Valores especiales de series e integrales de Dirichlet

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

Aldo Gabriel Pereira Solís

Diciembre, 2008

Director de Tesis: Dr. Eduardo Friedman

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Aldo Gabriel Pereira Solís

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 22 de Diciembre de 2008.

Director de Tesis:

Dr. Eduardo Friedman Eduardo Friedman ....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Rodrigo Bamón ....

Dra. Anita Rojas ....

Agradecimientos

Primero que todo, debo agradecer a mi familia, que a la distancia me han dado constantemente su apoyo, el que probablemente no haya sabido retribuir de forma adecuada, pero igual siguen cerca de uno esperando que siga bien.

A mi director de tesis, el profesor Eduardo Friedman, por su paciencia inagotable y por sacar seguramente lo mejor que puedo dar como estudiante. Mi mayor respeto y admiración a su persona.

A mis compañeros y compañeras de posgrado, por su interés constante en enterarse de lo que hacía, y por soportar mis cambios de ánimo, mis eventuales arrebatos, uno que otro enojo, entre otras cosas. Por extensión, a algunos estudiantes egresados, amigos de mis años de estudiante de pregrado y uno que otro profesor curioso.

A mis colegas, por soportar este último tiempo más que ninguna otra persona mis arranques de nervios, que fueron genialmente contenidos. Además, se agradecen todos los permisos concedidos. Mis disculpas por no enfrentar esto con la madurez que se supone.

Finalmente, a un buen amigo que extraño demasiado y de quien me gustaría que estuviera ahora conmigo, se trata del único que (quizá) siempre supo que iba a estar en este punto en algún momento. A Luis Orellana, a quien dedico las páginas que siguen.

Índice general

Resumen

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios en p variables. Definimos la serie de Dirichlet asociada a f y g como

$$Z(s) = Z(s; f, g) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^p} g(\omega) f(\omega)^{-s}.$$

El objetivo de este trabajo es enunciar la conjetura

$$\deg(f)\, Z(0; f, g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j)\, Z(0; f_j, g),$$

donde $f(x) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x)$, y demostrarla en el caso $g(x) = 1$, $p = 1$ o $p = 2$, para un f_j bastante general, a partir de la demostración de la continuación meromorfa de la serie $Z(s; f, g)$, bajo ciertas hipótesis sobre $f(x)$ y para $g(x)$ general.

Comenzamos analizando la función de una variable compleja s

$$J(s) = J(s; f, g) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(x) f(x)^{-s}\, dx_1 \cdots dx_p,$$

y se muestra, bajo ciertas condiciones sobre $f(x)$, que $J(s)$ se extiende a una función meromorfa sobre todo $\mathbb{C}$, obteniendo fórmulas para sus residuos y valores en $s = -N$, con $N \geq 0$. A continuación, para la serie $Z(s; f, g)$, y a partir del resultado demostrado para las integrales, se muestra que la serie se extiende a una función meromorfa, con polos simples en valores racionales de s, para centrarnos luego en su valor en $s = 0$, y finalmente aplicar estas fórmulas para demostrar la conjetura en el caso mencionado.

Summary

Let $f(x)$ and $g(x)$ be polynomials in p variables. We define the Dirichlet series associated to f and g as

$$Z(s) = Z(s; f, g) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^p} g(\omega) f(\omega)^{-s}.$$

The aim of this work is to enunciate the conjecture

$$\deg(f)\, Z(0; f, g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j)\, Z(0; f_j, g),$$

where $f(x) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x)$, and prove it in the case $g(x) = 1$, $p = 1$ or $p = 2$, for quite general f_j, using the proof of the meromorphic continuation of series $Z(s; f, g)$, under certain assumptions over $f(x)$ and for general polynomial $g(x)$.

We begin analyzing the function of one complex variable s

$$J(s) = J(s; f, g) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(x) f(x)^{-s}\, dx_1 \cdots dx_p,$$

and it proves, under certain assumptions over $f(x)$, that $J(s)$ extends to a meromorphic function over the whole plane, obtaining formulae for its residues and values at points $s = -N$, with $N \geq 0$. Next, for series $Z(s; f, g)$, and using the result for integrals, it proves what the series $Z(s; f, g)$ extends to a meromorphic function, with simple poles at rational values of s, then to center on its value at point $s = 0$. Finally, applying these results, we prove the conjecture in the case previously mentioned.

Introducción

Durante el siglo XX, varios autores han investigado y han dado resultados acerca de series de Dirichlet múltiples, de la forma

$$Z(s) = Z(s; f, g) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^p} g(\omega) f(\omega)^{-s}, \qquad (\Re(s) \gg 0) \tag{1}$$

donde $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$, para diversos casos de polinomios $f(x)$ y $g(x)$.

En los años 20, K. Mahler [6] logró probar, para $g(x)$ arbitrario y bajo ciertas hipótesis sobre $f(x)$, que la serie $Z(s)$ se extiende a una función meromorfa, regular para $s = 0, -1, -2, \ldots$, y cuyas singularidades son todas polos simples, sobre el eje real, en puntos racionales.

Más adelante, en los años 70, motivado por ciertos problemas en teoría de números, T. Shintani [8] estudió la serie (1) con $g(x) = 1$, y $f(x)$ de la forma

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} \left((x_1 + m_1)\, a_{1j} + \cdots + (x_p + m_p)\, a_{pj} \right), \qquad (a_{ij} > 0, m_j > 0),$$

en cuyo caso la serie converge para $\Re(s) > \frac{p}{n}$, y obtuvo fórmulas explícitas para el valor de su continuación analítica $Z(0)$, y el de la derivada $Z'(0)$.

A comienzos de los años 80, Pi. Cassou - Noguès en [2] y [3] estudió este tipo de series y también el caso no polinomial

$$g(x) = \xi_1^{x_1} \cdots \xi_p^{x_p}, \qquad (|\xi_j| = 1,\ \xi_j \neq 1).$$

Dio en ambos casos, imponiendo ciertas hipótesis sobre $f(x)$, fórmulas explícitas para los valores en $s = 0, -1, -2, \ldots$. Cassou - Noguès también estudió versiones p-ádicas de $Z(s)$ en [2].

A finales de los años 90, Chen y Eie [4] estudian el caso

$$g(x) = x_1^{\beta_1} \cdots x_p^{\beta_p}, \qquad (\beta_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

y enuncian para un producto positivo $f(x) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x)$ (pero bastante general) la fórmula

$$Z(0; f, g) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Z(0; f_j, g), \tag{2}$$

que para el caso en que todos los $f_j(x)$ son de grado 1 había sido demostrado por Shintani [8].

