}
\Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau) &= \begin{pmatrix} e_{11}^{+}(t_0,t) & 0 \\ 0 & e_{21}^{+}(t_0,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}^{-}(t_0,\tau) & 0 \\ 0 & e_{21}^{-}(t_0,\tau) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{21}^{+}(\tau,t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces, de la ecuación integral (2.13) la solución $\varphi_1 = (v_1, v_2)$ se escribe como sigue

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_t^\infty \Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\tau) \\ v_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{21}^+(\tau,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\tau) \\ v_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ e_{21}^+(\tau,t) r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\tau) \\ v_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_t^\infty \begin{pmatrix} r_{12}(\tau) v_2(\tau) \\ e_{21}^+(\tau,t) r_{21}(\tau) v_1(\tau) \end{pmatrix} d\tau.
\end{aligned}
$$

De esta manera,

$$v_1(t) = 1 - \int_t^\infty r_{12}(\tau) v_2(\tau)\, d\tau \tag{2.28}$$

y

$$v_2(t) = - \int_t^\infty e_{21}^+(\tau,t) r_{21}(\tau) v_1(\tau)\, d\tau, \tag{2.29}$$

donde $e_{21}^+(\tau,t) = \exp\left(\int_\tau^t (\lambda_2 - \lambda_1)(s)\, ds \right)$.

Reemplazando (2.28) en (2.29), y viceversa, obtenemos el sistema desacoplado:

$$
\begin{aligned}
v_1(t) &= 1 + \int_t^\infty r_{12}(\tau) \left(\int_\tau^\infty e_{21}^+(s,\tau) r_{21}(s) v_1(s)\, ds \right) d\tau, \qquad (2.30) \\
v_2(t) &= - \int_t^\infty e_{21}^+(\tau,t) r_{21}(\tau)\, d\tau \\
&\quad + \int_t^\infty e_{21}^+(\tau,t) r_{21}(\tau) \left(\int_\tau^\infty r_{12}(s) v_2(s)\, ds \right) d\tau.
\end{aligned}
$$

Para $k = 2$, los índices $j = 1, 2$ pertenecen a la clase H_2. Por (2.8) y (2.12), las matrices Ψ_i $(i = 1, 2)$ son $\Psi_1 = 0$ y $\Psi_2 = \Psi$. Así,

$$
\begin{aligned}
\Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau) &= \begin{pmatrix} e_{12}^+(t_0,t) & 0 \\ 0 & e_{22}^+(t_0,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{12}^-(t_0,\tau) & 0 \\ 0 & e_{22}^-(t_0,\tau) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_{12}^+(\tau,t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Entonces, la solución $\varphi_2 = (\omega_1, \omega_2)$ es

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_t^\infty \Psi_2(t)\Psi^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(\tau) \\ \omega_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_t^\infty \begin{pmatrix} e_{12}^{+}(\tau,t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(\tau) \\ \omega_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & e_{12}^{+}(\tau,t) r_{12}(\tau) \\ r_{21}(\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(\tau) \\ \omega_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,
\end{aligned}$$

resultando,

$$\omega_1(t) = -\int_t^\infty e_{12}^{+}(\tau,t) r_{12}(\tau)\omega_2(\tau)\, d\tau \tag{2.31}$$

y

$$\omega_2(t) = 1 - \int_t^\infty r_{21}(\tau)\omega_1(\tau)\, d\tau, \tag{2.32}$$

donde $e_{12}^{+}(\tau,t) = \exp\left(\int_\tau^t (\lambda_1 - \lambda_2)(s)\, ds\right)$.

Reemplazando (2.31) en (2.32), y viceversa, obtenemos el desacoplamiento:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= -\int_t^\infty e_{12}^{+}(\tau,t) r_{12}(\tau)\, d\tau \\
&\quad + \int_t^\infty e_{12}^{+}(\tau,t) r_{12}(\tau) \left(\int_\tau^\infty r_{21}(s)\omega_1(s)\, ds \right) d\tau, \\
\omega_2(t) &= 1 + \int_t^\infty r_{21}(\tau) \left(\int_\tau^\infty r_{21}(s)\omega_2(s)\, ds \right) d\tau. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Notamos que en cada uno de los tres casos presentados, los sistemas desacoplados de (v_1, v_2) y (ω_1, ω_2) tienen cierta simetría en sus términos, encontrando solo diferencias en los valores del límite superior e inferior de las integrales y de signo.

2.3. Sistema fundamental de soluciones

En la sección 2.2 supusimos que había una solución φ_k de la ecuación (2.1) de la forma (2.13). Probaremos, a continuación, su existencia a través de dos lemas que usarán las fórmulas (2.17) y (2.20) obtenidas en el caso 1 al desacoplar el vector solución φ_1 y φ_2 respectivamente. Observamos que se podrían usar las fórmulas obtenidas en los otros casos de la sección 2.2, pero gracias a la simetría presente entre los distintos sistemas desacoplados de las soluciones φ_1 y φ_2 basta tomar las ecuaciones del primer caso.

Observación 2.3.1. En lo que sigue se suprimirá el signo $+$ de los términos e_{12}^+ y e_{21}^+ y

$$\begin{aligned} e_{12}(t_1,t_2) &= \exp\left(\int_{t_1}^{t_2}(\lambda_1-\lambda_2)(s)\,ds\right) \\ e_{21}(t_1,t_2) &= \exp\left(\int_{t_1}^{t_2}(\lambda_2-\lambda_1)(s)\,ds\right). \end{aligned}$$

Lema 2.3.2. *Suponga que las siguientes funciones están bien definidas y*

$$\mathcal{R}_1(t) = r_{12}(t)\mathcal{L}_1(r_{21},t) \in L^1(dt), \tag{2.34}$$

donde

$$\mathcal{L}_1(r_{21},t) = \int_{t_0}^{t} |r_{21}(s)e_{21}(s,t)|ds. \tag{2.35}$$

Entonces existe una solución $\varphi_1 = (v_1, v_2)$ de la ecuación (2.5) tal que sus coordenadas son de la forma

$$v_1 = 1 + O\left(\int_t^{\infty} \mid \mathcal{R}_1(\tau) \mid d\tau\right) \tag{2.36}$$

y

$$v_2 = O\left(\mathcal{L}_1(r_{21},t)\right). \tag{2.37}$$

Demostración. Se probará la existencia de la solución φ_1 usando aproximaciones sucesivas respecto de la primera coordenada v_1.
Sea $v_1^0(t) = 0$. Por (2.17) tenemos que

$$v_1^j(t) = 1 - \int_t^{\infty} r_{12}(\tau)\left(\int_{\tau_0}^{\tau} r_{21}(s)e_{21}(s,\tau)v_1^{j-1}(s)\,ds\right)d\tau.$$

Escogemos t_0 tal que $\int_{t_0}^{\infty}|\mathcal{R}_1(t)|dt < \alpha$, para alguna $0<\alpha<1$.
Notamos que $\mid v_1^1(t) - v_1^0(t) \mid = 1$. Además:

$$|v_1^2(t) - v_1^1(t)| \leq \int_t^{\infty} |r_{12}(\tau)| \int_{\tau_0}^{\tau} |r_{21}(s)||e_{21}(s,\tau)|\,ds\,d\tau < \alpha$$

y

$$\begin{aligned}|v_1^3(t) - v_1^2(t)| &\leq \int_t^\infty |r_{12}(\tau)| \int_{\tau_0}^\tau |r_{21}(s)||e_{21}(s,\tau)||v_1^2(s) - v_1^1(s)|\, ds\, d\tau \\ &\leq \alpha \int_t^\infty |r_{12}(\tau)| \int_{\tau_0}^\tau |r_{21}(s)||e_{21}(s,\tau)|\, ds\, d\tau \\ &\leq \alpha^2.\end{aligned}$$

Si seguimos este proceso, por inducción, para el término j-ésimo se tendrá

$$|v_1^{j+1}(t) - v_1^j(t)| \leq \alpha^j.$$

Como

$$v_1(t) = v_1^0(t) + \sum_{l=0}^\infty \left(v_1^{l+1}(t) - v_1^l(t)\right) = \lim_{l\to\infty} v_1^l(t)$$

y

$$\sum_{l=0}^\infty |v_1^{l+1}(t) - v_1^l(t)| \leq \sum_{l=0}^\infty \alpha^l = \frac{1}{1-\alpha},$$

se tiene que la sucesión $\{v_1^l\}$ converge uniformemente a v_1 en todo subintervalo acotado de $[t_0, \infty)$, y además, $|v_1(t)| \leq C$, donde C es una constante. Entonces,

$$v_1(t) = 1 - \int_t^\infty r_{12}(\tau) \left(\int_{\tau_0}^\tau r_{21}(s)\, e_{21}(s,\tau)\, v_1(s)\, ds\right) d\tau$$

y

$$\begin{aligned}|v_1(t) - 1| &\leq \int_t^\infty |r_{12}(\tau)| \left(\int_{\tau_0}^\tau |r_{21}(s)||e_{21}(s,\tau)||v_1(s)|\, ds\right) d\tau \\ &\leq C \int_t^\infty |r_{12}(\tau)| \left(\int_{\tau_0}^\tau |r_{21}(s)||e_{21}(s,\tau)|\, ds\right) d\tau.\end{aligned}$$

De (2.34) y (2.35) se tiene

$$v_1(t) = 1 + O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau\right).$$

Para $v_2(t) = \int_{t_0}^t r_{21}(\tau)\, e_{21}(\tau, t)\, v_1(\tau)\, d\tau$ se tiene

$$|v_2(t)| \leq C \int_{t_0}^t |r_{21}(\tau)||e_{21}(\tau, t)| d\tau,$$

y usando la definición (2.35)

$$v_2(t) = O\left(\mathcal{L}_1(r_{21}, t)\right).$$

$\square$

Lema 2.3.3. *Supongamos que las siguientes funciones están bien definidas. Sea*

$$\mathcal{R}_2(t) = r_{21}(t)\mathcal{L}_2(r_{12}, t) \in L^1(dt) \tag{2.38}$$

donde

$$\mathcal{L}_2(r_{12}, t) = \int_t^\infty |r_{12}(s)e_{12}(s,t)|ds. \tag{2.39}$$

Entonces existe una solución $\varphi_2 = (\omega_1, \omega_2)$ de la ecuación (2.5) cuyas coordenadas son

$$\omega_1 = O\left(\mathcal{L}_2(r_{12}, t)\right) \tag{2.40}$$

y

$$\omega_2 = 1 + O\left(\exp\left(\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_2(\tau) \mid d\tau\right) - 1\right). \tag{2.41}$$

