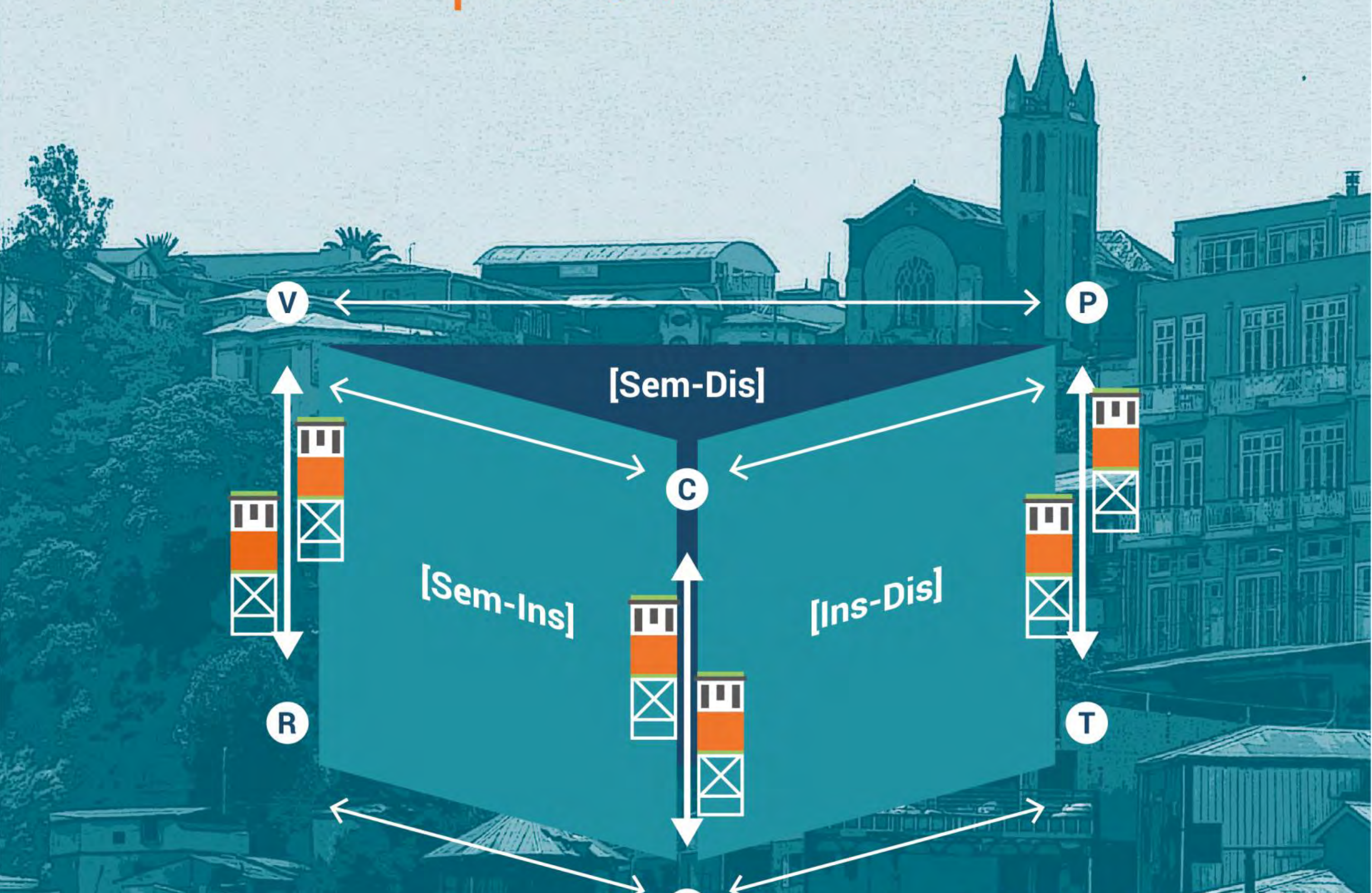
ETM6

Symposium/Symposium/Simposio

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique

Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático

Sixth Symposium on Mathematical Work



2018-12-13/18

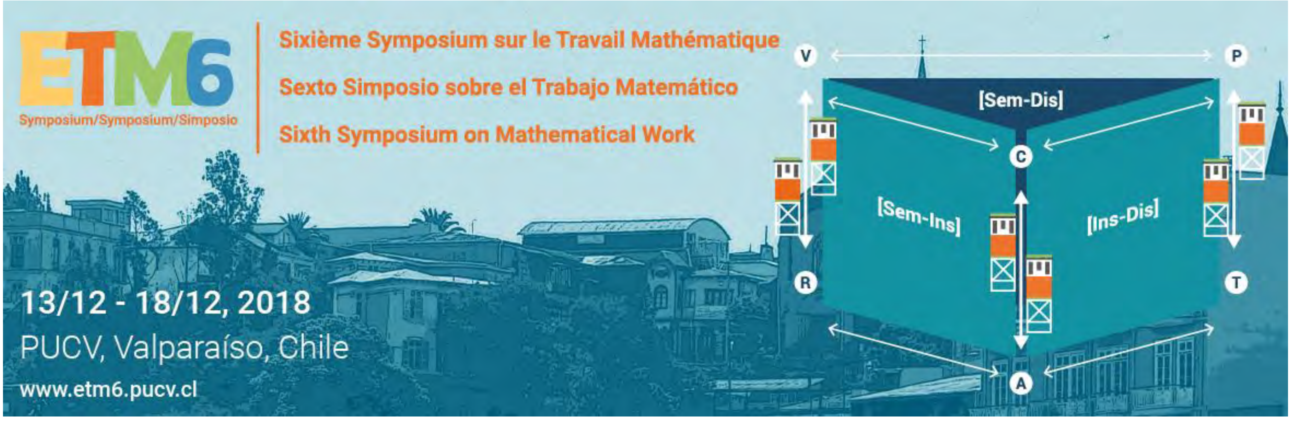
PUCV, Valparaíso, Chile

ACTAS ETM 6 | ACTES ETM 6 | PROCEEDINGS ETM 6

www.etm6.pucv.cl

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Inés Mª Gómez Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Denis Tanguay
Laurent Vivier (Eds)



Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique

Sixth Symposium on Mathematical Work

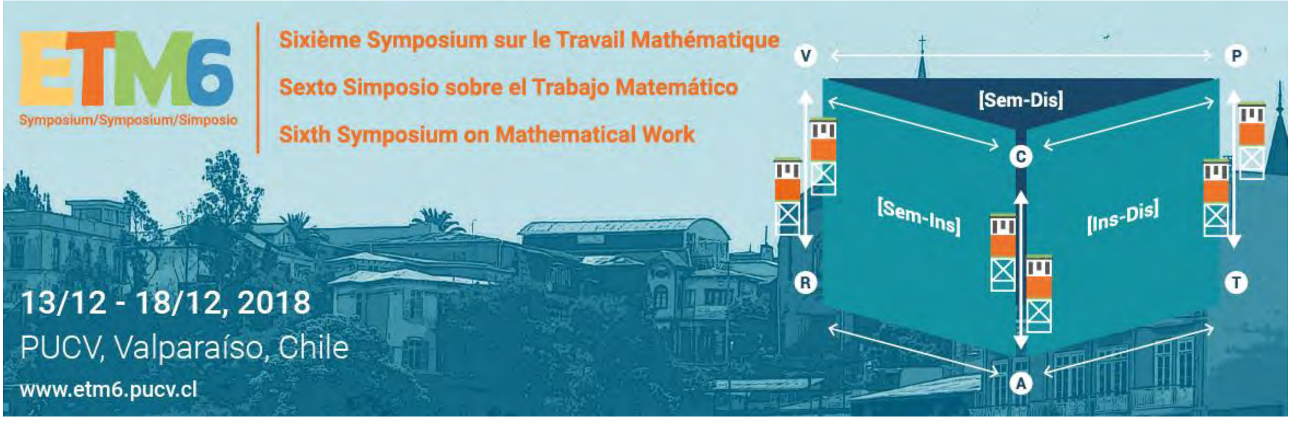
Del 13 al 18 de diciembre 2018

Du 13 au 18 décembre 2018

December, 13 – 18, 2018

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO



Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique

Sixth Symposium on Mathematical Work

Del 13 al 18 de diciembre 2018

Du 13 au 18 décembre 2018

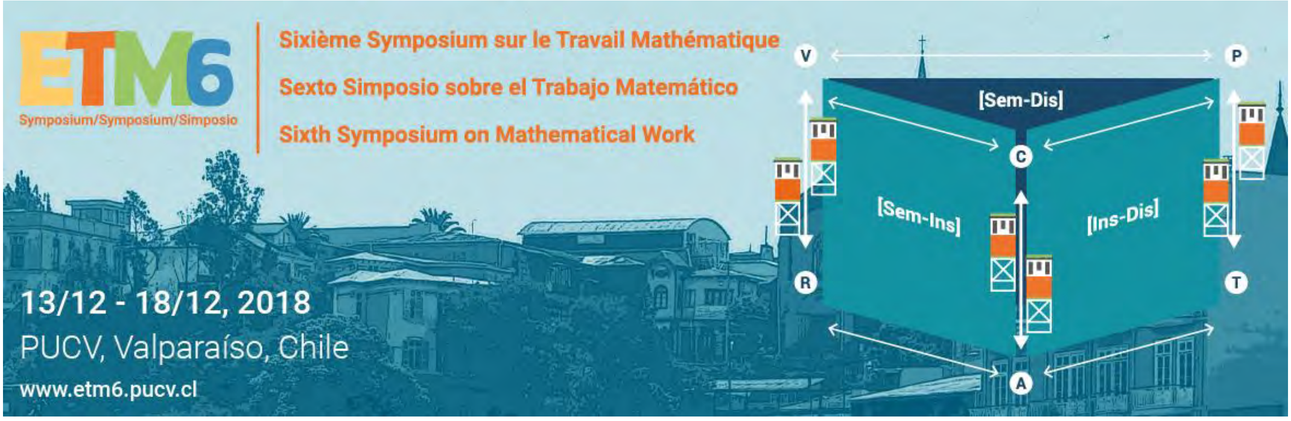
December, 13 – 18, 2018

Editores

Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Laurent Vivier (Editor Jefe)
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Denis Tanguay

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas
Av. Brasil 2950, Valparaíso
2340000– Valparaíso
Chile

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Editores

Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Laurent Vivier (Editor Jefe)
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Denis Tanguay

Diseño

Elizabeth Montoya Delgadillo, Philippe R. Richard, Laurent Vivier

Diseñadora

Camila Valenzuela Rojo

ISBN: 978-956-401-498-2

Impreso en Chile

TAREAS QUE ACTIVAN UN TRABAJO MATEMÁTICO COMPLETO EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA

Leslie Jiménez[a], Romina Menares[b] y Rolando Pomareda[a]

[a]Universidad de Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

jpleslie@uchile.cl, romina.menares@uv.cl, rpomared@uchile.cl

En el presente trabajo mostramos tres tareas adaptadas de aquellas que se suelen proponer en un curso de Álgebra y Geometría en primer año de formación inicial de profesores, las cuales, entre otras cosas, tienen la particularidad de ser potenciales portadoras de un trabajo matemático completo (tareas emblemáticas en el ETM). En esta contribución presentamos el análisis de estas tres tareas, candidatas a ser tareas emblemáticas, antes de ser implementadas en el curso de primer año de la carrera de Pedagogía en Matemáticas en una universidad chilena.

Palabras claves: *Tareas emblemáticas, Trabajo matemático completo, Formación Inicial de Profesores.*

INTRODUCCIÓN

A nivel universitario, la investigación educativa se ha ocupado del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza por más de 25 años, intentando identificar y superar tanto las dificultades que los alumnos encuentran, como las disfunciones del sistema educativo. Diversos autores (Artigue, 2003; Winslow y Gronbaek, 2014; Tall, 1991) han estudiado y expuesto el problema de la *brecha* (*gap*) que se produce entre la enseñanza media y el primer año de universidad en el área matemática. Nuestra preocupación pone en su centro al estudiante futuro profesor, los cuales experimentan además una doble brecha al volver al colegio como profesores (identificada como *doble discontinuidad de Klein*) (Winslow y Gronbaek, 2014).

