LAS IDENTIDADES $x^2 = w(x)x$ y $x^3 = w(x)x^2$

EN ALGEBRAS PONDERADAS

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas con mención en Algebra

FACULTAD DE CIENCIAS

por

RAUL ANDRADE HENRIQUEZ

Patrocinante: Dra. Alicia Labra J.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N
T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

RAUL ANDRADE HENRIQUEZ

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas con mención en Algebra

Patrocinante de Tesis

Dra. Alicia Labra J. Alicia Labra J.

Comisión Informante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza R. Ricardo Baeza

Dr. Rodrigo Bamón C. Bamón

Dr. Víctor Cortés M.

Dr. Rolando Pomareda R. Rolando Pomareda

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Los problemas estudiados en este trabajo, tiene su origen en el estudio de las álgebras ponderadas (A,w), sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 (introducida por I.M.H. Etherington, 1939), es decir K álgebras de dimensión finita, conmutativas, no necesariamente asociativas y provistas de un homomorfismo de álgebras no nulo $w : A \to K$, llamado ponderación o función peso de A.

Nuestro objetivo es estudiar aquellas en las cuales se satisfacen las identidades $x^2 = w(x)x$ ó $x^3 = w(x)x^2$ y analizar su relación con otras álgebras no asociativas, como son las álgebras Normales, las de Bernstein y las de Jordan.

En el primer Capítulo se introducen definiciones, notaciones y propiedades ya conocidas sobre álgebras de Bernstein, para trabajar con el tema y se dá una relación entre las álgebras de Bernstein y las álgebras Normales en las que interviene un operador lineal.

En el segundo Capítulo se caracterizan los conjuntos

$$\tau_1 = \{(A,w) \in P \,/\, x^2 = w(x)x \quad \forall\, x \in A\}$$

y

$$\tau_2 = \{(A,w) \in P \,/\, x^3 = w(x)x^2 \quad \forall\, x \in A\} ,$$

donde P denota el conjunto de álgebras ponderadas y se relacionan con álgebras Normales, de Jordan y de Bernstein. Un resultado importante es que $(A,w) \in \tau_2$ sí y sólo si A es una K-álgebra de Jordan y de Bernstein, este resultado fué probado por S. Walcher en [7] para cuerpos de característica distinta de dos y de tres y por M. Ouattara en [4] para cuerpos de característica distinta de 2. En este trabajo se prueba además que si $(A,w) \in \tau_2$, entonces Ker w es nilpotente y si $(A,w) \in \tau_1$, el índice de nilpotencia es 2. A continuación se estudia el anulador del núcleo de un álgebra de Bernstein y se dá un ejemplo en el cual Anul(Ker w) no es un ideal, probándose luego que si $(A,w) \in \tau_2$ entonces Anul(Ker w) es un ideal de A . Hacemos notar aquí que en [3] R.W.K. Odoni y A.E. Stratton, prueban un resultado similar considerando A una $\mathbb{R}$-álgebra de Bernstein tal que $A^2 = A$.

En el Tercer Capítulo se relacionan las identidades $x^2 = w(x)x$ y $x^3 = w(x)x^2$ con el producto tensorial, se analizan luego las duplicadas no conmutativas y conmutativas de una K-álgebra A y se prueba que si $(A,w) \in \tau_1$ entonces tanto la duplicada no conmutativa como la conmutativa es Normal y por consiguiente de Jordan, de Bernstein y núcleo nilpotente. Finalmente se exhibe una clase de álgebras de Jordan y de Bernstein cuyas duplicadas no conmutativa y conmutativa son también de Jordan y de Bernstein.

C A P I T U L O I

GENERALIDADES

DEFINICION 1.1. Sea K un cuerpo infinito (caract $K \neq 2$) , A una K-álgebra conmutativa de dimensión finita, no necesariamente asociativa. Se dice que A es una K-<u>álgebra ponderada</u> (P) sí y sólo si admite un homomorfismo de álgebras no trivial $w : A \to K$, llamado homomorfismo peso o ponderación de A .

NOTACION: $(A,w) \in P$.

Sea ahora

$$\tau_1 = \{(A,w) \in P \,/\, x^2 = w(x)x \quad \forall\ x \in A\}$$

y

$$\tau_2 = \{(A,w) \in P \,/\, x^3 = w(x)x^2 \quad \forall\ x \in A\}$$

claramente $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Sea $T : V \to V$ operador lineal, $\dim_K V = n$ y $w : V \to K$ formal lineal no nula tal que $w \circ T = w$. Consideremos el siguiente producto

$$xy = \frac{1}{2}\{w(x)T(y) + w(y)T(x)\} \qquad \forall\ x,y \in V$$

entonces

$$w(xy) = w(x)w(y) \qquad \forall\ x,y \in V\ .$$

Así V es una K-álgebra ponderada que se denota $A_{T,w}$ obtenida a partir del operador T y la forma lineal w .

Si T es el operador identidad y w forma lineal no nula, tenemos

$$xy = \frac{1}{2}\left\{w(x)y + w(y)x\right\} \qquad \forall\ x,y \in V\ .$$

En la igualdad anterior si hacemos $y = x$ obtenemos:

$$x^2 = w(x)x \qquad \forall\ x \in V$$

entonces $A_{T,w} \in \tau_1$, luego $\tau_1 \neq \phi$

Si $T = T_e$, donde $T_e : V \to V$

$$v \to T_e(v) = w(v)e\ ,\ \text{con}\ \ w(e) = 1\ ,$$

reemplazando T por T_e en $xy = \frac{1}{2}\left\{w(x)T(y) + w(y)T(x)\right\}$ nos queda $xy = w(x)w(y)e$. Ahora si hacemos $y = x$ tenemos $x^2 = w(x^2)e$ y si sustituimos y por x^2 en $xy = w(x)w(y)e$ obtenemos $x^3 = w(x)w(x^2)e$ luego $x^3 = w(x)x^2$ $\forall\ x \in V$, entonces

$$A_{T_e,w} \in \tau_2\ .$$

DEFINICION 1.2. Sea $(A,w) \in P$. Se dice que (A,w) es una K-<u>álgebra de Bernstein</u> $(\mathcal{B})$ sí y sólo si $(x^2)^2 = w(x^2)x^2$ $\forall\ x \in A$.

NOTACION: $(A,w) \in \mathcal{B}$.

DEFINICION 1.3. Sea $(A,w) \in P$. Se dice que (A,w) es una K-<u>álgebra Normal</u> (N) sí y sólo si $x^2y = w(x)xy \quad \forall\ x,y \in A$.

NOTACION: $(A,w) \in N$.

PROPOSICION 1.4. El álgebra ponderada $A_{T,w} \in N$ sí y sólo si $T^2 = T$.

<u>Demostración</u>: El producto definido en $A_{T,w}$ es

$$xy = \frac{1}{2}\left\{w(y)T(x) + w(x)T(y)\right\} \qquad \forall\ x,y \in A_{T,w}$$

Si $x = y$ obtenemos $x^2 = w(x)T(x)$, luego

$$\begin{aligned} x^2y &= w(x)T(x)y \\ &= w(x)\ \frac{1}{2}\ (w(y)T^2(x) + w(x)T(y)) \\ &= \frac{1}{2}\ w(x)\ (w(y)T^2(x) + w(x)T(y)) \ , \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} w(x)xy &= w(x)\ \frac{1}{2}\ (w(y)T(x) + w(x)T(y)) \\ &= \frac{1}{2}\ w(x)\ (w(y)T(x) + w(x)T(y)) \end{aligned}$$

como $T^2 = T$ tenemos $x^2y = w(x)xy$, luego $A_{T,w} \in N$.

Recíprocamente, supongamos $T^2 \neq T$ luego existe $a \in A_{T,w}$ tal que $T^2(a) \neq T(a)$, por lo tanto

$$a^2y = \frac{1}{2}\ w(a)\ (w(y)T^2(a) + w(a)T(y))$$

y por otra parte

$$w(a)ay = \frac{1}{2} w(a)(w(y)\, T(a) + w(a)T(y))$$

entonces $a^2y \neq w(a)ay$ y $A_{T,w}$ no es normal; es decir $A_{T,w}$ es normal sí y sólo si $T^2 = T$.

PROPOSICION 1.5. El álgebra ponderada $A_{T,w} \in \mathcal{B}$ sí y sólo si $T^2 = T$.

<u>Demostración</u>: Si $T^2 = T$ tenemos $x^2y = w(x)xy \quad \forall\, x,y \in A_{T,w}$ lo que implica que $x^3 = w(x)x^2 \quad \forall\, x \in A_{T,w}$, luego reemplazando y por x^2 en $x^2y = w(x)xy$ se tiene que

$$(x^2)^2 = w(x)x^3 = w(x)w(x)x^2 = w(x^2)x^2$$

entonces $A_{T,w} \in \mathcal{B}$.

Recíprocamente, supongamos $T^2 \neq T$, es decir existe $a \in A_{T,w}$ tal que $T^2(a) \neq T(a)$, luego $a^2 = w(a)T(a)$ y entonces

$$(a^2)^2 = w(a^2)T(a)\, T(a) = w(a^3)T^2(a)$$

por otra parte

$$w(a^2)a^2 = w(a^2)w(a)T(a) = w(a^3)T(a)$$

por lo tanto $(a^2)^2 \neq w(a^2)a^2$ y $A_{T,w}$ no es Bernstein; es decir $A_{T,w}$ es Bernstein sí y sólo si $T^2 = T$.

