SUMAS DE CUADRADOS DE FORMAS

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

CATALINA CVITANICH ABARCA

Octubre, 1987

Patrocinante: Dr. Ricardo Baeza R.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

I N F O R M E D E A P R O B A C I O N

T E S I S D E M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

CATALINA CVITANICH ABARCA

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza R. Ricardo Baeza

Comisión Informante de Tesis

Dra. Alicia Labra J. Alicia Labra J.

Dr. José Pantoja M.

Dr. Jorge Soto A.

I N D I C E

INTRODUCCION

La idea central de este trabajo ha sido motivada por el siguiente problema: ¿En qué condiciones un polinomio real positivo semidefinido (psd) se puede expresar como suma de cuadrados de otros polinomios reales? Bajo homogenización, es suficiente estudiar este problema para formas, es decir polinomios homogéneos.

Hilbert (1888) demostró que tal descomposición sólo es posible para formas binarias, cuadráticas y cuárticas ternarias, más formalmente si $P_{n,m}$ denota el cono de formas psd en n variables y de grado m y $\Sigma_{n,m}$ el subcono de $P_{n,m}$ de las formas que son sumas de cuadrados de formas de grado $\frac{m}{2}$, entonces $\Sigma_{n,m} = P_{n,m}$ sí y sólo si $n = 2$ ó $m = 2$ ó $(n,m) = (3,4)$.

En el Primer Capítulo presentamos las definiciones y notaciones básicas necesarias y además mostramos ejemplos particulares de formas psd que no son sumas de cuadrados.

Los conceptos de cero y orden de un cero de un polinomio real son introducidas en el Capítulo II, donde se establecen relaciones entre el conjunto de ceros de una forma y sus propiedades, especialmente los casos de formas ternarias y cuaternarias -tres y cuatro variables- respectivamente.

En el Capítulo III se introduce la noción de extremalidad de una forma, diremos que una forma F es extremal si no existe una descomposición no trivial en suma de dos formas para F, esto es, si $F \in P_{n,m}$ y $F = F_1 + F_2$ con $F_i \in P_{n,m}$ entonces $F_i = \lambda_i F$ donde λ_i es un número real no negativo. El conjunto de formas extremales en $P_{n,m}$ se denota por $E(P_{n,m})$. Análogamente $E(\Sigma_{n,m})$ es el conjunto de formas extremales en $\Sigma_{n,m}$.

Aquí, se construyen ejemplos de formas extremales y mostramos métodos prácticos para determinar extremalidad.

Es claro que $E(P_{n,m}) \cap \Sigma_{n,m} \subseteq E(\Sigma_{n,m})$, de modo que es interesante analizar en qué condiciones $E(\Sigma_{n,m}) \subseteq E(P_{n,m})$. En el Capítulo IV, mostramos que esta relación sólo es posible en los siguientes casos: $n = 2$; $m \leq 6$; $(n,m) = (3,8)$; $(n,m) = (3,10)$.

El principal resultado de este trabajo es el establecer hipótesis para formas $F \in E(\Sigma_{n,m})$ de tal manera que si $E(\Sigma_{n,m})^*$ es el conjunto de formas en $E(\Sigma_{n,m})$ que satisfacen estos supuestos entonces $E(\Sigma_{n,m})^* \subseteq E(P_{n,m})$ para $(n,m) = (3,12)$ y $(n,m) = (4,8)$.

Finalmente, consideremos ejemplos particulares de formas F en $E(\Sigma_{3,12})$ y en $E(\Sigma_{4,8})$ que no satisfacen las hipótesis impuestas y analizamos su extremalidad.

Este resultado conduce a una solución parcial del problema siguiente: ¿Para qué valores (n,m) existe una forma $F \in E(P_{n,m})$ tal que $F^2 \notin E(P_{n,2m})$? Planteado por Choi et al. (1982).

C A P I T U L O   I

FORMAS REALES POSITIVAS SEMIDEFINIDAS

Preliminares algebraicos.

Definición 1.1. Un polinomio real $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ se llama:

a) Positivo semidefinido (psd) sí y sólo si $p(a_1, \ldots, a_n) \geq 0$ para todo $a_i \in \mathbb{R}$. Denotamos este hecho por $p \geq 0$.

b) Positivo sí y sólo si $p(a_1, \ldots, a_n) > 0$ para todo $a_i \in \mathbb{R}$. Denotamos este hecho por $p > 0$.

c) En forma análoga se define negativo semidefinido y negativo. Denotamos estos hechos por $p \leq 0$ y $p < 0$ respectivamente.

d) Indefinido sí y sólo si existen puntos $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $p(a_1, \ldots, a_n) < 0$ y $p(b_1, \ldots, b_n) > 0$.

e) Puramente indefinido sí y sólo si no es constante, todos sus factores irreducibles son indefinidos y tienen multiplicidad uno.

En particular si p es irreducible indefinido es puramente indefinido.

Además todo polinomio indefinido tiene un factor puramente indefinido.

Definición 1.2. Diremos que el polinomio

$$p = \Sigma a_i x^{(i)} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] ,$$

donde $x^{(i)}$ representa el monomio $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$, tiene grado m sí y sólo si $m = \max_i\{gr\ x^{(i)}\}$ con $a_i \neq 0$.

Si $gr\ x^{(i)} = m$ para todo i, con $a_i \neq 0$ entonces p se llama homogéneo o forma de grado m.

Si $F \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ es una forma, definimos $F_* \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ por $F_* = F(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Recíprocamente, para todo polinomio $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ de grado m, que se puede escribir de la siguiente manera: $f = f_o + f_1 + \ldots + f_m$ donde f_i es una forma de grado i, definimos $f^* \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ por $f^* = x_{n+1}^m f_o + x_n^{m-1} f_1 + \ldots + f_m = x_{n+1}^m f(x_1 / x_{n+1}, \ldots, x_n / x_{n+1})$; f^* es una forma de grado m. Se dirá que estos procesos son los de "deshomogenizar" y "homogenizar" polinomios con respecto a x_{n+1}.

Ejemplo: $f(x,y,z) = xy + xyz - z^3 + 2x^2y^2 - y^3z^2$ entonces homogenizando f se obtiene:

$$\begin{aligned} f^*(x,y,z,w) &= w^3xy + w^2xyz - w^2z^3 + 2wx^2y^2 - y^3z^2 \\ &= w^5 f(x / w , y / w , z / w) . \end{aligned}$$

Es fácil verificar las siguientes propiedades:

(1) $(FG)_* = F_*G_*$; $(fg)^* = f^*g^*$.

(2) Si r es la mayor potencia de x_{n+1} que divide a F , entonces

$x_{n+1}^r (F_*)^* = F$; $(f^*)_* = f$.

(3) $(F + G)_* = F_* + G_*$; $x_{n+1}^t (f + g)^* = x_{n+1}^r f^* + x_{n+1}^s g^*$, donde

$r = gr(g)$, $s = gr(f)$ y $t = r + s - gr(f + g)$.

Resultado de Hilbert.

En 1888, Hilbert [7] estudió el siguiente problema: ¿Cuándo un polinomio real psd es una suma de cuadrados de otros polinomios reales? Bajo homogenización, es suficiente estudiar este problema para formas reales.

Denotemos por $P_{n,m}$ al cono de las formas reales psd en n variables y de grado m , y por $\Sigma_{n,m}$ el subcono de $P_{n,m}$ que contiene las formas que son sumas finitas de cuadrados de otros polinomios reales.

Es claro que si $p \neq 0$ y $p \in P_{n,m}$ entonces m debe ser par.

Hilbert resolvió este problema demostrando el siguiente teorema:

Teorema 1.3. $\Sigma_{n,m} = P_{n,m}$ sí y sólo si $n = 2$ ó $m = 2$ ó $(n,m) = (3,4)$.

De acuerdo con este resultado se ha estudiado el siguiente problema: Determinar la existencia y valor de alguna cota $B(n)$ que dependa solamente del número de variables n , tal que cualquier suma de cuadrados en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ es una suma de $B(n)$ cuadrados. Se ha demostrado que $B(n)$ existe y debe ser $\geq 2^n$, si $n \geq 3$. (Choi and Lam (1976) [3]).

Para el caso particular $n = 2$ se tiene que $B(n) = 2$.

En efecto, supongamos que $F \in P_{2,m}$, entonces

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} y^i = x^m \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{y}{x}\right)^i = x^m g(z)$$

donde $z = \frac{y}{x}$ y $g(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i$, luego $g(z) \geq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$, si $r = gr(g)$ entonces r es par y $0 < r \leq m$. Por lo tanto $g(z)$ se expresa como producto de factores lineales al cuadrado o factores cuadráticos irreducibles en $\mathbb{R}$, es decir:

$$g(z) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i z + \beta_i)^2 \ \left((a_i z + b_i)^2 + c_i^2\right) \quad ,$$

luego

$$F(x,y) = x^{m-r} \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i y + \beta_i x)^2 \ \left((a_i y + b_i x)^2 + c_i^2 x^2\right)$$

$$F(x,y) = [x^{m-r} \left(\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i y + \beta_i x)\right)^2] \prod_{i=1}^{k} (P_i^2 + Q_i^2)$$

Usando inducción y la fórmula siguiente:

$$(P_1^2 + Q_1^2)(P_2^2 + Q_2^2) = (P_1P_2 + Q_1Q_2)^2 + (P_1Q_2 - P_2Q_1)^2$$

es fácil verificar que $\prod_{i=1}^{k} (P_i^2 + Q_i^2) = P^2 + Q^2$ donde P y Q son polinomios en las variables x e y . Luego $F(x,y) = H^2[P^2 + Q^2]$ donde

$$H = x^{\frac{m-r}{2}} \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i y + \beta_i x) \ .$$

$\square$

Ejemplos básicos.

Según el teorema 1.3 si $n \geq 3$ y $m \geq 3$ y $(n,m) \neq (3,4)$ existen formas $F \in P_{n,m} - \Sigma_{n,m}$.

Proposición 1.4. La forma

$$S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2 \in P_{3,6} - \Sigma_{3,6} .$$

Demostración: Usando la desigualdad aritmética geométrica es inmediato que S es psd , supongamos que $S = \Sigma\, q_i^2$, donde $q_i \in \mathbb{R}[x,y,z]$ es una forma cúbica que puede contener los monomios x^3 , x^2y , x^2z , xy^2 , xyz , xz^2 , y^3 , y^2z , yz^2 , z^3 , como S no contiene x^6 , y^6 , z^6 eliminamos de q_i los monomios x^3 , y^3 , z^3 y por lo tanto q_i tampoco contiene los monomios xy^2 , yz^2 , zx^2 , luego $q_i = a_ix^2y + b_iy^2z + c_iz^2x + d_ixyz$ entonces en $\Sigma\, q_i^2$ el término $x^2y^2z^2$ tiene coeficiente $\Sigma\, d_i^2 \geq 0$, lo cual es una contradicción.

□

Proposición 1.5. La forma

$$Q(x,y,z,w) = w^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xyzw \in P_{4,4} - \Sigma_{4,4}$$

Demostración: Usando la desigualdad aritmética geométrica se obtiene $Q \geq 0$, supongamos que $Q = \Sigma\, q_i^2$ donde $q_i \in \mathbb{R}[x,y,z,w]$ es una forma cuadrática. Como Q no contiene los monomios x^4 , y^4 , z^4 , q_i no puede contener x^2 , y^2 , z^2 y por lo tanto también se eliminan de q_i los monomios xw , yw , zw , luego $q_i = a_iw^2 + b_ixy + c_iyz + d_izx$, entonces $\Sigma\, q_i^2$ no contiene el monomio $xyzw$, lo cual es una contradicción.

□

Nota 1.6. Estos resultados se pueden generalizar de la siguiente manera: si $Q_1(x,y,z,w) \in P_{4,4}$ y no contiene x^4, y^4, z^4, x^2w^2, y^2w^2, z^2w^2, pero contiene el término $\alpha xyzw$ $(\alpha \neq 0)$ entonces $Q_1 \notin \Sigma_{4,4}$. Análogamente si $S_1(x,y,z) \in P_{3,6}$ y no contiene x^6, y^6, z^6, x^2y^4, y^2z^4, z^2x^4, pero contiene $\alpha x^2y^2z^2$ con $\alpha < 0$, entonces $S_1 \notin \Sigma_{3,6}$.

Otros ejemplos de formas $F \in P_{n,m} - \Sigma_{n,m}$ son:

$$R(x,y,z) = x^6 + y^6 + z^6 - (x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 + x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4) +$$

$$+ 3x^2y^2z^2 \in P_{3,6} - \Sigma_{3,6} \qquad \text{(Robinson [12])}$$

$$M(x,y,z) = z^6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2z^2 \in P_{3,6} - \Sigma_{3,6} \qquad \text{(Motzkin [9])}$$

Existen también otras formas con esta propiedad construídas por Choi (1975 [1]). En general el método de prueba es del tipo inspección, sin embargo existe otra manera para determinar que $F \notin \Sigma_{n,m}$ y consiste en conocer el conjunto de ceros de la forma F, como se verá más adelante en el Capítulo II "Ceros reales de una forma positiva semidefinida".

Para valores de (n,m) distintos de $(3,6)$ y $(4,4)$ es fácil encontrar formas con tal propiedad, puesto que si $F(x_1, \ldots, x_n) \in P_{n,m} - \Sigma_{n,m}$ entonces

$$x_1^{2i}F(x_1, \ldots, x_n) \in P_{n,m+2i} - \Sigma_{n,m+2i}$$

y
$$F(x_1, \ldots, x_n) \in P_{n+j,m} - \Sigma_{n+j,m} .$$

C A P I T U L O II

CEROS REALES DE UNA FORMA POSITIVA SEMIDEFINIDA

Relaciones entre una forma y su conjunto de ceros.

Definición 2.1. Un punto $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se llama cero de la forma $F \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ sí y sólo si $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Denotaremos por $z(F)$ al conjunto de ceros de la forma F y por $|z(F)|$ al número de ceros distintos de F , considerando $z(F)$ como subconjunto del espacio proyectivo real, en particular $(0,0, \ldots, 0) \notin z(F)$.

Nota 2.2. Una aplicación interesante del conjunto de ceros de una forma será mostrar que $Q(x,y,z,w) = w^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xyzw \notin \Sigma_{4,4}$ (Robinson, 1973 [12]).

Primero se determina el conjunto de ceros de Q , consistente en 7 puntos, a saber

$$z(Q) = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,1), (1,-1,-1,1), (-1,1,-1,1), (-1,-1,1,1)\}$$

Ahora demostremos la siguiente propiedad:

Si q es una forma cuadrática en x,y,z,w entonces q se anula en cada punto de $z(Q)$ sí y sólo si $q = a(xy - zw) + b(xz - yw) + c(xw - yz)$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Demostración: Si $q = a(xy - zw) + b(xz - yw) + c(xw - yz)$ es claro que $q(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in z(Q)$. Recíprocamente si q es una forma cuadrática en x,y,z,w que se anula en los puntos $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ y $(0,0,1,0)$ no puede contener los monomios x^2, y^2, z^2, luego $q(x,y,z,w) = axy + a'zw + bxz + b'yw + cxw + c'yz + dw^2$, resolviendo el sistema lineal homogéneo de 4 ecuaciones que corresponde a $q(1,1,1,1) = 0$, $q(1,-1,-1,1) = 0$, $q(-1,1,-1,1) = 0$ y $q(-1,-1,1,1) = 0$ se obtiene $a' = -a$, $b' = -b$, $c' = -c$ y $d = 0$.

□

Si $Q = \Sigma q_i^2$ entonces $z(Q) \subseteq z(q_i)$, luego $q_i = a_i(xy - zw) + b_i(xz - yw) + c_i(xw - yz)$, de modo que $q_i(0,0,0,1) = 0$, sin embargo $Q(0,0,0,1) = 1$, contradicción, por lo tanto $Q \neq \Sigma q_i^2$.

Es natural preguntarse si este método puede ser aplicado a las formas

$$S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2 \in P_{3,6}$$

y $$M(x,y,z) = z^6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2z^2 \in P_{3,6},$$

la respuesta es negativa ya que el conjunto de ceros de S consta de los 7 puntos siguientes:

$$z(S) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}$$

Demostración: Supongamos que F es negativa sobre un conjunto abierto A y positiva sobre un conjunto abierto B .

Después de contraer A y B podemos suponer que A y B son disjuntos sobre el hiperplano $x_1 = 0$.

Luego existen conjuntos no vacíos, abiertos A_o , B_o en $\mathbb{R}^{n-1}$ tales que $F(1,A_o) < 0 < F(1,B_o)$.