Esta contribución se enmarca en un proyecto que tiene como objetivo principal, tomar medidas para mermar la brecha Liceo-Universidad para quienes inician sus estudios de formación inicial de profesores de matemáticas. Este proyecto ha comenzado a realizarse con estudiantes futuros profesores de primer año del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. En este contexto de trabajo, consideramos que uno de los factores que influye en la mantención de la brecha es que en el primer año de Universidad se propone un trabajo matemático altamente cargado a la demostración, al razonamiento deductivo y al tratamiento de objetos en lenguaje formal, dejando de lado procesos de razonamiento inductivo y la intuición.

Presentaremos en esta contribución tres tareas creadas al alero del proyecto, donde analizamos las posibles estrategias que los profesores en formación adoptarían de acuerdo a sus conocimientos previos. Estas tareas forman parte de una batería más amplia cuyo objetivo fundamental es permitir al estudiante pasar por procesos de descubrimiento y exploración en lugar de ir directamente a la demostración. En concreto, se proponen tareas potencialmente portadoras de un trabajo matemático completo, es decir candidatas a ser resueltas involucrando procesos semióticos, de instrumentalización y discursivos.

TAREAS EMBLEMÁTICAS Y EL ETM

Es conocido que, en una actividad matemática, el modelo del ETM considera la articulación entre las dimensiones cognitiva y epistemológica a través de las génesis semiótica, instrumental y discursiva (Kuzniak, 2011). Esto genera la aparición de tres planos verticales: [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis] (Richard y Kuzniak, 2014; Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016). Nuestra primera intención es que los estudiantes circulen por estos tres planos al realizar una actividad matemática, la cual se iniciará en el momento que se les entrega una tarea.

Basándonos en la investigación sobre la Teoría de Actividad (Vandebrouck, 2013), en este trabajo consideramos una tarea como *un problema matemático posible de resolver en un tiempo determinad*o, y una actividad como *la acción de realizar una tarea*. Siguiendo esto, los autores Kuzniak y Nechache (2016), han investigado sobre el rol de las tareas en la conformación de los ETM mediante el análisis de lo que han denominado *tareas emblemáticas*.