Demostración. Probaremos la existencia de la solución φ_2 usando aproximaciones sucesivas respecto de la segunda coordenada ω_2.
Sean $\omega_2^0 = 0$ y $\omega_2^1 = 1$. Por (2.20)

$$\omega_2^j(t) = 1 + \int_t^\infty r_{21}(\tau)\left(\int_\tau^\infty r_{12}(s)\, e_{12}(s,\tau)\, \omega_2^{j-1}(s)\, ds\right) d\tau.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|\omega_2^2(t) - \omega_2^1(t)| &\leq \int_t^\infty |r_{21}(\tau)| \left(\int_\tau^\infty |r_{12}(s)\, e_{12}(s,\tau)|\, ds\right) d\tau \\
&\leq \int_t^\infty \tilde{h}(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Si denotamos esta última integral por

$$g(t) = \int_t^\infty \tilde{h}(\tau)\, d\tau, \tag{2.42}$$

donde

$$\tilde{h}(\tau) = |r_{21}(\tau)| \int_\tau^\infty |r_{12}(s)\, e_{12}(s,\tau)|\, ds, \tag{2.43}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
|\omega_2^3(t) - \omega_2^2(t)| &\leq \int_t^\infty |r_{21}(\tau)| \int_\tau^\infty |r_{12}(s)\, e_{12}(s,\tau)||\omega_2^2(s) - \omega_2^1(s)|\, ds\, d\tau \\
&\leq \int_t^\infty |r_{21}(\tau)| \int_\tau^\infty |r_{12}(s)\, e_{12}(s,\tau)| g(s)\, ds\, d\tau \\
&\leq \int_t^\infty g(\tau)\, \tilde{h}(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\omega_2^3(t)-\omega_2^2(t)| &= -\int_t^\infty g(\tau)\,g'(\tau)\,d\tau \\
&= -\int_t^\infty \left(\frac{g^2(\tau)}{2}\right)' d\tau \\
&= \frac{g^2(t)}{2}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|\omega_2^4(t)-\omega_2^3(t)| &\leq \int_t^\infty |r_{21}(\tau)| \int_\tau^\infty |r_{12}(s)\,e_{12}(s,\tau)||\omega_2^3(s)-\omega_2^2(s)|\,ds\,d\tau \\
&\leq \int_t^\infty |r_{21}(\tau)| \int_\tau^\infty |r_{12}(s)\,e_{12}(s,\tau)| \left(\frac{g^2(s)}{2}\right) ds\,d\tau \\
&\leq \frac{1}{2}\int_t^\infty g^2(\tau)\,\tilde{h}(\tau)\,d\tau \\
&= -\frac{1}{2}\int_t^\infty g^2(\tau)\,g'(\tau)\,d\tau \\
&= -\frac{1}{2}\int_t^\infty \left(\frac{g^3(\tau)}{3}\right)' d\tau \\
&= \frac{g^3(t)}{3!}.
\end{aligned}$$

Procediendo por inducción se obtiene

$$|\omega_2^{j+1}(t)-\omega_2^j(t)| \leq \frac{g^j(t)}{j!}.$$

Escribimos ω_2 como

$$\omega_2(t)=\omega_2^0(t)+\sum_{l=0}^{\infty}\left(\omega_2^{l+1}(t)-\omega_2^l(t)\right)=\lim_{l\to\infty}\omega_2^l(t),$$

entonces,

$$|\omega_2(t)| = \left|\sum_{l=0}^{\infty}\omega_2^{l+1}(t)-\omega_2^l(t)\right| \leq \sum_{l=0}^{\infty}|\omega_2^{l+1}(t)-\omega_2^l(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty}\frac{g^l(t)}{l!} = e^{g(t)},$$

que reescrito es

$$|\omega_2(t)| \leq 1 + O\left(e^{g(t)}-1\right).$$

Luego, la sucesión $\{\omega_2^l\}$ converge uniformemente a ω_2 en todo subintervalo acotado de $[t_0,\infty)$, porque g es acotada. Y además, $|\omega_2| \leq C$, con C constante.

Entonces,

$$\omega_2(t) = 1 - \int_t^\infty r_{21}(\tau) \left(\int_\tau^\infty r_{12}(s)\, e_{21}(s,\tau)\, \omega_2(s)\, ds \right) d\tau$$

y

$$\begin{aligned}
|\omega_2(t) - 1| &\leq \int_t^\infty |r_{21}(\tau)| \int_\tau^\infty |r_{12}(s) e_{12}(s,\tau)||\omega_2(s)| ds\, d\tau \\
&\leq \int_t^\infty |r_{21}(\tau)| \int_\tau^\infty |r_{12}(s) e_{12}(s,\tau)| e^{g(s)}\, ds\, d\tau \\
&\leq \int_t^\infty e^{g(\tau)} |r_{21}(\tau)| \int_\tau^\infty |r_{12}(s)\, e_{12}(s,\tau)|\, ds\, d\tau \\
&\leq \int_t^\infty e^{g(\tau)}\, h(\tau)\, d\tau \\
&\leq -\int_t^\infty e^{g(\tau)}\, g'(\tau)\, d\tau \\
&\leq -\int_t^\infty \left(e^{g(\tau)}\right)'\, d\tau \\
&\leq e^{g(t)} - 1.
\end{aligned}$$

Así, por las definiciones (2.38), (2.39), (2.42) y (2.43) se deduce que

$$\omega_2(t) = 1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)| d\tau \right] - 1 \right).$$

Para $\omega_1(t) = -\int_t^\infty r_{12}(\tau)\, e_{12}(\tau, t)\, \omega_2(\tau)\, d\tau$ se tiene que

$$|\omega_1(t)| \leq C \int_t^\infty |r_{12}(\tau)||e_{12}(\tau,t)|\, d\tau$$

y por la definición (2.39)

$$\omega_1(t) = O\left(\mathcal{L}_2(r_{12}, t)\right).$$

□

Los dos lemas vistos hasta ahora nos entregan las condiciones necesarias para que existan soluciones φ_k y además, nos aportan el error cometido al hacer la aproximación. Los siguientes lemas son el resultado de "devolverse" a través de la transformación (2.4), vista al comienzo de este capítulo, para obtener un sistema fundamental de soluciones del sistema (2.1), que es lo que nos interesa.

Observación 2.3.4. De la fórmula (2.7) se deduce que $r_{12} = r_{21} = r$.

Lema 2.3.5. *Sean las funciones $\mathcal{R}_1(t), \mathcal{R}_2(t)$ definidas en (2.34) y (2.38) pertenecientes a $L^1(dt)$, y las integrales $\mathcal{L}_1(r,t)$ y $\mathcal{L}_2(r,t)$ dadas según (2.35) y (2.39). Entonces el sistema (2.2) tiene como solución el vector $Y_1(t) = (u_1(t), u_2(t))$ con coordenadas de la forma*

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{\int^t \lambda_1}\left(1 + O\left(\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_1(\tau) \mid d\tau\right)\right), \qquad (2.44)\\ u_2(t) &= e^{\int^t \lambda_1} O(\mathcal{L}_1(r,t)), \qquad (2.45) \end{aligned}$$

y también el vector solución $Y_2(t) = (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t))$ con coordenadas

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(t) &= e^{\int^t \lambda_2} O(\mathcal{L}_2(r,t)), \qquad (2.46)\\ \hat{u}_2(t) &= e^{\int^t \lambda_2}\left(1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_2(\tau) \mid d\tau\right] - 1\right)\right). \qquad (2.47) \end{aligned}$$

donde $\lambda_1 = (q/p)^{1/2} - r$, $\lambda_2 = -(q/p)^{1/2} - r$ y $r = (pq)'/(4pq)$.

Demostración. Sean $Z_k = \varphi_k$ $(k = 1, 2)$ en la ecuación (2.5) y denotamos por $u_1(t)$ y $u_2(t)$ las coordenadas del vector solución $Y_1(t)$, entonces para $k = 1$ usando la sustitución (2.4) se tiene

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = e^{\int^t \lambda_1(s) ds} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

donde v_1 y v_2 están dadas por (2.17) y (2.16), respectivamente. De esta ecuación, usando el Lema 2.3.3, obtenemos las fórmulas (2.44) y (2.45). De forma similar, tomando $k = 2$ y el vector solución $Y_2(t) = (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t))$ obtenemos (2.46) y (2.47). $\square$

Lema 2.3.6. *Sean $\lambda_1 = (q/p)^{1/2} - r$, $\lambda_2 = -(q/p)^{1/2} - r$ y $r = (pq)'/4(pq)$. Entonces la ecuación (2.1) tiene un sistema fundamental de soluciones tales que*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\int^t \lambda_1}\left(1 + O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau + \mathcal{L}_1(r,t)\right)\right),\\ px_1'(t) &= (pq)^{1/2}(t)\, e^{\int^t \lambda_1}\left(1 + O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau + \mathcal{L}_1(r,t)\right)\right),\\ x_2(t) &= e^{\int^t \lambda_2}\left(1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)| d\tau\right] - 1 + \mathcal{L}_2(r,t)\right)\right),\\ px_2'(t) &= -(pq)^{1/2}(t)\, e^{\int^t \lambda_2}\left(1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|\, d\tau\right] - 1 + \mathcal{L}_2(r,t)\right)\right). \end{aligned}$$

Demostración. Aplicaremos la transformación (1.24), de la sección 1.2, en el sistema (2.2). Para $k = 1$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ px_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (pq)^{1/2} & -(pq)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

De esta ecuación matricial se desprende que

$$x_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \tag{2.48}$$

$$px_1'(t) = (pq)^{1/2}(t)(u_1(t) - u_2(t)). \tag{2.49}$$

De (2.17), (2.16) y por Lema 2.3.5 podemos escribir v_1 y v_2 como

$$u_1 e^{-\int^t \lambda_1} = 1 + \int_t^\infty r(\tau) \left(\int_{\tau_0}^\tau r(s)\, e_{21}(s,\tau)\, v_1(s)\, ds \right) d\tau$$

y

$$u_2 e^{-\int^t \lambda_1} = \int_{t_0}^t r(\tau)\, e_{21}(\tau, t)\, v_1(\tau)\, d\tau,$$

De la ecuación (2.48) se tiene

$$\begin{aligned} e^{-\int^t \lambda_1}(u_1 + u_2) &= 1 + \int_t^\infty r(\tau) \left(\int_{\tau_0}^\tau r(s)\, e_{21}(s,\tau)\, v_1(s)\, ds \right) d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t r(\tau)\, e_{21}(\tau,t)\, v_1(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Como se probó en el Lema 2.3.2, $|v_1(t)| \leq C$ (C constante), entonces

$$\begin{aligned} |e^{-\int^t \lambda_1}(u_1 + u_2)| &\leq 1 + \int_t^\infty |r(\tau)| \int_{\tau_0}^\tau |e_{21}(s,\tau)\, r(s)||v_1(s)|\, ds\, d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t |e_{21}(\tau,t)\, r(\tau)||v_1(\tau)|\, d\tau \\ &\leq 1 + C \int_t^\infty |r(\tau)| \int_{\tau_0}^\tau |r(s)\, e_{21}(s,\tau)|\, ds\, d\tau \\ &\quad + C \int_{t_0}^t |r(\tau)\, e_{21}(\tau,t)|\, d\tau \\ &\leq 1 + C \left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\, d\tau + \mathcal{L}_1(r,t) \right). \end{aligned}$$

Luego,

$$x_1(t) = e^{\int^t \lambda_1} \left(1 + O\left(\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_1(\tau) \mid d\tau + \mathcal{L}_1(r,t) \right) \right).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} e^{-\int^t \lambda_1}(u_1 - u_2) &= 1 - \int_{t_0}^{t} r(\tau)\, e_{21}(\tau, t)\, v_1(\tau)\, d\tau \\ &\quad - \int_t^{\infty} r(\tau) \left(\int_{\tau_0}^{\tau} r(s)\, e_{21}(s, \tau)\, v_1(s)\, ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |e^{\int^t -\lambda_1} (u_1 - u_2)| &\le 1 + \int_{t_0}^{t} |r(\tau)\, e_{21}(\tau, t)||v_1(\tau)| d\tau \\ &\quad + \int_t^{\infty} |r(\tau)| \int_{\tau_0}^{\tau} |r(s)\, e_{21}(s, \tau)||v_1(s)|\, ds\, d\tau \\ &\le 1 + C \int_t^{\infty} |r(\tau)| \int_{\tau_0}^{\tau} |r(s)\, e_{21}(s, \tau)|\, ds\, d\tau \\ &\quad + C \int_{t_0}^{t} |r(\tau)\, e_{21}(\tau, t)|\, d\tau \\ &\le 1 + C \left(\int_t^{\infty} \mid \mathcal{R}_1(\tau) \mid d\tau + \mathcal{L}_1(r, t) \right). \end{aligned}$$

Así, de la ecuación (2.49) se tiene que

$$px_1'(t) = (pq)^{1/2}(t) e^{\int^t \lambda_1} \left(1 + O\left(\int_t^{\infty} \mid \mathcal{R}_1(\tau) \mid d\tau + \mathcal{L}_1(r, t) \right) \right).$$

