SOBRE LA UNICIDAD DE SOLUCIONES SEGUNDO BOUND STATE DE UNA ECUACIÓN NOLINEAL

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Valeria Sáez Gómez

Diciembre, 2011

Directoras de Tesis:
Dra. Marta García-Huidobro
Dra. Cecilia Yarur Said

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Valeria Sáez Gómez

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día de Diciembre de 2011.

Directoras de Tesis

Dra. Marta García-Huidobro Campos

Dra. Cecilia Yarur Said

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Gonzalo Robledo Veloso

Dr. Manuel Pinto

AGRADECIMIENTOS

Mi más profundo agradecimiento a mis profesoras guías, por la confianza que depositaron en mi todo este tiempo. Les agradezco la dedicación y paciencia junto al cariño que me brindaron en cada momento. A la profesora Cecilia Yarur por las extensas conversaciones, por su comprensión y sus palabras. A la profesora Marta García-Huidobro por su energía y calidez, y porque me enseñó que hay que ser disciplinado y trabajador. En ambas siempre vi su incansable y continuo esfuerzo.

Mi agradecimiento a mis compañeros de trabajo y queridos amigos Germán y José, por la capacidad de enfrentarse a los retos y superar todo tipo de obstáculos. Un equipo que movió las piezas para que yo pudiese finiquitar este momento. Gracias a mis amigas, Pauli, Vale, Kari, Ceci, Eve y Ale por aportar solo cosas positivas a mi vida.

A mis padres, hermanas y abuelos por su inagotable amor y apoyo en los buenos y en los malos momentos. Por los sacrificios que ellos han debido hacer para que yo llegue donde estoy ahora.
Por último a César que acompaña día a día mi vida, quien ha recorrido junto a mi todos estos años de estudios, los que por momentos han sido buenos y otros no tanto. Por todos los sueños que tenemos en mente y que creemos poder cumplir. Esta es solo una meta más en nuestro camino.

Índice

Capítulo 1
Introducción

En esta tesis se discutirá la unicidad de cierto tipo de soluciones para el problema

$$\Delta_m u + f(u) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \tag{1.1}$$

donde $\Delta_m(u) := div(|\nabla u|^{m-2}\nabla u)$, $n > m$, denota el operador m-Laplaciano y la función $f \in C(-\infty, \infty)$ es impar.

Las soluciones radiales de (1.1) satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} (r^{n-1}|u'|^{m-2}u')' + r^{n-1}f(u) = 0, \quad r = |x|, \\ u'(0) = 0 \quad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Es esta tesis sólo estudiaremos la unicidad de estas soluciones. Usualmente en la literatura son las soluciones radiales las que se estudian, debido a que en el caso $m = 2$ todas las soluciones positivas son radiales. Si $m \neq 2$ este resultado es un problema abierto.

En la literatura en inglés cualquier solución no constante de (1.2) se llama "bound state". Si además $u(r) > 0$ para $r > 0$, la solución se llama "ground state" o "primer bound state". Si una solución no es un ground state, entonces tendrá por lo menos un cero. A este tipo de soluciones las llamaremos soluciones que cruzan o soluciones del tipo crossing.

En este trabajo estudiaremos la unicidad de las soluciones de (1.2) que tienen exactamente un cero en $(0,\infty)$. Nos referiremos a estas soluciones como "segundo bound state".

Haremos ésto bajo los siguientes supuestos sobre m y la función f: Sea $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

(f_1) $f(0)=0$, y existe $b \geq 0$ tal que $f(s) > 0$ para $s > b$, y si $b > 0$, $f(s) \leq 0$, $f(s) \not\equiv 0$, para $s \in [0,b]$.

(f_2) f es continua en $\mathbb{R}$ y diferenciable en $[b,\infty)$.

(f_3) $(m-1)f(u) \leq f'(u)(u-b)$, para todo $u \geq b$. Si $b=0$ asumimos además que

$$m-1 < \lim_{s\to 0} \frac{sf'(s)}{f(s)}.$$

(f_4) La función $u \to \frac{uf'(u)}{f(u)}$ es decreciente en (b,∞),

(f_5) $\frac{\beta f'(\beta)}{f(\beta)} \leq \frac{n(m-1)}{n-m}$, donde β es la solución positiva de $F(x)=0$. Si $b=0$ supondremos que

$$\frac{sf'(s)}{f(s)} \leq \frac{n(m-1)}{n-m} \quad \text{para todo} \quad s > 0.$$

Notemos que la condición (f_3) implica que f es creciente si $u \geq b$. Esta condición (f_3) se llama condición de superlinealidad de f.

La condición (f_5) se conoce como condición sub- Serrin y en el caso del problema de unicidad para el ground state se sabe que esta condición puede ser mejorada por la condición siguiente:

$$\left(\frac{F}{f}\right)'(s) \geq \frac{n-m}{nm}, \quad s > \beta,$$

ver [10]. El ejemplo canónico de función f que satisface (f_1)-(f_2) es $f(s) = s^p - s^q$ con $0 < q < p$, $p > 1$. Los métodos utilizados para estudiar la unicidad de (1.1) nos permiten además estudiar la unicidad del problema de Dirichlet-Newman (ver por ejemplo [24], [25])

$$
\begin{aligned}
&(r^{n-1}|u'|^{m-2}u')' + r^{n-1}f(u) = 0,\ r > 0,\ n > m > 1 \\
&u'(0) = 0, \quad \text{existe} \quad 0 < R < \bar{R} \quad \text{tal que} \quad u(r) > 0 \quad \text{si} \quad r \in (0, R), \\
&u(R) = 0, u(r) < 0 \quad \text{para} \quad r \in (R, \bar{R}),\ u(\bar{R}) = u'(\bar{R}) = 0.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Para probar nuestros resultados, estudiaremos el comportamiento de las soluciones del problema de valor inicial,

$$
\begin{aligned}
&(r^{n-1}|u'|^{m-2}u')' + r^{n-1}f(u) = 0, \quad r > 0,\ n > m \geq 2 \\
&u(0) = \alpha,\ u'(0) = 0,
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

para $\alpha \in (0, \infty)$. Probaremos que este problema de valor inicial tiene una única solución para cada $\alpha > 0$ mientras éste no alcance un cero doble, y denotaremos tal solución por $u(r, \alpha)$. Además haremos un estudio integro del comportamiento de u con respecto de su condición inicial α.

El problema (1.2) para el caso $m = 2$ ha sido exhaustivamente estudiado durante los últimos treinta años por diversos autores, entre ellos C. Coffman, quien en [5] consideró $f(s) = s^p - s^q$ para el caso $p = 3$ y $q = 1$ en dimensión 3, y demostró la unicidad de soluciones del tipo ground state de $\Delta u - u + u^3 = 0$.
Más adelante, en [1] H. Berestycki y P. Lions proponen continuar el estudio de unicidad , considerando distintos tipos de función f. Algunos de estos casos fueron también considerados por Coffman. En este mismo trabajo Berestycki y Lions prueban la existencia de soluciones radialmente simétricas para el caso en que f es una función par, para ello utilizan métodos variacionales.

En el año 1986 C. Jones y T. Kupper en [17] usan sistemas dinámicos y el índice de Conley para probar existencia de soluciones del tipo ground state.
Posteriormente K. Mcleod y J. Serrin en [20] mejoran los resultados obtenidos por Coffman en [5] al considerar funciones f más generales que incluyen el caso $f(s) = s^p - s$ para $1 < p < n/(n-2)$. Luego M. K. Kwong en el año 1989, ver [18], extiende este resultado para $1 < p < (n+2)/(n-2)$. Todos estos trabajos aún asumen diferenciabilidad de f en $[0, \infty)$. L. Peletier y J. Serrin en [22, 23] prueban un importante resultado de separación monótona y establecen unicidad de una solución positiva ground state considerando f una función localmente Lipschitz en $(0, \infty)$.

En el año 1991 C. C. Chen y C. S. Lin en [3], prueban la unicidad de una solución ground state del problema (1.1) para el caso $m = 2$ considerando $f \in \mathcal{C}^1[0, \infty)$ y $f(0) = 0$. En el año 1996 C. Cortázar, P.Felmer y M. Elgueta en [7,8] logran extender estos resultados para f continua en $[0, \infty)$, $f(0) = 0$ y localmente Lipschitz en (b, ∞) bajo los supuestos (f_3) y (f_4). Esto se consigue con una combinación de argumentos de [5, 18, 22, 23].

En el año 1998 los autores P. Pucci y J. Serrin en [24] prueban unicidad del ground state considerando un operador más general, que incluye el m-laplaciano, bajo los supuestos $f(s) < 0$ para $s \in (0, b)$, $f(s) > 0$ para $s \in (b, \infty)$, y $f \in L^1_{loc}(0, \delta) \cap \mathcal{C}^1(0, \infty)$ y la condición (subcrítica) $\left(\frac{F}{f}\right)'(s) \geq \frac{n-m}{mn}$ para $(0, \infty) - \{b\}$. Mencionamos a continuación el trabajo de J. Serrin y M. Tang, ver [26], donde establecen la unicidad de las soluciones tipo ground state de (1.2) para $f \in \mathcal{C}(0, \infty) \cap \mathcal{C}^1(b, \infty)$ que satisfacen (f_1)-(f_5). Este trabajo es el más completo en la literatura para $f(s) = s^p - s^q$. Además debemos mencionar la tesis de D. Henao que trata la unicidad de soluciones radiales positivas de $\Delta_m u + +K(|x|)f(u) = 0$, para el caso superlineal [16]. Hasta donde sabemos existen muy poco trabajos publicados sobre el problema de unicidad de soluciones de (1.2) del tipo segundo bound state. El primer trabajo al respecto es de W. Troy, ver [27], en el año 2005. En este trabajo el autor considera el caso $m = 2$ y

$$f(s) = \begin{cases} u+1 & u \leq -\frac{1}{2}, \\ -u & -\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ u-1 & u \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Es decir, f es lineal a trozos. Más tarde, en [10], C. Cortazar, M. García-Huidobro y C. Yarur extendieron sus resultados al caso de una no linealidad f general, que satisface (f_1)-(f_5) con $m = 2$. Finalmente en 2010 las mismas autoras establecieron la unicidad de soluciones bound state en algunos casos con más de un cambio de signo, para la misma ecuación, considerando además el caso sublineal, ver [11].

En esta tesis probaremos la unicidad de soluciones segundo bound state para el caso del operador m laplaciano, generalizando así los resultados obtenidos en [10] para el operador 2 laplaciano. Seguimos las mismas ideas desarrolladas en [10] y destacamos que el mérito de esta generalización se encuentra no sólo en los cálculos, que son sin duda más complicados y engorrosos, sino también en la **adecuada elección** de ciertos funcionales que son clave para la demostración de nuestros resultados.

Nuestros resultados principales son los siguientes:

Teorema 1.1. *Supongamos que f satisface (f_1)-(f_5) con $b > 0$. Entonces los problemas (1.2) y (1.3) tienen a lo más una solución no trivial.*

Teorema 1.2. *Supongamos que f satisface (f_1)-(f_5) y sea $0 < \alpha_1 < \alpha_2$,* $u_1(r) := u(r, \alpha_1)$, $u_2(r) := u(r, \alpha_2)$.

(i) Si $b = 0$*, entonces los problemas* (1.2) *y* (1.3) *no tienen soluciones no triviales.*

(ii) Si u_1 *tiene dos ceros* $0 < R_1 < \bar{R}_1$ *con* $u_1(r) > 0$ *en* $(0, R_1)$ *y* $u_1(r) < 0$ *en* $(R_1, \bar{R}_1)$*, entonces* u_2 *tiene al menos dos ceros en* $(0, \bar{R}_1)$*,* $0 < R_2 < \bar{R}_2$ *con* $R_1 > R_2$*,* $\bar{R}_1 > \bar{R}_2$*,* $u_2(r) > 0$ *en* $(0, R_2)$ *y* $u_2(r) < 0$ *en* $(R_2, \bar{R}_2)$*.*

Además

$$u_1'(\bar{R}_1) < u_2'(\bar{R}_2).$$

(iii) Sea $b > 0$*. Si* u_1 *es solución de* (1.2)*, entonces* u_2 *tiene al menos dos ceros* $0 < R_2 < \bar{R}_2$ *con* $R > R_2$*,* $u_2 > 0$ *en* $(0, R_2)$ *y* $u_2 < 0$ *en* $(R_2, \bar{R}_2)$*.*

Teorema 1.3. *Supongamos que* f *satisface* (f_1)*-*(f_5)*. Dado* $\rho > 0$*, el problema*

$$(r^{n-1}|u'|^{m-2}u')' + r^{n-1}f(u) = 0, \quad r > 0,\ n > m,$$

$$u'(0) = 0,\ u(\rho) = 0,$$

tiene a lo más una solución u *tal que existe* $R \in (0, \rho)$ *tal que*

$$u(r) > 0,\ r \in (0, R),\ u(R) = 0,\ u(r) < 0, \quad \textit{para} \quad R < r < \rho.$$

Para probar los teoremas, utilizaremos una serie de resultados de comparación entre soluciones del problema de valor inicial (1.4), en alguna vecindad de α^*, donde $u(\cdot, \alpha^*)$ es un segundo bound state.

Esta tesis se dividirá en cuatro partes. En el segundo capítulo discutimos aspectos preliminares como definiciones y técnicas que utilizaremos en el proceso de demostrar los teoremas principales. En el tercer capítulo demostraremos algunos teoremas de comparación de soluciones del problema de condición inicial, que serán fundamentales para la demostración de los teoremas principales. En la sección 1 de este capítulo seguiremos las ideas de Coffman, ver [5], y utilizaremos la función $\varphi(r, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} u(r, \alpha)$ para estudiar los puntos de intersección entre dos soluciones del problema de valor inicial en $[b, \alpha]$. En esta parte nos ayudaremos de los supuestos (f_4) y (f_5) que nos permitirán dar una buena comparación entre soluciones en $u = b$. En la sección 2 de este capítulo veremos el caso $b > 0$. En la primera subsección consideraremos el funcional $\widetilde{W}$ definido por

$$\widetilde{W}(s, \alpha) = r^{\frac{n-1}{m-1}}(s, \alpha) \sqrt[m]{|u'(r(s, \alpha), \alpha)|^m + m'F(s)},$$

donde $r(s, \alpha)$ denota la inversa de u antes del mínimo. Aquí seguimos las ideas de [22, 23] para estudiar el comportamiento de las soluciones en el intervalo $[-\beta, \alpha]$, y de esto resultará una comparación adecuada al momento de cruzar $-\beta$.