Este trabajo tiene como objetivo principal corregir este "resultado" de Chen y Eie, el cual se mostrará que es falso. Proponemos reemplazarlo por la conjetura

$$\deg(f)\, Z(0; f, g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j)\, Z(0; f_j, g), \tag{3}$$

que demostramos aquí para el caso $g(x) = 1$, $p = 1$ o $p = 2$, para un f_j bastante general (ver Teorema 4.1). Además, se expone la demostración de Mahler [6] de la continuación meromorfa de $Z(s; f, g)$ bajo ciertas hipótesis (ya en Mahler) sobre $f(x)$, y para $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ general. Mahler da una fórmula para el residuo en el mayor polo, es decir, en la abscisa de convergencia absoluta de $Z(s; f, g)$. Aplicando su método nosotros damos una fórmula para el residuo en cualquier polo, y damos fórmulas (ver Teorema 2.12 y Teorema 3.11) para el valor en $s = 0, -1, -2, \cdots$. Nos concentramos especialmente en el valor $s = 0$ con el objetivo de demostrar nuestra corrección conjetural del trabajo de Chen y Eie.

Siguiendo a Mahler [6], comenzamos este trabajo analizando la función de una variable compleja s

$$J(s) = J(s; f, g) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(x) f(x)^{-s}\, dx_1 \cdots dx_p,$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios en p variables. Se muestra, bajo ciertas condiciones sobre $f(x)$, que $J(s)$ se extiende a una función meromorfa sobre todo $\mathbb{C}$, se obtienen fórmulas explícitas para sus residuos, y para los valores de $J(s)$ en $s = 0, -1, -2, \ldots$ (ver Teorema 2.12). Como consecuencia de esto, se obtiene que el valor $J(0)$ es un polinomio en los coeficientes de $f(x)$ de grado no maximal, resultado demostrado en [5] con otros métodos.

Además se demuestra (Teorema 2.14) para $p = 1$ o $p = 2$ y $g(x) = 1$,

$$\deg(f_1 f_2)\, J(0; f_1 f_2, 1) = \deg(f_1)\, J(0; f_1, 1) + \deg(f_2)\, J(0; f_2, 1).$$

Por esto nos permitimos conjeturar que en general el análogo de (3) vale para las integrales (es decir, con Z reemplazada por J).

Luego se considera la serie $Z(s; f, g)$, y se demuestra el resultado de Mahler. Es decir, que la serie se extiende a una función meromorfa, con polos simples en ciertos valores de $s \in \mathbb{Q}$, con residuos dados por ciertas integrales anteriormente analizadas. Para $s = 0$ se demuestra que $Z(0; f, g)$ es un polinomio en los coeficientes de grado no maximal de $f(x)$, resultado encontrado en [5]. Finalmente aplicamos estas fórmulas para demostrar nuestra versión corregida del trabajo de Chen y Eie en el caso $p = 1$ o $p = 2$ y $g(x) = 1$.

Capítulo 1

“Teorema” de Chen y Eie

Sea $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ una p-tupla de enteros no negativos. Definamos

$$g_\beta(x) = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_p^{\beta_p}.$$

“Teorema” 1.1 (Chen y Eie [4]). *Supongamos que $P_i X(x)\,(i = 1, \ldots, n)$ son polinomios reales en p variables con coeficientes no negativos tal que $P_j(n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^p$ y supongamos que la serie*

$$Z(s; P_j, g_\beta) = \sum_{n \in \mathbb{N}^p} g_\beta(n)\, P_j(n)^{-s}$$

es absolutamente convergente para $\Re(s) > \sigma_j > 0$. Entonces $Z(s; P_j, g_\beta)$ así como $Z(s; \prod_j P_j, g_\beta)$ tienen sus continuaciones analíticas. Para éstas en $s = 0$ se cumple

$$Z\big(0; \textstyle\prod_{j=1}^n P_j, g_\beta\big) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Z(0; P_j, g_\beta). \tag{1.1}$$

Notar que en este enunciado, al hablar de continuación analítica, se quiere decir que la serie tiene una continuación en s, meromorfa en todo el plano pero regular para $s = 0$. Esta parte es correcta (y antigua [6]), pero la conclusión (1.1) ni siquiera es autoconsistente. Por ejemplo, tomemos tres polinomios f_j, todos en p variables. Entonces aplicando sucesivamente el “teorema” 1.1 con $n = 2$ se tiene

$$\begin{aligned} Z\big(0; f_1(f_2 f_3), g_\beta\big) &= \frac{1}{2} Z(0; f_1, g_\beta) + \frac{1}{2} Z(0; f_2 f_3, g_\beta) \\ &= \frac{1}{2} Z(0; f_1, g_\beta) + \frac{1}{4} Z(0; f_2, g_\beta) + \frac{1}{4} Z(0; f_3, g_\beta). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Por otro lado, una reordenación de los polinomios da

$$\begin{aligned} Z\big(0; (f_1 f_2) f_3, g_\beta\big) &= \frac{1}{2} Z(0; f_1 f_2, g_\beta) + \frac{1}{2} Z(0; f_3, g_\beta) \\ &= \frac{1}{4} Z(0; f_1, g_\beta) + \frac{1}{4} Z(0; f_2, g_\beta) + \frac{1}{2} Z(0; f_3, g_\beta). \end{aligned} \tag{1.3}$$

de donde, restando (1.3) de (1.2) se obtiene

$$Z(0; f_1, g_\beta) = Z(0; f_3, g_\beta). \tag{1.4}$$

Si esto fuese cierto el teorema tendría escaso interés ya que el valor $Z(0; f, g_\beta)$ no dependería del polinomio f. Afortunadamente es fácil encontrar contraejemplos para la igualdad anterior. Sea $p = 1$ y $\beta = (0, \dots, 0)$, con lo que $g_\beta = 1$. Sean $f_i(x) = x + a_i$, donde $a_i > 0$ para cada $i = 1, 2, 3$ y los a_i distintos entre sí. La serie (función de Hurwitz, básicamente)

$$Z(s; f_i, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n + a_i)^{-s},$$

es tal que para su continuación en $s = 0$, se tiene ([7], p. 212)

$$Z(0; f_i, 1) = -\frac{1}{2} - a_i,$$

y reemplazando en (1.4), se obtiene

$$-\frac{1}{2} - a_1 = -\frac{1}{2} - a_3,$$

lo cual muestra que (1.4) es falsa, ya que se supone $a_1 \neq a_3$. Por lo tanto, el "teorema" 1.1 es falso. En más variables, se pueden dar contraejemplos similares usando los resultados de Shintani [8].

