ALGUNOS RESULTADOS CUANTITATIVOS Y CUALITATIVOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas

por

Manuel Abelardo Pinto Jiménez

Julio, 1984

Patrocinante: Dr. Jorge Soto Andrade

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

I N F O R M E D E A P R O B A C I O N

T E S I S D E M A G I S T E R

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

Manuel Abelardo Pinto Jiménez

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas.

Patrocinante de Tesis
Jorge Soto Andrade
Comisión Informante
Ricardo Baeza Rodríguez
Nicolás Yus Suárez
Manuel Elgueta Dedes

I N D I C E

Pág.

INTRODUCCION

El trabajo que se expondrá a continuación constituye mis primeros logros en ecuaciones diferenciales ordinarias. Dió origen a dos artículos [11] y [12], el primero ha sido aceptado en ANALYSIS y aparecerá pronto publicado y el otro será enviado a PROCEEDINGS de A.M.S. Por esto, se optó por exhibir los resultados simplemente al estilo de un artículo, dejando el material preliminar o básico reservado exclusivamente a las referencias.

En el primer Capítulo se estudia la forma de la solución del sistema lineal:

$$x' = A(t)x$$

en términos de A. Esto llevó a preguntarse por qué su matriz fundamental no es

$$\exp \int_0^t A(s)ds \ ,$$

o, equivalentemente, a investigar la validez de la fórmula

$$(e^{B(t)})' = B'(t)e^{B(t)} \quad . \qquad (*)$$

Se prueba que para $B(t)$ una matriz triangular superior 2×2 , $(*)$ es equivalente a que suceda

$$[B,B'] = 0 \qquad (**)$$

o que: $(***)$ la diferencia de los valores propios de $B(t)$ sea solución de la ecuación trascendental:

$$e^z = z + 1 \ .$$

Un tipo de relación como ésta, no se conoce en la literatura. Además, sobre la condición suficiente $(**)$ no se sabía si era o no necesaria, incluso existía una demostración incorrecta (de H. Helm), como observa J. MARTIN [2], pág. 264. Mediante la equivalencia anterior es muy fácil construir contraejemplos, incluso en dimensión cualquiera, donde $(*)$ sucede sin que se verifique $(**)$. Además, la condición $(***)$ aparece como una nueva condición suficiente, obviamente no-necesaria, para tener $(*)$. Se conjetura que es en general una condición suficiente. Para matrices triangulares superiores 2×2 esta conjetura es cierta, i.e. si $(***)$ sucede, entonces $(*)$ es cierta. Luego de eso, se obtiene un resultado general (para matrices $n\times n$ cualesquiera) que relaciona $(*)$, $(**)$ y $(***)$ con otras condiciones y asegura además que si $(***)$ no sucede, entonces $(*)$ y $(**)$ son equivalentes.

En Capítulo II se aborda el problema central y original mostrado en [4] como nada de trivial: debilitar la estabilidad de tipo exponencial sin invalidar los resultados ya existentes. Esto se consigue considerando sistemas, lineales o no, que llamamos h-A.E.: asintóticamente estables con respecto a h . Este tipo de sistemas no sólo incluyen los de tipo exponencial (con h la función exponencial) sino que efectivamente extienden razonablemente los resultados válidos para éstos. Se precisa la implicancia que tiene esta definición entre un sistema y sus sistemas lineales variacionales, estableciendo de qué manera el hecho de que un sistema variacional con respecto a la solución nula sea h-A.E. implica que el sistema original y sus variacionales lo sean. Se dá entonces una condición para que el sistema variacional con respecto a la solución cero sea h-A.E. Esto y un poco de trabajo más, permitió obtener dos resultados nuevos con respecto incluso a [11], sobre perturbaciones del sistema:

$$x' = f(t,x)$$

combinadas

$$y' = f(t,y) + g_1(t,y) + g_2(t,y) + g_3(t,y)$$

con

$$|g_1(t,y)| \leq \lambda(t)|y|$$

$$g_2(t,y) = o(|y|) \qquad \text{uniformemente en } t$$

y

$$|g_3(t,y)| \leq \nu(t) \quad , \quad \int_s^{s+1} \nu(t)dt \to 0 \qquad \text{si } s \to \infty$$

En cuanto a las proyecciones y a lo que resta por hacer sobre lo aquí presentado, diremos que en lo que se refiere a sistemas h-A.E., su teoría básica está completa no así indudablemente su aprovechamiento. Sobre éste, aparte de lo comentado en sección 6 de Capítulo II, está el utilizarlo en el fabuloso campo de la integración asintótica como se apunta al final de PINTO [13].

En cambio sobre el interesante y difícil problema de la derivada de la exponencial de una matriz variable no se ha dado más que el primer paso. No obstante, la equivalencia encontrada, es una visión distinta y una dirección nueva, que como se explica en sección 2 de Capítulo I, debiera constituir la primera etapa de un proceso recursivo que demuestre una equivalencia al estilo de la encontrada para matrices nxn cualesquiera. Creo que el establecer ésto, aparte de proveer un cálculo, y por ende ejemplos, computacionalmente conveniente (dado el método recursivo), proporciona un enfoque promisorio al interesante problema de la representación exponencial de una matriz fundamental de un sistema lineal.