Las tareas emblemáticas cumplen con las siguientes 3 condiciones:

(1) Ser potencialmente portadoras de un trabajo matemático completo; es decir, que exista una relación genuina entre los planos cognitivo y epistemológico. Esto es, que exista una vinculación entre todos los planos verticales y dimensiones.

(2) Pertenecer al ETM idóneo, en otras palabras, ser parte de las tareas que se han propuesto primero en los posibles ETM idóneos definidos en las clases, y

(3) Estar disponible en los ETM de referencia, es decir, beneficiarse de su idoneidad para el trabajo matemático al que se refiere la institución de educación.

El objetivo principal de esta comunicación es mostrar tres tareas candidatas a ser emblemáticas para ser abordada por estudiantes de primer año de formación inicial de profesores. Entregaremos argumentos, mediante un análisis a priori, del por qué afirmamos que son candidatas a cumplir tales características.

CONTEXTO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este trabajo mostramos parte de la primera y segunda fase de la investigación, que corresponden a la selección y reformulación de tareas que pertenecen al ETM idóneo de la institución donde son implementadas, con su respectivo análisis a priori. El caso corresponde a un curso-taller de Álgebra y Geometría I de primer año de formación inicial de profesores del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile (carrera de *Pedagogía en enseñanza media en Matemáticas y Física*). El taller de este curso representa un complemento de la cátedra del mismo, y es de carácter obligatorio y presencial. El curso-taller tiene 1,5 horas de duración, en el cual los estudiantes trabajan sobre una lista de tareas o una tarea específica dada por el profesor. El trabajo se organiza en grupos de no más de 4 personas. Está liderado por un académico del Departamento y 5 profesores-ayudantes, estudiantes de años superiores de la misma carrera. Estos tienen la misión de ser guías mediadores del trabajo de los estudiantes.

La primera fase de la investigación, corresponde a recopilar el material usado años anteriores (desde el 2016, año que comenzó el taller), como apuntes escritos por el profesor formador, evaluaciones, guías o listas de tareas propuestas por el/los docente/s del curso. En la segunda fase seleccionamos las tareas candidatas a ser emblemáticas, parte de esta selección corresponde a tareas clásicas del curso (aquellas que usualmente se proponen), en los distintos contenidos del mismo, para ser analizadas a priori y ver en qué plano(s) y dimensión se mueven. Para escogerlas, antes de entrar en los análisis teóricos, buscamos observar en cada una de estas tareas el uso de distintas propiedades matemáticas, intercambio de representaciones entre los objetos y/o bien, variedad de herramientas a utilizar, vistos bajo nuestra experiencia. Hacemos un análisis de los conocimientos previos que poseen los estudiantes del curso para abordar la tarea e identificamos las distintas heurísticas estudiando el trabajo matemático desde el punto de vista de las circulaciones que se generan en los planos verticales del ETM.

De estas tareas, hemos elegido 3 para presentar en este trabajo.

EL ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Como hemos dicho anteriormente, en este artículo mostramos tres tareas candidatas a ser tareas emblemáticas. Nos preocupamos de argumentar nuestra afirmación para cada tarea elegida, para ello evidenciamos que se cumplen las condiciones (1), (2) y (3) de la definición de tareas emblemáticas (Kuzniak y Nechache, 2016). Observamos que debido a la naturaleza de la tarea elegida (adaptada del material de años anteriores del curso), tenemos que las condiciones (2) y (3) se satisfacen claramente. Por esta razón, en este análisis desarrollamos solamente la verificación de la condición (1).

Tarea 1: Un número natural se llama p-especial, con p primo, si es divisible por p, el cuadrado de p y el cubo de p. Decida si es verdadero que para que un número sea 3-especial, la suma de sus dígitos debe ser divisible por 9. Justifique su respuesta.

Contextualización

La tarea se plantea en un contexto de clase donde los estudiantes demuestran distintos criterios de divisibilidad usando congruencias. La idea de esta tarea fue que los estudiantes utilizaran el mismo procedimiento usado para demostrar los criterios, pero de manera indirecta.

Conocimientos previos

Antes de plantear la tarea, se estudió congruencias módulo n, el algoritmo de división de Euclides, el resto de una división de enteros, expansión de un número entero en base 10.

Posibles respuestas

En primer lugar, por la forma en que es planteada la tarea, se solicita decidir si la afirmación es cierta o no, el estudiante deberá comenzar experimentando para convencerse de su respuesta. El estudiante podría, por ejemplo, realizar una tabla de doble entrada (y en este caso habría un proceso semiótico de conversión) donde anota los múltiplos de 27 y la suma de los dígitos. Luego de experimentar con varios números, decide que la afirmación es cierta, por lo que comienza a buscar una justificación.