Una corrección conjetural de la fórmula de Chen y Eie debe ser de la forma

$$Z(0; f_1 f_2, g) = c_1\, Z(0; f_1, g) + c_2\, Z(0; f_2, g), \tag{1.5}$$

en la cual los c_i deben ser "sencillos"(por ejemplo, depender sólo de los grados de f_i). Sin embargo, para que pueda valer este tipo de resultado es necesaria una hipótesis sobre f que no nos permita factorizarla separando variables. En efecto, supongamos que tenemos

$$f(x_1, \dots, x_p) = h(x_1, \dots, x_l) \cdot \tilde{h}(x_{l+1}, \dots, x_p)$$

y

$$g(x_1, \dots, x_p) = \jmath(x_1, \dots, x_l) \cdot \tilde{\jmath}(x_{l+1}, \dots, x_p).$$

Por un lado

$$\begin{aligned} Z(s; f, g) &= \sum_{\omega \in \mathbb{N}^p} \jmath(\omega_1, \dots, \omega_l)\, h(\omega_1, \dots, \omega_l)^{-s}\, \tilde{\jmath}(\omega_{l+1}, \dots, \omega_p)\, \tilde{h}(\omega_{l+1}, \dots, \omega_p)^{-s} \\ &= \sum_{\omega \in \mathbb{N}^l} \jmath(\omega)\, h(\omega)^{-s} \sum_{\omega \in \mathbb{N}^{p-l}} \tilde{\jmath}(\omega)\, \tilde{h}(\omega)^{-s} \\ &= Z(s; h, \jmath)\, Z(s; \tilde{h}, \tilde{\jmath}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Por otro lado, si

$$f_i(x_1,\ldots,x_p) = h_i(x_1,\ldots,x_l)\cdot \tilde{h}_i(x_{l+1},\ldots,x_p) \qquad (1\le i\le 2),$$

por (1.6)

$$\begin{aligned} Z(0;f_1f_2,g) &= Z(0;h_1h_2,\jmath)\, Z(0;\tilde{h}_1\tilde{h}_2,\tilde{\jmath}) \\ &= \big(c_1Z(0;h_1,\jmath)+c_2Z(0;h_2,\jmath)\big)\big(c_1'Z(0;\tilde{h}_1,\tilde{\jmath})+c_2'Z(0;\tilde{h}_2,\tilde{\jmath})\big). \quad (1.7) \end{aligned}$$

Pero por (1.6) y la conjetura (1.5) tendríamos

$$\begin{aligned} Z(0;f_1f_2,g) &= Z(0;h_1\tilde{h}_1h_2\tilde{h}_2,g) \\ &= d_1Z(0;h_1\tilde{h}_1,g)+d_2Z(0;h_2\tilde{h}_2,g) \\ &= d_1Z(0;h_1,\jmath)\, Z(0;\tilde{h}_1,\tilde{\jmath})+d_2Z(0;h_2,\jmath)\, Z(0;\tilde{h}_2,\tilde{\jmath}), \end{aligned}$$

que tiene una estructura de productos donde no aparecen términos de (1.7) como $Z(0;h_1,\jmath)Z(0;\tilde{h}_2,\tilde{\jmath})$.

La hipótesis más sencilla que permite asegurar la no descomposición en variables separadas y además la existencia de continuaciones analíticas es la de Mahler [6]

> **Hipótesis H**. $f(x)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_p]$ es un polinomio de grado $m>0$, tal que para toda p-tupla $x\in\mathbb{R}^p_{\ge 0}$, $f(x)\neq 0$. Además, la parte homogénea de grado máximo de $f(x)$ no se anula para $x\in\mathbb{R}^p_{\ge 0}$, salvo cuando $x=0$.

Con esta hipótesis Mahler demostró que para cualquier $g(x)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_p]$ la serie

$$Z(s;f,g)=\sum_{\omega\in\mathbb{N}^p} g(\omega)f(\omega)^{-s}$$

converge para $\Re(s)\gg 0$ y tiene una continuación regular en $s=0$. Proponemos la siguiente

> **Conjetura**. Sean $f_j(x)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_p]$ polinomios en p variables, de grado $m_j>0$, que satisfacen la hipótesis de Mahler $(1\le j\le n)$ y sea $g(x)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_p]$. Entonces
>
> $$\Big(\sum_{j=1}^n \deg(f_j)\Big)\cdot Z\big(0;\prod_{j=1}^n f_j,g\big)=\sum_{j=1}^n \deg(f_j)\cdot Z(0;f_j,g). \qquad (1.8)$$

En este trabajo demostraremos esta conjetura para el caso de polinomios en una o dos variables ($p = 1$ o $p = 2$) con $g = 1$.

La conjetura nos parece razonable no sólo por el caso especial que nosotros demostramos. Shintani demostró el caso en que todos los polinomios f_j son de grado 1, con p y n arbitrario. Además, la conjetura es auto-consistente: si se supone para dos polinomios ($n = 2$), se deduce para cualquier número de polinomios. En efecto,

Lema 1.2. *Supongamos que S es una colección de polinomios no nulos, cerrada bajo productos, y sea $P : S \to \mathbb{C}$ tal que si $f_1 \in S$ y $f_2 \in S$,*

$$\big(\deg(f_1) + \deg(f_2)\big) \cdot P(f_1 f_2) = \deg(f_1) \cdot P(f_1) + \deg(f_2) \cdot P(f_2),$$

Entonces para todo $n \geq 2$, si $f_j(x) \in S$ para $1 \leq j \leq n$ tenemos

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \deg(f_j)\Big) \cdot P\Big(\prod_{j=1}^{n} f_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot P(f_j). \tag{1.9}$$

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 2$ por hipótesis se cumple (1.9). Supóngase que (1.9) sea cierta para n, y sea $f(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$. Aplicando la hipótesis a $P(f f_{n+1})$,

$$\begin{aligned}
\big(\deg(f) + \deg(f_{n+1})\big) \cdot P(f f_{n+1}) &= \deg(f) \cdot P(f) + \deg(f_{n+1}) \cdot P(f_{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot P(f_j) + \deg(f_{n+1}) \cdot P(f_{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \deg(f_j) \cdot P(f_j). \qquad \square
\end{aligned}$$

En el curso de la demostración de nuestra conjetura para polinomios de una o dos variables demostraremos un caso análogo en que la suma está reemplazada por una integral definida como

$$J(s) = J(s; f, g) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(x) f(x)^{-s} \, dx_1 \cdots dx_p,$$

la que Mahler también demostró ser absolutamente convergente para $\Re(s) \gg 0$ si f satisface su hipótesis. Además demostró que $J(s; f, g)$ se extiende a una función regular para $s = 0$.

> **Conjetura**(versión integral). Sean $f_j(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ polinomios en p variables, de grado $m_j > 0$, que satisfacen la hipótesis de Mahler ($1 \leq j \leq n$) y sea $g(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$. Entonces
>
> $$\Big(\sum_{j=1}^{n} \deg(f_j)\Big) \cdot J\Big(0; \prod_{j=1}^{n} f_j, g\Big) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot J(0; f_j, g). \tag{1.10}$$

Demostraremos esta conjetura para integrales para el caso de polinomios en una o dos variables ($p = 1$ o $p = 2$) con $g = 1$. Esto será un paso importante en la demostración de la conjetura correspondiente para series.