Termino agradeciendo, y muy sinceramente, a J. Soto por su preciada colaboración y amplitud matemática en mi inicio por los caminos, no siempre diferenciables, de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

CAPITULO I. LA DERIVADA DE LA EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ VARIABLE

1. Sea $B(t)$ una matriz $n\times n$ cuyos coeficientes son funciones a valores complejos de la variable real t, derivables en un intervalo I. La fórmula

$$(1) \qquad [\exp B(t)]' = B'(t) \exp B(t)$$

(donde $(\ )'$ denota diferenciación con respecto a t), no es siempre cierta como se comprueba fácilmente (ver [3]) con

$$B(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

La validez de (1) en algún intervalo asegura que $\exp B(t)$ es una matriz fundamental del sistema diferencial

$$x' = B'(t)x$$

para t en ese intervalo.

Una condición suficiente para que (1) suceda es la condición de conmutatividad:

$$[B(t),B'(t)] := B(t)B'(t) - B'(t)B(t) \equiv 0 \ . \tag{2}$$

Sobre la necesidad de (2) no habían contraejemplos en la literatura. En este trabajo, se exhiben varios contraejemplos y se encuentra una nueva condición suficiente para que (1) suceda, en el caso de matrices triangulares 2×2 . Se observa que para ciertas matrices $n\times n$ esta suficiencia sigue valiendo y conjeturamos que así sucede en general. La demostración en general de este hecho establecería la relación precisa entre (1) y (2).

Finalmente se prueba cómo varias condiciones de conmutatividad se relacionan con (1) y (2), indicando en qué situación (1) y (2) son equivalentes. Se extiende así, un teorema de J. MARTIN [2]. El último resultado sigue la línea establecida por CAMPBELL [1] y es aplicable por lo tanto a operadores $B(t)$ en espacios de HILBERT. En [1] y [2] uno encuentra muchas referencias sobre este tema que hasta ahora posee sólo soluciones parciales.

2. Nos proponemos precisar la relación entre (1) y (2) para matrices triangulares 2×2 . De ello será claro cómo construir ejemplos de matrices incluso en dimensión cualquiera, para las cuales (1) no implica (2).

<u>Lema</u>: Sea $B(t)$ la matriz triangular derivable en un intervalo I :

$$B(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & c(t) \end{pmatrix} ,$$

entonces, en algún intervalo $J \subset I$, la fórmula (1) es válida sí y sólo si sucede (2) o la condición siguiente:

(3) $a(t) - c(t)$ es una raíz no-nula de la ecuación transcendental

$$e^z = z + 1 .$$

Demostración: Dado que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-c & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := C + D$$

entonces $\exp B = \exp C \cdot \exp D$. Pero $D^2 = (a - c)D$ y

$$\exp D = I + D + \frac{1}{2!} D^2 + \frac{1}{3!} D^3 + \ldots$$

$$= I + D \left[1 + \frac{(a - c)}{2!} + \frac{(a - c)^2}{3!} + \ldots \right]$$

$$= I + (a - c)^{-1} [\exp (a - c) - 1] D .$$

De donde, para $t \in I$

$$\exp B(t) = \begin{pmatrix} e^{a(t)} & b(t)(e^{a(t)} - e^{c(t)})(a(t) - c(t))^{-1} \\ 0 & e^{c(t)} \end{pmatrix} ,$$

fórmula válida, de manera obvia, incluso para t_o tal que $a(t_o) = b(t_o)$.

Así, fórmula (1) es equivalente a

$$[b(e^a - e^c)(a - c)^{-1}]' = a'b(e^a - e^c)(a - c)^{-1} + b'e^c .$$

y el resultado sigue de la integración de esta ecuación diferencial.

Observación: Para una matriz $n\times n$ cualquiera, la condición (3) toma la forma:

(3) La diferencia entre dos valores propios de $B(t)$ es una raíz no nula de la ecuación trascendental

$$e^z = z + 1 .$$

Las condiciones (2) y (3) no son necesariamente excluyentes. En la demostración de Teorema 4 de J. Martin [2] se establece que, para toda matriz $n\times n$, (1) implica (2) ó (3) y que si (3) no sucede, entonces (1) implica (2). No obstante, no puede deducirse que (3) sea una condición suficiente.

Usando el lema anterior es muy fácil construir ejemplos donde se tiene (1), y (2) es falso. Si λ es una raíz compleja no nula de la ecuación

$$e^z = z + 1 ,$$

entonces

$$B_\lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda & b(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisface (1) pero, si $b' \neq 0$, no satisface (2). En forma precisa, si B_λ no es constante, B_λ satisface (1) sí y sólo si λ es una raíz no nula de la ecuación $e^z = z + 1$. Más aún, si B_λ es ahora una matriz $n\times n$ cuyos coeficientes son todos nulos salvo una fila (o una columna) de la forma $(b_1(t), b_2(t), \dots, \lambda, \dots, b_n(t))$, donde λ es una constante sobre la diagonal, entonces, si λ es una raíz de $e^z = z + 1$, B_λ

satisface (1). Esto nos lleva a conjeturar que en general, la condición (3) es suficiente para que (1) suceda.

No hemos trabajado en esta conjetura que según la observación anterior, precisaría la relación al estilo del lema entre (1) y (2). Se hace notar que las raíces de la ecuación $e^z = z + 1$ son numerables (ubicadas en el semi-plano derecho simétricamente con respecto al eje real y a excepción de cero ninguna sobre los ejes) y por ello, (2) es esencialmente equivalente a (1).