En la segunda subsección introducimos el funcional $P(s, \alpha)$, que por primera vez fue introducido por L.Erbe y M. Tang en [12]. Este funcional esta definido por

$$P(s, \alpha) = -2n \cdot \left(\frac{F}{f}\right) \cdot \frac{r^{n-1}}{r' \cdot |r'|^{m-2}} - r^n \cdot \left[2\frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{|r'|^m} + 2F(s)\right].$$

Aquí extenderemos las ideas de P. Pucci, J. Serrin y M. Tang en [24,26] para comparar dos soluciones en el intervalo $[U_m, -\beta]$ antes del mínimo, donde $U_m(\alpha) = u(R_m(\alpha), \alpha)$ y $R_m(\alpha) := \inf\{r > R(\alpha) : u'(r, \alpha) = 0\}$ y $R(\alpha)$ es el primer cero de u. En esta parte el funcional P nos ayudará a comparar las soluciones. En la tercera subsección vemos el comportamiento de las soluciones en el intervalo $[U_m, -b]$ después del mínimo utilizando las mismas ideas anteriores. Finalmente en la última parte de esta sección trabajaremos con las ideas de B. Franchi, E. Lanconelli y J. Serrin en [13] introduciendo el funcional W definido por

$$W(s, \alpha) = \bar{r}^{\frac{1}{m-1}}(s, \alpha) \sqrt[m]{|u'(\bar{r}(s, \alpha), \alpha)|^m + m'F(s)},$$

donde $\bar{r}(s, \alpha)$ denota la inversa de u después del mínimo.

En la última sección de este capítulo mencionamos sin demostración las proposiciones análogas anteriores para el caso $b = 0$.

Finalmente en el Capítulo cuatro demostraremos nuestros resultados.

Capítulo 2

Resultados preliminares

El objetivo de esta sección es establecer varias propiedades de las soluciones del problema de valor inicial

$$(r^{n-1}\phi_m(u'(r)))' + r^{n-1}f(u(r)) = 0$$
$$u(0) = \alpha \qquad u'(0) = 0, \tag{2.1}$$

donde por comodidad de la notación hemos introducido la función $\phi_m(s) := |s|^{m-2}s$, $s \neq 0$ y $\phi_m(0) = 0$. Los resultados que se enunciarán en la primera sección se pueden encontrar en [14] por lo que se omitirán detalles técnicos de modo que el lector centre su atención en los resultados obtenidos particularmente para el problema de esta tesis, las cuales serán expuestos en la sección 2.

2.1 Teorema de existencia local

En esta sección podremos demostrar existencia local del problema (2.1). Para definir la solución $u(r, \alpha)$ como la única solución del problema con condición inicial $u(0, \alpha) = 0$ y la continuidad con respecto a las condiciones iniciales damos el siguiente teorema. Consideramos relevante formular por escrito la demostración de algunos hechos básicos que a veces se dan por sentado. La idea es hacer una presentación de los resultados lo más completa posible. Para esta sección nos basamos en [14]. Para demostrar existencia escribimos la ecuación (2.1) como una ecuación integral y hacemos uso del teorema del punto fijo de Schauder [15].

Teorema 2.1 (Teorema de Existencia Local). *Dados $t_0 \geq 0$, v_0 y ρ_0 arbitrarios con $\rho_0 = 0$ si $t_0 = 0$, existe $T > t_0$ y una solución $v(t)$ del problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned} -(t^{n-1}\phi_m(v'(t)))' &= t^{n-1}f(v(t)) \\ v(t_0) &= v_0 \\ v'(t_0) &= \rho_0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

definida en $[t_0, T)$. En particular, si $t_0 = 0$ y $T > 0$ lo suficientemente pequeño es posible garantizar que el problema (2.1) tiene una solución definida $[0, T)$.

Demostración. Sea c un real positivo arbitrario. Llamemos $\mathcal{C}$ al conjunto de funciones

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{C}[t_0, T] : \|v - v_0\|_\infty \leq c\}$$

donde T es un valor que pronto elegiremos y $||\cdot||_\infty$ denota la norma estándar en el espacio de Banach $\mathcal{C}[t_0, T]$ de funciones reales continuas definidas en $[t_0, T]$,

$$\|v\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, T]} |v(r)|.$$

$\mathcal{C}$ es cerrado y convexo. Definimos sobre $\mathcal{C}$ el operador $\mathcal{T}$ dado por

$$\mathcal{T}[v](t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \phi_{m'}\left(\frac{t_0^{n-1}}{s^{n-1}}\phi_m(\rho_0) - \int_{t_0}^{s} \frac{\tau^{n-1}}{s^{n-1}} f(v(\tau))d\tau\right) ds,$$

donde $\phi_{m'}$ es la función inversa de ϕ_m, con $m' = \frac{m}{m-1}$, es decir, $\phi_{m'}(s) = |s|^{m'-2}s$, $\phi_{m'}(0) = 0$. Demostraremos que $\mathcal{T}$ tiene un punto fijo, que es la solución buscada al problema de valores iniciales.

Usando la continuidad y la monotonía de $\phi_{m'}$ en $(-\infty,\infty)$, la continuidad de f, el hecho que toda función $v\in\mathcal{C}$ permanece en el intervalo acotado $[v_0-c, v_0+c]$ y la monotonía de t^{n-1} deducimos la existencia de $M>0$ tal que $|f(v(t))|\leq M$ para toda $v\in\mathcal{C}$, $t\in[t_0,T]$, que $\mathcal{T}$ está bien definido, y que

$$|\mathcal{T}[v](r)-v_0| \leq \int_{t_0}^{T}\phi_{m'}(|\rho_0|^{m-1}+M(T-t_0))ds \tag{2.3}$$

$$= (T-t_0)\{|\rho_0|^{m-1}+M(T-t_0)\}^{m'-1}. \tag{2.4}$$

Pediremos a T únicamente que el lado derecho de la igualdad anterior está acotado por c, de modo que $\mathcal{T}(\mathcal{C})\subset\mathcal{C}$ (no hay problema en imponer esto puesto que M es independiente de la elección de T).

Para aplicar el teorema de Schauder debemos verificar que $\mathcal{T}$ sea continuo y que $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ sea relativamente compacto. Consideremos una sucesión $\{v_k\}$ de funciones en $\mathcal{C}$. Sean $t_1,t_2\in[t_0,T]$, $t_1<t_2$. Como $\|v_k\|_\infty\leq\|v_0\|+c$, y f es continua, existe M tal que $\|f(v_k)\|_\infty\leq M$ para todo k. Luego de (2.3), $\{\mathcal{T}[v_k]\}$ es uniformemente acotada. Así

$$|\mathcal{T}[v_k](t_1)-\mathcal{T}[v_k](t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{t_0^{n-1}}{s^{n-1}}\phi_m(\rho_0)-\int_{t_0}^{s}\frac{\tau^{n-1}}{s^{n-1}}f(v(r))d\tau\right|^{m'-1}ds$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2}(|\rho_0|^{m-1}+M(s-t_0))ds \leq (|\rho_0|^{m-1}+MT)|t_2-t_1|,$$

ρ_0 y M independientes de k, luego la familia $\{\mathcal{T}[v_k]\}$ es equicontinua. Apelando al teorema de Arzelà-Ascoli se tiene que toda sucesión de $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{C}$, porque $\mathcal{C}$ es cerrado.

Finalmente, demostraremos la continuidad de $\mathcal{T}$. Sean $v\in\mathcal{C}$ y $\{v_k\}\subset\mathcal{C}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty}\|v_k-v\|_\infty=0.$$

Considerando que

$$\mathcal{T}[v_k](t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \phi_{m'}\left(\frac{t_0^{n-1}}{s^{n-1}}\phi_m(\rho_0) - \int_{t_0}^{s}\frac{\tau^{n-1}}{s^{n-1}}f(v_k(\tau))d\tau\right)ds,$$

todas las expresiones están uniformemente acotadas con respecto a k y la integración se realiza sobre intervalos finitos, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para intercambiar dos veces el límite con el signo integral y concluir que $\mathcal{T}[v_k]$ converge puntualmente a $\mathcal{T}[v]$ en $[t_0, T]$ cuando $k \to \infty$. Usando esto y que toda sucesión en $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ tiene un punto límite en $\mathcal{C}$ obtenemos que $\{\mathcal{T}[v_k]\}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente a $\mathcal{T}[v]$ en $[t_0, T]$; sin embargo, como el mismo argumento es válido no sólo para $\{\mathcal{T}[v_k]\}$ sino también para cualquiera de sus subsucesiones, podemos establecer que la sucesión completa converge a $\mathcal{T}[v]$.

Por el Teorema del punto fijo de Schauder, existe $v \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{T}[v] = v$. Como $v \in \mathcal{C}$ entonces v es continua en $[0, T]$. A partir de la expresión

$$v(t) = v_0 - \int_{t_0}^{t} \phi_{m'}\left(\frac{t_0^{n-1}}{s^{n-1}}\phi_m(\rho_0) - \int_{t_0}^{s}\frac{\tau^{n-1}}{s^{n-1}}f(v(\tau))d\tau\right)ds,$$

se obtiene que $v(t_0) = v_0$. Se obtiene también que $v \in C^1[0, T)$ y de

$$v'(t) = \phi_{m'}\left(\frac{t_0^{n-1}}{s^{n-1}}\phi_m(\rho_0) - \int_{t_0}^{s}\frac{\tau^{n-1}}{t^{n-1}}f(v(\tau))d\tau\right)ds,$$

se obtiene, usando que $\phi_{m'} \circ \phi_m = id$, que $v'(t_0) = \rho_0$, ($v'(0) = 0$ si $t_0 = 0$). Así,

$$t^{n-1}\phi_m(v') = t_0^{n-1}\phi_m(\rho_0) - \int_{t_0}^{t}\tau^{n-1}f(v(\tau))d\tau,$$

y por lo tanto, derivando una vez más, se infiere que $t^{n-1}\phi_m(v') \in C^1[0, T]$, que $\lim_{t\to 0^+} t^{n-1}\phi_m(v'(t)) = 0$, y que

$$(t^{n-1}\phi_m(v'))' = -t^{n-1}f(v(t)),$$

como deseábamos.

□

Observación 2.1. *Argumentos clásicos de la teoría de EDO, ver por ejemplo [4], permiten probar que tal solución se puede continuar de manera única mientras* $(u(r), u'(r)) \neq (0,0)$.

En efecto,

1. *De [25] el problema de valor inicial*

$$(r^{n-1}\phi_m(u'(r)))' + r^{n-1}f(u(r)) = 0$$
$$u(0) = \alpha \qquad u'(0) = 0$$

tiene solución única mientras $u(r) > \beta$.

2. *Si* $u'(r_0) < 0$ *y* $u \in (b, \beta)$

$$\begin{cases} u' = \phi_{m'}(v) \\ v' = -\frac{n-1}{r}v - f(u) \end{cases}$$

$u(r_0) > b$ *y* $v(r_0) = \rho_0 < 0$,

$$F(r,u,v) = \left(\phi_{m'}(v), -\frac{n-1}{r}v - f(u)\right).$$

Tiene unicidad ya que el lado derecho es continuo en $(r,(u,v))$, $r > 0$ *y Lipschitz en* (u, v).

3. *Para estudiar el problema cuando* u *cruza el valor* b *o el valor* 0, *se analiza la ecuación que satisface la inversa*

$$(m-1)t'' = \frac{n-1}{t}|t'|^2 - f(s)|t'|^{m+1}$$

$$\begin{cases} t' = z \\ z' = \frac{n-1}{m-1}\frac{z^2}{t} - f(s)t^{m+1}. \end{cases}$$

Si $s = b$, $t(b) = t_0 > 0$ *y* $z(b) = z_0 < 0$

$$F(s,t,z) = \left(z, \frac{n-1}{m-1}\frac{z^2}{t} - f(s)t^{m+1}\right)$$

en torno de $(b,(t_0,z_0))$ es Lipschitz en (t,z) y es continua en $(s,(t,z))$. Lo mismo vale en $s=0$.

2.2 Algunas definiciones importantes

Se estudiarán ahora algunas propiedades generales de las soluciones del problema de valor inicial (1.2) que nos permitirán hacer de ellas una clasificación en términos de la cual podrán expresarse adecuadamente tanto el problema del que se ocupa el presente trabajo como la manera en que este problema ha sido enfrentado.

Definamos el funcional

$$I_m(r,\alpha) = |u'(r,\alpha)|^m + m'F(u(r,\alpha)) \quad \text{donde} \quad m' = \frac{m}{m-1} \quad \text{y} \quad F(s) = \int_0^s f(t)dt,$$

que jugará un rol fundamental en nuestro trabajo.

Un simple cálculo nos dice que

$$I_m'(r,\alpha) = -m'\frac{n-1}{r}|u'|^m$$

En efecto, si se deriva una vez esta función con respecto a la variable r se obtiene,

$$I_m'(r,\alpha) = m'u'(|u'(r,\alpha)|^{m-2}u')' + m'f(u(r,\alpha))u'$$

y así reemplazando la ecuación 1.2 se obtiene que

$$I_m'(r,\alpha) = m'\left(u'\left(-\frac{n-1}{r}|u'|^{m-2}u' - f(u)\right)\right) + m'f(u(r,\alpha))u'$$

y así

$$I_m'(r,\alpha) = -m'\frac{(n-1)}{r}|u'|^m \tag{2.5}$$

Se puede notar que si $n > 1$, se tiene que I_m es decreciente en r.

Nota: En algunas ocasiones, para simplificar el cálculo escribiremos $u(r,\alpha) = u$ y $u'(r,\alpha) = u'$.

En los siguientes lemas estudiamos el comportamiento de una solución con condición inicial α, con $\alpha < b$ o $\alpha > b$.

Lema 2.2.1. *Si $\alpha < b$ entonces $u' \geq 0$, en una vecindad derecha de $r = 0$, es decir, en $r = 0$ se tiene un mínimo.*

Demostración. De la ecuación

$$-(r^{n-1}|u'|^{m-2}u')' = r^{n-1}f(u(r)),$$

vemos que si $u(0) \in (0, b)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(u(r)) < 0$ para $r \in (0, \delta)$, luego

$$-r^{n-1}|u'|^{m-2}u' = \int_0^r t^{n-1}f(u(t))dt < 0, \quad \text{para} \quad r \in (0, \delta),$$

de donde $|u'|^{m-2}u' > 0$ para $r \in (0, \delta)$ y como $|u'|^{m-2}u'$ es creciente, se deduce que $u'(r) > 0$ para $r \in (0, \delta)$. □

Lema 2.2.2. *Si $\alpha \in (b, \infty)$ en $r = 0$ se tiene un máximo. Además $u'(r) < 0$ mientras $u(r) \geq 0$ y $r > 0$.*

Demostración. De la ecuación y la condición $u'(0) = 0$ se tiene por integración que

$$-r^{n-1}|u'|^{m-2}u' = \int_0^r s^{n-1}f(u)ds > 0,$$

en $r \in (0, r_b)$ donde $u(r_b) = b$ y por lo tanto $u' < 0$ en $(0, r_b]$.

Sea $\bar{r}$ el primer cero de u' después de $r = 0$, claramente $r > r_b$.