Capítulo 2

Continuación meromorfa de ciertas integrales

En este capítulo se estudiará, siguiendo el método de Mahler [6], la función de una variable compleja s

$$J(s) = J(s; f, g) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(x) f(x)^{-s} \, dx_1 \cdots dx_p,$$

donde $g(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ es un polinomio arbitrario de grado[1] menor o igual a n, y $f(x)$ verifica la siguiente

> **Hipótesis H.** $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ es un polinomio de grado $m > 0$, tal que para toda p-tupla $x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$, $f(x) \neq 0$. Además, la parte homogénea de grado máximo de $f(x)$ no se anula para $x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$, salvo cuando $x = 0$.

Esta hipótesis nos asegura que existe una rama continua de $\log f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$, ya que $\mathbb{R}^p_{\geq 0}$ es simplemente conexo y $f(x) \neq 0$ para $x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$. Esta rama es única, salvo sumar algún $2\pi i k$ (con $k \in \mathbb{Z}$ fijo) a $\log f(x)$. Al definir $J(s)$, elegimos un k, lo que da una ambigüedad en la elección de rama que resulta en multiplicar $J(s)$ por $e^{-2\pi i k s}$. Notemos que para s entero esta elección de rama no afecta el valor de $J(s)$.

Definición 2.1. *Sea $P(x)$ un polinomio de grado q en p variables. Para $j \leq q$, $P_j(x)$ es la* ***parte homogénea de grado j de*** *$P(x)$, es decir, la suma de los monomios de $P(x)$ en los cuales la suma de los exponentes de los x_i es igual a j.*

La segunda condición en la hipótesis H se puede entender como: $f_m(\omega)$ es no nula cuando $0 \neq \omega \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$. Aquí, $\mathbb{R}^p_{\geq 0} = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p : x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq p\}$.

[1] Al aplicar algunos de nuestros resultados en el próximo capítulo sólo tendremos una cota superior para el grado de g. Por esto damos el entero $n \geq 0$ de esta forma algo peculiar.

Lema 2.2. *La integral que define a $J(s)$ es absolutamente convergente para $\Re(s) > \frac{n+p}{m}$ y es una función analítica de s en este semiplano.*

Demostración. El cambio de variables $v = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}$, $\sigma = \frac{x}{v}$, permite escribir la integral como

$$J(s) = \int_{\sigma \in \mathcal{O}} \int_{v=0}^{\infty} v^{p-1} g(v\sigma) f(v\sigma)^{-s} \, dv \, d\sigma, \tag{2.1}$$

donde σ pertenece al dominio $\mathcal{O}$, que es la intersección del primer "octante" $\mathbb{R}^p_{\geq 0}$ con la esfera unitaria en $\mathbb{R}^p$, y $d\sigma$ es la medida natural en esta esfera. Fijando $w > 0$ arbitrario, (2.1) se descompone en

$$\begin{aligned} J(s) &= \int_{\mathcal{O}} \int_0^w v^{p-1} g(v\sigma) f(v\sigma)^{-s} \, dv \, d\sigma + \int_{\mathcal{O}} \int_w^{\infty} v^{p-1} g(v\sigma) f(v\sigma)^{-s} \, dv \, d\sigma \\ &= J_1(s, w) + J_2(s, w). \end{aligned} \tag{2.2}$$

$J_1(s, w)$ es una función entera de s, ya que el dominio de integración $\mathcal{O}$ es compacto y, usando la hipótesis H, $f(x)^{-s}$ se puede definir para todo $x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$, eligiendo una rama continua de $\log f(x)$. Para $J_2(s, w)$ se debe considerar que $|f(v\sigma)^{-s}| \approx |v^{-ms}| = v^{-m\Re(s)}$ cuando $v \to \infty$, y que $g(x)$ es de grado a lo más n. Luego $J_2(s, w)$ converge si $p - 1 + n - m\Re(s) < -1$. Por tanto, $J(s)$ converge absolutamente en el semiplano $\Re(s) > \frac{n+p}{m}$, y uniformemente en subconjuntos compactos de este semiplano. □

Observación 2.3. $f(x)$ se descompone en partes homogéneas (ver Definición 2.1), como

$$f(x) = f_m(x) \left(1 + r(x)\right), \qquad r(x) = \frac{f_{m-1}(x) + f_{m-2}(x) + \cdots + f_0}{f_m(x)}. \tag{2.3}$$

Para $\sigma \in \mathcal{O}$, $f_m(\sigma)$ es acotada y no nula, luego puede definirse $\log f_m(x)$, eligiendo una rama continua de manera que $\log f_m(x) = m \log v + \log f_m(\sigma)$. Por lo tanto, existe $M > 0$ tal que

$$\forall v > 0 \quad |\Im \log f_m(x)| \leq M.$$

Para $v \gg 0$ fijamos la rama principal de $\log\left(1 + r(x)\right)$. Es decir, dado $0 < \delta < \frac{1}{2}$, existe v_0 tal que para $\|x\| \geq v_0$ y $t \in [0, 1]$

$$|r(x)| \leq \delta, \quad \left|\arg\left(1 + t r(x)\right)\right| \leq \delta.$$

Finalmente puede definirse

$$\begin{aligned} \log f(x) &= \log f_m(x) + \log\left(1 + r(x)\right) \\ &= m \log v + \log f_m(\sigma) + \log\left(1 + r(v\sigma)\right), \end{aligned}$$

a partir de la cual se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} f(x)^{-s} &= f_m(x)^{-s}\left(1+r(x)\right)^{-s} \\ &= v^{-ms} f_m(\sigma)^{-s}\left(1+r(v\sigma)\right)^{-s}. \end{aligned}$$

Si bien esta igualdad se obtiene para $v = \|x\| \geq v_0$, por continuidad se extiende para $\mathbb{R}^p_{\geq 0}$. Aquí debemos entender que $\left(1+r(v\sigma)\right)^{-s}$ utiliza la extensión continua a $v \in (0,\infty)$, $\sigma \in \mathcal{O}$ de la rama principal elegida para $v > v_0$. Nuevamente esto es posible ya que $1 + r(v\sigma) \neq 0$ y $\mathbb{R}^p_{\geq 0} - \{0\}$ es simplemente conexo.