Uno intentaría demostrar la conjetura para matrices triangulares $n \times n$, extendiendo lo hecho en el lema que constituiría el primer paso en la inducción. Pero, el cálculo de la exponencial de una matriz triangular 3×3 ya no es fácilmente imitable. No obstante, una idea surgida estos días permitiría obtener no sólo el cálculo, sino también el método recursivo a usar. Se basa en que un sistema diferencial lineal de matriz triangular se puede resolver recursivamente. Si T_n es una matriz triangular superior $n \times n$, entonces

$$\dot{y}_n = T_n y_n \qquad ((\dot{\ }) = d/du)$$

es equivalente, mirando, aunque no lo sea, a T_n constante en u, a

$$\dot{y}_{n-1} = T_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n e^{u \cdot t_{nn}} \cdot c_n \ , \qquad (\alpha_n \in \mathbb{C}) \ ,$$

donde c_n es el vector columna $(n - 1) \times 1$ formado por la n-ésima columna de T_n quitándole el $n \times n$ elemento t_{nn}, T_{n-1} es la $(n - 1) \times (n - 1)$ matriz triangular superior formada por T_n sin la n-ésima fila ni la n-ésima columna y y_{n-1} es el vector columna $(n - 1) \times 1$ formada por el vector y_n sin su n-ésima componente (que es $\alpha_n \cdot e^{u \cdot t_{nn}}$) .

El cálculo de $\exp T_n(t)$ se consigue al evaluar en $u = 1$ a $\exp[u \cdot T_n(t)]$ obtenida como $\phi(u) \cdot \phi^{-1}(0)$ a partir de una matriz fundamental ϕ que ha sido calculada solucionando el sistema diferencial.

Basado en lo anterior, también puede ser usado el método de los valores y vectores propios consistente en que $\dot{y} = Ty$, T constante en u , tiene soluciones de la forma $y_\lambda = e^{\lambda u} \cdot v_\lambda$ con v_λ un vector propio correspondiente al valor propio λ de T . A valores propios distintos corresponden soluciones y_λ linealmente independientes. Así, si se tienen todos los valores propios distintos, como puede suponerse, se cuenta con un sencillo sistema fundamental de soluciones y, por lo tanto, de una matriz fundamental. No obstante, con este método no se vé el proceso recursivo que se utilizaría para aplicar inducción.

Otro método, fuertemente recursivo, sería el que llamamos "de la diagonal cero". Todo sistema puede transformarse en uno equivalente que posea diagonal cero (cada elemento nulo). Si tenemos un sistema triangular y lo transformamos a diagonal cero, el sistema resultante, que consideramos constante en u , es nuevamente triangular, y si aplicamos sucesivamente este método acorralamos en una esquina de la matriz al sistema. Este método tiene gran futuro.

Este problema es de gran interés y está abierto. Estos métodos surgieron ahora al ser reescrito este trabajo así es que están inexplotados. Espero en un futuro no muy lejano informar de algún resultado.

3. Como (1) es equivalente a que una matriz fundamental de $x' = B'(t)x$ sea $\phi = \exp B$, investigamos ahora las condiciones que puedan derivarse de este hecho. Las condiciones encontradas, análogas a (2) y también de conmutatividad, resultan equivalentes entre sí cuando B y B' son acotadas y equivalentes a (1) y (2), luego (1) y (2) en sí mismos, si B' es contínua y $B(t)$ no verifica (3).

<u>Teorema</u>: Sea $B(t)$ una matriz compleja $n\times n$, diferenciable en un intervalo I . Sea ϕ una matriz fundamental de

$$x' = B'(t)x \; .$$

I) Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes en el intervalo I :

a) $[\phi,\phi'] = 0$ b) $[\phi^{-1},\phi'] = 0$ c) $[\phi,B'] = 0$

d) $(\phi^2)' = 2\phi\phi'$ e) $(\phi^k)' = kB'\phi^k$ (para todo entero k)

II) Si B y B' son acotadas en el intervalo I y $\phi = \exp B$, entonces cada una de las condiciones siguientes es también equivalente a las anteriores

f) $[B,\phi'] = 0$ g) $[B,B'] = 0$

III) Supongamos que B' es contínua en I y que para algún t_o en I cada una de las diferencias no nulas entre dos valores propios de $B(t_o)$ no es raíz de $e^z = z + 1$. Entonces, en una vecindad de t_o , todas las condiciones anteriores son equivalentes a

h) $\phi = \exp B$.

En particular, si B' es además analítica en I , entonces las equivalencias anteriores se extienden a todo el intervalo I .

Demostración: La primera parte es inmediata si se verifica que (a) es equivalente a cada una de las condiciones siguientes. También, (f) y (g) son equivalentes a partir de que $[\phi, B] = 0$. La equivalencia entre (c) y (f) sigue del hecho más general

$$[B, (e^B)'] = [B', e^B]$$

que es consecuencia de la acotación de B y B' (usada aquí por primera vez). La última parte sigue de Teorema 4 de J. MARTIN [2] .

Las primeras dos partes fueron deducidas independientemente de un teorema similar (Teorema 5) de J. MARTIN [2] . El Teorema 5, [2] , establece que cuando $B(0) = 0$ (ó $B(t_o) = 0$) y B' es analítica, las condiciones (a), (b), (c), (d), (e) y (g) son mutuamente equivalentes a (h). Nuestro ejemplo muestra que $B(0)$ no puede ser tomado arbitrariamente. Nuestro Teorema relaja la restricción sobre $B(0)$; esto es útil pués existen muchas propiedades no satisfechas por $B(t)$ pero sí por $B(t) + C$ con C una matriz constante apropiada. Además, se precisa que la equivalencia entre (c) y (f) es independiente de la equivalencia entre (g) y (h).

En el Teorema se ha procurado poner las hipótesis más débiles posibles, indicando la manera directa de cómo influyen en las conclusiones con el fin de hacerlas más expeditas al uso en distintas líneas o reinterpretaciones. Así, puede ser usado por ejemplo, para considerar en lugar de matrices, operadores en espacios de HILBERT, como en CAMPBELL [1] . A propósito, CAMPBELL considera en [1] la condición $[B', \phi] = 0$ que es implicada por (a) y es equivalente a ella si B' es invertible.