De las fórmulas (2.18) y (2.20) de la sección 2.2 y por el Lema 2.3.3 se tiene que las coordenadas $\hat{u}_1(t)$ y $\hat{u}_2(t)$ de $Y_2(t)$ son

$$\hat{u}_1(t) = -e^{\int^t \lambda_2} \int_t^{\infty} r(\tau)\, e_{12}(\tau, t)\, \omega_2(\tau)\, d\tau$$

y

$$\hat{u}_2(t) = e^{\int^t \lambda_2} \left(1 - \int_t^{\infty} r(\tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} r(s)\, e_{12}(s, \tau)\, \omega_2(s)\, ds \right) d\tau \right).$$

De la matriz (1.25), la transformación (1.24) y sabiendo que $Y_2(t) = (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t))$, procedemos de manera similar al caso $k = 1$ obteniendo las siguientes relaciones

$$x_2(t) = \hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) \tag{2.50}$$

$$px_2'(t) = (pq)^{1/2}(t)(\hat{u}_1(t) - \hat{u}_2(t)). \tag{2.51}$$

De la ecuación (2.50), se tiene que

$$\begin{aligned} e^{-\int^t \lambda_2}(\hat{u}_1 + \hat{u}_2) &= 1 - \int_t^\infty r(\tau)\, e_{12}(\tau, t)\, \omega_2(\tau)\, d\tau \;+ \\ &\quad - \int_t^\infty r(\tau) \left(\int_\tau^\infty r(s)\, e_{12}(s, \tau)\, \omega_2(s)\, ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

Como se probó en el Lema 2.3.3, $\omega_2(t)$ es acotada y $|\omega_2(t)| \leq e^{g(t)}$, donde $g(t) = \int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)| d\tau$, entonces

$$\begin{aligned} |e^{-\int^t \lambda_2}(\hat{u}_1 + \hat{u}_2)| &\leq 1 + \int_t^\infty |r(\tau) e_{12}(\tau, t)||\omega_2(\tau)|\, d\tau \\ &\quad + \int_t^\infty |r(\tau)| \left(\int_\tau^\infty |r(s)\, e_{12}(s, \tau)||\omega_2(s)|\, ds \right) d\tau \\ &\leq 1 + \left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)| d\tau \right] - 1 + C\mathcal{L}_2(r, t) \right). \end{aligned}$$

De aquí se desprende que

$$x_2(t) = e^{\int^t \lambda_2} \left(1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)| d\tau \right] - 1 + \mathcal{L}_2(r, t) \right) \right).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} e^{-\int^t \lambda_2}(\hat{u}_1 - \hat{u}_2) &= -1 - \int_t^\infty r(\tau)\, e_{12}(\tau, t)\, \omega_2(\tau)\, d\tau \\ &\quad + \int_t^\infty r(\tau) \left(\int_\tau^\infty r(s)\, e_{12}(s, \tau)\, \omega_2(s)\, ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |e^{-\int^t \lambda_2}(\hat{u}_1 - \hat{u}_2) + 1| &\leq \int_t^\infty |r(\tau) e_{12}(\tau, t)||\omega_2(\tau)|\, d\tau \\ &\quad + \int_t^\infty |r(\tau)| \left(\int_\tau^\infty |r(s)\, e_{12}(s, \tau)||\omega_2(s)|\, ds \right) d\tau \\ &\leq \left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)| d\tau \right] - 1 + C\mathcal{L}_2(r, t) \right). \end{aligned}$$

Por (2.51), tenemos que

$$px_2'(t) = -(pq)^{1/2}(t) e^{\int^t \lambda_2} \left(1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)| d\tau \right] - 1 + \mathcal{L}_2(r, t) \right) \right).$$

$\square$

2.4. Fórmulas asintóticas obtenidas por Desacoplamiento.

En esta sección se les aplicará a los distintos sistemas obtenidos en el Capítulo 1 los resultados de la sección 2.3.

Comenzamos con el sistema (1.41) obtenido de la ecuación (2.2) mediante la transformación de la variable independiente

$$s = \int^{t} (q/p)^{1/2}, \tag{2.52}$$

esto es,

$$\dot{Y}(s) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - h(s) & 0 \\ 0 & -1 - h(s) \end{pmatrix} + h(s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} Y(s) \tag{2.53}$$

donde

$$h = \frac{1}{4} \left(\frac{(pq)'}{pq} \right) (q/p)^{1/2}. \tag{2.54}$$

Para que en el sistema (2.53) se satisfagan las condiciones (2.34) y (2.38) del Lema 2.3.2 y Lema 2.3.3 respectivamente, la función $h(s)$ debe pertenecer a $L^m(ds)$. El siguiente lema prueba esto.

Lema 2.4.1. *Sea*

$$h(s) \in L^m(ds) \tag{2.55}$$

para $1 \leq m \leq 2$. *Entonces,*

$$\mathcal{R}_1(s) = h(s) \int_a^s |h(\varsigma)| \exp\left(-2(s - \varsigma)\right) d\varsigma$$

y

$$\mathcal{R}_2(s) = h(s) \int_s^\infty |h(\varsigma)| \exp\left(2\{s - \varsigma\}\right) d\varsigma$$

están en $L^1(ds)$. *Además, las integrales*

$$\mathcal{L}_1(h, s) = \int_a^s |h(\varsigma)| \exp\left(-2(s - \varsigma)\right) d\varsigma$$

y

$$\mathcal{L}_2(h, s) = \int_s^\infty |h(\varsigma)| \exp\left(2(s - \varsigma)\right) d\varsigma$$

en las funciones $\mathcal{R}_1$ *y* $\mathcal{R}_2$ *satisfacen*

$$\mathcal{L}_1(h, s), \mathcal{L}_2(h, s) \in L^m(ds) \text{ y } \mathcal{L}_1(h, s), \mathcal{L}_2(h, s) \to 0$$

cuando $s \to \infty$.

Demostración. Consideremos $h(s) \in L^m(ds)$ con $1 \leq m \leq 2$ y la función

$$\mathcal{R}_1(s) = h(s) \int_a^s |h(\varsigma)| \exp\left(-2(s-\varsigma)\right) d\varsigma$$

dada según (2.34) en Lema 2.3.2. Denotamos por

$$\mathcal{L}_1(h,s) = \int_a^s |h(\varsigma) \exp\left(-2(s-\varsigma)\right)| d\varsigma$$

a la integral en $\mathcal{R}_1(s)$.
Suponemos que $m \neq 1$, entonces

$$|\mathcal{L}_1(h,s)| \leq e^{-s} \int_a^{\frac{1}{2}s} |h(\varsigma)| d\varsigma + \int_{\frac{1}{2}s}^{s} |h(\varsigma)| \exp\left(-2\{s-\varsigma\}\right) d\varsigma.$$

Usando desigualdad de Hölder en la integral de la derecha se deduce que $|\mathcal{L}_1(h,s)| \to 0$ cuando $s \to \infty$. A continuación, se probará que $\mathcal{L}_1(h,s) \in L^m(ds)$.
Sea $u = s - \varsigma$, entonces por desigualdad de Minkowski tenemos que

$$\left(\int_a^\infty |\mathcal{L}_1(h,s)|^m ds\right)^{1/m} \leq \int_0^\infty e^{-2u} \left(\int_a^\infty |h(s-u)|^m ds\right)^{1/m} du.$$

De esta manera el lado derecho de la desigualdad es finito porque $h \in L^m$.
Por desigualdad de Hölder, para $m \neq 1$

$$\int_X^\infty |\mathcal{R}_1(s)| ds \leq \left(\int_X^\infty |h(s)|^m ds\right)^{1/m} \left(\int_X^\infty |\mathcal{L}_1(h,s)|^q ds\right)^{1/q}$$

donde $1/m + 1/q = 1$, y como $m \leq 2$ se concluye que $m \leq q$. De las condiciones $\mathcal{L}_1(h,s) \to 0$ cuando $s \to \infty$ y $\mathcal{L}_1(h,s) \in L^m(ds)$ se tiene que $\mathcal{L}_1(h,s) \in L^q(X,\infty)$. Por lo tanto, la integral de la derecha de la última desigualdad es finita y $\mathcal{R}_1(s) \in L^1(X,\infty)$.
Si $h(s) \in L^1(ds)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau &\leq \int_s^\infty |h(\tau)| \int_a^s |h(\varsigma)| \exp\left(-2(s-\varsigma)\right) d\varsigma\, d\tau \\
&\leq \int_s^\infty |h(\tau)| \int_a^s |h(\varsigma)|\, d\varsigma\, d\tau \\
&\leq K.
\end{aligned}$$

Sea

$$\mathcal{R}_2(s) = h(s) \int_s^\infty |h(\varsigma)| \exp\left(2(s-\varsigma)\right) d\varsigma$$

definida según (2.38) en Lema 2.3.3.
Denotamos por $\mathcal{L}_2(h,s) = \int_s^\infty |h(\varsigma)| \exp\left(-2(\varsigma - s)\right) d\varsigma$ a la integral en $\mathcal{R}_2$.
Para $m \neq 1$, de (2.55) y por desigualdad de Hölder

$$|\mathcal{L}_2(h,s)| \leq \left(\int_s^\infty |h(\varsigma)|^m d\varsigma\right)^{1/m} \left(\int_s^\infty \exp\left(-2q(\varsigma - s)\right) d\varsigma\right)^{1/q}$$

Como $h \in L^m$, $m \neq 1$, la integral tiende a cero cuando s crece, por lo tanto, $\mathcal{L}_2(h,s) \to 0$ cuando $s \to \infty$.
Haciendo un cambio de variable se tiene que

$$|\mathcal{L}_2(h,s)| \leq \int_0^\infty e^{-2u} |h(s-u)| ds du$$

y nuevamente usando la desigualdad de Minkowski se llega a que $\mathcal{L}_2(h,s) \in L^m(ds)$. De manera análoga a como se procedió para probar que $\mathcal{R}_1 \in L^1$ se deduce que $\mathcal{R}_2 \in L^1$. $\square$

Si $h^m (q/p)^{1/2} \in L^1(dt)$ con $1 \leq m \leq 2$, que es la condición (2.55) en la variable t, entonces por los Lemas 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.5, y usando la transformación (2.52), se tiene que las soluciones $Y_k(t)$ $(k = 1, 2)$ del sistema (2.53) son

$$Y_1(t) = (pq)^{-1/4}(t) \exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau) d\tau\right) \begin{pmatrix} 1 + O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau\right) \\ O\left(\mathcal{L}_1(r,t)\right) \end{pmatrix}$$

e

$$Y_2(t) = (pq)^{-1/4}(t) \exp\left(\int_b^t -(q/p)^{1/2}(\tau) d\tau\right) \begin{pmatrix} O\left(\mathcal{L}_2(r,t)\right) \\ 1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)| d\tau\right] - 1\right) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(t) &= r(t) \int_b^t |r(\varsigma)| \exp\left(-2\int_\varsigma^t \operatorname{Re}\left\{(q/p)^{1/2}\right\}\right) d\varsigma, \\ \mathcal{R}_2(t) &= r(t) \int_t^\infty |r(\varsigma)| \exp\left(2\int_\varsigma^t \operatorname{Re}\left\{(q/p)^{1/2}\right\}\right) d\varsigma \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(r,t) &= \int_b^t |r(\tau)| \exp\left(-2\int_\tau^t \operatorname{Re}\left\{(q/p)^{1/2}\right\}\right) d\tau, \\ \mathcal{L}_2(r,t) &= \int_t^\infty |r(\tau)| \exp\left(2\int_\tau^t \operatorname{Re}\left\{(q/p)^{1/2}\right\}\right) d\tau, \end{aligned}$$

con

$$r = \frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right).$$

Finalmente, del Lema 2.3.6, la ecuación $\{p(t)x'(t)\}' - q(t)x = 0$ tiene soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (pq)^{-1/4}(t)\exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\, d\tau + \mathcal{L}_1(r,t)\right)\right), \qquad (2.56) \\ px_1'(t) &= (pq)^{1/4}(t)\exp\left(\int_b^t (q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\, d\tau + \mathcal{L}_1(r,t)\right)\right) \qquad (2.57) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= (pq)^{-1/4}(t)\exp\left(\int_b^t -(q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \times \\ &\quad \left(1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|\, d\tau\right] - 1 + \mathcal{L}_2(r,t)\right)\right), \qquad (2.58) \\ px_2'(t) &= (pq)^{1/4}(t)\exp\left(\int_b^t -(q/p)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \times \\ &\quad \left(1 + O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|\, d\tau\right] - 1 + \mathcal{L}_2(r,t)\right)\right). \qquad (2.59) \end{aligned}$$

En lo que sigue, mostramos algunos ejemplos de funciones $p(t)$ y $q(t)$ de la ecuación (1.20), que ya han sido expuestos en el capítulo anterior, en los que la condición (2.55) del Lema 2.4.1 escrito según la variable t se satisface, es decir, se tiene

$$h^m (q/p)^{1/2} \in L^1(dt) \qquad (2.60)$$

con $1 \leq m \leq 2$.