Observación 2.4. Para $s \in \mathbb{C}$, el término $\left(1+r(v\sigma)\right)^{-s}$ (ver Observación 2.3), se desarrolla en expansión finita de Taylor con resto integral ([9], pp. 95 - 96)

$$G(q) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{G^{(\lambda)}(a)}{\lambda!}(q-a)^\lambda + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^q G^{(k)}(\tau)\,(q-\tau)^{k-1}\,d\tau.$$

Para $G(q) = (1+q)^{-s}$, entonces se obtiene como término general (con cualquier elección continua de $\log(1+q)$ usada para definir $(1+q)^{-s}$)

$$\frac{G^{(\lambda)}(a)}{\lambda!} = \frac{\prod_{j=0}^{\lambda-1}(-s-j)}{\lambda!}\,(1+a)^{-(s+\lambda)} = \binom{-s}{\lambda}(1+a)^{-(s+\lambda)},$$

y como resto, se obtiene

$$R_{k-1,a}(q) = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^q G^{(k)}(\tau)\,(q-\tau)^{k-1}\,d\tau = k\binom{-s}{k}\int_a^q \frac{(q-\tau)^{k-1}}{(1+\tau)^{s+k}}\,d\tau.$$

Reemplazando $a = 0$, $q = r(v\sigma)$ y $\tau = tq$, $0 < t < 1$, se obtiene finalmente:

$$\left(1+r(v\sigma)\right)^{-s} = \sum_{\lambda=0}^{k-1}\binom{-s}{\lambda} r(v\sigma)^\lambda + k\binom{-s}{k} r(v\sigma)^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{\left(1+t\,r(v\sigma)\right)^{s+k}}\,dt.$$

Lo anterior permite reescribir la integral $J_2(s,w)$ en (2.2) como:

$$\begin{aligned} J_2(s,w) &= \int_{\mathcal{O}}\int_w^\infty v^{p-1-ms} g(v\sigma) f_m(\sigma)^{-s}\left(1+r(v\sigma)\right)^{-s}\,dv\,d\sigma \\ &= \sum_{\lambda=0}^{k-1}\binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,w) + N_k(s,w), \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $k \geq 1$ es un entero por fijar más adelante,

$$M_\lambda(s,w) = \int_{\mathcal{O}} \int_w^\infty v^{p-1-ms} g(v\sigma) f_m(\sigma)^{-s} r(v\sigma)^\lambda \, dv \, d\sigma, \tag{2.5}$$

$$N_k(s,w) = k\binom{-s}{k} \int_{\mathcal{O}} \int_w^\infty v^{p-1-ms} g(v\sigma) f_m(\sigma)^{-s} r(v\sigma)^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{\big(1+t\,r(v\sigma)\big)^{s+k}} \, dt \, dv \, d\sigma. \tag{2.6}$$

Lema 2.5. *$N_k(s,w)$ es una función analítica en el semiplano $\Re(s) > \frac{n+p-k}{m}$. Además, para $k > n+p+Nm$, $w > 0$ y $N = 0, 1, \ldots$, se tiene $N_k(-N, w) = 0$.*

Demostración. El integrando es acotado como función de σ, ya que $\sigma \in \mathcal{O}$ y $\mathcal{O}$ es compacto. Dado $v_0 > 0$ suficientemente grande, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\forall v \geq v_0 \quad |g(v\sigma)| \leq C_1 \, v^n,$$

y una constante C_2 suficientemente grande de modo que para todo $\sigma \in \mathcal{O}$

$$\forall v \geq v_0 \quad |r(v\sigma)| \leq C_2 \, v^{-1}, \quad |r(v\sigma)| < 1/2.$$

La condición para la convergencia en (2.6) es que el exponente de v debe ser menor que -1, lo que da el semiplano de convergencia de $N_k(s,w)$:

$$\Re(s) > \frac{n+p-k}{m}.$$

Por lo tanto, para calcular $N_k(-N,w)$, basta tomar $k \geq n+p+Nm+1$, y se obtiene de manera trivial $N_k(-N,w) = 0$, a causa del factor $\binom{-s}{k}$. □

Observación 2.6. Sea $\lambda \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se consideran las descomposiciones en partes homogéneas para $g(v\sigma)$ y $r(v\sigma)$, dadas por

$$\begin{aligned} g(v\sigma) &= v^n\big(g_n(\sigma) + v^{-1}g_{n-1}(\sigma) + \ldots + v^{-n}g_0\big), \\ r(v\sigma) &= v^{-1}\Delta_1(\sigma,f) + \ldots + v^{-m}\Delta_m(\sigma,f), \qquad \Delta_j(\sigma,f) = \frac{f_{m-j}(\sigma)}{f_m(\sigma)}, \end{aligned}$$

y se obtiene el producto

$$g(v\sigma)\, r(v\sigma)^\lambda = v^{n-\lambda} \sum_{h=0}^{n+(m-1)\lambda} A_h^\lambda(\sigma)\, v^{-h}, \tag{2.7}$$

en la cual los coeficientes $A_h^\lambda(\sigma)$ son funciones racionales sin polos en $\mathcal{O}$.

Lema 2.7. *$M_\lambda(s,w)$ se extiende a una función meromorfa de s en todo $\mathbb{C}$, con polos simples en $s = \frac{n+p-\lambda-h}{m}$, donde $h = 0, 1, \ldots, n + (m-1)\lambda$, y residuo*

$$\mathrm{Res}_{s=\frac{n+p-\lambda-h}{m}}\Big(M_\lambda(s,w)\Big) = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{O}} A_h^\lambda(\sigma)\, f_m(\sigma)^{-s}\, d\sigma.$$

Demostración. A partir de la fórmula (2.7), se puede reescribir $M_\lambda(s,w)$ definida en (2.5) como

$$\begin{aligned} M_\lambda(s,w) &= \sum_{h=0}^{n+(m-1)\lambda} \int_{\mathcal{O}}\int_{v=w}^{\infty} v^{n+p-ms-\lambda-h-1} A_h^\lambda(\sigma)\, f_m(\sigma)^{-s}\, dv\, d\sigma \\ &= \sum_{h=0}^{n+(m-1)\lambda} \frac{w^{n+p-ms-\lambda-h}}{ms+\lambda+h-n-p}\int_{\mathcal{O}} A_h^\lambda(\sigma)\, f_m(\sigma)^{-s}\, d\sigma, \qquad (2.8) \end{aligned}$$

lo que da la continuación meromorfa en s de $M_\lambda(s,w)$, ya que las funciones $A_h^\lambda(\sigma)$ y $f_m(\sigma)$ son continuas sobre el compacto $\mathcal{O}$, con lo cual

$$\int_{\mathcal{O}} A_h^\lambda(\sigma)\, f_m(\sigma)^{-s}\, d\sigma$$

es una función entera de s.