Veremos que $u'(\bar{r}) \leq 0$. Si $u(\bar{r}) \in (0, b)$, $(|u'|^{m-2}u')'(\bar{r}) = -f(u(\bar{r})) > 0$, luego $|u'|^{m-2}u'$ crece en una vecindad de $\bar{r}$, y como $u'(\bar{r}) = 0$, se tiene que $u'(r) > 0$ en una vecindad izquierda de $\bar{r}$, lo que es una contradicción. □

Lema 2.2.3. *Si $\alpha \leq \beta$ entonces u nunca se anula.*

Demostración. Recordemos que $I_m(r) = |u'(r)|^m + m'F(u(r))$ es decreciente en r. Si consideramos $r > 0$ entonces $I_m(r) < I_m(0) = |u'(0)| + m'F(u(0)) = m'F(\alpha)$ y $F(\alpha) < 0$ por lo tanto, $I_m(r) < 0$. Entonces u nunca es cero, es decir, no existe $0 < R \leq \infty$ tal que $u(R) = 0$, ya que en tal R

$$0 > I_m(R) = |u'(R)|^m + F(u(R)) = |u'(R)|^m > 0.$$

□

Por el lema anterior, consideraremos sólo valores de α mayores que β. Entonces existe $s > 0$ tal que $u(r, \alpha)$ está definida en $[0, s)$ y por el lema 2.2.1 y el lema 2.2.2 se tiene que $u(r, \alpha) > 0$ y $u'(r, \alpha) < 0$ para todo $r \in (0, s)$. Esto nos permite definir para $\alpha > \beta$,

$$R(\alpha) := \sup\{s > 0 \quad / \quad u(r, \alpha) > 0 \quad \text{y} \quad u'(r, \alpha) < 0 \quad \text{para todo} \quad r \in (0, s)\}.$$

Siguiendo las ideas de Peletier - Serrin ver [22], (ver también [7], [10]) definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{\alpha : u(R(\alpha), \alpha) = 0 \quad y \quad u'(R(\alpha), \alpha) < 0\} \\ \mathcal{G} &= \{\alpha : u(R(\alpha), \alpha) = 0 \quad y \quad u'(R(\alpha), \alpha) = 0\} \\ \mathcal{P} &= \{\alpha : u(R(\alpha), \alpha) > 0\}. \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathcal{N}$ decimos que las soluciones $u(r, \alpha)$ son del tipo crossing y si $\alpha \in \mathcal{G}$ diremos que las soluciones $u(r, \alpha)$ son del tipo ground state.

Los conjuntos $\mathcal{N}$ y $\mathcal{P}$ son abiertos y si $\mathcal{N} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{N} = (a, \infty)$ para algún $a > \beta$. Si nuestros problemas (1.2) y (1.4) tienen solución, entonces $\mathcal{N} \neq \emptyset$.

Sea

$$\mathcal{F}_1 = \{\alpha \in \mathcal{N} : u'(r, \alpha) < 0 \quad \forall r > 0\}.$$

Para $\alpha \notin \mathcal{F}_1$ se define

$$R_m(\alpha) := \text{ínf}\{r > R(\alpha) : u'(r,\alpha) = 0\},$$

y $U_m(\alpha) = u(R_m(\alpha), \alpha)$. Si $\alpha \in \mathcal{F}_1$, definimos $R_m(\alpha) = \infty$.

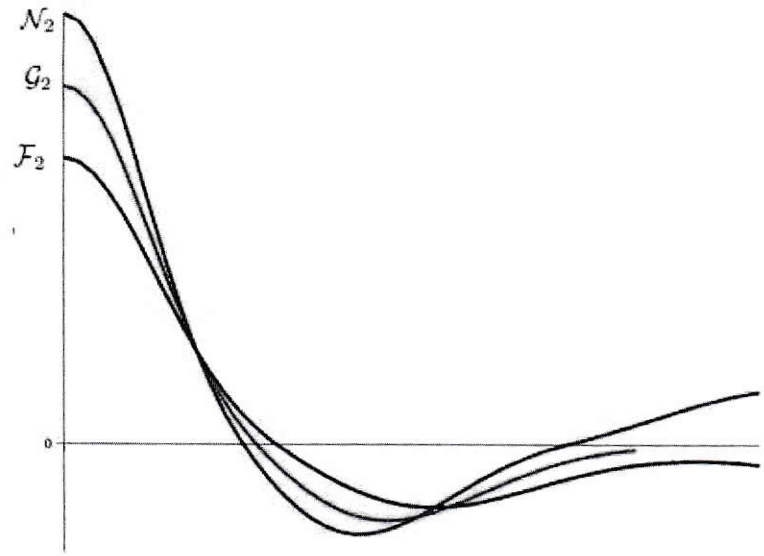
También para $\alpha \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{F}_1$ definimos

$$\bar{R}(\alpha) := \sup\{r > R_m(\alpha) \quad / \quad u(s,\alpha) < 0 \quad y \quad u'(s,\alpha) > 0 \quad \forall s \in (R_m, r)\}$$

y $\bar{U}(\alpha) := u(\bar{R}(\alpha), \alpha)$. Finalmente, siguiendo las ideas en [10] ponemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 &= \{\alpha \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{F}_1 : u(\bar{R}(\alpha), \alpha) < 0\} \\
\mathcal{N}_2 &= \{\alpha \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{F}_1 : u(\bar{R}(\alpha), \alpha) = 0 \quad u'(\bar{R}(\alpha), \alpha) > 0\} \\
\mathcal{G}_2 &= \{\alpha \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{F}_1 : u(\bar{R}(\alpha), \alpha) = 0 \quad u'(\bar{R}(\alpha), \alpha) = 0\} \\
\mathcal{P}_2 &= \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2.
\end{aligned}$$

En la siguiente figura se ilustran los gráficos de la solución $u(\cdot, \alpha)$. Para $\alpha \in \mathcal{N}_2$, $\bar{R}(\alpha)$ es un cero simple de u, para $\alpha \in \mathcal{G}_2$, $\bar{R}(\alpha)$ es o bién un cero doble de u, o $u(r,\alpha) \to 0$ cuando $r \to \infty$, y si $\alpha \in \mathcal{F}_2$, $u(\bar{R}(\alpha), \alpha) < 0$ y $u'(\bar{R}(\alpha), \alpha) = 0$.



Proposición 2.1. *Sea $\alpha \in \mathcal{P}_2$, u solución del problema* (1.1) *y* (1.4) *y bajo los supuestos* (f_1)-(f_4) *entonces, si $\bar{R}(\alpha) = \infty$ se tiene*

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\alpha) = -b \qquad \lim_{r\to\infty} u'(r,\alpha) = 0.$$

Demostración. Como u es eventualmente monótona (decreciente para todo $r > 0$ si $\alpha \in \mathcal{F}_1$ y creciente en $(R_m(\alpha), \infty)$ si $\alpha \in \mathcal{F}_2$), existe un L tal que $\lim_{r\to\infty} u(r,\alpha) = L$. Como I_m es decreciente, acotado y además $F(s) \to \infty$ si $s \to \pm\infty$ se tiene

$$\lim_{r\to\infty} I_m(r,\alpha) = \lim_{r\to\infty} |u'(r,\alpha)|^m + m' \lim_{r\to\infty} F(u(r,\alpha)),$$

entonces, $\lim_{r\to\infty} F(u(r,\alpha))$ es finito, luego $\lim_{r\to\infty} u(r,\alpha)$ es finito, así L es finito y como I_m decrece, se tiene $\lim_{r\to\infty} u'(r,\alpha) = 0$.

Por otra parte, notemos que aplicando la regla de L'Hôpital dos veces, se concluye que

$$0 = \lim_{r\to\infty} \frac{u(r,\alpha)-L}{r^{m'}} = -\lim_{r\to\infty} \frac{|u'(r,\alpha)| r^{\frac{n-1}{m-1}}}{m' r^{m'-1} r^{\frac{n-1}{m-1}}} = -\left[\lim_{r\to\infty} \frac{(r^{n-1}|u'|^{m-1})'}{(m' r^n)'}\right]^{\frac{1}{m-1}}$$
$$= -\left[\frac{f(L)}{m'n}\right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

Luego $f(L) = 0$, y así $L = -b$ por la imparidad de f y, $\lim_{r\to\infty} u(r,\alpha) = -b$. Con esto se completa la demostración. □

A continuación demostraremos que los conjuntos $\mathcal{N}_2$ y $\mathcal{P}_2$ son conjuntos abiertos.

Proposición 2.2. *Los conjuntos $\mathcal{N}_2$ y $\mathcal{P}_2$ son abiertos.*

Demostración. Que $\mathcal{N}_2$ es abierto es por la continuidad de la condición inicial y se hace como [8].

La demostración de que $\mathcal{P}_2$ es abierto se basa en el hecho que I_m es decreciente en r y $\alpha \in \mathcal{P}_2$ si y sólo si $\alpha \in \mathcal{N}$ y $I_m(r_1,\alpha) < 0$ para algún $r_1 \in (0, T(\alpha)]$ donde $T(\alpha) = \bar{R}(\alpha)$ si $\alpha \in \mathcal{F}_2$ y $T(\alpha) = \infty$ si $\alpha \in \mathcal{F}_1$.

Sea $\alpha \in \mathcal{P}_2$ y $\bar{R}(\alpha) = \infty$,

$$\lim_{r\to\infty} I_m(r,\alpha) = \lim_{r\to\infty} |u'(r,\alpha)|^m + \lim_{r\to\infty} m'F(u(r,\alpha)),$$

entonces

$$\lim_{r\to\infty} I_m(r,\alpha) = m'F(-b) < 0,$$

así $\lim_{r\to\infty} I_m(r,\alpha) < 0$, luego como I_m es decreciente, $I_m(r_1,\alpha) < 0$ para algún $r_1 \in (0,\infty)$.

Si $\bar{R}(\alpha) < \infty$, es decir $\alpha \in \mathcal{F}_2$, se tiene que $\bar{R}(\alpha)$ es un máximo con $u(\bar{R}(\alpha),\alpha) < 0$, $(u(\bar{R}(\alpha),\alpha) \neq -b$, por unicidad) y de la ecuación se tiene que $0 \geq (|u'|^{m-2}u')'(\bar{R}(\alpha)) = -f(u(\bar{R}(\alpha),\alpha))$ y por lo tanto $-b < u(\bar{R}(\alpha),\alpha) < 0$, luego

$I_m(\bar{R}(\alpha), \alpha) = m'F(u(\bar{R}(\alpha), \alpha)) < 0.$

Inversamente debemos probar que si $\alpha \in \mathcal{N}$ y $I_m(r_1, \alpha) < 0$ para $r_1 \in (0, T(\alpha))$ entonces $\alpha \in \mathcal{P}_2$.

Supongamos que $\alpha \notin \mathcal{P}_2$ y $\alpha \in \mathcal{N}$ entonces $\alpha \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$.

- Si $\alpha \in \mathcal{G}_2$ entonces

  $$I_m(\bar{R}(\alpha), \alpha) = m'F(0) = 0,$$

  entonces $I_m(\bar{R}(\alpha), \alpha) = 0$.

  Por otro lado como I_m es decreciente se tiene que, para todo $r < \bar{R}(\alpha)$ se cumple

  $$I_m(\bar{R}(\alpha), \alpha) < I_m(r, \alpha),$$

  y con esto se llega al resultado.

- Si $\alpha \in \mathcal{N}_2$ entonces $I_m(\bar{R}(\alpha), \alpha) > 0$ y utilizando el que I_m es decreciente se tiene que

  $$0 < I_m(\bar{R}(\alpha), \alpha) < I_m(r, \alpha) \quad para \quad todo \quad r \in (0, \bar{T}(\alpha)).$$

En conclusión si $\alpha_0 \in \mathcal{P}_2$ entonces existe $r_1(\alpha_0)$ tal que $I_m(r_1, \alpha_0) < 0$ para $r_1 \in (0, T(\alpha)]$. Como I_m es continua en α_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que $I_m(r_1, \alpha) < 0$ para todo $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$. $\square$

Proposición 2.3. *Sea* $\alpha^* \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$. *Entonces existe* $\delta_0 > 0$ *tal que* $(\alpha^* - \delta_0, \alpha^* + \delta_0) \subseteq \mathcal{N} - \mathcal{F}_1$.

Demostración. Dado que $\alpha^* \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$, existe $\tau > R_m(\alpha^*)$ tal que $u'(\tau, \alpha^*) > 0$. Por continuidad existe $\delta_0 > 0$ tal que $u'(\tau, \alpha) > 0$ para todo $\alpha \in (\alpha^* - \delta_0, \alpha^* + \delta_0)$, entonces $\tau > R_m(\alpha)$ para todo $\alpha \in (\alpha^* - \delta_0, \alpha^* + \delta_0)$. así $(\alpha^* - \delta_0, \alpha^* + \alpha_0) \subseteq \mathcal{N} - \mathcal{F}_1$. $\square$

Ahora estudiaremos el comportamiento de las soluciones del problema de valor inicial (1.4). Con este fin, $\alpha^* \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$ está fijo y $\alpha \in (\alpha^* - \delta_0, \alpha^* + \delta_0)$ donde $\delta_0 > 0$ esta dado en la proposición 2.3. Entonces

$$u(\cdot, \alpha) : [0, R_m(\alpha)] \to [U_m(\alpha), \alpha]$$

es invertible con inversa $r(\cdot, \alpha)$, y

$$u(\cdot, \alpha) : [R_m(\alpha), \bar{R}(\alpha)) \to [U_m(\alpha), \bar{U}(\alpha)),$$

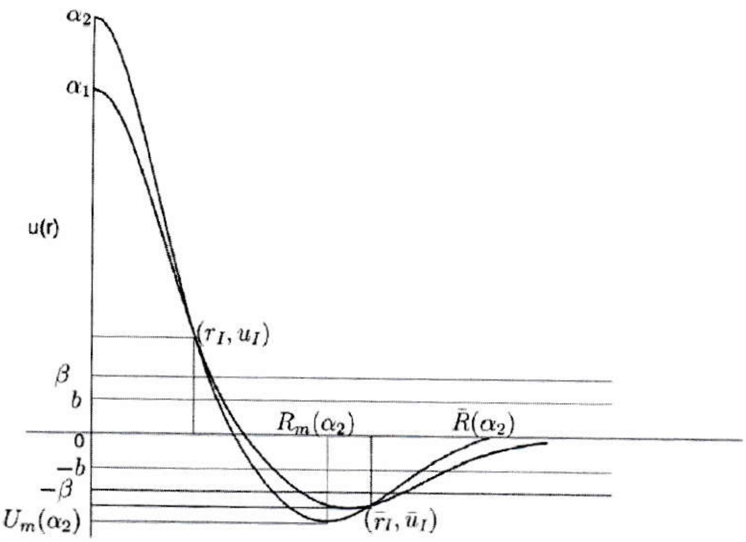
es también invertible con inversa $\bar{r}(\cdot, \alpha)$.

Capítulo 3
Comparando Soluciones

Recordamos que las propiedades de $u(\cdot, \alpha)$ estudiadas en el cápitulo anterior serán fundamentales para lo que sigue.

Ahora nos concentraremos en el comportamiento de las soluciones dependiendo de donde varía $u(r, \alpha)$. Es decir, partiremos estudiando para $u \in [b, \alpha]$, $[-\beta, b]$ antes del mínimo, $[U_m, -\beta]$ antes del mínimo donde U_m es un mínimo de u, $[U_m, -\beta]$ después del mínimo y $[-\beta, 0]$.