Ejemplo 2.4.2. Sean $p(t) = A\,t^\alpha$ y $q(t) = B\,t^\beta$ con A, B constantes y α, β constantes reales . La m-condición de integrabilidad (2.60) para $1 < m \leq 2$ es satisfecha si

$$m\left(1 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right) > 1 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha),$$

esto es,

$$(m-1)\left(1+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\right)>0.$$

Como $(m-1)>0$, entonces la m-condición de integrabilidad es

$$\alpha-\beta<2.$$

Notamos que los resultados no varían del Ejemplo 1.4.2 mostrado en la sección 1.4.

La solución $x_1(t)$ escrita de forma aproximada según (2.56) y la fórmula (2.57) son

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx (AB)^{-1/4}\, t^{-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)} \exp\left((B/A)^{1/2}\left(1+\frac{\beta-\alpha}{2}\right) t^{1+(\beta-\alpha)/2}\right) \\ At^{\alpha}x_1'(t) &\approx (AB)^{1/4}\, t^{\frac{1}{4}(\alpha+\beta)} \exp\left((B/A)^{1/2}\left(1+\frac{\beta-\alpha}{2}\right) t^{1+(\beta-\alpha)/2}\right), \end{aligned}$$

con un error estimado $O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\,d\tau+\mathcal{L}_1(r,t)\right)$ donde

$$\mathcal{R}_1(t) = t^{-1}\int_b^t \varsigma^{-1}\exp\left(-2C\int_\varsigma^t s^{(\beta-\alpha)/2}ds\right)d\varsigma$$

y con la constante $C=\operatorname{Re}\{(B/A)^{1/2}\}$. Entonces,

$$\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\,d\tau = \int_t^\infty \tau^{-1}\exp\left(-2D\tau^{1+(\beta-\alpha)/2}\right)\left(\int_b^\tau \varsigma^{-1}\exp\left(2D\varsigma^{1+(\beta-\alpha)/2}\right)d\varsigma\right)d\tau,$$

donde $D=\operatorname{Re}\{(B/A)^{1/2}\}(1+(\beta-\alpha)/2)^{-1}$.
Además,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(r,t) &= |C_1|\int_b^t \tau^{-1}\exp\left(-2C\int_\tau^t s^{(\beta-\alpha)/2}ds\right)d\tau \\ &= |C_1|\exp\left(-2D\,t^{(\beta-\alpha)/2+1}\right)\int_b^t \tau^{-1}\exp\left(2D\,\tau^{(\beta-\alpha)/2+1}\right)d\tau, \end{aligned}$$

con $C_1=(\alpha+\beta)/4$.

La aproximación de la solución $x_2(t)$ según (2.58) es

$$x_2(t)\approx (AB)^{-1/4}\,t^{-(\alpha+\beta)/4}\exp\left(-(A/B)^{1/2}\left(1+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)t^{1+(\beta-\alpha)/2}\right),$$

y el error estimado es $O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|\,d\tau + \mathcal{L}_2(r,t)\right)$ con

$$\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|\,d\tau = \int_t^\infty \tau^{-1}\exp\left(2D\tau^{1+(\beta-\alpha)/2}\right)\left(\int_\tau^\infty \varsigma^{-1}\exp\left(-2D\varsigma^{1+(\beta-\alpha)/2}\right)d\varsigma\right)d\tau$$

y

$$\mathcal{L}_2(r,t) = |C_1|\exp\left(2D\,t^{(\beta-\alpha)/2+1}\right)\int_t^\infty \tau^{-1}\exp\left(-2D\,\tau^{(\beta-\alpha)/2+1}\right)d\tau.$$

La fórmula para $px_2'(t)$ es según (2.59)

$$At^\alpha x_2'(t) \approx (AB)^{1/4}\,t^{(\alpha+\beta)/4}\exp\left(-(A/B)^{1/2}\left(1+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)t^{1+(\beta-\alpha)/2}\right),$$

y el error de éste es análogo al de la solución $x_2(t)$.

Ejemplo 2.4.3. Sean $p(t) = A\exp(t^\alpha)$ y $q(t) = B\exp(t^\beta)$ en la ecuación (1.20), con α, β números reales y A, B constantes. La m-condición de integrabilidad (2.60) que debe ser satisfecha es la misma condición (1.48) del Ejemplo 1.4.3, es decir,

$$\beta > \alpha > 0.$$

Por (2.56), la solución $x_1(t)$ escrita de forma aproximada es

$$x_1(t) \approx (AB)^{-1/4}\,exp\left(-\frac{1}{4}(t^\alpha + t^\beta)\right)\exp\left((B/A)^{1/2}\int_b^t e^{(s^\beta - s^\alpha)/2}ds\right),$$

donde el error estimado es $O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\,d\tau + \mathcal{L}_1(r,t)\right)$, con

$$\begin{aligned}\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\,d\tau &= \frac{1}{16}\int_t^\infty \left(\alpha\tau^{\alpha-1} + \beta\tau^{\beta-1}\right)\int_b^\tau \left(\alpha\varsigma^{\alpha-1} + \beta\varsigma^{\beta-1}\right)\times \\ &\quad \exp\left(-2C\int_\varsigma^\tau e^{(s^\beta - s^\alpha)/2}ds\right)d\varsigma\,d\tau\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}_1(r,t) = \frac{1}{4}\int_b^t \left(\alpha\tau^{\alpha-1} + \beta\tau^{\beta-1}\right)\exp\left(-2C\int_\tau^t e^{(s^\beta - s^\alpha)/2}ds\right)d\tau,$$

donde $C = \mathrm{Re}\{(B/A)^{1/2}\}$.

La fórmula $px_1'(t)$ escrita de forma aproximada, por (2.57), es

$$Ae^{t^\alpha} x_1'(t) \approx (AB)^{1/4} \exp\left(\frac{1}{4}(t^\alpha + t^\beta)\right) \exp\left((B/A)^{1/2} \int_b^t e^{(s^\beta - s^\alpha)/2} ds\right),$$

y el error de esta derivada es igual al de la solución $x_1(t)$.
Finalmente, la solución $x_2(t)$ difiere de $x_1(t)$ por un signo negativo en la integral del término exponencial, y su error se calcula de manera similar como se hizo para $x_1(t)$.

Ejemplo 2.4.4. Sean $p(t) = t^\alpha f(t^\gamma)$ y $q(t) = t^\beta g(t^\eta)$, con f y g funciones periódicas nunca nulas y α, β, γ y η constantes reales. Entonces, la m-condición de integrabilidad (2.60) se cumple si

$$\alpha - \beta + 2\left(\frac{m}{m-1}\right) \mathrm{Max}\{0, \gamma, \eta\} < 2,$$

con $1 < m \leq 2$.
La solución $x_1(t)$ y la fórmula de $px_1'(t)$, expresadas de forma aproximada, son

$$x_1(t) \approx t^{-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)} (f(t^\gamma) g(t^\eta))^{-1/4} \exp\left(\int_b^t t^{(\beta-\alpha)/2} (g(s^\eta)/f(s^\gamma))^{1/2} ds\right)$$

y

$$t^\alpha f(t^\gamma)\, x_1'(t) \approx t^{\frac{1}{4}(\alpha+\beta)} (f(t^\gamma) g(t^\eta))^{1/4} \exp\left(\int_b^t t^{(\beta-\alpha)/2} (g(s^\eta)/f(s^\gamma))^{1/2} ds\right).$$

Por (2.56) y (2.57), observamos que sus errores coinciden y tienen la forma

$$O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\, d\tau + \mathcal{L}_1(r,t)\right),$$

donde las integrales $\mathcal{R}_1(t)$ y $\mathcal{L}_1(r,t)$ están dados por

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|\, d\tau \;&=\; \int_t^\infty \frac{\tau^{-1}}{4} \left\{(\alpha+\beta) + \gamma\, \tau^\gamma \left(\frac{f'(\tau^\gamma)}{f(\tau^\gamma)}\right) + \eta\, \tau^\eta \left(\frac{g'(\tau^\eta)}{g(\tau^\eta)}\right)\right\} \\
&\quad \times \int_b^\tau \frac{\varsigma^{-1}}{4} \left\{(\alpha+\beta) + \gamma\, \varsigma^\gamma \left(\frac{f'(\varsigma^\gamma)}{f(\varsigma^\gamma)}\right) + \eta\, \varsigma^\eta \left(\frac{g'(\varsigma^\eta)}{g(\varsigma^\eta)}\right)\right\} \\
&\quad \times \exp\left(-2 \int_\varsigma^\tau \mathrm{Re}\left\{ s^{(\beta-\alpha)/2} \left(\frac{g(s^\eta)}{f(s^\gamma)}\right)^{1/2} \right\} ds\right) d\varsigma\, d\tau
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(r,t) &= \int_b^t \frac{\tau^{-1}}{4}\left\{(\alpha+\beta)+\gamma\,\tau^\gamma\left(\frac{f'(\tau^\gamma)}{f(\tau^\gamma)}\right)+\eta\,\tau^\eta\left(\frac{g'(\tau^\eta)}{g(\tau^\eta)}\right)\right\}\\ &\quad\times\exp\left(-2\int_\tau^t \mathrm{Re}\left\{s^{(\beta-\alpha)/2}\left(\frac{g(s^\eta)}{f(s^\gamma)}\right)^{1/2}\right\}ds\right)d\tau.\end{aligned}$$

De manera análoga se obtienen las fórmulas para $x_2(t)$ y $px_2'(t)$ con su error.

El segundo sistema al que le aplicaremos los resultados de la sección anterior, es el sistema (1.79) de la sección 1.5 del capítulo anterior. Este sistema se obtuvo al realizar una diagonalización a la matriz Λ_1+R_1 del sistema (1.68), esto es,

$$\dot{Y}_2(s)=\left\{\begin{pmatrix}(q_2-\rho_2)(s) & 0\\ 0 & (-q_2-\rho_2)(s)\end{pmatrix}+r_2(s)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}Y_2(s) \qquad (2.61)$$

donde ρ_2 está dada según (1.82) y las funciones r_2 y q_2 son respectivamente

$$r_2=\frac{1}{2}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)(q/p)^{-1/2} \quad \text{y} \quad q_2=\left(1+h^2\right)^{1/2},$$

donde

$$h=\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right)(q/p)^{-1/2} \ \text{ y } \ h(s)\to 0 \ (s\to\infty).$$

Para que las condiciones (2.34) y (2.38) de los Lemas 2.3.2 y 2.3.3, respectivamente, se satisfagan se debe tener que

$$r_2(s)\in L^m(ds) \ \ (1\le m\le 2).$$

Esta condición suficiente es probada en el siguiente lema.