De (2.8), vemos que $M_\lambda(s,w)$ tiene polos simples en

$$s = \frac{n+p-\lambda-h}{m}, \qquad h = 0, 1, \ldots, n + (m-1)\lambda,$$

con residuo igual a

$$\frac{1}{m}\int_{\mathcal{O}} A_h^\lambda(\sigma)\, f_m(\sigma)^{-s}\, d\sigma. \qquad \square$$

Lema 2.8. *Para $N = 0, 1, 2, \ldots$ y λ entero tal que $\lambda < \frac{p}{m} + N$ ó $\lambda > n+p+mN$, tenemos $A_{n+p-\lambda+Nm}^\lambda(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in \mathcal{O}$. Más generalmente, si $f(x)$ es tal que sus partes homogéneas $f_j(x)$ son nulas para $l < j < m$, entonces $A_{n+p-\lambda+Nm}^\lambda(\sigma) = 0$ si $\lambda < N + \frac{p}{m}$ ó $\lambda > \frac{n+p+mN}{m-l}$.*

Demostración. En (2.7), aparecen potencias de v entre $n-\lambda$ y $-m\lambda$. Por otro lado, la hipótesis sobre λ implica $m\lambda < p + mN$, de donde $-(Nm+p) < -m\lambda$. Luego, $A_{n+p-\lambda+Nm}^\lambda(\sigma)$ es coeficiente de una potencia de v negativa y menor a la que aparece en (2.7). Por lo tanto, $A_{n+p-\lambda+Nm}^\lambda(\sigma) = 0$.

Para probar la segunda afirmación, sea $j = \lfloor\frac{n+p}{m-l}\rfloor + N$. Por hipótesis, $\lambda > j$ implica $n - \lambda < n - j$. Luego, $A_{n+p-\lambda+Nm}^\lambda(\sigma)$ es coeficiente de una potencia de v mayor a la que aparece en (2.7). Por lo tanto, $A_{n+p-\lambda+Nm}^\lambda(\sigma) = 0$. $\square$

Corolario 2.9. *Para λ, N enteros tales que $0 \leq N < \lambda \leq n+p+Nm$, se tiene*

$$\lim_{s\to -N} \binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,w) = \frac{(-1)^{\lambda-N}}{m(\lambda-N)} \frac{1}{\binom{\lambda}{N}} \int_{\mathcal{O}} A^\lambda_{n+p-\lambda+Nm}(\sigma)\, f_m(\sigma)^N\, d\sigma, \qquad (2.9)$$

donde $A^\lambda_{n+p-\lambda+Nm}(\sigma)$ es el coeficiente de $v^{-(Nm+p)}$ en $g(v\sigma)r(v\sigma)^\lambda$ definido en (2.7).

Demostración. En la fórmula (2.8), el valor $s = -N$ se obtiene al tomar $h = n+p-\lambda+Nm$.[2] Luego

$$\lim_{s\to -N} (s+N)\, M_\lambda(s,w) = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{O}} A^\lambda_{n+p-\lambda+Nm}(\sigma)\, f_m(\sigma)^N\, d\sigma.$$

Por otro lado, para el coeficiente binomial $\binom{-s}{\lambda}$, se tiene para $\lambda > N$,

$$\lim_{s\to -N} \frac{1}{s+N} \binom{-s}{\lambda} = \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda-N} \frac{1}{\binom{\lambda}{N}},$$

lo que termina la demostración. □

Corolario 2.10. *Tomando $N=0$, se obtiene para $0 < \lambda \leq n+p$*

$$\lim_{s\to 0} \binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,w) = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda m} \int_{\mathcal{O}} A^\lambda_{n+p-\lambda}(\sigma)\, d\sigma,$$

donde $A^\lambda_{n+p-\lambda}(\sigma)$ es el coeficiente de v^{-p} en $g(v\sigma)\, r(v\sigma)^\lambda$.

Observación 2.11. Se tiene de (2.2) para todo $s \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{w\to 0^+} J_1(s,w) = 0.$$

Dado que $J(s) = J_1(s,w) + J_2(s,w)$, se obtiene para un punto regular de $J(s)$

$$\begin{aligned} J(s) &= \lim_{w\to 0^+} J_1(s,w) + \lim_{w\to 0^+} J_2(s,w) \\ &= \lim_{w\to 0^+} J_2(s,w). \end{aligned}$$

Si tomamos $s=-N$, con $N = 0, 1, \ldots$ y $k > n+p+Nm$, $N_k(-N,w) = 0$, y en (2.8) los términos con $0 \leq \lambda \leq N$ implican $n+p+Nm-\lambda-h \geq 1$, por lo que los términos $w^{n+p+Nm-\lambda-h}$ en (2.8) tienden a 0 cuando $w \to 0^+$.

[2] Para que haya polo en $s=-N$ se requiere $\lambda \geq N + \frac{p}{m}$, pero por el lema anterior sigue siendo válido el corolario si sólo suponemos $\lambda > N$.

Con estos resultados se puede concluir lo siguiente:

Teorema 2.12. ([6]) *Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado $m > 0$ en p variables que satisface la hipótesis H, y sea $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en p variables de grado menor o igual a un entero $n \geq 0$. Entonces la función*

$$J(s) = J(s; f, g) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g(x) f(x)^{-s}\, dx_1 \cdots dx_p$$

es absolutamente convergente en el semiplano $\Re(s) > \frac{n+p}{m}$. $J(s)$ puede extenderse a todo $\mathbb{C}$ como una función meromorfa, cuyas únicas singularidades son polos simples en

$$s = \frac{n+p-\ell}{m}, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots, \qquad s \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

y con residuo igual a

$$\frac{1}{m} \sum_{\lambda=j_\ell}^{\ell} \binom{-s}{\lambda} \int_{\mathcal{O}} A_{\ell-\lambda}^{\lambda}(\sigma)\, f_m(\sigma)^{-s}\, d\sigma, \tag{2.10}$$

donde $j_\ell = \max\{\lceil \frac{p}{m} - s \rceil, 0\}$, $\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor o igual a x, $A_{\ell-\lambda}^{\lambda}(\sigma)$ es el coeficiente de v^{ms-p} en $g(v\sigma) r(v\sigma)^{\lambda}$ definido en (2.7), y $\mathcal{O}$ es el primer octante de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^p$.

Su valor en un entero $s = -N = \frac{n+p-\ell}{m}$ con $N = 0, 1, 2, \ldots$ está dado por

$$J(-N) \;=\; \frac{1}{m} \sum_{\lambda=\lceil \frac{p}{m} \rceil + N}^{\ell} \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda - N} \frac{1}{\binom{\lambda}{N}} \int_{\mathcal{O}} A_{\ell-\lambda}^{\lambda}(\sigma)\, f_m(\sigma)^{N}\, d\sigma, \tag{2.11}$$

donde $A_{\ell-\lambda}^{\lambda}(\sigma)$ es el coeficiente de $v^{-(Nm+p)}$ en $g(v\sigma) r(v\sigma)^{\lambda}$.