Entonces para cada $a_o \in A_o$ y $b_o \in B_o$ construimos el conjunto conexo $(1,C_o) = \lambda(1,a_o) + (1 - \lambda)(1,b_o)$ con $0 \leq \lambda \leq 1$, luego $F(1,C_o)$ debe ser un conjunto conexo, es decir un intervalo $[\alpha_o,\beta_o]$ con $\alpha_o < 0 < \beta_o$ luego existe un punto $c_o \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $F(1,c_o) = 0$.

Si $n \geq 3$, podemos construir infinitos puntos $(1,c_o) \in Z(F)$, eligiendo $a_o \in A_o$ y $b_o \in B_o$ tales que los segmentos $\lambda(1,a_o) + (1 - \lambda)(1,b_o)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, que determina cada elección no se corten.

□

Formas ternarias y cuaternarias.

Lema 2.6. Sea $p(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio irreducible en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces p es reducible en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ sí y sólo si p ó $-p$ es suma de dos cuadrados en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Demostración: Si $p = q_1^2 + q_2^2$ con $q_i \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $p = (q_1 - iq_2)(q_1 + iq_2)$, $(i = \sqrt{-1})$, $q_i \neq 0$ pues p es irreducible en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, luego p es reducible en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Supongamos ahora que p tiene una factorización no trivial

$p = (r_1 + ir_2)(s_1 + is_2)$ con $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ considerando complejos conjugados, se tiene $p = (r_1 - ir_2)(s_1 - is_2)$ luego $p^2 = (r_1^2 + r_2^2)(s_1^2 + s_2^2)$, usando teorema de factorización única se concluye que $p = a(r_1^2 + r_2^2)$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Luego a ó $-a$ es un cuadrado en $\mathbb{R}$.

□

<u>Proposición 2.7</u>: Sea $p \in P_{3,m}$ irreducible en $\mathbb{R}[x,y,z]$. Entonces $|z(p)| \leq \max\left(\frac{m^2}{4}, \frac{(m-1)(m-2)}{2}\right)$.

<u>Demostración</u>: Supongamos primero que p es reducible en $\mathbb{C}[x,y,z]$, entonces por el lema 2.6 se tiene que $\pm p = r_1^2 + r_2^2$ con r_1, r_2 formas de grado $\frac{m}{2}$ en $\mathbb{R}[x,y,z]$, como p es irreducible, r_1 y r_2 deben ser relativamente primos, luego las curvas planas $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ no pueden tener una componente común. De acuerdo con el Teorema de Bezout (Walker, pág. 59 [14]; Fulton, pág. 74 [6]), estas dos curvas se intersectan en a lo más $\frac{m}{2}\cdot\frac{m}{2}$ puntos en el plano proyectivo complejo, en particular $|z(p)| = |z(r_1) \cap z(r_2)| \leq \frac{m^2}{4}$ (recuérdese que "z" denota ceros reales).

Ahora si p es irreducible en $\mathbb{C}[x,y,z]$, entonces p define una curva algebraica plana, llamémosla C. Como p es psd, cada cero real $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in z(p)$ debe ser un cero de $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ luego $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ es un punto singular de C. Por teoría clásica de curvas, la curva irreducible C tiene a lo más $(m-1)(m-2)/2$ puntos singulares (Walker, pág. 65 [14]; Fulton, pág. 77 [6]), así $|z(p)| \leq (m-1)(m-2)/2$.

□

Corolario 2.8. Sea $p \in P_{3,4}$ irreducible tal que $|z(p)| \geq 4$, entonces p es suma de dos cuadrados en $\mathbb{R}[x,y,z]$.

Demostración: p no es irreducible en $\mathbb{C}[x,y,z]$, si lo fuera $|z(p)| \leq (4-1)(4-2)/2$ lo cual es una contradicción, por lo tanto p es reducible en $\mathbb{C}[x,y,z]$ aplicando lema 2.6, p es suma de dos cuadrados en $\mathbb{R}[x,y,z]$.

$\square$

Nota 2.9. Denotemos por $\alpha(m)$ a la expresión $\max\left\{\frac{m^2}{4}, \frac{(m-1)(m-2)}{2}\right\}$.

$\alpha(m)$ interesa sólo para valores m enteros positivos. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\alpha(m) = \frac{m^2}{4}$ si $m \leq 5$ (se verifica evaluando)

   $\alpha(m) = (m-1)(m-2)/2$, $m \geq 6$ (se verifica por inducción).

2. La función $\frac{\alpha(m)}{m}$ es monótona creciente:

   Si $m \leq 5$ entonces $\frac{\alpha(m)}{m} = \frac{m}{4}$ monótona creciente

   Si $m \geq 6$ entonces $\frac{\alpha(m)}{m} = \frac{(m-1)(m-2)}{2m}$ monótona creciente

   Además $\frac{\alpha(5)}{5} = \frac{5}{4} \leq \frac{5}{3} = \frac{\alpha(6)}{6}$

3. $\alpha(m_1) + \alpha(m_2) \leq \alpha(m_1 + m_2)$:

   Tenemos que $\frac{\alpha(m_i)}{m_i} \leq \frac{\alpha(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$ para $i = 1,2$ (Propiedad 2),

   luego

$$\alpha(m_1) + \alpha(m_2) \leq \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)\alpha(m_1 + m_2) = \alpha(m_1 + m_2)$$

Teorema 2.10. Sea $p \in P_{3,m}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $|z(p)| > \alpha(m)$

(2) $|z(p)| = \infty$

(3) p es divisible por el cuadrado de alguna forma indefinida.

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (1) es trivial y (3) $\Rightarrow$ (2) se obtiene de la proposición 2.5. Luego es suficiente probar que (1) $\Rightarrow$ (3). Esto se demuestra haciendo inducción sobre m : Para $m = 2$, $\alpha(m) = 1$, luego p es una forma cuadrática psd en tres variables con dos ceros a lo menos. Bajo un cambio lineal $p(x,y,z) = x^2$ es decir p es divisible por el cuadrado de una forma indefinida.

En general, supongamos ahora que $|z(p)| > \alpha(m)$, por la proposición 2.7, p es reducible en $\mathbb{R}[x,y,z]$, sea $p = q_1 q_2, \ldots, q_r$ $(r \geq 2)$ donde cada $q_i \in \mathbb{R}[x,y,z]$ es irreducible.

Distingamos dos casos:

a) Si todos los q_i son semidefinidos: multiplicándolos por ± 1 si es necesario, podemos suponer que todos son psd , entonces existe un índice i tal que $|z(q_i)| > \alpha(m_i)$, donde $m_i = \operatorname{gr} q_i$ pues de otro modo, por nota 2.9(3) se tendría:

$$|z(p)| = \left|\bigcup_i z(q_i)\right| \leq \sum_i |z(q_i)| \leq \sum_i \alpha(m_i) \leq \alpha\left(\sum_i m_i\right) = \alpha(m)$$

lo cual es una contradicción.

Podemos suponer $|z(q_1)| > \alpha(m_1)$, como $m_1 < m$ aplicamos la hipótesis de inducción a q_1 y se concluye la afirmación (3).

b) Si alguno de los q_i es indefinido: Supongamos que q_1 es indefinido, como es irreducible y $z(q_1) \subseteq z(p)$ se puede aplicar la nota 2.4, de modo que q_1^2 / p .

También es posible demostrarlo sin usar la nota 2.4, de la siguiente manera:

Supongamos que $p(x,y,z)$ contiene la variable x , consideramos las curvas planas definidas por $p = 0$ y $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. La intersección de estas curvas contiene el conjunto infinito $z(p)$, luego tienen una componente común (Walker, pág. 59, [14]; Fulton, pág. 75,[6]), así entonces p y $\frac{\partial p}{\partial x}$ tienen un factor común real irreducible, llamémoslo h , ahora si $p = h \cdot g$ tenemos que $\frac{\partial p}{\partial x} = h \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$, por lo tanto h divide a $g \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$. Consideremos dos casos:

<u>Caso 1:</u> $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ entonces $h = h(y,z)$.

Si $h(y,z)$ tiene un cero, p es divisible por algún $ay + bz \neq 0$, como p es psd , p es divisible por $(ay + bz)^2$ (proposición 2.3). Supongamos ahora que $h(y,z)$ no tiene ceros, haciendo un cambio de signos podemos suponer que h y g son psd . Como la forma ternaria $h(y,z)$ tiene un único cero $(1,0,0)$ y $|z(p)| = \infty$ implica que $|z(g)| = \infty$, así podemos aplicar la hipótesis de inducción a g .

Caso 2: $\frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$, como h es irreducible y divide a $g \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$ se tiene que h divide a g entonces podemos escribir $p = h^2 q$. Si h es indefinida se tiene lo pedido, luego supongamos que h es semidefinida, digamos positiva, por la proposición 2.7 $|Z(h)| < \infty$, como $|Z(p)| = \infty$ se debe tener $|Z(q)| = \infty$, además q es psd , por lo tanto se puede aplicar la hipótesis de inducción.

Nota 2.11. Este teorema de factorización es particular a formas ternarias. Para cuatro o más variables no funciona, por ejemplo $x^2y^2 + z^2w^2$ es irreductible sin embargo se anula en $(x,0,z,0)$.

El siguiente corolario sugiere que el estudio de formas ternarias psd puede ser reducido en algún sentido al caso en que la forma ternaria sólo tiene finitos ceros reales.

Corolario 2.12. Si p es una forma ternaria, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) p es semidefinida (es decir p ó $-p$ es psd)

(2) p tiene una factorización $p = h^2 q$ donde $|Z(q)| < \infty$ y h es un producto de formas indefinidas. (Este producto podría no existir en tal caso convenimos que $h = 1$).

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (1) se tiene de la proposición 2.5, ya que q es una forma ternaria con finitos ceros reales por lo tanto q ó $-q$ es psd , luego $p = h^2 q$ será semidefinida.

Para (1) $\Rightarrow$ (2) supongamos que p es psd , y hagamos inducción sobre el grado de p . Si $|Z(p)| < \infty$ elegimos $h = 1$. Si $|Z(p)| = \infty$

por el teorema 2.10 existe una factorización $p = h^2 q$ donde h es indefinida, como $\operatorname{gr} q < \operatorname{gr} p$ se aplica hipótesis de inducción a q.

$\square$

Teorema 2.13. Si $p \in P_{4,4}$ y $|z(p)| = \infty$, entonces $p \in \Sigma_{4,4}$.

Demostración: Ver Choi et al. (1980) [5].

Multiplicidad y orden de un cero.

Se trata de generalizar conceptos y propiedades relacionadas con la multiplicidad de un cero de un polinomio de una variable para el caso de un polinomio de n variables. Trabajaremos primero con $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, de modo que la generalización siga las mismas ideas.

Proposición 2.14. Sea $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, polinomio de grado d. Entonces $c \in \mathbb{R}$ es un cero de f de multiplicidad m, $1 \leq m \leq d$ sí y sólo si

$$f(x) = \sum_{i=m}^{d} \alpha_i (x - c)^i$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = m, m + 1, \ldots, d$ y $\alpha_m \neq 0$.

Demostración: Supongamos que c es un cero de f de multiplicidad m, entonces $f(x) = (x - c)^m g(x)$ con $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $(x - c) \nmid g(x)$, luego $\frac{d^i f}{dx^i}(c) = 0 \ \forall\, i = 0, \ldots, m - 1$.

Escribiendo la serie de Taylor para f, tenemos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} \frac{d^i f}{dx^i}(c) \frac{1}{i!}(x - c)^i = \sum_{i=m}^{d} \frac{d^i f}{dx^i}(c) \frac{1}{i!}(x - c)^i .$$

Supongamos ahora que $f(x) = \sum_{i=m}^{d} \alpha_i (x - c)^i$ con $\alpha_m \neq 0$ entonces

$$f(x) = (x - c)^m \sum_{i=m}^{d} \alpha_i (x - c)^{i-m}$$

es decir c es un cero de f de multiplicidad m.

$\square$

Proposición 2.15. Sean $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $c \in \mathbb{R}$ un cero de f de multiplicidad m, entonces c es un cero de f^2 de multiplicidad $2m$.

Demostración: Trivial.

$\square$

Proposición 2.16. Sean $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado d y $c \in \mathbb{R}$ un cero de f de multiplicidad m, entonces existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) \leq A|x - c|^m$ para $|x - c| < 1$.

Además si $f(x)$ es psd y existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) \leq A|x - c|^m$ para $|x - c| < 1$, entonces c es un cero de f de multiplicidad $\geq m$.

Demostración: Supongamos que c es un cero de f de multiplicidad m y $|x - c| < 1$ entonces

$$f(x) \leq |f(x)| = \left|\sum_{i=m}^{d} \alpha_i (x - c)^i\right| \leq \sum_{i=m}^{d} |\alpha_i||x - c|^i$$

$$\leq \max_{m \leq i \leq d} |\alpha_i|(d - m + 1)|x - c|^m .$$

Consideremos ahora $f(x) \geq 0$ y supongamos que existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) \leq A|x - c|^m$ entonces c es un cero de f y de $\frac{df}{dx}$ dado que c es un mínimo de f. Luego c es un cero de f de multiplicidad ≥ 2, así, si $m = 2$ es trivial.

Haremos inducción sobre m, supongamos que la proposición es válida para m y que existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 \leq f(x) \leq A|x - c|^{m+1}$ para $|x - c| < 1$ entonces $0 \leq f(x) \leq A|x - c|^m |x - c| \leq A|x - c|^m$ aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que c es un cero de f de multiplicidad $\geq m$, luego

$$f(x) = \sum_{i=m}^{d} \alpha_i (x - c)^i = (x - c)^m \sum_{i=m}^{d} \alpha_i (x - c)^{i-m} .$$

Consideremos x tal que $x - c = \frac{1}{N}$ con $N \in \mathbb{N} - \{1\}$ entonces $|x - c| < 1$, luego

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{N^m} \sum_{i=m}^{d} \alpha_i \frac{1}{N^{i-m}} \leq A|x - c|^{m+1} = \frac{A}{N^{m+1}} .$$

Entonces

$$0 = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=m}^{d} \alpha_i \frac{1}{N^{i-m}} = \alpha_m$$

Por lo tanto $f(x) = \sum_{i=m+1}^{d} \alpha_i (x - c)^i$.

□

Proposición 2.17. Sea $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $f(x) \geq 0$ y $f = h_1 + h_2$ con $h_j \in \mathbb{R}[x]$, $\operatorname{gr} h_j \geq m$, $h_j(x) \geq 0$ para $j = 1,2$. Si $c \in \mathbb{R}$ es un cero de f de multiplicidad m entonces c es un cero de multiplicidad m de h_1 o de h_2 .

Demostración: Como $h_1 \geq 0$ y $h_2 \geq 0$, c debe ser un cero de h_1 y de h_2 .

Usando la proposición 2.16 tenemos que existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 \leq h_j(x) \leq f(x) \leq A|x - c|^m$ para $|x - c| < 1$, $j = 1,2$ así $h_j(x) \leq A|x - c|^m$ para $|x - c| < 1$, $j = 1,2$, usando nuevamente la proposición 2.16 se concluye que c es un cero de h_j $(j = 1,2)$ de multiplicidad $\geq m$. Como $f = h_1 + h_2$, entonces al comparar coeficientes tenemos que c debe tener multiplicidad m para h_1 o para h_2 .

□

Definición 2.18. Si $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ es un polinomio no homogéneo y $c \in \mathbb{R}^n$ es un cero de p , diremos que c es un cero de orden m de p sí y sólo si

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1, \ldots, i_n)(x_1 - c_1)^{i_1} \ldots (x_n - c_n)^{i_n}$$

con $\alpha(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{R}$ y $\alpha(i_1, \ldots, i_n) \neq 0$ para algún $(i_1, \ldots, i_n)$ tal que $i_1 + \ldots + i_n = m$.

Proposición 2.19. Sean $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio no homogéneo y $c \in \mathbb{R}^n$ un cero de p, entonces c es un cero de orden m de p sí y sólo si para todo $r = 0,1, \ldots, m-1$ se tiene

$$\frac{\partial^r p}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(c) = 0 \quad \text{donde} \quad i_1 + \ldots + i_n = r \quad \text{y} \quad \frac{\partial^m p}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(c) \neq 0$$

para algún $(j_1, \ldots, j_n)$ tal que $j_1 + \ldots + j_n = m$.

Demostración: Consideremos la serie de Taylor correspondiente a $p(x_1, \ldots, x_n)$, esto es:

$$p(x) = p(c) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i) \frac{\partial p}{\partial x_i}(c) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - c_i)(x_j - c_j) \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(c) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} (x_i - c_i)(x_j - c_j)(x_k - c_k) \frac{\partial^3 p}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c) + \ldots$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $c = (c_1, \ldots, c_n)$, así

$$p(x) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{d} \alpha(i_1, \ldots, i_n)(x_1 - c_1)^{i_1} \ldots (x_n - c_n)^{i_n}$$

con $\operatorname{gr} p = d$.

