

# Billares Duales

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias  
por



Romina Marcela Menares Espinoza

Agosto, 2008

Director de Tesis Dr. Rodrigo Bamón

UCH-FC  
MAG-M  
M535  
C.1

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato

**Romina Marcela Menares Espinoza**

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 15 de Julio de 2008

Director de Tesis:

**Dr. Rodrigo Bamón**

Comisión de Evaluación de la Tesis

**Dr. Jan Kiwi Krauskopf**

**Dr. Andrés Navas Flores**

*Bamón*  
.....

*Jan Kiwi*  
.....

*Andrés Navas Flores*  
.....





## Biografía



Nací en Santiago, el día 10 de junio de 1983. Crecí junto a mis padres y mi abuela en la comuna de Quilicura. Tuve una linda infancia, rodeada de campo, de amigos y de juegos. Siempre fui una niña muy alegre, fantasiosa y curiosa. Estudié en una pequeña escuela, donde había mucha cercanía con todo el personal. Fue ahí donde una profesora motivó a mis padres para que me cambiaran de colegio y me llevaran a uno que me diera mejores herramientas para entrar a la universidad.

Gracias al apoyo incondicional de mis padres, y al esfuerzo que significaba viajar todos los días de un extremo a otro de Santiago, cursé la enseñanza media en el colegio Carmela Carvajal de Prat. Tengo muy buenos recuerdos de mi adolescencia en ese lugar. Compartí con personas que tenían intereses similares a los míos y con las que viví momentos inolvidables.

Fue difícil para mí decidir estudiar matemáticas, sin embargo el tiempo me ha mostrado que fue la mejor decisión que pude tomar. Pasar por la Universidad de Chile ha sido la mejor experiencia de mi vida, no sólo por el conocimiento que he adquirido, o por las satisfacciones académicas que me ha entregado, sino también porque logré superar obstáculos y conocí a personas que me ayudaron a crecer.

Actualmente curso un magíster en Didáctica de las Matemáticas, en la Universidad Católica de Valparaíso. La educación es una de las cosas que me apasionan y los conocimientos que he adquirido en matemáticas me han dado una herramienta invaluable para investigar en esta área.



## Agradecimientos

Quiero dedicar estas líneas a las personas que hicieron posible, en todos los aspectos, sacar adelante este trabajo de tesis. En primer lugar, le agradezco a mi familia, de quien he tenido el apoyo durante toda mi vida. En forma muy especial, le agradezco a mi madre, quien ha sido un pilar fundamental y me ha ayudado en todo momento. Le agradezco también a mi padre, quien siempre se ha preocupado de darme el sustento económico para poder estudiar con tranquilidad. Quiero darle las gracias también a mi hermana, que a pesar de ser mucho más joven que yo, siempre tiene palabras de aliento que me dan fuerzas para seguir. A mi tío Nocho, mi tía Yeya y a mi abuela, que me han dado apoyo en los momentos en que lo he necesitado.

En la Universidad han habido personas que marcaron mi proceso de aprendizaje, me refiero a los profesores. Agradezco en forma muy especial al profesor Manuel Pinto, por mostrarme una forma distinta de enseñanza. Agradezco también al profesor Rolando Pomareda, por todo el apoyo que me ha dado durante el magíster; por creer en mi trabajo, y por darme muy buenos consejos.

No puedo dejar de agradecer a mis compañeros de la Universidad, en especial a mi amiga Leslie, con quien compartí departamento durante un año y siempre ha tenido palabras alentadoras y sinceras; a mi amigo Nicolás, con quien he compartido muy buenos momentos, y nos hemos dado apoyo mutuo en este proceso. Agradezco también a mi amiga Pamela, quien me ha sabido escuchar, dar compañía y buenos consejos.

En general, quiero darle las gracias a la gente que me rodea; a mis amigos, a mis alumnos de las ayudantías, que no han dudado en hacerme sugerencias y comentarios de mis clases, las que me permiten crecer en una de las cosas más importantes para mí: enseñar. A la gente que me hizo sugerencias para la tesis, sobre todo en cosas técnicas, como en el programa de MATLAB, que sin la ayuda de Cristóbal se me hubiese hecho mucho más difícil.

Por último, quiero agradecer enormemente a mi profesor guía, el profesor Rodrigo Bamón, sobre todo por la paciencia que me tuvo, por los consejos y por toda la ayuda que me brindó durante todo este proceso.



# Índice general

Biografía	II
Agradecimientos	III
Resumen	VI
Summary	VII
Introducción	1
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Definición de billar dual . . . . .	3
1.2. Otras definiciones . . . . .	4
1.3. Parametrizaciones de $\Gamma^E$ , recubrimientos y levantamientos . .	5
1.3.1. Primera parametrización de $\Gamma^E$ . . . . .	5
1.3.2. Segunda parametrización de $\Gamma^E$ , recubrimiento y levantamiento . . . . .	5
1.3.3. Tercera parametrización de $\Gamma^E$ , recubrimiento y levantamiento . . . . .	6
<b>2. Resultados generales y dualidad</b>	<b>7</b>
2.1. Preservación de área . . . . .	7
2.2. Una demostración geométrica del Teorema 2.1.1 . . . . .	11
2.3. Invariancia por transformación afín . . . . .	13
2.4. Dualidad . . . . .	13
2.5. Derivabilidad . . . . .	17
<b>3. Ejemplos de Billares duales</b>	<b>19</b>
3.1. Billar dual circular y elipsoidal . . . . .	19
3.2. Un Billar dual Poligonal: El Cuadrado . . . . .	21
3.3. Billar dual Semicircular . . . . .	26



4. Twist maps y Billares duales	29
4.1. Definición de twist map . . . . .	29
4.2. Billar dual como twist map . . . . .	30
4.3. Resultados sobre twist maps . . . . .	31
4.3.1. Algunas definiciones relativas a twist maps . . . . .	31
4.3.2. Resultados sobre twist maps . . . . .	32
4.4. Los resultados de twist maps en los billares duales . . . . .	33
4.5. Demostración del Teorema 4.3.4 . . . . .	34
4.5.1. Algunos resultados previos . . . . .	35
4.5.2. Demostración parte 2 del teorema 4.3.4 . . . . .	37
5. Billar dual y oscilador con impacto	39
5.1. Oscilador con impacto . . . . .	39
5.2. Modelo geométrico del oscilador con impacto . . . . .	40
5.3. Conexión entre billar dual y oscilador con impacto . . . . .	42



## Resumen

Esta tesis está guiada principalmente en el trabajo de S.Tabachnikov [9]. En la tesis se estudia la dinámica del billar dual definido en el exterior de una curva plana. suave a pedazos, cerrada simple, convexa, y que no contiene segmentos de recta. En ejemplos se estudia billares duales sobre estas curvas pero que contienen segmentos de rectas, usando una extensión natural de la definición para estos casos. De la dinámica de billares duales se describe resultados generales y se estudia ejemplos concretos. Se observa que todo billar dual es un twist map y se aplica resultados de la teoría de twist maps para obtener resultados en los billares duales. Además, se explica una dualidad que existe entre los billares duales y los billares usuales definidos en la esfera  $S^2$ . Por último, se estudia la relación descrita en un trabajo de Ph. Boyland [1] entre un billar dual y un oscilador con impacto asociado.



## Summary

This thesis was guided principally in the Tabachnikov's work [9]. In it we study the dynamics of a dual billiard defined in the exterior of a plane piecewise smooth simple closed convex curve, which does not contain segments of straight lines. In examples we work with dual billiards defined by curves as indicated which contain line segments. We use a natural extension of the definition for this case. We describe general results of the dynamic of dual billiards and we study concrete examples. We observe that a dual billiard is a twist map and we applied the results of the twist maps's theory to the dual billiards. In addition, we have explain a duality between the dual billiards and usual billiards defined on the sphere  $S^2$ . Finally, we study the relation that Ph. Boyland [1] describes between a dual billiard and an associated impact oscillator.

# Introducción

Dada una curva cerrada simple  $\Gamma$  en el plano, definimos el **exterior** de  $\Gamma$  como la componente conexa no acotada del complemento de  $\Gamma$  y lo denotamos por  $\Gamma^E$ . La componente acotada es el **interior** de  $\Gamma$ .

Una curva cerrada simple es **convexa** si dado dos puntos en el interior de ella, el segmento que los une está también contenido en el interior. La curva es **estrictamente convexa** si es convexa y no contiene segmentos de rectas.

Sea  $\Gamma$  una curva cerrada simple estrictamente convexa y suave. Por un punto  $P$  en el exterior de  $\Gamma$  pasan dos rectas tangentes a  $\Gamma$ . Llamamos **recta tangente principal** asociada a  $P$  a la recta tangente que está a la derecha mirando desde  $P$  hacia  $\Gamma$ . Denotamos por  $\Gamma_P$  al punto de tangencia contenido en la recta principal asociada a  $P$ .

Definimos el **billar dual** sobre  $\Gamma$  como el par  $(\Gamma, T)$  donde  $T : \Gamma^E \rightarrow \Gamma^E$  es la función que toma un punto  $P \in \Gamma^E$  y lo refleja sobre la recta tangente principal con respecto a  $\Gamma_P$ . Nótese que  $\Gamma_P$  es el punto medio entre  $P$  y  $T(P)$ .

En esta tesis trabajaremos con una extensión natural de esta definición a billares duales definidos en el exterior de curvas cerradas simples, suaves a pedazos, y convexas.

Dado un billar dual  $(\Gamma, T)$  y dado  $P \in \Gamma^E$  se define la **órbita** de  $P$  por  $\mathcal{O}(P) = \{T^n(P) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  donde  $T^n(P) = (T \circ T \circ \dots \circ T)(P)$  es la compuesta  $|n|$  veces de la función  $T$ , ó  $T^{-1}$ , consigo misma, dependiendo si  $n > 0$ , ó  $n < 0$ , respectivamente.

La dinámica de billares duales corresponde al estudio de propiedades topológicas y métricas de las órbitas.

En esta tesis describiremos resultados generales de la dinámica de billares duales. Estudiaremos algunos ejemplos concretos. También asociaremos los billares duales con la teoría de twist maps y aplicaremos resultados de es-

ta teoría a billares duales. Veremos una relación entre billares duales y la dinámica de un oscilador con impacto. Explicaremos una dualidad entre los billares duales y los billares usuales, estudiando estos billares sobre la esfera  $S^2$ .

Nos hemos guiado por los trabajos de S. Tabachnikov [9], S. Tabachnikov [10], S. Tabachnikov [11], F. Dogru y S. Tabachnikov [2], B. Hasselblatt y A. Katok [3], Ph. Boyland [1] y A. Navas [7].

Una de las motivaciones para estudiar billares duales es el trabajo de Jurguen Moser [6], quien propone los billares duales como modelos simples para estudiar la estabilidad del sistema solar. La pregunta fundamental para esta estabilidad es averiguar si toda órbita de un billar dual es acotada. En todos los ejemplos considerados en esta tesis, toda órbita es acotada.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Definición de billar dual

En esta tesis consideraremos billares duales definidos por curvas suaves a pedazos y convexas. Por ejemplo, círculos, elipses, semicírculos, polígonos e imágenes de éstas vía alguna transformación afín. Para ello, debemos comenzar por extender la definición de billar dual dada en la introducción para curvas suaves y estrictamente convexas. Definimos ahora billar dual para curvas cerradas, suaves a pedazos, convexas.

Sea  $\Gamma$  una curva cerrada convexa, no necesariamente estrictamente convexa, suave a pedazos, contenida en el plano cartesiano. Sin pérdida de generalidad supondremos que el origen está contenido en el interior de  $\Gamma$ .

Diremos que una recta en el plano es **tangente** a  $\Gamma$  si la intersecta en un sólo punto. Por ejemplo, por el vértice de un polígono convexo pueden pasar varias rectas tangentes. Así mismo, si la curva convexa contiene un segmento de recta, por los puntos interiores de este segmento no pasan rectas tangentes.

Observemos que por un punto  $P$  en el exterior de  $\Gamma$  pueden pasar dos rectas tangentes a  $\Gamma$ , sólo una recta tangente, o ninguna recta tangente. Si por un punto  $P$  pasan dos rectas tangentes a  $\Gamma$ , llamamos **recta tangente principal** asociada a  $P$  a la recta tangente que queda a la derecha mirando desde  $P$  hacia  $\Gamma$ . Si  $\Gamma_P$  es el punto de tangencia de la recta principal con  $\Gamma$ , entonces  $\det(P, \Gamma_P) > 0$ . Si por  $P$  pasa sólo una recta tangente, diremos que esta recta es **tangente principal** asociada a  $P$  siempre que  $\det(P, \Gamma_P) > 0$  donde  $\Gamma_P$  es el punto de tangencia de esta recta con  $\Gamma$ .

Sea  $\mathcal{D} = \{P \in \Gamma^E \mid P \text{ tiene recta tangente principal}\}$ .

Definimos el **billar dual** como el par  $(\Gamma, T)$  donde

$$T : \mathcal{D} \rightarrow \Gamma^E \text{ está definido por } T(P) = 2\Gamma_P - P.$$

La función  $T$  se denomina **función billar dual**.

Esta definición coincide con la definición dada en la introducción para curvas suaves estrictamente convexas.

## 1.2. Otras definiciones

Sea  $\Gamma$  una curva cerrada simple del plano, suave (de clase  $C^\infty$ ), estrictamente convexa y parametrizada positivamente por  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ ,  $\mathbb{Z}$ -periódica. Dado  $\gamma(t) \in \Gamma$  llamamos **semi-recta tangente positiva** por  $\gamma(t)$  a la semi-recta basada en  $\gamma(t)$  en la dirección  $\gamma'(t)$ . Es decir, la semi-recta tangente positiva es el conjunto  $\{\gamma(t) + s\gamma'(t) \mid s \geq 0\}$ .

Un billar dual  $(\Gamma, T)$  es **integrable** si existe una función continua  $\varphi : \Gamma^E \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada **integral primera** del sistema, tal que  $\varphi(T(p)) = \varphi(p)$  para todo  $p \in \mathcal{D}$ . En este caso las órbitas del billar se encuentran sobre curvas de nivel de  $\varphi$ . La transformación  $T$  define una dinámica sobre cada curva de nivel.

