

UCH-FC

MAG-M

M 971

C L

Clasificación Topológica de Acciones de Grupos sobre Superficies de Riemann. Un método algebraico.

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

por



Camila Muñoz Santander

Mayo, 2014

Directores de Tesis: **Dra. Anita Rojas.**
Dr. Antonio Behn.

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Camila Muñoz Santander

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 5 de Mayo de 2014 .

Director de Tesis:

Dra. Anita Rojas

Co-director de Tesis:

Dr. Antonio Behn

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Luis Arenas

Dr. Nicolás Libedinsky



[Handwritten signature]
.....
[Handwritten signature: Antonio Behn]
.....

[Handwritten signature]
.....
[Handwritten initials: MRS.]
.....



Agradecimientos

Primero quisiera agradecer a mis tutores Anita Rojas y Antonio Behn. A la profesora Anita por el apoyo no sólo en lo académico, sino que también en lo personal, siempre con una palabra de ánimo. Al profesor Behn por su gran disposición a enseñarme (sin muchos resultados) y admiro mucho sus habilidades con SAGE. Además al profesor Friedman, que junto con Anita fueron ejemplos a seguir desde primer año, me ayudaron a conseguir becas, me ayudaron en lo personal y pusieron su confianza en mí, era a quienes recurría si necesitaba algún consejo.

A la profesora Rubí, de quien aprendí mucho, menos de lo que quisiera, pero de todas maneras sus clases siempre fueron inspiradoras.

Gracias al profesor Andrés Navas quien, junto con Anita me ayudaron a postular a la ENS de Lyon.

Muchísimas gracias a Mariela y Leslie, quienes me ayudaron cuando tenía alguna duda.

A Diego y Christopher por sus interesantes conversaciones. Además gracias a ustedes conocí a Héctor.

Gracias a Santiago, que hace un gran trabajo, siempre con una sonrisa y una talla en esas conversaciones de pasillo que alegran el día.

A la tía Cecilia por perdonar los retrasos infinitos en la entrega de libros, siempre muy amable y cariñosa.

Agradecer a mis amigos: Pame, Kathy, Cami y Juanjo, los quiero mucho. Han hecho mi vida mucho más entretenida y han estado ahí en los momentos difíciles.

Muchas gracias también a mi familia, a mi hermano, a mi papá y mamá, de quienes aprendí lo que es el esfuerzo. Siempre en las buenas y en las malas. También a mi amigo y casi hermano, Rodrigo, que no sólo me dió lo más importante que tengo en la vida, que es nuestro hijo, sino que también insistió en que entrara a esta carrera. A pesar de todo, le debo mucho. Y obviamente a toda su familia, que junto a la mía, hicieron que esto fuera posible.

A Héctor, el mejor hombre que he conocido, quien se ganó hasta el esquivo corazón de mi chanchote. A pesar de la distancia te amo cada día más. Y finalmente a mi chancho, sobre todo por la paciencia que tuvo, por los juegos que no tuvimos y por los dibujos que no hicimos porque estaba ocupada. Por las conversaciones interesantes y por esas canciones graciosísimas. Te amo infinito más uno.

Índice

1. Definiciones y Teoremas Básicos.	6
1.1. Vector Generador	6
1.2. Acciones Equivalentes	7
1.3. Teorema de Existencia de Riemann	12
2. Acciones Topológicamente Equivalentes	18
2.1. Acción del grupo de trenzas en los Vectores Generadores para $\gamma = 0$	18
2.1.1. El espacio de configuración	19
2.1.2. Cubrimiento del espacio de configuración \mathcal{O}_r	20
2.1.3. Topología del espacio de Hurwitz $\mathcal{H}_r^{(A)}(G)$	22
2.1.4. Acción del grupo de Monodromía de Hurwitz.	23
2.2. Espacios de Hurwitz	25
2.3. Acciones sobre el sistema de Generadores.	26
3. Ejemplos	28
3.1. Algunos resultados para $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ y $\gamma = 0$	28
3.1.1. Firma (p, p, p)	28
3.1.2. Firma (p, p, p, p)	31
4. Rutina	34
4.1. Rutina	34
4.2. Aplicaciones	36
4.2.1. Séxtica de Wiman	36
4.2.2. Tabla de Acciones en género 5	37

Resumen

Mediante el uso de la información entregada por el vector generador asociado a la acción de un grupo G sobre una Superficie de Riemann S , es posible clasificar topológicamente dichas acciones de manera algebraica [3]. Mostraremos las condiciones que deben satisfacer los vectores generadores de forma que determinen acciones topológicamente equivalentes [26]. Implementando dichas acciones en el programa SAGE, fue posible dar una clasificación de las acciones de grupos en superficies de género cinco, cuya superficie cuociente es de género cero. Por otro lado, usando que en ciertos casos equivalencia topológica y analítica coinciden [7] se reobtienen resultados para familias de ejemplos [21], [25].

Abstract

Using the information given by the generating vector associated to an action of a group G on a Riemann surface S , it is possible to classify these actions topologically with algebraic tools [3].

We will show the conditions on the generating vectors needed to determine the topological equivalence of the actions [26].

Implementing these actions in the SAGE program, it was possible to give a classification of group actions on surfaces of genus five with total quotient of genus zero.

Moreover, using that the topological and analytical equivalence coincide in some cases [7], we reobtain a part of the results in [21], [25].

Introducción

En el estudio de las Superficies de Riemann compactas, es interesante saber cuando dos acciones de un grupo G sobre una superficie son topológicamente equivalentes, pues esta clasificación nos permite entender, por ejemplo, propiedades del espacio de moduli \mathcal{M}_g , donde g es el género de la superficie.

Existen diferentes objetos que se pueden asociar a una acción de un grupo finito G en una Superficie de Riemann S . Una de ellas es la *firma* ([9], [2]) asociada a la acción. Se sabe que acciones topológicamente diferentes pueden corresponder a firmas iguales. Es decir, si bien este concepto captura información geométrica, no sirve para *clasificar* acciones.

En este trabajo utilizaremos el concepto de *vector generador* correspondiente a la acción. Tal vector es una tupla de elementos de G que lo generan y satisfacen ciertas condiciones que dependen de la firma, detallamos estas condiciones en la sección 1.1. Éstos han sido utilizados para distinguir clases de acciones topológicamente diferentes [3], [16], [26], [4]. Una forma de hacerlo es estudiando el equivalente Fuchsiano de G , esto es, la acción de G en S determina un homomorfismo epiyectivo $\phi : \Gamma \rightarrow G$ donde Γ es un grupo fuchsiano y su kernel no tiene torsión.

Nos concentraremos en el caso en que el género de la superficie cociente S/G es cero, donde mostraremos que la acción del grupo de trenzas y la acción de los automorfismos de G , en el conjunto de vectores generadores, determina equivalencia topológica, de este modo, basta ver si dos vectores generadores están en la misma órbita por la acción del grupo de trenzas para saber si son equivalentes (módulo automorfismos de G), pasando de un problema topológico a uno algebraico.

El hecho que acabamos de mencionar nos permite además implementar

las acciones expuestas en el programa computacional SAGE.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se dan las definiciones necesarias para entender el problema. Sin embargo, esta tesis va dirigida a personas que ya cuenten con conocimientos básicos de la teoría de Superficies de Riemann, por lo que su definición no se da. Ésta y otras definiciones se pueden encontrar en [18], [9], [11], entre otros.

En el Capítulo 2 se desarrolla la acción del grupo de trenzas en los vectores generadores, que está dada por la acción del grupo de trenzas esférico en el espacio de Hurwitz asociado, pues este grupo es el grupo fundamental del espacio de configuración, es decir, es el *mapping class group* de la esfera con una cantidad fija de puntos marcados.

En el Capítulo 4 se describe cómo es posible implementar lo anterior usando el programa SAGE, en donde se encuentran ejemplos de los comandos básicos desarrollados.

Como aplicación del método se recuperan parte de los resultados de [21] y [25] respecto al número de acciones topológicamente no equivalentes de grupos de orden p actuando con 3 y 4 puntos fijos (ver Capítulo 3). Además, como aplicación de la rutina en SAGE, se responde a una pregunta planteada en [12] respecto a las superficies de Riemann de género 10, automorfismos y la séxtica de Wiman.

Finalmente, en [3] Broughton clasificó todos los grupos, módulo equivalencia topológica, actuando en género 2 y 3, mientras que en [14] se hace la clasificación para género 4. En esta línea, la última aplicación que desarrollamos es un listado de todos los grupos que actúan en género 5 con cociente de género cero y la cantidad de acciones topológicamente no equivalentes para las firmas encontradas.

Capítulo 1

Definiciones y Teoremas Básicos.

En este capítulo definiremos algunos de los conceptos, propiedades y resultados básicos que nos permitirán plantear el problema en cuestión. Además se incluyen ejemplos concretos que ayudan a entender la teoría expuesta.

1.1. Vector Generador

Sean S una superficie de Riemann de género $g \geq 2$ y G un grupo, definimos lo siguiente:

Definición 1.1. Diremos que un grupo G actúa en S , si existe un monomorfismo de grupos

$$\varepsilon : G \rightarrow \text{Aut}(S),$$

donde $\text{Aut}(S)$ es el grupo de automorfismos holomorfos de la superficie.

Observación 1.1. La cardinalidad de G es finita para $g \geq 2$, de hecho se conoce la cota de Hurwitz para el orden de $\text{Aut}(S)$

$$|\text{Aut}(S)| \leq 84(g - 1).$$

Definición 1.2. [11] Un grupo Fuchsiano es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Proposición 1.1. Sea G un grupo actuando en una superficie de Riemann S y p un punto en S . Si G_p es finito, entonces G_p , el estabilizador del punto p , es un grupo cíclico.

Proposición 1.2. [18, Cor.3.5] Sea G un grupo finito actuando sobre una superficie de Riemann compacta S . Sea $p \in S$ un punto con estabilizador no trivial de orden m . Sea $g \in G_p$ un generador del estabilizador. Entonces existe una coordenada local $z \in S$ centrada en p tal que $g(z) = \lambda z$, donde λ es una raíz primitiva de la unidad. Para algún $g_0 \in G_p$ tenemos que $\lambda = \exp(2\pi i/m)$

Sea S una superficie de Riemann compacta y el grupo G actuando en ella. Denotamos por $\{P_1, \dots, P_r\} \subset S/G$ al conjunto discreto de puntos rama de la proyección $\pi : S \rightarrow S/G$. Para cada i , fijamos $p_i \in \pi^{-1}(P_i)$. Tenemos la siguiente definición:

Definición 1.3. Sea G grupo actuando sobre una superficie compacta S , definimos la *firma* o *signatura* como la tupla $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$, con γ el género de la superficie cociente S/G y $m_j = |G_j|$, el orden del estabilizador de p_j . En el caso de que $\gamma = 0$ escribiremos (m_1, \dots, m_r) .

Con la notación anterior, y llamando g al género de S , tenemos una presentación adecuada a este contexto de la fórmula de Riemann-Hurwitz [18, Thm. 4.16],

$$\frac{2g-2}{|G|} = (2\gamma-2) + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right). \quad (1.1)$$

Definición 1.4. [18, Def. 2.2] Una $(2\gamma+r)$ -tupla $(a_1, b_1, \dots, a_\gamma, b_\gamma, c_1, \dots, c_r) \in G^{2\gamma+r}$ es llamada un $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ -vector si

$$\prod_{i=1}^{\gamma} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r c_j = 1 \quad (1.2)$$

y

$$|c_j| = m_j, \quad (1.3)$$

es decir, el orden de c_j es m_j .