Comparando coeficientes tenemos que si $i_1 + \ldots + i_n = r$

$$\alpha(i_1, \ldots, i_n) = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r p}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(c) ,$$

de este modo c es un cero de orden m para p sí y sólo si

$$\frac{\partial^r p}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(c) = 0 \quad \forall\ 0 \leq r \leq m - 1 \ , \quad i_1 + \dots + i_n = r \quad y$$

$$\frac{\partial^m p}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(c) \neq 0 \quad \text{para algún} \quad (j_1, \dots, j_n) \quad \text{tal que} \quad j_1 + \dots + j_n = m \ .$$

□

Nota 2.20. Si $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots x_n]$ es un polinomio no homogéneo psd y c es un cero de p entonces $p(c) = 0$ y $\frac{\partial p}{\partial x_i}(c) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ dado que c es un mínimo de p, luego c es un cero de p de orden ≥ 2.

Proposición 2.21. Sean $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio no homogéneo y $c \in \mathbb{R}^n$ un cero de orden m de p, entonces c es un cero de orden $2m$ de p^2.

Demostración:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1+\dots+i_n \geq m} \alpha(i_1, \dots, i_n)(x_1 - c_1)^{i_1} \dots$$

$$\dots (x_n - c_n)^{i_n}$$

luego

$$p^2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1+\dots+j_n \geq 2m} \beta(j_1, \dots, j_n)(x_1 - c_1)^{j_1} \dots$$

$$\dots (x_n - c_n)^{j_n}$$

<u>Proposición 2.22</u>. Sean $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio no homogéneo de grado d y $c \in \mathbb{R}^n$ un cero de p de orden m, entonces existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $p(x) \leq A\|x - c\|^m$ para

$$\|x - c\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 \right)^{1/2} < 1 .$$

Además si $p(x)$ es psd y existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $p(x) \leq A\|x - c\|^m$ para $\|x - c\| < 1$, entonces c es un cero de p de orden $\geq m$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que c es un cero de orden m de p y $\|x - c\| < 1$ entonces

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1, \ldots, i_n)(x_1 - c_1)^{i_1} \ldots$$

$$\ldots (x_n - c_n)^{i_n}$$

$$\leq \left| \sum_{i_1+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1, \ldots, i_n)(x_1 - c_1)^{i_1} \ldots (x_n - c_n)^{i_n} \right|$$

$$\leq \sum_{i_1+\ldots+i_n \geq m} |\alpha(i_1, \ldots, i_n)| |x_1 - c_1|^{i_1} \ldots |x_n - c_n|^{i_n}$$

$$\leq \max_{(i_1,\ldots,i_n)} |\alpha(i_1, \ldots, i_n)| \sum_{i_1+\ldots+i_n \geq m} \|x - c\|^{i_1+\ldots+i_n}$$

$$\leq \max_{(i_1,\ldots,i_n)} |\alpha(i_1, \ldots, i_n)| \max_{m \leq k \leq d} t_k (d - m + 1)\|x - c\|^m$$

donde t_k es el número de n-tuplas $(i_1, \ldots, i_n)$ tales que $i_1 + \ldots + i_n = k$.

Consideremos ahora $p \geq 0$ y supongamos que existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $p(x) \leq A\|x - c\|^m$, entonces c es un cero de p y de cada derivada parcial de p (nota 2.20) por lo tanto c es un cero de p de orden ≥ 2, así si $m = 2$ es trivial. Haremos inducción sobre m, supongamos que la proposición vale para m y que existe $A \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 \leq p(x) \leq$ $\leq A\|x - c\|^{m+1}$ para $\|x - c\| < 1$ entonces $0 \leq p(x) \leq A\|x - c\|^m\|x - c\| \leq$ $\leq A\|x - c\|^m$ usando la hipótesis de inducción tenemos que c es un cero de orden $\geq m$ de p, así

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=m} \alpha(i_1, \ldots, i_n)(x_1 - c_1)^{i_1} \ldots$$
$$\ldots (x_n - c_n)^{i_n}$$

es necesario probar que $\alpha(i_1, \ldots, i_n) = 0$ para todo $i_1 + \ldots + i_n = m$.

Para cada $1 \leq k \leq n$, sea $x_k - c_k = \frac{r(k)}{N}$ donde $r(k) \in \mathbb{R}$ fijo y $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|x - c\| = \frac{\sqrt{r^2(1) + \ldots + r^2(n)}}{N} < 1$$

para N suficientemente grande

$$0 \leq p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{q=m}^{d} \sum_{i_1+\ldots+i_n=q} \alpha(i_1, \ldots, i_n) \frac{r(1)^{i_1} \ldots r(n)^{i_n}}{N^q}$$

$$= \frac{1}{N^m} \sum_{q=m}^{d} \sum_{i_1+\ldots+i_n=q} \alpha(i_1, \ldots, i_n) \frac{r(1)^{i_1} \ldots r(n)^{i_n}}{N^{q-m}}$$

denotando por

$$G(N) = \sum_{q=m}^{d} \sum_{i_1+\ldots+i_n=q} \alpha(i_1, \ldots, i_n) \frac{r(1)^{i_1} \ldots r(n)^{i_n}}{N^{q-m}}$$

se tiene

$$0 \le p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{N^m} G(N) \le A\|x - c\|^{m+1} = \frac{A\left(\sum_{k=1}^{n} r^2(k)\right)^{m+1/2}}{N^{m+1}}$$

es decir

$$0 \le G(N) \le \frac{A\left(\sum_{k=1}^{n} r^2(k)\right)^{m+1/2}}{N}$$

Por lo tanto

$$0 = \lim_{N\to\infty} G(N) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=m} \alpha(i_1, \ldots, i_n) r(1)^{i_1} \ldots r(n)^{i_n} \qquad (*)$$

Notemos que de acuerdo con la definición de $x_k - c_k$, si $i_k = 0$ entonces $r(k)^{i_k} = 1$ para cualquier valor de $r(k)$ (incluso el caso $r(k) = 0$) .

El siguiente paso será encontrar valores adecuados para $r(k)$, $1 \le k \le n$ de modo que usando la igualdad $(*)$ se obtenga que los coeficientes $\alpha(i_1, \ldots, i_n)$ sean nulos para cada $i_1 + \ldots + i_n = m$.

Consideremos los siguientes casos:

a) Sea $r(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$ donde $1 \le j \le n$ fijo , entonces

$$(*) \qquad 0 = \sum_{i_1+\ldots+i_n=m} \alpha(i_1, \ldots, i_n) r(1)^{i_1} \ldots r(n)^{i_n}$$

$$= \alpha(0, \ldots, 0, m, 0, \ldots, 0)$$

donde m aparece en el lugar j-ésimo de la n-tupla.

b) Sea $r(k) = \begin{cases} t & \text{si } k = j \\ 1+t & \text{si } k = s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$,

$1 \leq s \leq n$ fijos, entonces

$$(*) \quad 0 = \sum_{i_1+\ldots+i_n=m} \alpha(i_1, \ldots, i_n) r(1)^{i_1} \ldots r(n)^{i_n}$$

$$= \sum_{i_j+i_s=m} \alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0) t^{i_j}(1+t)^{i_s}$$

Notemos que $i_j = 1, \ldots, m-1$

$i_s = 1, \ldots, m-1$

si $i_j + i_s = m$ se obtienen $m-1$ coeficientes $\alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0)$ y por lo tanto $m-1$ polinomios $f_{i_j,i_s}(t) = t^{i_j}(1+t)^{i_s}$ de grado m. Probaremos que estos polinomios son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Sean $i_j = m - \beta$; $i_s = \beta$, $\beta = 1, \ldots, m-1$ entonces

$$f_{i_j,i_s}(t) = f_\beta(t) = t^{m-\beta}(1+t)^\beta$$

luego

$$f_\beta(t) = t^{m-\beta} \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} t^{\beta-k} = \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} t^{m-k}$$

Supongamos que $\sum_{\beta=1}^{m-1} \alpha_\beta f_\beta(t) = 0$ con $\alpha_\beta \in \mathbb{R}$, esto implica

$$\sum_{\beta=1}^{m-1} \alpha_\beta f_\beta(t) = \alpha_1 \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} t^{m-k} + \alpha_2 \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} t^{m-k} + \alpha_3 \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} t^{m-k} +$$

$$+ \dots + \alpha_{m-2} \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-2}{k} t^{m-k} + \alpha_{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} t^{m-k} =$$

$$= t^m \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k + t^{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{k}{1} \alpha_k + t^{m-2} \sum_{k=2}^{m-1} \binom{k}{2} \alpha_k + \dots +$$

$$+ t^2 \sum_{k=m-2}^{m-1} \binom{k}{m-2} \alpha_k + t\alpha_{m-1} = 0$$

Factorizando por t se tiene

$$t^{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k + t^{m-2} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{k}{1} \alpha_k + \dots + t \sum_{k=m-2}^{m-1} \binom{k}{m-2} \alpha_k + \alpha_{m-1} = 0$$

haciendo $t = 0$; $\alpha_{m-1} = 0$ inductivamente $\alpha_{m-2} = \alpha_{m-3} = \dots =$ $= \alpha_2 = \alpha_1 = 0$.

Por lo tanto $\alpha(0, \dots, 0, i_j, 0, \dots, 0, i_s, 0, \dots, 0) = 0$ si $i_j + i_s = m$ para todo $1 \leq i_j \leq n$, $1 \leq i_s \leq n$.

c) Sea

$$r(k) = \begin{cases} t & k = j \\ t & k = s \\ 1 + t & k = \ell \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R} \, , \quad 1 \leq j \leq n \, ,$$

$1 \leq s \leq n$, $1 \leq \ell \leq n$ fijos, entonces

$$(*)\qquad 0 = \sum_{i_1+\ldots+i_n=m} \alpha\left(i_1, \ldots, i_n\right) r(1)^{i_1} \ldots r(n)^{i_n}$$

$$= \sum_{i_j+i_s+i_\ell=m} \alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0)\; t^{i_j+i_s}(1+t)^{i_\ell}$$

Tenemos $m - 1$ polinomios $f_{i_j,i_s,i_\ell}(t) = t^{i_j+i_s}(1+t)^{i_\ell}$ de grado m , linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, luego cuando $i_j + i_s + i_\ell =$ $= m$ se tiene $\alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i, 0, \ldots, 0) = 0$ si $i_j = i_s$, $\alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0) +$ $+ \alpha(0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, i_j, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0) = 0$ si $i_j \neq i_s$.

Haciendo sustituciones similares para $r(k)$ tenemos que

$\alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0) = 0$ si $i_j = i_\ell$

$\alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0) +$

$+ \alpha(0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0) = 0$ si $i_j \neq i_\ell$

$\alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0) = 0$ si $i_s = i_\ell$

$\alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0) +$

$+ \alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0) = 0$ si $i_s \neq i_\ell$.

Por lo tanto se deduce que

$$\alpha(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0, i_s, 0, \ldots, 0, i_\ell, 0, \ldots, 0) = 0$$

si $i_j + i_s + i_\ell = m$ para todo $1 \leq i_j \leq n$, $1 \leq i_s \leq n$, $1 \leq i_\ell \leq n$.

Inductivamente se puede probar que cada coeficiente $\alpha(i_1, \ldots, i_n)$ es nulo para $i_{k_1} + \ldots + i_{k_p} = m$ con $1 \leq p \leq n$ y $1 \leq k_j \leq n$.

□

<u>Proposición 2.23</u>. Sea $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio no homogéneo tal que $p \geq 0$ y $p = h_1 + h_2$ con

$$h_j(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \ , \quad \text{gr}\ h_j \geq m \ , \quad h_j \geq 0$$

para $j = 1,2$. Si $c \in \mathbb{R}^n$ es un cero de orden m de p entonces c es un cero de orden m de h_1 o de h_2 .

<u>Demostración</u>: Como $h_1 \geq 0$ y $h_2 \geq 0$, c debe ser un cero de h_1 y de h_2 . Usando la proposición 2.22 tenemos

$$0 \leq h_j(x) \leq p(x) \leq A\|x - c\|^m$$

luego $h_j(x) \leq A\|x - c\|^m$ para $\|x - c\| < 1$, $j = 1,2$.

Usando nuevamente la proposición 2.22 se concluye que c es un cero de orden $\geq m$ para h_j , $j = 1,2$, como $p = h_1 + h_2$, comparando coefi - cientes se concluye que c debe ser un cero de orden m para h_1 ó para h_2 .

□

<u>Definición 2.24</u>. Sea $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ una forma de grado d , $c \in \mathbb{R}^n$ un cero de F tal que $c_i \neq 0$ para algún $i = 1, \ldots, n$, diremos que c es un <u>cero de orden m de la forma F</u> sí y sólo si

$$\bar{c} = \left(\frac{c_1}{c_i}, \ldots, \frac{c_{i-1}}{c_i}, \frac{c_{i+1}}{c_i}, \ldots, \frac{c_n}{c_i}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

es un cero de orden m del polinomio $p(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$ $= F(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Nota 2.25. Si $c \in \mathbb{R}^n$ es un cero de F , existe por lo menos un valor de i , tal que $c_i \neq 0$ pues $(0,0, \ldots, 0) \notin z(F)$.

Además se puede suponer que $c_i = 1$ ya que si $c_i = \lambda \neq 0$ $F\left(\frac{1}{\lambda} c\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^d F(c) = 0$, de este modo

$$p(\bar{c}) = F(c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_n) = 0 .$$

Proposición 2.26. La definición 2.24 es independiente de la elección de c_i .

Demostración: Sean $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ una forma de grado d y $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ un cero de F . Sin pérdida de generalidad supongamos que $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$.

Si $\quad p(x_2, x_3, \ldots, x_n) = F(1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

y $\quad q(x_1, x_3, \ldots, x_n) = F(x_1, 1, x_3, \ldots, x_n)$

entonces $\bar{c} = \left(\frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1}, \ldots, \frac{c_n}{c_1}\right)$ es un cero de p

y $\quad \bar{\bar{c}} = \left(\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_3}{c_2}, \ldots, \frac{c_n}{c_2}\right)$ es un cero de q .

<u>Demostraremos que $\bar{c}$ es un cero de p de orden m sí y sólo si $\bar{\bar{c}}$ es un cero de q de orden m :</u>

$F(x_1, \ldots, x_n)$ es una forma de grado d , luego $F(x_1, \ldots, x_n) =$

$= x_1^d F\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) = x_2^d F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$ por lo tanto

$$p\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^d q\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_2}\right).$$

Supongamos que $\bar{\bar{c}} = \left(\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_3}{c_2}, \ldots, \frac{c_n}{c_2}\right)$ es un cero de q de orden m , es decir

$$q(x_1, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+i_3+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1, i_3, \ldots, i_n)\left(x_1 - \frac{c_1}{c_2}\right)^{i_1}$$

$$\left(x - \frac{c_3}{c_2}\right)^{i_3} \ldots \left(x_n - \frac{c_n}{c_2}\right)^{i_n}$$

entonces

$$p\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_3}{x_1}\right) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^d q\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^d \sum_{i_1+i_3+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1, i_3, \ldots, i_n)\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{c_1}{c_2}\right)^{i_1}\left(\frac{x_3}{x_2} - \frac{c_3}{c_2}\right)^{i_3} \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{x_n}{x_2} - \frac{c_n}{c_2}\right)^{i_n} =$$

$$= \sum_{i_1+i_3+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1,i_3,\ \ldots,\ i_n) \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{i_1} \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{c_1}{c_2}\right)^{i_1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{i_3}$$

$$\left(\frac{x_3}{x_2} - \frac{c_3}{c_2}\right)^{i_3} \ \cdots\ \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{i_n} \left(\frac{x_n}{x_2} - \frac{c_n}{c_2}\right)^{i_n} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{d-(i_1+i_3+\ldots+i_n)} .$$

Analizando los términos de la última expresión, tenemos que

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{i_1} \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{c_1}{c_2}\right)^{i_1} = (-1)^{i_1} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{i_1} \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{c_2}{c_1}\right)^{i_1}$$

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{i_k} \left(\frac{x_k}{x_2} - \frac{c_k}{c_2}\right)^{i_k} = \left|\left(\frac{x_k}{x_1} - \frac{c_k}{c_1}\right) - \frac{c_k}{c_2}\left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{c_2}{c_1}\right)\right|^{i_k} \qquad \forall\ k\ ,\ 3 \leq k \leq n\ .$$

Denotemos por

$$z_1 = \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$z_k = \left(\frac{x_k}{x_1} - \frac{c_k}{c_1}\right) \qquad \forall\ k\ ,\quad 3 \leq k \leq n$$