Lema 2.4.5. *Supongamos que*

$$r_2(s)\in L^m(ds) \ \ (1\le m\le 2). \qquad (2.62)$$

Entonces

$$\mathcal{R}_1(s) \;=\; r_2(s)\int_{s_0}^s |r_2(\varsigma)|\exp\left(-2\int_\varsigma^s \mathrm{Re}\{q_2(\tau)\}\,d\tau\right)d\varsigma \qquad (2.63)$$

y

$$\mathcal{R}_2(s) \;=\; r_2(s)\int_s^\infty |r_2(\varsigma)|\,\exp\left(2\int_\varsigma^s \mathrm{Re}\{q_2(\tau)\}\,d\tau\right)d\varsigma \tag{2.64}$$

están en $L^1(ds)$. Además, las integrales

$$\mathcal{L}_1(r_2,s) = \int_{s_0}^s |r_2(\varsigma)|\,\exp\left(-2\int_\varsigma^s \mathrm{Re}\{q_2(\tau)\}\,d\tau\right)d\varsigma$$

y

$$\mathcal{L}_2(r_2,s) = \int_s^\infty |r_2(\varsigma)|\,\exp\left(2\int_\varsigma^s \mathrm{Re}\{q_2(\tau)\}\,d\tau\right)d\varsigma$$

que aparecen en la denición de las funciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ satisfacen

$$\mathcal{L}_1(r_2,s),\mathcal{L}_2(r_2,s)\in L^m(ds) \;\text{ y }\; \mathcal{L}_1(r_2,s),\mathcal{L}_2(r_2,s)\to 0$$

cuando $s\to\infty$.

Demostración. Como $h\to 0$ cuando $s\to\infty$, entonces para $\delta>0$

$$\mathrm{Re}\{q_2(s)\} = \mathrm{Re}\left\{\left(1+h^2(s)\right)^{1/2}\right\} = \mathrm{Re}\left\{(1+o(1))^{1/2}\right\}\ge\delta, \tag{2.65}$$

en cierto intervalo $[a_0,\infty)$, y por definición de la función q_2 se tiene

$$\exp\left(-2\int_\varsigma^s \mathrm{Re}\left\{\left(1+h^2(\tau)\right)^{1/2}\right\}d\tau\right)\le\exp\left(-2\delta(s-\xi)\right).$$

Entonces, para $m=1$

$$\begin{aligned}\int_s^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)| \;&\le\; \int_s^\infty |r_2(\tau)|\int_{\tau_0}^\tau |r_2(\varsigma)|\,\exp\left(-2\int_\varsigma^\tau \mathrm{Re}\{q_2(s)\}\,ds\right)d\varsigma\,d\tau\\ &\le\; \int_s^\infty |r_2(\tau)|\int_{\tau_0}^\tau |r_2(\varsigma)|\,\exp\left(-2\delta(\tau-\varsigma)\right)d\varsigma\,d\tau\\ &\le\; \int_s^\infty |r_2(\tau)|\int_{\tau_0}^\tau |r_2(\varsigma)|d\varsigma\,d\tau\\ &\le\; K,\end{aligned}$$

es decir, $\mathcal{R}_1(s)\in L^1(ds)$ si $h(s)\in L^1(ds)$.
Ahora, si $1<m\le 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}_1(r_2,s)| \;&\le\; \int_{s_0}^s |r_2(\varsigma)|\,e^{-2\delta(s-\varsigma)}d\varsigma &(2.66)\\ &\le\; e^{-\delta s}\int_a^{\frac{1}{2}s}|r_2(\varsigma)|d\varsigma+\int_{\frac{1}{2}s}^s e^{-2\delta(s-\varsigma)}|r_2(\varsigma)|d\varsigma. &(2.67)\end{aligned}$$

De la desigualdad de Hölder se deduce que $|\mathcal{L}_1(r_2,s)| \to 0$ cuando $s \to \infty$. Por (2.65) se obtiene que

$$|\mathcal{L}_2(r_2,s)| \leq \int_s^\infty |r_2(\varsigma)|\, e^{-2\delta(\varsigma - s)}\, d\varsigma. \tag{2.68}$$

De (2.62) y usando la desigualdad de Hölder, para $m \neq 1$ tenemos

$$|\mathcal{L}_2(r_2,s)| \;\leq\; \left(\int_s^\infty |r_2(\varsigma)|^m d\varsigma\right)^{1/m} \left(\int_s^\infty e^{-2q\delta(\varsigma - s)} d\varsigma\right)^{1/q}.$$

Como $r_2(s) \in L^m(ds)$, la integral de la derecha es pequeña cuando s crece. Por lo tanto, $|\mathcal{L}_2(r_2,s)| \to 0$ cuando $s \to \infty$.
Reescribiendo las inecuaciones (2.66) y (2.68), usando la relación $u = s - \varsigma$ y $u = \varsigma - s$ respectivamente, se tiene

$$|\mathcal{L}_1(r_2,s)| \leq \int_0^\infty |r_2(s-u)|\, e^{-2\delta u} du \tag{2.69}$$

y

$$|\mathcal{L}_2(r_2,s)| \leq \int_0^\infty |r_2(s+u)|\, e^{-2\delta u} du. \tag{2.70}$$

Finalmente, usando que $r_2(s) \in L^m(ds)$, $\mathcal{L}_1(r_2,s) \to 0$ y $\mathcal{L}_2(r_2,s) \to 0$ cuando $s \to \infty$ y siguiendo los mismos pasos que en el Lema 2.4.1, cambiando solamente la función h por r_2, se deduce el resultado deseado.

El procedimiento para demostrar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ pertenecen en L^1, para $1 \leq m \leq 2$, es análogo al Lema 2.4.1. □

La condición (2.62) es equivalente en la variable t a

$$\left(\frac{h'}{(1+h^2)}(q/p)^{-1/2}\right)^m (q/p)^{1/2} \in L^1(dt) \;\; (1 \leq m \leq 2). \tag{2.71}$$

Suponiendo que se cumple la condición (2.62), de los Lemas 2.3.2, 2.3.3, 2.3.5 y de la transformación (2.52) se sigue que existen soluciones $Y_{2,k}(t)$ $(k = 1,2)$ del sistema (2.61) de la forma

$$\begin{aligned} Y_{2,1}(t) &= (pq)^{-1/4}(t)\left(1 + a_1^2(t)\right)^{-1/2} \\ &\times \begin{pmatrix} \exp\left(\int_b^t (q/p + r^2)^{1/2}(\tau)d\tau\right)\left(1 + O\left(\int_t^\infty |\mathcal{R}_1(\tau)|d\tau\right)\right) \\ \exp\left(\int_b^t (q/p + r^2)^{1/2}(\tau)d\tau\right) O\left(\mathcal{L}_1(\hat{r}_2, t)\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
Y_{2,2}(t) &= (pq)^{-1/4}(t)\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}\times \\
&\left(\begin{array}{c} \exp\left(\int_b^t -(q/p+r^2)^{1/2}(\tau)d\tau\right)\left(1+O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|d\tau\right]-1\right)\right) \\ \exp\left(-\int_b^t (q/p+r^2)^{1/2}(\tau)d\tau\right) O\left(\mathcal{L}_2(\hat{r}_2,t)\right) \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

donde

$$r=\frac{1}{4}\left(\frac{(pq)'}{pq}\right),\ \hat{r}_2(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{h'}{1+h^2}\right)$$

y

$$a_1=\frac{h}{1+(1+h^2)^{1/2}}.$$

Además, las funciones $\mathcal{R}_i(t)$ y $\mathcal{L}_i(\hat{r}_2,t)$ $(i=1,2)$ del Lema 2.3.5 vienen dadas por:

$$\mathcal{R}_1(t)=\hat{r}_2(t)\int_{t_0}^t |\hat{r}_2(\tau)|\exp\left(-2\int_\varsigma^\tau \mathrm{Re}\left\{\left(q/p+r^2\right)^{1/2}(\varsigma)\right\}d\varsigma\right)d\tau,$$

$$\mathcal{R}_2(t)=\hat{r}_2(t)\int_t^\infty |\hat{r}_2(\tau)|\exp\left(2\int_\varsigma^\tau \mathrm{Re}\left\{\left(q/p+r^2\right)^{1/2}(\varsigma)\right\}d\varsigma\right)d\tau,$$

y

$$\mathcal{L}_1(\hat{r}_2,t)=\int_{t_0}^t |\hat{r}_2(\tau)|\exp\left(-2\int_\varsigma^\tau \mathrm{Re}\left\{\left(q/p+r^2\right)^{1/2}(\varsigma)\right\}d\varsigma\right)d\tau,$$

$$\mathcal{L}_2(\hat{r}_2,t)=\int_t^\infty |\hat{r}_2(\tau)|\exp\left(2\int_\varsigma^\tau \mathrm{Re}\left\{\left(q/p+r^2\right)^{1/2}(\varsigma)\right\}d\varsigma\right)d\tau.$$

De (1.72), de la transformación (1.75) y por el Lema 2.3.6, se deduce que la solución $x_1(t)$ y la fórmula de $px_1'(t)$ de la ecuación original (2.1) son respectivamente

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= (pq)^{-1/4}(t)\,(1+a_1(t))\,\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}\exp\left(\int_{t_0}^t \left(q/p+r^2\right)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \\
&\times\left(1+O\left(\int_t^\infty |\ \mathcal{R}_1(\tau)\ |\ d\tau+\mathcal{L}_1(\hat{r}_2,t)\right)\right), \qquad (2.72)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
px_1'(t) &= (pq)^{1/4}(t)\,(1-a_1(t))\,\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}\exp\left(\int_{t_0}^t \left(q/p+r^2\right)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \\
&\times\left(1+O\left(\int_t^\infty |\ \mathcal{R}_1(\tau)\ |\ d\tau+\mathcal{L}_1(\hat{r}_2,t)\right)\right). \qquad (2.73)
\end{aligned}
$$

De manera similar se obtienen las fórmulas de $x_2(t)$ y $px_2'(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= (pq)^{-1/4}(t)\,(1-a_1(t))\,\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}\exp\left(\int_{t_0}^{t}-\left(q/p+r^2\right)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \\ &\quad\times\left(1+O\left(\exp\left[\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_2(\tau)\mid d\tau\right]-1+\mathcal{L}_2(\hat{r}_2,t)\right)\right), \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned} px_2'(t) &= (pq)^{1/4}(t)\,(-1-a_1(t))\,\left(1+a_1^2(t)\right)^{-1/2}\exp\left(\int_{t_0}^{t}-\left(q/p+r^2\right)^{1/2}(\tau)d\tau\right) \\ &\quad\times\left(1+O\left(\exp\left[\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_2(\tau)\mid d\tau\right]-1+\mathcal{L}_2(\hat{r}_2,t)\right)\right). \end{aligned} \tag{2.75}$$

A continuación mostraremos dos ejemplo de funciones $p(t)$ y $q(t)$ que satisfacen la condición (2.71) suficiente para que la ecuación (2.1) tenga soluciones asintóticas de la forma descrita arriba.