CAPITULO II. SISTEMAS DEBILMENTE ESTABLES.

1. La fórmula de Alekseev, que extiende la fórmula de variación de constantes a sistemas no-lineales, permite estudiar los efectos producidos por perturbaciones sobre sistemas diferenciales, no-lineales incluso, con ciertas propiedades de estabilidad.

Sin embargo, como lo muestra A. STRAUSS y J. YORKE [4], el estudio de la estabilidad asintótica, que no sea de tipo exponencial, posee insospechadas dificultades. En este Capítulo extendemos el estudio a una variedad de sistemas razonables, que incluyen los de tipo exponencial, que llamamos h-A.E. (asintóticamente estables con respecto a h). Se establecen algunas condiciones que aseguran que los correspondientes sistemas variacionales son h-A.E. Se prueba que los teoremas típicos sobre perturbaciones permanecen válidos para sistemas h.A.E.

Además, se demuestra que el comportamiento de un sistema $x' = f(t,x)$ puede estar determinado por el comportamiento del campo $f(t,x)$ cuando t tiende a infinito. Finalmente, se indican condiciones que aseguran que el sistema variacional con respecto a la solución cero sea h-A.E. y se muestra cómo esto último implica que el sistema original es también h-A.E.

2. A lo largo del Capítulo se usará la norma euclideana, aunque cualquier otra norma puede ser usada sin modificaciones esenciales.

Consideremos ahora el sistema de primer orden dado por

(1) $$x' = f(t,x) \quad , \quad f(t,0) \equiv 0 \qquad ((\ )' = d/dt) \ ,$$

donde $f : I_a \times D \to \mathbb{R}^n$ es una función derivable contínuamente, $I_a = [a,\infty)$ y D es una región en $\mathbb{R}^n$ que contiene al origen. Supongamos que para cada $(t_o,x_o) \in I_a \times D$ la solución de (1) que pasa por el punto (t_o,x_o), denotada por $x(t,t_o,x_o)$, esté definida para todo $t \geq t_o \geq a$ y que para x_o en una vecindad pequeña del origen satisfaga:

(2) $$|x(t,t_o,x_o)| \leq c|x_o|h(t)h(t_o)^{-1} \qquad (t \geq t_o \geq a) \ ,$$

donde c es una constante positiva (dependiendo sólo de f) y h es una función contínua positiva definida en el intervalo I.

Bajo estas condiciones diremos que el sistema (1) (o su solución nula) es h-asintóticamente estable, lo que anotaremos h-A.E. Esta definición es nueva en la literatura. Pese a que no exigimos que $h(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, esta condición se tendrá muy a menudo y justificará el término asintóticamente estable.

Todo sistema lineal constante

$$x' = Ax \qquad , \qquad A \text{ constante},$$

es h-A.E. con $h(t) = e^{\alpha t}$, pues (ver [3])

$$|e^{tA}| \leq Ke^{\alpha t} \qquad (K,\alpha \text{ constantes}, \quad K > 0).$$

Notar que no se ha impuesto $\alpha < 0$, en cuyo caso el sistema se llama exponencialmente estable. Todo sistema (lineal, no-lineal, autónomo o no) exponencialmente estable se incluye entre los h-A.E. con $h(t) = e^{-\beta t}$, $\beta > 0$. Toda ecuación escalar del tipo

$$x' = u(t)x$$

es h-A.E. con $h(t) = \exp \int_a^t u(s)ds$, pero no necesariamente exponencialmente estable como sucede con

$$x' = -\frac{1}{t}x \ , \quad x(t,t_o,x_o) = \frac{t_o}{t}x_o \qquad (t \geq t_o \geq a > 0) \ .$$

Consideremos ahora el sistema perturbado

$$(3) \qquad y' = f(t,y) + g(t,y)$$

con $g : I_a \times D \to \mathbb{R}^n$ una función contínua. Por fórmula de Alekseev [5]:

$$(4) \qquad y(t) := y(t,t_o,y_o) = x(t,t_o,y_o) + \int_{t_o}^t \phi(t,s,y(s))g(s,y(s))ds \ ,$$

donde

$$(5) \qquad \phi(t,t_o,x_o) = \frac{\partial}{\partial x_o} x(t,t_o,x_o)$$

es la matriz fundamental del sistema variacional:

$$(6) \qquad z' = f_x(t,x(t,t_o,x_o))z$$

(f_x representa la derivada de f con respecto a x) .

Si el sistema (1) es h-A.E., se prueba en forma similar a lo deducido en [6] que el sistema variacional con respecto a la solución nula

(7) $$z_o' = f_x(t,0)z_o$$

es también h-A.E. Si además

(8) $$|f_x(t,x) - f_x(t,0)| \leq v(t)|x| \quad , \qquad v \in L_1(I_a)$$

sucede para x en una vecindad del origen, entonces (6) es también h-A.E. y, equivalentemente,

(9) $$|\phi(t,t_o,x_o)| \leq c_1 h(t)h(t_o)^{-1} \qquad (t \geq t_o \geq a)$$

para alguna constante positiva c_1 y x_o en alguna vecindad del origen.

En la sección 5 ahondaremos en las relaciones en cuanto a ser h-A.E., entre los sistemas (1), (6) y (7) y precisaremos una condición más natural que (8) para este efecto.