Si  $\Gamma_0$  es una curva cerrada simple del plano y  $T : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$  es un homeomorfismo que preserva orientación, entonces, vía una parametrización  $\alpha : S^1 \rightarrow \Gamma_0$  obtenemos una función  $f : S^1 \rightarrow S^1$  continua de grado 1. Si  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un levantamiento de  $f$ , sabemos que

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n}$$

no depende de  $t \in \mathbb{R}$ . Este número no depende, módulo enteros, del levantamiento  $F$  [4],[7]. Elegimos  $F$  de modo que  $\rho(f) \in [0, 1[$ . Diremos que  $\rho(f) \in [0, 1[$  es el **número de rotación** de  $T : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$  y lo denotaremos  $\rho(T)$ . Por un cálculo inmediato resulta que si  $R_\theta : S^1 \rightarrow S^1$  es la rotación en ángulo  $\theta = 2\pi\alpha$  entonces  $\rho(R_\theta) = \alpha$ . Sabemos que  $\rho(R_\theta) \in \mathbb{Q}$  si y sólo si toda órbita de  $R_\theta$  es periódica, y en caso contrario, toda órbita de  $R_\theta$  es densa en  $S^1$ .

### 1.3. Parametrizaciones de $\Gamma^E$ , recubrimientos y levantamientos

#### 1.3.1. Primera parametrización de $\Gamma^E$

Sea  $\Gamma$  una curva cerrada del plano, suave y estrictamente convexa, parametrizada positivamente por longitud de arco por  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ .

Con esto, podemos definir las funciones  $\varphi_+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Gamma^E$  y  $\varphi_- : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Gamma^E$  respectivamente por

$$\varphi_+(t, s) = \gamma(t) + s\gamma'(t) \quad \text{y} \quad \varphi_-(t, s) = \gamma(t) - s\gamma'(t).$$

Observamos que si  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  entonces

$$\det D\varphi_+(t, s) = -s(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)) = s\kappa(t)$$

donde  $\kappa(t)$  es la curvatura de  $\Gamma$  en  $\gamma(t)$ .

Esto indica que si  $\Gamma$  tiene curvatura no nula en todo punto, entonces  $\varphi_+$ , respectivamente  $\varphi_-$ , bien parametrizan a abiertos de  $\Gamma^E$ . Más precisamente,  $\varphi_+$  y  $\varphi_-$  restringidas a abiertos  $]a, b[ \times \mathbb{R}_+$ , con  $b - a < \text{longitud de } \Gamma$ , parametrizan a abiertos de  $\Gamma^E$ . Observamos que  $\varphi_+$  y  $\varphi_-$  son recubrimientos de  $\Gamma^E$ . Usaremos esta parametrización para probar que si  $\Gamma$  es una curva de clase  $C^k$  entonces la función billar dual es de clase  $C^{k-1}$ .

#### 1.3.2. Segunda parametrización de $\Gamma^E$ , recubrimiento y levantamiento

Sea  $\Gamma$  una curva cerrada del plano, suave y estrictamente convexa. Parametrizamos  $\Gamma$  por  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ , donde  $\gamma(\alpha) \in \Gamma$  es el único punto en  $\Gamma$  tal que su recta tangente positiva forma un ángulo  $\alpha$  con un semi-eje polar fijo, como muestra la figura 1.1. Observamos que  $\gamma$  es  $2\pi$ -periódica.

Definimos el recubrimiento  $\Pi : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \Gamma^E$  dado por

$$(\alpha, r) \mapsto \gamma(\alpha) + r(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Si  $\gamma(\alpha) = (\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha))$ , entonces

$$\det D\Pi(\alpha, r) = \tilde{x}'(\alpha) \sin \alpha - \tilde{y}'(\alpha) \cos \alpha - r = -r \neq 0,$$

pues  $\gamma'(\alpha) = \lambda(\cos \alpha, \sin \alpha)$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Esto indica que  $\Pi$  bien parametriza a abiertos de  $\Gamma^E$ . Usaremos este recubrimiento para probar que la función billar dual  $T$  preserva área.

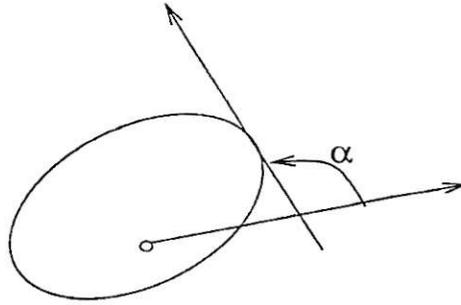


Figura 1.1: Segunda parametrización

Observamos que dado el recubrimiento  $\Pi : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \Gamma^E$ , la función billar dual  $T : \Gamma^E \rightarrow \Gamma^E$  tiene un levantamiento  $\mathcal{T} : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]0, \infty[$  de tal forma que si  $(\beta, R) = \mathcal{T}(\alpha, r)$  entonces  $0 < \beta - \alpha < \pi$ .

### 1.3.3. Tercera parametrización de $\Gamma^E$ , recubrimiento y levantamiento

Sea  $h \times I : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]0, \infty[$  la homotecia  $(t, r) \mapsto (2\pi t, r)$ . Entonces  $\Pi \circ (h \times I) : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \Gamma^E$  toma la forma

$$(t, r) \mapsto \gamma(2\pi t) + r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

y es también un recubrimiento de  $\Gamma^E$ , y bien parametriza a abiertos de  $\Gamma^E$ .

Asociado a este recubrimiento la función  $T : \Gamma^E \rightarrow \Gamma^E$  tiene un levantamiento  $\mathbf{T} : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]0, \infty[$  de tal forma que si  $(\tilde{t}, \tilde{r}) = \mathbf{T}(t, r)$  entonces  $0 < \tilde{t} - t < 1/2$ .

Usaremos este levantamiento de  $T$  para probar que todo billar dual es un twist map.

## Capítulo 2

# Resultados generales y dualidad

### 2.1. Preservación de área

En esta sección demostraremos un teorema de preservación de área para billares duales definidos por curvas suaves estrictamente convexas. El teorema también es cierto para billares duales en general. Esto resulta del hecho de que la preservación de área es una propiedad local.

Veremos dos demostraciones del teorema de preservación de área. La primera demostración es analítica y utiliza la función generatriz, la cual debe ser de clase  $C^2$ . Según veremos en la sección 2.5, una condición suficiente para tener esta hipótesis es que  $\Gamma$  sea de clase  $C^4$ . La segunda demostración del teorema de preservación de área es geométrica y sólo utiliza que  $\Gamma$  sea estrictamente convexa continua. En esta tesis asumimos que la preservación de área vale para cualquiera de los billares duales que consideremos.

**Teorema 2.1.1.** *La función billar dual  $T : \Gamma^E \rightarrow \Gamma^E$  preserva área (medida de Lebesgue).*

La primera demostración de este teorema es consecuencia de los lemas que enunciamos y demostramos a continuación.

Como suponemos que  $\Gamma$  es una curva suave estrictamente convexa, la función billar dual  $T$  está definida en todo  $\Gamma^E$ .

Consideremos la segunda parametrización de  $\Gamma^E$  descrita en la subsección 1.3.2 y recordemos que  $(\beta, R) = T(\alpha, r)$  es un levantamiento de  $T$  tal que  $0 < \beta - \alpha < \pi$ .

**Definición 2.1.2.** Si  $0 < \beta - \alpha < \pi$  definimos  $S(\alpha, \beta)$  como el área de la región delimitada por las tangentes a  $\Gamma$ , determinadas por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , y por el arco de  $\Gamma$  desde  $\gamma(\alpha)$  a  $\gamma(\beta)$ . La función  $S$  se llama función generatriz del billar dual.

En los tres lemas que siguen, denotamos por  $P$  el punto de intersección de las tangentes a  $\Gamma$  determinadas por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , y por  $r$  y  $R$  las distancias desde  $P$  hasta  $\gamma(\alpha)$  y  $\gamma(\beta)$  respectivamente.

**Lema 2.1.3.**

$$\partial_{\alpha} S(\alpha, \beta) = \frac{-r^2}{2} \quad y \quad \partial_{\beta} S(\alpha, \beta) = \frac{R^2}{2}.$$

**Demostración.**

Por definición sabemos que

$$\partial_{\alpha} S(\alpha, \beta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\alpha + \varepsilon, \beta) - S(\alpha, \beta)}{\varepsilon}$$

Sea  $l_{\varepsilon}$  la recta paralela a la tangente por  $\gamma(\alpha + \varepsilon)$  que pasa por  $\gamma(\alpha)$ . La tangente por  $\gamma(\alpha)$ ,  $l_{\varepsilon}$  y  $P$  determinan una región circular de área  $r^2\varepsilon/2$ . Sea  $d_{\varepsilon}$  la distancia entre  $l_{\varepsilon}$  y la tangente a  $\gamma$  por  $\gamma(\alpha + \varepsilon)$ . Luego tenemos que

$$\left| S(\alpha + \varepsilon, \beta) - S(\alpha, \beta) + \frac{r^2\varepsilon}{2} \right| \leq (r + 1)d_{\varepsilon} + k\varepsilon^2$$

para algún  $k > 0$  independiente de  $\varepsilon$ .

$$\text{Por lo tanto, } S(\alpha + \varepsilon, \beta) - S(\alpha, \beta) = \frac{-r^2\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

$$\text{De hecho, } d_{\varepsilon} = \left| \left\langle \gamma(\alpha + \varepsilon) - \gamma(\alpha), \frac{\gamma'^{\perp}(\alpha + \varepsilon)}{\|\gamma'^{\perp}(\alpha + \varepsilon)\|} \right\rangle \right|,$$

$$\text{y por lo tanto } \frac{d_{\varepsilon}}{\varepsilon} = \left| \left\langle \frac{\gamma(\alpha + \varepsilon) - \gamma(\alpha)}{\varepsilon}, \frac{\gamma'^{\perp}(\alpha + \varepsilon)}{\|\gamma'^{\perp}(\alpha + \varepsilon)\|} \right\rangle \right|.$$

Cuando  $\varepsilon$  tiende a 0 se tiene que  $\frac{\gamma(\alpha + \varepsilon) - \gamma(\alpha)}{\varepsilon}$  converge a  $\gamma'(\alpha)$ , y por lo tanto  $d_{\varepsilon}/\varepsilon$  converge a 0 con  $\varepsilon$ .

En conclusión  $\partial_{\alpha} S(\alpha, \beta) = -r^2/2$ .

La demostración es análoga para la segunda igualdad.

□

Sea  $\gamma(\alpha) = (\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha))$  la parametrización de  $\Gamma$  dada en la subsección 1.3.2.

Las coordenadas cartesianas  $(x, y) \in \Gamma^E$  en término de las coordenadas  $(\alpha, r)$  están dadas por

$$\begin{aligned}x &= \tilde{x}(\alpha) + r \cos \alpha \\y &= \tilde{y}(\alpha) + r \sin \alpha.\end{aligned}$$

Lema 2.1.4.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, r)} = r.$$

O lo que es lo mismo,  $dx dy = r d\alpha dr$ .

Demostración.

Calculando,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, r)} = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_\alpha x & \partial_r x \\ \partial_\alpha y & \partial_r y \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\alpha) - r \sin \alpha & \cos \alpha \\ \tilde{y}'(\alpha) + r \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \right| = |-r| = r$$

pues  $(\tilde{x}'(\alpha), \tilde{y}'(\alpha)) \parallel (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . □

Para probar que  $T$  preserva área (medida de Lebesgue  $dx dy$  en el plano cartesiano), basta probar que en coordenadas  $(\alpha, r)$  la transformación  $T$  preserva la medida  $r d\alpha dr$ .

Si  $A$  es una región abierta en el plano  $(\alpha, r)$  y  $B = T(A)$  es el abierto correspondiente en el plano  $(\beta, R) = T(\alpha, r)$ , debemos probar que

$$\iint_B R d\beta dR = \iint_A r d\alpha dr.$$

Por cambio de coordenadas se tiene

$$\iint_B R dR d\beta = \iint_A R(r, \alpha) \frac{\partial(\beta, R)}{\partial(\alpha, r)} d\alpha dr.$$

Por lo tanto, el teorema 2.1.1 queda probado al demostrar el siguiente lema.

Lema 2.1.5.

$$\frac{\partial(\beta, R)}{\partial(\alpha, r)} = \frac{r}{R}.$$

**Demostración.**

Puesto que  $\partial_\alpha S(\alpha, \beta) = -r^2/2$ , si derivamos con respecto a  $\alpha$  y a  $r$  respectivamente se obtiene:

$$\partial_\alpha \partial_\alpha S \cdot \partial_\alpha \alpha + \partial_\beta \partial_\alpha S \cdot \partial_\alpha \beta = 0$$

$$\partial_\alpha \partial_\alpha S \cdot \partial_r \alpha + \partial_\beta \partial_\alpha S \cdot \partial_r \beta = -r$$

Considerando que  $\alpha$  no depende de  $r$ , se obtiene:

$$\partial_\alpha \partial_\alpha S + \partial_\beta \partial_\alpha S \cdot \partial_\alpha \beta = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial_\beta \partial_\alpha S \cdot \partial_r \beta = -r \quad (2.2)$$

Análogamente, puesto que  $\partial_\beta S(\alpha, \beta) = R^2/2$

$$\partial_\alpha \partial_\beta S + \partial_\beta \partial_\beta S \cdot \partial_\alpha \beta = R \partial_\alpha R \quad (2.3)$$

$$\partial_\beta \partial_\beta S \cdot \partial_r \beta = R \partial_r R \quad (2.4)$$

Por (2.2) se tiene que  $\partial_\beta \partial_\alpha S \neq 0$ . De (2.1) se obtiene  $\partial_\alpha \beta = -\frac{\partial_\alpha \partial_\alpha S}{\partial_\beta \partial_\alpha S}$  y de (2.2) se tiene que  $\partial_r \beta = -\frac{r}{\partial_\beta \partial_\alpha S}$

Reemplazando en (2.3) y (2.4) respectivamente se obtiene,

$$\partial_\alpha R = \frac{1}{R} \left( \partial_\alpha \partial_\beta S - \frac{\partial_\alpha \partial_\alpha S \cdot \partial_\beta \partial_\beta S}{\partial_\alpha \partial_\beta S} \right)$$

y

$$\partial_r R = \frac{1}{R} \left( -\frac{r \cdot \partial_\beta \partial_\beta S}{\partial_\alpha \partial_\beta S} \right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial(\beta, R)}{\partial(\alpha, r)} = |\partial_\alpha \beta \partial_r R - \partial_r \beta \partial_\alpha R| = \left| \frac{r}{R} \right| = \frac{r}{R}.$$

□

Esto termina la primera demostración del teorema 2.1.1.