A continuación ilustramos en un gráfico, ver también [10], las propiedades relativas a la intersección de dos soluciones del problema de valor inicial para α en una vecindad suficientemente pequeña de $\alpha^* \in \mathcal{G}_2$. El punto (r_I, U_I) es el asegurado por la proposición 3.1 y el punto $(\bar{r}_I, \bar{U}_I)$ el asegurado por el lema 3.2.4.



3.1 Comportamiento de soluciones en $[b, \alpha]$

Bajo los supuestos (f_1) y (f_2), y para $\alpha \in (b, \infty)$, las funciones $u(r, \alpha)$ y $u'(r, \alpha)$ son de clase $\mathcal{C}^1$ en

$$\vartheta = \{(r, \alpha) : \alpha \in (b, \infty) \quad y \quad r \in [0, r(b, \alpha)]\},$$

por lo tanto para $(r, \alpha) \in \vartheta$ se define

$$\varphi(r, \alpha) = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(r, \alpha), \quad ' = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Entonces, ver [14, 16], φ satisface la ecuación diferencial lineal

$$(m-1)(r^{n-1}|u'|^{m-2}\varphi')' + r^{n-1}f'(u)\varphi = 0, \quad n > m, \tag{3.1}$$

$$\varphi(0, \alpha) = 1, \quad \varphi'(0, \alpha) = 0.$$

Denotaremos $\varphi(r) = \varphi(r, \alpha) \quad y \quad r(b, \alpha) = R_b$. Usaremos la función φ para estudiar los posibles puntos de intersección de dos soluciones $u(r, \alpha_1)$ y $u(r, \alpha_2)$ para α_1, α_2

suficientemente cercanos entre sí. En efecto, si $\varphi(r^*, \alpha^*) = 0$, como $\varphi'(r^*, \alpha^*) \neq 0$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $r^- < r^* < r^+$ tal que

$$\varphi(r^-, \alpha^*) > 0 > \varphi(r^+, \alpha^*).$$

Por continuidad, existe $\delta > 0$,

$$\varphi(r^-, \alpha) > 0 > \varphi(r^+, \alpha) \quad \text{para todo} \quad \alpha \in V_\delta(\alpha^*). \tag{3.2}$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in V_\delta(\alpha^*)$, como

$$u(r, \alpha_1) - u(r, \alpha_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(r, \alpha) d\alpha.$$

y de (3.2) se tiene $u(r^-, \alpha_1) - u(r^-, \alpha_2) > 0$ y $u(r^+, \alpha_1) - u(r^+, \alpha_2) < 0$, luego se tiene que existe un punto de intersección de $u(\cdot, \alpha_1)$ y $u(\cdot, \alpha_2)$ en (r^-, r^+).

En nuestra siguiente proposición demostraremos que gracias a la condición de superlinealidad de f, para cualquier $\alpha > \beta$, la función φ efectivamente se anula en $(0, R_b]$, y por lo tanto, dados $\alpha_1, \alpha_2 > \beta$ suficientemente cercanos, $u(r, \alpha_1)$ y $u(r, \alpha_2)$ se intersectan antes de cruzar el valor b. Más adelante, en el lema 3.2.4 demostraremos que φ debe también anularse después del mínimo de u y antes de que u cruce el valor $-b$, asegurando así la existencia de un segundo punto de intersección entre dos soluciones cuyas condiciones iniciales son suficientemente cercanas.

Proposición 3.1. *Sea f que satisface (f_1)-(f_3). Entonces φ tiene el primer cero en $z \in (0, R_b]$. Además, si $b = 0$, entonces $z \in (0, R_b)$ y por lo tanto $u(z, \alpha) > 0$.*

Demostración. Si $\varphi(r) > 0$ en $(0, R_b)$ probaremos que $\varphi(R_b) = 0$ y así se cumple la proposición. Consideremos la ecuación

$$((m-1)r^{n-1}|u'|^{m-2}\varphi')' + r^{n-1}f'(u)\varphi = 0,$$

multiplicando la ecuación por $(u-b)$ se tiene

$$\int_0^{R_b}(u-b)((m-1)r^{n-1}|u'|^{m-2}\varphi')'dr+\int_0^{R_b}(u-b)r^{n-1}f'(u)\varphi dr=0,$$

luego integrando por partes sobre $(0,R_b)$, nos queda

$$-\int_0^{R_b}u'(m-1)r^{n-1}|u'|^{m-2}\varphi'dr+\int_0^{R_b}(u-b)r^{n-1}f'(u)\varphi dr=0,$$

porque

$$(u(R_b)-b)((m-1)r^{n-1}|u'(R_b)|^{m-2}\varphi'(R_2))=0.$$

Una segunda integración por partes resulta

$$-u'(R_b)(m-1)R_b^{n-1}|u'(R_b)|^{m-2}\varphi(R_b)-(m-1)\int_0^{R_b}r^{n-1}f(u)\varphi dr$$
$$+\int_0^{R_b}(u-b)r^{n-1}f'(u)\varphi dr=0.$$

Reordenando tenemos

$$\int_0^{R_b}(f'(u)(u-b)-(m-1)f(u))\varphi r^{n-1}dr=(m-1)u'(R_b)R_b^{n-1}\varphi(R_b)|u'|^{m-2}(R_b). \quad (3.3)$$

Usando ahora (f_3), $f'(u)(u-b)-(m-1)f(u)\geq 0$ para $r\in(0,R_b)$, y que $u'(R_b)<0$, se deduce que $\varphi(R_b)=0$. Si $b=0$, entonces por (f_3) se tiene que el lado izquierdo de (3.3) es estrictamente positivo, y así $\varphi(R_b)<0$, lo que es una contradicción, luego $z\in(0,R_b)$. □

Proposición 3.2. *Sea f que satisface (f_1)-(f_4). Entonces z es el único cero de φ en $(0,R_b]$. Supongamos que f satisface (f_5). Si se cumple que $b=0$ o $b>0$ y $U_z\geq\beta$, donde $U_z=u(z,\alpha)$ entonces $\varphi'(R_b)\leq 0$.*

Demostración. Si $U_z=b$ se tiene $z=R_b$, entonces $\varphi'(R_b)\leq 0$. Supongamos que $U_z>b$, queremos demostrar que

$$\frac{U_zf'(U_z)}{f(U_z)}>m-1.$$

1. Si $b > 0$, de (f_3) se tiene

$$(m-1)f(s) \leq f'(s)(s-b),$$

como $b > 0$ se tiene $(m-1)f(s) \leq f'(s)(s-b) \leq f'(s)(s)$ luego

$$(m-1)f(U_z) \leq f'(U_z)(U_z - b) < f'(U_z)(U_z),$$

y por lo tanto

$$(m-1) < \frac{f'(U_z)U_z}{f(U_z)}.$$

2. Si $b = 0$, supongamos que existe un primer valor $s_0 \in (0, \alpha)$ tal que

$$s_0 f'(s_0) = f(s_0)(m-1),$$

de (f_4) se tiene que la función $s \to \frac{sf'(s)}{f(s)}$ es decreciente en $(0, \infty)$, luego para $s \geq s_0$ se tiene

$$\frac{sf'(s)}{f(s)} \leq \frac{s_0 f'(s_0)}{f(s_0)} = m - 1,$$

entonces $\frac{sf'(s)}{f(s)} \leq m-1$ para todo $s \geq s_0$ pero esto contradice (f_3), salvo que

$$\frac{sf'(s)}{f(s)} = m - 1, \tag{3.4}$$

para todo $s \geq s_0$, con esto notemos lo siguiente:

$$((m-1)r^{n-1}|u'|^{m-2}\varphi')' + r^{n-1}f'(u)\varphi = 0$$

$$\varphi(0) = 1 \quad \varphi'(0) = 0$$

$$(r^{n-1}|u'|^{m-2}u')' + r^{n-1}f(u) = 0 \tag{3.5}$$

$$u(0) = \alpha \quad u'(0) = 0,$$

cambiando f de la ecuación (3.4) en (3.5) se tiene

$$((m-1)r^{n-1}|u'|^{m-2}\varphi')' + r^{n-1}f'(u)\varphi = 0$$

$$\alpha\varphi(0) = \alpha \quad \varphi'(0) = 0$$

$$(r^{n-1}|u'|^{m-2}u')' + r^{n-1}\frac{f'(u)}{m-1}u = 0$$

$$u(0) = \alpha \quad u'(0) = 0.$$

Entonces $\alpha\varphi(r) = u(r)$ para todo $r \in (0, r_0)$ y $u(r_0) = s_0$.

Como $u(r) > 0$ para todo $r \in (0, r_0)$ entonces $\varphi(r) > 0$ para todo $r \in (0, r_0)$ y así, si $r_0 < z$ entonces $u(r_0) > u(z)$ y $s_0 > U_z$ entonces

$$m - 1 = \frac{s_0 f'(s_0)}{f(s_0)} \leq \frac{U_z f'(U_z)}{f(U_z)},$$

esto implica

$$m - 1 \leq \frac{U_z f'(U_z)}{f(U_z)}.$$

Supongamos que se cumple $m - 1 = \frac{U_z f'(U_z)}{f(U_z)}$ y consideremos $U_z < s < s_0$ entonces

$$m - 1 \leq \frac{s f'(s)}{f(s)} = \frac{U_z f'(U_z)}{f(U_z)} = m - 1,$$

luego $\frac{sf'(s)}{f(s)} = m - 1$ en (U_z, s_0) pero s_0 es el menor valor que cumple esta igualdad.

De la parte (1) y (2) se puede concluir que

$$\frac{U_z f'(U_z)}{f(U_z)} > m - 1,$$

esto implica que existe un $c > 0$ tal que

$$\frac{U_z f'(U_z)}{f(U_z)} = m - 1 + \frac{m}{c},$$

entonces si tomamos $g \circ u(r)$ donde $g(s) = \frac{sf'(s)}{f(s)}$ y se tiene

$$g(u(r)) = \frac{u(r)f'(u(r))}{f(u(r))},$$

y por (f_4), g es decreciente, de donde $g \circ u(r)$ es creciente.

Por lo tanto

$$r \to c\frac{u(r)f'(u(r))}{f(u(r))} - c(m+1) - m,$$

es creciente en el intervalo $(0, R_b)$.

Ahora consideremos la siguiente función

$$\phi(r) := f(u(r))\left(c\frac{u(r)f'(u(r))}{f(u(r))} - c(m+1) - m\right),$$

esta función es negativa en $(0, z)$ y positiva en (z, R_b).

Sea $v(r) = ru'(r) + cu(r)$. Entonces v satisface

$$((m-1)r^{n-1}|u'|^{m-2}v')' + r^{n-1}f'(u)v = \phi(r)r^{n-1},$$

y siempre que $\varphi(r)$ no cambie de signo en (z, r), con $r \in (z, R_b)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_0^r t^{n-1}\varphi(t)\phi(t)dt &= (m-1)\int_0^r ((t^{n-1}|u'|^{m-2}v')'\varphi - (t^{n-1}|u'|^{m-2}\varphi')'v)dt \\ &= (m-1)r^{n-1}|u'|^{m-2}(\varphi(r)v'(r) - \varphi'(r)v(r)), \end{aligned}$$

y así

$$\varphi(r)v'(r) - \varphi'(r)v(r) \leq 0, \tag{3.6}$$

lo que implica en particular que $v(z) \leq 0$. Ahora probemos que z es el único cero de φ. Supongamos que no, que existe un z_1 que es un segundo cero de φ, entonces por (3.6) se tiene que $v(z_1) \geq 0$, pero si $R_b > x > z$, $u(x) \geq 0$ y considerando que $\frac{ru'(r)}{u(r)}$ es decreciente en $(0, R_b)$, ver [8], se tiene

$$v(x) = u(x)\left(x\frac{u'(x)}{u(x)} + c\right) < u(x)\left(z\frac{u'(z)}{u(z)} + c\right) = \frac{u(x)}{u(z)}v(z) \leq 0,$$

contradiciendo que $v(z_1) \geq 0$ en $(0, R_b)$. Por lo tanto φ tiene un único cero en $(0, R_b]$.

Supongamos que f además satisface (f_5) y supongamos que o bien, $b = 0$ o $b > 0$ y $U_z \geq \beta$. Entonces por (f_4) y (f_5), se tiene que $c \geq \frac{n-m}{m-1}$ y así

$$v'(r) = \left(c - \frac{n-m}{m-1}\right) u'(r) - (m'-1) r \frac{f(u)}{|u'|^{m-2}} \leq -(m'-1) r \frac{f(u)}{|u'|^{m-2}} \leq 0,$$

para todo $r \in (0, R_b)$, por lo tanto evaluando (3.6) en $r = R_b$ se tiene que

$$\varphi(R_b) v'(R_b) - \varphi'(R_b) v(R_b) \leq 0,$$

y entonces $\varphi'(R_b) \leq 0$. $\square$

3.2 El caso $b > 0$

En esta sección estudiaremos el comportamiento de las soluciones en una vecindad de $\alpha^* \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$. Lo haremos mediante el análisis de las soluciones en el intervalo $[-\beta, b]$ antes del mínimo, $[U_m(\alpha), -\beta]$ antes y después del mínimo y $[-\beta, 0]$ después del mínimo.

Comportamiento en $[-\beta, b]$ antes del mínimo

Comenzaremos mostrando que existe una vecindad V de α^* tal que cualquier solución de (1.4) con $\alpha \in V$ tiene el primer valor mínimo $U_m(\alpha)$ en $r = R_m(\alpha)$ y satisface que $U_m(\alpha) < -\beta$.