COROLARIO 1.6. Sea $A_{T,w}$ álgebra ponderada, entonces son equivalentes

a) $T^2 = T$

b) $A_{T,w}$ Normal

c) $A_{T,w}$ Bernstein

PROPOSICION 1.7. Sea K cuerpo infinito, caract $K \neq 2$, (A,w) un álgebra de Bernstein, entonces para cada $x,y,z,t \in A$ se tiene

i) $$8\left[(xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz)\right] = 4\big(w(xy)zt + w(zt)xy + w(xz)yt + w(yt)xz + w(xt)yz + w(yz)xt\big)$$

ii) $$4x^2(yz) + 8(xy)(xz) = 4w(xz)xy + 2w(yz)x^2 + 2w(x^2)yz + 4w(xy)xz$$

iii) $$4(xy)^2 + 2x^2y^2 = 4w(xy)xy + w(x^2)y^2 + w(y^2)x^2$$

iv) $$4x^2(xy) = 2w(x^2)xy + 2w(xy)x^2 .$$

Demostración: Las relaciones se obtienen del hecho que los elementos $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t$ para todo $x,y,z,t \in A$ y para todo $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in K$ satisfacen la relación

$$(x^2)^2 = w(x^2)x^2 .$$

PROPOSICION 1.8. Sea K cuerpo infinito, caract. $K \neq 2$, (A,w) álgebra de Bernstein, $A = Ke \oplus \operatorname{Ker} w$ descomposición respecto de un idempotente $e \neq 0$, entonces

i) $(ey)y^2 = 0 \qquad \forall\, y \in \operatorname{Ker} w$

ii) $2ey^2 + 4(ey)^2 - y^2 = 0 \qquad \forall\, y \in \operatorname{Ker} w$

iii) $2e(ey) - ey = 0 \qquad \forall\, y \in \operatorname{Ker} w$

iv) $(y^2)^2 = 0 \qquad \forall\, y \in \operatorname{Ker} w$

Demostración: Las relaciones se obtienen del hecho que los elementos $e + \alpha y$, para todo $\alpha \in K$, $y \in \operatorname{Ker} w$, satisfacen la relación

$$(x^2)^2 = w(x^2)x^2 .$$

TEOREMA 1.9. Sean K cuerpo infinito, caract. $K \neq 2$, (A,w) álgebra de Bernstein y e idempotente no nulo de A , entonces $\operatorname{Ker} w = U \oplus V$, descomposición en subespacios que dependen del idempotente e y se tienen las relaciones siguientes:

1) $ex = \frac{1}{2} x \qquad \forall\, x \in U$

2) $ex = 0 \qquad \forall\, x \in V$

3) $(xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) = 0 \qquad \forall\, x,y,z,t \in \operatorname{Ker} w$

4) $x(yz) + y(xz) = 0 \qquad \forall\, x,y \in U , \quad \forall\, z \in V$

5) $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0 \qquad \forall\, x,y,z \in U$

6) $UV \subseteq U , \quad U^2 \subseteq V , \quad V^2 \subseteq U , \quad UV^2 = \{0\}$.

<u>Demostración</u>: Al considerar la transformación lineal

$$\begin{aligned} \pi : \operatorname{Ker} w &\to \operatorname{Ker} w \\ x &\to 2(ex) \end{aligned}$$

se tiene $\pi^2(x) = \pi(x) \quad \forall\, x \in A$, luego $\operatorname{Ker} w = U \oplus V$ (suma directa de subespacios), donde $U = \operatorname{Im} \pi$, $V = \operatorname{Ker} \pi$, es decir

$$U = \{2ex \,/\, x \in \operatorname{Ker} w\} \quad , \quad V = \{x \in \operatorname{Ker} w \,/\, \pi(x) = 0\}.$$

Directamente de la definición tenemos

(2) $\qquad ex = 0 \qquad \forall\, x \in V$.

Sea $u \in U$ entonces $u = 2ex$ para algún $x \in \operatorname{Ker} w$, luego

$\pi(u) = u$. En efecto

$$\pi(u) = \pi(2ex) = \pi(\pi(x)) = \pi^2(x) = \pi(x) = u ,$$

y así tenemos

(1) $$eu = \frac{1}{2} u .$$

Ahora, si tomamos $x = y = e$, $z,t \in \mathrm{Ker}\ w$ en la relación (i) de la Proposición 1.7., tenemos

$$2e(zt) + 2(ez)(et) + 2(et)(ez) = zt ,$$

luego

$$2e(zt) + 4(ez)(et) = zt$$

y

$$2e(zt) + 2(ez)2(et) = zt .$$

Así $\pi(zt) + \pi(z)\pi(t) = zt \qquad \forall\ z,t \in \mathrm{Ker}\ w$.

a) En esta última relación para $z,t \in V$ tenemos $\pi(zt) = zt$. Así $2e(zt) = zt$, es decir $zt \in U$, luego $V^2 \subseteq U$.

b) Para $z \in U$ y $t \in V$ tenemos $\pi(zt) = zt$, es decir $2e(zt) = zt$, luego $zt \in U$ y $UV \subseteq U$.

c) Para $z,t \in U$ tenemos $\pi(zt) + \pi(z)\pi(t) = zt$, luego $\pi(zt) + zt = zt$, y así $\pi(zt) = 0$.

Por lo tanto $zt \in V$ y $U^2 \subseteq V$.

Tomando $x = e$; $y,z,t \in \mathrm{Ker}\ w$ en la relación (i) de la Proposición

1.7., tenemos

$$(ey)(zt) + (ez)(yt) + (et)(yz) = 0 .$$

a) Para $y \in U$; $z,t \in V$ tenemos $y(zt) = 0$, luego $U \cdot V^2 = \{0\}$

b) Para $y,t \in U$; $z \in V$ tenemos $(ey)(zt) + (et)(yz) = 0$, luego $y(zt) + t(yz) = 0$.

c) Para $y,z,t \in U$ tenemos $y(zt) + z(yt) + t(yz) = 0$ (identidad de Jacobi).

Finalmente para $x,y,z,t \in \mathrm{Ker}\, w$ en la relación (i) de la Proposición 1.7., tenemos

$$(xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) = 0 .$$

PROPOSICION 1.10. Sea (A,w) álgebra de Bernstein caract. $K \neq 2$, $A = Ke \oplus U \oplus V$, descomposición respecto de un idempotente $e \neq 0$, entonces las siguientes identidades se satisfacen $\forall\ u \in U$, $\forall\ v \in V$:

i) $u(uv) = 0$

ii) $(uv)^2 = 0$

iii) $u^2v^2 = 0$

iv) $u^3 = 0$

v) $u^2(uv) = 0$

vi) $(uv)v^2 = 0$.

Demostración: De la relación (i) de la Proposición 1.7., para $x = e$, $y,z,t \in \mathrm{Ker}\, w$ se tiene

$$(ey)(zt) + (ez)(yt) + (et)(yz) = 0$$

luego, si $y = z = u$, $t = v$ entonces(i) y para $x = t = u$; $y = z = v$

tenemos $2(uv)^2 + u^2v^2 = 0$ luego (ii) y (iii).

De la Proposición 1.7. relación (iv), tenemos

$$4x^2(xy) = 2w(x^2)xy + 2w(xy)x^2 \qquad \forall\ x,y \in A$$

luego, al tomar $x = u$, $y = e$ se tiene $u^3 = 0$, y si

$$x = u\ ,\quad y = v \quad \text{entonces} \quad u^2(uv) = 0$$

$$x = v\ ,\quad y = u \quad \text{entonces} \quad v^2(uv) = 0\ .$$

C A P I T U L O II

ALGEBRAS PONDERADAS QUE SATISFACEN LAS IDENTIDADES $x^2 = w(x)x$ ó $x^3 = w(x)x^2$

En este Capítulo se caracterizan los conjuntos

$$\tau_1 = \{(A,w) \in P \,/\, x^2 = w(x)x \quad \forall\, x \in A\}\ ,$$

$$\tau_2 = \{(A,w) \in P \,/\, x^3 = w(x)x^2 \quad \forall\, x \in A\}$$

y se relacionan con las álgebras Normales, de Jordan y de Bernstein.

Se mostrará también que una condición necesaria y suficiente para que $(A,w) \in \mathcal{B} \cap J$ es que $(A,w) \in \tau_2$ y como corolario se probará que el núcleo de un álgebra de Jordan y de Bernstein es nilpotente.

Por último se hace notar que no siempre $\mathrm{Anul}(S)$, $S \subseteq A$, es un ideal de A y se prueba que si $(A,w) \in \tau_2$ entonces $\mathrm{Anul}(\mathrm{Ker}\ w)$ si lo es.

LEMA 2.1. Sea $(A,w) \in P$ entonces $(A,w) \in \tau_1$ sí y sólo si

$$xy = \frac{1}{2}\{w(x)y + w(y)x\} \qquad \forall\ x,y \in A\ .$$

Demostración: Polarizando la identidad $x^2 = w(x)x$ por $x + y$ para todo $x,y \in A$, tenemos

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

y por otra parte

$$w(x + y)(x + y) = w(x)x + w(x)y + w(y)x + w(y)y\ ,$$

luego

$$2xy = w(x)y + w(y)x$$

$$xy = \frac{1}{2}\{w(x)y + w(y)x\} \qquad \forall\ x,y \in A\ .$$

Recíprocamente basta considerar $y = x$ en el producto

$$xy = \frac{1}{2}\{w(x)y + w(y)x\} \qquad \forall\ x,y \in A$$

y se obtiene lo deseado.