## 2.2. Una demostración geométrica del Teorema 2.1.1

Sea  $\delta : [0, \varepsilon] \rightarrow \Gamma^E$  una curva suave tal que  $\det(\delta'(t), \Gamma_{\delta(t)} - \delta(t)) > 0$   $\forall t \in [0, \varepsilon]$ . Sea  $\tilde{\delta} : [0, \varepsilon] \rightarrow \Gamma^E$  definida por  $\tilde{\delta}(t) = \delta(t) + s(t)(\Gamma_{\delta(t)} - \delta(t))$ , donde  $s : [0, \varepsilon] \rightarrow ]1, \infty[$  es continua.

Sea  $\ell$  el segmento de recta que une  $\delta(\varepsilon)$  con  $\tilde{\delta}(0)$ . Dado  $t \in [0, \varepsilon]$  denotaremos por  $\ell_t$  el segmento de recta que une  $\delta(t)$  con  $\tilde{\delta}(t)$ , y denotamos por  $A(t)$  el área de la región encerrada por los segmentos  $\ell$  y  $\ell_t$ , y por los trozos de curvas en  $\delta$  y  $\tilde{\delta}$  que unen los extremos de estos dos segmentos, como se muestra en la Figura 2.1.

Dados  $t < t'$  en  $[0, \varepsilon]$ , sean  $\Delta(t, t')$  y  $\tilde{\Delta}(t, t')$  los triángulos formados por segmentos de  $\ell_t$  y  $\ell_{t'}$  y por arcos de  $\delta$  y  $\tilde{\delta}$  respectivamente. Es geoméricamente claro que  $A(t) = A(0)$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$  si y sólo si  $\text{Área}(\Delta(t, t')) = \text{Área}(\tilde{\Delta}(t, t'))$  para todo  $t < t'$ . De la definición de  $T$  resulta que  $\tilde{\delta}(t) = T(\delta(t))$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$  si y sólo si  $s(t) \equiv 2$ .

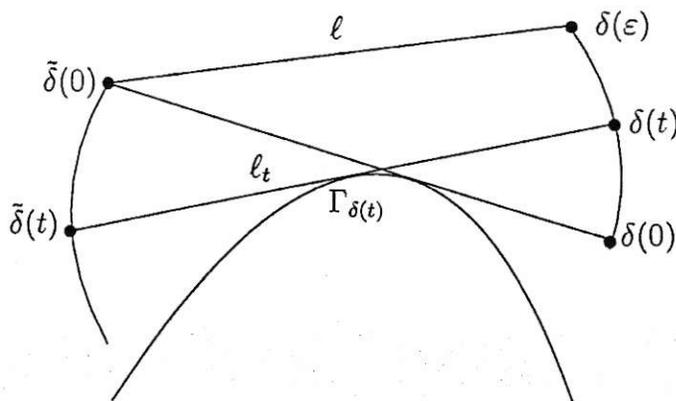


Figura 2.1

**Lema 2.2.1.**  $A(t) = A(0)$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$  si y sólo si  $\tilde{\delta}(t) = T(\delta(t))$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$ .

**Demostración.**

Supongamos  $A(t) = A(0)$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$  y probemos que  $s(t) \equiv 2$ .

Supongamos que  $s(t) \neq 2$  para algún  $t \in [0, \varepsilon]$ , digamos que  $s(t) > 2$ .

Entonces, el segmento  $\overline{\Gamma_{\delta(t)}, \tilde{\delta}(t)}$  tiene longitud mayor que el segmento  $\overline{\delta(t), \Gamma_{\delta(t)}}$ , y lo mismo ocurre para todo  $t'$  cercano a  $t$ . El triángulo  $\Delta(t, t')$  se refleja, con respecto al vértice común, propiamente en el triángulo  $\tilde{\Delta}(t, t')$  cubriendo un área menor. Esto contradice la hipótesis.

Probemos ahora el recíproco. Supongamos  $s(t) \equiv 2$  (es decir,  $\tilde{\delta}(t) = T(\delta(t))$ ) para todo  $t \in [0, \varepsilon]$  y probemos que  $A(t) = A(0)$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$ .

Supongamos que  $A(t_0) \neq A(0)$  para algún  $t_0$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $A(t_0) > A(0)$ . Por continuidad, para toda curva  $\hat{\delta}(t) = \delta(t) + \hat{s}(t)(\Gamma_{\delta(t)} - \delta(t))$ , con  $\hat{s}(0) = 2$ ,  $\hat{s}(t) < 2$  y  $|2 - \hat{s}(t)|$  suficientemente pequeño para todo  $t \in ]0, t_0]$ , se tendrá que  $\hat{A}(t_0) > A(0)$ , donde  $\hat{A}(t)$  es el área de la región encerrada por  $\ell, \ell_t, \delta$  y  $\hat{\delta}$ . Observamos que  $\hat{A}(0) = A(0)$ . Pero  $\hat{s}(t) < 2$  implica que  $\hat{A}(t)$  es decreciente. De hecho, para cada  $t$  fijo, y todo  $t' > t$  suficientemente cercano, el área del correspondiente triángulo  $\hat{\Delta}(t, t')$  es menor que el área del triángulo  $\Delta(t, t')$ . Entonces  $\hat{A}(t) > \hat{A}(t')$ . Como esto ocurre para todos  $t < t'$  cercanos, se tiene que  $\hat{A}$  es decreciente.

Esto implica que  $\hat{A}(t_0) < A(0)$ , lo que es una contradicción.

□

Demostremos ahora el Teorema 2.1.1

Sea  $\delta_1 : [0, \varepsilon] \rightarrow \Gamma^E$  una curva suave tal que

$$\det(\delta_1'(t), \Gamma_{\delta_1(t)} - \delta_1(t)) > 0 \text{ para todo } t \in [0, \varepsilon].$$

Sea  $\bar{s} : [0, \varepsilon] \rightarrow ]0, 1/2[$  continua, y sea  $\delta_2 : [0, \varepsilon] \rightarrow \gamma^E$  definida por  $\delta_2(t) = \delta_1(t) + \bar{s}(t)(\Gamma_{\delta_1(t)} - \delta_1(t))$ .

Sea  $R$  la región encerrada por las curvas  $\delta_1, \delta_2$  y los segmentos que unen sus extremos. Por el lema anterior es claro que  $\text{Área}(R) = \text{Área}(T(R))$ . Como la invariancia de área es una propiedad local, esto basta para probar el teorema.

### 2.3. Invariancia por transformación afín

En esta sección probaremos el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $(\Gamma, T)$  un billar dual. Sea  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación afín invertible. Sea  $\tilde{\Gamma} = A(\Gamma)$  y  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{T})$  el billar dual asociado a  $\tilde{\Gamma}$ . Entonces  $A\tilde{T} = \tilde{T}A$ . Es decir,  $A$  conjuga a  $T$  con  $\tilde{T}$ .*

**Demostración.**

Si  $A$  es una translación, entonces el teorema es inmediato. Supongamos entonces que  $A$  es un isomorfismo lineal del plano. Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$  una parametrización de  $\Gamma$  como en 1.3.1. Entonces  $\tilde{\gamma} = A \circ \gamma$  parametriza a  $\tilde{\Gamma}$  y en este caso  $\tilde{\gamma}'(t) = A\gamma'(t)$ .

Si  $P = \gamma(t) - s\gamma'(t) \in \Gamma^E$  para algún  $t \in \mathbb{R}$  y  $s > 0$ , entonces

$$A(T(P)) = A(\gamma(t) + s\gamma'(t)) = \tilde{\gamma}(t) + s\tilde{\gamma}'(t),$$

y

$$\tilde{T}(A(P)) = \tilde{T}(\tilde{\gamma}(t) - s\tilde{\gamma}'(t)) = \tilde{\gamma}(t) + s\tilde{\gamma}'(t).$$

□

### 2.4. Dualidad

A continuación explicaremos el nombre de *Billar Dual*. La teoría de billares está relacionada con rebotes de una partícula en el interior de una curva cerrada estrictamente convexa, por lo que bien podemos hablar de *Billares internos*. Hemos visto que el dominio de un billar dual está contenido en el exterior de una curva cerrada estrictamente convexa, por lo que también podemos hablar de *Billares externos*.

Recordemos que en el plano, un billar interno describe la evolución de una partícula en el interior de una curva suave cerrada y convexa, que se mueve en forma rectilínea y rebota en los bordes según la ley de rebote usual: el ángulo con de incidencia es igual al ángulo de salida. Como hemos visto, el billar externo describe la evolución de un punto en el exterior de una curva suave cerrada y convexa, que se refleja sobre su recta tangente principal con respecto al punto de tangencia.

Análogamente en la esfera  $S^2$  se puede definir billares internos y externos de acuerdo a las mismas reglas de rebote en un billar interno, y de reflexión en un billar externo.

Según veremos, en la esfera  $S^2$  existe una dualidad entre estas reglas que definen billares internos y billares externos, sin embargo, en general, las dinámicas de ambos billares no están relacionadas.

Consideremos la esfera unitaria  $S^2$ . En la esfera diremos que una curva  $\Gamma$  suave, simple y cerrada es **estrictamente convexa** si todo círculo máximo tangente a  $\Gamma$ , digamos en un punto  $P$ , deja a  $\Gamma \setminus \{P\}$  estrictamente contenida en uno de los dos hemisferios abiertos determinados por el círculo máximo tangente.

Si  $\Gamma$  es estrictamente convexa, definiremos el **interior** de  $\Gamma$  como la componente conexa de  $S^2 \setminus \Gamma$  que no contiene los círculos máximos tangentes a  $\Gamma$ . La otra componente conexa es el **exterior** de  $\Gamma$ .

Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de círculos máximos orientados en la esfera  $S^2$ .

Observamos que si  $L \in \mathcal{C}$  y  $l(s)$  es una parametrización por longitud de arco de  $L$ , entonces  $l(s) \times l'(s) \in S^2$  no depende de  $s$ . De hecho, si  $v = l(0)$  y  $v^t = l'(0) = l'(\pi/2)$  entonces  $l(s) = \cos(s)v + \sin(s)v^t$ , y por un cálculo simple  $l(s) \times l'(s) = v \times v^t$  para todo  $s$ . Esto permite definir una función  $D : \mathcal{C} \rightarrow S^2$  por

$$D(L) = l(s) \times l'(s).$$

A seguir, probaremos que  $D$  es una biyección.

**Lema 2.4.1.** *La función  $D : \mathcal{C} \rightarrow S^2$  es biyectiva.*

**Demostración.**

La función  $D$  es epiyectiva pues dado  $w \in S^2$  tomamos un vector  $v \in S^2$  con  $v \perp w$  y consideramos  $v^\perp = w \times v$ . Entonces la curva  $L \in \mathcal{C}$  parametrizada por  $l(s) = \cos(s)v + \sin(s)v^\perp$  es tal que  $D(L) = w$ .

La función  $D$  es inyectiva, pues para todo  $w \in S^2$  existe un único círculo máximo orientado  $L \in \mathcal{C}$  contenido en el plano perpendicular a  $w$  tal que  $D(L) = w$ .

□

Recordemos que en  $S^2$  tenemos la métrica estándar  $d_{S^2}$  dada por

$$d_{S^2}(v, w) = \text{longitud de la geodésica entre } v \text{ y } w = \angle(v, w) \in [0, \pi].$$

Por el lema anterior, definimos una métrica  $d_{\mathcal{C}}$  en  $\mathcal{C}$  por,

**Definición 2.4.2.**  $d_{\mathcal{C}}(L_1, L_2) = d_{S^2}(D(L_1), D(L_2))$ , para todos  $L_1, L_2 \in \mathcal{C}$ .

Por esta definición, resulta entonces que  $D$  es una isometría.

Dados  $L_1, L_2 \in \mathcal{C}$ , sea  $v \in L_1 \cap L_2$ , y sean  $l_1, l_2$  parametrizaciones por longitud de arco de  $L_1, L_2$  respectivamente, tales que  $l_1(0) = l_2(0) = v$ . Definimos  $v_1^t = l_1'(0)$  y  $v_2^t = l_2'(0)$ . Observamos que el ángulo  $\angle(v_1^t, v_2^t)$ , medido en radianes, cumple  $0 \leq \angle(v_1^t, v_2^t) \leq \pi$ .

**Lema 2.4.3.**  $d_{S^2}(D(L_1), D(L_2)) = d_{S^2}(v_1^t, v_2^t)$ .

Sabemos que  $D(L_1) = v \times v_1^t$  y  $D(L_2) = v \times v_2^t$ . Debemos probar que  $\angle(v_1^t, v_2^t) = \angle(v \times v_1^t, v \times v_2^t)$ . Puesto que  $v \times v_1^t$  y  $v \times v_2^t$  están contenidos en el plano generado por  $v_1^t$  y  $v_2^t$ , y además  $(v \times v_1^t) \perp v_1^t$ ,  $(v \times v_2^t) \perp v_2^t$  se tiene lo afirmado. Esto prueba el lema.  $\square$

Nos interesa ahora determinar la imagen por  $D$  del conjunto de círculos máximos orientados que contienen a un punto dado  $v \in S^2$ . Dado  $v \in S^2$  y  $w \in T_v S^2$  sea  $L_{v,w}$  el círculo máximo que pasa por  $v$  en la dirección y sentido de  $w$ , y sea  $\mathcal{C}_v = \{L_{v,w} \in \mathcal{C} \mid w \in T_v S^2\}$ .