Proposición 3.3. *Sea f que satisface (f_1)-(f_4) y sea $\alpha^* \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$ y $\delta_0 > 0$ como en la proposición 2.3. Entonces existe $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que*

$$U_m(\alpha) = u(R_m(\alpha), \alpha) < -\beta \quad \textit{para todo} \quad \alpha \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1).$$

Demostración. La hipótesis $\alpha^* \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$ implica que el funcional I_m definido anteriormente satisface que

$$I_m(\bar{R}(\alpha^*), \alpha^*) \geq 0,$$

y así $I_m(r, \alpha^*) > 0$ para todo $r \in (0, \bar{R}(\alpha^*))$ por ser I_m decreciente. Además de la continuidad de $R_m(\alpha)$ para $\alpha \in (\alpha^* - \delta_0, \alpha^* + \delta_0)$, y del hecho que

$$m'F(u(R_m(\alpha^*), \alpha^*)) = I_m(R_m(\alpha^*), \alpha^*) > 0,$$

se concluye que existe $\delta_1 \leq \delta_0$ tal que $u(R_m(\alpha), \alpha) < -\beta$, para todo $\alpha \in V_{\delta_1}(\alpha^*)$. $\square$

Sea $\delta_1 > 0$ como en la proposición anterior. Dados $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1)$, denotaremos

$$u_1(r) = u(r, \alpha_1), \quad u_2(r) = u(r, \alpha_2),$$

y

$$r_1(s) = r(s, \alpha_1), \quad r_2(s) = r(s, \alpha_2).$$

Para $\alpha \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1)$, consideraremos el funcional

$$\widetilde{W}(s, \alpha) = r^{\frac{n-1}{m-1}}(s, \alpha) \sqrt[m]{|u'(r(s, \alpha), \alpha)|^m + m'F(s)}, \quad s \in [U_m(\alpha), \alpha]$$

estableciendo por comodidad de la notación

$$\widetilde{W}_1(s) = \widetilde{W}(s, \alpha_1), \quad \widetilde{W}_2(s) = \widetilde{W}(s, \alpha_2).$$

Como I_m es decreciente en r, entonces si $r_2 < r_1$ se tiene $u_1 < u_2$ luego

$$|u'(r(u_1, \alpha), \alpha)|^m + m'F(u_1) < |u'(r(u_2, \alpha), \alpha)|^m + m'F(u_2),$$

entonces para $s \in [U_m(\alpha), \alpha]$ se tiene

$$|u'(r(U_m(\alpha), \alpha), \alpha)|^m + m'F(U_m(\alpha)) < |u'(r(s, \alpha), \alpha)|^m + m'F(s),$$

y como $U_m(\alpha) < -\beta$ entonces $F(U_m(\alpha)) > 0$ entonces

$$0 < |u'(r(s, \alpha), \alpha)|^m + m'F(s) \quad para \quad todo \quad s \in [U_m(\alpha), \alpha],$$

luego $\widetilde{W}(s, \alpha)$ está bien definida para todo $s \in [U_m(\alpha), \alpha]$. Y así se tiene el siguiente lema de separación.

Lema 3.2.1. *Supongamos que f satisface (f_1)-(f_4). Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1)$ con $\alpha_1 < \alpha_2$, y supongamos que existe un $U \in [0, \beta]$ tal que*

$$r_1(U) \geq r_2(U) \quad y \quad \widetilde{W}_1(U) < \widetilde{W}_2(U), \tag{3.7}$$

entonces

$$r_1(s) > r_2(s) \quad y \quad \widetilde{W}_1(s) < \widetilde{W}_2(s) \quad para\ todo \quad s \in [-\beta, U).$$

Demostración. De (3.7) podemos obtener fácilmente que $|r_1'(U)| > |r_2'(U)|$, y así $r_1 > r_2$ en alguna pequeña vecindad izquierda de U. Por lo tanto, existe $c \in [-\beta, U)$ tal que

$$\widetilde{W}_1 \leq \widetilde{W}_2, \quad r_1 > r_2, \quad r_1' < r_2' \quad en \quad [c, U).$$

Ahora mostraremos que $\widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_2$ es creciente en $[c, U)$. Esto implica que el ínfimo de tal c es $-\beta$ y así se concluye el lema. En efecto, de la definición de $\widetilde{W}(s, \alpha)$, después de aplicar derivada logarítmica y usando que

$$\frac{d}{dr}|u'|^m = m'u'(\phi_m(u'))' = m'u'\Big(-\frac{n-1}{r}\phi_m(u') - f(u)\Big)$$

y que $r_s := \frac{\partial}{\partial s} r(s, \alpha) = \frac{1}{u'}$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial s}(s,\alpha)}{\widetilde{W}(s,\alpha)} &= \frac{n-1}{m-1}\frac{r_s}{r} + \frac{1}{m}\frac{m'u'(\phi_m(u'))'r_s + m'f(s)}{(|u'|^m + m'F(s))} \\ &= \frac{n-1}{m-1}\Big(\frac{1}{ru'} - \frac{|u'|^m}{ru'(|u'|^m + m'F(s))}\Big) \\ &= \frac{n-1}{m-1}\frac{m'F(s)}{ru'(|u'|^m + m'F(s))}, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial s} = \frac{m'\frac{n-1}{m-1} r^{\frac{n-m}{m-1}}(s,\alpha)F(s)}{u'(r(s,\alpha),\alpha)\sqrt[m]{(|u'(r(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s))^{m-1}}}.$$

Así para $s \in [c, U)$, y usando que $\dfrac{1}{|u_1'(r_1(s))|} = -r_1'(s) > -r_2'(s) = \dfrac{1}{|u_2'(r_2(s))|}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{m-1}{m'(n-1)}\left(\frac{\partial \widetilde{W}_1}{\partial s}(s,\alpha) - \frac{\partial \widetilde{W}_2}{\partial s}(s,\alpha)\right)\\
&= F(s)\left(\frac{r_1^{\frac{n-m}{m-1}}(s)}{u_1'(r_1(s))\sqrt[m]{(|u_1'(r_1(s))|^m + m'F(s))^{m-1}}}\right)\\
&\quad -F(s)\left(\frac{r_2^{\frac{n-m}{m-1}}(s)}{u_2'(r_2(s))\sqrt[m]{(|u_2'(r_2(s))|^m + m'F(s))^{m-1}}}\right)\\
&\geq r_2^{\frac{n-m}{m-1}}(s)|F(s)|\left(\frac{1}{|u_1'(r_1(s))|\sqrt[m]{(|u_1'(r_1(s))|^m + m'F(s))^{m-1}}}\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{|u_2'(r_2(s))|\sqrt[m]{(|u_2'(r_2(s))|^m + m'F(s))^{m-1}}}\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in V_{\delta_1}(\alpha^*)$ y denotemos por (r_I, U_I) el punto de intersección de u_1 y u_2 asegurado por la proposición 3.2.

Proposición 3.4. *Si f satisface (f_1)-(f_5). Entonces existe un $\delta \in (0, \delta_1]$ tal que para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$ con $\alpha_1 < \alpha_2$ se tiene que*

$$r_1(s) > r_2(s) \quad y \quad \widetilde{W}_1(s) < \widetilde{W}_2(s), \quad para \quad todo \quad s \in [-\beta, U_{bI}),$$

donde

$$U_{bI} := \begin{cases} U_I & si\ U_I < \beta, \\ b & si\ U_I \geq \beta \end{cases}$$

Demostración. Sea $U_z = u(z, \alpha^*)$, donde z está dado en la proposición 3.1 y supongamos que $U_z < \beta$. Por continuidad existe un $\delta \leq \delta_1$ tal que para todo

$\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$ se tiene que $U_I < \beta$. Como $|r_1'(U_I)| > |r_2'(U_I)|$, se tiene que $\widetilde{W}_1(U_I) < \widetilde{W}_2(U_I)$, y el resultado se sigue por el lema 3.2.1 con $U = U_I$.

Supongamos ahora que $U_z \geq \beta$. Al derivar $u(r(s,\alpha),\alpha) = s$ con respecto de α se tiene

$$u'(r(s,\alpha),\alpha)\frac{\partial r}{\partial \alpha} + \varphi(r(s,\alpha),\alpha) = 0,$$

de donde

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(s,\alpha) = -\frac{\varphi(r(s,\alpha),\alpha)}{u'(r(s,\alpha),\alpha)}. \tag{3.8}$$

Aplicando nuevamente derivada logarítmica a

$$\widetilde{W} = r^{\frac{n-1}{m-1}} \sqrt[m]{|u'(r(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s)},$$

para derivar con respecto de α obtenemos

$$\frac{\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha}}{\widetilde{W}} = \frac{n-1}{m-1}\frac{\frac{\partial r}{\partial \alpha}}{r} + \frac{m'u'(\phi_m(u'))'r_\alpha + m\phi_m(u')u'_\alpha}{m(|u'(r(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s))}. \tag{3.9}$$

Reemplazando (3.8) en (3.9), usando la ecuación y reordenando se tiene

$$\frac{\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha}}{\widetilde{W}} = \frac{-\frac{n-1}{m-1}m'F(s) + f(u)\varphi u'r + |u'(r(s,\alpha),\alpha)|^{m-2}(u')^2\varphi' r}{ru'(|u'(r(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s))},$$

y finalmente

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha}(s,\alpha) = \frac{\frac{-(n-1)m'}{m-1}\varphi F(s) + f(u)\varphi u'r + |u'|^{m-2}(u')^2 r\varphi'}{u'(r(s,\alpha),\alpha)(|u'(r(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s))^{\frac{m-1}{m}}} r^{\frac{n-m}{m-1}}.$$

Evaluando ahora en $s = b$ obtenemos

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(b,\alpha) = -\frac{\varphi(R_b)}{u'(R_b,\alpha)} \leq 0,$$

y

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha}(b,\alpha) = \frac{\frac{-(n-1)m'}{m-1}\varphi(R_b)F(b) + |u'(R_b,\alpha)|^{m-2}(u'(R_b,\alpha))^2 R_b\varphi'(R_b)}{u'(R_b,\alpha)(|u'(R_b,\alpha)|^m + m'F(b))^{\frac{m-1}{m}}} R_b^{\frac{n-m}{m-1}}.$$

Usando que $\varphi(R_b) \leq 0$, $F(b) < 0$, $\varphi'(R_b) \leq 0$, $(\varphi(R_b), \varphi'(R_b)) \neq (0,0)$ y $u'(R_b) < 0$ concluimos que $\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha}(b, \alpha) > 0$. Así, si $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$ con $\alpha_1 < \alpha_2$ se tiene que

$$r_1(b) \geq r_2(b) \quad y \quad \widetilde{W}_1(b) < \widetilde{W}_2(b),$$

y el resultado se obtiene del lema 3.2.1 con $U = b$. $\square$

Comportamiento en $[U_m, -\beta]$ antes del mínimo

De ahora en adelante, supongamos que f satisface (f_1)-(f_5) y que $\delta > 0$ se ha fijado en la proposición 3.4.

Para $s \in (U_m(\alpha), -\beta]$ consideremos

$$\begin{aligned} P(s,\alpha) &= -2n \cdot \left(\frac{F}{f}\right) \cdot \frac{r^{n-1}}{r' \cdot |r'|^{m-2}} - r^n \cdot \left[2\frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{|r'|^m} + 2F(s)\right] \\ &= -2n \cdot \left(\frac{F}{f}\right) \cdot r^{n-1}\phi_m(u') - 2r^n \frac{|u'|^m}{m'} - 2r^n F(s), \end{aligned}$$

donde recordamos que $\phi_m(u') = |u'|^{m-2}u'$. Haciendo algunos cálculos obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} P'(s,\alpha) &= -2n\left(\frac{F}{f}\right)' r^{n-1}\phi_m(u') - 2n\left(\frac{F}{f}\right)(r^{n-1}\phi_m(u'))'\frac{1}{u'} - 2nr^{n-1}\frac{1}{u'}\frac{|u'|^m}{m'} \\ &\quad -2r^n\left(u'(\phi_m(u'))'\frac{1}{u'}\right) - 2nr^{n-1}\frac{1}{u'}F(s) - 2r^n f(s) \\ &= -2n\left(\frac{F}{f}\right)' r^{n-1}\phi_m(u') - 2n\left(\frac{F}{f}\right)(-r^{n-1}f(u))\frac{1}{u'} - 2nr^{n-1}\frac{1}{u'}\frac{|u'|^m}{m'} \\ &\quad -2r^n\left(-\frac{n-1}{r}\phi_m(u') - f(u)\right) - 2nr^{n-1}\frac{1}{u'}F(s) - 2r^n f(s) \\ &= -2n\left(\frac{F}{f}\right)' r^{n-1}\phi_m(u') - 2\frac{n(m-1)}{m}r^{n-1}\phi_m(u') + 2(n-1)r^{n-1}\phi_m(u'), \end{aligned}$$

luego

$$P'(s,\alpha) = 2n\left[\left(\frac{n-m}{nm}\right) - \left(\frac{F}{f}\right)'\right] \cdot \frac{r^{n-1}}{r'|r'|^{m-2}}. \tag{3.10}$$

Ahora consideraremos la siguiente proposición técnica.

Lema 3.2.2. *Supongamos* (f_3) - (f_5), *entonces se cumple*

$$(f_6) \qquad \left(\frac{F}{f}\right)' \geq \frac{n-m}{nm} \quad \textit{para todo} \quad s > \beta.$$

Demostración. De (f_3) sabemos que $f'(s) > 0$ para todo $s \geq \beta$ y por (f_4) se tiene

$$F(s) = \int_\beta^s f(t)dt = \int_\beta^s \frac{f(t)}{tf'(t)} tf'(t)dt$$

$$\leq \frac{f(s)}{sf'(s)} \int_\beta^s tf'(t)dt = \frac{f(s)}{sf'(s)}(sf(s) - \beta f(\beta) - F(s)).$$

Como $f(\beta) \geq 0$ se tiene

$$F(s)\left(1 + \frac{f(s)}{sf'(s)}\right) \leq \frac{f^2(s)}{f'(s)},$$

y esto implica que

$$s \to \frac{sf(s)}{F(s)}, \tag{3.11}$$

es decreciente en (β, ∞). Notemos que de (f_4) y (f_5)

$$\frac{sf'(s)}{f(s)} \leq \frac{n(m-1)}{n-m} \leq \frac{n(m-1)+m}{n-m},$$

para todo $s \in (\beta, \infty)$, así reordenando obtenemos

$$\frac{n-m}{m-n(1-m)} \cdot \frac{f'(s)}{f(s)} \leq \frac{1}{s},$$

integrando ambas partes se tiene

$$(f(s))^{\frac{n-m}{m-n(1-m)}} \leq s,$$

y así

$$s \to \frac{(f(s))^{\frac{n-m}{m-n(1-m)}}}{s} \tag{3.12}$$

es decreciente en (β, ∞). Multiplicando (3.11) y (3.12) se tiene

$$s \to \frac{(f(s))^{\frac{nm}{m-n(1-m)}}}{F(s)}$$

es decreciente en (β,∞). Por lo tanto,

$$\left(\frac{(f(s))^{\frac{nm}{m-n(1-m)}}}{F(s)}\right)' \leq 0,$$

y resolviendo la derivada de esta función obtenemos

$$\frac{\frac{nm}{m-n(1-m)}\cdot(f(s))^{\frac{nm}{m-n(1-m)}-1}f'(s)F(s)-(f(s))^{\frac{nm}{m-n(1-m)}+1}}{(F(s))^2} \leq 0,$$

y así

$$\frac{nm}{m-n(1-m)}\cdot(f(s))^{\frac{nm}{m-n(1-m)}-1}f'(s)F(s)-(f(s))^{\frac{nm}{m-n(1-m)}+1} \leq 0$$

luego

$$\frac{nm}{m-n(1-m)}\cdot(f(s))^{\frac{nm}{m-n(1-m)}-1}f'(s)F(s) \leq (f(s))^{\frac{nm}{m-n(1-m)}+1},$$

por lo tanto

$$\frac{nm}{m-n(1-m)}f'(s)F(s) \leq (f(s))^2,$$

y así

$$f'(s)F(s) \leq \frac{m-n(1-m)}{nm}(f(s))^2,$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{-m+n(1-m)}{nm}(f(s))^2 &\leq -f'(s)F(s)\\
\frac{n-m-nm}{nm}(f(s))^2 &\leq -f'(s)F(s)\\
\frac{n-m}{nm}(f(s))^2-(f(s))^2 &\leq -f'(s)F(s)\\
\frac{n-m}{nm}(f(s))^2 &\leq (f(s))^2-f'(s)F(s)\\
\frac{n-m}{nm} &\leq 1-\frac{f'(s)F(s)}{(f(s))^2}=\left(\frac{F}{f}\right)'(s).
\end{aligned}$$

□

Con este lema se tiene que:

Lema 3.2.3. *Supongamos* (f_3) - (f_5), *entonces* $P'(s,\alpha) \geq 0$ *para todo* $s \in (U_m(\alpha), -\beta]$.