De este modo

$$p\left(\frac{x_2}{x_1}\ ,\ \frac{x_3}{x_1}\ ,\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_1}\right) = \sum_{i_1+i_3+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1,i_3,\ \ldots,\ i_n)(-1)^{i_1}$$

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{i_1} z_1^{i_1} \left(z_3 - \frac{c_3}{c_2}\, z_1\right)^{i_3} \ \cdots\ \left(z_n - \frac{c_n}{c_2}\, z_1\right)^{i_n} \left(z_1 + \frac{c_2}{c_1}\right)^{d-(i_1+i_3+\ldots+i_n)}$$

$$= \sum_{i_1+i_3+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1,i_3,\ \ldots,\ i_n)(-1)^{i_1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{i_1}\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^{i_3} \cdots \left(\frac{c_n}{c_2}\right)^{i_n} \cdot$$

$$\cdot z_1^{i_1} \cdot z_1^{i_3} \cdots z_1^{i_n} \cdot z_1^{d-(i_1+i_3+\ldots+i_n)}\left(\frac{z_3}{z_1}\frac{c_2}{c_3} - 1\right)^{i_3} \cdots \left(\frac{z_n}{z_1}\frac{c_2}{c_n} - 1\right)^{i_n} \cdot$$

$$\cdot\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\frac{1}{z_1}\right)^{d-(i_1+i_3+\ldots+i_n)}$$

$$= \sum_{i_1+i_3+\ldots+i_n \geq m} \alpha(i_1,i_3,\ \ldots,\ i_n)(-1)^{i_1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{i_1}\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^{i_3} \cdots \left(\frac{c_n}{c_2}\right)^{i_n} z_1^d \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{z_3}{z_1}\frac{c_2}{c_3} - 1\right)^{i_3} \cdots \left(\frac{z_n}{z_1}\frac{c_2}{c_n} - 1\right)^{i_n} \cdot \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\frac{1}{z_1}\right)^{d-(i_1+i_3+\ldots+i_n)}$$

Un término cualquiera de este polinomio sin considerar los coeficientes, debe ser del tipo siguiente

$$z_1^d\left(\frac{z_3}{z_1}\right)^{k_3} \cdots \left(\frac{z_n}{z_1}\right)^{k_n}\left(\frac{1}{z_1}\right)^{k} = z_1^{d-(k_3+\ldots+k_n+k)}\ z_3^{k_3} \cdots z_n^{k_n}$$

con $0 \leq k_j \leq i_j$, $3 \leq j \leq n$ y $0 \leq k \leq d - (i_1 + i_3 + \ldots + i_n)$ el grado es $d - k$ donde $i_1 + i_3 + \ldots + i_n \leq d - k \leq d$, luego

$$p\left(\frac{x_2}{x_1}\ ,\ \frac{x_3}{x_1}\ ,\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_1}\right) = \sum_{j_1+j_3+\ldots+j_n \geq m} \beta(j_1,j_3,\ \ldots,j_n) z_1^{j_1} z_3^{j_3} \cdots z_n^{j_n}$$

es decir

$$p\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) = \sum_{j_1+j_3+\ldots+j_n \geq m} \beta(j_1, j_3, \ldots, j_n)\left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{c_2}{c_1}\right)^{j_1} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{x_3}{x_1} - \frac{c_3}{c_1}\right)^{j_3} \cdots \left(\frac{x_n}{x_1} - \frac{c_n}{c_1}\right)^{j_n}$$

por lo tanto $\bar{c} = \left(\frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1}, \ldots, \frac{c_n}{c_1}\right)$ es un cero de p de orden m .

$\square$

CAPITULO III

EXTREMALIDAD

Definiciones.

Definición 3.1. Denotemos por $\mathcal{C}$ uno de los conos $P_{n,m}$ ó $\Sigma_{n,m}$. Una forma $F \in \mathcal{C}$ se llama extremal en $\mathcal{C}$ sí y sólo si $F = F_1 + F_2$ con $F_i \in \mathcal{C}$ implica $F_i = \lambda_i F$ donde λ_i es un número real no negativo y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. El conjunto de formas extremales en $\mathcal{C}$ se denota por $E(\mathcal{C})$.

Es claro que si $F \in E(\Sigma_{n,m})$ entonces $F = G^2$ donde G es una forma de grado $\frac{m}{2}$.

Definamos los conjuntos $P = \bigcup\limits_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \text{ par}}} P_{n,m}$ y $\Sigma = \bigcup\limits_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \text{ par}}} \Sigma_{n,m}$, en forma similar $E(P)$ y $E(\Sigma)$ denotarán la unión sobre m de los conjuntos $E(P_{n,m})$ y $E(\Sigma_{n,m})$ respectivamente.

Usando estas notaciones podemos formular una definición equivalente de extremalidad.

Definición 3.2. Sean F y G formas en n variables, se dice que F es mayor o igual que G $(F \geq G)$ sí y sólo si $F - G \in P \cup \{0\}$; se dice que F es estrictamente mayor que G $(F \gg G)$ sí y sólo si $F - G \in \Sigma \cup \{0\}$.

En particular F y G deben tener el mismo grado.

Proposición 3.3.

a) $F \in E(P)$ sí y sólo si $F \geq G \geq 0 \rightarrow G = \lambda F$, $\lambda \in [0,1]$

b) $F \in E(\Sigma)$ sí y sólo si $F \gg G \gg 0 \rightarrow G = \lambda F$, $\lambda \in [0,1]$

Demostración: a) Sean $F,G \in P_{n,m}$ tales que $F \geq G \geq 0$, entonces $H = F - G \in P_{n,m} \cup \{0\}$, así $F = G + H$ con $G,H \in P_{n,m} \cup \{0\}$, como $F \in E(P_{n,m})$ se tiene que $G = \lambda F$ con $\lambda \in [0,1]$.

Supongamos ahora que $F = G + H$ con $G,H \in P_{n,m}$ entonces $F - G = H \in P_{n,m} \cup \{0\}$, por lo tanto $F \geq G \geq 0$, luego $G = \lambda F$ con $\lambda \in [0,1]$ y $H = F - G = (1 - \lambda)F$. De este modo $F \in E(P)$.

b) Análogo.

□

Existencia de formas extremales.

Sabemos que $P_{n,m}$ contiene propiamente a $\Sigma_{n,m}$ para $m \geq 4$ ó $n \geq 3$ y $(n,m) \neq (3,4)$. Si además consideramos que $P_{n,m}$ es un cono convexo cerrado, usando algunos resultados de análisis convexo (Rockafeller, pág. 167, [13]), tenemos que toda forma $F \in P_{n,m}$ es una suma finita de formas extremales, por lo tanto debe existir $F \in P_{n,m} - \Sigma_{n,m}$ extremal.

Probaremos que las formas

$$S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2$$

$$M(x,y,z) = z^6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2z^2$$

y
$$R(x,y,z) = x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 - (x^4y^2 + x^2y^4 + y^4z^2 + x^4z^2 + z^4x^2 + z^4y^2)$$

son extremales en $P_{3,6}$ y $Q(x,y,z,w) = w^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xyzw$ es extremal en $P_{4,4}$.

Por lo tanto $x_1^{2i}S \in E(P_{3,6+2i})$ y $x_1^{2i}Q \in E(P_{4,4+2i})$, además si se considera una forma en n variables como una forma en $n+j$ variables se obtiene $E(P_{n,m}) \subseteq E(P_{n+j,m})$.

Teorema 3.4. Sea $F \in P_{3,6}$ tal que no contiene términos en x^2y^4 , y^2z^4 , z^2x^4 , además $z(S) \subseteq z(F)$. Entonces $F = \alpha S$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración: Recordemos que

$$z(S) = \{(1,1,-1),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1)\}$$

$F \in P_{3,6}$ luego debe contener 28 monomios de los cuales se puede eliminar algunos de la siguiente manera: F no contiene términos en x^6 , y^6 , z^6 , puesto que se anula en los vectores unitarios.

F no contiene términos en x^5y , x^5z , y^5x , y^5z , z^5x , z^5y puesto que F es psd .

Por hipótesis no hay términos en x^2y^4 , y^2z^4 , z^2x^4 .

Si escribimos F como un polinomio en x se obtiene

$$F(x,y,z) = x^4(ay^2 + byz) + x^3(cy^3 + dy^2z + \ldots) + \ldots$$

Como el coeficiente de x^4 debe ser no negativo se concluye que $b = 0$, análogamente escribiendo F como polinomio en y o en z se eliminan los términos en x^4yz, y^4zx, z^4xy. De esta manera podemos expresar $F(x,y,z) = ax^4y^2 + cx^3y^3 + z(dy^2x^3 + \ldots)$, entonces $0 \leq F(x,y,0) =$ $= x^2y^2(ax^2 + cxy)$ de aquí $c = 0$; con lo cual eliminamos los términos x^3y^3, y^3z^3, z^3x^3.

Hemos eliminado 18 términos, por lo tanto F se expresa como sigue:

$$F = F' + x^2yz(\lambda y^2 + \lambda' z^2) + y^2zx(\mu z^2 + \mu' x^2) + z^2xy(\eta x^2 + \eta' y^2) ,$$

donde

$$F' = \alpha x^4y^2 + \beta y^4z^2 + \gamma z^4x^2 - 3\varepsilon x^2y^2z^2 .$$

Definamos en $P_{2,6}$ las formas

$$f_{\pm}(x,y) = F(x,y,\pm y)$$

por lo tanto

$$f_{\pm}(x,y) = y^2[\alpha x^4 + (\pm\mu' + \eta)x^3y + (\gamma - 3\varepsilon \pm (\lambda + \lambda'))x^2y^2 +$$
$$+ (\pm\mu + \eta')xy^3 + \beta y^4]$$

Por hipótesis $z(S) \subseteq z(F)$ lo que implica $f_+(1,0) = f_+(1,\pm 1) = 0$, entonces f_+ es divisible por $y(x^2 - y^2)$, como $f_+ \geq 0$,

$$f_+(x,y) = a_+y^2(x^2 - y^2)^2 \qquad \text{con} \quad a_+ \geq 0 \ ;$$

en forma similar

$$f_-(x,y) = a_-y^2(x^2 - y^2)^2 \qquad \text{con} \quad a_- \geq 0 \ .$$

Comparando estas expresiones con la ecuación obtenida para $f_\pm(x,y)$, se tiene:

$$\pm\mu' + \eta = 0 \quad \text{luego} \quad \eta = 0 = \mu'$$

$$\pm\mu + \eta' = 0 \quad \text{luego} \quad \eta' = 0 = \mu$$

$$\alpha = a_+ = a_- = \beta$$

$$\gamma - 3\varepsilon \pm (\lambda + \lambda') = -2\alpha \quad \text{luego} \quad \lambda + \lambda' = 0 \quad \text{y entonces} \quad -\lambda = \lambda'$$

Con estos resultados

$$F(x,y,z) = \alpha x^4y^2 + \alpha y^4z^2 + \gamma z^4x^2 - 3\varepsilon x^2y^2z^2 + \lambda x^2y^3z - \lambda x^2z^3y$$

entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4\alpha x^3y^2 + 2\gamma z^4x - 6\varepsilon xy^2z^2 + 2\lambda xy^3z - 2\lambda xz^3y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\alpha x^4y + 4\alpha y^3z^2 - 6\varepsilon x^2yz^2 + 3\lambda x^2y^2z - \lambda x^2z^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2\alpha y^4z + 4\gamma z^3x^2 - 6\varepsilon x^2y^2z + \lambda x^2y^3 - 3\lambda x^2z^2y$$

considerando el punto $a = (1,1,1) \in z(S) \subseteq z(F)$ según la nota 2.20 tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a) = \frac{\partial F}{\partial y}(a) = \frac{\partial F}{\partial z}(a) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = 4\alpha + 2\gamma - 6\varepsilon = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 6\alpha - 6\varepsilon + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 2\alpha + 4\gamma - 6\varepsilon - 2\lambda = 0$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $\lambda = 0$ y $\alpha = \varepsilon = \gamma$, así

$$F(x,y,z) = \alpha(x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2)$$

$$= \alpha S(x,y,z) .$$

$\square$

Corolario 3.5.

$$S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2 \in E(P_{3,6}) .$$

Demostración: Supongamos que $S = F_1 + F_2$ con $F_i \in P_{3,6}$, $i = 1,2$, entonces cada cero de S es un cero de F_i , por lo tanto F_i no contiene términos en x^6 , y^6 , z^6 , tampoco en x^5y , x^5z , y^5x , y^5z , z^5x , z^5y puesto que $F_i \geq 0$.

Supongamos que F_1 contiene términos en x^4z^2 , y^4x^2 , z^4y^2 con coeficientes a,b y c respectivamente. Escribiendo F_1 como polinomio en x , se tiene que

$$F_1(x,y,z) = x^4(az^2 + \alpha y^2 + \alpha' yz) + x^3(\ldots) + \ldots$$

como $F_1(x,0,1) \geq 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, obtenemos $a \geq 0$. Análogamente $b \geq 0$ y $c \geq 0$.

Si consideramos $F_2(x,y,z)$ de la misma manera, tenemos que $-a \geq 0$, $-b \geq 0$ y $-c \geq 0$, luego $a = b = c = 0$. Entonces F_i no contiene términos en x^4z^2 , x^2y^4 , y^2z^4 , de acuerdo con el teorema 3.4 $F_i = \alpha_i S$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

□

Teorema 3.6. Consideremos la forma de Motzkin

$$M(x,y,z) = z^6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2z^2 \in P_{3,6}$$

y supongamos que $F \in P_{3,6}$ no contiene términos en x^4z^2 , y^4z^2 , x^2z^4 , y^2z^4 , además F se anula sobre

$$z(M) = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$$

Entonces $F = \alpha M$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular $M \in E(P_{3,6})$.

Teorema 3.7. Consideremos la forma

$$Q(x,y,z,w) = w^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xyzw$$

y supongamos que $F \in P_{4,4}$ no contiene términos en x^2w^2 , y^2w^2 , z^2w^2 , además F se anula sobre

$$z(Q) = \{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (1,-1,-1,1),\ (-1,1,-1,1)\\ (-1,-1,1,1),\ (1,1,1,1)\} .$$

Entonces $F = \alpha Q$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular $Q \in E(P_{4,4})$.

Las demostraciones de estos dos últimos teoremas son análogas a la demostración del teorema 3.4.

Sin embargo es interesante observar que conociendo la extremalidad de S se puede concluir que M y Q son extremales. Este hecho quedará comprobado en los dos siguientes teoremas.

<u>Teorema 3.8</u>. Si $S \in E(P_{3,6})$ entonces $M \in E(P_{3,6})$.

<u>Demostración</u>: Es fácil verificar que

$$M(x^2,yz,xz) = x^4z^2S(x,y,z) .$$

Supongamos que $M = F + G$ con $F,G \in P_{3,6}$, entonces

$$x^4z^2S(x,y,z) = M(x^2,yz,xz) = F(x^2,yz,xz) + G(x^2,yz,xz)$$

$$S(x,y,z) \in E(P_{3,6})$$

luego $x^4z^2S(x,y,z) \in E(P_{3,12})$

por lo tanto

$$F(x^2,yz,xz) = \alpha M(x^2,yz,xz) \quad \text{para algún } \alpha \in \mathbb{R} .$$

Cambiando y por $xy\,/\,z$ la última ecuación se transforma en $x^6F(x,y,z) = \alpha x^6M(x,y,z)$, cancelando x^6 se tiene $F = \alpha M$.

□

<u>Teorema 3.9</u>. Si $M \in E(P_{3,6})$ entonces $Q \in E(P_{4,4})$.

Demostración: Es fácil verificar que

$$z^2 M(x,y,z) = Q(yz,xz,xy,z^2) \ .$$

Supongamos que

$$Q(x,y,z,w) = F(x,y,z,w) + G(x,y,z,w)$$

con $F,G \in P_{4,4}$, entonces

$$z^2 M(x,y,z) = Q(yz,xz,xy,z^2) = F(yz,xz,xy,z^2) + G(yz,xz,xy,z^2) \ .$$

Como $M(x,y,z) \in E(P_{3,6})$ se tiene que $z^2 M(x,y,z) \in E(P_{3,8})$, luego

$$F(yz,xz,xy,z^2) = \alpha Q(yz,xz,xy,z^2) \quad \text{para algún} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ó}$$

$$F(y,x,xy / z,z) = \alpha Q(y,x,xy / z,z) \ .$$

En la penúltima ecuación el miembro derecho contiene el término αz^8 , también se puede pensar que α es el coeficiente de w^4 en $F(x,y,z,w)$.