Además diremos que es un $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ -vector *generador* si el conjunto $\{a_i, b_i, c_j\}$ genera G .

1.2. Acciones Equivalentes

Como en [3, Def. 2.1] definimos lo siguiente:

Definición 1.5. Diremos que las acciones $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de G en S son *topológicamente equivalentes* si existe $\Phi \in \text{Aut}(G)$ y h en el grupo de homeomorfismos que preservan orientación $\text{Homeo}^+(S)$ de S , tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varepsilon_1(g)} & S \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ S & \xrightarrow{\varepsilon_2(\Phi(g))} & S \end{array}$$

Si $h \in \text{Aut}(S)$, entonces diremos que $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son *conformemente equivalentes*.

Observación 1.2. Se puede dar una definición completamente análoga para acciones topológicamente equivalentes considerando acciones de G sobre distintas superficies, pero del mismo género.

Proposición 1.3. [4, Corolario 2] Dos acciones ε_1 y ε_2 en S son conformemente equivalentes si y sólo si $\varepsilon_1(G)$ y $\varepsilon_2(G)$ son conjugados en $\text{Aut}(S)$.

Existen acciones que son topológicamente equivalentes, pero no conformemente equivalentes.

Ejemplo 1.1. [8, Observación 1 pág. 283] Tenemos la siguiente familia de curvas de género 3

$$X_\lambda : y^2 = x(x^2 - 1)(x^2 - \lambda^2)(x^2 - \lambda^{-2}),$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda^4 \neq 0, 1$ y $\lambda \neq \pm 1 \pm \sqrt{2}$. La clausura proyectiva de X_λ , es decir,

$$Y^2 Z^5 = X(X^2 - Z^2)(X^2 - \lambda^2 Z^2)(X^2 - \lambda^{-2} Z^2),$$

tiene una singularidad en $P_\infty = [0 : 1 : 0]$. La curva, en una carta de P_∞ , tiene una expresión de la forma $x^7 = z^5$, por lo tanto es una singularidad de tipo (5, 7) monomial. En consecuencia, (ver [18, Lema III.2.8]) se resuelve agregando un punto P_∞ con carta $(U, \varphi : U \rightarrow V$, para un abierto U de P_∞) dada por $\varphi(x, z) = x^3 z^{-2}$, con inversa $\psi(s) = (s^5, s^7)$.

Para $j \in \{1, 2\}$ consideremos las acciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_j : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} &\rightarrow \text{Aut}(X_\lambda) \\ 1 &\mapsto \tau_j, \end{aligned}$$

donde $\tau_1(x, y) = (-x, iy)$ y $\tau_2(x, y) = (1/x, iy/x^4)$. En P_∞ las funciones τ_1 y τ_2 se extienden de manera que $\tau_1[X : Y : Z] = [-X : iY : Z]$ y $\tau_2[X : Y : Z] = [ZX^3 : iYZ^3 : X^4]$. Obteniendo

$$\begin{aligned}\tau_1(P_\infty) &= P_\infty, \\ \tau_2(0, 0) &= P_\infty, \\ \tau_2(P_\infty) &= (0, 0).\end{aligned}$$

Calcularemos en detalle el segundo caso.

Como la expresión dada para τ_2 no está bien definida en $[0 : 0 : 1]$ debemos estudiar como es la curva cerca de $(0, 0)$ y representar τ_2 en dicha vecindad. Como la derivada parcial de f con respecto a x no se anula, tenemos que $x = h(y)$, con h función analítica, con $h(0) = 0$ y además, por el teorema de la función implícita podemos calcular $h'(y)$, que en 0 se anula, luego tiene orden 2, es decir, $h(y) = y^2k(y)$, con $k(0) \neq 0$.

Así, en una vecindad de $[0, 0, 1]$

$$\tau_2[h(y), y, 1] = [h(y)^3 : iy : h(y)^4] = [h(y)^3/yi : 1 : h(y)^4/yi]$$

Luego $\tau_2[0 : 0 : 1] = [0 : 1 : 0]$. Para τ_1 los puntos $p = (0, 0), P_\infty$ tienen estabilizadores de orden 4. Mientras que $(\pm 1, 0), (\pm \lambda, 0), (\pm 1/\lambda, 0)$ tienen estabilizador de orden 2, pero $(x, 0)$ y $(-x, 0)$ están en la misma $\langle \tau_1 \rangle$ -órbita, por lo tanto $\langle \tau_1 \rangle$ actúa con firma $(0; 2, 2, 2, 4, 4)$

Para τ_2 , los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ tienen estabilizador de orden 4 y no están en la misma $\langle \tau_2 \rangle$ -órbita. Así obtenemos hasta ahora, dos puntos rama en $X_\lambda/\langle \tau_2 \rangle$. Diremos que estos puntos son de tipo 4.

Para encontrar los puntos con estabilizador de orden 2, queremos que $\tau_2^2(x, y) = (x, -y) = (x, y)$, luego $y = 0$ y $x = 0, \pm \lambda, \pm \lambda^{-1}$, pero $(\lambda, 0)$ está en la misma $\langle \tau_2 \rangle$ -órbita de $(1/\lambda, 0)$, así mismo $(-\lambda, 0)$ está en la misma órbita de $(-1/\lambda, 0)$. Además es fácil ver que el punto ∞ tiene estabilizador de orden 2, de hecho τ_2^2 es la involución hiperelíptica, y P_∞ está en la órbita de $(0, 0)$ por τ_2 , obteniendo así el último punto rama de tipo 2. Por lo tanto $\langle \tau_2 \rangle$ actúa con firma $(0; 2, 2, 2, 4, 4)$.

Si escribimos $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle \eta : \eta^4 = 1 \rangle$ los vectores generadores son $(\eta^2, \eta^2, \eta^2, \eta, \eta^{-1})$ y $(\eta^2, \eta^2, \eta^2, \eta, \eta)$, respectivamente (para más detalles ver Observación 1.3), pero más adelante veremos que las acciones asociadas a dichos vectores son topológicamente equivalentes (ver Proposición 2.1), mientras que en [5, Teorema 1] se muestra que ε_1 y ε_2 no son conformemente equivalentes, pues corresponden a subgrupos no conjugados en los $\text{Aut}(X_\lambda)$, artículo donde además se obtiene la equivalencia topológica de estas acciones por otros medios.

Observe que en [3, Tabla 5], $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ aparece con una sola acción para esta firma en género 3.

Ejemplo 1.2. [5, pag. 956] Considere la familia de curvas de género 3

$$X_\lambda : y^2 = (x^4 - 1)(x^4 - \lambda^4),$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda^4 \neq 0, 1$. La clausura proyectiva de X_λ tiene una singularidad de tipo (6, 8), por lo tanto se resuelve agregando dos puntos, que llamaremos ∞_1 e ∞_2 . Omitiremos detalles, pues el procedimiento es análogo al del ejemplo anterior.

Considere las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left(\frac{1}{x}, \frac{iy}{x^4} \right), \\ v(x, y) &= \left(x \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), y \right), \\ s(x, y) &= \left(\frac{\lambda}{x}, \frac{y\lambda^2}{x^4} \right). \end{aligned}$$

Se tiene que $\text{Aut}(X_\lambda) = \langle u^2 \rangle \times \langle v^2, s \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_4$. Luego la superficie admite dos acciones de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, éstas son

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle u^2, v^4 \rangle = \{(x, y), (x, -y), (-x, y), (-x, -y)\}, \\ H_2 &= \langle u^2, s \rangle = \left\{ (x, y), (x, -y), \left(\frac{\lambda}{x}, \frac{y\lambda^2}{x^4} \right), \left(\frac{\lambda}{x}, \frac{-y\lambda^2}{x^4} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Donde la función s se extiende de manera que $s(\infty_1) = (0, \lambda^2)$, $s(\infty_2) = (0, -\lambda^2)$. Note que la órbita por H_2 de ∞_1 tiene 4 elementos (es decir ∞_1 no es punto fijo para H_2).

Todos los subgrupos no triviales de ambos grupos son de orden 2. Para el primer caso, los puntos fijos de $(x, -y)$ son tales que $y = 0$, pero sólo 4 de las 8 soluciones están en órbitas distintas por la acción de $(-x, y)$. Si ahora estudiamos el subgrupo generado por $(-x, y)$, entonces hay dos soluciones correspondientes a una órbita por la acción de $(x, -y)$, mientras que el grupo generado por $(-x, -y)$ fija ∞_1 e ∞_2 , que son equivalentes por la acción de $(x, -y)$. Por lo tanto, hay seis puntos no equivalentes con estabilizador de orden 2. Luego la firma para H_1 es $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Ahora estudiando la acción de H_2 , para $(x, -y)$ hay sólo 4 puntos en órbitas distintas, esta vez por la acción de $(\lambda/x, y\lambda^2/x^4)$. El generado por $(\lambda/x, y\lambda^2/x^4)$

tiene 4 soluciones, pero en el cociente consideramos sólo dos de ellas, pues están en la misma órbita por la acción de $(x, -y)$. Finalmente el subgrupo generado por $(\lambda/x, -y\lambda^2/x^4)$ no tiene puntos fijos, dado que $\lambda^4 \neq 0, 1$.

Usando que la superficie X_λ es de género 3, por Riemann-Hurwitz tenemos que el género de la superficie cociente es 0, además sus firmas coinciden, es decir, H_1 y H_2 actúa con firma $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Las acciones son topológicamente equivalentes, pues para ambos casos la situación general es $G = \langle \eta \rangle \times \langle \mu \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, por lo que el vector generador es $(\eta, \eta, \mu, \mu, \mu, \mu)$, módulo un automorfismo de G .

Por otro lado, las acciones inducidas por los subgrupos H_1 y H_2 no son conformemente equivalentes, pues sólo H_1 es normal en el grupo de automorfismos de la superficie, mientras que H_2 no lo es, luego no son conjugados en $\text{Aut}(X_\lambda)$, por Prop. 1.2, éstas no son acciones analíticamente equivalentes.

Es interesante poder determinar cuándo existen ambos tipos de equivalencias, pues podemos pasar de un problema analítico de clasificación a uno topológico que, como veremos más adelante, se traduce en un problema algebraico. En esa dirección se conoce el siguiente resultado:

Proposición 1.4. ([7, Teorema 1]) Si el grupo de automorfismos de una superficie S , $\text{Aut}(S)$, contiene dos automorfismos τ_1, τ_2 ambos de orden p , primo, tal que las superficies cocientes $S/\langle \tau_i \rangle$, $i = 1, 2$, son isomorfas a la esfera de Riemann, entonces $\langle \tau_1 \rangle$ y $\langle \tau_2 \rangle$ son conjugados en $\text{Aut}(S)$.

Esto ocurre pues los grupos generados por τ_1 y τ_2 están contenidos en un p -grupo de Sylow, no necesariamente el mismo, pero dos grupos de Sylow siempre son conjugados. Existen dos posibilidades, la primera de éstas es que el elemento que conjuga a los p -grupos conjuga los subgrupos de orden p , en cuyo caso tenemos un elemento que los conjuga, luego son analíticamente equivalentes. De lo contrario, sabemos que existe un elemento $\rho \in \text{Aut}(S)$ tal que $\rho \circ \tau_1 \circ \rho^{-1} = \tau'_1$ está en el p -Sylow que contiene a τ_2 , pero $\langle \tau'_1 \rangle \neq \langle \tau_2 \rangle$, pero por [7, Prop. 1.8] tenemos que τ'_1 y τ_2 son conjugados, luego τ_1 y τ_2 también lo son.