LEMA 2.2. Sea $(A,w) \in \tau_2$ entonces

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = w(x)(yz) + w(y)(xz) + w(z)(xy) \qquad \forall\ x,y,z \in A\ .$$

Demostración: Para $\alpha x + \beta y + \gamma z$ $\forall\ x,y,z \in A$ y $\alpha,\beta,\gamma \in K$ polaricemos $x^3 = w(x)x^2$

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y + \gamma z)^3 &= (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)\\ &= \left(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 + 2\alpha\beta(xy) + 2\alpha\gamma(xz) + 2\beta\gamma(yz)\right)\cdot\\ &\qquad (\alpha x + \beta y + \gamma z)\end{aligned}$$

$$= \alpha^3x^3 + \alpha^2\beta x^2y + \alpha^2\gamma x^2z + \alpha\beta^2xy^2 + \beta^3y^3 + \beta^2\gamma y^2z + \alpha\gamma^2xz^2$$

$$+ \beta\gamma^2yz^2 + \gamma^3z^3 + 2\alpha^2\beta(xy)x + 2\alpha\beta^2(xy)y + 2\alpha\beta\gamma(xy)z$$

$$+ 2\alpha^2\gamma(xz)x + 2\alpha\beta\gamma(xz)y + 2\alpha\gamma^2(xz)z + 2\alpha\beta\gamma(yz)x$$

$$+ 2\beta^2\gamma(yz)y + 2\beta\gamma^2(yz)z \ .$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} w(\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 &= \left(\alpha w(x) + \beta w(y) + \gamma w(z)\right)\left(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2\right. \\ &\quad \left. + \gamma^2z^2 + 2\alpha\beta(xy) + 2\alpha\gamma(xz) + 2\beta\gamma(yz)\right) \\ &= \alpha^3w(x)x^2 + \alpha\beta^2w(x)y^2 + \alpha\gamma^2w(x)z^2 \\ &\quad + 2\alpha^2\beta w(x)(xy) + 2\alpha^2\gamma w(x)(xz) \\ &\quad + 2\alpha\beta\gamma w(x)(yz) + \alpha^2\beta w(y)x^2 + \beta^3w(y)y^2 \\ &\quad + \beta\gamma^2w(y)z^2 + 2\alpha\beta^2w(y)(xy) \\ &\quad + 2\alpha\beta\gamma w(y)(xz) + 2\beta^2\gamma w(y)(yz) \\ &\quad + \alpha^2\gamma w(z)x^2 + \beta^2\gamma w(z)y^2 + \gamma^3w(z)z^2 \\ &\quad + 2\alpha\beta\gamma w(z)(xy) + 2\alpha\gamma^2w(z)(xz) \\ &\quad + 2\beta\gamma^2w(z)(yz) \ . \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes $\alpha\beta\gamma$ tenemos

$$2(xy)z + 2(xz)y + 2(yz)x = 2w(x)(yz) + 2w(y)(xz) + 2w(z)(xy) \ .$$

Luego

$$(xy)z + (zx)y + (yz)x = w(x)(yz) + w(y)(xz) + w(z)(xy) \qquad \forall\ x,y,z \in A\ .$$

COROLARIO 2.3. Sea $(A,w) \in P$, caract $K \neq 3$, entonces $(A,w) \in \tau_2$ sí y sólo si

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = w(x)(yz) + w(y)(xz) + w(z)(xy) \qquad \forall\ x,y,z \in A\ .$$

PROPOSICION 2.4. Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces

i) A es normal

ii) A es de Bernstein.

<u>Demostración</u>:

i) Como $x^2 = w(x)x \quad \forall\ x \in A$ entonces $x^2y = w(x)xy \quad \forall\ x,y \in A$, luego A es normal.

ii) Tenemos que $x^2 = w(x)x \quad \forall\ x \in A$, entonces

$$\begin{aligned}(x^2)^2 = x^2 \cdot x^2 &= w(x)x \cdot w(x)x \\ &= w(x)w(x)x \cdot x \\ &= w(x^2)x^2\end{aligned}$$

luego A es de Bernstein.

OBSERVACION 2.5. Existen álgebras que son de Bernstein y Normales y que no satisfacen la identidad $x^2 = w(x)x \quad \forall\ x \in A$.

Por ejemplo, consideremos el álgebra $A = Ke \oplus U \oplus V$ tal que $U = \langle u \rangle$, $V = \langle v \rangle$ y su multiplicación dada por la siguiente tabla:

	e	u	v
e	e	$\frac{1}{2}u$	0
u	$\frac{1}{2}u$	0	0
v	0	0	0

Entonces A es de Bernstein y Normal.

Sea $x = \alpha e + u + v$ entonces $x^2 = \alpha^2 e + u$ y $w(x)x = \alpha^2 e + \alpha u + \alpha v$, luego $x^2 \neq w(x)x$.

DEFINICION 2.6. Sea A una K-álgebra (caract $K \neq 2$) conmutativa, no necesariamente asociativa, de dimensión finita. Se dice que A es <u>de Jordan</u> (J) sí y sólo si

$$x^2(yx) = (x^2y)x \qquad \forall\, x,y \in A .$$

Considerando el Teorema 4.32 de [4] se tiene

OBSERVACION 2.7. Si $T^2 = T$ entonces el álgebra ponderada $A_{T,w}$ es de Jordan.

OBSERVACION 2.8. El recíproco de esta última Observación es falso, ya que existe $A_{T,w}$ de Jordan con $T^2 \neq T$.

En efecto, si $T^2 = 2T$ entonces $A_{T,w}$ es asociativa, pues si $x,y,z \in A_{T,w}$ tenemos que $xy = \frac{1}{2}\left(w(y)T(x) + w(x)T(y)\right)$ y $w \circ T = w$, luego

$$
\begin{aligned}
(xy)z &= \frac{1}{2}\left(w(y)T(x) + w(x)T(y)\right)z \\
&= \frac{1}{2}\left(w(y)T(x)z + w(x)T(y)z\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[w(y)\,\frac{1}{2}\left(w(z)T^2(x) + w(x)T(z)\right) + w(x)\,\frac{1}{2}\left(w(z)T^2(y)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + w(y)T(z)\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}w(y)w(z)T^2(x) + \frac{1}{4}w(y)w(x)T(z) + \frac{1}{4}w(x)w(z)T^2(y) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4}w(x)w(y)T(z) \\
&= \frac{1}{4}w(y)w(z)T^2(x) + \frac{1}{4}w(x)w(z)T^2(y) + \frac{1}{2}w(y)w(x)T(z)\ .
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
x(yz) &= \frac{1}{2}x\left(w(z)T(y) + w(y)T(z)\right) = \frac{1}{2}\left(w(z)xT(y) + w(y)xT(z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[w(z)\,\frac{1}{2}\left(w(y)T(x) + w(x)T^2(y)\right) + w(y)\,\frac{1}{2}\left(w(z)T(x) + w(x)T^2(x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}w(z)w(y)T(x) + \frac{1}{4}w(z)w(x)T^2(y) + \frac{1}{4}w(y)w(z)T(x) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4}w(y)w(x)T^2(z) \\
&= \frac{1}{4}w(z)w(x)T^2(y) + \frac{1}{4}w(y)w(x)T^2(z) + \frac{1}{2}w(y)w(z)T(x)\ .
\end{aligned}
$$

Como $T^2 = 2T$ entonces

$$\frac{1}{4}w(y)w(z)T^2(x) = \frac{1}{2}w(y)w(z)T(x)$$

y

$$\frac{1}{4}w(y)w(x)T^2(z) = \frac{1}{2}w(y)w(x)T(z)\ ,$$

luego $(xy)z = x(yz)$ $\forall\ x,y,z \in A_{T,w}$ y $A_{T,w}$ es asociativa y por lo tanto de Jordan.

COROLARIO 2.9. Si $T^2 = 2T$ entonces el álgebra ponderada $A_{T,w}$ es de Jordan y asociativa.

TEOREMA 2.10. Sea $(A,w) \in \tau_2$ entonces

i) A es de Jordan

ii) A es de Bernstein

iii) Ker w es nilpotente.

Demostración: Por Lema 2.2. tenemos que para todo $x,y,z \in A$,

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = w(x)(yz) + w(y)(xz) + w(z)(yx) .$$

Para $x = y$ obtenemos

$$x^2z + (xz)x + (xz)x = w(x)xz + w(x)(xz) + w(z)x^2 \qquad (1)$$

$$x^2z + 2(xz)x = 2w(x)xz + w(z)x^2 ,$$

entonces

a) $$x(x^2z) + 2x((xz)x) = 2w(x)x(xz) + w(z)x^3 .$$

Por otra parte, sustituyendo z por xz en (1), obtenemos

$$x^2(xz) + 2(x(xz))x = 2w(x)x(xz) + w(x)w(z)x^2 ,$$

entonces

b) $$x^2(xz) + 2(x(xz))x = 2w(x)x(xz) + w(z)x^3$$

luego, comparando a) y b) tenemos $x^2(xz) = x(x^2z)$, y así A es de Jordan.

Tomando $x = z$ en la identidad de Jordan tenemos $x^2 \cdot x^2 = x \cdot x^3 = x^4$, luego

$$(x^2)^2 = x^2 \cdot x^2 = x \cdot x^3 = xw(x)x^2 = w(x)x^3 = w(x)w(x)x^2$$

$$= w(x^2)x^2 ,$$

y así, A es de Bernstein.

Para demostrar que $\operatorname{Ker} w$ es nilpotente, basta con aplicar el Teorema de Albert [6].

Como A es de Jordan, $\operatorname{Ker} w$ es de Jordan y $x^3 = 0 \quad \forall\, x \in \operatorname{Ker} w$, es decir, $\operatorname{Ker} w$ es nil., luego $\operatorname{Ker} w$ nilpotente. Claramente se tiene el siguiente resultado: Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces

i) A es Normal

ii) A es de Jordan

iii) A es de Bernstein

iv) $\operatorname{Ker} w$ es nilpotente.

PROPOSICION 2.11. Sea $(A,w) \in \mathcal{B} \cap J$ y $A = Ke \oplus \operatorname{Ker} w$ descomposición respecto de un idempotente $e \neq 0$, $w(e) = 1$ entonces $x^3 = w(x)x^2$ $\forall\, x \in A$.