**Lema 2.4.4.** Para cada  $v \in S^2$  se tiene que  $D(\mathcal{C}_v)$  es un círculo máximo.

**Demostración.**

Sea  $v \in S^2$  y  $v^t \in T_v S^2$  un vector unitario fijo cualquiera. Entonces  $\theta \mapsto L_{v, \cos \theta v^t + \sin \theta (v \times v^t)}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ , describe (parametriza) los círculos máximos en  $\mathcal{C}_v$ . Calculando se obtiene que  $D(L_{v, \cos \theta v^t + \sin \theta (v \times v^t)}) = \cos \theta (v \times v^t) - \sin \theta v^t \in D(\mathcal{C}_v)$ . Puesto que los vectores  $v \times v^t$  y  $v^t$  son ortonormales, se tiene que  $\theta \mapsto \cos \theta (v \times v^t) - \sin \theta v^t$  parametriza al círculo máximo  $D(\mathcal{C}_v)$ .  $\square$

Dada una curva suave  $\gamma(s)$  en  $S^2$  con  $|\gamma'(s)| = 1$ , a la recta  $L_{\gamma(s), \gamma'(s)}$  la denotamos por  $L_{\gamma(s)}$ .

**Definición 2.4.5.** Sea  $\Gamma$  una curva suave en  $S^2$  parametrizada por longitud de arco por  $\gamma$ . Se define  $\Gamma^*$ , la curva dual de  $\Gamma$ , como la curva en  $S^2$  parametrizada por  $\gamma^*(s) = D(L_{\gamma(s)}) = \gamma(s) \times \gamma'(s)$ .

**Lema 2.4.6.** Si  $\Gamma$  es una curva suave en  $S^2$  parametrizada por longitud de arco por  $\gamma$ , entonces  $D(\mathcal{C}_{\gamma(s)}) = |L_{(\gamma^*)'(s)}|$  para todo  $s$ , donde  $|L_{v,w}|$  designa al círculo máximo  $L_{v,w}$  sin orientación.

**Demostración.**

Dado  $s$ , sabemos que  $\gamma(s)$  es un punto en la curva  $\Gamma$  y  $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)} S^2$ . Por el lema 2.4.4,  $\delta : \theta \mapsto \cos(\theta)(\gamma(s) \times \gamma'(s)) - \sin(\theta)\gamma'(s)$  es una parametrización

del círculo máximo  $D(\mathcal{C}_{\gamma(s)})$ . Entonces, un vector tangente al círculo máximo  $D(\mathcal{C}_{\gamma(s)})$  en  $\gamma^*(s)$  es

$$\delta'(0) = [-\operatorname{sen}(\theta)(\gamma(s) \times \gamma'(s)) - \cos(\theta)\gamma'(s)]|_{\theta=0} = -\gamma'(s).$$

Probemos ahora que  $(\gamma^*)'(s)$  y  $\gamma'(s)$  son vectores que tiene la misma dirección (sin considerar el sentido).

Como  $\gamma^*(s) = \gamma(s) \times \gamma'(s)$ , tenemos que el vector tangente a  $\Gamma^*$  en  $\gamma^*(s)$  es el vector  $(\gamma^*)'(s) = \gamma'(s) \times \gamma'(s) + \gamma(s) \times \gamma''(s) = \gamma(s) \times \gamma''(s)$ . Como  $\gamma'(s) \perp \gamma(s)$  y  $\gamma'(s) \perp \gamma''(s)$ , tenemos que  $(\gamma^*)'(s) = \gamma(s) \times \gamma''(s)$  tiene la dirección de  $\gamma'(s)$ . Concluimos entonces que  $D(\mathcal{C}_{\gamma(s)}) = |L_{\gamma^*(s)}|$ .  $\square$

**Lema 2.4.7.** *Si  $\Gamma$  es una curva suave ( $C^\infty$ ), cerrada, simple, estrictamente convexa en  $S^2$ , entonces la curva dual  $\Gamma^*$  es suave, cerrada, simple, estrictamente convexa en  $S^2$ .*

**Demostración.**

Sólo probaremos que  $\Gamma^*$  es estrictamente convexa. Sea  $\gamma$  parametrización por longitud de arco de  $\Gamma$  y sea  $\gamma^* = \gamma \times \gamma'$  parametrización dual de  $\Gamma^*$ . Si  $\Gamma^*$  no es estrictamente convexa, entonces existe  $s_0$  tal que el círculo máximo tangente a  $\Gamma^*$  en  $\gamma^*(s_0)$  corta a  $\Gamma^*$  en otro punto  $\gamma^*(s_1) \neq \gamma^*(s_0)$ . Por un lado, puesto que  $\gamma^*(s_1) \in \Gamma^*$ , sabemos que

$$\gamma^*(s_1) = \gamma(s_1) \times \gamma'(s_1) = D(L_{\gamma(s_1)}).$$

Por otro lado, como  $\gamma^*(s_1) \in L_{\gamma^*(s_0)} = D(\mathcal{C}_{\gamma(s_0)})$  existe  $L \in \mathcal{C}_{\gamma(s_0)}$  tal que  $D(L) = \gamma^*(s_1)$ . Necesariamente,  $L \neq L_{\gamma(s_1)}$  pues  $\Gamma$  es estrictamente convexa,  $\gamma(s_1) \neq \gamma(s_0)$  y  $\gamma(s_0) \in L$ . Esto contradice la inyectividad de  $D$  pues ya vimos que  $D(L) = D(L_{\gamma(s_1)})$ . Esto prueba el lema.  $\square$

A continuación explicaremos la dualidad que existe entre billares internos y externos considerando el billar interno en  $\Gamma$  y el billar externo en  $\Gamma^*$ . La ley de rebote en el interior de  $\Gamma$  es dual a la ley de reflexión sobre una tangente al exterior de  $\Gamma^*$ .

Sea  $\Gamma$  una curva suave en  $S^2$ , cerrada, simple y estrictamente convexa. Sea  $\Gamma^*$  su curva dual. Sean  $\gamma$  y  $\gamma^*$  sus parametrizaciones estándar por longitud de arco.

Sea  $P$  un punto en el exterior de  $\Gamma^*$  y supongamos que  $P \in L_{\gamma^*(s_0)}$ . Entonces, la ley de reflexión para billares externos dice que  $T(P) \in L_{\gamma^*(s_0)}$  es tal que  $d_{S^2}(P, \gamma^*(s_0)) = d_{S^2}(\gamma^*(s_0), T(P))$ .

Ahora bien, puesto que  $P, \gamma^*(s_0)$  y  $T(P)$  están en  $L_{\gamma^*(s_0)} = D(\mathcal{C}_{\gamma(s_0)})$ , entonces  $P = D(L_e)$  y  $T(P) = D(L_s)$  para ciertas  $L_e, L_s \in \mathcal{C}_{\gamma(s_0)}$ .

Sabemos que  $\gamma^*(s_0) = D(L_{\gamma(s_0)})$ . Por la definición 2.4.2 tenemos que

$$d_{\mathcal{C}}(L_e, L_{\gamma(s_0)}) = d_{S^2}(P, \gamma^*(s_0)) = d_{S^2}(\gamma^*(s_0), T(P)) = d_{\mathcal{C}}(L_{\gamma(s_0)}, L_s).$$

Si una bola al interior de  $\Gamma$  se desplaza según la orientación del círculo máximo orientado  $L_e$  y llega a  $\gamma(s_0) \in \Gamma$  formando un cierto ángulo con  $\gamma'(s_0)$ , entonces la ley de rebote nos indica que la bola saldrá por un círculo máximo orientado que forma el mismo ángulo con  $\gamma'(s_0)$ . Puesto que  $d_{\mathcal{C}}(L_e, L_{\gamma(s_0)}) = d_{\mathcal{C}}(L_{\gamma(s_0)}, L_s)$ , y por el lema 2.4.3, si la bola llega por  $L_e$  debe salir por  $L_s$ . Esto explica la dualidad entre billares internos y billares externos en la esfera  $S^2$ .

## 2.5. Derivabilidad

En esta sección veremos la derivabilidad de la función billar dual y de la función generatriz.

Para ver la derivabilidad de la función billar dual usaremos la parametrización de  $\Gamma^E$  de la sección 1.3.1. Sea  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$  una parametrización por longitud de arco.

**Lema 2.5.1.** *Si  $\tilde{\gamma}$  es de clase  $C^k$ , entonces la función billar dual  $T$  es de clase  $C^{k-1}$ .*

**Demostración.**

Si  $\tilde{\gamma}$  es de clase  $C^k$  entonces las parametrizaciones de la sección 1.3.1  $\varphi_+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Gamma^E \subset \mathbb{R}^2$  y  $\varphi_- : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Gamma^E \subset \mathbb{R}^2$  son funciones de clase  $C^{k-1}$ . La función billar dual  $T : \Gamma^E \rightarrow \Gamma^E$  en coordenadas toma la forma

$$\bar{T}(t, s) = (\varphi_-^{-1} \circ T \circ \varphi_+)(t, s) = (t, s).$$

Puesto que  $\bar{T}$  es  $C^\infty$  resulta que  $T = \varphi_- \circ \bar{T} \circ \varphi_+^{-1}$  es de clase  $C^{k-1}$ .  $\square$

Ahora veamos la derivabilidad de la función generatriz  $S(\alpha, \beta)$ .

Si  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$  es una parametrización por longitud de arco de clase  $C^k$  de  $\Gamma$  entonces el ángulo  $\alpha = \arg(\tilde{\gamma}'(t)) = \Im(\ln(\tilde{\gamma}'(t)))$  depende en clase  $C^{k-1}$  del parámetro  $t$ . Si  $\Gamma$  es convexa con curvatura positiva entonces  $t \mapsto \alpha$  es un difeomorfismo con inversa  $t = t(\alpha)$  de clase  $C^{k-1}$ . Por lo tanto, si  $\Gamma$  es convexa con curvatura positiva de clase  $C^k$ , entonces la parametrización  $2\pi$  periódica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$  de la sección 1.3.2 es de clase  $C^{k-1}$ . De hecho,  $\gamma(\alpha) = \tilde{\gamma}(t(\alpha))$ .

La función generatriz es esencialmente el área entre la curva y su recta tangente.

**Lema 2.5.2.** *Si  $\beta = f(\alpha)$ ,  $0 \leq \alpha$ , es función convexa ( $f'' > 0$ ) de clase  $C^r$ , entonces la función área entre el gráfico de  $f$  y su tangente, depende en clase  $C^{r-1}$  de  $\alpha$ .*

**Demostración.**

La función área está dada por

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_0^\alpha (f(\theta) - (f'(\alpha)(\theta - \alpha) + f(\alpha)))d\theta \\ &= \int_0^\alpha f(\theta)d\theta - f'(\alpha) \int_0^\alpha \theta d\theta + \int_0^\alpha (f'(\alpha)\alpha - f(\alpha))d\theta \\ &= \int_0^\alpha f(\theta)d\theta + \frac{\alpha^2}{2}f'(\alpha) - \alpha f(\alpha) \end{aligned}$$

que es una función  $C^{r-1}$  en  $\alpha$ . □

De ambos lemas concluimos el siguiente corolario.

**Corolario 2.5.3.** *Si  $\Gamma$  es una curva convexa de curvatura positiva de clase  $C^k$ , entonces la función generatriz  $S(\alpha, \beta)$  es una función de clase  $C^{k-2}$ .*

## Capítulo 3

# Ejemplos de Billares duales

### 3.1. Billar dual circular y elipsoidal

Sea  $\Gamma = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  el círculo unidad y sea  $(\Gamma, T)$  el billar dual asociado.

Sea  $O = (0, 0)$  el origen. Por geometría de triángulos tenemos que para cada  $P \in \Gamma^E$  los triángulos  $OP\Gamma_P$  y  $OT(P)\Gamma_P$  son congruentes, y por lo tanto  $\|T(P)\| = \|P\|$ . (Ver figura 3.1) Esto prueba que las órbitas del billar dual circular se mueven sobre círculos concéntricos al origen, y por lo tanto el billar dual circular es integrable con integral primera  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ .

Así mismo, por congruencia de triángulos se prueba que  $T \circ R_\theta = R_\theta \circ T$  para toda rotación  $R_\theta$ . Se deduce entonces que la acción de  $T$  sobre cada círculo  $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ ,  $R > 1$ , es una rotación. De hecho,

**Lema 3.1.1.** *Sea  $(\Gamma, T)$  el billar dual circular. Entonces  $T : S_R \rightarrow S_R$  es la rotación en ángulo  $\theta(R) = 2 \arccos(1/R)$ .*

**Demostración.**

La demostración es clara por la Figura 3.1:

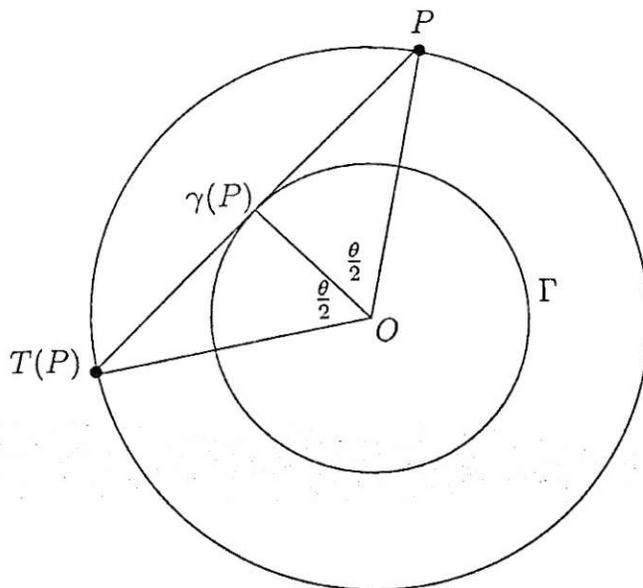


Figura 3.1: Billar dual circular.