Consideremos la forma $H = F - \alpha Q$, entonces $H(y,x,xy / z,z) = 0$, es decir $H(y,x,w,z)$ es divisible por $wz - xy$ o bien $H(x,y,z,w)$ es divisible por $zw - xy$. Por simetría se tiene que $H(x,y,z,w)$ también es divisible por $xw - yz$ y por $yw - zx$, por lo tanto $\text{gr } H \geq 6$, como H debe tener grado 4 se concluye que H es idénticamente cero y luego $F = \alpha Q$.

$\square$

La siguiente tarea será mostrar que la forma de Robinson

$$R(x,y,z) = x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 - (x^4y^2 + x^2y^4 + y^4z^2 + x^4z^2 + z^4x^2 + z^4y^2)$$

es extremal. Para esto será necesario conocer su conjunto de ceros

$$z(R) = \{(0,\pm 1,1),\ (1,0,\pm 1),\ (\pm 1,1,0),\ (1,1,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$$

el que ha sido determinado por Robinson 1973, pág. 273, [12].

<u>Definición 3.10</u>. Una forma $F \in P_{n,m}$ se llama <u>par</u> sí y sólo si todos los exponentes que aparecen en sus términos con coeficientes no nulos son pares.

<u>Lema 3.11</u>. Sea $F \in P_{3,6}$ una forma par, que se anula sobre $z(R)$. Entonces $F = \alpha R$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Demostración</u>: $F \in P_{3,6}$ es una forma par, luego se expresa de la siguiente manera:

$$F(x,y,z) = \alpha x^6 + \beta y^6 + \gamma z^6 + 3\varepsilon x^2y^2z^2 + \lambda x^4y^2 + \lambda' x^2y^4 + \mu y^4z^2 + \mu' y^2z^4 + \eta x^2z^4 + \eta' z^2x^4 .$$

Como F es psd las derivadas parciales se anulan sobre $z(R)$, en particular

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,1,0) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(0,1,1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1) = 0$$

Estas ecuaciones son linealmente independientes y la solución nos muestra que $F = \alpha R$.

$\square$

<u>Lema 3.12</u>. Si $F \in P_{3,6}$ se anula sobre $z(R)$. Entonces

$$F(x,x,z) = az^2(x^2 - z^2)^2 ,$$

en forma análoga $F(x,y,x) = by^2(x^2 - y^2)^2$, etc.

<u>Demostración</u>: Sea $f(x,z) = F(x,x,z)$, entonces

$$f(1,0) = F(1,1,0) = 0$$

$$f(1,\pm 1) = F(1,1,\pm 1) = 0$$

luego $f(x,z)$ es divisible por $z(x^2 - y^2)$ y como $f \geq 0$ se tiene que

$$F(x,x,z) = f(x,z) = az^2(x^2 - y^2)^2 .$$

$\square$

<u>Lema 3.13</u>. Si $F \in P_{3,6}$ se anula sobre $z(R)$ y $F = F_o + yzF_1$ donde F_o, F_1 son formas pares. Entonces $F_1 = 0$

Demostración: $F(x,y,z) = F_o(x,y,z) + yzF_1(x,y,z)$

luego $F(x,y,-z) = F_o(x,y,z) - yzF_1(x,y,z)$

entonces $F(x,y,z) - F(x,y,-z) = 2yzF_1(x,y,z)$ (*)

según el lema 3.12

$$F(x,x,z) = F(x,x,-z)$$

luego $2xzF_1(x,x,z) = 0$,

entonces F_1 es divisible por $x - y$ y por $x + y$ (F_1 es par). Análogamente F_1 es divisible por $x \pm z$ y por lo tanto podemos escribir

$$F_1(x,y,z) = \delta(x^2 - y^2)(x^2 - z^2) ,$$

usando la ecuación (*) y dado que $(0,1,1)$, $(0,1,-1) \in z(R) \subseteq z(F)$ se tiene que

$$2F_1(0,1,1) = F(0,1,1) - F(0,1,-1) = 0 ,$$

esto implica $\delta = 0$ es decir $F_1 = 0$.

□

Teorema 3.14. Si $F \in P_{3,6}$ se anula sobre $z(R)$. Entonces $F = \alpha R$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular $R \in E(P_{3,6})$.

Demostración: F se puede expresar de la siguiente manera:

$$F = F_o + yzF_1 + zxF_2 + xyF_3 \quad \text{con } F_i \text{ forma par, } i = 0,1,2,3 .$$

Sea $G(x,y,z) = F(x,y,z) + F(-x,y,z)$, entonces $G = 2F_o + yzF_1 \in P_{3,6}$ y se anula sobre $Z(R)$:

$$G(0,\pm1,1) = F(0,\pm1,1) + F(0,\pm1,1) = 0$$

$$G(1,0,\pm1) = F(1,0,\pm1) + F(-1,0,\pm1) = 0$$

$$G(\pm1,1,0) = F(\pm1,1,0) + F(\mp1,1,0) = 0$$

$$G(1,1,1) = F(1,1,1) + F(-1,1,1) = 0$$

$$G(-1,1,1) = F(-1,1,1) + F(1,1,1) = 0$$

$$G(1,-1,1) = F(1,-1,1) + F(-1,-1,1) = 0$$

$$G(1,1,-1) = F(1,1,-1) + F(-1,1,-1) = 0$$

Luego por el lema 3.13, $F_1 = 0$.

En forma similar tenemos que $F_2 = F_3 = 0$, así $F = F_o$ es decir es una forma par que se anula sobre $Z(R)$ luego según el lema 3.11, $F = \alpha R$.

La extremalidad de R es trivial, dado que si $R = F_1 + F_2$ con $F_i \in P_{3,6}$ entonces $Z(R) \subseteq Z(F_i)$, luego $F_i = \alpha_i R$.

□

Envolvente de una forma.

Definición 3.15. Sea $p(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma a_i x^{r_i}$ una forma de grado m , con $a_i \neq 0$ y los r_i son n-tuplas distintas.

Llamaremos: Envolvente de p a la envolvente convexa de los r_i , considerados como vectores en $\mathbb{R}^n$ pertenecientes al hiperplano

$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = m$. Se denota por $c(p)$

Referencia de p al conjunto de puntos pertenecientes a $c(p)$ cuyas coordenadas son enteros (puntos del reticulado $\mathbb{Z}^n$) . Se denota por $F_r(p)$. Luego $F_r(p) = c(p) \cap \mathbb{Z}^n$.

Referencia reducida de p al conjunto de puntos pertenecientes a $c(p)$ cuyas coordenadas son enteros pares. Se denota por $2R(p)$, $R(p)$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{Z}^n$ en $\frac{1}{2}c(p)$.

Punto extremo de $c(p)$ al punto $e \in c(p)$ que satisface la siguiente propiedad: si $u,v \in c(p)$ y $\lambda u + (1-\lambda)v = e$ para algún λ , $0 < \lambda < 1$ entonces $u = v = e$. El conjunto de puntos extremos de $c(p)$ se denota por $E(p)$.

Es claro que $E(p) \subseteq \{r_i\}_i$ y $E(p) \subseteq F_r(p)$.

Lema 3.16. Sea $p = \Sigma\, a_i x^{r_i}$ una forma, entonces:

a) $c(p)$ esta contenida en el semiespacio $b \cdot u = b_1u_1 + \ldots + b_nu_n \leq d$ sí y sólo si $\lim\limits_{t\to\infty} |t^{-d}p(t)| < \infty$ para cualquier sustitución $x_j = c_j t^{b_j}$.

b) $c(p^2) = 2c(p)$ para cualquier forma p .

c) Si p es psd y $r_i \in E(p)$ entonces $a_i > 0$ y r_i es un vector par.

Demostración: a) Sean $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ y la sustitución $x_j = c_j t^{b_j}$ entonces

$$p(t) = \Sigma\, a_i c^{r_i} t^{b\cdot r_i}$$

como $r_i \in c(p)$ se tiene que $b\cdot r_i \leq d$ es decir $b\cdot r_i - d \leq 0$ luego

$$t^{-d}p(t) = \Sigma\, a_i c^{r_i} k^{b\cdot r_i - d}$$

es acotado si $t \to \infty$.

Recíprocamente, supongamos que $t^{-d}p(t)$ es acotado y $c(p)$ no está contenido en el semiespacio $b\cdot u \leq d$, entonces deben existir puntos $r_1, \ldots, r_s$ tales que $b\cdot r_j > d$ para $j = 1, \ldots, s$. (Si suponemos que $b\cdot r_i \leq d \quad \forall\, r_i$, entonces como cada $x \in c(p)$ se expresa $x = \Sigma\, \lambda_i r_i$ con $\lambda_i \geq 0$ y $\Sigma\, \lambda_i = 1$, tenemos que $b\cdot x = \Sigma\, \lambda_i b_i \cdot r_i \leq \Sigma\, \lambda_i d = d$ lo cual es una contradicción).

Así $b\cdot r_j = d_j > d \geq b\cdot r_i$ con $1 \leq j \leq s$, $i > s$. Sea $d_k = \max\limits_{1\leq j\leq s} \{d_j\}$ entonces

$$t^{-d_k}p(t) = \Sigma\, a_i c^{r_i} t^{b\cdot r_i - d_k}$$

luego

$$\lim_{t\to\infty} t^{-d_k}p(t) = a_k c^{r_k} ,$$

como

$$|t^{-d}p(t)| > |t^{-d_k} p(t)| \qquad \text{si} \quad t > 1$$

$$|\lim_{t\to\infty} t^{-d}p(t)| > \lim_{t\to\infty} |t^{-d_k}p(t)| = |a_k c^{r_k}|$$

dado que $a_k \neq 0$ y c es cualquiera tenemos una contradicción.

b) Un conjunto convexo cerrado en $\mathbb{R}^n$ es la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen.

Denotemos por $S_{b,d} = \{u \,/\, b\cdot u \leq d\}$, entonces

$$c(p^2) = \bigcap_{\substack{b,d \\ c(p^2)\subseteq S_{b,2d}}} S_{b,2d} = \bigcap_{\substack{b,d \\ \lim\limits_{t\to\infty} |t^{-2d}p^2(t)|<\infty}} S_{b,2d} =$$

$$= \bigcap_{\substack{b,d \\ \lim\limits_{t\to\infty} |t^{-d}p(t)|^2<\infty}} S_{b,2d} = \bigcap_{\substack{b,d \\ \lim\limits_{t\to\infty} |t^{-d}p(t)|<\infty}} S_{b,2d} =$$

$$= \bigcap_{\substack{b,d \\ c(p)\subseteq S_{b,d}}} S_{b,2d} = \bigcap_{\substack{b,d \\ 2c(p)\subseteq S_{b,2d}}} S_{b,2d} = 2c(p)$$

c) Supongamos que p es psd y r_i es extremal, elijamos $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $b\cdot r_i = d > b\cdot r_j$ para $j \neq i$ (teorema de separación de convexos).

Sea $x_j = \varepsilon_j t^{b_j}$, con $\varepsilon_j = \pm 1$; entonces $\underset{t\to\infty}{} t^{-d}p(t) \geq 0$ pues $p(t) \geq 0$, luego $0 \leq \lim\limits_{t\to\infty} t^{-d}p(t) = a_i\varepsilon^{r_i}$, por lo tanto $a_i > 0$ y toda coordenada de r_i es par.

$\square$

Teorema 3.17. Sean F y G formas psd , entonces:

$$c(F) \subseteq c(F+G) ,$$

$$c(h_j) \subseteq \frac{1}{2} c(F) \qquad \text{si} \qquad F = \Sigma h_j^2 .$$

Demostración: Si $H = F + G$ entonces $0 \leq F(x) \leq H(x)$. Por lo tanto $\lim_{t\to\infty} t^{-d} H(t) < \infty$ implica $\lim_{t\to\infty} t^{-d} F(t) < \infty$, de acuerdo con el lema 3.16, tenemos que cualquier semiespacio que contenga a $c(F + G)$ contiene a $c(F)$, tomando la intersección de tales semiespacios se obtiene $c(F) \subseteq c(F + G)$.

Si $F = \Sigma h_j^2$ entonces $2c(h_j) = c(h_j^2) \subseteq c(F)$.

□

Corolario 3.18. Sean F y G formas psd , entonces

$$F_r(F) \subseteq F_r(F+G)$$

$$F_r(h_j) \subseteq \frac{1}{2} F_r(F) \qquad \text{si} \qquad F = \Sigma h_j^2 .$$

Aplicaciones.

Consideremos la forma

$$S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2$$

según las notaciones anteriores $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = -3$,

$r_1 = (4,2,0)$, $r_2 = (0,4,2)$, $r_3 = (2,0,4)$ y $r_4 = (2,2,2)$.

Para la construcción de $F_r(S)$ podemos pensar en los r_i proyectados en el plano XY , ya que la tercera coordenada queda determinada porque S es homogénea de grado 6. La Fig. 1 representa una "proyección" de $F_r(S)$ y de $\frac{1}{2}$ $F_r(S)$.

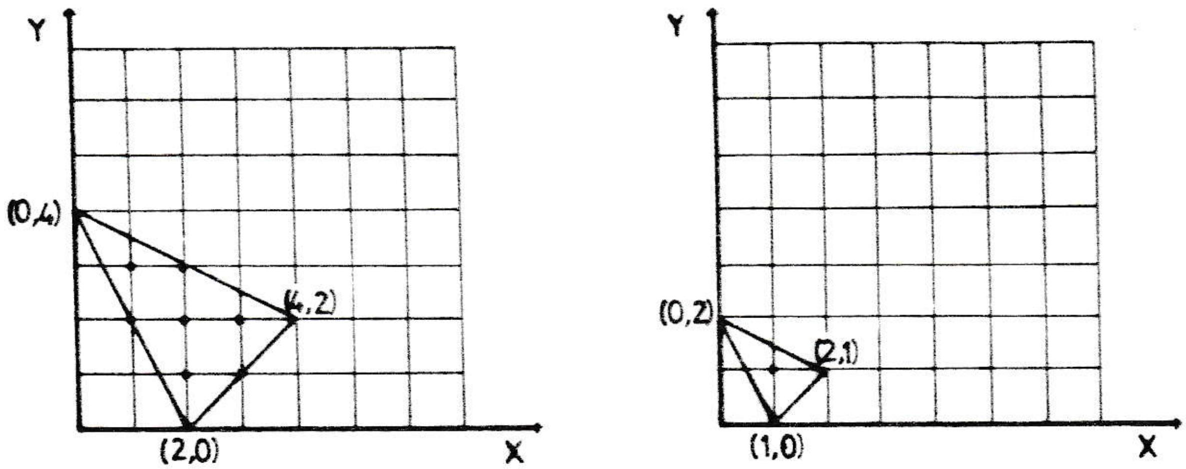

Fig. 1

Luego $F_r(S) = \{(0,4,2), (1,2,3), (1,3,2), (2,0,4), (2,1,3), (2,2,2), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (4,2,0)\}$ y $\frac{1}{2} F_r(S) = \{(0,2,1), (1,0,2), (1,1,1), (2,1,0)\}$.

Veamos algunas aplicaciones del teorema 3.17

a) $S \notin \Sigma_{3,6}$

Supongamos que $S = \Sigma h_i^2$ entonces $F_r(h_i) \subseteq \frac{1}{2} F_r(S)$, luego h_i se expresa de la siguiente manera:

$$h_i(x,y,z) = a_i x^2 y + b_i y^2 z + c_i z^2 x + d_i xyz$$

por lo tanto el término $x^2y^2z^2$ que aparece en Σh_i^2 debe tener coeficiente $\Sigma d_i^2 \geq 0$, lo cual es una contradicción. (Ver proposición 1.4).

b) $S \in E(P_{3,6})$

Supongamos que $S = F + G$ con F y G en $P_{3,6}$, entonces $F_r(F) \subseteq F_r(S)$, luego F se expresa de la siguiente manera:

$$F(x,y,z) = b_1y^4z^2 + b_2xy^2z^3 + b_3xy^3z^2 + b_4x^2z^4 + b_5x^2yz^3 + b_6x^2y^2z^2 + b_7x^2y^3z + b_8x^3yz^2 + b_9x^3y^2z + b_{10}x^4y^2 .$$

Dado que F no contiene términos en x^2y^4 , y^2z^4 , z^2x^4 y además cada cero de S es un cero de F , podemos aplicar el teorema 3.4 y concluir que $F = \alpha S$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nota 3.19. El mismo resultado se puede obtener usando la nota 2.20; resolviendo el sistema de 9 ecuaciones y 10 incógnitas $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0$, para cada $a \in z(S)$. La solución es $b_1 = b_4 = b_{10}$, $b_2 = b_3 = b_5 = b_7 = b_8 = b_9 = 0$, $b_6 = -3b_{10}$, por lo tanto

$$F(x,y,z) = b_{10}(x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2) = b_{10}S .$$

Nota 3.20. Consideremos la forma de Robinson

$$R(x,y,z) = x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 - (x^4y^2 + x^2y^4 + y^4z^2 + x^4z^2 + z^4x^2 + z^4y^2) .$$

El conjunto $F_r(R)$ contiene exactamente 28 puntos, de modo que si $R = F + G$ con F,G en $P_{3,6}$, los términos posibles para una tal

F son 28. Vemos entonces que en este caso el teorema 3.17 no ayuda a eliminar términos.