Además, si las acciones son topológicamente equivalentes, tenemos dos cubrimientos de \mathbb{P}^1 del mismo tipo, esto es, resultado [7, 2.3], obteniendo las hipótesis de [7, Lemma 1.6]. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis de la Proposición anterior, lo que implica que son conjugadas en el grupo de automorfismos. Luego tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.1. Si el grupo de automorfismos de una superficie S , $\text{Aut}(S)$, contiene dos automorfismos τ_1, τ_2 ambos de orden p primo, tal que las superficies cocientes $S/\langle\tau_i\rangle$, $i = 1, 2$, son isomorfas a la esfera de Riemann, entonces $\langle\tau_1\rangle$ y $\langle\tau_2\rangle$ son analíticamente equivalentes si y sólo si son topológicamente equivalentes.

En la sección 2.1 se detalla la relación entre vectores y acciones equivalentes, lo que permite pasar, como se dijo, de un problema topológico a uno algebraico.

1.3. Teorema de Existencia de Riemann

Existen varias versiones (ver [26] para más detalles) del siguiente teorema, aquí lo presentaremos según la notación y definiciones vistas en este trabajo.

Teorema 1.1. (Teorema de existencia de Riemann) Sea G un grupo finito de orden n , $g \geq 2$ y $r \geq 0$ número natural. Entonces existe S superficie de Riemann de género g , donde G actúa en S con firma $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ si y sólo si la ecuación de Riemann-Hurwitz (1.1) se satisface y G tiene un $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ -vector generador $(a_1, \dots, a_\gamma, b_1, \dots, b_\gamma, c_1, \dots, c_r)$.

Demostración. Supongamos que existe una superficie S de género g , donde G actúa con firma $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$ entonces se satisface la ecuación (1.1) por Teorema de Riemann-Hurwitz, para el cubrimiento $\pi : S \rightarrow S/G$.

Si $g > 1$ por el teorema de uniformización existe (Δ, ρ) cubrimiento universal de la superficie, con ρ la proyección $\rho : \Delta \rightarrow S$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, el disco unitario, y $\Gamma_0 \leq \text{Aut}(\Delta)$ tal que

1. $S \cong \Delta/\Gamma_0$.
2. $\Gamma_0 \cong \pi_1(S)$, por lo tanto es un grupo sin torsión y actúa propiamente discontinuamente en Δ .

Además G actúa en S con firma $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$, por lo tanto el cubrimiento asociado $\pi : S \rightarrow S/G$ le corresponde Γ , subgrupo de los automorfismos del disco, conteniendo a Γ_0 y tal que $\Gamma_0 \leq \Gamma$ y $G \cong \Gamma/\Gamma_0$. Esto define un isomorfismo entre S/G y Δ/Γ , luego G actúa discontinuamente en S , pues Γ lo hace en Δ .

Se define $\rho^* : \Gamma \rightarrow G$ epimorfismo tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{g} & \Delta \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ S & \xrightarrow{\rho^*(g)} & S \end{array}$$

es decir, $\rho \circ g = \rho^*(g) \circ \rho$, con $g \in \Gamma$ y $\ker(\rho^*) = \Gamma_0$.

El cubrimiento holomorfo $\Delta \rightarrow \Delta/\Gamma$ ramifica en el conjunto $\{q_1, \dots, q_r\}$ con multiplicidad m_i en q_i , $i \in \{1, \dots, r\}$.

Luego Γ tiene una presentación

$$\Gamma = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_\gamma, \beta_\gamma, \delta_1, \dots, \delta_r : \delta_1^{m_1}, \dots, \delta_r^{m_r}, \prod_{i=1}^{\gamma} [\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^r \delta_j \right\rangle,$$

con $\alpha_i, \beta_i, \delta_j \in \text{Aut}(\Delta)$, ([9, Teorema IV.9.12]).

Ya que Γ_0 es un grupo sin torsión, basta aplicar ρ^* a los generadores de Γ para obtener el vector generador $(a_1, \dots, a_\gamma, b_1, \dots, b_\gamma, c_1, \dots, c_r)$.

Inversamente, consideramos el vector generador $(a_1, \dots, a_\gamma, b_1, \dots, b_\gamma, c_1, \dots, c_r)$.

Sea M una superficie de Riemann de género γ y B un conjunto de r puntos distintos en M y sea $q \in M \setminus B$ punto base, entonces

$$\pi_1(M \setminus B, q) = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_\gamma, \beta_\gamma, \delta_1, \dots, \delta_r : \prod_{i=1}^{\gamma} [\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^r \delta_j \right\rangle.$$

Si definimos $\rho : \pi_1(M \setminus B, q) \rightarrow S_n$, $n = |G|$, de manera que $\alpha_i \mapsto \phi(a_i)$, $\beta_i \mapsto \phi(b_i)$ y $\delta_j \mapsto \phi(c_j)$ con $i \in \{1, \dots, \gamma\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ y ϕ la representación de G en el grupo de permutaciones de n elementos, es decir, $\phi : G \rightarrow S_n$ es la representación regular.

Dado que la imagen de ρ es un subgrupo transitivo de S_n , pues $\pi_1(M \setminus B, q)$ actúa transitivamente sobre las fibras, existe un cubrimiento $f : S \rightarrow M$, de grado n , cuyos puntos rama están en B .

Como

$$\text{Gal}(S/M) \cong \frac{\pi_1(M \setminus B, q)}{f_*(\pi_1(S \setminus f^{-1}(B), p))} = \frac{\pi_1(M \setminus B, q)}{\ker(\rho)} \cong \text{Im}(\rho) \cong G,$$

G actúa sobre S y $S/G \cong M$, con f cubrimiento que ramifica en $B = \{q_1, \dots, q_r\}$ y como el género de M es γ por la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que el género de S es g . \square



Observación 1.3. Dada una acción concreta de un grupo G de orden n en una superficie S con firma $\sigma = (0; m_1, \dots, m_r)$ se puede encontrar un vector generador de la siguiente manera (para más detalles ver [19], [10]):

- Primero fijamos notación para

$$\zeta_m = e^{2\pi i/m},$$

en particular nos interesan estas raíces primitivas para $m = n$ y $m = m_j = |G_j|$.

- Identificamos los puntos rama $P_1, \dots, P_r \in S/G$ de la aplicación $\pi : S \rightarrow S/G$.
- Escogemos un $p_j \in \pi^{-1}(P_j)$, con $j = 1, \dots, r$. Llamaremos G_j el estabilizador del punto p_j , su orden es m_j (especificado en la firma).
- Construimos la representación $\eta_j : G_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ dada por la acción de G en una vecindad de p_j . Esto es, si $g \in G_j$, tenemos que g^{-1} es localmente $z \mapsto \zeta_{m_j}^s z$, por Prop.1.2 para algún entero s . Luego existe un $g_j \in G_j$ tal que $\eta_j(g_j) = (\zeta_n)^{n/m_j} = \zeta_{m_j}$.
- Escogemos dicho $g_j \in G_j$; es decir, un elemento de G_j tal que $\eta_j(g_j) = \zeta_{m_j}$.
- Finalmente el vector generador asociado a dicha acción es (g_1, \dots, g_r) .

Expliquemos brevemente la conexión entre vector generador y grupo fundamental, es decir aquella explicada en la demostración del Teorema 1.1. (existencia de Riemann).

El grupo fundamental Γ de la superficie $S/G \setminus \{P_1, \dots, P_r\}$, consideramos S/G de género 0, tiene una presentación de la forma

$$\Gamma = \left\langle \delta_1, \dots, \delta_r : \prod_{j=1}^r \delta_j = 1 \right\rangle,$$

donde los elementos δ_j corresponden a pequeños lazos orientados positivamente (contrarreloj) en torno a P_j , $j = 1..r$.

Según la demostración del Teorema 1.1, el cubriente $\pi : S \rightarrow S/G$ corresponde a un epimorfismo $\rho^* : \Gamma \rightarrow G$, y un sistema de generadores de Γ que satisfagan la presentación anterior, para los que tenemos $\rho^*(\delta_j) = g_j$. Esto explica por qué se debe tomar para η_j la representación local de g_j^{-1} ,

pues la operación en Γ es la concatenación de curvas y para que el morfismo ρ^* determinado por $\delta_j \mapsto g_j$ sea un homomorfismo, debemos considerar la expresión local de g_j^{-1} .

Ejemplo 1.3. Considere la curva hiperelíptica

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = y^2 - x^5 + 1 = 0\}.$$

Vemos que ésta es un curva algebraica afín suave, cuya superficie compacta asociada \bar{S} es de género $g = 2$.

Sea $G_c = \langle \phi(x, y) = (\zeta_5 x, -y) \rangle$ con ϕ automorfismo de la superficie de Riemann \bar{S} y $\zeta_5 = e^{2\pi i/5}$.

Es fácil ver que $G_c \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \simeq G = \langle \zeta : \zeta^{10} = id \rangle$, G_c es subgrupo de los automorfismos de \bar{S} , luego $X = \bar{S}/G$ es una superficie de Riemann compacta.

Para saber donde la proyección $\pi : \bar{S} \rightarrow \bar{S}/G$ ramifica, buscaremos los puntos de estabilizador no trivial, considerando que $|G_p| = 2, 5$ o 10 pues el estabilizador de un punto es un subgrupo cíclico de G .

Primero buscamos $(x_0, y_0) \in \bar{S}$ tal que su estabilizador sea un subgrupo de orden 2, generado por $\phi^5(x, y) = (x, -y)$, es decir $y_0 = -y_0$, luego $y_0 = 0$ y de la definición de la curva es necesario que $x_0^5 = 1$. Por lo tanto, $|G_p| = 2$ para $p_i = (\zeta_5^i, 0)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Para el subgrupo de orden 5 generado por $\phi^2(x, y) = (\zeta_5^2 x, y)$, x_0 satisface

$$x_0 = \zeta_5^2 x_0 = \zeta_5^4 x_0 = \zeta_5^6 x_0 = \zeta_5^8 x_0,$$

de aquí $x_0 = 0$, por lo tanto $y^2 = -1$, obteniendo que $|G_p| = 5$ para $p_6 = (0, i)$, $p_7 = (0, -i)$.

Es claro que $|G_\infty| = 10$.

En cada caso no existen más puntos de \bar{S} de estabilizador no trivial, pues

$$|G_p| = \frac{|G|}{n},$$

con n el número de puntos en la fibra de un punto.

En el cociente p_i con $i = 1, 2, 3, 4, 5$ están en la misma clase, al igual que p_6 con p_7 , por Riemann-Hurwitz concluimos que el género de la superficie cociente es 0 pues

$$\begin{aligned} 2 &= 10 \left[(2\gamma - 2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{10}\right) \right] \\ &= 20\gamma + 2. \end{aligned}$$

La firma de G en \bar{S} es $(0; 2, 5, 10)$.

Calcularemos un vector generador asociado a esta acción siguiendo la Observación 1.3, para ello tomamos $P_1 = [1 : 0 : 1]$, $P_2 = [0 : i : 1]$, $P_3 = [0 : 1 : 0]$ puntos rama de función π tal que cada uno está en una órbita distinta por la acción del grupo. Calcularemos la versión local de la acción en dichos puntos.

Si G_j es el estabilizador de alguna preimagen de P_j , diremos que $m_j = |G_j|$, para $j = 1, 2, 3$. Queremos construir la representación

$$\eta_j : G_j \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

dada por la acción de G en una vecindad de la preimagen de P_j para cada j y de cada una de ellas obtener un elemento g_j tal que $\eta_j(g_j) = (\zeta_{m_j})$. Recuerde que $\eta_j(g)$ se obtiene de la expresión local de g^{-1} , según lo explicado en la Observación 1.3.