□

Observamos que la función  $R \mapsto \theta(R)$ ,  $R > 1$ , es continua, estrictamente creciente y bi-unívoca sobre  $]0, \pi[$ . Si  $\rho(R)$  denota el número de rotación de  $T|_{S_R}$  entonces la función

$$R \mapsto \rho(R) = \frac{2 \arccos(1/R)}{2\pi}, \quad R > 1,$$

es continua, estrictamente creciente y bi-unívoca sobre  $]0, 1/2[$ . De la sección 1.2 se tiene que existe un conjunto denso de círculos  $S_R$  tales que  $T|_{S_R}$  contiene sólo órbitas periódicas. Se deduce que el conjunto de órbitas periódicas de  $T$  es denso en el dominio. Sobre los restantes círculos (también un conjunto denso)  $T|_{S_R}$  es minimal, es decir, todas sus órbitas son densas en  $S_R$ .

Si  $\tilde{\Gamma}$  es una elipse en el plano, sabemos que existe una transformación afín  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , invertible, tal que  $A(S^1) = \tilde{\Gamma}$ . Sea  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{T})$  el billar dual

definido por  $\tilde{\Gamma}$ . Por la invariancia vista en 2.3 sabemos que  $A$  conjuga las dinámicas de  $T$  y  $\tilde{T}$ , a saber  $\tilde{T} \circ A = A \circ T$ . Esto implica que el billar dual elipsoidal  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{T})$  es integrable con integral primera  $\psi = \varphi \circ A^{-1}$ . Así mismo, tiene un conjunto denso de órbitas periódicas y un conjunto denso de elipses minimales.

Se conjetura que éstos son los únicos billares duales integrables.

### 3.2. Un Billar dual Poligonal: El Cuadrado

A continuación estudiaremos el billar dual cuya curva  $\Gamma$  es un cuadrado. Dado que esta curva es convexa pero no estrictamente convexa, existen puntos en  $\Gamma^E$  que no tienen una recta tangente principal asociada, por lo que la función billar dual  $T$  no está definida para todo punto en  $\Gamma^E$ . Debemos entonces encontrar el dominio de la función  $T$ .

Si ubicamos los vértices de  $\Gamma$  en los puntos  $v_0 = (1, 1)$ ,  $v_1 = (-1, 1)$ ,  $v_2 = (-1, -1)$  y  $v_3 = (1, -1)$  del plano cartesiano, podemos notar que los puntos que no tienen recta tangente principal son aquellos que pertenecen a los rayos  $\ell_0 = [1, \infty[ \times \{1\}$ ,  $\ell_1 = \{-1\} \times [1, \infty[$ ,  $\ell_2 = ]-\infty, -1] \times \{-1\}$  y  $\ell_3 = \{1\} \times ]-\infty, -1[$ .

El dominio de la función  $T$  es  $\mathcal{D} = \Gamma^E \setminus \{\ell_0 \cup \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3\}$ , conjunto con cuatro componentes arco-conexas. Es decir,  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$ , donde

$$\mathcal{D}_0 = \{(x, y) \in \mathcal{D} / x > 1, y < 1\}, \quad \mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathcal{D} / x > -1, y > 1\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathcal{D} / x < -1, y > -1\}, \quad \mathcal{D}_3 = \{(x, y) \in \mathcal{D} / x < 1, y < -1\}.$$

La función billar dual  $T$  restringida a la componente  $\mathcal{D}_i$ , que denotaremos por  $T_i$ , es una reflexión con respecto al vértice  $v_i$ . Si  $(x, y) \in \mathcal{D}_i$ , para algún  $i = 0, 1, 2, 3$ , entonces  $T(x, y) = T_i(x, y) = -((x, y) - v_i) + v_i = -(x, y) + 2v_i$ . Vemos entonces que  $T$  es una rotación en el ángulo  $\pi$  (reflexión con respecto al origen), compuesta con una traslación, es decir, una isometría.

Para estudiar el billar cuadrado, consideremos las traslaciones  $t_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en el vector  $w$ , es decir,  $t_w : p \mapsto p + w$ ; y las rotaciones  $R_\beta$  en ángulo  $\beta$ .

**Lema 3.2.1.** Sean  $\psi_i = t_{w_i} \circ R_\pi$ , con  $i = 1, 2$ , y  $\varphi = t_w$  transformaciones del plano. Entonces,

1.  $\psi_1 \circ \psi_2 = t_{w_1 - w_2}$ ,
2.  $\psi_1 \circ \varphi = t_{w_1 - w} \circ R_\pi$ .

**Demostración.**

Sea  $p \in \mathbb{R}^2$ . Entonces,

1.  $(\psi_1 \circ \psi_2)(p) = \psi_1(-p + w_2) = -(-p + w_2) + w_1$   
 $= p + (w_1 - w_2) = t_{w_1 - w_2}(p)$ .
2.  $(\psi_1 \circ \varphi)(p) = \psi_1(p + w) = -(p + w) + w_1$   
 $= -p + (w_1 - w) = (t_{w_1 - w} \circ R_\pi)(p)$ .

□

Concluimos con este lema, que  $T^k$  es una traslación si  $k$  es par, y una traslación compuesta con  $R_\pi$  si  $k$  es impar. Las traslaciones dependen del punto donde se evalúa  $T^k$ .

En el siguiente lema demostraremos que la función billar dual cuadrado commuta con la rotación en  $\pi/2$ .

**Lema 3.2.2.**  $T \circ R_{\frac{\pi}{2}} = R_{\frac{\pi}{2}} \circ T$ , donde  $R_{\frac{\pi}{2}}$  es la rotación en  $\frac{\pi}{2}$  respecto al origen.

**Demostración.**

Sea  $(x, y) \in \mathcal{D}_i$  para algún  $i = 0, 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} (R_{\frac{\pi}{2}} \circ T)(x, y) &= R_{\frac{\pi}{2}} \circ T_i(x, y) = R_{\frac{\pi}{2}} \circ (t_{2v_i} \circ R_\pi)(x, y) \\ &= (y, -x) + R_{\frac{\pi}{2}}(2v_i) = (y, -x) + 2v_{i+1(\text{mod}4)}. \end{aligned}$$

$$(T \circ R_{\frac{\pi}{2}})(x, y) = T_{i+1(\text{mod}4)}(-y, x) = (y, -x) + 2v_{i+1(\text{mod}4)}.$$

□

Puesto que necesitamos estudiar las órbitas del sistema dinámico  $(\Gamma, T)$ , consideremos  $\tilde{\mathcal{D}}$  el conjunto de puntos en  $\mathcal{D}$  en los que la función  $T$  se puede iterar infinitas veces. Es decir,

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{(x, y) \in \mathcal{D} / T^j(x, y) \in \mathcal{D} \quad \forall j \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(\mathcal{D}),$$



En la Figura 3.2, se representan los cuadrados  $C_{i,j} \subseteq C_k$ , con  $k = 1, 2, 3$  y lo que se muestra achurado es el conjunto  $C_3$ .

**Teorema 3.2.3.**

1. Si  $C_{i,j} \subseteq C_k$ , entonces  $T(C_{i,j}) = C_{i',j'} \subseteq C_k$  para ciertos  $i', j'$  tales que  $|i'| + |j'| = k$ . La aplicación  $T$  actúa como una permutación de los cuadrados de  $C_k$ .  $T(C_k) = C_k$ .
2. Si  $C_{i,j} \subseteq C_k$  y  $C_{i',j'} = T(C_{i,j})$ , entonces  $C_{i',j'}$  es el cuadrado ubicado a  $2k - 1$  cuadrados de  $C_{i,j}$  girando cíclicamente en sentido positivo en los cuadrados de  $C_k$  (ver Figura 3.2). Es decir, en el orden cíclico,  $T$  es la rotación de paso  $2k - 1$  en los  $4k$  cuadrados de  $C_k$ .
3. Cada cuadrado en  $C_k$  tiene orden  $4k$  y  $T^{4k} : C_{i,j} \rightarrow C_{i,j}$  es la identidad para todo  $i, j$  tal que  $|i| + |j| = k$ . Cada punto en  $C_k$  es periódico con número de rotación  $(2k - 1)/4k$ .
4.  $\tilde{D} = C$ .

**Demostración.**

1. Por el lema 3.2.2 basta probar que lo anterior se cumple para  $C_{i,j} \subseteq \mathcal{D}_0 \cap C_k$ . Es decir,  $|i| + |j| = k$ ,  $i \geq 1, j \leq 0$ .

Sea  $C_{i,j} \subseteq \mathcal{D}_0 \cap C_k$ ,  $|i| + |j| = k$ . Probemos que  $T(C_{i,j}) \subseteq C_{1-i,1-j}$ , con  $|1-i| + |1-j| = i - 1 + 1 - j = i - j = |i| + |j| = k$ .

Sea  $(x, y) \in C_{i,j}$ . Entonces,  $(x, y) = (x_0, y_0) + i(2, 0) + j(0, 2)$  para algún  $(x_0, y_0) \in C_{0,0}$ . Luego,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (2 - x, 2 - y) \\ &= (2 - x_0 - 2i, 2 - y_0 - 2j) \\ &= (-x_0, -y_0) + (1 - i)(2, 0) + (1 - j)(0, 2) \in C_{1-i,1-j}. \end{aligned}$$

Ahora, como  $T$  es una isometría (reflexión con respecto a un punto), necesariamente  $T$  lleva al cuadrado  $C_{i,j}$  sobre el cuadrado  $C_{1-i,1-j}$ . Es decir,  $T(C_{i,j}) = C_{1-i,1-j} \subseteq C_k$ . Finalmente, como  $T$  es un difeomorfismo, si  $i \neq m$  o  $j \neq n$ , entonces  $T(C_{i,j}) \neq T(C_{m,n})$ , para todo  $i, j, m, n \in \mathbb{Z}$ . Luego,  $T$  es una permutación de cuadrados de  $C_k$ . También se tiene  $T(C_k) = C_k$ .

2. Por la parte 1 ya sabemos que para  $k > 0$ ,  $C_{k,0} \subseteq \mathcal{D}_0$  y  $T(C_{k,0}) = C_{1-k,1}$ . Observamos ahora que  $C_{1-k,1}$  está ubicado a  $2k-1$  cuadrados de  $C_{k,0}$  girando cíclicamente en sentido positivo en los cuadrados de  $C_k$ . Ahora bien, los cuadrados  $C_{k,0}, C_{k-1,1}, \dots, C_{0,k}$  son consecutivos girando desde  $C_{k,0}$  a  $C_{0,k}$  en sentido positivo. Veremos que sus respectivas imágenes son también consecutivas girando en sentido positivo. Como  $C_{k-1,1}, \dots, C_{0,k}$  están en  $\mathcal{D}_1$ , sus imágenes se encuentran reflejando con respecto al vértice  $(-1, 1)$  y son necesariamente consecutivas. Basta probar que la imagen de  $C_{k-1,1}$  es consecutiva a la imagen de  $C_{k,0}$ . Esto es claro pues  $T(C_{k,0}) = C_{1-k,1}$  y  $T(C_{k-1,1}) = C_{-k,0}$ . Por el lema 3.2.2, esto basta para demostrar la segunda parte del teorema.
3. Por la parte 2, sabemos que la dinámica de  $T$  sobre el conjunto de los cuadrados en  $C_k$ , es conjugada a la dinámica de

$$\sigma : \{0, 1, 2, \dots, 4k-1\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 4k-1\}$$

dada por  $\sigma(i) = i + 2k - 1 \pmod{4k}$ .

Puesto que  $2k-1$  y  $4k$  son primos relativos, todo elemento tiene orden  $4k$ . Como  $4k$  es par, por el lema 3.2.1,  $T^{4k}|_{C_{i,j}}$  es una traslación en algún vector  $v$ . Como  $T^{4k}(C_{i,j}) = C_{i,j}$ , necesariamente  $v = 0$  y  $T^{4k} : C_{i,j} \rightarrow C_{i,j}$  es la identidad.

4. Sabemos que  $T(C_k) = C_k$ . Luego,  $C_k \subseteq \mathcal{D}$ ,  $\forall k = 1, 2, 3, \dots$  y por lo tanto  $C \subseteq \tilde{\mathcal{D}}$ . Probemos ahora que  $\tilde{\mathcal{D}} \subset C$ . De hecho probemos que  $C^c \subset \tilde{\mathcal{D}}^c$ . Sea  $P \in C^c$ . Entonces  $P$  está en el borde común de dos cuadrados distintos adyacentes  $C_{i,j}$  y  $C_{m,n}$ .

Si  $C_{i,j} \subseteq C_k$ , necesariamente  $C_{m,n} \subseteq C_{k+1}$ , o bien,  $C_{m,n} \subseteq C_{k-1}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $C_{m,n} \subseteq C_{k+1}$ .

Se tiene que  $C_{i,j}$  y  $C_{m,n}$  tienen distinta dinámica (el primero tiene período  $4k$  y el segundo tiene período  $4(k+1)$ ). Entonces existe  $d \in \{0, 1, \dots, 4k\}$  tal que,  $T^d(C_{i,j}) \subseteq \mathcal{D}_t$ , para algún  $t \in \{0, 1, 2, 3\}$  y o bien  $T^d(C_{m,n}) \subseteq \mathcal{D}_{t+1 \pmod{4}}$  ó  $T^d(C_{m,n}) \subseteq \mathcal{D}_{t-1 \pmod{4}}$ . Consideremos el menor de tales  $d$ . Entonces los cuadrados  $T^d(C_{i,j})$  y  $T^d(C_{m,n})$  son adyacentes y  $T^d(P)$  está contenido en el borde común de ambos cuadrados. Necesariamente  $T^d(P)$  está contenido en alguno de los rayos  $\ell_t$ ,  $t = 0, 1, 2, 3$  y por lo tanto  $P \in \tilde{\mathcal{D}}^c$ .