Una posible estrategia es que los estudiantes utilicen el grupo finito Z9, de congruencias módulo 9, para manipular los restos del número divisible por 27, esto es, sea

$$n = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

divisible por 27. Entonces

$$n \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \ (\textit{mód}\ 9).$$

Así

$$n = 9k + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \,,$$

para algún k en Z. Como n es divisible por 27, se tiene que:

$$9k + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 27\text{m}.$$

Luego

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 27m - 9k = 9\,(3m - k),$$

por lo que la suma de los dígitos ($a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$) de n es divisible por 9.

Para esta respuesta, los estudiantes representan el número n en su expansión decimal e identifican la necesidad de considerar los restos de cada término de dicha expansión al dividir por 9. Identificamos esta parte del trabajo como una articulación de procesos semióticos y discursivos, por lo que se releva el plano [Sem-Dis]. La utilización de la congruencia módulo 9 nos entrega evidencias sobre la presencia de procesos de instrumentalización (se aplica de manera algorítmica para todas las potencias de 10 consideradas), lo que deja ver la activación del plano [Sem-Ins] (cuando se articula la instrumentalización con procesos semióticos de tratamiento, donde *n* aparece primero como congruente a una expresión módulo 9 y luego aparece igual a una expresión que considera al resto). También se observa la activación del plano [Ins-Dis] cuando se obtienen conclusiones acerca de los restos luego de aplicar la congruencia módulo 9. En lo que sigue, identificamos una constante articulación de procesos semióticos, instrumentales y discursivos, por lo que afirmamos que para esta actividad, el estudiante circula por todos los planos verticales del ETM, lo cual implica que (1) se cumple.

Notar que una segunda estrategia es que el estudiante manipule la tabla fijándose en el incremento de la unidad y la decena del número cada vez que se suma 27. Acá hace uso de un razonamiento inductivo, pues puede asumir que la suma de los dígitos es 9 (es decir 2+7) y luego explora lo que sucede al sumar 7 unidades y 2 decenas, realizando el canje correspondiente.

Tarea 2: Usando la definición y lo que ya se ha estudiado sobre los valores y el comportamiento de la razón trigonométrica $Sen\alpha$ para un ángulo agudo α cualquiera (incluyendo el del ángulo recto $\alpha = 90º$). Defina $Sen\theta$, para todo ángulo obtuso θ. ¿Diría usted que esta razón trigonométrica está *bien definida*? ¿Por qué?

Nota: diremos que $Sen\theta$, para todo ángulo obtuso θ está bien definida si no hay dos valores de $Sen\theta$ distintos para un mismo ángulo θ, y si para ángulos cercanos a 90, el valor de $Seno$ es cercano a 1.

Contextualización

Como innovación, por primera vez el curso de Álgebra y Geometría I se inició con trigonometría, debido a que actualmente en el plan común del currículo nacional de matemáticas de enseñanza media en Chile ya no se contempla este contenido, y éste era necesario para el curso de Física sucediendo el paralelo.

Todo el trabajo relacionado con razones trigonométricas que se realizó en el curso, se hizo utilizando el círculo unitario, a diferencia de como clásicamente se abordaba el tema en los programas de enseñanza media, donde solo se hacía uso del triángulo rectángulo sin considerar el círculo.

La idea de presentar esta tarea a los estudiantes fue para que ellos mismos construyeran la definición de *Seno* para ángulos obtusos, lo cual tradicionalmente era función del profesor en su cátedra.

Conocimientos previos

Antes de plantear la tarea, se estudió medición de ángulos, trigonometría en el triángulo rectángulo, razones trigonométricas para ángulos agudos definidas e interpretadas geométricamente en el círculo unitario e identidades trigonométricas para ángulos agudos.

Posibles respuestas

Para definir $Sen\alpha$ para un ángulo agudo α cualquiera (incluyendo el del ángulo recto $\alpha = 90º$) se usó el círculo unitario centrado en (0,0) y un triángulo rectángulo construido a partir del ángulo α. Se espera que debido a cómo está planteada la tarea, y la nota en ella, que los estudiantes usen estas dos herramientas para atacar el problema.

Primero, pensamos que el estudiante debería identificar un ángulo obtuso cualquiera en el círculo unitario. Se podría ayudar de un dibujo como el dado en la siguiente figura.