Demostración. Como $r'(s) < 0$ para todo $s \in (U_m(\alpha), -\beta]$, por el lema anterior y (3.10) se tiene el resultado.

□

Sean ahora α_1, $\alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$, con $\alpha_1 < \alpha_2$ consideremos

$$P_1(s) = P(s,\alpha_1), \quad P_2(s) = P(s,\alpha_2)$$

$$U_{1m} = u_1(R_m(\alpha_1)), \quad U_{2m} = u_2(R_m(\alpha_2)).$$

de Erbe, Serrin y Tang ver [12] y [26] consideremos

$$S_{12}(s) = \frac{r_1^{n-1}|r_2'|^{m-2}r_2'}{r_2^{n-1}|r_1'|^{m-2}r_1'}(s).$$

Entonces de la definición de S_{12} y la ecuación (1.2) podemos deducir

$$S_{12}'(s) = S_{12}(s)f(s)(|r_2'|^m - |r_1'|^m)(s). \tag{3.13}$$

Proposición 3.5. *Para cada* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$, *con* $\alpha_1 < \alpha_2$, *tenemos que* $U_{1m} > U_{2m}$, $r_1 > r_2$ *y* $P_1 > P_2$ *en* $[U_{1m}, -\beta)$.
Además

$$P_1(U_{1m}) > P_2(U_{2m}).$$

Demostración. En primer lugar probaremos que $U_{1m} > U_{2m}$ y que para todo $s \in [U_{1m}, -\beta]$ tenemos

$$S_{12}(s) < 1, \quad |r_1'(s)| > |r_2'(s)| \quad r_1(s) > r_2(s). \tag{3.14}$$

De la proposición 3.4 y como $F(-\beta) = 0$ tenemos que

$$S_{12}(-\beta) \leq 1 \quad r_1(-\beta) > r_2(-\beta),$$

y así $r_1'(-\beta) < r_2'(-\beta)$. Además de (3.13) se tiene que $S_{12}(s)$ es creciente mientras $|r_1'(s)| > |r_2'(s)|$, para $s < -\beta$. Si (3.14) no se cumple para todos los $s \in (\text{máx}\{U_{1m}, U_{2m}\}, -\beta)$, entonces el punto más grande s_0 donde falla, debe ser cuando $|r_1'(s_0)| = |r_2'(s_0)|$, y $r_1(s_0) > r_2(s_0)$ implica que $S_{12} > 1$, lo que es una contradicción. Así por (3.14) se tiene que $U_{1m} = \text{máx}\{U_{1m}, U_{2m}\}$.

Ahora probaremos que $P_1 > P_2$ en $[U_{1m}, -\beta]$. Notemos que, de la definición de P se tiene que

$$(P_1 - P_2)(-\beta) = \frac{2}{m'}\left(\frac{r_2^n}{|r_2'|^m} - \frac{r_1^n}{|r_1'|^m}\right)(-\beta)$$

$$= \frac{2}{m'}\left(\frac{r_2^n}{|r_2'|^m}\left(1 - S_{12}^2\frac{r_2^{n-2}}{r_1^{n-2}}\right)\right)(-\beta) > 0.$$

Así de (f_6) y (3.14) se tiene que

$$(P_1 - P_2)'(s) = (S_{12}(s) - 1)2n\left(\left(\frac{n-m}{nm}\right) - \left(\frac{F}{f}\right)'(s)\right)\frac{r_2^{n-1}}{r_2'|r_2'|^{m-2}}(s) < 0,$$

de donde $P_1 > P_2$ en $[U_{1m}, -\beta]$. En particular, $P_1(U_{1m}) > P_2(U_{1m})$. Como $P_2' > 0$, tenemos que $P_2(U_{2m}) < P_2(U_{1m})$, y así $P_1(U_{1m}) > P_2(U_{2m})$ y terminamos la demostración. □

Comportamiento en $[U_m, -\beta]$ después del mínimo

Recordemos que para $\alpha \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$, se tiene que $u(r, \alpha)$ es estrictamente creciente en $[R_m(\alpha), \bar{R}(\alpha))$, y denotamos la inversa por $\bar{r}(s, \alpha)$.

Lema 3.2.4. *Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$ con $\alpha_1 < \alpha_2$. Si $\bar{r}_1(U_{1m}) < \bar{r}_2(U_{1m})$, entonces existe un primer punto $\bar{U}_I \in (U_{1m}, -b)$ tal que $\bar{r}_1(\bar{U}_I) = \bar{r}_2(\bar{U}_I)$ y $\bar{r}_1(s) < \bar{r}_2(s)$ para todo $s \in (U_{1m}, \bar{U}_I)$.*

Demostración. Multiplicando la ecuación (3.1) por $(u+b)$ se tiene

$$(m-1)(r^{n-1}|u'|^{m-2}\varphi'(u+b))' - (m-1)r^{n-1}|u'|^{m-2}u'\varphi' + r^{n-1}f'(u)(u+b)\varphi = 0,$$

luego

$$(m-1)[r^{n-1}|u'|^{m-2}(\varphi'(u+b) - u'\varphi)]' = (m-1)r^{n-1}f(u)\varphi - r^{n-1}f'(u)(u+b)\varphi$$

$$= r^{n-1}\varphi[(m-1)f(u) - (u+b)f'(u)].$$

Sean $s_1 = r(-b,\alpha)$ y $s_2 = \bar{r}(-b,\alpha)$. Supongamos ahora que $\varphi < 0$ en $[s_1, s_2]$ (sabemos que lo es en $[s_1, R_m(\alpha))$). Por (f_3) y porque f es impar, sabemos que en este intervalo se tiene que $(m-1)f(u) - f'(u)(u+b) > 0$, luego $r^{n-1}|u'|^{m-2}(\varphi'(u+b) - u'\varphi)$ es decreciente, de donde el valor en s_1 es mayor que el valor en s_2, luego, usando además que $u'(s_1) < 0$ y $\varphi(s_1) < 0$,

$$0 \geq -s_1^{n-1}|u_1'|^{m-2}u'(s_1)\varphi(s_1) > -s_2^{n-1}|u_2'|^{m-2}u'(s_2)\varphi(s_2),$$

de donde $-s_2^{n-1}|u_2'|^{m-2}u'(s_2)\varphi(s_2) < 0$. Como $u'(s_2) > 0$, ésto implica la contradicción $\varphi(s_2) > 0$.

Así, φ debe anularse en (s_1, s_2), y sabemos que no se anula en $(s_1, R_m(\alpha)]$ entonces debe anularse en $(R_m(\alpha), s_2)$, o, en otras palabras, las soluciones $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$ deben intersectarse en un punto $\bar{U}_I \in (U_{1m}, -b)$. □

Como definimos en la sección previa

$$\bar{P}(s,\alpha) = -2n \cdot \left(\frac{F}{f}\right) \cdot \frac{\bar{r}^{n-1}}{\bar{r}' \cdot |\bar{r}'|^{m-2}} - \bar{r}^n \cdot \left[2\frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{|\bar{r}'|^m} + 2F(s)\right],$$

$$\bar{P}'(s,\alpha) = 2n\left[\left(\frac{n-m}{nm}\right) - \left(\frac{F}{f}\right)'\right] \cdot \frac{\bar{r}^{n-1}}{\bar{r}'|\bar{r}'|^{m-2}},$$

$$\bar{S}_{12}(s) = \frac{\bar{r}_1^{n-1}|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'}{\bar{r}_2^{n-1}|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}_1'}(s).$$

Entonces

$$\bar{S}_{12}'(s) = \bar{S}_{12}(s)f(s)(|\bar{r}_2'|^m - |\bar{r}_1'|^m)(s). \tag{3.15}$$

Lema 3.2.5. *Para cada* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$ *con* $\alpha_1 < \alpha_2$, *se tiene* $\bar{P}_1(U_{1m}) > \bar{P}_2(U_{1m})$.

Demostración. Notemos que $\bar{P}_1(U_{1m}) = P_1(U_{1m})$ y $\bar{P}_2(U_{2m}) = P_2(U_{2m})$. De la proposición 3.5 se tiene que:

$$P_1(U_{1m}) > P_2(U_{2m}),$$

así $\bar{P}_1(U_{1m}) > \bar{P}_2(U_{2m})$ de (f_6), $\bar{P}_2'(s) \leq 0$ y como $U_{1m} > U_{2m}$ se obtiene

$$\bar{P}_1(U_{1m}) > \bar{P}_2(U_{2m}) > \bar{P}_2(U_{1m}),$$

demostrando el lema. □

Lema 3.2.6. *Sea* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$ *con* $\alpha_1 < \alpha_2$. *Si* $\bar{r}_1(U_{1m}) < \bar{r}_2(U_{1m})$, *entonces*

$$\frac{\bar{r}_1^{n-1}}{|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}'_1}(s) < \frac{\bar{r}_2^{n-1}}{|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}'_2}(s) \quad y \quad \bar{P}_1(s) > \bar{P}_2(s) \quad \text{para todo} \quad s \in (U_{1m}, \bar{U}_I).$$

Demostración. Observemos primero que $\bar{S}_{12}(U_{1m}) = 0$ ya que

$$\bar{S}_{12}(U_{1m}) = \frac{\bar{r}_1^{n-1}|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2' u_1'(U_{1m})}{\bar{r}_2^{n-1}|\bar{r}_1'|^{m-2}} = 0.$$

Además $\bar{S}_{12}(\bar{U}_I) < 1$. En efecto

$$\bar{S}_{12}(\bar{U}_I) = \frac{\bar{r}_1^{n-1}|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'}{\bar{r}_2^{n-1}|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}_1'}(\bar{U}_I) = \frac{|\bar{r}_2'|^{m-2}(\bar{U}_I)\bar{r}_2'(\bar{U}_I)}{|\bar{r}_1'|^{m-2}(\bar{U}_I)\bar{r}_1'(\bar{U}_I)} < 1.$$

Si existe un punto $s \in (U_{1m}, \bar{U}_I)$ tal que $\bar{S}'_{12}(s) = 0$, entonces $\bar{r'}_1(s) = \bar{r'}_2(s)$ y $\bar{S}_{12}(s) < 1$ para todo $s \in [U_{1m}, \bar{U}_I]$.

Ahora

$$\begin{aligned}(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)'(s) &= 2n\left(\frac{n-m}{nm} - \left(\frac{F}{f}\right)'\right)\frac{\bar{r}_1^{n-1}}{\bar{r}_1'|\bar{r}_1'|^{m-2}}(s,\alpha)\\ &\quad -2n\left(\frac{n-m}{nm} - \left(\frac{F}{f}\right)'\right)\frac{\bar{r}_2^{n-1}}{\bar{r}_2'|\bar{r}_2'|^{m-2}}(s,\alpha)\\ &= 2n\left(\frac{n-m}{nm} - \left(\frac{F}{f}\right)'\right)\left(\frac{\bar{r}_1^{n-1}}{\bar{r}_1'|\bar{r}_1'|^{m-2}}(s,\alpha) - \frac{\bar{r}_2^{n-1}}{\bar{r}_2'|\bar{r}_2'|^{m-2}}(s,\alpha)\right)\end{aligned}$$

$$= 2n\left(\frac{n-m}{nm} - \left(\frac{F}{f}\right)'\right)\left(\frac{\bar{r}_1^{n-1}|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'\bar{r}_2^{n-1}}{\bar{r}_1'|\bar{r}_1'|^{m-2}|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'\bar{r}_2^{n-1}}(s,\alpha) - \frac{\bar{r}_2^{n-1}}{\bar{r}_2'|\bar{r}_2'|^{m-2}}(s,\alpha)\right)$$

$$\begin{aligned}&= 2n\left(\frac{n-m}{nm} - \left(\frac{F}{f}\right)'\right)\left(\bar{S}_{12}\cdot\frac{\bar{r}_2^{n-1}}{|\bar{r'}_2|^{m-2}\bar{r'}_2} - \frac{\bar{r}_2^{n-1}}{|\bar{r'}_2|^{m-2}\bar{r'}_2}\right)\\ &= 2n\left(\frac{n-m}{nm} - \left(\frac{F}{f}\right)'\right)\left(\frac{\bar{r}_2^{n-1}}{|\bar{r'}_2|^{m-2}\bar{r'}_2}\right)(\bar{S}_{12} - 1) > 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{P}_1 - \bar{P}_2$ es creciente en $(U_{1m}, \bar{U}_I)$.

Así $\bar{P}_1(s) - \bar{P}_2(s) > \bar{P}_1(U_{1m}) - \bar{P}_2(U_{1m}) > 0$ por el lema anterior. □

Se define

$$U_{II} := \begin{cases} U_{1m} & \text{si } \bar{r}_1(U_{1m}) \geq \bar{r}_2(U_{1m}),\\ \bar{U}_I & \text{si } \bar{r}_1(U_{1m}) < \bar{r}_2(U_{1m})\end{cases}$$

.

Proposición 3.6. *Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$, con $\alpha_1 < \alpha_2$. Entonces,*

$$\frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}_1'} < \frac{\bar{r}_2}{|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'} \quad en \quad \bar{U}_I \quad si \quad U_{II} \geq -\beta,$$

y

$$\bar{r}_1 > \bar{r}_2, \quad y \quad \frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}_1'} < \frac{\bar{r}_2}{|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'} \quad en \quad (U_{II}, -\beta) \quad si \quad U_{II} < -\beta. \qquad (3.16)$$

Demostración. Si $U_{II} \geq -\beta$, obtenemos del hecho que $U_{1m} < -\beta$, que $U_{II} = \bar{U}_I$, y el primer resultado se sigue de la definición de $\bar{U}_I$.