□

### 3.3. Billar dual Semicircular

Sea  $\Gamma = \{(x, y) \in S^1 \mid y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$  y sea  $(\Gamma, T)$  el billar dual asociado. Vemos que el dominio de  $T$  es

$$\mathcal{D} = \Gamma^E \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x < -1\}.$$

Para  $(x, y) \in \mathcal{D}$  tenemos que

$$T(x) = \begin{cases} (-x - 2, -y) & \text{si } x \leq -1, y > 0 \\ (2 - x, -y) & \text{si } x \leq 1, y < 0 \\ \left( \frac{2x - 2y\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2} - x, \right. \\ \quad \left. \frac{2y + 2x\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2} - y \right) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que  $T$  es continua pero no derivable ya que si  $T = (T_1, T_2)$  entonces en el punto  $(1, -1)$  se tiene

$$2 = \partial_x T_2(1^+, -1) \neq \partial_x T_2(1^-, -1) = 0$$

donde

$$\partial_x T_2(1^\sigma, -1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{T_2(1 + \sigma\varepsilon, -1) - T_2(1, -1)}{\varepsilon}, \text{ con } \sigma = \pm 1.$$

De este billar dual hicimos un programa computacional en MATLAB que simula la acción de la función  $T$ . A continuación mostraremos el código del programa y algunos gráficos con la órbita de algunos puntos.

Para correr este programa, se debe guardar este archivo en una carpeta de matlab con extensión .m, digamos, billar.m. Luego en la ventana de comandos se debe ingresar la condición inicial  $(a, b)$  que cumpla lo siguiente:

$$\begin{aligned} & 1 < |a| \quad \text{y} \quad b \text{ cualquiera} \\ \text{o} & |a| = 1 \quad \text{y} \quad b \text{ no nulo} \\ \text{o} & |a| < 1 \quad \text{y} \quad (b > \sqrt{1 - a^2} \quad \text{o} \quad b < 0) \end{aligned}$$

Finalmente, en la misma ventana de comandos, se debe escribir billar, y enter.

```

A(1)=a; B(1)=b;
while n<2000
  if A(n)<=-1 & B(n)>0
    A(n+1)=-2-A(n); B(n+1)=-B(n);
    n=n+1;
  elseif A(n)<=1 & B(n)<0
    A(n+1)=2-A(n); B(n+1)=-B(n);
    n=n+1;
  elseif A(n)<=1 & A(n)>-1 & B(n)>0
    p=[A(n)2+B(n)2-2*A(n) 1-B(n)2];
    r = roots(p);
    j=min(r);
    k=sqrt(1-j2);
    A(n+1)=2*j-A(n); B(n+1)=2*k-B(n);
    n=n+1;
  elseif A(n)>1 & B(n)>0
    p = [A(n)2+B(n)2-2*A(n) 1-B(n)2];
    r = roots(p);
    j=min(r);
    k=sqrt(1-j2);
    A(n+1)=2*j-A(n); B(n+1)=2*k-B(n);
    n=n+1;
  elseif A(n)>1 & B(n)<0
    p = [A(n)2+B(n)2-2*A(n) 1-B(n)2];
    r = roots(p);
    j=max(r);
    k=sqrt(1-j2);
    A(n+1)=2*j-A(n); B(n+1)=2*k-B(n);
    n=n+1;
  end
end
plot(A,B,'k')

```

Figura 3.3: Programa computacional.

En la Figura 3.4 se muestra la órbita del punto (1,0.5) bajo la función billar dual sobre una curva semicircular. En la Figura 3.5 se muestra la órbita del punto (8,0.5) bajo la función billar dual. Acá se observa que los puntos de la órbita forman figuras elípticas en torno a la curva. Y en la tercera figura se muestra seis órbitas simultáneamente.

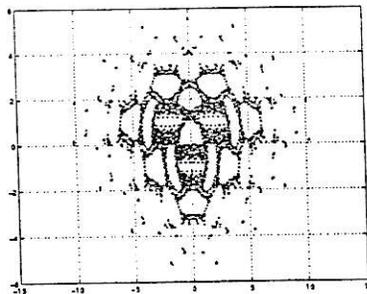


Figura 3.4:  $a=1$ ;  $b=0.5$

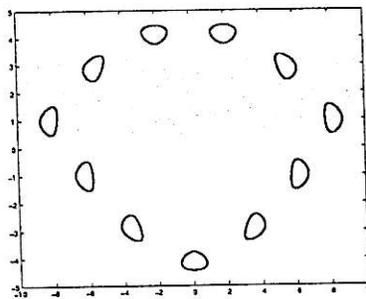


Figura 3.5:  $a=8$ ;  $b=0.5$

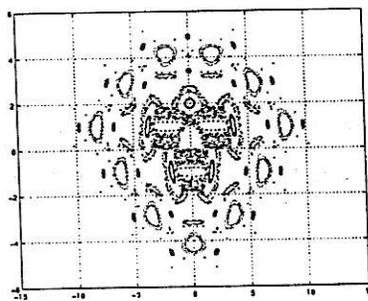


Figura 3.6: Varias órbitas.

# Capítulo 4

## Twist maps y Billares duales

En esta sección probaremos que un billar dual derivable es un twist map, y aplicaremos resultados de la teoría general de twist maps para obtener resultados sobre billares duales. Comenzaremos por definir twist maps y luego veremos que un billar dual es un twist map. A continuación repasaremos algunos resultados de twist maps y los traduciremos a billares duales.

### 4.1. Definición de twist map

Comenzamos por definir twist map. Usamos el recubrimiento  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi it}$ .

**Definición 4.1.1.** Sea  $C = S^1 \times ]-1, 1[$  un cilindro abierto.

Un difeomorfismo  $\phi : C \rightarrow C$  es un twist map si cumple las siguientes propiedades:

1.  $\phi$  se extiende a un homeomorfismo  $\bar{\phi}$  del cilindro cerrado  $S^1 \times [-1, 1]$ .
2.  $\bar{\phi}$  preserva las componentes del borde y preserva orientación en cada una de ellas.
3. Sea  $\Phi : \mathbb{R} \times ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]-1, 1[$  un levantamiento de  $\phi$ . Entonces se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial s} \Phi_1(t, s) > 0 \quad \text{para todo } (t, s) \in \mathbb{R} \times ]-1, 1[$$

donde  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ .

Veamos ahora que todo twist map tiene asociado un twist intervalo.

Sean  $\bar{\phi}_- = \bar{\phi}|_{S^1 \times \{-1\}}$  y  $\bar{\phi}_+ = \bar{\phi}|_{S^1 \times \{1\}}$  las restricciones de  $\bar{\phi}$  a los bordes de  $C$ . Sea  $\bar{\Phi} : \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1]$  un levantamiento de  $\bar{\phi}$  y sean  $\bar{\Phi}_-$  y  $\bar{\Phi}_+$  restricciones de  $\bar{\Phi}$  a los bordes. Entonces,  $\bar{\Phi}_-$  y  $\bar{\Phi}_+$  son levantamientos de  $\bar{\phi}_-$  y  $\bar{\phi}_+$  respectivamente.

Sean  $\rho_- = \rho(\bar{\phi}_-)$  y  $\rho_+ = \rho(\bar{\phi}_+)$  los números de rotación de  $\bar{\phi}_-$  y  $\bar{\phi}_+$  obtenidos por los levantamientos  $\bar{\Phi}_-$  y  $\bar{\Phi}_+$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\rho_- \in [0, 1[$  (eligiendo  $\bar{\Phi}$  de manera conveniente).

El intervalo  $[\rho_-, \rho_+]$  se denomina *twist intervalo* de  $\phi$ .

## 4.2. Billar dual como twist map

Sea  $T : \Gamma^E \rightarrow \Gamma^E$  un billar dual derivable y definido en todo  $\Gamma^E$ .

Sea  $\gamma \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ ,  $(\gamma(h(t)) = \gamma(2\pi t))$  la parametrización de  $\Gamma$  vista en la subsección 1.3.3. Entonces,

$$S^1 \times ]0, \infty[ \rightarrow \Gamma^E, \quad (e^{2\pi it}, r) \mapsto \gamma(2\pi t) + r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

es un difeomorfismo que permite trasladar isomórficamente la función billar  $T : \Gamma^E \rightarrow \Gamma^E$  a una función  $S^1 \times ]0, \infty[ \rightarrow S^1 \times ]0, \infty[$  que también denotamos por  $T$ . Ambas funciones tienen a la función  $\mathbf{T} : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]0, \infty[$  de la subsección 1.3.3 como levantamiento en común.

**Teorema 4.2.1.**  *$T : S^1 \times ]0, \infty[ \rightarrow S^1 \times ]0, \infty[$  es un twist map derivable con twist intervalo  $[0, 1/2]$ .*

**Demostración.**

El levantamiento  $\mathbf{T} : \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]0, \infty[$  se extiende continuamente a la función  $\bar{\mathbf{T}} : \mathbb{R} \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, \infty]$  definida por  $\bar{\mathbf{T}}(t, 0) = (t, 0)$  y  $\bar{\mathbf{T}}(t, \infty) = (t + 1/2, \infty)$  en los bordes.

Sea  $\bar{T} : S^1 \times [0, \infty] \rightarrow S^1 \times [0, \infty]$  la proyección de  $\bar{\mathbf{T}}$ . Tenemos que  $\bar{T}$  es un homeomorfismo del cilindro cerrado  $S^1 \times [0, \infty]$ .

Como en 1.3.3 denotamos  $(\tilde{t}, \tilde{r}) = \bar{\mathbf{T}}(t, r)$ . Debemos probar que  $\partial_r \tilde{t}(t, r) > 0$  para todo  $(t, r) \in \mathbb{R} \times ]0, \infty[$ . Como en 1.3.2 denotamos  $(\beta, R) = T(\alpha, r)$  entonces  $2\pi \tilde{t}(t, r) = \beta(2\pi t, r)$  para todo  $(t, r) \in \mathbb{R} \times ]0, \infty[$ . Por otra parte, por la demostración del lema 2.1.5 sabemos que  $\partial_r \beta(\alpha, r) \neq 0$  para todo  $(\alpha, r)$ . Puesto que  $\Gamma$  es estrictamente convexa, por una constatación geométrica simple resulta que el ángulo imagen  $\beta$  crece con la distancia  $r$ , probando que  $\partial_r \beta(\alpha, r) > 0$  y por tanto  $\partial_r \tilde{t}(t, r) = \partial_r \beta(2\pi t, r) / 2\pi > 0$ .

Para obtener el twist intervalo de un billar dual consideramos el levantamiento  $\mathbf{T}$  que como vimos tiene extensión continua  $\overline{\mathbf{T}}$  a los bordes dada por  $\overline{\mathbf{T}}_-(t, 0) = (t, 0)$  y  $\overline{\mathbf{T}}_+(t, \infty) = (t + 1/2, \infty)$ . De esta forma vemos que el twist intervalo de todo billar dual es  $[0, 1/2]$ .

### 4.3. Resultados sobre twist maps

En esta sección repasaremos algunos resultados de twist maps relacionados con existencia de órbitas periódicas y existencia de otros subconjuntos invariantes. Comenzaremos por dar algunas definiciones necesarias para enunciar los resultados.

En todo lo que sigue usamos el recubrimiento  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi it}$ . Recordamos que  $C = S^1 \times ]-1, 1[$  y denotamos  $S = \mathbb{R} \times ]-1, 1[$ .

#### 4.3.1. Algunas definiciones relativas a twist maps

**Definición 4.3.1.** Sea  $\phi$  un twist map y  $\Phi$  un levantamiento. Un punto  $w \in C$  es llamado un punto Birkhoff periódico de tipo  $(p, q)$  si para cualquier levantamiento  $z \in S$  de  $w$  existe una sucesión  $\{(t_n, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $S$  tal que:

1.  $(t_0, s_0) = z$ ,
2.  $t_{n+1} > t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,
3.  $(t_{n+q}, s_{n+q}) = (t_n + 1, s_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,
4.  $(t_{n+p}, s_{n+p}) = \Phi(t_n, s_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

La sucesión  $\{(t_n, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  se proyecta sobre  $S^1$  en un conjunto finito  $O_{p/q}$  con  $q$  puntos, y la acción de  $\Phi$  sobre esta sucesión se proyecta a una acción sobre  $O_{p/q}$  que sigue el mismo orden que la rotación racional  $R_{p/q}$  sobre una de sus órbitas. Esto indica que esta acción sobre  $O_{p/q}$  se puede extender linealmente a un homeomorfismo del círculo que tiene número de rotación  $p/q$ . Así, toda órbita Birkhoff periódica tiene naturalmente asociado un número de rotación.

**Definición 4.3.2.** Sea  $\phi : C \rightarrow C$  un twist map. Un segmento de órbita (u órbita)  $\{(\theta_m, s_m), \dots, (\theta_n, s_n)\}$  de  $\phi$  con  $-\infty \leq m < n \leq \infty$  se dice ordenado o que preserva orden si  $\theta_i \neq \theta_j$  para  $i \neq j$  y  $(i, j) \neq (m, n)$  y

si  $\phi$  preserva el orden cíclico en la coordenada  $\theta$ ; es decir, si  $\theta_i < \theta_j < \theta_k$  (con respecto a una orientación en  $S^1$ ), entonces  $\theta_{i+1} < \theta_{j+1} < \theta_{k+1}$  para  $i, j, k < n$ .

Sea  $E$  la clausura de un segmento de órbita, u órbita, que preserva orden. Entonces,  $\phi|_E$  se proyecta a un homeomorfismo de la proyección de  $E$  a  $S^1$  en si misma. Este homeomorfismo se puede extender linealmente a un homeomorfismo de  $S^1$ . El número de rotación de este homeomorfismo se le asocia naturalmente a la órbita ordenada: toda órbita ordenada tiene un número de rotación.

**Definición 4.3.3.** Sea  $\phi : C \rightarrow C$  un twist map. Un conjunto cerrado invariante  $E \subset C$  es un conjunto ordenado si se proyecta uno a uno a un subconjunto del círculo y  $\phi$  preserva orden cíclico en la proyección de  $E$ . Un conjunto  $A \subset C$  es un conjunto Aubry-Mather si es minimal, ordenado, invariante y se proyecta uno a uno en un conjunto de Cantor de  $S^1$ .

Toda órbita en un conjunto de Aubry-Mather es una órbita ordenada, y por tanto se le asocia un número de rotación. Este número de rotación es invariante por la órbita elegida en el conjunto de Aubry-Mather (pues la proyección a  $S^1$  es uno a uno y la dinámica preserva orden cíclico en todo el conjunto), de modo que asociamos este número de rotación al conjunto de Aubry-Mather.