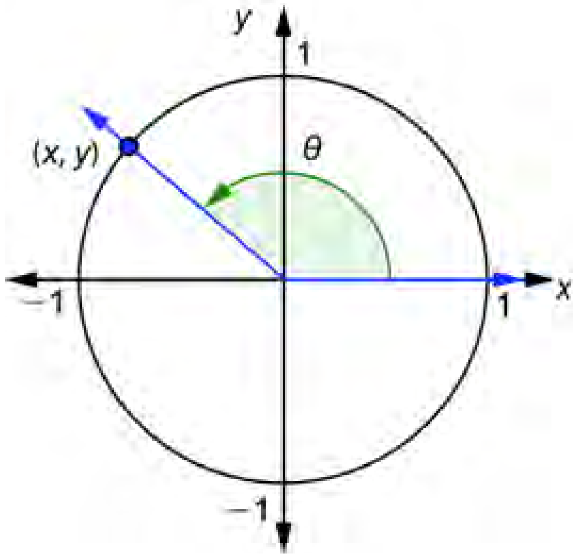


Figura 1. Representación de un ángulo obtuso cualquiera

Luego, debería relacionar el ángulo obtuso θ con algún ángulo agudo en el círculo unitario. Para esto pensamos que se debiera ayudar de una figura como la de abajo:

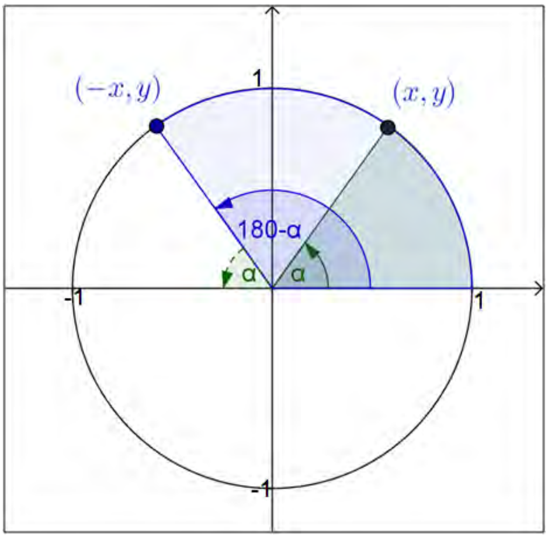


Figura 2. Interpretación geométrica de Sen α

Esto le permitirá definir la razón trigonométrica requerido usando la simetría de la figura y la interpretación geométrica del $Sen\alpha$ dada en la figura anterior. El estudiante debiera concluir que dado un ángulo obtuso θ existe un ángulo agudo cuyo vector que lo representa en el círculo tiene la misma coordenada y en la ordenada. Debería llegar a que este ángulo agudo es $180º - \theta$.

Así, debiera definir $Sen\theta := Sen\theta$).

Para responder que este cociente está bien definido, debiera, primero, notar que el único ángulo agudo que satisface las condiciones requeridas según la simetría de la figura es$180º - \theta$. Así el cociente tomará un sólo valor, y no dependerá de alguna posible elección de ángulo aguda, ya que éste es único. Por otro lado, el estudiante debiera notar que definiendo así el $Sen\theta$, al pasar del primer cuadrante al segundo cuadrante (de ángulos agudos a obtusos) los valores de los cocientes trigonométricos dado por Sen se "pegan bien", es decir no hay saltos en la definición. En lenguaje más técnico se dan cuenta que están construyendo así una función Sencontinua (que sepan el concepto de continuidad no es un requisito para resolver el problema, pero de hecho el pedir que una cantidad se comporte continuamente parece ser bastante intuitivo).

Para esta respuesta, la utilización del círculo unitario permite visualizar y representar los ángulos agudos y obtusos. Luego, el uso de herramientas semióticas, tales como el trazado de un radio del círculo y triángulos permite identificar la activación del plano [Sem-Ins]. Identificamos el cambio de representación de los ángulos como una articulación de procesos semióticos y discursivos, por lo que se releva el plano [Sem-Dis]. También se observa la activación del plano [Ins-Dis] cuando se obtiene la definición requerida luego de hacer uso de la herramienta círculo y la construcción de de los radios necesarios para observar la relación entre el ángulo obtuso y su compañero en el primer cuadrante. Identificamos así una constante articulación de procesos semióticos, instrumentales y discursivos, por lo que afirmamos que para esta actividad, el estudiante circula por todos los planos verticales del ETM, lo cual implica que (1) se cumple.

Tarea 3: Sea $h(x)$un polinomio con coeficientes en R de grado 2 o 3. Pruebe que si$h(x)$ es reducible entonces $h(x)$ tiene raíces en R.

Contextualización

Antes de presentar los conocimientos previos que los estudiantes traen al enfrentarse a la tarea, nos parece importante señalar que en una clase previa al taller se abordó el siguiente resultado: "*si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces en los reales, entonces es reducible*".

Luego de desarrollada la tarea por parte de los estudiantes, se plantea la pregunta: "*si un polinomio con coeficientes en los reales es reducible, ¿es cierto entonces que tiene raíces reales?*". La intención de la tarea 3 fue que los estudiantes reconocieran que en los casos de polinomios de grado 2 o 3 la respuesta a la pregunta es afirmativa, sin embargo, no es cierto para todos. En un principio, cuando la pregunta general fue planteada, los estudiantes presentaron muchas dudas y se mostraron no convencidos con la respuesta, de hecho, generó una extensa discusión en la clase.