Ejemplo 2.4.6. Consideremos las funciones $p(t)=1$ y $q(t)=A\,t^\alpha$, donde A es una constante. Entonces, por la condición de integrabilidad (2.71) se tiene que $\alpha>-2$, para todo $1\le m\le 2$.
La solución de $x_1(t)$ y la fórmula de $px_1'(t)$ escritas de forma aproximada son:

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx (At^\alpha)^{-1/4}\left(1+\left[c^{-1}t^{1+\alpha/2}+(1+c^{-2}t^{2+\alpha})^{1/2}\right]^{-2}\right)^{-1/2} \\ &\quad\times\left[1+\left(c^{-1}t^{1+\alpha/2}+\left(1+c^{-2}\,t^{2+\alpha}\right)^{1/2}\right)^{-1}\right] \\ &\quad\times\exp\left(\int_{t_0}^{t}\left(A\tau^\alpha+\frac{\alpha^2}{16}\tau^{-2}\right)^{1/2}d\tau\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1'(t) &\approx (At^\alpha)^{1/4}\left(1+\left[c^{-1}t^{1+\alpha/2}+(1+c^{-2}t^{2+\alpha})^{1/2}\right]^{-2}\right)^{-1/2} \\ &\quad\times\left[1-\left(c^{-1}t^{1+\alpha/2}+\left(1+c^{-2}\,t^{2+\alpha}\right)^{1/2}\right)^{-1}\right] \\ &\quad\times\exp\left(\int_{t_0}^{t}\left(A\tau^\alpha+\frac{\alpha^2}{16}\tau^{-2}\right)^{1/2}d\tau\right), \end{aligned}$$

donde $c=\alpha/(4A^{1/2})$.
El error de la aproximación es de la forma $O\left(\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_1(\tau)\mid d\tau+\mathcal{L}_1(\hat{r}_2,t)\right)$

con

$$\begin{aligned}\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_1(\tau) \mid d\tau &= \left(\frac{\alpha(\alpha+2)}{16A^{1/2}}\right)^2 \int_t^\infty \frac{\tau^{-2-\alpha/2}}{1+c^2\tau^{-(\alpha+2)}} \int_{\tau_0}^\tau \frac{\varsigma^{-2-\alpha/2}}{1+c^2\varsigma^{-(\alpha+2)}} \\ &\quad \times \exp\left(-2\int_s^\varsigma \left(As^\alpha + \frac{\alpha^2}{16}s^{-2}\right)^{1/2} ds\right) d\varsigma\, d\tau\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}_1(\hat{r}_2, t) = \left|\frac{\alpha(\alpha+2)}{16A^{1/2}}\right| \int_{t_0}^t \frac{\tau^{-2-\alpha/2}}{1+c^2\tau^{-(\alpha+2)}} \exp\left(-2\int_\varsigma^\tau \left(As^\alpha + \frac{\alpha^2}{16}s^{-2}\right)^{1/2} ds\right) d\tau.$$

Por (2.74) y (2.75), la solución de $x_2(t)$ y la fórmula de $px_2'(t)$ escritas de forma aproximada son respectivamente:

$$\begin{aligned}x_2(t) &\approx (At^\alpha)^{-1/4}\left(1+\left[c^{-1}t^{1+\alpha/2}+(1+c^{-2}t^{2+\alpha})^{1/2}\right]^{-2}\right)^{-1/2} \\ &\quad \times \left[1-\left(c^{-1}t^{1+\alpha/2}+\left(1+c^{-2}\,t^{2+\alpha}\right)^{1/2}\right)^{-1}\right] \\ &\quad \times \exp\left(-\int_{t_0}^t \left(A\tau^\alpha + \frac{\alpha^2}{16}\tau^{-2}\right)^{1/2} d\tau\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}x_2'(t) &\approx (At^\alpha)^{1/4}\left(1+\left[c^{-1}t^{1+\alpha/2}+(1+c^{-2}t^{2+\alpha})^{1/2}\right]^{-2}\right)^{-1/2} \\ &\quad \times \left[-1-\left(c^{-1}t^{1+\alpha/2}+\left(1+c^{-2}\,t^{2+\alpha}\right)^{1/2}\right)^{-1}\right] \\ &\quad \times \exp\left(-\int_{t_0}^t \left(A\tau^\alpha + \frac{\alpha^2}{16}\tau^{-2}\right)^{1/2} d\tau\right),\end{aligned}$$

donde $c = \alpha/(4A^{1/2})$.

El error de la aproximación es de la forma $O\left(\exp\left[\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_2(\tau) \mid d\tau\right] - 1 + \mathcal{L}_2(\hat{r}_2, t)\right)$ con

$$\begin{aligned}\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_2(\tau) \mid d\tau &= \left(\frac{\alpha(\alpha+2)}{16A^{1/2}}\right)^2 \int_t^\infty \frac{\tau^{-2-\alpha/2}}{1+c^2\tau^{-(\alpha+2)}} \int_\tau^\infty \frac{\varsigma^{-2-\alpha/2}}{1+c^2\varsigma^{-(\alpha+2)}} \\ &\quad \times \exp\left(2\int_s^\varsigma \left(As^\alpha + \frac{\alpha^2}{16}s^{-2}\right)^{1/2} ds\right) d\varsigma\, d\tau\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}_2(\hat{r}_2, t) = \left|\frac{\alpha(\alpha+2)}{16A^{1/2}}\right| \int_t^\infty \frac{\tau^{-2-\alpha/2}}{1+c^2\tau^{-(\alpha+2)}} \exp\left(2\int_\varsigma^\tau \left(As^\alpha + \frac{\alpha^2}{16}s^{-2}\right)^{1/2} ds\right) d\tau.$$

Ejemplo 2.4.7. *Sea $\psi(t)$ una función real y nunca nula en $[a_0, \infty)$, con* primera derivada absolutamente continua, tal que $\psi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y $\beta > 0$ una constante. Consideremos las funciones

$$p(t) = 1 \text{ y } q(t) = \psi^{\beta}(t) g(\psi(t))$$

de la ecuación (2.1), donde g es una función periódica y nunca nula. Supongamos además que

$$\psi'/\psi^{\beta/2} \to 0 \tag{2.76}$$

cuando $t \to \infty$, siendo ésta una de las condiciones suficientes para que h, dado por (2.54), tienda a cero. La condición

$$\psi''(t) = O\left(\{\psi'(t)\}^2\right) \quad (t \to \infty),$$

junto con

$$\left(\psi' \psi^{-\beta/2}\right)^{2m} \psi^{\beta/2} \in L^1(a_0, \infty), \tag{2.77}$$

permite que la condición de integrabilidad (2.71) se satisfaga.
Tomando el caso particular $\psi(t) = t^{\gamma}$, donde $\gamma > 0$ es un número real, de la condición (2.76) se obtiene

$$\gamma < 1 + \frac{\beta\gamma}{2}$$

y de (2.77)

$$2m\left(1 + \frac{\beta\gamma}{2} - \gamma\right) > 1 + \frac{\beta\gamma}{2},$$

para $1 \leq m \leq 2$. Notamos que las expresiones obtenidas son las mismas que en el Ejemplo 1.5.4.
Por motivo de que los cálculos se hacen muy engorrosos, las fórmulas asintóticas de $x_i(t)$ y $px_i'(t)$ $(i = 1, 2)$ se muestran explícitamente con sus errores en el Apéndice, al final de este capítulo.

Finalmente, los distintos resultados obtenidos en la sección 2.3 serán aplicados al sistema (1.135), esto es,

$$\dot{U}(s) = \left\{\hat{\Lambda}_1(s) + \hat{R}_1(s)\right\} U(s), \tag{2.78}$$

donde

$$\hat{\Lambda}_1(s) = \operatorname{diag}\{\hat{\lambda}_1(s), \hat{\lambda}_2(s)\}, \tag{2.79}$$

con

$$\hat{\lambda}_1 = \left(-\alpha + (1 + \alpha^2)^{1/2}\right)\left(1 - \phi/\left(1 + \alpha^2\right)^{1/2}\right)$$

y

$$\hat{\lambda}_2 = \left(-\alpha - (1+\alpha^2)^{1/2}\right)\left(1 + \phi/\left(1+\alpha^2\right)^{1/2}\right).$$

Además,

$$\hat{R}_1(s) = \frac{\phi(s)}{\alpha(1+\alpha^2)^{1/2}}\begin{pmatrix} 0 & 1+(1+\alpha^2)^{1/2} \\ -1+(1+\alpha^2)^{1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$h = \alpha + \phi, \tag{2.80}$$

con α una constante no nula y la función ϕ es tal que $\lim\limits_{s\to\infty} \phi(s) = 0$.

El siguiente lema dará la base para encontrar las soluciones del sistema (2.78), a través de los resultados desarrollados en las secciones 2.2 y 2.3 de este capítulo.

Lema 2.4.8. *Si*

$$\phi(s) \in L^m(ds) \tag{2.81}$$

con $1 \leq m \leq 2$ *y* $\alpha^2 \neq -1$, *entonces*

$$\mathcal{R}_1(s) = \phi(s)\int_{s_0}^{s} |\phi(\xi)| \exp\left(-2\int_{\xi}^{s} \mathrm{Re}\left\{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2} + \frac{\alpha\,\phi(\tau)}{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2}}\right\} d\tau\right) d\xi$$

y

$$\mathcal{R}_2(s) = \phi(s)\int_{s}^{\infty} |\phi(\xi)| \exp\left(2\int_{\xi}^{s} \mathrm{Re}\left\{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2} + \frac{\alpha\,\phi(\tau)}{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2}}\right\} d\tau\right) d\xi$$

pertenecen a $L^1(ds)$. *Además, las integrales*

$$\mathcal{L}_1(\phi, s) = \int_{s_0}^{s} |\phi(\xi)| \exp\left(-2\int_{\xi}^{s} \mathrm{Re}\left\{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2} + \frac{\alpha\,\phi(\tau)}{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2}}\right\} d\tau\right) d\xi$$

y

$$\mathcal{L}_2(\phi, s) = \int_{s}^{\infty} |\phi(\xi)| \exp\left(2\int_{\xi}^{s} \mathrm{Re}\left\{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2} + \frac{\alpha\,\phi(\tau)}{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2}}\right\} d\tau\right) d\xi$$

satisfacen

$$\mathcal{L}_1(\phi, s), \mathcal{L}_2(\phi, s) \in L^m(ds) \text{ y } \mathcal{L}_1(\phi, s), \mathcal{L}_2(\phi, s) \to 0$$

cuando $s \to \infty$.

Demostración. La demostración de este lema es análoga al del Lema 2.4.5. □

Del Lema 2.4.8 tenemos que si $\phi(s) \in L^m(ds)$ con $1 \leq m \leq 2$, las condiciones (2.34) y (2.38), de los Lemas 2.3.2 y 2.3.3 respectivamente, son satisfechas. De esta manera, aplicando los Lemas 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.5 al sistema (2.78), la solución para $k = 1$: $U_1(s) = (z_1(s), z_2(s))$, tiene coordenadas de la forma

$$\begin{aligned} z_1(s) &= \exp\left(\int_{s_0}^{s} \hat{\lambda}_1(\tau)\, d\tau\right)\left(1 + O\left(\int_{s}^{\infty} |\mathcal{R}_1(\tau)|\, d\tau\right)\right), \\ z_2(s) &= \exp\left(\int_{s_0}^{s} \hat{\lambda}_1(\tau)\, d\tau\right) O\left(\mathcal{L}_1(\phi, s)\right). \end{aligned}$$

Devolviéndonos vía la sustitución (1.132) y la matriz (1.130), obtenemos la solución $Y_1(s) = (u_1(s), u_2(s))$ del sistema (1.121) con

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \alpha \exp\left(\int_{s_0}^{s} \hat{\lambda}_1(\tau)\, d\tau\right)\left(1 + O\left(\int_{s}^{\infty} |\mathcal{R}_1(\tau)|\, d\tau\right) + \mathcal{L}_1(\phi, s)\right), \\ u_2(s) &= \left(-1 + (1+\alpha^2)^{1/2}\right) \exp\left(\int_{s_0}^{s} \hat{\lambda}_1(\tau)\, d\tau\right) \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\int_{s}^{\infty} |\mathcal{R}_1(\tau)|\, d\tau\right) + \mathcal{L}_1(\phi, s)\right). \end{aligned}$$

Finalmente, usando la sustitución (1.24), la matriz (1.25), el Lema 2.3.6 y por (2.52) se deduce que la ecuación (2.1) tiene solución $x_1(t)$ tal que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(\alpha - 1 + (1+\alpha^2)^{1/2}\right) \exp\left(A_1 \int_{t_0}^{t} \left(1 - \frac{\phi(\tau)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} d\tau\right) \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\int_{t}^{\infty} |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau + \mathcal{L}_1(\phi, t)\right)\right), \qquad (2.82) \\ p x_1'(t) &= \left(\alpha + 1 - (1+\alpha^2)\right)(pq)^{1/2} \exp\left(A_1 \int_{t_0}^{t} \left(1 - \frac{\phi(\tau)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} d\tau\right) \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\int_{t}^{\infty} |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau + \mathcal{L}_1(\phi, t)\right)\right), \qquad (2.83) \end{aligned}$$

donde $A_1 = -\alpha + (1+\alpha^2)^{1/2}$.