Supongamos que $U_{II} < -\beta$. Si $U_{II} = U_{1m}$ es que $\bar{r_1}(U_{1m}) \geq \bar{r_2}(U_{1m})$ y es cierto que $0 = \bar{S_{12}}(U_{II}) < 1$ y $0 = \frac{\bar{r_1}}{\varphi_m(\bar{r}_1')} < \frac{\bar{r_2}}{\varphi_m(\bar{r}_2')}$. Si $U_{II} = \bar{U}_I$ es que $\bar{r_1}(U_{1m}) < \bar{r_2}(U_{1m})$, $\bar{r_1}(U_{II}) = \bar{r_2}(U_{II})$, entonces

$$\frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}_1'}(U_{II}) < \frac{\bar{r}_2}{|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'}(U_{II}).$$

Supongamos por contradicción que (3.16) no ocurre. Notamos que si existe un primer valor de $s > U_{II}$ donde $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$, necesariamente se tiene que $u_2' < u_1'$, es decir

$$\frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}_1'} > \frac{\bar{r}_2}{|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'}.$$

En consecuencia, si (3.16) falla, existe un primer punto $t \in (U_{II}, -\beta)$ tal que

$$\frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}_1'}(t) = \frac{\bar{r}_2}{|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'}(t),$$

y $\bar{r}_1(s) > \bar{r}_2(s)$ para todo $s \in (U_{II}, t]$, implicando que

$$\bar{S}_{12}(t) = \frac{\bar{r}_1^{n-1}|\bar{r}_2'|^{m-2}\bar{r}_2'}{\bar{r}_2^{n-1}|\bar{r}_1'|^{m-2}\bar{r}_1'}(t) = \left(\frac{\bar{r}_1(t)}{\bar{r}_2(t)}\right)^{n-2} = D > 1.$$

Además, de la definición de $\bar{P}_1$ y $\bar{P}_2$ tenemos que

$$(\bar{P}_1 - D\bar{P}_2)(t) = m'\bar{r}_1^{n-2}(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2)F(t) < 0.$$

Si $U_{II} = \bar{U}_I$ entonces por el lema 3.2.6 se tiene que $(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)(U_{II}) > 0$, mientras que si $U_{II} = U_{1m}$ entonces por el lema 3.2.5 $(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)(U_{II}) > 0$. De (3.15) y (f_6) se tiene que $\bar{P}_1'(s, \alpha) \leq 0$ para $s \geq \bar{U}_{1m}$ y así $\bar{P}_1(\bar{U}_I) \leq \bar{P}_2(\bar{U}_{II}) < \bar{P}_1(\bar{U}_{II}) < 0$, como $\bar{P}_1(\bar{U}_{1m}) < 0$ y $D > 1$ se tiene que

$$(\bar{P}_1 - D\bar{P}_2)(U_{II}) > 0.$$

de esto último en (3.15) obtenemos que $\bar{S}_{12}$ es creciente en (U_{II}, t) entonces $\bar{S}_{12} < D$. Finalmente por (f_6) se deduce que

$$(\bar{P}_1 - D\bar{P}_2)'(s) = \left(2n(\bar{S}_{12} - D)\left(\frac{n-m}{nm} - \left(\frac{F}{f}\right)'\right)\right)(s) > 0,$$

y así

$$(\bar{P}_1 - D\bar{P}_2)(t) > 0,$$

una contradicción. $\square$

Comportamiento en $[-\beta, 0)$ después del mínimo

En esta sección estudiaremos el comportamiento de las soluciones para $u \in [-\beta, 0)$ después del mínimo. Para esto utilizaremos el funcional W definido por

$$W(s,\alpha) = \bar{r}^{\frac{1}{m-1}}(s,\alpha)\sqrt[m]{|u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s)}, \quad s \in [U_m(\alpha), Z(\alpha)),$$

donde

$$Z(\alpha) := \sup\{s \in (U_m(\alpha), \bar{U}(\alpha)) : |u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s) > 0\}.$$

El funcional W esta bien definido en este intervalo, ya que

$$\frac{d}{ds}[|u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s)] = -m'(n-1)\frac{|u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)|^{m-2}u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)}{\bar{r}(s,\alpha)} < 0,$$

y

$$|u'(\bar{r}(U_m(\alpha),\alpha),\alpha)|^m + m'F(U_m(\alpha)) = m'F(U_m(\alpha)) > 0.$$

Notemos que $Z(\alpha) = 0$ si y solo si $\alpha \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$. De hecho, si $\alpha \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$, entonces

$$|u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s) \geq 0,$$

en $s = \bar{U}(\alpha)$, y si $\alpha \in \mathcal{F}_2$, entonces de la proposición 3.10, $I_m(\bar{R}(\alpha),\alpha) < 0$ lo que implica que $Z(\alpha) < \bar{U}(\alpha) < 0$.

Lema 3.2.7. *Sea* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$ *con* $\alpha_1 < \alpha_2$. *Supongamos que existe* $U \in [-\beta, \text{mín}\{Z(\alpha_1), Z(\alpha_2)\}]$ *tal que*

$$\bar{r}_1(U) \geq \bar{r}_2(U) \quad y \quad W_1(U) < W_2(U), \tag{3.17}$$

entonces

$$Z(\alpha_1) \leq Z(\alpha_2)$$

y

$$\bar{r}_1(s) \geq \bar{r}_2(s), \quad W_1(s) < W_2(s), \quad u_1'(\bar{r}_1(s)) < u_2'(\bar{r}_2(s)), \quad s \in (U, Z(\alpha_1)].$$

Además si $\alpha_2 \in \mathcal{G}_2$, *entonces* $\alpha_1 \in \mathcal{F}_2$, *y si* $\alpha_1 \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$, *entonces* $\alpha_2 \in \mathcal{N}_2$ *y*

$$\bar{R}(\alpha_1) > \bar{R}(\alpha_2) \quad y \quad u_1'(\bar{R}(\alpha_1)) < u_2'(\bar{R}(\alpha_2)).$$

Demostración. Consideremos $l = \text{mín}\{Z(\alpha_1), Z(\alpha_2)\} \geq U$, entonces W_1 y W_2 estan bien definidas en $[-\beta, l]$. De (3.17) se deduce que $u_1'(\bar{r}_1(U)) < u_2'(\bar{r}_2(U))$ y así $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$ en alguna vecindad pequeña de U. Observemos que mientras $W_1 \leq W_2$, $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$ no se intersectan por lo tanto tampoco lo hacen $u_1'(\bar{r}_1(s))$ y $u_2'(\bar{r}_2(s))$.
Sea $d \in (U, l]$ tal que

$$W_1(s) \leq W_2(s), \quad \bar{r}_1(s) > \bar{r}_2(s), \quad u_1'(\bar{r}_1(s)) < u_2'(\bar{r}_2(s)) \tag{3.18}$$

en $(U, d]$.
Nosotros mostraremos que $W_1 - W_2$ es estrictamente decreciente en $(U, d]$ y así tendremos que el supremo de d es l. Además de (3.18) se tiene que $u_1'(\bar{r}_1(l)) < u_2'(\bar{r}_2(l))$ y esto implica que $Z(\alpha_1) \leq Z(\alpha_2)$. De hecho, si $Z(\alpha_1) > Z(\alpha_2)$, entonces $Z(\alpha_2) < 0$, y $W_2(Z(\alpha_2)) = 0$ y por (3.18) se tiene $W_1(Z(\alpha_2)) = 0$, lo que es una contradicción.

así $l = Z(\alpha_1)$.

De la definición de $W(s, \alpha)$ tenemos

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{m'F(s) - (n-2)|u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)|^m}{(m-1)u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)(|u'(\bar{r}(s,\alpha),\alpha)|^m + m'F(s))^{\frac{m-1}{m}}}. \tag{3.19}$$

Para cualquier $s \in (-\beta, 0)$ fijo, y tal que $p^m + m'F(s) > 0$, definimos

$$h(p) = \frac{m'F(s) - (n-2)p^m}{p\sqrt[m]{(p^m + m'F(s))^{m-1}}}, \quad p > 0.$$

Como $F(s) \leq 0$, h es estrictamente creciente. Y así, de (3.19) se tiene

$$\frac{\partial W_1}{\partial s}(s) - \frac{\partial W_2}{\partial s}(s) = h(u_1'(\bar{r}_1(s))) - h(u_2'(\bar{r}_2(s))) < 0,$$

implica que $W_1 - W_2$ es estrictamente decreciente en $(U, d]$ y se cumple la primera parte de nuestro lema.

Por otra parte, si $\alpha_1 \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$, entonces $Z(\alpha_1) = 0$ y así $Z(\alpha_2) = 0$, entonces $\alpha_2 \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$. Pero

$$\bar{R}(\alpha_1) = \bar{r}_1(0) > \bar{r}_2(0) = \bar{R}(\alpha_2) \quad y \quad u_1'(\bar{R}(\alpha_1)) < u_2'(\bar{R}(\alpha_2)),$$

y así $\alpha \in \mathcal{N}_2$.

Supongamos ahora $\alpha_2 \in \mathcal{G}_2$. Si $Z(\alpha_1) = 0$, entonces $u_1'(\bar{R}(\alpha_1)) < u_2'(\bar{R}(\alpha_2)) = 0$, lo que es una contradicción. Entonces $Z(\alpha_1) < 0$ y así $\alpha_1 \in \mathcal{F}_2$. □

Proposición 3.7. *Sea $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta, \alpha^* + \delta)$ con $\alpha_1 < \alpha_2$. Entonces*

$$Z(\alpha_1) \leq Z(\alpha_2)$$

y existe $U \in [-\beta, 0]$ tal que

$$\bar{r}_1(s) > \bar{r}_2(s), \quad W_1(s) < W_2(s), \quad y \quad u_1'(\bar{R}(\alpha_1)) < u_1'(\bar{R}(\alpha_1)), \quad s \in (U, Z(\alpha_1)].$$

Además, si $\alpha_1 \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$*, entonces* $\alpha_2 \in \mathcal{N}_2$ *y*

$$\bar{R}(\alpha_1) > \bar{R}(\alpha_2) \quad y \quad u_1'(\bar{R}(\alpha_1)) < u_2'(\bar{R}(\alpha_2)), \tag{3.20}$$

y si $\alpha_2 \in \mathcal{G}_2$*, entonces* $\alpha_1 \in \mathcal{F}_2$*.*

Demostración. Sea

$$U := \begin{cases} -\beta & \text{si } U_{II} < -\beta \\ \bar{U}_I & \text{si } U_{II} \geq -\beta \end{cases}$$

De la proposición 3.6 se tiene

$$\bar{r}_1(U) \geq \bar{r}_2(U), \quad y \quad \bar{r}_1(U)|u_1'(\bar{r}_1(U))|^{m-1} < \bar{r}_2(U)|u_2'(\bar{r}_1(U))|^{m-1},$$

y como $F(-\beta) = 0$ y $\bar{r}_1(\bar{U}_I) = \bar{r}_2(\bar{U}_I)$, obtenemos que $W_1(U) < W_2(U)$ en cualquiera de los dos casos. Luego nuestros resultados siguen del lema anterior. □

3.3 El caso $b = 0$

En esta sección los casos a analizar son $[-\beta, 0]$ antes del mínimo, $[U_m, 0]$ antes y después del mínimo y $[-\beta, 0)$ después del mínimo.

Comenzaremos con un análogo de la proposición 3.4. El trabajo que vemos a continuación es similar al de [10].

Proposición 3.8. *Sea* f *que satisface* (f_1)*-*(f_5)*. Entonces para todo* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1)$ *con* $\alpha_1 < \alpha_2$ *se tiene que*

$$r_1(0) > r_2(0) \quad y \quad r_1^{\frac{n-1}{m-1}}(0)|u_1'(r_1(0))| \leq r_2^{\frac{n-1}{m-1}}(0)|u_2'(r_2(0))|.$$

Demostración. Por cálculo directo, usando lema 3.2 y la proposición 3.12 tenemos que

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(s, \alpha)\Big|_{s=0} = -\frac{\varphi(r(0,\alpha), \alpha)}{u'(r(0,\alpha), \alpha)} < 0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} r^{n-1}(s,\alpha)|u'|^{m-2}u'(r(s,\alpha),\alpha)|_{s=0} = r^{n-1}(0,\alpha)\varphi'(r(0,\alpha),\alpha) \leq 0,$$

y así se sigue el resultado. $\square$

Se mencionarán las proposiciones análogas 3.5, 3.6 y lema 3.2.4. Las demostraciones se omitirán porque se siguen de la misma manera.

Proposición 3.9. *Para cada* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1)$, *con* $\alpha_1 < \alpha_2$, *se tiene que* $U_{1m} > U_{2m}$ *y*

$$r_1 > r_2 \quad y \quad P_1 > P_2 \quad en \quad [U_{1m}, 0].$$

Además,

$$P_1(U_{1m}) > P_{2m}(U_{2m}).$$

Lema 3.3.1. *Sea* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1)$, *con* $\alpha_1 < \alpha_2$. *Si* $\bar{r}_1(U_{1m}) < \bar{r}_2(U_{1m})$, *entonces existe* $\bar{U}_I \in (U_{1m}, 0)$ *tal que* $\bar{r}_1(\bar{U}_I) = \bar{r}_2(\bar{U}_I)$ *y* $\bar{r}_1(s) < \bar{r}_2(s)$ *para todo* $s \in (U_{1m}, \bar{U}_I)$.

Lema 3.3.2. *Sea* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1)$, *con* $\alpha_1 < \alpha_2$. *Si* $\bar{r}_1(U_{1m}) < \bar{r}_2(U_{1m})$, *entonces*

$$\frac{\bar{r}_1^{n-1}}{|\bar{r}_1'|^{m-1}}(s) < \frac{\bar{r}_2^{n-1}}{|\bar{r}_2'|^{m-1}}(s) \quad y \quad \bar{P}_1(s) > \bar{P}_2(s) \quad para \quad todo \quad s \in [\bar{U}_{1m}, \bar{U}_I],$$

con $\bar{U}_I$ *del lema anterior.*

Proposición 3.10. *Sea* $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha^* - \delta_1, \alpha^* + \delta_1)$, *con* $\alpha_1 < \alpha_2$. *Entonces*

$$\bar{r}_1 > \bar{r}_2, \quad y \quad \frac{\bar{r}_1}{|\bar{r}_1'|^{m-1}} < \frac{\bar{r}_2}{|\bar{r}_2'|^{m-1}} \quad en \quad (U_{II}, 0].$$

En particular,

$$\bar{R}(\alpha_1) > \bar{R}(\alpha_2), \quad y \quad u_1'(\bar{R}(\alpha_1)) < u_2'(\bar{R}(\alpha_2)),$$

donde

$$U_{II} := \begin{cases} U_{1m} & \text{si } \bar{r}_1(U_{1m}) \geq \bar{r}_2(U_{1m}) \\ \bar{U}_I & \text{si } \bar{r}_1(U_{1m}) < \bar{r}_2(U_{1m}). \end{cases}$$

Capítulo 4
Demostración de los Teoremas

Veremos ahora un resultado que es muy conocido, y daremos la prueba para una mejor comprensión.