Dada la situación descrita, la tarea fue planteada como un primer acercamiento para responder a la pregunta más general.

Conocimientos previos

Previo a plantear la tarea, se estudió la definición de un polinomio con coeficientes en $\boldsymbol{R}$ y de su grado, definición del producto de dos polinomios y su grado respectivo, definición de polinomio reducible e irreducible, raíz de un polinomio y la proposición: "*si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces en **R**, entonces es reducible*".

Posibles respuestas

Se puede comenzar por el caso más sencillo: considerar el polinomio $h(x)$ de grado 2. Como él o ella debe asumir que $h(x)$ es reducible (por hipótesis), entonces tiene la información de que existen polinomios no constantes que son factores de $h(x)$, digamos $p(x)$ y $q(x)$ de grado mayor o igual que uno. Lo anterior es una definición de polinomio reducible y, para enunciarla, debe ser parte del *referencial teórico* del alumno. El estudiante podría cuestionarse si existen solo esos divisores o hay más, y si es así, podría observar casos particulares de números naturales y convencerse de que, si es reducible, siempre podrá escribirse como la multiplicación con dos factores. Entonces tiene que: $h(x) = p(x)q(x)$.

Hasta acá se puede detectar un trabajo que privilegia el plano [Sem-Dis], pues por un lado se representa el polinomio $h(x)$ como el producto de dos factores, y por otro, la posibilidad de realizar este tratamiento en el registro algebraico la entregan los fundamentos que la definición de *polinomio reducible* comporta.

Luego el estudiante debe reconocer las características de los factores $p(x)$ y $q(x)$. Como $h(x)$ tiene, en este caso, grado 2, no hay más posibilidades que los factores tenga grado 1 cada uno. Para concluir lo anterior, debe formar parte de su *referencial teórico* que *la suma de los grados de los factores es igual al grado del producto*. Esto último se interpreta como una activación de la génesis discursiva, pues existen elementos del referencial teórico y conclusiones que de ahí provienen.

Por último, el estudiante puede representar alguno de los factores (sin pérdida de generalidad, $p(x)$) como $p(x) = ax + b$, donde a es distinto de cero. Entonces, puede concluir que si $p(\alpha) = 0$, para algún α real, entonces $h(x)$ tendrá alguna raíz real. Puede plantear entonces la ecuación $ax + b = 0$ y resolverla, llegando a que $\alpha = \frac{-b}{a}$. Podemos decir que la ecuación actúa como un instrumento simbólico, pues su uso permite encontrar una raíz para $h(x)$. Notemos que la génesis instrumental no se presenta de manera aislada. En efecto, por un lado se tienen elementos de la génesis discursiva (cuando se afirma que si $p(x)$ tiene raíz real, entonces $h(x)$ también tiene raíz real), y por otro lado existen tratamientos en el registro algebraico (conversión de la representación $p(x) = ax + b$ a la ecuación $ax + b = 0$). Por lo anterior, concluimos que en esta parte se puede evidenciar la activación de los planos verticales [Sem-Ins] e [Ins-Dis].

Para el caso en que $h(x)$ sea un polinomio reducible de grado 3, el estudiante debe reflexionar acerca de los posibles divisores. Como 3=1+2, y sabemos que es parte de su *referencia teórico* que l*a suma de los grados de los factores es igual al grado del producto*, se tiene que al menos uno de los divisores de $h(x)$ tiene grado 1. Siguiendo los mismos argumentos anteriores, se puede concluir que $h(x)$ tiene al menos una raíz real. En este caso, el estudiante explora nuevamente en el grado del polinomio y en las posibilidades para sus divisores. Se da cuenta, además, que una vez que consigue un polinomio de grado 1 como factor de $h(x)$, entonces el problema se reduce al caso anterior. Podemos decir que, en esta parte se coordina el plano [Sem-Dis] a toda la actividad expuesta en la primera parte.

Otra posibilidad es que el estudiante represente $h(x) = ax^2 + bx + c$ y divida por un polinomio de grado 1 como $p(x) = mx + n$. Puede así encontrar condiciones para que la división sea exacta y concluir que entonces existirá una raíz real para $h(x)$. Esta resolución, sin embargo, puede traer dificultades por la cantidad de variables en juego. La génesis predominante en este trabajo es la instrumental y la articulación con otras génesis aparecerá cuando reflexione acerca de la dependencia entre los coeficientes y utilice las hipótesis (tendrá que el resto al dividir, debe ser 0). Para este tipo de resolución, puede ser dificultoso extender los resultados al polinomio de grado 3, pues serán aún más las variables en juego.