Del Lema 2.4.8 y usando la transformación (2.52), las funciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{L}_1$ en las ecuaciones de arriba son respectivamente

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(\tau) &= \phi(\tau)\,(q/p)^{1/2}(\tau)\int_{\tau_0}^{\tau}|\phi(\varsigma)\,(q/p)^{1/2}(\varsigma)|\;\times\\ &\left|\exp\left(-2\int_{\varsigma}^{\tau}\left((1+\alpha^2)^{1/2}+\frac{\alpha\phi(s)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)(q/p)^{1/2}(s)\,ds\right)\right|\,d\varsigma\end{aligned} \tag{2.84}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\phi,t) &= \int_{t_0}^{t}|\phi(\tau)\,(q/p)^{1/2}(\tau)|\;\times\\ &\left|\exp\left(-2\int_{\tau}^{t}\left((1+\alpha^2)^{1/2}+\frac{\alpha\phi(s)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)(q/p)^{1/2}(s)\,ds\right)\right|\,d\tau.\end{aligned} \tag{2.85}$$

De manera análoga se obtienen las siguientes fórmulas para $x_2(t)$ y $px_2'(t)$:

$$\begin{aligned}x_2(t) &= \left(-\alpha+1+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)\exp\left(A_2\int_{t_0}^{t}\left(1-\frac{\phi(\tau)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}d\tau\right)\\ &\times\left(1+O\left(\exp\left[\int_t^{\infty}|\mathcal{R}_2(\tau)|d\tau\right]-1+\mathcal{L}_2(\phi,t)\right)\right),\end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}px_2'(t) &= \left(\alpha+1+(1+\alpha^2)^{1/2}\right)(pq)^{1/2}\exp\left(A_2\int_{t_0}^{t}\left(1-\frac{\phi(\tau)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}d\tau\right)\\ &\times\left(1+O\left(\exp\left[\int_t^{\infty}|\mathcal{R}_2(\tau)|d\tau\right]-1+\mathcal{L}_2(\phi,t)\right)\right),\end{aligned} \tag{2.87}$$

donde $A_2 = -\alpha-(1+\alpha^2)^{1/2}$.

Del Lema 2.4.8 y de (2.52), se sigue que las funciones $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{L}_2$ están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2(\tau) &= \phi(\tau)\,(q/p)^{1/2}(\tau)\int_{\tau}^{\infty}|\phi(\varsigma)\,(q/p)^{1/2}(\varsigma)|\;\times\\ &\left|\exp\left(2\int_{\varsigma}^{\tau}\left((1+\alpha^2)^{1/2}+\frac{\alpha\phi(s)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)(q/p)^{1/2}(s)\,ds\right)\right|\,d\varsigma\end{aligned} \tag{2.88}$$

y

$$\mathcal{L}_2(\phi,t) = \int_t^{\infty} |\phi(\tau)\,(q/p)^{1/2}(\tau)| \times \left|\exp\left(2\int_\tau^t \left((1+\alpha^2)^{1/2} + \frac{\alpha\phi(s)}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\right)(q/p)^{1/2}(s)\,ds\right)\right| d\tau. \tag{2.89}$$

Hacemos notar que la condición (2.81) en el Lema 2.4.8 es equivalente en la varible t a

$$\phi^m (q/p)^{1/2} \in L^1(dt) \ \ (1 \leq m \leq 2). \tag{2.90}$$

Ejemplo 2.4.9. Sean $p(t) = A\,t^\beta \exp(t^\eta)$ y $q(t) = B\,t^\gamma \exp(t^\eta)$ en la ecuación (2.1), con A, B contantes y γ y $\eta > 0$ números reales. Se supone que

$$\gamma - \beta = 2(\eta - 1). \tag{2.91}$$

De la relación (2.80) se obtiene

$$\alpha = \frac{\eta}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2}$$

y

$$\phi(t) = \frac{(\beta+\gamma)}{4}\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2} t^{-\eta}.$$

De la condición de integrabilidad (2.90) se duduce que

$$m\eta - \frac{(\gamma-\beta)}{2} > 1,$$

para $1 \leq m \leq 2$.
De (2.91), para $m \neq 1$, se tiene que $(m-1)\eta > 0$, siendo esto equivalente a la condición $\eta > 0$.

Si tomamos las constantes $A = B = 1$, según (2.82) y (2.83), la solución $x_1(t)$ y la fórmula para $px_1'(t)$ escritas de forma aproximada están dadas por

$$x_1(t) \approx \left(\frac{\eta}{2} - 1 + \left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^{1/2}\right) \exp\left(C_1 \int_{t_0}^t \left(1 - C_2\,\tau^{-\eta}\right)\tau^{\eta-1}\,d\tau\right),$$

$$\begin{aligned} t^{\beta} e^{t^{\eta}} x_1'(t) &\approx \left(\frac{\eta}{2} + 1 - \left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^{1/2} \right) t^{(\beta+\gamma)/2} \exp\left(t^{\eta}\right) \\ &\quad \times \exp\left(C_1 \int_{t_0}^{t} \left(1 - C_2\, \tau^{-\eta}\right) \tau^{\eta-1}\, d\tau \right). \end{aligned}$$

donde las constantes $C_1 = -(\eta/2) + (1+\eta^2/4)^{1/2}$ y $C_2 = \frac{(\beta+\gamma)}{4(1+\eta^2/4)^{1/2}}$.

Los errores de $x_1(t)$ y $px_1'(t)$ son de la forma

$$O\left(\int_t^{\infty} |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau + \mathcal{L}_1(\phi, t) \right).$$

Por (2.84) y (2.85), las integrales $\int_t^{\infty} |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau$ y $\mathcal{L}_1(\phi, t)$ están dadas por

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} |\mathcal{R}_1(\tau)| d\tau &= \frac{(\beta+\gamma)^2}{16} \int_t^{\infty} \tau^{-1} \int_{\tau_0}^{\tau} \varsigma^{-1} \;\times \\ &\quad \exp\left(-2 \int_{\varsigma}^{\tau} \left(\left(1+\eta^2/4\right)^{1/2} + \frac{\eta(\beta+\gamma)\, s^{-\eta}}{8\left(1+\eta^2/4\right)^{1/2}} \right) s^{\eta-1} ds \right) d\varsigma\, d\tau \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\phi, t) &= \frac{|\beta+\gamma|}{4} \int_{t_0}^{t} \tau^{-1} \;\times \\ &\quad \exp\left(\int_{\tau}^{t} \left(\left(1+\eta^2/4\right)^{1/2} + \frac{\eta(\beta+\gamma)\, s^{-\eta}}{8\left(1+\eta^2/4\right)^{1/2}} \right) s^{\eta-1} ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

Ahora, por (2.86) y (2.87), las fórmulas aproximadas de $x_2(t)$ y $px_2'(t)$ son

$$x_2(t) = \left(-\frac{\eta}{2} + 1 + \left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^{1/2} \right) \exp\left(-C_3 \int_{t_0}^{t} \left(1 - C_2\, \tau^{-\eta}\right) \tau^{\eta-1}\, d\tau \right)$$

y

$$\begin{aligned} t^{\beta} e^{t^{\eta}} x_2'(t) &= -\left(\frac{\eta}{2} + 1 + \left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^{1/2} \right) t^{(\beta+\gamma)/2} \exp\left(t^{\eta}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-C_3 \int_{t_0}^{t} \left(1 - C_2\, \tau^{-\eta}\right) \tau^{\eta-1}\, d\tau \right). \end{aligned}$$

donde la constante $C_3 = \eta/2 + (1+\eta^2/4)^{1/2}$.

Los errores de $x_2(t)$ y $px_2'(t)$ son de la forma

$$O\left(\exp\left[\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|d\tau\right] - 1 + \mathcal{L}_2(\phi, t)\right).$$

Por (2.88) y (2.89), las integrales $\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|d\tau$ y $\mathcal{L}_2(\phi, t)$ están dadas por

$$\begin{aligned}\int_t^\infty |\mathcal{R}_2(\tau)|d\tau &= \frac{(\beta+\gamma)^2}{16}\int_t^\infty \tau^{-1}\int_\tau^\infty \varsigma^{-1} \times \\ &\quad \exp\left(2\int_\varsigma^\tau \left(\left(1+\eta^2/4\right)^{1/2} + \frac{\eta(\beta+\gamma)s^{-\eta}}{8\left(1+\eta^2/4\right)^{1/2}}\right) s^{\eta-1}\, d\varsigma\right) d\varsigma\, d\tau\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(\phi, t) &= \frac{|\beta+\gamma|}{4}\int_t^\infty \tau^{-1} \times \\ &\quad \exp\left(2\int_\tau^t \left(\left(1+\eta^2/4\right)^{1/2} + \frac{\eta(\beta+\gamma)s^{-\eta}}{8\left(1+\eta^2/4\right)^{1/2}}\right) s^{\eta-1}\, ds\right) d\tau.\end{aligned}$$

Apéndice

Mostramos con detalle las fórmulas de las soluciones $x_i(t)$ y $px_i'(t)$, con $i = 1, 2$, del Capítulo 2 de la sección . Consideramos las funciones

$$p(t) = 1, \; q(t) = t^{\gamma\beta} g(t^{\gamma})$$

en la ecuación (2.1). Entonces, la solución aproximada $x_1(t)$ y la fórmula de $px_1'(t)$ son

$$\begin{aligned} x_1(t) \quad &\approx \quad t^{-(\gamma\beta)/4} g^{-1/4}(t^{\gamma}) \\ &\times \left(1 + \frac{\gamma t^{-1+\gamma+(\gamma\beta)/2} \left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^{\gamma}) + g'(t^{\gamma}) g^{-3/2}(t^{\gamma})\right]}{1 + (1 + \gamma^2 t^{-2+2\gamma+(\gamma\beta)} \left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^{\gamma}) + g'(t^{\gamma}) g^{-3/2}(t^{\gamma})\right]^2} \right) \\ &\times \left(1 + \frac{\gamma t^{-1+\gamma+(\gamma\beta)/2} \left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^{\gamma}) + g'(t^{\gamma}) g^{-3/2}(t^{\gamma})\right]}{1 + \left(1 + \gamma^2 t^{-2+2\gamma+(\gamma\beta)} \left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^{\gamma}) + g'(t^{\gamma}) g^{-3/2}(t^{\gamma})\right]^2\right)^{1/2}} \right)^{-1/2} \\ &\times \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left(s^{\gamma\beta} g(s^{\gamma}) + \frac{\gamma^2 s^{2\gamma-2} \left[\beta s^{\gamma} g(s^{\gamma}) + g'(s^{\gamma})\right]^2}{16 g^2(s^{\gamma})} \right)^{1/2} ds \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1'(t) \quad &\approx \quad t^{(\gamma\beta)/4} g^{1/4}(t^{\gamma}) \\ &\times \left(1 - \frac{\gamma t^{-1+\gamma+(\gamma\beta)/2} \left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^{\gamma}) + g'(t^{\gamma}) g^{-3/2}(t^{\gamma})\right]}{1 + (1 + \gamma^2 t^{-2+2\gamma+(\gamma\beta)} \left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^{\gamma}) + g'(t^{\gamma}) g^{-3/2}(t^{\gamma})\right]^2} \right) \\ &\times \left(1 + \frac{\gamma t^{-1+\gamma+(\gamma\beta)/2} \left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^{\gamma}) + g'(t^{\gamma}) g^{-3/2}(t^{\gamma})\right]}{1 + \left(1 + \gamma^2 t^{-2+2\gamma+(\gamma\beta)} \left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^{\gamma}) + g'(t^{\gamma}) g^{-3/2}(t^{\gamma})\right]^2\right)^{1/2}} \right)^{-1/2} \\ &\times \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left(s^{\gamma\beta} g(s^{\gamma}) + \frac{\gamma^2 s^{2\gamma-2} \left[\beta s^{\gamma} g(s^{\gamma}) + g'(s^{\gamma})\right]^2}{16 g^2(s^{\gamma})} \right)^{1/2} ds \right). \end{aligned}$$