Demostración del teorema 1.2(i). De (f_4)-(f_5) se obtiene la existencia de $C_0 > 0$ y s_0 tal que

$$f(s) > C_0 s^{\frac{n(m-1)}{n-m}} \quad para \quad s \in (0, s_0).$$

En efecto, de (f_4) la función $\frac{sf'(s)}{f(s)}$ es decreciente en (b, ∞), de (f_5) si $b = 0$, se tiene que

$$\frac{sf'(s)}{f(s)} \leq \frac{n(m-1)}{n-m} \quad \text{para todo} \quad s > 0$$

e integrando entre s y s_0 se tiene

$$\log \frac{f(s_0)}{f(s)} \leq \log \left(\frac{s_0}{s}\right)^{\frac{n(m-1)}{n-m}}$$

por lo tanto

$$s^{\frac{n(m-1)}{n-m}} C_0 \leq f(s) \quad \text{para todo} \quad s \in (0, s_0)$$

Supongamos ahora por contradicción que existe $\alpha \in \mathcal{G}_2$ y $\bar{R}(\alpha) = \infty$ y tomemos $v(r) = -u(r, \alpha)$. Hacemos el cambio de variable $s = r^{\frac{n-m}{m-1}}$, así $w(s) = r^{\frac{n-m}{m-1}} v(r)$, o lo que es igual, $\frac{w(s)}{s} = v(r)$. Luego derivando se tiene

$$\frac{s\dot{w} - w}{s^2} \cdot \frac{n-m}{m-1} \cdot \frac{s}{r} = v'(r),$$

$$(s\dot{w} - w)\left(\frac{n-m}{m-1}\right) = r^{\frac{n-1}{m-1}} v'$$

donde hemos denotado $\dot{w} = \frac{dw}{ds}$. Luego

$$\phi_m(s\dot{w} - w)\left(\frac{n-m}{m-1}\right)^{m-1} = r^{n-1}\phi_m(v'),$$

de donde

$$\frac{d}{ds}\phi_m(s\dot{w} - w)\left(\frac{n-m}{m-1}\right)^{m} \frac{s}{r} = -r^{n-1} f(v).$$

y por lo tanto, excepto en $r = R_m(\alpha)$, se tiene

$$\frac{d}{ds}\phi_m(s\dot{w} - w) = (m-1)|s\dot{w} - w|^{m-2}\ddot{w}.$$

Luego w satisface

$$(m-1)|s\dot{w} - w|^{m-2}\ddot{w} = -\frac{r^n}{s} f(w) < 0,$$

de donde $\ddot{w} < 0$ para todo $s \neq R_m^{\frac{n-m}{m-1}}$. Es decir, w es cóncava. Como $w((R(\alpha))^{\frac{n-m}{m-1}}) = 0$ y $w(s) > 0$ para todo $s > (R(\alpha))^{\frac{n-m}{m-1}} = s(\alpha)$ se debe tener que w es creciente para todo $s > s(\alpha)$ y por lo tanto $\dot{w} > 0$. Así,

$$0 < \dot{w} = (r^{\frac{n-m}{m-1}} v(r))' \frac{dr}{ds},$$

y como $\frac{dr}{ds} > 0$ se tiene que

$$r^{\frac{n-m}{m-1}} v \quad \text{es creciente para } r \geq r_0 \tag{4.1}$$

y por lo tanto

$$r|v'(r)| < \frac{n-m}{m-1}v(r), \quad r \geq R(\alpha). \tag{4.2}$$

Así para r_0 lo suficientemente grande de manera que v decrezca en (r_0, ∞), se tiene

$$\begin{aligned} r^{n-1}\phi_m(|v'|) = -r^{n-1}\phi_m(v') &\geq c_0 \int_{r/2}^{r} t^{n-1} f(v)dt \geq c_0 \int_{r/2}^{r} t^{n-1} v^{\frac{n(m-1)}{n-m}}(t)dt \\ &\geq c_0 v^{\frac{n(m-1)}{n-m}}(r)\Big(\frac{r^n}{n} - \frac{r^n}{2^n n}\Big), \end{aligned}$$

es decir,

$$r^{n-1}|v'|^{m-1} \geq \bar{c_0} r^n v^{\frac{n(m-1)}{n-m}}.$$

Usando ahora que de (4.2) se tiene $|v'|^{m-1} \leq C\frac{v^{m-1}}{r^{m-1}}$, obtenemos que

$$r^{n-m}v^{m-1} \geq \bar{c_0} r^n v^{\frac{n(m-1)}{n-m}},$$

de donde finalmente obtenemos

$$r^{\frac{(n-m)}{m-1}} v \leq K \tag{4.3}$$

para alguna constante positiva K. Así, de (4.1) y (4.3), se tiene que

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{n-m}{m-1}} v = L < \infty.$$

Como también $-r^{n-1}\phi_m(v')$ es creciente para r suficientemente grande, se tiene que $-r^{\frac{n-1}{m-1}}v'$ es creciente y por lo tanto tiene límite (que podría ser infinito) cuando $r \to \infty$. Pero, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{-v'}{r^{\frac{n-1}{m-1}}} = c \lim_{r\to\infty} \frac{v}{r^{-\frac{n-m}{m-1}}} = L < \infty. \tag{4.4}$$

Por otro lado,

$$L^{m-1} \geq -r^{n-1}\phi_m(v') \geq c_0 \int_{r_0}^{r} t^{n-1} v^{\frac{n(m-1)}{n-m}}(t)dt = c_0 \int_{r_0}^{r} t^{-1}\big(t^{\frac{n-m}{m-1}} v(t)\big)^{\frac{n(m-1)}{n-m}} dt$$

y usando (4.1), obtenemos que

$$L^{m-1} \geq c_0 (r_0^{\frac{n-m}{m-1}} v(r_0))^{\frac{n(m-1)}{n-m}} \int_{r_0}^{r} t^{-1} = \tilde{c_0} \log \frac{r}{r_0}$$

de donde

$$L^{m-1} = \lim_{r\to\infty} -r^{n-1}\phi_m(v') \geq \lim_{r\to\infty} \tilde{c_0} \log \frac{r}{r_0} = \infty$$

lo que es una contradicción.

Si $\bar{R}(\alpha) < \infty$, se tiene

$$0 = -\bar{R}^{n-1}(\alpha)\phi_m(v'(\bar{R})) = \int_{R_m(\alpha)}^{\bar{R}(\alpha)} t^{n-1} f(v) dt,$$

de donde $f(v) \equiv 0$ en $(R_m(\alpha), \bar{R}(\alpha))$, lo que es una contradicción. Así $\mathcal{G}_2 = \emptyset$ y queda demostrada nuestra afirmación. $\square$

Demostración del teorema 1.2(ii).

1. Caso $b = 0$. De (i) sabemos que $\mathcal{G}_2 = \emptyset$ y además como (a, ∞) es conexo se tiene

$$(a, \infty) = \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{G}_2 = \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{P}_2$$

y $\mathcal{N}_2$ y $\mathcal{P}_2$ son abiertos, disjuntos y $\mathcal{N}_2 \neq \emptyset$, se concluye que $\mathcal{P}_2 = \emptyset$.

Por lo tanto $\mathcal{N}_2 = (a, \infty)$, para algún $a > 0$.

Por otra parte como $\bar{R}(\alpha)$ y $u'(\bar{R}(\alpha), \alpha)$ son continuas en $[\alpha_1, \infty)$ y de la proposición 3.10 se tiene que $\bar{R}(\alpha)$ es estrictamente decreciente, es decir,

$$\alpha_1 < \alpha_2 \quad entonces \quad \bar{R}(\alpha_2) < \bar{R}(\alpha_1)$$

y además $u_1'(\bar{R}(\alpha_1))$ es localmente estrictamente creciente, es decir, si $\alpha_1 < \alpha_2$ entonces $\bar{R}(\alpha_2) < \bar{R}(\alpha_1)$ y $u_1'(\bar{R}(\alpha_1)) < u_2'(\bar{R}(\alpha_2))$ en (α_1, ∞) y así se obtiene el resultado.

2. Caso $b > 0$. De los supuestos, $\alpha_1 \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$, por lo tanto por la proposición (3.1) se tiene $(\alpha_1, \alpha_1 + \delta) \subset \mathcal{N}_2$.

   Sea $\bar{\alpha} = \sup\{\alpha > \alpha_1 : \alpha \in \mathcal{N}_2\}$. Y supongamos $\bar{\alpha} < \infty$.

   Dado que $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{N}_2$ son abiertos, se deduce que $\bar{\alpha} \in \mathcal{G}_2$.

   En efecto, si $\bar{\alpha} \in \mathcal{N}_2$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \epsilon) \subset \mathcal{N}_2$, por lo tanto $\bar{\alpha}$ no es supremo, ya que $\mathcal{N}_2$ es abierto.

   Si $\bar{\alpha} \in \mathcal{P}_2$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $(\bar{\alpha} - \epsilon, \bar{\alpha}) \subset \mathcal{P}_2$, por lo tanto $\bar{\alpha}$ no es supremo.

   Luego de la proposición 3.7 si $\bar{\alpha} \in \mathcal{G}_2$ entonces $(\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha}) \subset \mathcal{F}_2$

   Finalmente $\bar{\alpha}$ no es supremo. Así $\bar{\alpha} = \infty$ entonces $(\alpha_1, \infty) \subset \mathcal{N}_2$

   además como $\bar{R}(\alpha)$ y $u'(\bar{R}(\alpha), \alpha)$ son continuas en $[\alpha_1, \infty)$ y así por la proposición (3.7) se tiene que $\bar{R}(\alpha)$ es localmente estrictamente decreciente y además $u'(\bar{R}(\alpha))$ es localmente estrictamente creciente, es decir, si $\alpha_1 < \alpha_2$, entonces $\bar{R}(\alpha_2) < \bar{R}(\alpha_1)$ y $u_1'(\bar{R}(\alpha_1)) < u_2'(\bar{R}(\alpha_2))$ en (α_1, ∞), y se obtiene el resultado.

$\square$

Demostración del teorema 1.2(iii). En este caso $\alpha_1 \in \mathcal{G}_2$ y por lo tanto utilizamos el mismo argumento anterior para $(\alpha_1, \infty) \subset \mathcal{N}_2$ obteniendo el resultado. $\square$

Demostración del teorema 1.1. Vamos a demostrar que el problema (1.2) con $b > 0$ tiene a lo más una solución. Supongamos por contradicción que (1.2) tiene dos soluciones u_1 y u_2. Como el problema de condición inicial

$$(r^{n-1}|u'|^{m-2}u')' + r^{n-1}f(u) = 0$$

$$u(0) = \alpha$$

$$u'(0) = 0$$

tiene solución única, entonces podemos suponer que $u_1(0) < u_2(0)$. Llamemos $\alpha_1 = u_1(0)$ y $\alpha_2 = u_2(0)$. Por hipótesis, por ser soluciones de (1.2)entonces $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{G}_2$. De la proposición 3.7 se tiene que $\alpha_2 \in \mathcal{N}_2$ que es una contradicción ya que $\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$. $\square$

Demostración del teorema 1.3. Sea ρ fijo. Supongamos que hay dos soluciones u_1 y u_2 tales que

$$(r^{n-1}|u_i^{m-2}|u_i')' + r^{n-1}f(u_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

$$u_i(\rho) = 0$$

y existen $R_1, R_2 \in (0, \rho)$ con $u_i(R_i) = 0$, $i = 1, 2$. Podemos suponer que $u_1(0) = \alpha_1 < u_2(0) = \alpha_2$. Se tiene que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{N}_2$ por la definición de $\mathcal{F}_2$. De la proposición 3.7 se tiene que $\bar{R}(\alpha_1) > \bar{R}(\alpha_2)$ que es una contradicción ya que de la definición de $\bar{R}(\alpha_i)$, $i = 1, 2$ se tiene que $\bar{R}(\alpha_i) = \rho$. $\square$

REFERENCIAS

[1] H. Berestycki, P.L. Lions, Non linear scalar fields equations I. Existence of the ground state, Arch. Ration. Mech. Anal. **82** (1983), 313-345.

[2] G. Caristi, E. Mitidieri, Nonexistence of positive solutions of quasilinear equations, Adv. Differential Equations **2** (1997), 319-359.

[3] C. C. Chen, C. S. Lin, Uniqueness of the ground state solution of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 1549-1572.

[4] E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 1955.

[5] C. V. Coffman, Uniqueness of the ground state solution of $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions, Arch. Ration. Mech. Anal. **46** (1972), 81-95.

[6] C. V. Coffman, A nonlinear boundary value problem with many positive solutions, J. Differential Equations **54** (1984), 429-437.

[7] C. Cortázar, P. Felmer, M. Elgueta, On a semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^n$ with a non Lipschitzian nonlinearity, Adv. Differential Equations **1** (1996), 199-218.

[8] C. Cortázar, P. Felmer, M. Elgueta, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, Arch. Ration. Mech. Anal. **142** (1998), 127-141.

[9] C. Cortázar, M. García-Huidobro, On the uniqueness of the ground state solutions of a semilinear equation containing a weighted Laplacian, Comm. Pure. Appl. Anal. **5** (2006), 813-826.

[10] C. Cortázar, M. García-Huidobro, C. Yarur, On the uniqueness of the second bound state solution of a semilinear equation, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009).

[11] C. Cortázar, M. García-Huidobro, C. Yarur, On the uniqueness of sign changing bound state solution of a semilinear equation, Comm. Pure. Appl. Anal.(2010).

[12] L. Erbe, M. Tang, Uniqueness theorems for positive solutions of quasilinear elliptic equations in a ball, J. Differential Equations **138** (1997), 351-379.

[13] B. Franchi, E. Lanconelli, J. Serrin, Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in $\mathbb{R}^n$, Adv. Math. **118** (1996), 177-243.

[14] M. García-Huidobro, D. Henao, On the uniqueness of positive solutions of quasilinear equations containing a weighted m laplacian , Comm. Contemp. Math. **10** (2008), 405-432.

[15] A. Granas, J. Dujundji, Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics, 2003, Springer-Verlag, New York Inc.

[16] D. Henao, Sobre la unicidad de soluciones radiales positivas de $\Delta_p u + +K(|x|)f(u) = 0$, para el caso superlineal. Tesis de Magister, Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. (2006).

[17] C. Jones, T. Kuper, On the infinitely many solutions of a semilinear elliptic quation, SIAM J. Math. Anal. **17** (1986), 803-835.

[18] M. K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$, Arch. Ration. Mech. Anal. **105** (1989), 243-266.

[19] K. McLeod, Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ II, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 495-505.

[20] K. McLeod, J. Serrin, Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$, Arch. Ration. Mech. Anal. **99** (1987), 115-145.

[21] K. McLeod, W.C. Troy, F.B.Weissler, Radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ with prescribed numbers of zeros , J. Differential Equations **83** (1990), 368-378.

[22] L. Peletier, J. Serrin, Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in $\mathbb{R}^N$, Arch. Ration. Mech. Anal. **81** (1983), 181-197.

[23] L. Peletier, J. Serrin, Uniqueness of nonnegative solutions of semilinear equations in $\mathbb{R}^N$, J. Differential Equations **61** (1986), 380-397.

[24] P. Pucci, J. Serrin, Uniqueness of ground state for quasilinear elliptic operators, Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), 501-528.

[25] P. Pucci, M. García-Huidobro, R. Manásevich, J. Serrin, Qualitative properties of ground states for singular elliptic equations with weights, J. Differential Equations **83** (2005), 368-378.

[26] J. Serrin, M. Tang, Uniqueness of ground state for quasilinear elliptic equations , Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 897-923.

[27] W. Troy, The existence and uniqueness of bound state solutions of a semilinear equation, Proc. Roy Soc. A **461** (2005), 2941-2963.