<u>Demostración</u>: Por ser A de Jordan, $x^2(xy) = x(x^2y) \quad \forall\, x,y \in A$. Polarizando esta última identidad, para $\alpha e + x$, $\beta e + y \quad \forall\, x,y \in \operatorname{Ker} w$, $\alpha,\beta \in K$ tenemos

$$\begin{aligned}(\alpha e + x)^2\Big[(\alpha e + x)(\beta e + y)\Big] &= (\alpha^2 e + 2\alpha ex + x^2)(\alpha\beta e + \alpha ey + \beta ex + xy)\\ &= \alpha^3\beta e + \alpha^3 e(ey) + \alpha^2\beta e(ex) + \alpha^2 e(xy)\\ &\quad + 2\alpha^2\beta(ex)e + 2\alpha^2(ex)(ey) + 2\alpha\beta(ex)^2\\ &\quad + 2\alpha(ex)(ey) + \alpha\beta ex^2 + \alpha(ey)x^2\\ &\quad + \beta(ex)x^2 + (xy)x^2 \ .\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}(\alpha e + x)\Big[(\alpha e + x)^2(\beta e + y)\Big] &= (\alpha e + x)\Big[(\alpha^2 e + 2\alpha ex + x^2)(\beta e + y)\Big]\\ &= (\alpha e + x)\Big[\alpha^2\beta e + \alpha^2 ey + 2\alpha\beta(ex)e + 2\alpha(ex)y\\ &\quad + \beta ex^2 + x^2y\Big]\\ &= \alpha^3\beta e + \alpha^3 e(ey) + 2\alpha^2\beta e\Big[(ex)e\Big] + 2\alpha^2 e\Big[(ex)y\Big]\\ &\quad + \alpha\beta e(ex^2) + \alpha e(x^2y) + \alpha^2\beta ex + \alpha^2(ey)x\\ &\quad + 2\alpha\beta x\Big[(ex)e\Big] + 2\alpha x\Big[(ex)y\Big] + \beta(ex^2)x\\ &\quad + (x^2y)x \ .\end{aligned}$$

Por (iii) Proposición 1.8., $e(ey) = \frac{1}{2}\, ey \quad \forall\, y \in \operatorname{Ker} w$, por (i) Proposición 1.8. y por ser A de Jordan

$$(ey)y^2 = (ey^2)y = 0 \qquad\qquad \forall\, y \in \operatorname{Ker} w \ .$$

Luego, comparando coeficientes, tenemos las siguientes identidades $\forall\, x,y \in \operatorname{Ker} w$

$$(1) \qquad e(xy) + 2(ex)(ey) = 2e\left[(ex)y\right] + (ey)x$$

$$(2) \qquad 2(ex)^2 + ex^2 = e(ex^2) + 2\left((ex)e\right)x$$

$$(3) \qquad 2(ex)(xy) + (ey)x^2 = e(x^2y) + \left((ex)y\right)x$$

luego, para $x = y$, de (1) tenemos que

$$ey^2 + 2(ey)^2 = 2e\left[(ey)y\right] + (ey)y \tag{4}$$

de (2), y $ey = 2(ey)e$ tenemos

$$2(ey)^2 + ey^2 = e(ey^2) + (ey)y \tag{5}$$

de (3) tenemos

$$ey^3 + \left((ey)\ y\right)y = 0 \tag{6}$$

De (4) y (5)

$$2e\left[(ey)y\right] = e(ey^2) = \frac{ey^2}{2}$$

entonces

$$ey^2 + 2(ey)^2 = \frac{ey^2}{2} + (ey)y$$

es decir

$$(ey)y = 2(ey)^2 + \frac{ey^2}{2} .$$

Luego

$$2(ey)y = 4(ey)^2 + ey^2 . \tag{7}$$

De (1), reemplazando x por y^2 se tiene

$$ey^3 + 2(ey^2)(ey) = 0 \tag{8}$$

por (ii) Proposición 1.7. para $e = x$, $z = y^2$ obtenemos

$$y^3 = 2ey^3 + 4(ey^2)(ey) \tag{9}$$

luego

$$y^3 = 2(ey^3 + 2(ey^2)(ey))$$

y aplicando identidad (8),

$$y^3 = 0 \qquad\qquad \forall\ y \in \text{Ker } w\ . \tag{10}$$

Calculemos ahora $(\alpha e + x)^3$ y $w(\alpha e + x)(\alpha e + x)^2$ $\forall\ x \in \text{Ker } w$.

$$\begin{aligned}(\alpha e + x)^3 &= (\alpha e + x)^2(\alpha e + x)\\ &= (\alpha^3 e + 2\alpha ex + x^2)(\alpha e + x)\\ &= \alpha^2 e + \alpha^2 ex + 2\alpha^2(ex)e + 2\alpha(ex)x + \alpha ex^2 + x^3\\ &= \alpha^3 e + \alpha^2 ex + 2\alpha^2(ex)e + 2\alpha(ex)x + \alpha ex^2\ .\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}w(\alpha e + x)(\alpha e + x)^2 &= \alpha(\alpha^2 e + 2\alpha ex + x^2)\\ &= \alpha^3 e + 2\alpha^2 ex + \alpha x^2\ .\end{aligned}$$

Usando el hecho que $e(ey) = \frac{1}{2}\, ey$ $\forall\ y \in \text{Ker } w$, se tiene

$$ex + 2(ex)e = 2ex \qquad\qquad \forall\ x \in \text{Ker } w\ .$$

De la identidad (7) al despejar $4(ex)^2$ y reemplazando en (ii) Proposición 1.8. se tiene

$$2(ex)x + ex^2 = x^2 \qquad \forall\ x \in \operatorname{Ker} w ,$$

luego $\quad y^3 = w(y)y^2 \qquad \forall\ y \in A .$

COROLARIO 2.12. Sea $(A,w) \in P$ entonces $(A,w) \in \mathcal{B} \cap J$ sí y sólo si $x^3 = w(x)x^2 \quad \forall\ x \in A$.

OBSERVACION 2.13. Este resultado fue probado por S.Walcher [7] para cuerpos de característica distinta de 2 y 3 y por M. Ouattara [4] para cuerpos de característica distinta de 2.

OBSERVACION 2.14. Sea $(A,w) \in \mathcal{B} \cap J$, entonces $\operatorname{Ker} w$ es nilpotente.

Consideremos ahora la descomposición $A = Ke \oplus U \oplus V$, de un álgebra de Bernstein, con $w(e) = 1$, $e \neq 0$ idempotente y

$$U = \{2ex \,/\, x \in \operatorname{Ker} w\}$$

$$V = \{x \in \operatorname{Ker} w \,/\, ex = 0\} .$$

PROPOSICION 2.15. Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$, álgebra de Bernstein sobre K tal que $x^2 = w(x)x \quad \forall\ x \in A$ entonces $V^2 = \{0\}$, $U^2 = \{0\}$ y $UV = \{0\}$.

<u>Demostración</u>: Por Lema 2.1 tenemos

$$xy = \frac{1}{2}\{w(x)y + w(y)x\} \qquad \forall\ x,y \in A ,$$

luego para $x = v_1$, $y = v_2$ obtenemos $v_1v_2 = 0$ por lo tanto $V^2 = \{0\}$.

Para $x = u_1$, $y = u_2$ obtenemos $u_1u_2 = 0$. Luego $U^2 = \{0\}$, para $x = u$, $y = v$ tenemos $uv = 0$. Luego $UV = \{0\}$.

PROPOSICION 2.16. Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$ álgebra de Bernstein sobre K , entonces $(A,w) \in \tau_1$ sí y sólo si $V = \{0\}$.

Demostración: Como para todo $x \in A$, $x^2 = w(x)x$. Sea $x = e + u + v$ con $u \in U$, $v \in V$, luego

$$\begin{aligned} x^2 &= (e + u + v)^2 \\ &= e^2 + u^2 + v^2 + 2eu + 2ev + 2uv . \end{aligned}$$

Como $ev = 0$ y por la Proposición anterior $U^2 = \{0\}$, $V^2 = \{0\}$, $UV = \{0\}$ tenemos $x^2 = e + u$; por otra parte

$$\begin{aligned} w(x)x &= w(e)(e + u + v) \\ &= e + u + v , \end{aligned}$$

comparando ambas expresiones tenemos $v = 0$. Así $V = \{0\}$. Recíprocamente, basta considerar $x = \alpha e + u$ para obtener $x^2 = w(x)x \quad \forall\, x \in A$.

PROPOSICION 2.17. Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$ álgebra de Bernstein y de Jordan, entonces $V^2 = \{0\}$, $(Uv)v = \{0\} \quad \forall\, v \in V$.

Demostración: Como A es de Bernstein y de Jordan, se tiene que

$$x^3 = w(x)x^2 \qquad \forall\, x \in A ,$$

luego, por Lema 2.2. para todo $x,y,z \in A$,

$$(xy)z + (zx)y + (yz)x = w(z)(xy) + w(y)(xz) + w(x)(yz)$$

luego, para $x = y = v$, $z = e$ tenemos $ev^2 = v^2$. Como $v^2 \in U$, $ev^2 = \frac{1}{2} v^2$, entonces $\frac{1}{2} v^2 = v^2$. Luego $v^2 = \{0\}$.

Ahora bien, para $v_1, v_2 \in V$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (v_1 + v_2)^2 \\ &= v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 \end{aligned}$$

entonces $2v_1v_2 = 0$. Así $v_1v_2 = 0$. Luego $V^2 = \{0\}$.

Para $x = u$, $y = z = v$ obtenemos

$$(uv)v + (uv)v + uv^2 = 0 .$$

Así $2(uv)v = 0$, luego $(Uv)v = \{0\} \quad \forall\ v \in V$.

PROPOSICION 2.18. Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$ álgebra de Bernstein sobre K , entonces $A^2 = A$ sí y sólo si $U^2 = V$.