Sin embargo la extremalidad de R se puede establecer resolviendo el sistema $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0$, $\forall\ a \in z(R)$ que consta de 30 ecuaciones y 28 incógnitas.

C A P I T U L O IV

EXTREMALIDAD DEL CUADRADO DE FORMAS

Comparación de los conjuntos $E(P)$ y $E(\Sigma)$.

Teorema 4.1. Sean F y G formas psd tales que $FG \in E(P)$ entonces $G \in E(P)$.

Demostración: Supongamos que $G \geq G' \geq 0$, como $F \geq 0$ tenemos que $FG \geq FG' \geq 0$.

$FG \in E(P)$ luego $FG' = \lambda FG$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo tanto $G' = \lambda G$ lo que implica $G \in E(P)$.

□

Nota 4.2. El recíproco del teorema no es válido. Por ejemplo si consideramos las formas

$$F = S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2 \in E(P_{3,6})$$

$$G = S(z,y,x) = z^4y^2 + y^4x^2 + x^4z^2 - 3x^2y^2z^2 \in E(P_{3,6})$$

entonces

$$FG = [yz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)]^2 + [zx(y^2 - z^2)(y^2 - x^2)]^2 +$$

$$+ [xy(z^2 - x^2)(z^2 - y^2)]^2 \notin E(P_{3,12}) .$$

Corolario 4.3. Si $(FG)^2 \in E(P)$ entonces $F^2 \in E(P)$.

Teorema 4.4. Sean G y H formas tales que $GH^2 \in E(\Sigma)$ entonces $G \in E(\Sigma)$.

Demostración: Bastará probar el teorema para H irreducible, puesto que si $H = H_1 \ldots H_n$ con H_i irreducible, entonces

$$GH^2 = GH_1^2 \ldots H_{n-1}^2 H_n^2 \in E(\Sigma)$$

implica que

$$GH_1^2 \ldots H_{n-1}^2 \in E(\Sigma)$$

luego haciendo inducción sobre n se prueba el teorema.

Si $GH^2 \in E(\Sigma)$ entonces $GH^2 = L^2$, para alguna forma L , como H es irreducible debe ser factor de L es decir $L = HS$ para alguna forma S , por lo tanto $L^2 = H^2S^2$, luego $G = S^2 \in \Sigma$.

Usando el mismo argumento del teorema 4.1 se obtiene que $G \in E(\Sigma)$.

□

Corolario 4.5. Si $(FG)^2 \in E(\Sigma)$ entonces $F^2 \in E(\Sigma)$.

Teorema 4.6. Si G es una forma psd y H una forma puramente indefinida, entonces $G \in E(P)$ sí y sólo si $GH^2 \in E(P)$.

Demostración: Si $GH^2 \in E(P)$ por el teorema 4.1, $G \in E(P)$.

Supongamos ahora que $G \in E(P)$, basta demostrar el teorema para H irreducible e indefinida, en otro caso se obtiene el resultado inductivamente.

Sea L una forma no cero tal que $GH^2 \geq L \geq 0$, entonces $z(H) \subseteq z(L)$. Aplicando la nota 2.4 se tiene que H^2 divide a L , luego existe una forma T psd tal que $L = H^2T$ por lo tanto $GH^2 \geq TH^2 \geq 0$ y así $G \geq T \geq 0$. Como $G \in E(P)$ se tiene que $T = \lambda G$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. De este modo $L = H^2T = \lambda H^2 G$ lo cual prueba el teorema.

$\square$

Teorema 4.7. Si G es una forma psd y H una forma puramente indefinida, entonces $G \in E(\Sigma)$ sí y sólo si $GH^2 \in E(\Sigma)$.

Demostración: Si $GH^2 \in E(\Sigma)$ por el teorema 4.4, $G \in E(\Sigma)$.

Supongamos ahora que $G \in E(\Sigma)$, al igual que el teorema anterior bastará demostrar para H irreducible e indefinida.

Sea L una forma no cero tal que $GH^2 \gg L \gg 0$, entonces $L = M_1^2 + \ldots + M_r^2$ con $M_1, \ldots, M_r$ formas del mismo grado. Además $z(H) \subseteq z(L) \subseteq z(M_i)$ para todo $1 \leq i \leq r$, por la nota 2.4 se tiene que

$M_i = HN_i$ para algunas formas N_i , luego $L = H^2T$, donde

$$T = N_1^2 + \ldots + N_r^2 \in \Sigma \, .$$

$GH^2 - L \in \Sigma$ entonces $GH^2 - L = S_1^2 + \ldots + S_k^2$, con S_i formas del mismo grado, además $z(H) \subseteq z(S_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$, luego $S_i = HR_i$ para algunas formas R_i , y por lo tanto $GH^2 - L = H^2R$ con $R \in \Sigma$, entonces

$$RH^2 = GH^2 - L = GH^2 - TH^2 = (G - T)H^2 \, ,$$

así $G = T + R$ con $T, R \in \Sigma$.

Como $G \in E(\Sigma)$ se tiene que $T = \lambda G$ para algún $\lambda \in [0,1]$, por lo tanto $L = \lambda H^2 G$ esto implica que $H^2 G \in E(\Sigma)$.

$\square$

Teorema 4.8. Sea $F \in E(P)$ tal que $F^2 = G^2 + H$ donde G es una forma y H es una forma psd entonces $G^2 = \lambda F^2$ con $\lambda \in [0,1]$.

Demostración: Supongamos que $F \neq \pm G$. Distingamos tres casos:

Caso 1: $F - G$ es semidefinida.

Por hipótesis $0 \leq H = F^2 - G^2 = (F - G)(F + G)$, si $F - G \leq 0$ entonces $F + G \leq 0$ luego $(F - G) + (F + G) = 2F \leq 0$ lo cual es una contradicción, puesto que $F \in P$. Por lo tanto $F - G \geq 0$ y $F + G \geq 0$, como

$$F = \frac{F + G}{2} + \frac{F - G}{2} \in E(P)$$

entonces se tiene que $\frac{F + G}{2} = \lambda_1 F$ y $\frac{F - G}{2} = \lambda_2 F$ con

con $\lambda_i \in [0,1]$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, luego $G = (\lambda_1 - \lambda_2)F$ y

$G^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 F^2$ con $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\lambda_1 - 1 \in [-1,1]$, así

$\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \in [0,1]$.

Caso 2: $F - G$ es indefinida irreducible.

Por hipótesis $H = F^2 - G^2 \geq 0$ además $z(F - G) \subseteq z(F^2 - G^2)$

luego por la nota 2.4 se tiene que $(F - G)^2 / F^2 - G^2$, entonces

$F - G / F + G$, es decir $F - G = \alpha(F + G)$ con $\alpha \neq -1$ por lo

tanto $G = \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)} F$ y $G^2 = \lambda F^2$ con $\lambda = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right)^2 \in [0,1]$.

Caso 3: $F - G$ es indefinida reducible.

Supongamos que $F - G = P_1^{\alpha_1} \ldots P_r^{\alpha_r}$, con P_i irreducible para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces existen $P_{i_1}, \ldots, P_{i_j}$ indefinidos con $i_k \in \{1, \ldots, r\}$, tales que $F - G = P_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots P_{i_j}^{\alpha_{i_j}} T$ donde T es una forma definida.

Si todo α_{i_k} es par entonces $F - G$ es definida, luego debe existir una forma P irreducible indefinida y α impar, tal que $F - G = P^\alpha Q$ y $P \nmid Q$.

Entonces $z(P^\alpha) \subseteq z(F - G) \subseteq z(F^2 - G^2)$.

$H = F^2 - G^2 \geq 0$ luego podemos aplicar la nota 2.4, así $P^{2\alpha} / F^2 - G^2$.

Como $P^\alpha Q = F - G$ y $P \nmid Q$ tenemos que $P / F + G$.

Luego $F + G = PR$ y $F - G = PS$ donde R y S son formas.

Sumando y restando ambas expresiones se tiene que $2F = P(R + S)$ y $2G = P(R - S)$.

Entonces P^2 divide a F puesto que F es psd , de este modo $F = P^2F_1$ con $F_1 \in E(P)$ (teorema 4.1), también $G = PG_1$ para alguna forma G_1 .

La demostración se completa usando inducción sobre el grado de F , de la siguiente manera: Supongamos que $gr\ F = 2$, entonces $gr\ P = 1$ y $F_1 = \alpha \in \mathbb{R}^+$, es decir $F = \alpha P^2$, además $gr\ G_1 = 1$, luego la ecuación $F^2 = G^2 + H$ se transforma en $\alpha^2P^4 = P^2G_1^2 + H$. Entonces $H = P^2(\alpha^2P^2 - G_1^2) \geq 0$, siendo $H_1 = \alpha^2P^2 - G_1^2$ se tiene que $H_1 \geq 0$ y $H_1 \neq 0$.

De la ecuación $\alpha^2P^2 = G_1^2 + H_1$ se concluye que $z(P) \subseteq z(G_1)$ de acuerdo con la nota 2.4, P divide a G_1 .

Entonces $G_1 = \beta P$ con $\beta \in \mathbb{R}$ puesto que $gr\ G_1 = gr\ P = 1$. Así $G^2 = P^2G_1^2 = \beta^2P^4 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 F^2$.

Ahora veamos que $\lambda = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \in [0,1]$, tenemos que $F^2 = G^2 + H$ luego $H = (1 - \lambda)F^2 \geq 0$ así $\lambda \in [0,1]$.

Supongamos válida la propiedad para F_1 tal que $gr\ F_1 < gr\ F$. La ecuación $F^2 = G^2 + H$ se transforma en $P^4F_1^2 = P^2G_1^2 + H$, como $H \geq 0$ se tiene que $H = P^2H_1$ con $H_1 \geq 0$. Luego de la ecuación $P^2F_1^2 = G_1^2 + H_1$ se concluye que $z(P) \subseteq z(G_1)$ y $z(P) \subseteq z(H_1)$, por lo tanto P divide a G_1 y P^2 divide a

H_1 (nota 2.4).

Entonces $G_1 = PG_2$ y $H_1 = P^2H_2$ con $H_2 \geq 0$.

Así $F_1^2 = G_2^2 + H_2$ con $F_1 \in E(P)$, $H_2 \geq 0$ y gr F_1 < gr F .

Usando la hipótesis de inducción se tiene que $G_2^2 = \lambda F_1^2$ con $\lambda \in [0,1]$.

Entonces $G^2 = G_1^2P^2 = P^4G_2^2 = \lambda P^4F_1^2 = \lambda F^2$.

□

Corolario 4.9. Si $F \in E(P)$ entonces $F^2 \in E(\Sigma)$.

Demostración: Supongamos que $F^2 = G^2 + H^2$ con G y H formas, entonces por el teorema 4.8, $G^2 = \lambda F^2$ con $\lambda \in [0,1]$, luego $H^2 = \varepsilon F^2$ con $\varepsilon \in [0,1]$ y $\lambda + \varepsilon = 1$, así $F^2 \in E(\Sigma)$.

□

Es claro que dada una forma F , tal que $F^2 \in E(P)$ entonces $F^2 \in E(\Sigma)$, es decir $E(P) \cap \Sigma \subseteq E(\Sigma)$, por lo tanto resulta natural preguntar para qué valores de n y m se obtiene la igualdad

$$E\left(P_{n,m}\right) \cap \Sigma_{n,m} = E\left(\Sigma_{n,m}\right) .$$

La respuesta a este problema está en el siguiente teorema:

Teorema 4.10. Si $n \geq 2$ es un número natural y m es un número natural par, entonces:

$$E(\Sigma_{n,m}) \subseteq E(P_{n,m}) \text{ sí y sólo si } n = 2 \text{ ó } m \leq 6 \text{ ó}$$

$$(n,m) = (3,8) \text{ ó } (n,m) = (3,10) .$$

Demostración: Si $n = 2$ ó $m = 2$ entonces $\Sigma_{n,m} = P_{n,m}$ luego tenemos lo pedido.

Supongamos entonces que $n \geq 3$ y $m \geq 4$.

Distingamos tres casos:

1. $m = 4$ ó $m = 6$.

Si F es una forma tal que $F^2 \in E(\Sigma_{n,m})$ y $F^2 \notin E(P_{n,m})$, de acuerdo con los teoremas 4.4 y 4.6 es posible cancelar todos los factores irreducibles indefinidos de F y obtener una forma con las mismas propiedades.

Luego podemos suponer que F sólo tiene factores psd , entonces F no puede ser de grado 3, debe ser una forma cuadrática psd .

Después de un cambio de coordenadas tenemos $F = x_1^2 + \ldots + x_r^2$ con $1 \leq r \leq n$.

Si $r > 1$ entonces

$$F^2 = x_1^4 + 2x_1^2(x_2^2 + \ldots + x_r^2) + (x_2^2 + \ldots + x_r^2)^2 \notin E(\Sigma_{n,4}) ,$$

lo que contradice la hipótesis.

Luego $F = x_i^2$ con $1 \leq i \leq n$ por lo tanto $F^2 = x_i^4 \in E(P_{n,4})$ nuevamente se contradice la hipótesis.

Entonces se concluye que $E(\Sigma_{n,m}) \subseteq E(P_{n,m})$, $\forall\, m \leq 6$.

2. $n = 3$ y $m = 8$.

Supongamos que F es una forma de grado 4 en n variables tal que $F^2 \in E(\Sigma_{n,8})$ y $F^2 \notin E(P_{n,8})$.

Si F contiene un factor irreducible indefinido entonces usando los teoremas 4.4 y 4.6 obtenemos una forma G tal que $G^2 \in E(\Sigma_{n,m})$ y $G^2 \notin E(P_{n,m})$ para algún $m \leq 6$. Hemos probado que esto es imposible, luego F no puede contener un factor indefinido.

En particular podemos suponer que F es psd .

Si F es reducible entonces $F = Q_1Q_2$ con Q_1 y Q_2 formas cuadráticas psd , como $F^2 = Q_1^2Q_2^2 \in E(\Sigma)$ según el teorema 4.4, Q_1^2 y $Q_2^2 \in E(\Sigma)$, lo que significa que Q_1 y Q_2 son cuadrados de formas lineales, esto contradice el hecho de que F no tiene factores indefinidos.

Por lo tanto F es una forma psd irreducible de grado 4.

Sabemos que $P_{3,4} = \Sigma_{3,4}$, luego en el caso $n = 3$, F es suma de cuadrados, y como es irreducible no puede ser un cuadrado. Así $F^2 \notin E(\Sigma_{3,8})$, lo cual es una contradicción y por lo tanto

$$E(\Sigma_{3,8}) \subseteq E(P_{3,8}).$$

3. $n = 3$ y $m = 10$.

Si F es una forma en 3 variables y de grado 5 tal que $F^2 \in E(\Sigma_{3,10})$ entonces F contiene un factor irreducible H de grado impar, es decir $F = HG$ para alguna forma G .

Luego $F^2 = H^2G^2 \in E(\Sigma_{3,10})$. Según el teorema 4.4 $G^2 \in E(\Sigma_{3,m})$ con $m \leq 8$, luego $G^2 \in E(P_{3,m})$ y por el teorema 4.6, $G^2H^2 \in E(P_{3,10})$ es decir $F^2 \in E(P_{3,10})$.

Así hemos probado que $E(\Sigma_{3,10}) \subseteq E(P_{3,10})$.

Ahora nos queda probar el recíproco del teorema.

Será suficiente verificar que:

$$E(\Sigma_{3,12}) - E(P_{3,12}) \neq \phi$$

y $$E(\Sigma_{4,8}) - E(P_{4,8}) \neq \phi$$

Puesto que si F es una forma en las variables $x_1, \ldots, x_n$ también puede ser considerada como una forma en las variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Luego si $F^2 \in E(\Sigma_{n,m})$ entonces $F^2 \in E(\Sigma_{n+1,m})$.

En forma análoga, si $F^2 \notin E(P_{n,m})$ entonces $F^2 \notin E(P_{n+1,m})$.

Ahora si L es una forma lineal en las variables $x_1, \ldots, x_n$, de acuerdo con los teoremas 4.4 y 4.6 se tiene que si $F^2 \in E(\Sigma_{n,m})$ entonces $F^2L^2 \in E(\Sigma_{n,m+2})$ y si $F^2 \notin E(P_{n,m})$ entonces $F^2L^2 \notin E(P_{n,m+2})$.