Tomemos $p \in \pi^{-1}(P_1)$ y consideramos el abierto $\bar{S} \cap \{z \neq 0\}$, donde $\partial f / \partial x(q_1) \neq 0$, luego por el Teorema de la función Implícita podemos escribir $x = h(y)$, pues π_2 , la proyección en la segunda coordenada, es carta. Como

$$y \xrightarrow{\pi_2^{-1}} (h(y), y) \xrightarrow{\phi^{-5}} (h(y), -y) \xrightarrow{\pi_2} -y,$$

tenemos que $\eta_1(\phi^5) = -1$. Como buscamos $g_1 \in G_1$ tal que $\eta_1(g_1) = \zeta_{10}^5$, que es igual a -1 , entonces $g_1 = \zeta_5^5$.

Dado que en $q \in \pi^{-1}(P_2)$ la proyección π_1 es carta, localmente tenemos que

$$x \xrightarrow{\pi_1^{-1}} (x, k(x)) \xrightarrow{\phi^{-2}} (\zeta_5^3 x, k(x)) \xrightarrow{\pi_1} \zeta_5^3 x,$$

luego $\eta_2(\phi^2) = \zeta_5^3$, pues $\eta_2(\phi^4) = \zeta_5$. Ahora buscamos $g_2 \in G_2$ tal que $\eta_2(g_2) = \zeta_{10}^2 = \zeta_5$, por lo tanto $g_2 = \zeta_5^4$.

Mientras que para Q_3 , dado que ∞ es un punto singular, es necesario normalizar. Para ello ocuparemos el método descrito en [18, Pag. 71]. Estudiaremos el abierto $X_2 = \bar{S} \cap \{y \neq 0\}$, luego $X_2 = \{z^3 - x^5 + z^5 = 0\}$, escribimos $x^5 - z^3(1 + z^2) = 0$ y definimos $w = z\sqrt[3]{1 + z^2}$, de manera que $w^3 = x^5$. Por el algoritmo de la división $1 = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3$ y ya que 3 y 5 son relativamente primos, definimos la función $t(x, w) = x^{-3}w^2$ que es carta en $(0, 0)$, mientras que $r(s) = (s^3, s^5)$ es su inversa.

En X_2 , ϕ se extiende de manera que $\phi([x : y : z]) = [\zeta_5 x : -y : z]$. Con esto localmente tenemos

$$s \xrightarrow{r} (s^3, s^5) \mapsto [s^3 : 1 : s^5] \xrightarrow{\phi^{-1}} [\zeta_5^4 s^3 : -1 : s^5],$$

pero en X

$$(-\zeta_5^4 s^3, -s^5) \xrightarrow{t} -\zeta_5^{-12} s^{-9} s^{10} = -\zeta_5^3 s.$$

Luego $\eta_3(\phi) = -\zeta_5^3 = \zeta_{10}$. Como buscamos $g_3 \in G_3$ tal que $\eta_3(g_3) = \zeta_{10}$, tenemos que $g_3 = \varsigma$.

Finalmente como $G = \langle \varsigma : \varsigma^{10} = id \rangle$, el orden de ς^5 es 2, el de ς^4 es 5, el orden de ς es 10 y $\varsigma^5 \varsigma^4 \varsigma = id$ tenemos que $(\varsigma^5, \varsigma^4, \varsigma)$ es un vector generador para esta firma.,.

Capítulo 2

Acciones Topológicamente Equivalentes

2.1. Acción del grupo de trenzas en los Vectores Generadores para $\gamma = 0$.

Sea G un grupo finito que actúa sobre una superficie S compacta de género $g \geq 2$ y sean $\{p_1, \dots, p_r\}$ los puntos de rama de la aplicación $f : S \rightarrow S/G \cong \mathbb{P}^1$. Sin pérdida de generalidad consideraremos $p_i \neq \infty$ para todo i . Por el teorema de existencia de Riemann 1.1, podemos encontrar un vector generador.

Si fijamos el número r y hacemos variar los puntos de rama, es decir, consideramos todos los subconjuntos de \mathbb{C} de cardinalidad r , se obtiene un conjunto, definido en la sección 2.1.1, que llamaremos \mathcal{O}_r . Luego se construye un cubrimiento de dicho espacio y se obtendrá así un espacio de moduli \mathcal{H}_r , llamado espacio de Hurwitz.

El conjunto \mathcal{O}_r es un espacio topológico cuyo grupo fundamental, $\overline{\mathcal{B}}_r$, es isomorfo a un subgrupo de \mathcal{B}_r , el grupo de trenzas, por lo tanto $\overline{\mathcal{B}}_r$ actúa en el espacio de moduli, induciendo una acción sobre los vectores generadores ([26, Cap. 10 Parte II]). Las componentes conexas del espacio \mathcal{H}_r corresponden a las órbitas de acciones topológicamente equivalentes.

2.1.1. El espacio de configuración

Construiremos un espacio de moduli, considerando deformaciones de la esfera de Riemann, que lleven un conjunto de puntos rama en uno nuevo de la misma cardinalidad. Para ello consideraremos el conjunto \mathcal{O}_r de todos los subconjuntos de \mathbb{C} de cardinalidad r . Este conjunto es un espacio topológico pues se puede definir una vecindad de un punto $P = \{p_1, \dots, p_r\}$ como el conjunto $\mathcal{N}_0(D_1, \dots, D_r)$ de todos los puntos $P' = \{p'_1, \dots, p'_r\} \in \mathcal{O}_r$ tal que $p'_i \in D_i$, para cada i , donde D_i es vecindad de p_i y $D_i \subset \mathbb{C}$ son discos disjuntos.

Observación 2.1. \mathcal{O}_r es un conjunto conexo. Primero consideremos el subespacio de \mathbb{C}^r

$$\mathcal{O}^{(r)} = \{(p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{C}^r : p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j\}.$$

La función

$$\begin{aligned} f : \mathcal{O}^{(r)} &\rightarrow \mathcal{O}_{r-1} \\ (p_1, \dots, p_r) &\mapsto \{p_1, \dots, p_{r-1}\} \end{aligned}$$

es un cubrimiento de Galois [26, Lemma 10.9] y además se puede demostrar por inducción que $\mathcal{O}^{(r)}$ es conexo para todo r . Luego \mathcal{O}_r también lo es [26, 10.1.6].

Teorema 2.1. [1, Teorema. 1.11] Sea $P_0 \in \mathcal{O}_r$, el grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{O}_r, P_0)$ es isomorfo a $\overline{\mathcal{B}}_r$, grupo generado por Q_i , $i = 1, \dots, r-1$ que satisfacen las siguientes relaciones

1. $Q_i Q_{i+1} Q_i = Q_{i+1} Q_i Q_{i+1}$ si $i = 1, \dots, r-2$.
2. $Q_i Q_j = Q_j Q_i$ si $|i - j| > 1$.
3. $Q_1 Q_2 \dots Q_{r-1} Q_{r-1} \dots Q_2 Q_1 = 1$.

Observación 2.2. En otras palabras, $\overline{\mathcal{B}}_r$ es el *Mapping Class Group* de $\mathbb{P}^1 - P_0$, conocido como el grupo de trenzas esférico o como grupo de monodromía de Hurwitz.

La demostración del teorema es básicamente la misma demostración de [1, Teorema. 1.8] que muestra que el grupo de trenzas, \mathcal{B}_r , es el *mapping class group* del disco con r puntos marcados. Primero se fija $P_0 = \{1, 2, \dots, r\}$

como punto base de \mathcal{O}_r . Para $1 \leq i \leq r - 1$, se define el camino cerrado $Q_i(t) = \{p_1(t), \dots, p_r(t)\}$, donde p_j es una función continua de \mathbb{C} en \mathbb{C} tal que

$$p_j(t) = \begin{cases} \frac{(2i+1) - \exp(\pi\sqrt{-1}t)}{2} & \text{si } j = i \\ \frac{(2i+1) + \exp(\pi\sqrt{-1}t)}{2} & \text{si } j = i + 1 \\ j & j \neq i, i + 1 \end{cases}$$

para $t \in [0, 1]$. Es decir, $Q_i(t)$ lleva i a $i + 1$ por el círculo de radio $1/2$ centrado en $(2i + 1)/2$, de la misma forma lleva $i + 1$ a i , mientras que al resto de los punto los deja fijos. En la figura 2.1 se grafica $Q_i(t)$.

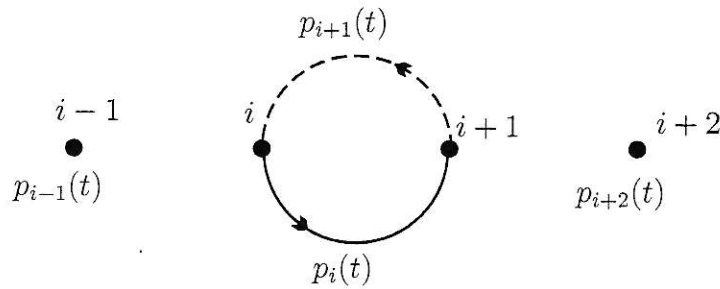


Figura 2.1: Función $Q_i(t)$

Se puede ver que $Q_i(t)$ es un elemento de \mathcal{O}_r para cada t . Se puede mostrar que toda curva cerrada es homotópica al producto de Q_i o sus inversos haciendo inducción en r , luego los Q_i generan el grupo \mathcal{B}_r que se obtiene como el grupo fundamental del espacio de configuración del disco. Pero en este caso al tratarse de la esfera se obtiene la relación adicional 3, cuyo camino asociado $Q_1 * Q_2 * \dots * Q_{r-1} * Q_{r-1} \dots Q_2 * Q_1(t)$ es homotópico a la identidad.

Llamaremos Grupo de monodromía de Hurwitz al grupo $\overline{\mathcal{B}}_r$.

2.1.2. Cubrimiento del espacio de configuración \mathcal{O}_r

Si el espacio S/G es una superficie de Riemann de género cero, entonces $\hat{f} : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento ramificado, al que es posible asociarle un cubrimiento no ramificado $f : S - \hat{f}^{-1}(P_0) \rightarrow \mathbb{P}^1 - P_0$. Por simplicidad en los cálculos y la exposición de ideas diremos que el conjunto de puntos rama será $P_0 = \{1, \dots, r\} \in \mathcal{O}_r$, para cualquier otro conjunto es completamente

análogo.

Sea Σ_i el conjunto de clases de conjugación de $\pi_1(\mathbb{P}^1 - P_0, \infty)$ de lazos que encierran sólo al punto i .

Definimos $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ como los caminos cerrados formados por la concatenación de un rayo que une el punto ∞ con el círculo de radio $1/4$ centrado en i y que vuelve a ∞ por el mismo rayo (ver figura 2.2).

Claramente $\gamma_i \in \Sigma_i$ y el producto $\gamma_1 \cdots \gamma_r$ es homotópico a la identidad, además $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ genera $\pi_1(\mathbb{P}^1 - P_0, \infty)$.

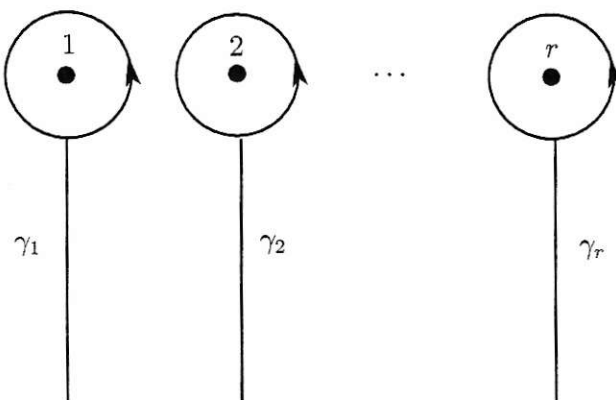


Figura 2.2: Generadores de $\pi_1(\mathbb{P}^1 - P_0, \infty)$

Definición 2.1. Diremos que

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 - P_0, \infty) &\rightarrow G \\ \gamma_i &\mapsto g_i \end{aligned}$$

es admisible si φ es un homomorfismo sobreyectivo tal que el orden $|\varphi(\gamma_i)|$ es m_i .