Finalmente, otra posible estrategia es que el estudiante, sin separar en los casos en que el polinomio $h(x)$ sea de grado 2 o 3 y hacer todo el análisis por cada uno, directamente recurra a argumentos que tienen relación con los números 2 y 3, esto es, que el estudiante reflexione acerca de la descomposición aditiva de tales números: 2=1+1, y 3=1+2 o 3=1+1+1. En cualquiera de los casos, $h(x)$ tendrá algún factor de grado 1, y se podrán utilizar los argumentos antes descritos para concluir que $h(x)$ tiene alguna raíz real. En este trabajo nuevamente se activan los tres planos verticales del ETM.

En conclusión, para la actividad matemática motivada por la tarea 3, podemos afirmar que se articulan y coordinan todos los planos verticales del ETM, por lo que la condición (1) de las tareas emblemáticas, se cumple.

CONCLUSIONES

En nuestra opinión, las 3 tareas propuestas generan *potencialmente* un trabajo matemático completo. Es decir, sugieren *a priori* la activación de las 3 génesis: semiótica, instrumental y discursiva, junto con una articulación entre los 3 planos verticales en el modelo del ETM. En este contexto, consideramos que estas 3 tareas (y en general las tareas que queremos incorporar a nuestra batería) promueven el uso de objetos, técnicas y propiedades utilizadas en la enseñanza media, e incorporan paulatinamente nuevos objetos, herramientas y referentes teóricos que son abordados en la universidad (en particular en la formación inicial de profesores), así como también formas de manipularlos, de manera de aportar en la disminución de la brecha liceo-universidad. En particular, podemos observar en los análisis de las tareas mostradas en este trabajo, que estas permiten trabajar estrategias distintas y complementarias al de hacer el salto inmediato a razonamientos deductivos, sin dejar de lado el desarrollo de la demostración, y el uso de objetos en lenguaje formal.

DISCUSIÓN

Comenzando desde la base que la intención de la institución universitaria en la cual se realiza este proyecto es formar a profesores reflexivos, que sean capaces de proponer y adaptar problemas que movilicen el intelecto de sus alumnos, nos resulta relevante diseñar tareas que permitan que el profesor en formación conozca y haga uso de distintos tipos de razonamientos, no limitando su pensar sólo hacia el razonamiento de tipo deductivo. Lo anterior es un aporte también hacia la validez que el futuro profesor entrega a las estrategias que se adoptan para resolver un problema y que se escapan de la matemática formal.

Un tema que genera un intercambio de opiniones contrarias es si dada una tarea, tenemos suficiente información para saber cómo será resuelta. De ningún modo nuestro trabajo pretende concluir algo en ese respecto. En este sentido, es importante destacar que estamos proponiendo aquí una lista de tareas que *potencialmente* sean portadoras de un trabajo matemático en el cual se promueva *a priori* activar una relación genuina entre los planos cognitivo y epistemológico en el desarrollo de la misma, es decir en el momento de realizarse la acción de resolver dicha tarea. Un análisis *a posteriori* es necesario para completar este trabajo y concluir si nuestra propuesta es en la práctica coherente con nuestro estudio inicial. Realizar este análisis representa nuestro paso a seguir.

Con respecto a la elección y redacción de las tareas que proponemos para nuestra batería, cabe señalar en primer lugar que sin lugar a dudas son perfectibles. En segundo lugar, decir que la elección inicial de las mismas (que luego analizamos *a priori)*, se hace desde nuestra intuición y experiencia tanto en el estudio de la matemática como en docencia universitaria, buscando en ellas su potencial en el uso articulado de objetos, herramientas y referenciales teóricos para ser llevada a cabo por un sujeto. Una vez elegidas las tareas candidatas, se analizan desde el lente del ETM y se identifican el/los tipos de representamen usados, las herramientas y su naturaleza, los referenciales, y en qué medida se ve una articulación de los mismos juntos con las dimensiones cognitiva y epistemológica. Además, cada tarea que es candidata a ser emblemática debe satisfacer las condiciones (2) y (3), de estar en ETM idóneo y de referencia. En los ejemplos que hemos dado, se espera que los estudiantes usen lo que han aprendido en el curso, en particular, que movilicen sus conocimientos acerca de congruencias, trigonometría y polinomios, respectivamente. Lo anterior no es un asunto menor; considerando que las tareas son diseñadas para ser implementadas por profesores del curso y que la intención es que estas tareas perduren en el tiempo y puedan ser replicadas, es relevante que el docente reconozca esta tarea, la valide y no la considere ajena a sus objetivos y programa del curso.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2003) ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2).*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathematique et ses genses, Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 19-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D., Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: An introduction. *ZDM, 48(6),* 721-737.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines : existence et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématiques, Florina, Grèce.*

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3) (número especial).

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20(2),* 5–24.

Vandebrouck, F. (Ed.). (2013). Mathematics classrooms students' activities and teachers' practices. Rotterdam: Sense Publishers.

Winslow, C. & Gronbaek, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *RDM Newsletters, 34 (1)*, 59-86.