Alternativamente, la restricción de la dinámica a la proyección del conjunto de Aubry-Mather a  $S^1$  admite una extensión lineal a un homeomorfismo del círculo. El número de rotación de este homeomorfismo es el número de rotación del conjunto de Aubry-Mather.

### 4.3.2. Resultados sobre twist maps

En esta subsección enunciamos resultados sobre existencia de órbitas Birkhoff periódicas y conjuntos de Aubry-Mather para twist maps. En la subsección 4.5 probaremos algunos de estos resultados.

#### Teorema 4.3.4.

1. Sea  $\phi : C \rightarrow C$  un twist map que preserva área. Si  $p, q \in \mathbb{N}$  son relativamente primos y  $p/q$  está en el interior del twist intervalo de  $\phi$ , entonces  $\phi$  tiene una órbita Birkhoff periódica de tipo  $(p, q)$ .
2. Sea  $\phi : C \rightarrow C$  un twist map que preserva área. Para cualquier número irracional  $\alpha$  del twist intervalo de  $\phi$ , o bien existe un conjunto de Aubry-Mather con número de rotación  $\alpha$ , o bien existe un círculo invariante minimal con número de rotación  $\alpha$ .

El conjunto de Aubry-Mather de este teorema puede estar contenido o no en un círculo invariante. Si el conjunto de Aubry-Mather está contenido en un círculo invariante entonces por el teorema de Denjoy, enunciado a seguir, o bien el twist map, o bien el círculo invariante, no es de clase  $C^2$ .

**Teorema 4.3.5.** (*Teorema de Denjoy*)

1. *Todo difeomorfismo de clase  $C^2$  del círculo con número de rotación irracional es conjugado a una rotación irracional. En particular es minimal.*
2. *Dado un número irracional  $\beta$  existe un difeomorfismo de clase  $C^{2-\varepsilon}$  del círculo con número de rotación  $\beta$  que tiene un intervalo errante, y por lo tanto no es minimal.*

Michael Herman [5] construyó un ejemplo de un twist map de clase  $C^{3-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , que contiene un círculo invariante tal que la restricción del twist map al círculo invariante es un difeomorfismo no minimal de clase  $C^{2-\varepsilon}$ .

No se sabe si todo twist map de clase  $C^3$  soporta un conjunto de Aubry-Mather contenido en un círculo invariante.

## 4.4. Los resultados de twist maps en los billares duales

Según vimos en la sección 4.2, todo billar dual es un twist map con intervalo de rotación  $[0, 1/2]$ . Para billares duales se tiene entonces el siguiente teorema.

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $T : \Gamma^E \rightarrow \Gamma^E$  un billar dual, con  $\Gamma$  una curva cerrada convexa derivable de clase  $C^2$ .*

1. *Si  $p, q \in \mathbb{N}$  son relativamente primos y  $p/q \in ]0, 1/2[$ , entonces  $T$  tiene una órbita Birkhoff periódica de tipo  $(p, q)$ .*
2. *Para cualquier número irracional  $\alpha \in ]0, 1/2[$  o bien existe un conjunto de Aubry-Mather con número de rotación  $\alpha$ , o bien existe un círculo invariante minimal con número de rotación  $\alpha$ .*

De los ejemplos considerados en la sección 3, el único que nos sirve para ilustrar este teorema es el billar dual circular (y los elipsoidales por conjugación afín). Por otra parte, por los resultados de la subsección 2.5, este teorema se aplica a billares duales derivables. Veamos todo esto con más detalle.

Para el billar dual circular definido por  $\Gamma = S^1$  los puntos Birkhoff periódicos con número de rotación  $p/q \in ]0, 1/2[$  son todos los puntos en el círculo de radio  $1/\cos(p\pi/q)$  centrado en el origen.

En el billar dual circular no hay conjuntos de Aubry-Mather. Todo número de rotación irracional en  $]0, 1/2[$  tiene asociado un círculo invariante minimal. Además, todo punto en  $\Gamma^E$  o es Birkhoff periódico, o pertenece a un círculo invariante minimal. Es decir, los círculos invariantes minimales y los círculos de puntos Birkhoff periódicos llenan todo  $\Gamma^E$ ; no hay más dinámica que ésta.

Según vimos en la sección 2.5, si  $\Gamma$  es una curva convexa de clase  $C^k$ , entonces la función billar dual, y el twist map asociado, son de clase  $C^{k-1}$ . Además, por la demostración geométrica (subsección 2.2) del teorema de preservación de área, sabemos que  $T$  preserva área en condiciones muy generales. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema 4.4.1 a billares duales definidos por curvas  $\Gamma$  de clase  $C^2$ . Si  $\Gamma$  es de clase  $C^4$  no se sabe si el billar dual asociado puede tener un conjunto de Aubry-Mather contenido en un círculo invariante. Si  $\Gamma$  es de clase  $C^3$ , para que el billar dual asociado tenga un conjunto de Aubry-Mather contenido en un círculo invariante, este círculo no puede ser de clase  $C^2$ . No sabemos si el ejemplo de Michael Herman para twist maps es realizable para billares duales.

## 4.5. Demostración del Teorema 4.3.4

Existe una demostración de la primera parte del teorema 4.3.4 sobre existencia de órbitas Birkhoff periódicas, que se puede encontrar en [8]. Hay otra demostración que utiliza métodos variacionales, lo que no ha sido considerado en esta tesis y por lo que aquí no entregamos una demostración. Ésta se puede encontrar en [3]

Para la parte 2 del teorema 4.3.4 hay una demostración utilizando sólo continuidad. Se asume probada la existencia de órbitas Birkhoff periódicas y aproximando el número irracional por números racionales se prueba la convergencia de las órbitas Birkhoff periódicas respectivas a un conjunto de Aubry-Mather o a un círculo minimal. En lo que sigue haremos esta

demostración. Cabe destacar que para la segunda parte del teorema 4.3.4 también existe una demostración por métodos variacionales, de la cual se puede obtener mayor información, sin embargo, nos hemos remitido sólo al método de aproximación por órbitas Birkhoff periódicas.

#### 4.5.1. Algunos resultados previos

Para demostrar la parte 2 del teorema 4.3.4 probaremos algunos resultados previos. Primero, todo conjunto de Aubry-Mather es parte del gráfico de una función Lipschitz  $\varphi : S^1 \rightarrow ]-1, 1[$ . Luego, un resultado general sobre homeomorfismos del círculo que preservan orientación y tienen número de rotación irracional.

Comenzamos por un lema técnico, del que obtendremos que todo conjunto de Aubry-Mather es parte del gráfico de una función Lipschitz.

**Lema 4.5.1.** *Sea  $\Phi : \mathbb{R} \times ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]-1, 1[$  el levantamiento de un twist difeomorfismo  $\phi : C \rightarrow C$ . Si  $(t_i, s_i) = \Phi^i(t_0, s_0)$  y  $(t'_i, s'_i) = \Phi^i(t'_0, s'_0)$  y  $t'_i > t_i$  para  $i = -1, 0, 1$ , entonces existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|s'_0 - s_0| < M|t'_0 - t_0|$ . La constante  $M$  puede ser elegida uniformemente en un anillo cerrado en  $C$ .*

##### Demostración.

Supongamos primero que  $s'_0 < s_0$ . Sea  $(\widehat{t}, \widehat{s}) = \Phi(t'_0, s_0)$ .

Consideramos un anillo cerrado en  $C$  que contenga a los puntos  $(t_i, s_i)$ ,  $(t'_i, s'_i)$ ,  $(t'_0, s_0)$  y  $(\widehat{t}, \widehat{s})$ . Tomamos  $c > 0$  de modo que  $\partial_s \Phi_1(t, s) > c$  en este anillo cerrado.

Se tiene entonces

$$\widehat{t} - t'_1 > c(s_0 - s'_0).$$

Por otro lado, la diferenciabilidad de  $\phi$  implica que para el mismo anillo cerrado existe una constante positiva  $L$  tal que  $|\partial_t \Phi_1(t, s)| < L$  en el anillo cerrado. Con esto,

$$\widehat{t} - t_1 < L(t'_0 - t_0).$$

Como  $t_1 < t'_1$  se tiene  $\widehat{t} - t'_1 < \widehat{t} - t_1$  y tomando  $M = Lc^{-1}$  se obtiene

$$s_0 - s'_0 < M(t'_0 - t_0).$$

Si  $s_0 < s'_0$  sea  $(\widehat{t}, \widehat{s}) = \Phi^{-1}(t_0, s'_0)$ . Observamos que la condición de twist map  $\partial_s \Phi_1(t, s) > 0$  implica la condición  $\partial_s (\Phi^{-1})_1(t, s) < 0$ , por lo tanto,  $\widehat{t} < t_{-1}$ . Sin pérdida de generalidad supondremos que en el mismo anillo

cerrado anterior se tiene  $\partial_s(\Phi^{-1})_1(t, s) < -c$  y  $|\partial_t(\Phi^{-1})_1(t, s)| < L$ .  
Entonces,

$$\hat{t} - t_{-1} < -c(s'_0 - s_0) \quad \text{y} \quad t'_{-1} - \hat{t} < L(t'_0 - t_0).$$

De donde,

$$s'_0 - s_0 < c^{-1}(t_{-1} - \hat{t}) < c^{-1}(t'_{-1} - \hat{t}) < M(t'_0 - t_0).$$

□

**Corolario 4.5.2.** *Consideremos un twist map  $\phi : C \rightarrow C$  que preserva área y un segmento de órbita de  $\phi$  que preserva orden  $\{(\theta_m, s_m), \dots, (\theta_n, s_n)\}$  con  $-\infty \leq m < n \leq \infty$ . Suponemos que este segmento de órbita está contenido en un anillo cerrado de  $C$ . Entonces existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|s_i - s_j| < M|\theta_i - \theta_j|$   $\forall i, j$  tal que  $m < i, j < n$*

**Demostración.**

Tomamos un levantamiento coherente  $\{(t_m, s_m), \dots, (t_n, s_n)\}$  del segmento de órbita y aplicamos el lema 4.5.1 a los triples

$$(t_{i-1}, s_{i-1}), (t_i, s_i), (t_{i+1}, s_{i+1}) \quad \text{y} \quad (t_{j-1}, s_{j-1}), (t_j, s_j), (t_{j+1}, s_{j+1}).$$

□

**Lema 4.5.3.** *Sea  $\phi : C \rightarrow C$  un twist map. Sea  $A \subset C$  un conjunto ordenado. Entonces existe una función Lipschitz  $\varphi : S^1 \rightarrow ]-1, 1[$  tal que  $A$  está contenido en el gráfico de la función  $\varphi$ .*

**Demostración.**

La proyección de  $A$  a  $S^1$  es bi-unívoca, por lo que definiendo una función linealmente en cada gap de esta proyección se obtiene una función continua  $\varphi : S^1 \rightarrow ]-1, 1[$  de modo que  $A$  está contenido en su gráfico. Por el último corolario, esta función es Lipschitz.

□

Observamos que la clausura de un segmento de órbita ordenada y los conjuntos de Aubry-Mather son conjuntos ordenados, por lo que este lema se aplica a estos conjuntos.

Veamos ahora un lema sobre homeomorfismos del círculo.

**Lema 4.5.4.** *Sea  $f$  un homeomorfismo del círculo, que preserva orientación, con número de rotación irracional. Sea  $K$  un subconjunto no vacío de  $S^1$ , compacto, invariante por  $f$  y minimal. Entonces  $K = S^1$  y  $f$  es dinámicamente equivalente a la rotación irracional o  $K$  es un Cantor.*

**Demostración.**

Sea  $K \subset S^1$  un subconjunto compacto no vacío, invariante, minimal por la dinámica de  $f$ . Como el borde  $\partial K$  y el conjunto de puntos de acumulación son subconjuntos cerrados invariantes de  $K$ , por la minimalidad se tiene  $\partial K = \phi$  ó  $\partial K = K$  y también  $K' = \phi$  ó  $K' = K$ .

Analizando entonces distintas posibilidades para el conjunto  $K$  tenemos,

1. Si  $\partial K = \phi$  y  $K' = K$ , entonces  $K = S^1$  y  $f$  es dinámicamente equivalente a la rotación irracional.
2. Si  $\partial K = \phi$  y  $K' = \phi$ , entonces  $K = \phi$ , lo cual no puede ser (por hipótesis)
3. Si  $\partial K = K$  y  $K' = \phi$ , entonces  $K$  es un conjunto finito de puntos, lo cual no puede ser, pues el número de rotación de  $f$  es irracional, lo que implica que no hay órbitas periódicas.
4.  $\partial K = K$  y  $K' = K$ , entonces  $K$  es un Cantor.

□

**4.5.2. Demostración parte 2 del teorema 4.3.4**

Veremos ahora la demostración de la segunda parte del teorema 4.3.4.

Sean  $p_n/q_n$  una sucesión de racionales que aproximan  $\alpha$ , con  $p_n$  y  $q_n$  primos relativos.

Para cada  $n$ , sea  $w_n \subset C$  una órbita Birkhoff periódica de tipo  $(p_n, q_n)$  y sea  $\varphi_n : S^1 \rightarrow ]-1, 1[$  una función Lipschitz tal que su grafo contiene a  $w_n$ .

Por la continuidad del número de rotación de las órbitas ordenadas con respecto a la condición inicial [4], podemos suponer que todas las órbitas  $w_n$  están contenidas en un mismo anillo cerrado en  $C$ , por lo que la constante de Lipschitz de las funciones  $\varphi_n$  puede ser tomada independiente de  $n$ .

Puesto que  $\{\varphi_n\}$  es una familia de funciones equicontinuas que van del espacio separable  $S^1$  en el espacio métrico  $] - 1, 1[$  y  $\{\varphi_n\}$  es una sucesión acotada, por el teorema de Arzelá-Ascoli, podemos suponer que  $\{\varphi_n\}$  converge a una función Lipschitz  $\varphi$  y la convergencia es uniforme en  $S^1$ . El grafo de  $\varphi$  no es necesariamente invariante por  $\phi$ . Sin embargo, veremos ahora que el grafo de  $\varphi$  contiene un cerrado  $A$  que es  $\phi$ -invariante.