Contando con (2) y (9), i.e. que los sistemas (1) y (6) sean h-A.E., estamos en posición de obtener algunos resultados:

Teorema 1: Supongamos que los sistemas (1) y (6) son h-A.E. y que

(10) $$|g(t,y)| \leq \lambda(t)|y| \qquad (\lambda \in L_1(I_a)) \; .$$

Entonces, el sistema perturbado (3) es también h-A.E.

Demostración: Usando la fórmula de Alekseev (4), (2), (9) y (10) se obtiene

$$|y(t)| := |y(t,t_o,y_o)| \leq |x(t,t_o,y_o)| + \int_{t_o}^{t} |\phi(t,s,y(s))|\cdot|g(s,y(s))|ds$$

$$\leq c|y_o|h(t)h(t_o)^{-1} + c_1 \int_{t_o}^{t} h(t)h(s)^{-1}\lambda(s)|y(s)|ds$$

y por desigualdad de GRONWALL [5] aplicada a $h^{-1}|y|$:

$$|y(t,t_o,y_o)| \leq c|y_o|h(t)h(t_o)^{-1} \exp\{c_1 \int_{t_o}^{t} \lambda(s)ds\}$$

de donde sigue el resultado.

Observemos que si en lugar de (2) se tuviera

$$(2)' \qquad |x(t,t_o,x_o)| \leq c|x_o|h(t) ,$$

de (5) obtenemos que

$$|\phi(t,t_o,0)| \leq ch(t)$$

que junto a (8) permite probar, si h es acotada y procediendo como antes, que cada solución de (6) satisface

$$|z(t,t_o,z_o)| \leq c|z_o|h(t)\cdot\exp\{\int_{t_o}^{t} c\cdot N\cdot\lambda(s)h(s)ds\} ,$$

donde $|x(t,t_o,x_o)| \leq N$ para $|x_o|$ suficientemente pequeño. Así, por ejemplo, si $h \in L_1(I_a)$, basta que λ sea acotada para que

$$|z(t,t_o,z_o)| \leq c_1|z_o|h(t)$$

para $|z_o|$ suficientemente pequeño, que es una desigualdad del tipo (2)'.
Lo mismo es verdad para el sistema perturbado considerado en el teorema.

Como se verá al final de la sección 3, condicionando la función h, es posible extender el Teorema 1 a una clase más amplia de funciones λ a las cuales se aplica.

3. Con el fin de estudiar otros tipos de perturbaciones es necsario imponer otras condiciones sobre h y obtener ciertos lemas preparatorios. Comencemos con la perturbación del tipo

$$(11) \qquad |g(t,y)| \leq \lambda(t) \ , \quad \Lambda(s) = \int_s^{s+1} \lambda(t)dt \to 0 \quad \text{si} \quad s \to \infty \ .$$

Toda función $\lambda \in L_p(I_a)$, $p \geq 1$ y aquella que tienda a cero cuando $t \to \infty$, satisface la condición integral de (11).

<u>Lema 1</u>: Sea h una función contínua y positiva en I_a tal que

$$(12) \qquad 0 < m_\circ = \underline{\lim}_{t\to\infty} h(t) \int_t^{t+1} h(s)^{-1}ds \leq \overline{\lim}_{t\to\infty} h(t) \int_t^{t+1} h(s)^{-1}ds < \infty \ .$$

Si λ es una función no-negativa y contínua en I_a, entonces existe una constante $\alpha_\circ > 0$ tal que

$$\int_{t_\circ}^{t} h(s)^{-1}\lambda(s)ds \leq \alpha_\circ \int_{t_\circ-1}^{t} h(s+1)^{-1}\Lambda(s)ds$$

para $t_\circ$ suficientemente grande.

<u>Demostración</u>: Cambiando el orden de integración y usando (12), obtenemos

$$\int_{t_\circ-1}^{t} h(s+1)^{-1}\Lambda(s)ds = \int_{t_\circ-1}^{t} h(s+1)^{-1} \int_s^{s+1} \lambda(\tau)d\tau ds$$

$$\geq \int_{t_\circ}^{t} \lambda(\tau) \int_{\tau-1}^{\tau} h(s+1)^{-1}dsd\tau$$

$$\geq m_\circ \int_{t_\circ}^{t} \lambda(\tau)h(\tau)^{-1}d\tau \ ,$$

para $t_\circ$ suficientemente grande.

La segunda desigualdad en (12) será usada por primera vez en el siguiente lema.

<u>Lema 2</u>: Supongamos las hipótesis de Lema 1, (11) y

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, h(t) \int_a^t h(s)^{-1}ds = M < \infty \ . \tag{13}$$

Entonces, para cada $T \geq a$

$$\lim_{t\to\infty} \int_T^t h(t)h(s)^{-1}\lambda(s)ds = 0 \ .$$

<u>Demostración</u>: Dado $\varepsilon > 0$, existe $t_\circ$ tal que para $s > t_\circ - 1$ se tiene $\Lambda(s) < \varepsilon$. Usando Lema 1, obtenemos

$$\int_{t_\circ}^{t} h(t)h(s)^{-1}\lambda(s)ds \leq \alpha_\circ \int_{t_\circ-1}^{t} h(t)h(s+1)^{-1}\Lambda(s)ds$$

$$< \varepsilon\alpha_\circ h(t) \int_{t_\circ}^{t+1} h(s)^{-1}ds$$

$$< \varepsilon\alpha_\circ M_1 \ ,$$

donde M_1 es una constante resultante del uso de (12) y (13).