El error es de la forma $O\left(\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_1(\tau) \mid d\tau + \mathcal{L}_1(\hat{r}_2, t)\right)$ con

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_1(\tau) \mid d\tau &= \int_t^\infty \left| \frac{\tau^{-(\gamma\beta/2-\gamma+2)}K_1(\tau) + \tau^{-(\gamma\beta-\gamma+2)}K_2(\tau)}{1+\tau^{-(\gamma\beta-2\gamma+2)}K_3(\tau)} \right| \times \\
&\quad \int_{\tau_0}^{\tau} \left| \frac{\varsigma^{-(\gamma\beta/2-\gamma+2)}K_1(\varsigma) + \varsigma^{-(\gamma\beta-\gamma+2)}K_2(\varsigma)}{1+\varsigma^{-(\gamma\beta-2\gamma+2)}K_3(\varsigma)} \right| \times \\
&\quad \exp\left(-2\int_s^\varsigma \operatorname{Re}\left\{s^{\gamma\beta}g(s^\gamma) + \gamma^2 s^{-2(1+\gamma)}(\beta s^{-\gamma} + g'(s^\gamma)g^{-1}(s^\gamma))^2\right\}\right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(\hat{r}_2, t) &= \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\tau^{-(\gamma\beta/2-\gamma+2)}K_1(\tau) + \tau^{-(\gamma\beta-\gamma+2)}K_2(\tau)}{1+\tau^{-(\gamma\beta-2\gamma+2)}K_3(\tau)} \right| \times \\
&\quad \exp\left(-2\int_\varsigma^\tau \operatorname{Re}\left\{\varsigma^{\gamma\beta}g(\varsigma^\gamma) + \gamma^2 \varsigma^{-2(1+\gamma)}(\beta \varsigma^{-\gamma} + g'(\varsigma^\gamma)g^{-1}(\varsigma^\gamma))^2\right\}\right),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
K_1(\tau) &= -\gamma(\gamma\beta/2+1)\left[\beta\tau^{-\gamma}g^{-1/2}(\tau^\gamma) + g'(\tau^\gamma)g^{-3/2}(\tau^\gamma)\right], \\
K_2(\tau) &= \gamma^2\left[(\beta+1)t^{-\gamma}g'(\tau^\gamma) + g''(\tau^\gamma))g^{-3/2}(\tau^\gamma) - \frac{3}{2}(\beta\tau^{-\gamma}g(\tau^\gamma) + g'(\tau^\gamma))g^{-5/2}(\tau^\gamma)\right], \\
K_3(\tau) &= \gamma^2\left[\frac{\beta\tau^{-\gamma}g(\tau^\gamma) + g'(\tau^\gamma)}{g^{3/2}(\tau^\gamma)}\right]^2.
\end{aligned}$$

Por (2.74) y (2.75), la solución de $x_2(t)$ y la fórmula de $px_2'(t)$ escritas de forma aproximada son respectivamente:

$$\begin{aligned}
x_2(t) &\approx t^{-(\gamma\beta)/4}g^{-1/4}(t^\gamma) \\
&\quad \times\left(1 - \frac{\gamma t^{-1+\gamma+(\gamma\beta)/2}\left[\beta t^{-\gamma}g^{-1}(t^\gamma) + g'(t^\gamma)g^{-3/2}(t^\gamma)\right]}{1+(1+\gamma^2 t^{-2+2\gamma+(\gamma\beta)}[\beta t^{-\gamma}g^{-1}(t^\gamma) + g'(t^\gamma)g^{-3/2}(t^\gamma)]^2}\right) \\
&\quad \times\left(1 + \frac{\gamma t^{-1+\gamma+(\gamma\beta)/2}\left[\beta t^{-\gamma}g^{-1}(t^\gamma) + g'(t^\gamma)g^{-3/2}(t^\gamma)\right]}{1+\left(1+\gamma^2 t^{-2+2\gamma+(\gamma\beta)}\left[\beta t^{-\gamma}g^{-1}(t^\gamma) + g'(t^\gamma)g^{-3/2}(t^\gamma)\right]^2\right)^{1/2}}\right)^{-1/2} \\
&\quad \times\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\left(s^{\gamma\beta}g(s^\gamma) + \frac{\gamma^2 s^{2\gamma-2}\left[\beta s^\gamma g(s^\gamma) + g'(s^\gamma)\right]^2}{16g^2(s^\gamma)}\right)^{1/2} ds\right)
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
x_2'(t) &\approx t^{(\gamma\beta)/4} g^{1/4}(t^\gamma) \\
&\times \left(-1 - \frac{\gamma t^{-1+\gamma+(\gamma\beta)/2}\left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^\gamma) + g'(t^\gamma) g^{-3/2}(t^\gamma)\right]}{1 + (1 + \gamma^2 t^{-2+2\gamma+(\gamma\beta)}\left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^\gamma) + g'(t^\gamma) g^{-3/2}(t^\gamma)\right]^2} \right) \\
&\times \left(1 + \frac{\gamma t^{-1+\gamma+(\gamma\beta)/2}\left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^\gamma) + g'(t^\gamma) g^{-3/2}(t^\gamma)\right]}{1 + \left(1 + \gamma^2 t^{-2+2\gamma+(\gamma\beta)}\left[\beta t^{-\gamma} g^{-1}(t^\gamma) + g'(t^\gamma) g^{-3/2}(t^\gamma)\right]^2\right)^{1/2}} \right)^{-1/2} \\
&\times \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left(s^{\gamma\beta} g(s^\gamma) + \frac{\gamma^2 s^{2\gamma-2}\left[\beta s^\gamma g(s^\gamma) + g'(s^\gamma)\right]^2}{16 g^2(s^\gamma)} \right)^{1/2} ds \right).
\end{aligned}
$$

El error de la aproximación es de la forma $O\left(\exp\left[\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_2(\tau) \mid d\tau\right] - 1 + \mathcal{L}_2(\hat{r}_2, t)\right)$ con

$$
\begin{aligned}
\int_t^\infty \mid \mathcal{R}_2(\tau) \mid d\tau &= \int_t^\infty \left| \frac{\tau^{-(\gamma\beta/2-\gamma+2)} K_1(\tau) + \tau^{-(\gamma\beta-\gamma+2)} K_2(\tau)}{1 + \tau^{-(\gamma\beta-2\gamma+2)} K_3(\tau)} \right| \times \\
&\int_\tau^\infty \left| \frac{\varsigma^{-(\gamma\beta/2-\gamma+2)} K_1(\varsigma) + \varsigma^{-(\gamma\beta-\gamma+2)} K_2(\varsigma)}{1 + \varsigma^{-(\gamma\beta-2\gamma+2)} K_3(\varsigma)} \right| \times \\
&\exp\left(2 \int_s^\varsigma \mathrm{Re}\left\{ s^{\gamma\beta} g(s^\gamma) + \gamma^2 s^{-2(1+\gamma)} (\beta s^{-\gamma} + g'(s^\gamma) g^{-1}(s^\gamma))^2 \right\} \right)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\hat{r}_2, t) &= \int_t^\infty \left| \frac{\tau^{-(\gamma\beta/2-\gamma+2)} K_1(\tau) + \tau^{-(\gamma\beta-\gamma+2)} K_2(\tau)}{1 + \tau^{-(\gamma\beta-2\gamma+2)} K_3(\tau)} \right| \times \\
&\exp\left(2 \int_\varsigma^\tau \mathrm{Re}\left\{ \varsigma^{\gamma\beta} g(\varsigma^\gamma) + \gamma^2 \varsigma^{-2(1+\gamma)} (\beta \varsigma^{-\gamma} + g'(\varsigma^\gamma) g^{-1}(\varsigma^\gamma))^2 \right\} \right),
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
K_1(\tau) &= -\gamma(\gamma\beta/2 + 1)\left[\beta \tau^{-\gamma} g^{-1/2}(\tau^\gamma) + g'(\tau^\gamma) g^{-3/2}(\tau^\gamma)\right], \\
K_2(\tau) &= \gamma^2 \left[((\beta+1) t^{-\gamma} g'(\tau^\gamma) + g''(\tau^\gamma)) g^{-3/2}(\tau^\gamma) - \frac{3}{2}(\beta \tau^{-\gamma} g(\tau^\gamma) + g'(\tau^\gamma)) g^{-5/2}(\tau^\gamma) \right], \\
K_3(\tau) &= \gamma^2 \left[\frac{\beta \tau^{-\gamma} g(\tau^\gamma) + g'(\tau^\gamma)}{g^{3/2}(\tau^\gamma)} \right]^2.
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] Richard Bellman, 1953, *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc.

[2] E. Coddington y N. Levinson, 1955, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Malabar, Florida: Robert E. Krieges.

[3] W. A. Coppel, 1965, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D.C. Heath and Company, Boston.

[4] M.S.P. Eastham, 1983, *The Liouville-Green asymptotic theory for second order differential equations: A new approach and some extensions*, Lecture notes in mathematics, Springer, 1032, 110-122

[5] M.S.P. Eastham, 1987, *Repeated diagonalization and extended Liouville-Green asymptotic formulae*, J. London Math. Soc, 36, 115-125.

[6] M.S.P. Eastham, 1989, *The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems*, Applications of The Levinson's Theorem, Clarendon Press, Oxford.

[7] U. Elias y H. Gingold, 2007, *On the approximation of Jacobi Polynomials*, Rocky Mountain J.Math., 37, 159-184.

[8] P. Figueroa y M. Pinto, 2008, *Ricatti equations and nonoscillatory solutions of third order differential equation*, Dynamic Syst. Appl.,17, 459-476.

[9] M. Fedoryuk, 1983, *Asymptotic Analisys* (Linear Ordinary Differential Equations), Springer-Verlag.

[10] W. Harris y D. Lutz, 1977, *A Unified Theory of Asymptotic Integration*, J. Math. Anal. Appl., 57, 571-586.

[11] P. Hartman y A. Wintner, 1955,*Asymptotic integrations of linear differential equations*, Amer.J.Math, 77, 48-86.

[12] N. Levinson, 1948, *The asymptotic nature of solutions of linear differential equations*, Duke Math. J,15, 111-116.

[13] L. Markus, 1956, *Asymptotically autonomous differential systems*, Annals of Mathematical Studies, 36, 17-29.

[14] M. Pinto, 2003, *Null Solutions of Difference Systems Under Vanishing Perturbation*, J. Difference Equations and Appl., 9, 1-13.

[15] M. Pinto y C. Rivas, 2009, *Generalized finite moments and Liouville-Green approximations*, Math. Comp. Model., 49, 1-12.