Demostración:

$$\begin{aligned} A^2 = (Ke \oplus U \oplus V)^2 &= Ke + U^2 + V^2 + 2eU + UV \\ &= Ke + U + U^2 \end{aligned}$$

luego $\quad A^2 = Ke + U + U^2 = A \Longleftrightarrow U^2 = V$.

COROLARIO 2.19. Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces $A^2 = A$.

Demostración: Como $(A,w) \in \tau_1$, A es de Bernstein. Luego $A = Ke \oplus U \oplus V$ y $\forall\ x \in A$, $x^2 = w(x)x$ entonces por Proposición 2.16., $V = \{0\}$ y como $U^2 \subseteq V$ entonces $A^2 = A$.

OBSERVACION 2.20. Existen álgebras de Bernstein tal que $A^2 = A$ y $x^2 \neq w(x)x$. Por ejemplo considerar $A = Ke \oplus U \oplus V$ donde $U = \langle u_1, u_2 \rangle$; $V = \langle v_1 \rangle$ y su multiplicación dada por

	e	u_1	u_2	v_1
e	e	$\frac{1}{2}u_1$	$\frac{1}{2}u_2$	0
u_1	$\frac{1}{2}u_1$	αv_1	γv_1	0
u_2	$\frac{1}{2}u_2$	γv_1	βv_1	0
v_1	0	0	0	0

con $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$. Como $\dim_K U^2 = \dim_K V$ y $U^2 \subset V$ entonces $U^2 = V$, luego por Proposición 2.17. $A^2 = A$.

Sea $x = e + u_1 + u_1 u_2$, $u_1, u_2 \in U$ y $\alpha = \beta = 0$ y $\gamma \neq 0$

$$x^2 = e + u_1 + \gamma^2 v_1^2 = e + u_1 .$$

Por otra parte, tenemos $w(x)x = e + u_1 + u_1 u_2$, por lo tanto $x^2 \neq w(x)x$.

PROPOSICION 2.21. Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces $A = A^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

DEFINICION 2.22. Sea $S \subseteq A$, entonces se define el anulador de S como $\mathrm{Anul}(S) = \{a \in A \,/\, a \cdot s = 0 \text{ para todo } s \in S\}$, y se tiene que Anul(S) es un subespacio de A . A diferencia de las álgebras asociativas, Anul(S) no necesariamente es un ideal.

OBSERVACION 2.23. Existen álgebras de Bernstein en las que el Anul(Ker w) no es un ideal.

Sea $A = Ke \oplus U \oplus V$, $U = \langle u \rangle$, $V = \langle v \rangle$ con multiplicación dada por

	e	u	v
e	e	$\frac{1}{2}u$	0
u	$\frac{1}{2}u$	0	γu
v	0	γu	βu

con $\gamma \neq 0$, $\beta \in K$. A es un álgebra de Bernstein.

Sean $$x = -2\gamma e - \frac{\beta}{\gamma} u + v \in A$$

$$y = \lambda u + \nu v \quad , \quad \forall \lambda,\nu \in K \ , \ u \in U \ , \ v \in V$$

entonces

$$\begin{aligned} xy &= \left(-2\gamma e - \frac{\beta}{\gamma} u + v\right)(\lambda u + \nu v) \\ &= -2\gamma\lambda eu - \frac{\beta}{\gamma}\lambda u^2 - \frac{\beta}{\gamma}\nu uv + \lambda uv + \nu v^2 \\ &= -\gamma\lambda u - \beta\nu u + \lambda\gamma u + \beta\nu u \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

por lo tanto $x = -2\gamma e - \frac{\beta}{\gamma} u + v \in \text{Anul}(\text{Ker } w)$.

Sea ahora

$$\begin{aligned} (ex)u &= \left[e\left(-2\gamma e - \frac{\beta}{\gamma} u + v\right)\right]u \\ &= \left[-2\gamma e - \frac{\beta}{2\gamma} u\right]u \\ &= -\gamma u \neq 0 \ , \end{aligned}$$

entonces $ex \notin \text{Anul}(\text{Ker } w)$ y así $\text{Anul}(\text{Ker } w)$ no es un ideal de A .

PROPOSICION 2.24. Sea $A = Ke \oplus U \oplus V \in \mathcal{B} \cap \mathcal{J}$ entonces

(i) $I = \text{Anul}(\text{Ker } w)$ es un ideal de A.

(ii) Si $U \neq \{0\}$ entonces $I \subseteq \text{Ker } w$.

(iii) Si $U = \{0\}$ entonces $I = A$.

<u>Demostración</u>: (i) Sea $u \in U$, $x \in \text{Anul}(\text{Ker } w)$, $(ux)y = 0$ para todo $y \in \text{Ker } w$, luego $ux \in \text{Anul}(\text{Ker } w)$. Análogamente $vx \in \text{Anul}(\text{Ker } w)$.

Sea $x = \alpha e + u_0 + v_0 \in \text{Anul}(\text{Ker } w)$, luego $xy = 0 \quad \forall\, y \in \text{Ker } w$, entonces tenemos

(1) $ux = \frac{\alpha}{2} u + uu_0 + uv_0 = 0$

(2) $vx = vu_0 + vv_0 = 0$.

Ahora $ex = \alpha e + \frac{1}{2} u_0$. Luego $\forall\, y \in \text{Ker } w$, se tiene

$$\begin{aligned}(ex)y &= (ex)(u + v) \\ &= \left(\alpha e + \frac{1}{2} u_0\right)(u + v) \\ &= \frac{\alpha}{2} u + \frac{1}{2} u_0 u + \frac{1}{2} u_0 v .\end{aligned}$$

De (2) $vu_0 = 0$ ya que $vv_0 \in V^2$ y $V^2 = \{0\}$.

De (1) $\frac{\alpha}{2} u + uv_0 = 0$ y $uu_0 = 0$, luego $(ex)y = \frac{\alpha}{2} u$.

Si $\alpha = 0$, $ex \in \text{Anul}(\text{Ker } w)$. Si $\alpha \neq 0$,

$$\left(\frac{\alpha}{2} u + uv_o\right) v_o = 0$$

$$\frac{\alpha}{2} uv_o + (uv_o)v_o = 0$$

$$\frac{\alpha}{2} uv_o = 0$$

Así $\frac{\alpha}{2} u = 0$ y $ex \in \mathrm{Anul}(\mathrm{Ker}\ w)$. Por lo tanto, I es un ideal de A .

(ii) Sea $x = \alpha e + u_o + v_o \in I$, si $\alpha = 0$, $x \in \mathrm{Ker}\ w$.

Si $\alpha \neq 0$, $\frac{\alpha}{2} u = 0$ y como $U \neq \{0\}$ existe $u_1 \in U$, $u_1 \neq 0$ tal que $\alpha u_1 = 0$. Luego $\alpha = 0$, contradicción. Por lo tanto $I = \mathrm{Anul}(\mathrm{Ker}\ w) \subseteq \mathrm{Ker}\ w$.

(iii) Sea ahora $U = \{0\}$, luego $A = Ke \oplus V$ y

$$\begin{aligned} I = \mathrm{Anul}(\mathrm{Ker}\ w) = \mathrm{Anul}(V) &= \{x \in A / xv = 0 \quad \forall\ v \in V\} \\ &= \{\alpha e + v_1 / (\alpha e + v_1)v = 0 \quad \forall\ v \in V\} \\ &= \{\alpha e + v_1 / \alpha \in K ,\ \ v_1 \in V\} \\ &= A . \end{aligned}$$

PROPOSICION 2.25. Sea $(A,w) \in \mathcal{B} \cap J$, I ideal de A , $I \neq \{0\}$, $I \subseteq \mathrm{Ker}\ w$ entonces $A / I \in \mathcal{B} \cap J$ con $\overline{w}(a + I) = w(a)$ $\forall\ a \in A$.

<u>Demostración</u>: Sea $\overline{x} = a + I \in A / I$, $a = \alpha e + u_o + v_o$, $u_o \in U$, $v_o \in V$, $\alpha \in K$,

$$\overline{x} = (\alpha e + u_o + v_o) + I$$

$$\overline{x}^3 = (\alpha e + u_o + v_o)^3 + I$$

$$\overline{x}^3 = (\alpha^3 e + \alpha^2 u_o + \alpha u_o^2 + 2\alpha u_o v_o) + I$$

Por otra parte,

$$\overline{w}(\overline{x})\overline{x}^2 = \overline{w}(a + I)(a + I)^2 = w(a)(a^2 + I)$$

$$= \alpha(\alpha e + u_o + v_o)^2 + I$$

$$= \alpha^3 e + \alpha^2 u_o + \alpha u_o^2 + 2\alpha u_o v_o + I$$

luego, $\overline{x}^3 = \overline{w}(\overline{x})\overline{x}^2 \quad \forall\ \overline{x} \in A / I$ y por Teorema 2.10. A / I es de Bernstein y de Jordan.

COROLARIO 2.26. Sea $A = Ke \oplus U \oplus V \in \mathcal{B} \cap J$ tal que $U \neq \{0\}$, entonces $A / \mathrm{Anul}(\mathrm{Ker}\ w) \in \mathcal{B} \cap J$ y $\mathrm{Ker}\ \overline{w}$ es nilpotente, donde $\overline{w}(a + \mathrm{Anul}(\mathrm{Ker}\ w)) = w(a)$ es el peso de $A / \mathrm{Anul}(\mathrm{Ker}\ w)$.

C A P I T U L O III

LAS IDENTIDADES $x^2 = w(x)x$, $x^3 = w(x)x^2$ Y EL PRODUCTO TENSORIAL

En este Capítulo se aplica el producto tensorial a los conjuntos τ_1 , τ_2 ; se analizan luego las duplicadas no conmutativa y conmutativa de una K-álgebra A y se termina exhibiendo una clase de álgebras de Bernstein y de Jordan cuyas duplicadas no conmutativas y conmutativas son también de Bernstein y de Jordan.