Ahora

$$\int_T^t h(t)h(s)^{-1}\lambda(s)ds = h(t)\int_T^{t_\circ} h(s)^{-1}\lambda(s)ds + \int_{t_\circ}^{t} h(t)h(s)^{-1}\lambda(s)ds$$

y, por lo anteriormente hecho, la segunda integral es pequeña y el primer sumando tiende a cero cuando t tiende a infinito por el siguiente lema:

Lema 3: (W. COPPEL [7]). Si h satisface (13), entonces existe una constante $N > 0$ tal que

$$h(t) \leq N \cdot e^{-M^{-1}t} \qquad (t \geq a) \; ,$$

donde M es como en (13).

Mediante estos lemas podemos concluir:

Teorema 2: Supongamos que los sistemas (1) y (6) son h-A.E., donde h satisface (12) y (13). Supongamos que (11) sucede para alguna función contínua y positiva λ definida en I_a. Entonces, el sistema perturbado (3) es asintóticamente estable en el infinito, i.e. si $|y(t_o)| = |y_o|$ es suficientemente pequeño para t_o suficientemente grande, entonces

$$y(t,t_o,y_o) \to 0 \qquad \text{si} \quad t \to \infty \, .$$

Demostración: En efecto, por fórmula de Alekseev (4), (2), (9) y (11):

$$|y(t)| := |y(t,t_o,y_o)| \leq |x(t,t_o,y_o)| + \int_{t_o}^{t} |\phi(t,s,y(s))| \, |g(s,y(s))| ds$$

$$\leq c|y_o| h(t)h(t_o)^{-1} + \int_{t_o}^{t} ch(t)h(s)^{-1}\lambda(s)ds$$

y el resultado sigue de Lema 2.

Observación: 1) Si $\lambda(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ entonces el resultado del teorema sucede pidiendo que h satisfaga (13) solamente. Además, si la perturbación g es acotada y h satisface (13) entonces todas las soluciones son acotadas.

2) Sobre la clase P de las funciones h que satisfacen (12) y (13) tenemos los siguientes hechos:

a) $h(t) = e^{-\beta t}$, $\beta > 0$, pertenece a P (como se esperaba por Lema 3).

b) Si h_i , $i = 1,2$, pertenece a P entonces ch_1 , $c > 0$, una constante y $h_1 + h_2$ también pertenecen a P .

c) Si h pertenece a P entonces, si ν es una función contínua y positiva en I_a , $h\nu$ pertenece a P bajo cada una de las siguientes condiciones:

i) $\{\nu(t)\nu(s)^{-1}/t + 1 \geq s \geq a\}$ es acotado

ii) ν es decreciente y

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\nu(t)}{\nu(t+1)} < \infty$$

d) Si h pertenece a P , $k_\varepsilon(t) = h(t)e^{\varepsilon t}$, $\varepsilon < M^{-1}$, pertenece a P si

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} h(t)e^{M^{-1}t} > 0 ,$$

donde M está dado por (13).

El último tipo de perturbación que trataremos, fundamental en la linealización de un sistema, es

$$g(t,y) = o(|y|)$$

cuando $|y| \to 0$ uniformemente en t . El resultado correspondiente es realmente una consecuencia de Teorema 1.

Teorema 3: Suponga que los sistemas (1) y (6) son h-A.E. y que

$$|g(t,y)| \leq \varepsilon |y| \ , \quad 0 < \varepsilon \ \text{ constante},$$

para y en una vecindad del origen y todo $t \in I_a$, entonces el sistema perturbado (3) es k_ε-A.E., donde

$$k_\varepsilon(t) = h(t)e^{\varepsilon t}.$$

En particular, si h satisface (13) y $\varepsilon < M^{-1}$, donde M está dado por (13), entonces todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$.

En sección 2 establecimos que si el sistema (1) es h-A.E., entonces el sistema variacional con respecto a la solución cero (7) es también h-A.E. Puesto que

$$f(t,x) = f_x(t,0)x + g(t,x) \ ,$$

con g como en Teorema 3, este teorema afirma que la versión recíproca de lo anterior es así: si (7) es h-A.E., entonces (1) es k_ε-A.E.

Además, si h satisface (13), Lema 3 permite extender la clase de funciones λ para las cuales Teorema 1 es cierto, asegurando de paso que todas las soluciones del sistema perturbado tienden a cero cuando $t \to \infty$. En efecto, si el sistema no perturbado (1) es h-A.E. con h satisfaciendo (13), entonces todas las soluciones con condiciones $|y_\circ|$ pequeñas, del sistema perturbado (3) con

$$|g(t,y)| \leq \lambda(t)|y| \ ,$$

para y en una vecindad del origen y $t \in I_a$, tienden a cero cuando

$t \to \infty$ bajo la condición

$$t^{-1} \int_a^t \lambda \to 0 \qquad \text{si} \quad t \to \infty .$$

Y más generalmente, si λ satisface la condición

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \nu(t)^{-1} \int_a^t \lambda(s)ds = \sigma$$

para alguna función ν tal que

$$\lim_{t\to\infty} t \cdot \nu(t)^{-1} > \sigma \cdot M$$

con M dado por (13).

4. En esta sección veremos como el comportamiento del campo $f(t,x)$ en el infinito permite obtener algunas conclusiones sobre el sistema original y simplifica su estudio.

<u>Teorema 4</u>: Supongamos que cuando $t \to \infty$, $f(t,x) \to r(x)$ uniformemente en x perteneciente a una vecindad del origen. Supongamos además que

$$x' = r(x) \quad \text{y} \quad u' = r_x(x(t,t_o,x_o))u \qquad (r \in C^1(D))$$

son h-A.E., donde h satisface (13). Entonces,

$$x' = f(t,x)$$

es asintóticamente estable en el infinito (en el sentido de Teorema 2).