Las órbitas  $w_n$  son subconjuntos cerrados de  $C$ , luego compactos, por lo que los subconjuntos  $\{w_n\}$  de compactos tiene un punto de acumulación  $E \subset C$  con la métrica de Hausdorff en el conjunto de todos los compactos de  $C$ . Necesariamente  $E$  es un subconjunto del grafo de  $\varphi$ . Y puesto que cada  $w_n$  es invariante por  $\phi$ , y esta propiedad pasa a sus puntos de acumulación, se tiene que  $E$  es  $\phi$ -invariante. Más aún,  $\phi$  preserva el orden cíclico de  $E$  por la misma razón.

Para cada  $n$  sea  $\phi_n : S^1 \rightarrow S^1$  el homeomorfismo que se obtiene extendiendo linealmente a  $S^1$  la dinámica de  $\phi$  proyectada a la proyección de la órbita Birkhoff periódica  $w_n$ . Sea  $\phi_\alpha$  el homeomorfismo que extiende linealmente la proyección a  $S^1$  de la dinámica  $\phi|_E$ . Entonces  $\{\phi_n\}$  converge uniformemente a  $\phi_\alpha$ . Por la continuidad del número de rotación en la topología  $C^0$ , el número de rotación de las  $\phi_n$  converge al número de rotación de  $E$ . Esto prueba que el número de rotación de  $E$  es  $\alpha$ .

Consideremos ahora un subconjunto cerrado  $A \subset E$  que sea  $\phi$ -invariante minimal. Entonces su proyección a  $S^1$  es cerrado minimal para  $\phi_\alpha$ . Por el lema 4.5.4, la proyección de  $A$  es o bien el círculo  $S^1$  minimal con número de rotación  $\alpha$ , o bien es un conjunto de Cantor invariante. En este último caso,  $A$  es un conjunto Aubry-Mather con número de rotación  $\alpha$ .

Esto prueba la parte 2 del teorema 4.3.4.

## Capítulo 5

# Billar dual y oscilador con impacto

A continuación explicaremos la relación entre un oscilador con impacto y un billar dual extraída de uno de los trabajos de Ph. Boyland [1]

Describiremos primero el movimiento del oscilador.

### 5.1. Oscilador con impacto

Sea  $M$  una masa grande que oscila  $2\pi$ -periódicamente en el tiempo  $t > 0$ . Si  $p(t)$  designa la posición de  $M$  respecto a una muralla fija, supondremos que  $p(t)$  se mueve de acuerdo a la ecuación  $p(t) + p''(t) = \rho(t) > 0$ , para todo  $t > 0$ , donde  $\rho$  es  $2\pi$ -periódica. Suponemos  $p(t) > 0$  para todo  $t > 0$ .

Una partícula  $S$ , de masa despreciable respecto a la de  $M$ , se mueve a la derecha de  $M$  según la ley del oscilador armónico. Es decir, si  $x(t)$  designa la posición de  $S$ , entonces  $p(t) < x(t)$  y  $x(t) + x''(t) = 0$  para todo  $t$ . Esto ocurre mientras no haya impacto entre  $M$  y  $S$ . Cuando hay un impacto, es decir cuando para algún  $t_0$  se tiene  $x(t_0) = p(t_0)$ , entonces suponemos un choque perfectamente elástico donde la velocidad relativa antes del impacto cambia de signo después del impacto. Es decir,

$$-(x'_{\text{antes}}(t_0) - p'(t_0)) = x'_{\text{despues}}(t_0) - p'(t_0).$$

Observamos que en un instante de colisión  $t_0$  necesariamente debe ocurrir  $x'_{\text{antes}}(t_0) < p'(t_0)$ .

## 5.2. Modelo geométrico del oscilador con impacto

Sea  $\Gamma$  una curva estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^2$  parametrizada por

$$\gamma : \alpha \mapsto p(\alpha)R(\alpha) + \lambda(\alpha)R^\perp(\alpha) \quad \text{con } \alpha \in [0, 2\pi],$$

donde  $\alpha$  es el ángulo del vector normal a  $\Gamma$  en  $\gamma(\alpha)$ ,  $p(\alpha)$  es la distancia del origen a la recta tangente a  $\Gamma$  en  $\gamma(\alpha)$ ,  $R(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  y  $R^\perp(\alpha) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ . Puesto que  $\gamma'(\alpha) \perp R(\alpha)$  necesariamente se tiene que  $\lambda(\alpha) = p'(\alpha)$ . La función  $p$  se llama la **función soporte** de  $\Gamma$ .

El radio de curvatura de  $\Gamma$  está dado por  $\rho(\alpha) > 0$  para todo  $\alpha$ . Suponemos que el origen es encerrado por  $\Gamma$  y que  $\gamma(0)$  está en el eje real positivo. Necesariamente,  $\gamma(0) = (p(0), 0) = p(0)R(0)$ .

Imaginemos que rotamos negativamente la curva  $\Gamma$  en torno al origen y simultáneamente observamos su proyección, su **sombra**, sobre el eje horizontal. Notamos entonces que  $p(\alpha)$  es el punto más a la derecha en la sombra de  $\Gamma$  (el supremo de la sombra) y que  $\gamma(\alpha)$  se proyecta exactamente sobre  $p(\alpha)$ .

**Lema 5.2.1.**  $p(\alpha) + p''(\alpha) = \rho(\alpha)$ .

**Demostración.**

Por geometría diferencial sabemos que el radio de curvatura de  $\Gamma$  está dado por

$$\rho(\alpha) = \frac{|\gamma'(\alpha)|^3}{\det(\gamma'(\alpha), \gamma''(\alpha))}$$

Derivando  $\gamma(\alpha) = p(\alpha)R(\alpha) + p'(\alpha)R^\perp(\alpha)$  se tiene

$$\begin{aligned} \gamma'(\alpha) &= p'(\alpha)R(\alpha) + p(\alpha)R^\perp(\alpha) + p''(\alpha)R^\perp(\alpha) - p'(\alpha)R(\alpha) \\ &= (p(\alpha) + p''(\alpha))R^\perp(\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\gamma = pR + p'R^\perp, \quad \gamma' = (p + p'')R^\perp \quad \text{y} \quad \gamma'' = (p' + p''')R^\perp - (p + p'')R.$$

Calculando tenemos  $\det(\gamma', \gamma'') = (p + p'')^2 \geq 0$ , de donde

$$\rho(\alpha) = p(\alpha) + p''(\alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 2\pi].$$

□

Tomemos ahora un punto  $S$  en el exterior de  $\Gamma$ , es decir,  $S \in \Gamma^E$  y supongamos que su proyección al eje horizontal, su sombra de  $S$  está a la derecha de la sombra de  $\Gamma$ . Supongamos que  $S$  rota junto a  $\Gamma$  de modo que su sombra  $x(\alpha)$  verifica  $p(\alpha) < x(\alpha)$  para cierto rango de valores de  $\alpha$ . Mientras esto sucede, la proyección  $x(\alpha)$  de  $S(\alpha)$  verifica la ley del oscilador armónico, es decir,  $x(\alpha) + x''(\alpha) = 0$ .

Para algún ángulo  $\alpha_1$  la sombra de  $S(\alpha_1)$  coincidirá con el borde derecho de la sombra de  $\Gamma$ , es decir,  $x(\alpha_1) = p(\alpha_1)$ . Puesto que  $\Gamma$  y  $S$  rotan negativamente, necesariamente  $S(\alpha_1)$  está verticalmente debajo del punto  $\gamma(\alpha_1)$ . En ese momento, hacemos "saltar" al punto  $S(\alpha_1)$  hasta un nuevo punto  $S(\alpha_1)$  que está verticalmente hacia arriba de  $\gamma(\alpha_0)$  y a la misma distancia. Es decir, hay un  $S_{antes}$  y un  $S_{despues}$  en una misma vertical, de modo que  $-(S_{antes} - \gamma(\alpha_0)) = S_{despues} - \gamma(\alpha_0)$ . A partir de ahí, el punto  $S$  continua rotando junto con  $\Gamma$  manteniéndose a la derecha de  $p(\alpha)$  hasta un nuevo "salto".

**Lema 5.2.2.** *La sombra  $x(\alpha)$  de  $S(\alpha)$  en el ángulo de salto  $\alpha_1$  verifica*

$$-(x'_{antes}(\alpha_1) - p'(\alpha_1)) = x'_{despues}(\alpha_1) - p'(\alpha_1).$$

**Demostración.**

En el ángulo  $\alpha = 0$  tenemos que  $\gamma(0) = (p(0), 0)$ . Supongamos que la partícula  $S$  se encuentra en  $(x_0, y_0)$  con  $x_0 > p(0)$ .

Al rotar negativamente la curva  $\Gamma$  y simultáneamente el punto  $S$ , se tendrá que  $S$  sigue la trayectoria

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sen \alpha \\ -\sen \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

mientras su sombra  $x(\alpha) = x_0 \cos \alpha + y_0 \sen \alpha$  verifica  $x(\alpha) > p(\alpha)$ .

Para un cierto primer ángulo  $\alpha_1$  necesariamente se tendrá  $x(\alpha_1) = p(\alpha_1)$ , con  $S(\alpha_1)$  debajo de  $\gamma(\alpha_1)$ . A este punto  $S(\alpha_1)$  lo denotaremos  $S_a(\alpha_1)$ , donde el subíndice  $a$  es por "antes". Notamos que  $S_a(\alpha_1) = (x_a(\alpha_1), y_a(\alpha_1))$  con  $x_a(\alpha_1) = p(\alpha_1)$  y  $y_a(\alpha_1) = -x_0 \sen \alpha_1 + y_0 \cos \alpha_1 = x'_a(\alpha_1)$ .

Por la demostración del lema 5.2.1,  $\gamma(\alpha) = p(\alpha)R(\alpha) + p'(\alpha)R^\perp(\alpha)$ , donde  $R(\alpha) = (\cos \alpha, \sen \alpha)$  es el vector normal a  $\gamma(\alpha)$ . Entonces, para  $\alpha = \alpha_1$ , se tiene que  $\gamma(\alpha_1) = (p(\alpha_1), p'(\alpha_1))$ , pues  $R(\alpha_1) = (1, 0)$ .

Para  $\alpha = \alpha_1$  se produce el "salto" desde  $S_a(\alpha_1)$  a  $S_d(\alpha_1)$  que según el modelo geométrico está dado por

$$S_d(\alpha_1) = \gamma(\alpha_1) - (S_a(\alpha_1) - \gamma(\alpha_1)) = 2\gamma(\alpha_1) - S_a(\alpha_1).$$

Calculando se obtiene que

$$S_d(\alpha_1) = (p(\alpha_1), 2p'(\alpha_1) - y_a(\alpha_1)) = (p(\alpha_1), 2p'(\alpha_1) - x'_a(\alpha_1)).$$

A partir del ángulo  $\alpha_1$ , el punto  $S$  seguirá la trayectoria

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \alpha_1) & \text{sen}(\alpha - \alpha_1) \\ -\text{sen}(\alpha - \alpha_1) & \cos(\alpha - \alpha_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\alpha_1) \\ 2p'(\alpha_1) - x'_a(\alpha_1) \end{pmatrix}.$$

De donde, la sombra de  $S(\alpha)$  está dada por

$$x(\alpha) = p(\alpha_1) \cos(\alpha - \alpha_1) + (2p'(\alpha_1) - x'_a(\alpha_1)) \text{sen}(\alpha - \alpha_1).$$

Derivando y evaluando en  $\alpha_1$ , se obtiene

$$x'_d(\alpha_1) = 2p'(\alpha_1) - x'_a(\alpha_1).$$

Esto demuestra el lema. □

Observamos que por los lemas 5.2.1 y 5.2.2 se tiene que el punto a la derecha de la sombra de  $\Gamma$ ,  $p(\alpha)$ , y la sombra del punto  $S$ ,  $x(\alpha)$ , representan la evolución de un oscilador con impacto.

### 5.3. Conexión entre billar dual y oscilador con impacto

En la sección anterior vimos que la sombra de la curva  $\Gamma$  (más bien el punto más a la derecha de esta sombra), y la sombra del punto  $S$ , en el modelo geométrico descrito, reflejan la evolución de un oscilador armónico con impacto.

Por otra parte, en un ángulo de salto, el “salto” definido en el modelo geométrico, corresponde exactamente a la imagen de un punto por la función billar dual  $T$  definida en  $\Gamma^E$ . Es decir,  $S_{despues}(\alpha_i) = T(S_{antes}(\alpha_i))$ . El lema 5.2.2 muestra que es precisamente este “salto” el que simula el choque perfectamente elástico del oscilador con impacto.

De esta forma, un modelo geométrico como descrito arriba, establece la relación entre billares duales y osciladores con impacto.

# Bibliografía

- [1] Ph. Boyland, *Dual Billiards, twist maps and impact oscillators*. Series: Nonlinearity 9, 1996, 1411-1438.
- [2] F.Dogru, S.Tabachnikov, *Dual Billiards*. The Mathematical Intelligencer 4, vol. 27, 2005, 18-25.
- [3] B.Hasselblatt, A.Katok, *First course in dynamics*, Cambridge U.Press, 2003.
- [4] B.Hasselblatt, A.Katok, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge U.Press, 1995.
- [5] M. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Asterisque, vol. 1, 1983, 103-104.
- [6] J.Moser, *Is the solar system stable?*. The Mathematical Intelligencer No 1, 1978, 65-71.
- [7] A.Navas, *Grupos de difeomorfismos del círculo*. Ensaio Matemáticos, Sociedade Brasileira de Matemática, volume 13, 2007.
- [8] A.Navas, *Una introducción a la dinámica de homeomorfismos de superficies vía la teoría de Brouwer*. XXI Jornada de Matemática de la Zona Sur, 2007.
- [9] S.Tabachnicov, *Dual billiards*. Russ. Math. Surv. 48, No 6, 1999, 81-109.
- [10] S.Tabachnicov, *On the dual billiards problem*. Adv. in Math. 115, 1995, 221-249.
- [11] S.Tabachnicov, *Geometry and billiards*. Student mathematical library, vol. 30, AMS 2005.