Sean (A_i, w_i) álgebras ponderadas, $i = 1, \ldots, n$. Se sabe que el producto tensorial de álgebras $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ es un álgebra ponderada con homo - morfismo peso definido por

$$w^{\otimes} : \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \to K$$

$$w^{\otimes}(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n) = \prod_{i=1}^{n} w_i(a_i) \qquad \forall\ a_i \in A_i\ ,\quad i = 1, \ldots, n\ .$$

Para su demostración se puede ver, por ejemplo [8, pág. 110] .

OBSERVACION 3.1. Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces no necesariamente $(A \underset{K}{\otimes} A, w^{\otimes}) \in \tau_1$.

Por ejemplo, consideremos el álgebra de Bernstein $(A,w) \in \tau_1$ y su multiplicación dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2} u$, $u^2 = 0$ entonces

$$A \underset{K}{\otimes} A = \langle e \otimes e \ , \ u \otimes e \ , \ e \otimes u \ , \ u \otimes u \rangle .$$

Tomando el elemento $x = (e \otimes u + u \otimes e) \in A \underset{K}{\otimes} A$, se tiene

$$\begin{aligned} (e \otimes u + u \otimes e)^2 &= (e \otimes u)^2 + (u \otimes e)^2 + 2(e \otimes u)(u \otimes e) \\ &= 2(eu \otimes eu) \\ &= \frac{1}{2} u \otimes u \end{aligned}$$

y por otra parte, $w^{\otimes}(e \otimes u + u \otimes e) = w(eu) + w(eu)$

$$\begin{aligned} &= 2w(e)w(u) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Por lo tanto $x^2 \neq w(x)x$, así $(A \underset{k}{\otimes} A, w^{\otimes}) \notin \tau_1$.

OBSERVACION 3.2. Sea $A \in N$ entonces no necesariamente $A \underset{k}{\otimes} A \in N$.

En el álgebra definida anteriormente, consideramos los elementos $x = (e \otimes u + u \otimes e)$, $y = (e \otimes e) \in A \underset{k}{\otimes} A$, entonces

$$\begin{aligned} x^2 y &= \frac{1}{2} (u \otimes u)(e \otimes e) \\ &= \frac{1}{8} u \otimes u , \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned} w(x)xy &= 2w(eu)[(e \otimes u + u \otimes e)(e \otimes e)] \\ &= 2w(e)w(u)[(e \otimes u + u \otimes e)(e \otimes e)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $x^2y \neq w(x)xy$. Así $A \underset{k}{\otimes} A \notin N$.

OBSERVACION 3.3. Sea A una K-álgebra de Bernstein, entonces no necesariamente $A \underset{k}{\otimes} A$ es una K-álgebra de Bernstein.

Por ejemplo consideremos $A = ek \oplus U \oplus V$ con multiplicación dada por: $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2} u$, $u^2 = \alpha u$, $\alpha \neq 0$, $v^2 = \beta v$, $\beta \neq 0$, $uv = 0$ y sea $x = e \otimes u \in A \underset{k}{\otimes} A$, luego

$$\begin{aligned} (x^2)^2 &= (e \otimes u)^2(e \otimes u)^2 \\ &= (e \otimes \alpha u)(e \otimes \alpha u) \\ &= e \otimes \alpha^3 u \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned} w^{\otimes}((e \otimes u)^2)(e \otimes u)^2 &= w^{\otimes}(e \otimes \alpha u)(e \otimes \alpha u) \\ &= w(\alpha eu)(e \otimes \alpha u) \\ &= \alpha w(e)w(u)(e \otimes \alpha u) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

luego $(x^2)^2 \neq w(x^2)x^2$. Así $(A \underset{k}{\otimes} A, w^{\otimes}) \notin B$.

OBSERVACION 3.4. Sea A una k-álgebra de Bernstein y de Jordan. Entonces no necesariamente $A \underset{k}{\otimes} A$ es una k-álgebra de Bernstein y de Jordan.

Por ejemplo, consideremos $A = ek \oplus U \oplus V$ con multiplicación dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $u^2 = \alpha v$, $\alpha \neq 0$, $uv = ev = v^2 = 0$, y sea $x = (e \otimes u + u \otimes e) \in A \underset{k}{\otimes} A$, luego

$$\begin{aligned} x^3 &= (e \otimes u + u \otimes e)^2 (e \otimes u + u \otimes e) \\ &= (e \otimes \alpha v + \alpha v \otimes e + \frac{1}{2} u \otimes u)(e \otimes u + u \otimes e) \\ &= \frac{1}{2}(u \otimes u)(e \otimes u + u \otimes e) \\ &= \frac{\alpha}{4} u \otimes v + \frac{\alpha}{4} v \otimes u , \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned} w^{\otimes}(e \otimes u + u \otimes e)(e \otimes u + u \otimes e)^2 &= (w(e)w(u) + w(u)w(e))(e \otimes u + u \otimes e)^2 \\ &= 0 , \end{aligned}$$

y así $(A \underset{k}{\otimes} A, w^{\otimes}) \notin \tau_2$.

COMENTARIO SOBRE EL PRODUCTO TENSORIAL.

Por lo visto en las observaciones 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 nos damos cuenta que al aplicar el producto tensorial a los conjuntos τ_1 y τ_2 no se obtienen resultados significativos, aunque al álgebra en cuestión se le exijan otras propiedades, como se verá a continuación.

LEMA 3.5. Sea $(A,w) \in \tau_1$ tal que $x^2 y = (xy)x \quad \forall\, x,y \in A$ entonces $x^2 y = w(y)x^2 \quad \forall\, x,y \in A$.

Demostración: Como $(A,w) \in \tau_1$, tenemos que $(A,w) \in \tau_2$. Luego por Lema 2.2 $(xy)z + (zx)y + (yz)x = w(z)(xy) + w(y)(xz) + w(x)(yz)$ $\forall\ x,y,z \in A$, tomando $x = z$ en esta última identidad obtenemos

$$2(xy)x + x^2y = 2w(x)yx + w(y)x^2 .$$

Como $(A,w) \in \tau_1$, sabemos que $(A,w) \in N$, luego $x^2y = w(x)xy$ $\forall\ x,y \in A$, entonces $2(xy)x + x^2y = 2x^2y + w(y)x^2$. Reemplazando $(xy)x$ por x^2y en la identidad anterior se tiene que

$$x^2y = w(y)x^2 .$$

Aplicando este Lema a $A_1 \underset{k}{\otimes} A_2$ con $(A_i,w_i) \in \tau_1$, $i = 1,2$ obtenemos el siguiente resultado.

PROPOSICION 3.6. Sean $(A_i,w_i) \in \tau_1$, $i = 1,2$ tal que $x_i^2y_i = x_i(x_iy_i)$ $\forall\ x_i,y_i \in A_i$, $i = 1,2$ entonces $t^3 = w^{\otimes}(t)t^2$ para todo $t = x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2 \in A_1 \underset{k}{\otimes} A_2$.

Demostración: Sea $t = x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2 \in A_1 \otimes A_2$, $x_1,y_1 \in A_1$, $x_2,y_2 \in A_2$, luego

$$t^3 = (x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2)^2(x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2)$$

$$t^3 = (x_1^2 \otimes x_2^2 + y_1^2 \otimes y_2^2 + 2x_1y_1 \otimes x_2y_2)(x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2)$$

$$t^3 = x_1^3 \otimes x_2^3 + x_1^2y_1 \otimes x_2^2y_2 + y_1^2x_1 \otimes y_2^2x_2 + y_1^3 \otimes y_2^3$$

$$+ 2(x_1y_1)x_1 \otimes (x_2y_2)x_2 + 2(x_1y_1)y_1 \otimes (x_2y_2)y_2 .$$

Aplicando el Lema anterior y el hecho que $(A_i, w_i) \in \tau_2$, tenemos

$$\begin{aligned}
t^3 &= w_1(x_1)x_1^2 \otimes w_2(x_2)x_2^2 + w_1(y_1)x_1^2 \otimes w_2(y_2)x_2^2 + w_1(x_1)y_1^2 \otimes w_2(x_2)y_2^2 \\
&\quad + w_1(y_1)y_1^2 \otimes w_2(y_2)y_2^2 + 2x_1^2\, y_1 \otimes x_2^2\, y_2 + 2y_1^2x_1 \otimes y_2^2x_2 \\
&= w_1(x_1)x_1^2 \otimes w_2(x_2)x_2^2 + w_1(y_1)x_1^2 \otimes w_2(y_2)x_2^2 + w_1(x_1)y_1^2 \otimes w_2(x_2)y_2^2 \\
&\quad + w_1(y_1)y_1^2 \otimes w_2(y_2)y_2^2 + 2w_1(x_1)x_1y_1 \otimes w_2(x_2)x_2y_2 \\
&\quad + 2w_1(y_1)y_1x_1 \otimes w_2(y_2)y_2x_2 \\
&= w_1(x_1)w_2(x_2)[\, x_1^2 \otimes x_2^2 + y_1^2 \otimes y_2^2 + 2x_1y_1 \otimes x_2y_2] \\
&\quad + w_1(y_1)w_2(y_2)[\, x_1^2 \otimes x_2^2 + y_1^2 \otimes y_2^2 + 2x_1y_1 \otimes x_2y_2] \\
&= [\, w_1(x_1)w_2(x_2) + w_1(y_1)w_2(y_2)][\, x_1^2 \otimes x_2^2 + y_1^2 \otimes y_2^2 + 2x_1y_1 \otimes x_2y_2] \\
&= w^{\otimes}(x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2)(x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2)^2 \\
&= w^{\otimes}(t)t^2 \,.
\end{aligned}$$

OBSERVACION 3.7. Como se ha visto anteriormente, el producto tensorial no arroja resultados en relación con el tema tratado; pero si los hay en el caso de las duplicadas, tanto no conmutativas como conmutativas de una K-álgebra A , como se verá en lo que sigue.