Observación 2.3. Notemos que al ser φ un homomorfismo se tiene que $\prod_{i=1}^r \varphi(\gamma_i) = 1$.

Consideramos el par (P, φ) , donde $P \in \mathcal{O}_r$ y φ es admisible.

Definición 2.2. Sea \mathbf{A} un subgrupo fijo de los automorfismos de G , diremos que φ y φ' admisibles son \mathbf{A} -equivalentes si y sólo si $\varphi' = A\varphi$ para algún $A \in \mathbf{A}$. Escribiremos $[\varphi]$ a la clase de equivalencia de φ . Además, dos pares

(P, φ) y (P', φ') son \mathbf{A} -equivalentes si y sólo si φ y φ' lo son y $P = P'$. Denotaremos por $\mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G)$ el conjunto de clases por esa equivalencia y $[P, \varphi]_{\mathbf{A}}$ a sus elementos ([26, Subsección 10.1.3.1]).

Además diremos que $\mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G)$ es un espacio de Hurwitz.

Observación 2.4. Existe una única topología en $\mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G)$ tal que

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{A}} : \mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G) &\rightarrow \mathcal{O}_r \\ [P, \varphi]_{\mathbf{A}} &\mapsto P \end{aligned}$$

es un cubrimiento. Dicha topología será la inducida por la de \mathcal{O}_r y se define a continuación.

2.1.3. Topología del espacio de Hurwitz $\mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G)$

Se define una base para la topología ([26, Subsección 10.1.4]), dando los abiertos básicos en cada punto. Para cada elemento $[P, \varphi]_{\mathbf{A}}$ de $\mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G)$ definiremos dichos abiertos de la siguiente forma. Si $P = \{p_1, \dots, p_r\} \in \mathcal{O}_r$, sea $D_i \subset \mathbb{C}$ un disco alrededor de p_i , tal que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Definimos el conjunto $\mathcal{N}(D_1, \dots, D_r; [\varphi])$ de todos los $[P', \varphi']_{\mathbf{A}}$, tal que $P' = \{p'_1, \dots, p'_r\}$, con $p'_i \in D_i$ para todo i y φ' es la composición de un φ admisible con el isomorfismo canónico (módulo homotopía) dada por

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 - P', \infty) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_r), \infty) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$$

que lleva a la clase de γ'_j , el generador de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P', \infty)$ que encierra a p'_j , a la clase de $\overline{\gamma}_j$ generador de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_r), \infty)$ que encierra a D_j , el abierto que contiene a p_j y p'_j , para luego llevarla a la clase de γ_j de la sección anterior. Ver figura 2.3.

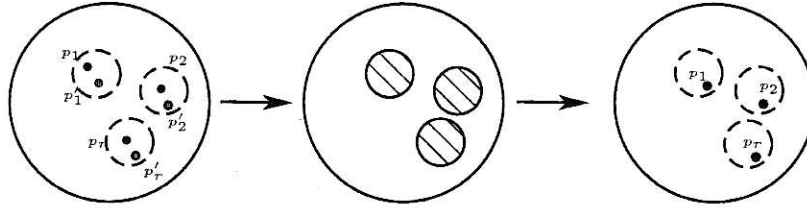


Figura 2.3: Isomorfismos

Con dichas topologías la función $\Psi_{\mathbf{A}} : \mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G) \rightarrow \mathcal{O}_r$ es efectivamente un cubrimiento, pues si $\mathcal{N}_0(D_1, \dots, D_r) = \{\{q_1, \dots, q_r\} : q_i \in D_i\}$ es un

abierto de \mathcal{O}_r , entonces $\Psi_{\mathbf{A}}^{-1}(\mathcal{N}_0(D_1, \dots, D_r))$ es el conjunto de los $[P', \varphi]_{\mathbf{A}}$ tal que $P' = \{p'_1, \dots, p'_r\}$ con $p'_j \in D_j$ y φ admisible módulo equivalencia por \mathbf{A} (Definición 2.2), es decir,

$$\Psi_{\mathbf{A}}^{-1}(\mathcal{N}_0(D_1, \dots, D_r)) = \bigcup_{\varphi \text{ admisible}} \mathcal{N}(D_1, \dots, D_r; [\varphi]).$$

2.1.4. Acción del grupo de Monodromía de Hurwitz.

Como $\Psi_{\mathbf{A}} : \mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})} \rightarrow \mathcal{O}_r$, $[P, \varphi]_{\mathbf{A}} \mapsto P$ es un cubrimiento, $\overline{\mathcal{B}}_r$ actúa en la fibra del punto $P_0 \in \mathcal{O}_r$ ([26, Subsección 10.1.7]), que consiste de $[P_0, \varphi]_{\mathbf{A}}$, donde $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 - P, P_0) \rightarrow G$, $\prod_{i=1}^r \varphi(\gamma_i) = 1$ y $|\varphi(\gamma_i)| = m_i$, módulo la equivalencia por \mathbf{A} .

Pero φ está determinada por sus valores g_1, \dots, g_r en los generadores $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. Si definimos el conjunto de vectores generadores

$$\Omega_r(G) = \{(g_1, \dots, g_r) \in G^r / G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle, g_1 \cdots g_r = 1, |g_i| = m_i \forall i\},$$

claramente el grupo \mathbf{A} actúa en dicho conjunto, pues la equivalencia por \mathbf{A} de φ y φ' induce una equivalencia en (g_1, \dots, g_r) y (g'_1, \dots, g'_r)

Por lo tanto existe una biyección entre $\Psi_{\mathbf{A}}^{-1}(P_0)$ y el conjunto de órbitas por \mathbf{A} de $\Omega_r(G)$, que denotaremos por $\Omega_r^{(\mathbf{A})}(G)$. Definido por

$$\begin{aligned} \lambda : \Psi_{\mathbf{A}}^{-1}(P_0) &\rightarrow \Omega_r^{(\mathbf{A})}(G) \\ [P_0, \varphi]_{\mathbf{A}} &\mapsto (\varphi(\gamma_1), \dots, \varphi(\gamma_r)). \end{aligned}$$

Con esta biyección, tenemos que la acción $\overline{\mathcal{B}}_r$ sobre $\Psi_{\mathbf{A}}^{-1}(P_0)$ induce una acción en $\Omega_r^{(\mathbf{A})}(G)$. Dicha acción está bien definida y es inyectiva, pues φ y φ' corresponden al mismo elemento si y sólo si $\varphi' = A\varphi$, es decir, $(g'_1, \dots, g'_r) = (A(g_1), \dots, A(g_r))$. Es sobreyectiva pues dado un vector generador, podemos definir φ tal que $\gamma_i \mapsto g_i$ para todo i , luego φ es admisible. Por la biyección anterior, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2. ([26, Teorema 10.13]) En la acción de $\overline{\mathcal{B}}_r$ en $\Omega_r^{(\mathbf{A})}(G)$, el elemento Q_i , $1 \leq i \leq r-1$, lleva la clase del vector (g_1, \dots, g_r) en la clase de $(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, g_{i+2} \cdots g_r)$

Demostración. Fijemos i , con $1 \leq i \leq r-1$. Consideremos la función tal que

$$\theta_t(z) = \begin{cases} \frac{2i+1}{2} + (z - \frac{2i+1}{2}) \exp(h(|z - \frac{2i+1}{2}|) \pi \sqrt{-1}t) & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases},$$

para todo $t \in [0, 1]$, con $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continua tal que $h(z) = 1$ para $z \in [0, 3/4]$ y $h(z) = 0$ si $z \geq 1$.

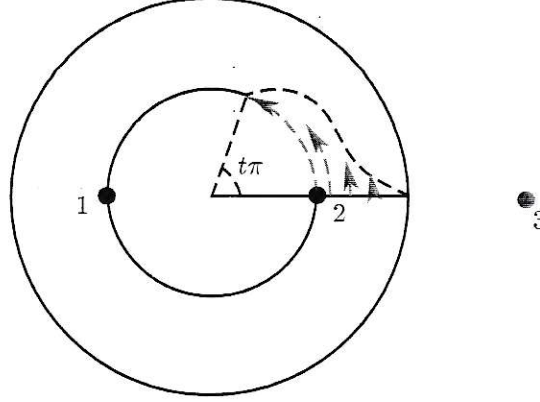


Figura 2.4: Función $\theta_t(z)$

Es decir, para $t_0 \in [0, 1]$ tenemos que sobre el disco de centro $(2i + 1)/2$ y radio $3/4$ es una rotación en $t_0\pi$ y fuera del disco del mismo centro, pero de radio 1, es la identidad, es decir, para j en el conjunto P_0 vemos que $\theta_t(j)$ es igual a $p_j(t) \in Q_i(t)$.

Por lo tanto obtenemos una familia de funciones continuas $\{\theta_t\}_{t \in [0,1]}$, de homeomorfismos de \mathbb{P}^1 . Por [26, Lema 10.5] $\theta_t : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ induce un homeomorfismo definido por

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t : \mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G) &\rightarrow \mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G) \\ [P, \varphi]_{\mathbf{A}} &\mapsto [\theta_t(P), \varphi\theta_t^{-1}]_{\mathbf{A}}, \end{aligned}$$

donde $\varphi\theta_t^{-1}$ es la composición de φ con la función canónica

$$\pi(\mathbb{P}^1 - \theta_t(P), \infty) \rightarrow \pi(\mathbb{P}^1 - P, \infty),$$

que es un isomorfismo de grupos, luego $\varphi\theta_t^{-1}$ es admisible también, por lo tanto la función $\hat{\theta}_t$ está bien definida.

Por [26, Lemma 10.5] la familia $\{\hat{\theta}_t\}_{t \in [0,1]}$ es también una familia continua.

Luego $t \rightarrow \hat{\theta}_t(B_0)$ es el levantamiento de Q_i por $\Psi_{(\mathbf{A})}$ con punto inicial $B_0 \in \Psi^{-1}(P_0)$.

Como $\hat{\theta}_1$ lleva

$$[P_0, \varphi]_{\mathbf{A}} \mapsto [\theta_1(P_0), \varphi\theta_1^{-1}]_{\mathbf{A}} = [P_0, \varphi\theta_1^{-1}]_{\mathbf{A}}$$

en $\mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}(G)$, ahora Q_i lleva (g_1, \dots, g_r) a (g'_1, \dots, g'_r) , con $g'_j = \varphi\theta_1^{-1}(\gamma_j)$, pero $\theta_1^{-1}(\gamma_j) = \gamma_j$ si $j \neq i, i+1$, mientras que $\theta_1^{-1}(\gamma_{j+1})$ es homotópico a γ_j . Dado que $g'_1 \cdots g'_r = 1$, tenemos que $g'_i = g_i g_{i+1} g_i^{-1}$. □

Observación 2.5. La relación $Q_1 Q_2 \dots Q_{r-1} Q_{r-1} \dots Q_2 Q_1$ lleva un elemento $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_r)$ a $(g_1, g_1 g_2 g_1^{-1}, \dots, g_1 g_r g_1^{-1})$ que es equivalente a la identidad por la acción de los automorfismos de G , por lo tanto, clasificar por la acción de $\text{Aut}(G) \times \overline{\mathcal{B}}_r$ es lo mismo que clasificar por la acción de $\text{Aut}(G) \times \mathcal{B}_r$, pues la relación adicional 3 (ver Teorema 2.1) no entrega más información. En lo sucesivo tomaremos \mathbf{A} como todo $\text{Aut}(G)$.