Demostración. Por el Lema 2.2 y las Observaciones 2.3 y 2.4, se tiene la igualdad

$$J(s) \;=\; J_1(s, w) + N_k(s, w) + \sum_{\lambda=0}^{k-1} \binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s, w),$$

y la fórmula (2.8) permite escribir la continuación meromorfa válida para $\Re(s) > \frac{n+p-k}{m}$

$$\begin{aligned} J(s) \;=\; & J_1(s, w) + N_k(s, w) + \\ & \sum_{\lambda=0}^{k-1} \binom{-s}{\lambda} \sum_{h=0}^{n+(m-1)\lambda} \frac{w^{n+p-ms-\lambda-h}}{ms + \lambda + h - n - p} \int_{\mathcal{O}} A_h^{\lambda}(\sigma)\, f_m(\sigma)^{-s}\, d\sigma. \end{aligned}$$

Vemos entonces que los polos de $J(s)$ son simples y ocurren cuando $ms = n+p-(\lambda+h) = n+p-\ell$, con $\ell = \lambda + h \geq 0$ un entero. Veremos más adelante que de hecho no hay polo si $n+p-\ell \leq 0$ y $n+p-\ell$ es divisible por m (es decir, no hay polo cuando $s \leq 0$ es un entero).

Calculemos ahora el residuo. Para $s = \frac{n+p-\ell}{m}$, las funciones $J_1(s,w)$ y $N_k(s,w)$ son ambas regulares, esta última para $k = \ell + 1$, por lo tanto sus residuos son cero. Además, por (2.8) y para cada λ, el residuo de $M_\lambda(s,w)$ se obtiene cuando el exponente de w es cero, de donde $h = \ell - \lambda$, luego

$$\operatorname{Res}_{s=\frac{n+p-\ell}{m}} M_\lambda(s,w) \;=\; \frac{1}{m}\int_{\mathcal{O}} A^\lambda_{\ell-\lambda}(\sigma)\, f_m(\sigma)^{-s}\, d\sigma. \tag{2.12}$$

El rango de λ se obtiene considerando $0 \leq h = \ell - \lambda \leq n + (m-1)\lambda$, que $\lambda \geq 0$ y que $\ell = n+p-ms$. Además, si $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ el coeficiente binomial $\binom{-s}{\lambda}$ es no nulo, y sumando sobre λ se obtiene (2.10).

Pasando al valor en enteros $-N \leq 0$, se tiene $\ell = n+p+mN$, y el valor $J(-N)$ se calcula usando la expresión

$$J(-N) \;=\; \lim_{w\to 0^+}\lim_{s\to -N}\left(J_1(s,w) + N_k(s,w) + \sum_{\lambda=0}^{k-1}\binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s,w)\right).$$

Por el Lema 2.5, para $k = \ell+1$ y para todo $w > 0$, se tiene

$$\lim_{s\to -N} N_k(s,w) = 0.$$

Para los valores de $\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,w)$ se consideran dos casos. Para $\lambda > N$, el valor está dado por la fórmula (2.9). Además, el Lema 2.8 implica que son nulos los términos si $N < \lambda < N + \frac{p}{m}$.

La Observación 2.11 implica que para $0 \leq \lambda \leq N$, $\binom{-s}{\lambda}M_\lambda(s,w)$ es regular, ya que el exponente de w es positivo para todo h. Por esto

$$\begin{aligned} \lim_{w\to 0^+}\binom{N}{\lambda} M_\lambda(-N,w) &= 0, \qquad 0 \leq \lambda \leq N, \\ \lim_{w\to 0^+}\lim_{s\to -N} J_1(s,w) &= \lim_{w\to 0^+} J_1(-N,w) \;=\; 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene (2.11). $\square$

Corolario 2.13. ([5]) *Si las partes homogéneas $f_j(x)$ de $f(x)$ son nulas para $l < j < m$, entonces*

$$J(-N) = \frac{1}{m}\sum_{\lambda=\lceil\frac{p}{m}\rceil+N}^{\lfloor\frac{n+p+mN}{m-l}\rfloor} \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda-N}\frac{1}{\binom{\lambda}{N}}\int_{\mathcal{O}} A^\lambda_{\ell-\lambda}(\sigma)\, f_m(\sigma)^N\, d\sigma.$$

Demostración. En este caso las potencias de v que aparecen en $r(v\sigma)$ en vez de comenzar en $v^{n-\lambda}$, comienzan en $v^{n-l\lambda}$ por lo que $A^{\lambda}_{\ell-\lambda}(\sigma) = 0$ si $\lambda > \frac{n+p+mN}{m-l}$. □

También podemos deducir en ciertos casos una versión para integrales de la versión corregida del trabajo de Chen y Eie.

Teorema 2.14. *Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ polinomios, ambos en una o en dos variables, que satisfacen la hipótesis H. Entonces para $g(x) = 1$, se tiene la relación*

$$\big(\deg(\alpha) + \deg(\beta)\big) \cdot J(0; \alpha\beta, 1) = \deg(\alpha) \cdot J(0; \alpha, 1) + \deg(\beta) \cdot J(0; \beta, 1).$$

Demostración. Consideremos primeramente el caso de una variable, es decir, $p = 1$. Por el Teorema 2.12, el valor de la integral para este caso se considera tomando $\mathcal{O} = \{1\}$, el cual es

$$J(0; f, 1) = -\frac{1}{\deg(f)} A^1_0(1; f), \tag{2.13}$$

donde

$$A^1_0(\sigma; f) = \frac{f_{m-1}(\sigma)}{f_m(\sigma)}.$$

Para $f(x) = \alpha(x)\beta(x)$, de grado $m_1 + m_2$, se tiene $f_{m_1+m_2}(\sigma) = \alpha_{m_1}(\sigma)\beta_{m_2}(\sigma)$ y

$$f_{m_1+m_2-1}(\sigma) = \alpha_{m_1}(\sigma)\beta_{m_2-1}(\sigma) + \alpha_{m_1-1}(\sigma)\beta_{m_2}(\sigma),$$

la cual implica

$$A^1_0(\sigma; \alpha\beta) = A^1_0(\sigma; \alpha) + A^1_0(\sigma; \beta),$$

lo que termina la demostración cuando $p = 1$, en vista de (2.13).