DUPLICADA NO CONMUTATIVA.

Sea A una k-álgebra no necesariamente conmutativa ni asociativa, de dimensión finita sobre K . Se define una nueva multiplicación sobre el producto tensorial $A \underset{K}{\otimes} A$ por:

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y' \qquad \forall\ x,x',y',y \in A\ .$$

La K-álgebra que se obtiene con esta multiplicación se llama la "Duplicada no conmutativa de A" .

NOTACION: $A \otimes_d A$.

TEOREMA 3.8. Sea $f : A \otimes_d A \to A$ definida por $f\left(\sum_{i \in I} a_i \otimes_d b_i\right) = \sum_{i \in I} a_i b_i$ entonces f es un homomorfismo de álgebras, $\operatorname{Im} f = A^2$ y

$$(A \otimes_d A)(\operatorname{Ker} f) = (\operatorname{Ker} f)(A \otimes_d A) = \langle 0 \rangle\ .$$

TEOREMA 3.9. Sea $(A,w) \in P$ entonces $(A \otimes_d A, w_d) \in P$ donde $w_d = w \circ f$.

Para las demostraciones de estos Teoremas se puede ver [8, pág. 116].

OBSERVACION 3.10. Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces no necesariamente

$$(A \otimes_d A, w_d) \in \tau_1\ .$$

Por ejemplo, consideremos el álgebra de Bernstein $(A,w) \in \tau_1$ donde $A = \langle e,u \rangle$ y su multiplicación está dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2} u$, $u^2 = 0$. Entonces su duplicada

$$A \otimes_d A = \langle e \otimes e\ ,\ e \otimes u\ ,\ u \otimes e\ ,\ u \otimes u \rangle$$

tiene multiplicación dada por

	$e \otimes e$	$u \otimes e$	$e \otimes u$	$u \otimes u$
$e \otimes e$	$e \otimes e$	$\frac{1}{2} e \otimes u$	$\frac{1}{2} e \otimes u$	0
$u \otimes e$	$\frac{1}{2} u \otimes e$	$\frac{1}{4} u \otimes u$	$\frac{1}{4} u \otimes u$	0
$e \otimes u$	$\frac{1}{2} e \otimes u$	$\frac{1}{4} u \otimes u$	$\frac{1}{4} u \otimes u$	0
$u \otimes u$	0	0	0	0

Consideremos el elemento $e \otimes u \in A \otimes_d A$, entonces

$$(e \otimes u)^2 = \frac{1}{4} u \otimes u$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} w_d(e \otimes u)(e \otimes u) &= w(eu)(e \otimes u) \\ &= w(e)w(u)(e \otimes u) \\ &= 0 \, , \end{aligned}$$

luego $A \otimes_d A \notin \tau_1$.

OBSERVACION 3.11. Sea $(A,w) \in \tau_2$ entonces no necesariamente $(A \otimes_d A, w_d) \in \tau_2$.

Por ejemplo, consideremos $(A,w) \in \tau_2$ donde $A = \langle e,u,v \rangle$ con multiplicación dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2} u$, $u^2 = \alpha v$, $\alpha \neq 0$, $ev = uv = v^2 = 0$.

Entonces su duplicada:

$$A \otimes_d A = \langle e \otimes e,\ u \otimes e,\ e \otimes u,\ e \otimes v,\ v \otimes e,\ u \otimes v,\ v \otimes u,\ u \otimes u,\ v \otimes v \rangle$$

tiene multiplicación dada por

	$e \otimes e$	$u \otimes e$	$e \otimes u$	$e \otimes v$	$v \otimes e$	$u \otimes v$	$v \otimes u$	$u \otimes u$	$v \otimes v$
$e \otimes e$	$e \otimes e$	$\frac{1}{2} e \otimes u$	$\frac{1}{2} e \otimes u$	0	0	0	0	$\alpha e \otimes v$	0
$u \otimes e$	$\frac{1}{2} u \otimes e$	$\frac{1}{4} u \otimes u$	$\frac{1}{4} u \otimes u$	0	0	0	0	$\frac{\alpha}{2} u \otimes v$	0
$e \otimes u$	$\frac{1}{2} u \otimes e$	$\frac{1}{4} u \otimes u$	$\frac{1}{4} u \otimes u$	0	0	0	0	$\frac{\alpha}{2} u \otimes v$	0
$e \otimes v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v \otimes e$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u \otimes v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v \otimes u$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u \otimes u$	0	0	$\frac{\alpha}{2} v \otimes u$	0	0	0	0	$\alpha^2 v \otimes v$	0
$v \otimes v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Al considerar el elemento $e \otimes u \in A \otimes_d A$, se tiene

$$\begin{aligned}(e \otimes u)^3 &= (e \otimes u)^2 (e \otimes u)\\ &= \frac{1}{4} (u \otimes u)(e \otimes u)\\ &= \frac{\alpha}{8} v \otimes u\end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned}w_d(e \otimes u)(e \otimes u)^2 &= w(eu) \frac{1}{4} (u \otimes u)\\ &= w(e)w(u) \frac{1}{4} (u \otimes u)\\ &= 0 .\end{aligned}$$

Luego $A \otimes_d A \notin \tau_2$.

LEMA 3.12. Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces para todo $x,y,z \in A$

$$xy \otimes z = \frac{1}{2} \{w(x)y \otimes z + w(y)x \otimes z\} .$$

<u>Demostración</u>: Como $(A,w) \in \tau_1$, $xy = \frac{1}{2} \{w(x)y + w(y)x\} \quad \forall\ x,y \in A$, luego

$$\begin{aligned}xy \otimes z &= \frac{1}{2} \{w(x)y + w(y)x\} \otimes z\\ &= \frac{1}{2} \{w(x)y \otimes z + w(y)x \otimes z\} .\end{aligned}$$

PROPOSICION 3.13. Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces $(A \otimes_d A, w_d)$ es Normal, luego es de Bernstein, de Jordan y $\operatorname{Ker} w_d$ es nilpotente.

<u>Demostración</u>: Sean $x,y \in A \otimes_d A$, $x = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \otimes b_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} c_j \otimes d_j$, luego

$$x^2y = \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i \otimes b_i\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \otimes d_j\right)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{\ell} (a_i \otimes b_i)^2 + 2 \sum_{i \neq 1} (a_1 \otimes b_1)(a_i \otimes b_i) + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i \neq \ell} (a_\ell \otimes b_\ell)(a_i \otimes b_i)\right] \sum_{j=1}^{n} (c_j \otimes d_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} (a_i b_i \otimes a_i b_i) \sum_{j=1}^{n} (c_j \otimes d_j) + 2 \sum_{i \neq 1} (a_1 b_1 \otimes a_i b_i) \sum_{j=1}^{n} (c_j \otimes d_j) + \ldots$$

$$+ 2 \sum_{i \neq \ell} (a_\ell b_\ell \otimes a_i b_i) \sum_{j=1}^{n} (c_j \otimes d_j)$$

$$= \sum_{i,j} (a_i b_i)^2 \otimes c_j d_j + 2 \sum_{i \neq 1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n} (a_1 b_1)(a_i b_i) \otimes c_j d_j + \ldots\ldots$$

$$+ 2 \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{n} (a_\ell b_\ell)(a_i b_i) \otimes c_j d_j$$

Como $(A,w) \in \tau_1$

$$x^2y = \sum_{i,j} w(a_i b_i) a_i b_i \otimes c_j d_j + \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1}^{n} w(a_1 b_1)(a_i b_i) \otimes c_j d_j$$

$$+ \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1}^{n} w(a_i b_i) a_1 b_1 \otimes c_j d_j + \ldots + \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{n} w(a_\ell b_\ell) a_i b_i \otimes c_j d_j$$

$$+ \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{n} w(a_i b_i) a_\ell b_\ell \otimes c_j d_j$$

$$= \sum_{i,j} w(a_i b_i) a_1 b_1 \otimes c_j d_j + \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1}^{n} w(a_1 b_1) a_i b_i \otimes c_j d_j + \cdots\cdots$$

$$+ \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{n} w(a_\ell b_\ell) a_i b_i \otimes c_j d_j + \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1} w(a_i b_i) a_1 b_1 \otimes c_j d_j + \cdots\cdots$$

$$+ \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{n} w(a_i b_i) a_\ell b_\ell \otimes c_j d_j$$

$$= \sum_{i,j} w(a_i b_i) a_i b_i \otimes c_j d_j + \sum_{t<i} \sum_{j=1}^{n} w(a_t b_t) a_i b_i \otimes c_j d_j$$

$$+ \sum_{i<t} \sum_{j=1}^{n} w(a_i b_i) a_t b_t \otimes c_j d_j$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} w(a_i b_i) \left(\sum_{t,j} a_t b_t \otimes c_j d_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} w_d(a_i \otimes b_i) \left(\sum_{t=1}^{\ell} (a_t \otimes b_t) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (c_j \otimes d_j) \right)$$

$$= w_d \left(\sum_{i=1}^{\ell} (a_i \otimes b_i) \right) \left(\sum_{t=1}^{\ell} (a_t \otimes b_t) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (c_j \otimes d_j) \right)$$

$$= w_d(x) xy \ .$$

Luego $(A \otimes_d A, w_d)$ es Normal.

Como $(A \otimes_d A, w_d)$ Normal, tenemos $x^2 y = w(x) xy \quad \forall\ x,y \in A \otimes_d A$

Luego para $x = y$ obtenemos $x^3 = w(x) x^2 \quad \forall\ x \in A \otimes_d A$, entonces aplicando Corolario 2.12 tenemos $(A \otimes_d A, w_d)$ de Bernstein y de Jordan, y por Corolario 2.14, Ker w_d es nilpotente.