La construcción de una forma en $E(\Sigma_{3,12}) - E(P_{3,12})$ se basará en tres lemas previos. Para el caso $(n,m) = (4,8)$ el método es similar.

<u>Lema 4.11</u>. Sea $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ psd tal que $f^2 = h_1^2 + \ldots + h_r^2$ con $h_i \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Si $a \in \mathbb{R}^n$ es un cero de f , entonces a

es un cero de h_i y de toda derivada parcial $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}$ $(1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n)$.

Demostración: f es psd , luego a es un cero de cada $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$. Calculando las derivadas parciales de f^2 se tiene

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_j} = 2f \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_j \partial x_k} = 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + 2 \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

luego $\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_j^2}(a) = 0$.

Además $h_1(a) = \ldots = h_r(a) = 0$ puesto que $0 = h_1^2(a) + \ldots + h_r^2(a)$.

Calculando $\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_j^2}$ de la expresión $f^2 = h_1^2 + \ldots + h_r^2$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_j^2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 h_i^2}{\partial x_j^2} = \sum_{i=1}^{r} 2h_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_j^2} + 2\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)^2$$

evaluando en a tenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^{r} 2h_i(a) \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_j^2}(a) + 2\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)^2$$

luego $0 = 2 \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)^2$ por lo tanto $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = 0 \quad \forall j$.

□

<u>Lema 4.12</u>. Consideremos en $P_{3,6}$ los elementos $S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2$ y $T(x,y,z) = (x^2y + y^2z - z^2x - xyz)^2$. Entonces las formas S^2, ST, T^2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $\alpha S^2 + \beta ST + \gamma T^2 = 0$ con $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. Evaluando en $(-1,1,1) \in z(S) - z(T)$ se obtiene $\gamma = 0$, dividiendo por S se obtiene $\alpha S + \alpha T = 0$ y claramente $\alpha = \beta = 0$.

□

<u>Lema 4.13</u>. Sea $f(x,y,z) = S(x,y,z) + T(x,y,z)$, S y T como en el lema anterior.

Si $f^2 = h_1^2 + \ldots + h_r^2$ con $h_i \in \mathbb{R}[x,y,z]$, entonces cada h_i es una $\mathbb{R}$-combinación lineal de S y T.

<u>Demostración</u>: Si $f^2 = h_1^2 + \ldots + h_r^2$ entonces para cada i, h_i será una forma en $\mathbb{R}[x,y,z]$ de grado 6.

El primer paso será determinar los monomios que aparecen en la forma h_i.

Usando el método de envolventes (teorema 3.17) se tiene que: si $f^2 = h_1^2 + \ldots + h_r^2$ entonces $F_r(h_i) \subseteq \frac{1}{2} F_r(f^2) = F_r(f)$.

Considerando que $f = S + T$, obtenemos $F_r(f) = \{(4,2,0), (3,2,1), (0,4,2), (2,0,4), (2,2,2), (3,1,2), (2,3,1), (2,1,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$.

Representando gráficamente los puntos de $F_r(f)$ por las primeras dos coordenadas, tenemos

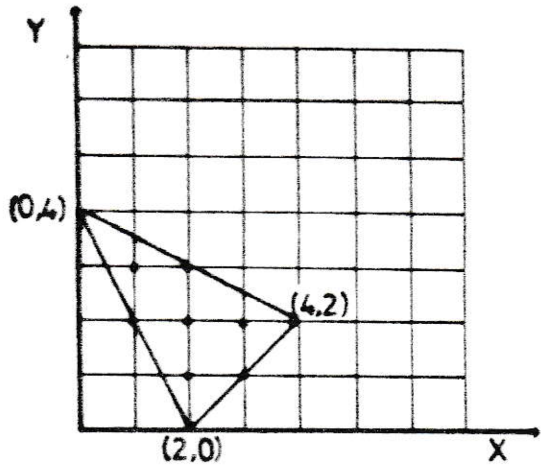

Fig. 2

Luego la forma h_i se expresa de la siguiente manera:

$$h_i(x,y,z) = ax^4y^2 + by^4z^2 + cx^2z^4 + dx^2y^2z^2 + ex^3y^2z + gx^3yz^2 + $$
$$+ ix^2y^3z + jx^2yz^3 + kxy^3z^2 + \ell xy^2z^3 \ .$$

Los puntos $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$ anulan a S y T por lo tanto pertenecen a $z(f)$, luego por el lema 4.11, $\frac{\partial h_i}{\partial x}$, $\frac{\partial h_i}{\partial y}$, $\frac{\partial h_i}{\partial z}$ se anulan en estos puntos.

Así es posible obtener un sistema de nueve ecuaciones lineales:

(1) $4a + 2c + 2d + 3e + 3g + 2i + 2j + k + \ell = 0$

(2) $4a + 2c + 2d - 3e + 3g - 2i - 2j + k - \ell = 0$

(3) $4a + 2c + 2d + 3e - 3g - 2i - 2j - k + \ell = 0$

(4) $2a + 4b + 2d + 2e + g + 3i + j + 3k + 2\ell = 0$

(5) $2a + 4b + 2d - 2e + g - 3i - j + 3k - 2\ell = 0$

(6) $2a + 4b + 2d + 2e - g - 3i - j - 3k + 2\ell = 0$

$$(7) \quad 2b + 4c + 2d + e + 2g + i + 3j + 2k + 3\ell = 0$$

$$(8) \quad 2b + 4c + 2d - e + 2g - i - 3j + 2k - 3\ell = 0$$

$$(9) \quad 2b + 4c + 2d + e - 2g - i - 3j - 2k + 3\ell = 0$$

La solución de este sistema está dada por:

$$(a,b,c,d,e,g,i,j,k,\ell) = (a,a,a,-3a - 2k,k,k,-k,-k,k,k) =$$

$$= \left(a + \frac{k}{2}\right) (1,1,1,-3,0,0,0,0,0,0) - \frac{k}{2}(1,1,1,1,-2,-2,2,2,-2,-2) .$$

Lo que implica que $h_i = \left(a + \frac{k}{2}\right)S - \frac{k}{2}T$. Así hemos probado el lema.

$\square$

Entonces considerando $f(x,y,z) = S(x,y,z) + T(x,y,z)$ tenemos que $f^2 \notin E(P_{3,12})$ y $f^2 \in E(\Sigma_{3,12})$.

En efecto: $f^2 = S^2 + 2ST + T^2 \notin E(P_{3,12})$ ya que las formas S^2, ST, T^2 son linealmente independientes (lema 4.12).

Si $f^2 = h_1^2 + \ldots + h_r^2$ por lema 4.13

$$h_i = a_iS + b_iT \qquad \text{con } a_i, b_i \in \mathbb{R} ,$$

luego $\quad f^2 = S^2 + 2ST + T^2$

y $\quad f^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} a_i^2\right)S^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{r} a_ib_i\right)ST + \left(\sum_{i=1}^{r} b_i^2\right)T^2 .$

Nuevamente por el lema 4.12, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{r} a_i^2 = \sum_{i=1}^{r} b_i^2 = \sum_{i=1}^{r} a_ib_i = 1 ,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{r} (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 - 2\sum_{i=1}^{r} a_i b_i + \sum_{i=1}^{r} b_i^2 = 1 - 2 + 1 = 0 .$$

Por lo tanto $a_i - b_i = 0$, $1 \leq i \leq r$ y $h_i^2 = a_i^2(S + T)^2 = a_i^2 f^2$ lo que implica $f^2 \in E(\Sigma_{3,12})$.

La construcción de una forma $g^2 \notin E(P_{4,8})$ y $g^2 \in E(\Sigma_{4,8})$ es similar.

Consideremos en $P_{4,4}$ los elementos:

$Q(x,y,z,w) = w^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xyzw$

$U(x,y,z,w) = (w^2 + xy - yz - zx)^2$

$g(x,y,z,w) = Q(x,y,z,w) + U(x,y,z,w)$.

El punto $(-1,-1,1,1) \in z(Q) - z(U)$, luego las formas Q^2 , QU , U^2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ (análogo lema 4.12). Además si $g = h_1^2 + \ldots + h_r^2$ con $h_i \in \mathbb{R}[x,y,z,w]$ de grado 4, se puede determinar que h_i debe contener 11 monomios $(F_r(h_i) \subseteq F_r(g))$ y se expresa de la siguiente manera:

$$h_i(x,y,z,w) = aw^4 + bx^2y^2 + cy^2z^2 + dz^2x^2 + exyzw + gw^2xy + \\ + iw^2yz + jw^2zx + kz^2xy + \ell x^2yz + my^2zx .$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial h_i}{\partial x}$, $\frac{\partial h_i}{\partial y}$, $\frac{\partial h_i}{\partial z}$ y $\frac{\partial h_i}{\partial w}$ se anula en los puntos $(1,1,1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(-1,1,-1,1) \in z(Q) \cap z(U) \subseteq z(g)$.

Así se obtiene un sistema de 12 ecuaciones lineales homogéneas, cuya solución es un espacio de dimensión 2, generado por las 11-tuplas correspondientes a Q y U, es decir $h_i = a_i Q + b_i U$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Con un razonamiento análogo al caso anterior se prueba que $g^2 = (Q + U)^2 \in E(\Sigma_{4,8})$. De este modo queda demostrado el teorema.

$\square$

<u>Relación entre la extremalidad de F y F^2</u>.

De acuerdo con las ideas tratadas en el presente trabajo resulta interesante hacer un análisis sobre la extremalidad del cuadrado de formas reales.

Supongamos que una forma F es psd y $F \notin E(P)$, entonces $F = F_1 + F_2$ con $F_1, F_2 \in P$ y F, F_1, F_2 linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, así

$$F^2 = F_1^2 + 2F_1F_2 + F_2^2 \notin E(P) .$$

Sin embargo no es posible determinar si F^2 pertenece o nó a $E(\Sigma)$, veamos los siguientes ejemplos:

1. Consideremos las formas

$$S_1(x,y,z) = S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2$$

$$S_2(x,y,z) = S(z,y,x) = z^4y^2 + y^4x^2 + x^4z^2 - 3x^2y^2z^2$$

Entonces $F = S_1 + S_2 \notin E(P)$ y $F^2 = S_1^2 + 2S_1S_2 + S_2^2 \notin E(\Sigma)$, puesto que

$$S_1S_2 = [\,yz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)]^2 + [\,zx(y^2 - z^2)(y^2 - x^2]^2 + \\ + [\,xy(z^2 - x^2)(z^2 - y^2)]^2 .$$

2. Consideremos ahora las formas

$$S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2$$

$$T(x,y,z) = (x^2y + y^2z - z^2x - xyz)^2$$

Entonces $F = S + T \notin E(P)$ y $F^2 \in E(\Sigma)$ (teorema 4.10).

Supongamos ahora que $F \in E(P)$, de acuerdo con el corolario 4.9, $F^2 \in E(\Sigma)$, trataremos de determinar algunas condiciones para que $F^2 \in E(P)$ o más generalmente para decidir sobre la pertenencia o no pertenencia de F^2 en el conjunto $E(P)$.

Proposición 4.14. Sea $F \in E(P_{n,m})$. Si $n = 2$ ó $m = 2$ ó $(n,m) = (3,4)$ entonces $F^2 \in E(P_{n,2m})$.

Demostración: $F \in E(P_{n,m})$ luego $F^2 \in E(\Sigma_{n,m})$. Entonces según el teorema 4.10 tenemos:

$$\text{si } n = 2 : \quad F^2 \in E(\Sigma_{2,2m}) = E(P_{2,2m})$$

$$\text{si } m = 2 : \quad F^2 \in E(\Sigma_{n,4}) = E(P_{n,4})$$

$$\text{si } (n,m) = (3,4) : \quad F^2 \in E(\Sigma_{3,8}) = E(P_{3,8}) .$$

□

Proposición 4.15. Sea $F \in E(P_{3,6})$ tal que $|z(F)| = \infty$. Entonces $F^2 \in E(P_{3,12})$.

Demostración: $|z(F)| = \infty$ entonces $|z(F^2)| = \infty$.
Luego existen formas H indefinida y G psd tales que $F^2 = H^2G$ (teorema 2.10).

$F \neq H$ puesto que $F \in P_{3,6}$, luego $0 < \text{gr } G = k < 12$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que H es irreducible.

$F \in E(P_{3,6})$ entonces $F^2 = H^2G \in E(\Sigma_{3,12})$ luego por teorema 4.4 se tiene que $G \in E(\Sigma_{3,k})$, como $0 < k < 12$ se aplica teorema 4.10 y entonces $G \in E(\Sigma_{3,k}) \subseteq E(P_{3,k})$ y así $F^2 = H^2G \in E(P_{3,12})$ (teorema 4.6).

□

<u>Ejemplo</u>: Definamos $F(x,y,z) = (x^2y + y^2z + z^2x - 3xyz)^2$ entonces $F \in E(P_{3,6})$.

En efecto:

Si $F \notin E(P_{3,6})$ entonces $F \notin E(\Sigma_{3,6})$ (teorema 4.10) luego

$S^2(x,y,z) = F(x^2,y^2,z^2) \notin E(\Sigma_{3,12})$

lo que es una contradicción puesto que $S(x,y,z) \in E(P_{3,6})$.

Además $H_s(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x - 3xyz$ es irreducible e indefinida, luego $F = H_s^2$ tiene infinitos ceros (proposición 2.5).

Por lo tanto F satisface las hipótesis de la proposición 4.15 y $F^2 \in E(P_{3,12})$.

<u>Corolario 4.16</u>. Si $F \in E(\Sigma_{3,6})$ entonces $F^2 \in E(P_{3,12})$.

<u>Demostración</u>: $F \in E(\Sigma_{3,6}) = E(P_{3,6})$, además $F = G^2$ donde G es una forma de grado 3 y por lo tanto indefinida, luego $|Z(F)| = \infty$, y según la proposición 4.15, $F^2 \in E(P_{3,12})$.

□

<u>Proposición 4.17</u>. Sea $F \in E(P_{4,4})$ tal que $|z(F)| = \infty$. Entonces $F^2 \in E(P_{4,8})$.

<u>Demostración</u>: $F \in P_{4,4}$ y $|z(F)| = \infty$ según teorema 2.13, $F \in \Sigma_{4,4}$. Como $F \in E(P_{4,4})$ necesariamente $F = H^2$ con H cuadrática. Consideremos tres casos:

1. H indefinida reducible.

   Supongamos que $H = H_1H_2$ con H_i lineal, entonces

   $F^2 = H_1^2H_1^2H_2^4 \in E(\Sigma_{4,8})$ (corolario 4.9), luego por el teorema 4.4 se tiene que $H_1^2H_2^4 \in E(\Sigma_{4,6})$ esto implica que $H_1^2H_2^4 \in E(P_{4,6})$ (teorema 4.10). Como H_1 es puramente indefinida podemos aplicar teorema 4.6, por lo tanto

   $$F^2 = H_1^2H_1^2H_2^4 \in E(P_{4,8}) .$$

2. H indefinida irreducible.

   Aplicando teorema 4.6 se tiene que $F^2 = H^2H^2 \in E(P_{4,8})$ ya que $H^2 = F \in E(P_{4,4})$.

3. H semidefinida.

   Podemos suponer que H es psd, entonces $H = x_1^2 + \ldots + x_r^2$ con $1 \leq r \leq 4$.

   Si $r > 1$ tenemos que

   $$F = H^2 = x_1^4 + 2(x_2^2 + \ldots + x_r^2)x_1^2 + (x_2^2 + \ldots + x_r^2)^2 \notin E(P_{4,4})$$

   lo cual es una contradicción.

Luego $H = x_i^2$ con $1 \leq i \leq 4$ por lo tanto

$$F^2 = x_i^8 \in E(P_{4,8}) .$$

□

Extremalidad de S^2 .

Sabemos que $S(x,y,z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2 \in E(P_{3,6})$ sin embargo $|z(S)| < \infty$, luego no se cumple la hipótesis de la proposición 4.15.