Con esto tenemos que existe una acción del grupo de trenzas en el conjunto de vectores generadores, pero nuestro objetivo es clasificar acciones de grupos, por lo tanto falta ver que las acciones topológicamente equivalentes corresponden a la misma clase por la acción de $\text{Aut}(G) \times \mathcal{B}_r$. Para ello es necesario hacer algunos comentarios acerca de los espacios de Hurwitz.

2.2. Espacios de Hurwitz

Los espacios de Hurwitz más generales aparecieron como un espacio topológico donde el grupo $\text{Homeo}^+(\mathbb{P}^1)$ actúa de manera continua y transitiva, donde es claro que las componentes conexas del espacio $\mathcal{H}_r^{(\mathbf{A})}$ corresponden a clases de equivalencia topológica. La construcción de los espacios de Hurwitz de la sección anterior corresponde a un método analítico donde la acción del grupo de trenzas se da de forma natural.

Sea $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento ramificado y sea $P = \{p_1, \dots, p_r\}$ el conjunto de puntos rama. Escogemos un nuevo conjunto $P' = \{p'_1, \dots, p'_r\}$ tal que cada x'_i está cerca de x_i . Se puede deformar el primer cubrimiento en un nuevo cubrimiento de manera que el conjunto de puntos rama sea el conjunto P' y que la estructura de P se mantenga sobre las vecindades de P' . Sea G un grupo finito y S una superficie de Riemann. Un G -cubrimiento de S es un cubrimiento de Galois $f : \Sigma \rightarrow S$ con un isomorfismo entre G y $\text{Aut}(f) = \{h : S \rightarrow S : f \circ h = f\}$. En tal caso construimos un espacio de moduli \mathcal{H}_r tal que cada punto en él corresponde a una clase de equivalencia de cubrimientos ramificados, es decir $\phi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ es equivalente a $\phi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ si y sólo si existe un homeomorfismo $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ tal que $\phi_1 = \phi_2 \circ h$ y $g \circ h = h \circ g$ para todo $g \in G$.

En este contexto se define el cubrimiento de \mathcal{O}_r como la aplicación

$$\Psi_r : \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{O}_r,$$

que manda la clase de un cubrimiento $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ al lugar de puntos rama de ϕ .

2.3. Acciones sobre el sistema de Generadores.

En general se tiene que si S es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y G es un grupo finito de manera que exista una acción ε de G en S con firma $(\gamma; m_1, \dots, m_r)$, entonces existe un epimorfismo $\bar{\theta}_\varepsilon : \Gamma \rightarrow G$, con Γ un subgrupo de los automorfismos del disco unitario Δ , tal que $K = \ker(\bar{\theta}_\varepsilon)$ es grupo Fuchsiano sin torsión y Δ/K es una superficie de Riemann bi-holomorfa a S .

Dicho Γ tiene la siguiente presentación

$$\Gamma = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_\gamma, \beta_\gamma, \delta_1, \dots, \delta_r : \delta_1^{m_1} = \dots = \delta_r^{m_r} = \prod_{i=1}^{\gamma} [\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^r \delta_j = 1 \right\rangle.$$

Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ acciones de G en S_1, S_2 respectivamente y sean $\theta_1 : \Gamma_1 \rightarrow \varepsilon_1(G)$, $\theta_2 : \Gamma_2 \rightarrow \varepsilon_2(G)$ epimorfismos que resultan de componer el epimorfismo anterior $\bar{\theta}$ con ε_j , para $j = 1, 2$. Bajo estas condiciones tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.3. [4, Teorema. 9] Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dos acciones de G en S_1, S_2 respectivamente. Éstas son topológicamente equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo $\chi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ y un isomorfismo $\Phi : \varepsilon_1(G) \rightarrow \varepsilon_2(G)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\theta_1} & \varepsilon_1(G) \\ \chi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\theta_2} & \varepsilon_2(G) \end{array}$$

Denotaremos \mathfrak{B} al subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma)$ constituido por todos los isomorfismos χ del teorema anterior. Entonces tenemos el siguiente resultado

Proposición 2.1. [3, Prop. 2.2] Dos vectores generadores de un grupo finito G definen la misma clase de equivalencia de acciones de G si y sólo si los vectores generadores están en la misma órbita por la acción de $\text{Aut}(G) \times \mathfrak{B}$.

Los elementos de \mathfrak{B} se pueden identificar con los elementos del subgrupo $\overline{\mathcal{B}}_r$ del grupo de trenzas, los que, como vimos en la sección anterior, son isomorfos.

Corolario 2.1. [3, Prop.2.6] Si G es grupo abeliano y γ , el género de la superficie cociente, es cero, entonces \mathfrak{B} actúa en los vectores generadores permutando los c_j , preservando los ordenes de los elementos.

Demostración. Según el Teorema 2.2, si el grupo G es abeliano, entonces los generadores de la acción, es decir, los Q_i llevan el vector (g_1, \dots, g_r) en $(g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_i, \dots, g_r)$, que son las transposiciones $(i, i+1)$ de los índices. \square

Ejemplo 2.1. Considere $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ actuando en género 3 con firma $(2, 2, 4, 4)$ por Riemann-Hurwitz. En G hay 4 elementos de orden 4 y 3 elementos de orden 2.

Consideremos (a, b, c, d) un elemento en G^4 , tal que a y b tienen orden dos y c, d tienen orden cuatro. Si $a = b$ tenemos que hay 12 elementos tales que el producto sea la identidad, pero si queremos que sea un vector generador debemos descontar los 4 elementos que cumplen $a = c^2$ o $a = d^2$, los cuales no corresponden a vectores generadores. Mientras que son 24 elementos si $a \neq b$. Tenemos que la cardinalidad de Ω , el conjunto de vectores generadores, es de 32 elementos.

Como el género de la superficie cociente es 0, por Corolario 2.1 tenemos que la acción de $\text{Aut}(G) \times S_2 \times S_2$ en Ω determina acciones topológicamente equivalentes. Hay 3 órbita por esta acción, lo que concuerda con [3][Tabla 5].

Capítulo 3

Ejemplos

En este capítulo desarrollaremos algunos ejemplos y reobtendremos algunos resultados.

3.1. Algunos resultados para $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ y $\gamma = 0$

3.1.1. Firma (p, p, p)

Consideraremos $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ y estudiaremos el caso en que el grupo actúa con firma $(0; p, p, p)$, p primo.

Por la Ecuación 1.1 y el Teorema 1.1, G actúa sobre una superficie de género $g = (p - 1)/2$, de donde concluimos que $p \neq 2$.

Para $p = 3$, actúa sobre una superficie de género 1 y existe sólo una acción, pues existen sólo dos vectores generadores en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, estos son $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$, pero están en la misma órbita por la acción de $\text{Aut}(G) \times \mathcal{B}$. Además es un hecho conocido que salvo isomorfismo existe una única superficie de género 1 que tiene un automorfismo (que fija el cero), de orden 3.

Para el resto de los casos tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.1. Sea S una superficie de Riemann de género g y $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, con p primo y $p > 3$, actuando con firma $(0; p, p, p)$. Si m es el número de acciones topológicamente no equivalentes, entonces

$$m = \begin{cases} \frac{p+5}{6} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{p+1}{6} & \text{si } p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Demostración. G actúa con firma $(0; p, p, p)$, es decir, existen 3 puntos en la superficie con estabilizador de orden p que están en distintas órbitas por la

acción de G .

Al ser la superficie cociente de género cero, el conjunto vectores generadores es

$$\Omega = \left\{ (c_1, c_2, c_3) \in G^3 : |c_i| = p, \sum_{i=1}^3 c_i = 0, \langle c_1, c_2, c_3 \rangle = G \right\}.$$

Es fácil ver que para c_1 hay $p - 1$ elementos de G de orden p , de entre los cuales se puede escoger uno. Para c_2 hay $p - 2$, los mismos $p - 1$ descontando el inverso de c_1 , como el producto de los tres elementos debe ser uno, $c_3 = c_1^{-1}c_2^{-1}$. La cardinalidad de Ω es $(p - 1)(p - 2)$.

Pero además queremos saber cuántas acciones topológicamente no equivalentes hay, sabiendo que dos vectores definen la misma acción si y sólo si están en la misma órbita por la acción del grupo

$$\Upsilon = \text{Aut}(G) \times \mathcal{B}.$$

Como el género de la superficie cociente es cero y el grupo es abeliano, \mathcal{B} actúa permutando las coordenadas de los vectores (Proposición 2.1). Además, dado que $\text{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{1, 2, \dots, p - 1\}$

$$\Upsilon \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times S_3.$$

Donde $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ actúa llevando un vector generador (c_1, c_2, c_3) a $(a \cdot c_1, a \cdot c_2, a \cdot c_3)$, donde $a \cdot c_1$ denota el producto en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Para saber cuántas acciones topológicamente no equivalentes hay utilizaremos la fórmula de conteo de órbitas

$$|\Omega/\Upsilon| = \frac{1}{|\Upsilon|} \sum_{\varsigma \in \Upsilon} |\text{Fix } \varsigma|,$$

donde $\text{Fix } \varsigma$ es el conjunto de elementos de Ω , que quedan fijos bajo la acción de ς .

Si $\sigma \in S_3$ y $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, la acción se define como

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3) = (a \cdot c_{\sigma(1)}, a \cdot c_{\sigma(2)}, a \cdot c_{\sigma(3)}) \in \Omega.$$

Luego, separando la demostración en casos se tiene:

- Si $\sigma = id$ la acción es:

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3) = (a \cdot c_1, a \cdot c_2, a \cdot c_3),$$

quedando fijo sólo si $a = 1$, pero claramente todos los elementos de Ω quedan fijos por (id, id) , es decir $(p - 1)(p - 2)$ elementos.

- Si $\sigma = (1, 2)$, la acción es:

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3) = (a \cdot c_2, a \cdot c_1, a \cdot c_3),$$

para que (c_1, c_2, c_3) quede fijo, a debe ser 1, luego $c_1 = c_2$, por lo tanto hay $p - 1$ elementos de Ω fijos por $(1, (1, 2))$.

Análogamente para los demás elementos de orden 2 de S_3 . Luego la contribución total de estos elementos es $3(p - 1)$.

- Si $\sigma = (1, 3, 2)$ se tiene:

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3) = (a \cdot c_3, a \cdot c_1, a \cdot c_2),$$

entonces $c_1 = a \cdot c_3 = a^2 \cdot c_2 = a^3 \cdot c_1$. Si elegimos c_1 el vector queda totalmente determinado. En este caso (a, σ) tiene puntos fijos sólo si $a^3 = 1$, pero dicha ecuación tiene solución no trivial si y sólo si $p \equiv 1 \pmod{3}$. Hay 3 soluciones, si $a = 1$ tenemos que $c_1 = c_2 = c_3$, entonces $3 \cdot c_1 = 0 \pmod{p}$, pero 3 no divide a p , por lo que hay dos elementos del tipo (a, σ) , con $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* - \{1\}$ que tienen puntos fijos en Ω .

El análisis anterior en análogo para $(1, 2, 3) \in S_3$, entonces para cada una de estos 4 elementos hay $(p - 1)$ puntos fijos de Ω , pues $c_1 \neq 0$.