OBSERVACION 3.14.

a) Sea $(A,w) \in N$, entonces no necesariamente $(A \otimes_d A, w_d) \in N$.

b) Sea $A \in J$ entonces no necesariamente $A \otimes_d A \in J$.

c) Sea $(A,w) \in B$, entonces no necesariamente $(A \otimes_d A, w_d) \in B$.

Basta mirar el ejemplo de la Observación 3.11 donde $A \in B \cap J \cap N$, y al considerar los elementos $x = e \otimes u$, $y = e \otimes e$ de $A \otimes_d A$, se obtiene

$$(x^2)^2 \neq w(x^2)x^2 \text{ , es decir } (A \otimes_d A, w_d) \notin B$$

$$x^2 y \neq w(x)xy \text{ , es decir } (A \otimes_d A, w_d) \notin N$$

$$x^2(xy) \neq x(x^2 y) \text{ , es decir } A \otimes_d A \notin J \text{ .}$$

DUPLICADA CONMUTATIVA.

Sea A una K-álgebra conmutativa, no necesariamente asociativa. Consideremos $I = \langle x \otimes y - y \otimes x \,/\, x,y \in A \rangle$ entonces I es un ideal de $A \otimes_d A$, pues: Sea $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \otimes_d A$. Luego

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right)(x \otimes y - y \otimes x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right)(x \otimes y) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right)(y \otimes x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \otimes xy - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \otimes yx$$

$$= 0$$

ya que $xy = yx$.

Además

$$w_d(x \otimes y - y \otimes x) = w_d(x \otimes y) - w_d(y \otimes x)$$
$$= w(xy) - w(yx)$$
$$= 0 ,$$

luego $I = \langle x \otimes y - y \otimes x / x,y \in A \rangle \subseteq \mathrm{Ker}\ w_d$.

Así, $A \otimes_d A/I$ es un álgebra conmutativa no necesariamente asociativa, llamada "Duplicada Conmutativa de A" .

NOTACION: $A \otimes_d A / I = A.A$

Si $\dim_K A = n$ entonces $\dim_K A.A = n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$. Además $(A.A,w_{\circledast})$ es un álgebra ponderada donde $w_{\circledast}(a + I) = w_d(a) \quad \forall\ a \in A \otimes_d A$.

OBSERVACION 3.15. Sea $(A,w) \in \tau_1$ entonces no necesariamente $(A.A,w_{\circledast}) \in \tau_1$. Basta considerar la Observación 3.10.

OBSERVACION 3.16. Sea $(A,w) \in \tau_2$ entonces no necesariamente $(A.A,w_{\circledast}) \in \tau_2$. Basta considerar la Observación 3.11.

PROPOSICION 3.17. Sea $(A,w) \in \tau_1$, entonces $(A.A,w_{\circledast})$ es normal, luego es de Bernstein, de Jordan y $\mathrm{Ker}\ w_{\circledast}$ es nilpotente.

Demostración: Como $(A,w) \in \tau_1$ por Proposición 3.13 $(A \otimes_d A,w_d)$ es normal, luego $A \otimes_d A/I$ es también normal, y así es de Bernstein, de Jordan y $\mathrm{Ker} w_{\circledast}$ es nilpotente.

OBSERVACION 3.18.

a) Sea $(A,w) \in N$ entonces no necesariamente $(A.A,w_{\circledast}) \in N$.

b) Sea $A \in J$ entonces no necesariamente $(A.A,w_{\circledast}) \in J$.

c) Sea $(A,w) \in B$ entonces no necesariamente $(A.A,w_{\circledast}) \in B$.

TEOREMA 3.19. Si $T^2 = T$ entonces $A_{T,w} \otimes_d A_{T,w}$ es de Bernstein y es de Jordan.

Demostración: Recordemos que $\forall\ x,y \in A_{T,w}$, $xy = \frac{1}{2}\{w(x)T(y) + w(y)T(x)\}$ y $w \circ T = w$.

Sea $x = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \otimes b_i \in A_{T,w} \otimes_d A_{T,w}$

$$x^3 = \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i \otimes b_i\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{\ell} a_j \otimes b_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{\ell} (a_i \otimes b_i)^2\right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i \neq 1} (a_1 \otimes b_1)(a_i \otimes b_i) + \dots + 2 \sum_{i \neq \ell} (a_\ell \otimes b_\ell)(a_i \otimes b_i)\right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} a_j \otimes b_j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i b_i \otimes a_i b_i + 2 \sum_{i \neq 1} a_1 b_1 \otimes a_i b_i + \dots + 2 \sum_{i \neq \ell} a_\ell b_\ell \otimes a_i b_i\right) \cdot$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\ell} a_j \otimes b_j\right)$$

$$= \sum_{i,j} (a_i b_i)^2 \otimes a_j b_j + 2 \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1}^{\ell} (a_1 b_1)(a_i b_i) \otimes a_j b_j + \dots$$

$$+ 2 \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{\ell} (a_\ell b_\ell)(a_i b_i) \otimes a_j b_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} w(a_i b_i)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i)) \otimes a_i b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1}^{\ell} \Big[w(a_1 b_1)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i))$$

$$+ w(a_i b_i)(w(a_1)T^2(b_1) + w(b_1)T^2(a_1)) \Big] \otimes a_j b_j + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{\ell} \Big[w(a_\ell b_\ell)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i))$$

$$+ w(a_i b_i)(w(a_\ell)T^2(b_\ell) + w(b_\ell)T^2(a_\ell)) \Big] \otimes a_j b_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} w(a_i b_i)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i)) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1}^{\ell} (w(a_1 b_1)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i))) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1}^{\ell} (w(a_i b_i)(w(a_1)T^2(b_1) + w(b_1)T^2(a_1))) \otimes a_j b_j + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{\ell} (w(a_\ell b_\ell)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i))) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{\ell} (w(a_i b_i)(w(a_\ell)T^2(b_\ell) + w(b_\ell)T^2(a_\ell))) \otimes a_j b_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} w(a_i b_i)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i)) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1}^{\ell} (w(a_1 b_1)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i))) \otimes a_j b_j + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{\ell} (w(a_\ell b_\ell)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i))) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} \sum_{j=1} (w(a_i b_i)(w(a_1)T^2(b_1) + w(b_1)T^2(a_1))) \otimes a_j b_j + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq \ell} \sum_{j=1}^{\ell} (w(a_i b_i)(w(a_\ell)T^2(b_\ell) + w(b_\ell)T^2(a_\ell))) \otimes a_j b_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} w(a_i b_i)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i)) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i > t} \sum_{j=1}^{\ell} w(a_t b_t)(w(a_i)T^2(b_i) + w(b_i)T^2(a_i))) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i < t} \sum_{j=1}^{\ell} w(a_i b_i)(w(a_t)T^2(b_t) + w(b_t)T^2(a_t))) \otimes a_j b_j \ .$$

Como $T^2 = T$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} w(a_i b_i)(w(a_i)T(b_i) + w(b_i)T(a_i) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i > t} \sum_{j=1}^{\ell} w(a_t b_t)(w(a_i)T(b_i) + w(b_i)T(a_i)) \otimes a_j b_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i < t} \sum_{j=1}^{\ell} w(a_i b_i)(w(a_t)T(b_t) + w(b_t)T(a_t))) \otimes a_j b_j$$

$$= \sum_{i,j} w(a_i b_i)\, a_i b_i \otimes a_j b_j + \sum_{i>t} \sum_{j=1}^{\ell} w(a_t b_t) a_i b_i \otimes a_j b_j$$

$$+ \sum_{i<t} \sum_{j=1}^{\ell} w(a_i b_i)\, a_t b_t \otimes a_j b_j$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} w(a_i b_i) \left(\sum_{i,j} a_i b_i \otimes a_j b_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} w_d(a_i \otimes b_i) \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i \otimes b_i \right)^2 = w_d \left(\sum_{i=1}^{\ell} (a_i \otimes b_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i \otimes b_i \right)^2 =$$

$$= w_d(x) x^2 .$$

Luego, $A_{T,w} \otimes_d A_{T,w}$ es de Bernstein y de Jordan.

Finalmente, usando la Proposición 2.25. se tiene el resultado siguiente:

COROLARIO 3.20. Si $T^2 = T$ entonces $A_{T,w} \cdot A_{T,w}$ es de Bernstein y es de Jordan.

B I B L I O G R A F I A

[1] M.T. ALCALDE, C. BURGUEÑO, A. LABRA, A. MICALI., Sur les algèbres de Bernstein. Proc. London Math. Soc. (3) 58 (1989) 51-68.

[2] YU. I. LYUBICH., A classification of some types of Bernstein algebras. Selecta Math. Sov. Vol. 6, N° 1 (1987) 1-14.

[3] R.W.K. ODONI, A.E. STRATTON., Structure of Bernstein algebras.

[4] M. OUATTARA., Algèbres de Jordan et algèbres génétiques. Thèse de Doctorat, Montpellier, 1988, Francia.

[5] A. SUAZO., Clasificación de las álgebras de Bernstein de dimensión 4. Revista Cubo, N° 4, Temuco. Chile.

[6] R.D. SCHAFER., Introduction to non associative algebras. Acad. Press. (1966).

[7] S. WALCHER., Bernstein algebras which are Jordan algebras. Arch. Math. Vol. 50 (1988) 218-222.

[8] A. WÖRZ-BUSEKROS., Algebras in Genetics. Lecture in Biomathematics Springer, New York. 1980.

[9] A. WÖRZ-BUSEKROS., Bernstein algebras. Arch. Math. Vol. 48 (1987) 388-398.