Entonces es natural preguntar sobre la extremalidad de $S^2(x,y,z)$.

$$S^2(x,y,z) = x^8y^4 + y^8z^4 + z^8x^4 + 9x^4y^4z^4 + 2(x^4y^6z^2 + x^6y^2z^4 + y^4z^6x^2) - 6(x^6y^4z^2 + x^2y^6z^4 + x^4z^6y^2)$$

Representando gráficamente los puntos de $F_r(S^2)$ en las primeras dos coordenadas, tenemos:

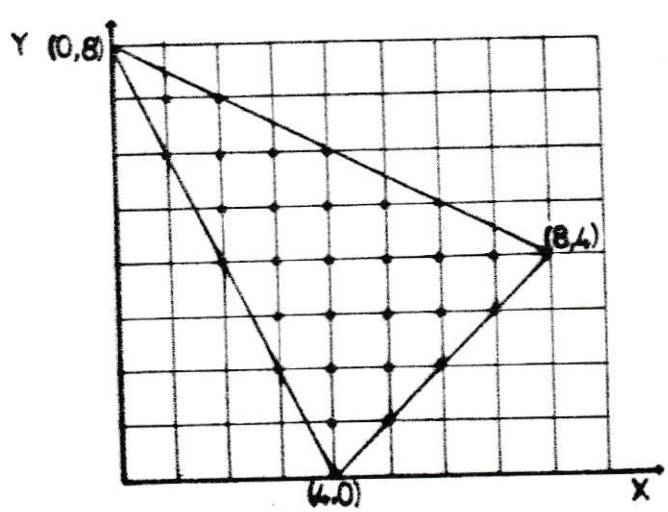

Fig. 3

Si $S^2 = F + G$ con $F, G \in P_{3,12}$ entonces $F_r(F) \subseteq F_r(S^2)$.

Luego F contiene 31 monomios, es decir

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = {} & a_1 y^8 z^4 + a_2 x y^6 z^5 + a_3 x y^7 z^4 + a_4 x^2 y^4 z^6 + a_5 x^2 y^5 z^5 + \\ & + a_6 x^2 y^6 z^4 + a_7 x^2 y^7 z^3 + a_8 x^3 y^2 z^7 + a_9 x^3 y^3 z^6 + a_{10} x^3 y^4 z^5 + \\ & + a_{11} x^3 y^5 z^4 + a_{12} x^3 y^6 z^3 + a_{13} x^4 z^8 + a_{14} x^4 y z^7 + a_{15} x^4 y^2 z^6 + \\ & + a_{16} x^4 y^3 z^5 + a_{17} x^4 y^4 z^4 + a_{18} x^4 y^5 z^3 + a_{19} x^4 y^6 z^2 + \\ & + a_{20} x^5 y z^6 + a_{21} x^5 y^2 z^5 + a_{22} x^5 y^3 z^4 + a_{23} x^5 y^4 z^3 + \\ & + a_{24} x^5 y^5 z^2 + a_{25} x^6 y^2 z^4 + a_{26} x^6 y^3 z^3 + a_{27} x^6 y^4 z^2 + \\ & + a_{28} x^6 y^5 z + a_{29} x^7 y^3 z^2 + a_{30} x^7 y^4 z + a_{31} x^8 y^4 \ . \end{aligned}$$

Recordemos que $z(S) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}$.

Sean $c_1(1,1,1)$, $c_2(-1,1,1)$, $c_3(1,-1,1)$ y $c_4(1,1,-1)$. Entonces

$F(c_i) = 0$ Ecuaciones 1, 2, 3, 4

$\frac{\partial F}{\partial x}(c_i) = 0$ Ecuaciones 5, 6, 7, 8

$\frac{\partial F}{\partial y}(c_i) = 0$ Ecuaciones 9, 10, 11, 12

$\frac{\partial F}{\partial z}(c_i) = 0$ Ecuaciones 13, 14, 15, 16

Además los puntos c_i para $i = 1,2,3,4$ son ceros de orden 2 de S [Definición 2.24].

En efecto: Consideremos el polinomio (no homogéneo)

$$g(y,z) = S(1,y,z) = y^2 + y^4z^2 + z^4 - 3y^2z^2$$

y los puntos $\bar{c}_1(1,1)$, $\bar{c}_2(-1,-1)$, $\bar{c}_3(-1,1)$, $\bar{c}_4(1,-1)$. Entonces

$$g(\bar{c}_i) = S(c_i) = 0 \qquad \forall\ i = 1, \ldots, 4$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{c}_i) = \frac{\partial S}{\partial y}(c_i) = 0 \qquad \forall\ i = 1, \ldots, 4$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(\bar{c}_i) = \frac{\partial S}{\partial z}(c_i) = 0 \qquad \forall\ i = 1, \ldots, 4$$

Calculando las segundas derivadas parciales se tiene por ejemplo que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 + 12y^2z^2 - 6z^2 \text{ , luego } \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\bar{c}_i) \neq 0 \qquad \forall\ i = 1, \ldots, 4$$

Por lo tanto c_i $\forall\ i = 1, \ldots, 4$ es un cero de orden 4 para S^2 y para F .

Deshomogenizando F , sin pérdida de generalidad hacemos $x = 1$, así obtenemos un polinomio $p(x,z) \in \mathbb{R}[y,z]$, que tiene ceros de orden 4 en $\bar{c}_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

De este modo se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(\bar{c}_i) = 0 \qquad \text{Ecuaciones } 17,\ 18,\ 19,\ 20$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z}(\bar{c}_i) = 0 \qquad \text{Ecuaciones } 21,\ 22,\ 23,\ 24$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\left(c_i\right) = 0 \qquad \text{Ecuaciones } 25,\ 26,\ 27,\ 28$$

$$\frac{\partial^3 p}{\partial y^3}\left(c_i\right) = 0 \qquad \text{Ecuaciones } 29,\ 30,\ 31,\ 32$$

$$\frac{\partial^3 p}{\partial y^2 \partial z}\left(c_i\right) = 0 \qquad \text{Ecuaciones } 33,\ 34,\ 35,\ 36$$

$$\frac{\partial^3 p}{\partial z^2 \partial y}\left(c_i\right) = 0 \qquad \text{Ecuaciones } 37,\ 38,\ 39,\ 40$$

$$\frac{\partial^3 p}{\partial z^3}\left(c_i\right) = 0 \qquad \text{Ecuaciones } 41,\ 42,\ 43,\ 44$$

Escribiendo estas 44 ecuaciones se tiene un sistema lineal homogéneo de 31 incógnitas $\left(a_1, a_2, \ldots, a_{31}\right)$, cuya matriz de coeficientes es la siguiente:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	(1)
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	(2)
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	(3)
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	(4)
0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	8	(5)
0	1	1	-2	-2	-2	-2	3	3	3	3	3	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	5	5	5	5	5	-6	-6	-6	-6	7	7	-8	(6)
0	1	-1	2	-2	2	-2	3	-3	3	-3	3	4	-4	4	-4	4	-4	4	-5	5	-5	5	-5	6	-6	6	-6	-7	7	8	(7)
0	-1	1	2	-2	2	-2	-3	3	-3	3	-3	4	-4	4	-4	4	-4	4	5	-5	5	-5	5	6	-6	6	-6	7	-7	8	(8)
8	6	7	4	5	6	7	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	2	3	4	5	3	4	4	(9)
8	-6	-7	4	5	6	7	-2	-3	-4	-5	-6	0	1	2	3	4	5	6	-1	-2	-3	-4	-5	2	3	4	5	-3	-4	4	(10)
-8	-6	7	-4	5	-6	7	-2	3	-4	5	-6	0	1	-2	3	-4	5	-6	1	-2	3	-4	5	-2	3	-4	5	3	-4	-4	(11)
8	-6	7	4	-5	6	-7	-2	3	-4	5	-6	0	-1	1	-3	4	-5	6	1	-2	3	-4	5	2	-3	4	-5	3	-4	4	(12)
4	5	4	6	5	4	3	7	6	5	4	3	8	7	6	5	4	3	2	6	5	4	3	2	4	3	2	1	2	1	0	(13)
4	-5	-4	6	5	4	3	-7	-6	-5	-4	-3	8	7	6	5	4	3	2	-6	-5	-4	-3	-2	4	3	2	1	-2	-1	0	(14)
4	5	-4	6	-5	4	-3	7	-6	5	-4	3	8	-7	6	-5	4	-3	2	-6	5	-4	3	-2	4	-3	2	-1	-2	1	0	(15)
-4	5	-4	-6	5	-4	3	7	-6	5	-4	3	-8	7	-6	5	-4	3	-2	-6	5	-4	3	-2	-4	3	-2	1	-2	1	0	(16)
56	30	42	12	20	30	42	2	6	12	20	30	0	0	2	6	12	20	30	0	2	6	12	20	2	6	12	20	6	12	12	(17)
56	-30	-42	12	20	30	42	-2	-6	-12	-20	-30	0	0	2	6	12	20	30	0	-2	-6	-12	-20	2	6	12	20	-6	-12	12	(18)
56	30	-42	12	-20	30	-42	2	-6	12	-20	30	0	0	2	-6	12	-20	30	0	2	-6	12	-20	2	-6	12	-20	-6	12	12	(19)
56	-30	42	12	20	30	-42	-2	6	-12	20	-30	0	0	2	-6	12	-20	30	0	-2	6	-12	20	2	-6	12	-20	6	-12	12	(20)
32	30	28	24	25	24	21	14	18	20	20	18	0	7	12	15	16	15	12	6	10	12	12	10	8	9	8	5	6	4	0	(21)
32	-30	-28	24	25	24	21	-14	-18	-20	-20	-18	0	7	12	15	16	15	12	-6	-10	-12	-12	-10	8	9	8	5	-6	-4	0	(22)
-32	-30	28	-24	25	-24	21	-14	18	-20	20	-18	0	7	-12	15	-16	15	-12	6	-10	12	-12	10	-8	9	-8	5	6	-4	0	(23)
-32	30	-28	-24	25	-24	21	14	-18	20	-20	18	0	7	-12	15	-16	15	-12	-6	10	-12	12	-10	-8	9	-8	5	-6	4	0	(24)
12	20	12	30	20	12	6	42	30	20	12	6	56	42	30	20	12	6	2	30	20	12	6	2	12	6	2	0	2	0	0	(25)
12	-20	-12	30	20	12	6	-42	-30	-20	-12	-6	56	42	30	20	12	6	2	-30	-20	-12	-6	-2	12	6	2	0	-2	0	0	(26)
12	20	-12	30	-20	12	-6	42	-30	20	-12	6	56	-42	30	-20	12	-6	2	-30	20	-12	6	-2	12	-6	2	0	-2	0	0	(27)
12	-20	12	30	-20	12	-6	-42	30	-20	12	-6	56	-42	30	-20	12	-6	2	30	-20	12	-6	2	12	-6	2	0	2	0	0	(28)
336	120	210	24	60	120	210	0	6	24	60	120	0	0	0	6	24	60	120	0	0	6	24	60	0	6	24	60	6	24	24	(29)
-336	120	210	-24	-60	-120	-210	0	6	24	60	120	0	0	0	-6	-24	-60	-120	0	0	6	24	60	0	-6	-24	-60	6	24	-24	(30)
-336	-120	210	-24	60	-120	210	0	6	-24	60	-120	0	0	0	6	-24	60	-120	0	0	6	-24	60	0	6	-24	60	6	-24	-24	(31)
336	-120	210	24	-60	120	-210	0	6	-24	60	-120	0	0	0	-6	24	-60	120	0	0	6	-24	60	0	-6	24	-60	6	-24	24	(32)
224	150	168	72	100	120	126	14	36	60	80	90	0	0	12	30	48	60	60	0	10	24	36	40	8	18	24	20	12	12	0	(33)
-224	150	168	-72	-100	-120	-126	14	36	60	80	90	0	0	-12	-30	-48	-60	-60	0	10	24	36	40	-8	-18	-24	-20	12	12	0	(34)
224	150	-168	72	-100	120	-126	14	-36	60	-80	90	0	0	12	-30	48	-60	60	0	10	-24	36	-40	8	-18	24	-20	-12	12	0	(35)
-224	150	-168	-72	100	-120	126	14	-36	60	-80	90	0	0	-12	30	-48	60	-60	0	10	-24	36	-40	-8	18	-24	20	-12	12	0	(36)
96	120	84	120	100	72	42	84	90	80	60	36	0	42	60	60	48	30	12	30	40	36	24	10	24	18	8	0	6	0	0	(37)
-96	120	84	-120	-100	-72	-42	84	90	80	60	36	0	-42	-60	-60	-48	-30	-12	30	40	36	24	10	-24	-18	-8	0	6	0	0	(38)
-96	-120	84	-120	100	-72	42	-84	90	-80	60	-36	0	42	-60	60	-48	30	-12	30	-40	36	-24	10	-24	18	-8	0	6	0	0	(39)
96	-120	84	120	-100	72	-42	-84	90	-80	60	-36	0	-42	60	-60	48	-30	12	30	-40	36	-24	10	24	-18	8	0	6	0	0	(40)
24	60	24	120	60	24	6	210	120	60	24	6	336	210	120	60	24	6	0	120	60	24	6	0	24	6	0	0	0	0	0	(41)
-24	60	24	-120	-60	-24	-6	210	120	60	24	6	-336	-210	-120	-60	-24	-6	0	120	60	24	6	0	-24	-6	0	0	0	0	0	(42)
24	60	-24	120	-60	24	-6	210	-120	60	-24	6	336	-210	120	-60	24	-6	0	-120	60	-24	6	0	24	-6	0	0	0	0	0	(43)
-24	60	-24	-120	60	-24	6	210	-120	60	-24	6	-336	210	-120	60	-24	6	0	-120	60	-24	6	0	-24	6	0	0	0	0	0	(44)

Escalonando por filas esta matriz se obtiene la siguiente matriz equivalente:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	(1')
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(2')
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(3')
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	(4')
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(5')
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	(6')
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(7')
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(8')
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(9')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(10')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(11')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(12')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	(13')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(14')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	(15')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(16')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	(17')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(18')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	(19')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(20')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(21')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(22')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	(23')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	(24')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-2	(25')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	(26')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	6	(27')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	(28')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	(29')
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	(30')

Las filas restantes son nulas, por lo tanto:

$a_1 = a_{31}$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2a_{31}$, $a_5 = 0$, $a_6 = -6a_{31}$,

$a_7 = 0$, $a_8 = 0$, $a_9 = 0$, $a_{10} = 0$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$,

$a_{13} = a_{31}$, $a_{14} = 0$, $a_{15} = -6a_{31}$, $a_{16} = 0$, $a_{17} = 9a_{31}$, $a_{18} = 0$,

$a_{19} = 2a_{31}$, $a_{20} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = 0$,

$a_{25} = 2a_{31}$, $a_{26} = 0$, $a_{27} = -6a_{31}$, $a_{28} = 0$, $a_{29} = 0$, $a_{30} = 0$.

Luego

$$F(x,y,z) = a_{31}[\, y^8z^4 + 2x^2y^4z^6 - 6x_2\, y^6z^4 + x^4z^8 - 6x^4y^2z^6 +$$

$$+ 9x^4y^4z^4 + 2x^4y^6z^2 + 2x^6y^2z^4 - 6x^6y^4z^2 + x^8y^4 \,]$$

$$= a_{31}S^2(x,y,z) \; ; \; a_{31} \geq 0 \text{ ya que } F(1,1,0) = a_{31} \geq 0$$

Se concluye que S^2 es extremal.

□

Nota 4.18. Se sugiere un desarrollo similar para el caso de la forma $Q^2 \in P_{4,8}$ donde

$$Q(x,y,z,w) = w^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xyzw.$$

Dado que $Q \in E(P4.4)$ y $|z(Q)| < \infty$, luego no satisface la hipótesis de la proposición 4.17.

B I B L I O G R A F I A

[1] M.D. Choi., Positive semidefinite biquadratic forms. Linear Alg. Appl. 12 (1975), 95-100.

[2] M.D. Choi, M. Knebusch, T.Y. Lam and B. Reznick., Transversal zeros and positive semidefinite forms. Lecture Notes in Mathematics, 959 (1982), 273-298.

[3] M.D. Choi and T.Y. Lam., An old question of Hilbert. Proceedings of Quadratic Forms Conference, Queens University (1976), 385-405.

[4] M.D. Choi and T.Y. Lam., Extremal positive semidefinite forms. Math. Ann. 231 (1977), 1-18.

[5] M.D. Choi, T.Y. Lam and B. Reznick., Real zeros of positive semidefinite forms I, Math. Zeit. 171 (1980), 1-26.

[6] W. Fulton., Algebraic Curves, Reading Mass. Benjamin 1969.

[7] D. Hilbert., Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten, Math. Ann. 32 (1888), 342-350.

[8] T.Y. Lam., The Algebraic Theory of quadratic forms, Reading Mass. Benjamin 1973.

[9] T.S. Motzkin., The arithmetic-geometric inequality, in Inequalities (O. Shisha, Ed), Academic Press, N.Y. (1967), 205-224.

[10] B. Reznick., Extremal psd forms with few terms, Duke Math. J. (1978), 363-374.

[11] B. Reznick., Comunicación personal (1986).

[12] R.M. Robinson., Some definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials, in Selected Questions of Algebra and Logic, Acad. Sci. USSR (1973), 264-282.

[13] R.T. Rockafeller., Convex Analysis, Princeton, NJ. Princeton University Press, 1970.

[14] R. Walker., Algebraic Curves, New York. Dover, 1959.