<u>Demostración</u>: Dado $\varepsilon > 0$, existe T tal que para $t \geq T$ se tiene

$$h(t)\{c|x_o|h(t_o)^{-1} + \int_{t_o}^{t} h(s)^{-1}|f(s,x(s)) - r(x(s))|ds\} < \varepsilon/2$$

y para x suficientemente pequeño

$$p(t,x) := |f(t,x) - r(x)| < \varepsilon/2M ,$$

donde M está dado por (13).

Así, aplicando fórmula de Alekseev (4) al sistema perturbado

$$x' = r(x) + \{f(t,x) - r(x)\}$$

uno obtiene para $t \geq T$ y $|x(t,t_o,x_o)|$ suficientemente pequeño que

$$|x(t,t_o,x_o)| \leq c|x_o|h(t)h(t_o)^{-1} + h(t)\int_{t_o}^{T} h(s)^{-1}p(s,x(s))ds +$$

$$+ h(t)\int_{T}^{t} h(s)^{-1}p(s,x(s))ds$$

$$< \varepsilon .$$

Resultan prácticos los siguientes refinamientos,probados del mismo modo, de Teorema 4.

Teorema 5: Supongamos que cuando $t \to \infty$, $\lambda(t)^{-1}f(t,x) \to r(x)$ uniforme - mente en x perteneciente a una vecindad del origen, donde λ es alguna función positiva y contínua definida en I_a. Supongamos que

$$x' = \lambda(t)r(x) \quad y \quad u' = \lambda(t)r_x(x(t,t_o,x_o)) \qquad (r \in C^1(D))$$

son h-A.E., donde h satisface (13) y

(14) $$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, h(t) \int_a^t h(s)^{-1}\lambda(s)ds < \infty .$$

Entonces,

$$x' = f(t,x)$$

es asintóticamente estable en el infinito.

<u>Teorema 6</u>: Supongamos que

$$\lim_{t\to\infty} f(t,x) - r(t,x) \equiv 0$$

uniformemente en x perteneciente a una vecindad del origen y que

(15) $$z' = r(t,z) \qquad (r \in C^1(I_a \times D))$$

y

$$u' = r_x(t,x(t,t_o,x_o))u$$

son h-A.E., donde h satisface (13). Entonces

(16) $$x' = f(t,x)$$

es asintóticamente estable en el infinito

Bien, y para finalizar la sección hacemos notar que la condición

$$|f(t,x) - r(t,x)| \leq \lambda(t)|x| \qquad (\lambda \in L_1(I_a))$$

válida para $t \in I_a$ y x en una vecindad del origen, establece que (15) y (16) son equivalentes, i.e. si uno de ellos es h-A.E., con h satisfaciendo (13), entonces el otro también lo es.

5. En esta sección damos un criterio que permite asegurar que un sistema

$$x' = f(t,x) \ , \qquad f(t,0) \equiv 0$$

es h-A.E. para alguna función h . Recordemos que por Teorema 3 ésto es así, con $h = k_\varepsilon$, cuando el sistema variacional con respecto a la solución cero

$$(7) \qquad z_o' = f_x(t,0)z_o$$

es h-A.E. Veamos cómo podemos asegurar que este sistema sea h-A.E. para alguna función h . Necesitamos la llamada norma logarítmica de Lozinskii [5]:

$$\mu(A(t)) = \lim_{\eta \to 0^+} \frac{|I + \eta A(t)| - 1}{\eta} \ ,$$

donde $A(t)$ es una matriz e I denota la matriz identidad. Esta norma logarítmica depende de la norma $|\ |$ usada para la matriz. Por ejemplo, si

$$|A| = \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \ ,$$

que corresponde a la norma vectorial $|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, entonces

$$\mu(A) = \max_k \{\operatorname{Re} a_{kk} + \sum_{i \neq k} |a_{ik}|\} \ ,$$

mientras que si

$$|A| = \max\{\lambda^{1/2} / \lambda \text{ es valor propio de } A^*A\} \ ,$$

que corresponde a la norma euclideana, entonces

$$\mu(A) = \text{máx}\{\lambda/\lambda \ \text{ es valor propio de } \ \frac{1}{2}(A + A^*)\} \ .$$

Lo interesante de este concepto, es que permite estimar la norma de una matriz fundamental, en términos de la matriz del campo en la situación variable en t , a saber:

Lema (Lozinskii). La matriz fundamental $\phi(t,t_o)$ del sistema lineal

$$z' = A(t)z$$

tal que $\phi(t_o,t_o) = I$ satisface

$$|\phi(t,t_o)| \leq \exp \int_{t_o}^{t} \mu(A(s))ds \ .$$

Teniendo en cuenta este lema, la condición

$$(17) \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{h(t)\mu(f_x(t,0))}{h'(t)} < \infty$$

para alguna función diferenciable h , asegura que (7) es h-A.E. Esta condición incluye condición (10) de [5].

Bien, si (17) sucede, entonces el sistema (7) es h-A.E. y el sistema original (1) es k_ε-A.E. Pero, también necesitamos

$$|\phi(t,t_o,x_o)| \leq ck_\varepsilon(t)k_\varepsilon(t_o)^{-1}$$

o, equivalentemente, que

$$(6) \qquad z' = f_x(t,x(t,t_o,x_o))z$$

sea k_ε-A.E. Esto es cierto si (7) es h-A.E. y h satisface (13), pués al ser

$$(1) \qquad x' = f(t,x)$$

estable, dado $\varepsilon > 0$, es posible escoger $|x(t,t_o,x_o)|$ suficientemente pequeño para tener que

$$|f_x(t,x(t,t_o,x_o)) - f_x(t,0)| < \varepsilon$$

para todo $t \geq t_o$, así que una nueva aplicación de Teorema 3, establece que (6) es, al igual que (1), k_ε-A.E.