Por lo que

$$|\Omega/\Upsilon| = \begin{cases} \frac{p+5}{6} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{p+1}{6} & \text{si } p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Por lo tanto hay $(p + 5)/6$ acciones topológicamente no equivalentes si $p \equiv 1 \pmod{3}$ y hay $(p + 1)/6$ en caso de que $p \equiv 2 \pmod{3}$. \square

Este resultado es parte de [21], donde fue obtenido mediante otros métodos.

Corolario 3.1. Si $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ actúa con firma $(0; p, p, p)$, entonces hay $(p + 5)/6$ acciones no conformemente equivalentes si $p \equiv 1 \pmod{3}$ y hay $(p + 1)/6$ en caso de que $p \equiv 2 \pmod{3}$.

Demostración. Usamos el Corolario 1.1 para concluir la equivalencia analítica. \square

3.1.2. Firma (p, p, p, p)

Proposición 3.2. Sea S una superficie de Riemann de género g y $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, con p primo mayor que 3, actuando con firma $(0; p, p, p, p)$, entonces el número de acciones topológicamente no equivalentes es

$$|\Omega/\Upsilon| = \begin{cases} \frac{p^2+6p+17}{24} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{p^2+6p+5}{24} & \text{si no} \end{cases}$$

mientras que para $p = 3$, hay sólo una acción.

Demostración. De la ecuación de Riemann-Hurwitz tenemos que $g = (p-1)$. Para el caso $p = 3$, $\Upsilon = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \times S_4$. Vemos que el conjunto de vectores generadores es

$$\Omega = \{(1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1)\},$$

pero claramente están en la misma clase, por la acción de Υ . Es decir, para $p = 3$ hay una sola acción.

Para $p > 3$ el conjunto de vectores generadores es

$$\Omega = \left\{ (c_1, c_2, c_3, c_4) \in G^4 : |c_i| = p, \sum_{i=1}^4 c_i = 0, \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle = G \right\}.$$

La cardinalidad de Ω es $(p-1)(p-2)^2 + (p-1)^2$, pues para c_1, c_2 tenemos $p-1$ opciones, es decir, dadas las restricciones, es posible que estos sean elementos cualesquiera de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{id\}$, mientras que para c_3 tenemos dos casos. Primero si $c_1 + c_2$ no es la identidad tenemos $p-2$ opciones, pues $c_3 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{id, -(c_1 + c_2)\}$, pues de lo contrario c_4 sería la identidad. Entonces llevamos hasta ahora $(p-1)(p-2)^2$. En el segundo caso $c_2 = -c_1$ hay $p-1$ posibilidades, mientras que hay $p-1$ valores que puede tomar c_3 y c_4 queda determinado por dicho valor.

Como esta vez

$$\Upsilon = \text{Aut}(G) \times \mathcal{B} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times S_4$$

por la proposición 2.1. Donde $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ actúa llevando un vector generador (c_1, c_2, c_3, c_4) a $(a \cdot c_1, a \cdot c_2, a \cdot c_3, a \cdot c_4)$.

Nuevamente utilizaremos la fórmula

$$|\Omega/\Upsilon| = \frac{1}{|\Upsilon|} \sum_{\varsigma \in \Upsilon} |\text{Fix } \varsigma|.$$



Si $\sigma \in S_4$ y $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, la acción se define como

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3, c_4) = (a \cdot c_{\sigma(1)}, a \cdot c_{\sigma(2)}, a \cdot c_{\sigma(3)}, a \cdot c_{\sigma(4)}) \in \Omega.$$

Luego, separando en casos se tiene:

- Si $\sigma = id$ la acción es:

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3, c_4) = (a \cdot c_1, a \cdot c_2, a \cdot c_3, a \cdot c_4),$$

quedando fijo sólo si $a = 1$, pero claramente todos los elementos de Ω quedan fijos por (id, id) , es decir $(p-1)(p-2)^2 + (p-1)^2$.

- Si $\sigma = (1, 2)$ se tiene:

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3, c_4) = (a \cdot c_2, a \cdot c_1, a \cdot c_3, a \cdot c_4),$$

para que quede fijo, a debe ser 1, luego $c_1 = c_2$ y $c_3 \neq -c_1 - c_2$, por lo tanto hay $(p-1)(p-2)$ elementos de Ω fijos por $(1, (1, 2))$.

Análogamente para los demás elementos de orden 2 de S_4 . Luego la contribución de los elementos de la forma $(1, \sigma)$, con σ un 2-ciclo, es $6(p-1)(p-2)$.

- Si $\sigma = (1, 3, 2)$ tenemos que:

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3, c_4) = (a \cdot c_3, a \cdot c_1, a \cdot c_2, a \cdot c_4),$$

entonces para un punto fijo, se tiene $c_1 = a \cdot c_3 = a^2 \cdot c_2 = a^3 \cdot c_1$ y $a \cdot c_4 = c_4$, luego $a = 1$. Si elegimos c_1 , el vector queda totalmente determinado, pues $c_4 = -3c_1$. Por lo tanto hay $(p-1)$ elementos que quedan fijos por la acción de $(1, \sigma)$.

Como hay 8 elementos de S_4 de orden 3, la contribución de los elementos de la forma (a, σ) , con $|\sigma| = 3$ es $8(p-1)$.

- Si $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ queremos que:

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3, c_4) = (a \cdot c_2, a \cdot c_3, a \cdot c_4, a \cdot c_1) = (c_1, c_2, c_3, c_4),$$

luego $c_1 = a \cdot c_2 = a^2 \cdot c_3 = a^3 \cdot c_4 = a^4 \cdot c_1$, por lo tanto (a, σ) deja fijos los elementos de Ω si y sólo si $a^4 = 1$, $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, es decir, tiene 4 soluciones si $p \equiv 1 \pmod{4}$, de lo contrario tiene sólo dos.

Si $a = 1$, entonces $4 \cdot c_1 = 0$, pero ni c_1 ni 4 dividen a p , por lo tanto $a = 1$ no hay puntos fijos. Mientras que si $a = -1$ el vector es de la

forma $(c_1, -c_1, c_1, -c_1)$, por lo tanto hay $p - 1$ elementos fijos.

Ahora contemos cuántos vectores quedan fijos por los elementos tales que $a^4 = 1$, $a \neq \pm 1$. Éstos son de la forma $(c_1, a \cdot c_1, a^2 \cdot c_1, a^3 \cdot c_1)$, por lo tanto $(1 + a + a^2 + a^3) \cdot c_1 = 0$. Como el vector queda totalmente determinado por c_1 , entonces hay $(p - 1)$ elementos de Ω , por cada a , que quedan fijos por la acción de (a, σ) . Análogamente para todos los elemento de S_4 de orden 4, es decir, hay $18(p - 1)$ elementos (contando repeticiones) de Ω fijos por dichos elementos, si $p \equiv 1 \pmod{4}$ y $6(p - 1)$ (contando repeticiones) en caso contrario.

- Si $\sigma = (12)(34)$

$$(a, \sigma)(c_1, c_2, c_3, c_4) = (a \cdot c_2, a \cdot c_1, a \cdot c_4, a \cdot c_3) = (c_1, c_2, c_3, c_4)$$

entonces $c_1 = a \cdot c_2 = a^2 \cdot c_1$, por lo que a^2 debe ser igual a 1, luego $a = \pm 1$. Si $a = 1$ el vector debe ser de la forma (c_1, c_1, c_3, c_3) por lo tanto hay $p - 1$ posibilidades para c_1 , mientras que $c_3 = -c_1$. En el caso de $a = -1$ el vector de la forma $(c_1, -c_1, c_2, -c_2)$ por lo tanto hay $p - 1$ posibilidades para c_1 y $p - 1$ para c_2 .

Además hay 3 elementos de esta forma. Luego la contribución es $3(p - 1) + 3(p - 1)^2$.

Por lo tanto para $p > 3$

$$|\Omega/\Upsilon| = \begin{cases} \frac{p^2+6p+17}{24} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{p^2+6p+5}{24} & \text{si no} \end{cases}$$

Es decir, hay sólo una acción módulo equivalencia topológica si $p = 3$, si $p \equiv 1 \pmod{4}$ hay $\frac{p^2+6p+17}{24}$ acciones topológicamente no equivalentes, mientras que hay $\frac{p^2+6p+5}{24}$ en otro caso. \square

Al igual que en el caso anterior, tenemos que

Corolario 3.2. Si $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ actúa con firma $(0; p, p, p, p)$, entonces hay $(p^2 + 6p + 17)/24$ acciones no conformemente equivalentes si $p \equiv 1 \pmod{4}$ y hay $(p^2 + 6p + 5)/24$ en caso de que $p \equiv 3 \pmod{4}$, $p > 3$, y hay sólo una si $p = 3$.

Este resultado es parte de lo obtenido en [25], pero por medios diferentes.

Capítulo 4

Rutina

4.1. Rutina

Se han implementado las acciones del grupo de trenzas y los automorfismos mostrados en el Capítulo 2 en el sistema algebraico computacional de código abierto SAGE, donde el paquete necesario se encuentra disponible en <https://sites.google.com/a/u.uchile.cl/polygons/> que ha sido desarrollado por el cotutor de esta tesis, Profesor A. Behn.

Esta rutina nos permite saber cuántas acciones topológicamente distintas hay para un grupo y una firma dados. Alternativamente se pueden dar el grupo y el género sobre el que actúa, obteniendo una lista de las firmas posibles, dadas por la ecuación de Riemann-Hurwitz (1.1) y poder trabajar con dicha lista. Primero encuentra los vectores generadores, luego calcula las órbitas por los automorfismos del grupo y luego las órbitas por la acción del grupo de trenzas. Además escoge un representante de cada clase.

Ejemplo 4.1. En este ejemplo se muestran algunos de los comandos implementados en SAGE para el Ejemplo 1.3, donde se calcula un vector generador.

Primero definiremos el objeto G como el subgrupo de S_{10} isomorfo al grupo cíclico de 10 elementos. Además buscamos la lista de firmas posibles para la acción del grupo G en superficies de género 2. Esto se obtiene de la siguiente manera:

```
sage: G=CyclicPermutationGroup(10)
sage: A=suggest_signatures(G,2)
sage: A
```


cuyo resultado es la lista:

```
sage: [[10, 5, 2]]
```

es decir, existe sólo una firma para dicha acción en superficies de género 2. Esta rutina ordena la firma de mayor a menor para evitar repeticiones. Pero queremos conocer las órbitas del conjunto de vectores generadores por la acción de $\text{Aut}(G) \times \mathcal{B}$, lo cual se encuentra mediante el comando:

```
sage: L=find_generator_representatives(G,A[0])
```

Para saber cuántas acciones topológicamente distintas hay y más aún, cuáles son representantes para cada una de las órbitas, basta con escribir:

```
sage: print len(L)
sage: L
```

donde el programa nos entrega

```
sage: 1
sage: [[(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10), (1,5,9,3,7)(2,6,10,4,8),
(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)]]
```

Recordemos que SAGE nos entrega la representación permutacional de los elementos del grupo cíclico de orden 10.

Ejemplo 4.2. Ahora mostramos el ejemplo 2.1 de la sección 2.3.

```
sage: H=CyclicPermutationGroup(2)
sage: K=CyclicPermutationGroup(4)
sage: D=direct_product_permgroups([H,K])
sage: L=find_all_generators(D,[2,2,4,4])
```

Este último comando encuentra todos los posibles vectores generadores para un grupo y una firma dados.

```
sage: print len(L)
sage: print len(Representatives(L))
```

mientras que de este último conseguimos los representantes de las órbitas por la acción de $\text{Aut}(G) \times \mathcal{B}$, pero esta vez dependiendo de la lista de vectores generadores. Obtenemos

```
sage: 32
sage: 3
```

Luego el número de acciones topológicamente no equivalentes es 3.