Resumiendo,

<u>Teorema 7</u>: Supongamos que (17) sucede o que, por lo tanto, el sistema variacional con respecto a la solución cero

$$z_o' = f_x(t,0)z_o$$

es h-A.E., entonces

$$x' = f(t,x)$$

es k_ε-A.E. Si además h satisface (13) y $\varepsilon < M^{-1}$ con M dado por (13), entonces

$$z' = f_x(t,x(t,t_o,x_o))z$$

es también k_ε-A.E. para x_o suficientemente pequeño.

Este teorema nos permite obtener los siguientes resultados sobre distintos tipos de perturbaciones combinadas.

Corolario 1: Suponga que los sistemas (1) y (6) son h-A.E., que para y en una vecindad del origen y $t \in I_a$:

$$|g_1(t,y)| \leq \lambda(t)|y| , \qquad \lambda \in L_1(I_a) ,$$

y

$$|g_2(t,y)| \leq \varepsilon|y| , \qquad 0 < \varepsilon \text{ constante.}$$

Entonces

$$y' = f(t,y) + g_1(t,y) + g_2(t,y)$$

es k_ε-A.E. (k_ε como en Teorema 3). En particular, si h satisface (13) y $\varepsilon < M^{-1}$, donde M está dado por (13), entonces todas las soluciones con condiciones iniciales $|y_\circ|$ pequeñas de este sistema tienden a cero cuando $t \to \infty$.

Corolario 2: Supongamos que los sistemas (1) y (6) son h-A.E. con h satisfaciendo (12) y (13)

$$\varliminf_{t\to\infty} h(t)e^{M^{-1}t} > 0 ,$$

donde M está dado por (13).

Supongamos que g_1 y g_2 sean como en Corolario 1 y que

$$|g_3(t,y)| \leq \gamma(t) , \qquad \int_s^{s+1} \gamma(t)dt \to 0 \quad \text{si} \quad s \to \infty ,$$

para y en una vecindad del origen y $t \in I_a$.

Entonces, si $2\varepsilon < M^{-1}$

$$y' = f(t,y) + g_1(t,y) + g_2(t,y) + g_3(t,y)$$

es asintóticamente estable en el infinito.

<u>Demostración</u>: El sistema

$$u' = f(t,u) + g_1(t,u) + g_2(t,u)$$

es k_ε-A.E. por Teorema 1 y por Teorema 7 sus sistemas variacionales son $k_{2\varepsilon}$-A.E. Ahora, por Observación 2(d), $k_{2\varepsilon}$ satisface (12) y (13) y, por lo tanto, Teorema 2 es aplicable, i.e. es posible perturbar este último sistema y obtener el resultado.

Notemos finalmente que, por Teorema 7, en Corolario 1 y 2 la hipó - tesis de que (1) y (6) sean h-A.E. puede ser cambiada a que simplemente (7) sea h-A.E. y por lo tanto, a que se verifique (16), y la conclusión se mantiene intacta reemplazando ε por 2ε y 3ε respectivamente. Más aún, pedir que (6) sea h-A.E. es aparentemente superfluo, pues si (1) es h-A.E. entonces, por sección 2, (7) lo es y, por Teorema 7, (6) es k_ε-A.E. No obstante, para ciertos sistemas, como los lineales, si (1) es h-A.E., entonces (6) es también h-A.E., no sólo k_ε-A.E., lo que permite mayor libertad.

6. Para terminar, mencionemos algunos beneficios adicionales de los resultados logrados. Primeramente, la particularización de éstos al caso lineal genera nueva información acerca de sistemas lineales (ver PINTO [3]). Las estimaciones de las soluciones obtenidas, algunas de ellas sin mayores restricciones sobre la función h , proporciona información sobre

REFERENCIAS

[1] CAMPBELL, S.: The exponential representation of operator valued differentiable inner functions. J. Diff. Eq. 12 (1972), 455-461.

[2] MARTIN, J.: On the exponential representation of solution of linear differential equations. J. Diff. Eq. 4 (1968), 257-279.

[3] PINTO, M.: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Apuntes de clases. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas. 1981.

[4] STRAUSS, A., y YORKE, J.: Linear perturbations of ordinary differential equations. Proceedings of the Am. Math. Soc. Vol. 26, N° 2, 255-260 (1970)

[5] LAKSHMIKANTHAM, V., y LEELA, S.: Differential and integral inequalities. Vol. 1. Academic Press New York 1969.

[6] BRAUER, F.: Perturbations of nonlinear systems of differential equations II. J. Math. Anal. Appl. 17, 418-434 (1967).

[7] COPPEL, W.: Stability and asymptotic behavior of differential equations. Heath, Boston, 1965.

[8] PACHPATTE, B.G.: A note on Gronwall-Bellman inequality. J. Math. Anal. Appl. 44, 758-762 (1973).

[9] PACHPATTE, B.G.: Stability and asymptotic behavior of perturbed non linear systems. J. Diff. Eq. 16, 14-25 (1974).

[10] BRAUER, F.: Perturbations of nonlinear systems of differential equations I. J. Math. Anal. Appl. 14, 198-206 (1966).

[11] PINTO, M.: Perturbations of asymptotic stable differential systems. Por aparecer en Analysis.

[12] PINTO, M.: On exponential representation of a fundamental matrix. Publicaciones Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias. Serie Preprints N° 6, pág. 1-6.

[13] PINTO, M.: Asymptotic integration of second order linear differential equations. Publicaciones Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias. Serie Preprints N° 10, Diciembre 1983.