4.2. Aplicaciones

4.2.1. Séxtica de Wiman

Según el grado, se sabe que la curva de Fermat $x^n + y^n + z^n = 0$ es la curva algebraica no singular más simétrica [20] excepto para grados 4 y 6 donde lo son la cuártica de Klein $x^3y + y^3z + z^3x = 0$, de género 3 y la séxtica de Wiman

$$10x^3y^3 + 9(x^5 + y^5)z - 45x^2y^2z^2 - 135xyz^4 + 27z^6 = 0,$$

de género 10, respectivamente.

En [12] queda abierta la siguiente pregunta: ¿la superficie de Riemann compacta de género 10 más simétrica, es isomorfa a la séxtica de Wiman? Para contestar dicha pregunta primero vemos que el orden de G , grupo que actúa en género 10, está acotado por:

$$|G| \leq 84(g - 1),$$

es decir, el orden de G es menor o igual a 756.

Hacemos un lista con el orden de los grupos que actúan en género $g = 10$, verificando si existe una firma para la cual la ecuación de Riemann-Hurwitz 1.1 se satisface con $\gamma = 0$. Luego vemos cuales son los ordenes de los grupos que actúan:

```
sage: L=[]
sage: for k in range(1,757):
sage: t=riemann_hurwitz_given_gamma(ZZ(k),10,0)
sage: if t!=[ ]:
sage: L.append(k)
```

de donde obtenemos la lista L

```
sage: [2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21,
22, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 48,
50, 52, 54, 56, 57, 60, 63, 70, 72, 76, 80, 81, 84, 88, 90, 96,
104, 108, 114, 120, 126, 132, 135, 144, 162, 168, 180, 216, 270,
324, 360, 432, 756]
```

Sabemos que el grupo de automorfismos de la séxtica es A_6 , que tiene orden 360, pero la lista nos entrega dos ordenes mayores que 360, estos son 432 con firma (8, 3, 2) y 756 con firma (7, 3, 2) actuando en género 10.

Pero además queremos saber cuales son los grupos que actúan, para ello

usamos el identificador del grupo (ID), utilizado para organizar los todos grupos de un cierto orden (*SmallGroup*). En este caso hay 775 grupos de orden 432 (esto se puede obtener de un comando en GAP, otro sistema computacional)

```
sage: for k in range(1,776):
sage: if k%1==0:
sage: if suggest_signatures(SmallGroup(432,k),10)!=[]:
sage: print k,suggest_signatures(SmallGroup(432,k),10)
```

obtenemos 734[[8, 3, 2]], por lo tanto el *SmallGroup*(432,734) actúa en género 10 con firma (8, 3, 2). Mientras que para orden 756 no hay ningún grupo que actúe. Luego la respuesta a la pregunta planteada es NO, en género 10 hay otras superficies compactas con más automorfismos que la séxtica de Wiman.

Más aún, el grupo de orden 432 actúa de 6 formas topológicamente no equivalentes, lo que se obtiene al escribir:

```
sage: f=find_generator_representatives(SmallGroup(432,734),[8,3,2])
sage: len(f)
```

4.2.2. Tabla de Acciones en género 5

En esta sección encontramos los grupos que actúan en género 5 con cociente total de género 0 y cantidad de acciones topológicamente no equivalentes en cada caso, lo que agrupamos en la siguiente tabla.

SmallGroup ID	Firma	Nº de acciones topológicamente no equivalentes
(2, 1)	(2 ¹²)	1
(3, 1)	(3 ⁷)	1
(4, 1)	(4 ⁴ , 2, 2)	2
(4, 1)	(4, 4, 2 ⁵)	1
(4, 2)	(2 ⁸)	4
(6, 1)	(3, 3, 2 ⁴)	1
(6, 2)	(6 ⁴)	1
(6, 2)	(6, 3, 3, 3, 2)	1
(6, 2)	(6, 6, 3, 2, 2)	1
(6, 2)	(3, 3, 2 ⁴)	1
(8, 1)	(8, 8, 4, 2)	2
(8, 2)	(4 ⁴)	4

SmallGroup ID	Firma	N° de acciones topológicamente no equivalentes
(8, 2)	(4, 4, 2, 2, 2)	5
(8, 3)	(4, 4, 2, 2, 2)	1
(8, 3)	(2 ⁶)	5
(8, 4)	(4 ⁴)	3
(8, 5)	(2 ⁶)	13
(10, 1)	(5, 2 ⁴)	1
(10, 2)	(10, 10, 2, 2)	1
(11, 1)	(11, 11, 11)	2
(12, 1)	(4, 4, 3, 2)	1
(12, 2)	(12, 12, 6)	1
(12, 3)	(3 ⁴)	3
(12, 4)	(6, 6, 2, 2)	1
(12, 4)	(3, 2 ⁴)	2
(12, 5)	(6, 6, 2, 2)	3
(15, 1)	(15, 15, 3)	1
(16, 3)	(4, 4, 2, 2)	8
(16, 5)	(8, 8, 4)	3
(16, 6)	(8, 8, 4)	2
(16, 7)	(2, 2, 2, 2, 2)	3
(16, 8)	(4, 4, 2, 2)	3
(16, 10)	(4, 4, 2, 2)	12
(16, 11)	(4, 4, 2, 2)	5
(16, 11)	(2 ⁵)	10
(16, 13)	(4, 4, 2, 2)	8
(16, 14)	(2 ⁵)	26
(20, 1)	(10, 4, 4)	1
(20, 2)	(20, 20, 2)	1
(20, 4)	(10, 2, 2, 2)	1
(22, 2)	(22, 11, 2)	1
(24, 7)	(6, 4, 4)	2
(24, 8)	(6, 2, 2, 2)	1
(24, 9)	(12, 12, 2)	1
(24, 12)	(3, 3, 2, 2)	3
(24, 13)	(3, 3, 2, 2)	4
(24, 13)	(6, 6, 3)	2
(24, 14)	(6, 2, 2, 2)	3
(30, 2)	(15, 6, 2)	1
(32, 2)	(4, 4, 4)	1
(32, 5)	(8, 8, 2)	3



SmallGroup ID	Firma	N° de acciones topológicamente no equivalentes
(32, 6)	(4, 4, 4)	1
(32, 7)	(8, 8, 2)	4
(32, 27)	(4, 2, 2, 2)	8
(32, 28)	(4, 2, 2, 2)	8
(32, 43)	(4, 2, 2, 2)	5
(40, 5)	(20, 4, 2)	1
(48, 14)	(12, 4, 2)	1
(48, 30)	(4, 4, 3)	3
(48, 48)	(3, 2, 2, 2)	4
(48, 49)	(6, 6, 2)	4
(60, 5)	(5, 3, 3)	1
(64, 8)	(8, 4, 2)	1
(64, 32)	(8, 4, 2)	1
(80, 49)	(5, 5, 2)	1
(96, 3)	(4, 3, 3)	1
(96, 195)	(6, 4, 2)	3
(120, 35)	(10, 3, 2)	1
(160, 234)	(5, 4, 2)	1
(192, 181)	(8, 3, 2)	1

Referencias

- [1] J. Birman, Braids, Links and Mapping Class Groups. *Annals of Math Studies* 82 , Princeton Univ.Press 1975.
- [2] T. Breuer, Characters and Automorphism Groups of Compact Riemann Surfaces. *London Mathematical Society Lecture Note Series* 280. Cambridge University Press, (2000).
- [3] S. A. Broughton, Classifying finite group actions on surfaces of low genus. *Journal of Pure and Applied Algebra* 69 (1990), 233-270.
- [4] M. Carvacho, Equivalence of Group Actions on Riemann Surfaces. Tesis de Doctorado. Universidad de Chile, 2010.
- [5] F.J. Cirre, On a subvariety of the moduli space. *Revista Mat. Iberoamericana*, 20, 953-960 (2004).
- [6] M. Fried, Combinatorial Computation of Moduli Dimension of Nielsen Classes of Covers. *Contemporary Math*, 89 (1989), 61-79.
- [7] G. González-Diez On prime Galois coverings of the Riemann sphere. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* CLXVIII (IV), 1-15 (1995).
- [8] G. González-Diez, R. Hidalgo, Conformal versus topological conjugacy of automorphism on compact Riemann surfaces. *Bull. London Math. Soc.* 29,280-284 (1997).
- [9] H. Farkas, I. Kra, Riemann Surfaces. Springer-Verlag New York Inc. (1980).
- [10] W.J. Harvey, On Branch Loci in Teichmüller Space. *Trans. AMS* 153 (1971) 387-399

-
- [11] G. Jones, D. Singerman, Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint. Cambridge University Press (1987).
- [12] H. Kaneta, S. Marcugini, F. Pambianco. On Arcs and Curves with Many Automorphisms. *Mediterr. j. math* 2 (2005), 71-102.
- [13] C. Kassel, V. Turaev, Braid Groups. Springer-Verlag New York Inc. (2008).
- [14] H. Kimura, Classification of automorphism groups, up to topological equivalence, of compact Riemann surfaces of genus 4. *Journal of Algebra* 264 (2003) 26-54.
- [15] I. Kuribayashi, A. Kuribayashi, On Automorphism Groups of Compact Surfaces of Genus 4. *Proc. Japan Acad.* 62 Ser. A (1986), 65-68.
- [16] K. Magaard, T. Shaska, S. Shpectorov, H. Völklein, The locus of curves with prescribed automorphism group. (English summary) *Communications in arithmetic fundamental groups* (Kyoto, 1999/2001). Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku No. 1267 (2002), 112-141.
- [17] K. Magaard, S. Shpectorov, H. Völklein, A GAP package for braid orbit computation and applications. *Experiment. Math.* 12, no. 4 (2003), 385-393.
- [18] R. Miranda, Algebraic curves and Riemann surfaces. Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. ISBN: 0-8218-0268-2.
- [19] R. Naeff, The Chevalley-Weill Formula, on the Galois Module Structure of the Space of Regular Differentials of a Curve in Case it is Semi-Simple. Master's Thesis. University of Amsterdam, 2005.
- [20] F. Pambianco, The Fermat curve $x^n + y^n + z^n$: the most symmetric non-singular algebraic plane curve. In: Proceedings of Algebraic and Combinatorial Coding Theory 2010, Twelfth International Workshop, Novosibirsk, Russia, pp. 245-250 (2010) ISBN: 978-5-86134-174-5. ArXiv:1004.2603v2 (2010).
- [21] G. Riera, R. E. Rodríguez, Riemann surfaces and abelian varieties with an automorphism of prime order. *Duke Mathematical Journal* 69, No. 1 (1993), 199 - 217.

-
- [22] J. Ries, Subvarieties of Moduli Space Determined by Finite Groups Acting on Surfaces. *Trans. AMS* 335, Number 1, (1993) 385-406.
- [23] A. M. Rojas, Group Actions on Jacobian Varieties. *Revista Matemática Iberoamericana*, 23, No. 2 (2007), 397-420.
- [24] M. Romagny, S. Wewers, Hurwitz Spaces. *Séminaires & Congrès*, 13, (2006), p. 313-341.
- [25] G. Urzúa, Riemann surfaces of genus g with an automorphism of order p prime and $p > g$. *Manuscripta Mathematica* 121, 169-189 (2006)
- [26] H. Völklein, Groups as Galois groups. *Cambridge studies in advanced mathematics* 53. Cambridge University Press, 1996.