Sea ahora $p = 2$. Por el Teorema 2.12, el valor explícito de la integral $J(0; f, 1)$ es

$$\begin{aligned} \deg(f) \cdot J(0; f, 1) &= -\int_{\mathcal{O}} A^1_1(\sigma; f)\, d\sigma + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} A^2_0(\sigma; f)\, d\sigma \\ &= -\int_{\mathcal{O}} \frac{f_{m-2}(\sigma)}{f_m(\sigma)}\, d\sigma + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} \frac{f_{m-1}(\sigma)^2}{f_m(\sigma)^2}\, d\sigma. \end{aligned}$$

Para $f(x) = \alpha(x)\beta(x)$, de grado $m_1 + m_2$, se tienen:

$$\begin{aligned} f_{m_1+m_2-1}(\sigma) &= \alpha_{m_1}(\sigma)\beta_{m_2-1}(\sigma) + \alpha_{m_1-1}(\sigma)\beta_{m_2}(\sigma), \\ f_{m_1+m_2-2}(\sigma) &= \alpha_{m_1}(\sigma)\beta_{m_2-2}(\sigma) + \alpha_{m_1-1}(\sigma)\beta_{m_2-1}(\sigma) + \alpha_{m_1-2}(\sigma)\beta_{m_2}(\sigma), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A^2_0(\sigma; \alpha\beta) &= A^2_0(\sigma; \alpha) + A^2_0(\sigma; \beta) + 2\,\frac{\alpha_{m_1-1}(\sigma)\beta_{m_2-1}(\sigma)}{\alpha_{m_1}(\sigma)\beta_{m_2}(\sigma)}, \\ A^1_1(\sigma; \alpha\beta) &= A^1_1(\sigma; \alpha) + A^1_1(\sigma; \beta) + \frac{\alpha_{m_1-1}(\sigma)\beta_{m_2-1}(\sigma)}{\alpha_{m_1}(\sigma)\beta_{m_2}(\sigma)}. \end{aligned}$$

Finalmente, en la expresión del valor en cero, los coeficientes $A_1^1(\sigma; f)$ y $A_0^2(\sigma; f)$ están antecedidos por factores -1 y $\frac{1}{2}$ respectivamente, lo que concluye la demostración del teorema. $\square$

Capítulo 3

Continuación meromorfa de ciertas series de Dirichlet

Una serie de Dirichlet es una serie de la forma

$$F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, \lambda_j^{-s},$$

en la cual a_j, λ_j y s pertenecen a $\mathbb{C}$, $\lambda_j \neq 0$, y en general, se considera $\Re(s) \gg 0$. La función $F(s)$ se supone analítica en un semiplano derecho. Está implícita una rama del logaritmo para calcular $\lambda_j^{-s} = \exp\big(-s\log(\lambda_j)\big)$.

Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p]$, con f de grado $m > 0$ y g de grado menor o igual a n. Además supondremos que f satisface la hipótesis H. Veremos que

$$Z(s; f, g) := \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^p}{}' g(\omega) f(\omega)^{-s} \tag{3.1}$$

es una serie de Dirichlet absolutamente convergente para $\Re(s) > \frac{n+p}{m}$ que posee una continuación meromorfa a todo el plano s. En este capítulo, nuevamente siguiendo a Mahler [6], se usarán los resultados del capítulo anterior a fin de encontrar valores y residuos de la serie $Z(s; f, g)$. Para poder aplicar tales resultados se usará la

Proposición 3.1 (Fórmula sumatoria de Euler-Maclaurin). *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función K veces continuamente diferenciable con a, b y $K \in \mathbb{N}$, con $a \leq b$. Entonces ([9], pp. 127 - 128)*

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} F(n) &= \int_a^b F(x)\,dx + \frac{F(a)+F(b)}{2} + \sum_{j=1}^{K-1} \frac{b_{j+1}}{(j+1)!}\left(F^{(j)}(b) - F^{(j)}(a)\right) \\ &\quad + \frac{(-1)^{K+1}}{K!}\int_a^b F^{(K)}(x) B_K(x)\,dx, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde b_j es el j-ésimo número de Bernoulli y $B_K(x)$ es la K-ésima función periódica de Bernoulli (extensión periódica del K-ésimo polinomio de Bernoulli con período 1).

Demostración. Recordemos que los polinomios y números de Bernoulli $b_m(x)$ están definidos por

$$\frac{t\,e^{xt}}{e^t-1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x)\frac{t^m}{m!}, \qquad b_m = b_m(0). \tag{3.3}$$

La K-ésima función periódica de Bernoulli se define como

$$B_K(x+1) = B_K(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \qquad B_K(x) = b_K(x) \quad \text{si } 0 \le x < 1.$$

Tenemos la relación para la derivada ([1], pp. 804 - 805)

$$B'_{m+1}(x) = (m+1)B_m(x).$$

Por inducción sobre K: Si $K=1$, sea n tal que $n, n+1 \in [a,b]$. Integrando por partes se obtiene con $B_1(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$,

$$\int_n^{n+1} F(x)\,dx = \frac{F(n+1)+F(n)}{2} - \int_n^{n+1} F'(x)B_1(x)\,dx.$$

Si sumamos sobre n obtenemos

$$\int_a^b F(x)\,dx = \frac{F(a)+F(b)}{2} + \sum_{n=a+1}^{b-1} F(n) - \int_a^b F'(x)B_1(x)\,dx.$$

Sumando $\frac{F(a)+F(b)}{2}$ a ambos lados se obtiene

$$\sum_{n=a}^{b} F(n) = \int_a^b F(x)\,dx + \frac{F(a)+F(b)}{2} + \int_a^b F'(x)B_1(x)\,dx.$$

Supóngase la fórmula cierta para $K = r$. Nuevamente mediante integración por partes, con $u = F^{(r)}(x), dv = B_r(x)\,dx$, se obtiene usando (3.3) y[1] $b_{r+1} = B_{r+1}(0) = B_{r+1}(1)$,

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} F^{(r)}(x)B_r(x)\,dx &= \\ &\frac{b_{r+1}\big(F^{(r)}(n+1) - F^{(r)}(n)\big)}{r+1} - \frac{1}{r+1}\int_n^{n+1} F^{(r+1)}(x)B_{r+1}(x)\,dx,\end{aligned}$$

[1] La siguiente ecuación es válida para $r \ge 1$ ya que $b_r(x) = (-1)^r b_r(1-x)$ y $b_r = 0$ si $r \ge 3$ es impar ([1], pp. 804 - 805).

de donde, sumando sobre n desde a hasta $b-1$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_a^b F^{(r)}(x)B_r(x)\,dx &= \\ &\frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}\left(b_{r+1}\big(F^{(r)}(b)-F^{(r)}(a)\big)-\int_a^b F^{(r+1)}(x)B_{r+1}(x)\,dx\right),\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} F(n) &= \int_a^b F(x)\,dx+\frac{F(a)+F(b)}{2}+\sum_{j=1}^{r-1}\frac{b_{j+1}}{(j+1)!}\big(F^{(j)}(b)-F^{(j)}(a)\big)+ \\ &\frac{(-1)^{r+1}b_{r+1}\big(F^{(r)}(b)-F^{(r)}(a)\big)}{(r+1)!}+\frac{(-1)^{r+2}}{(r+1)!}\int_a^b F^{(r+1)}(x)B_{r+1}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Si r es impar esto demuestra la fórmula para $K=r+1$. Si $r>1$ es par, $b_{r+1}=0$, por lo tanto la fórmula también vale en este caso. □

Necesitaremos una versión en varias variables de la fórmula de Euler-MacLaurin. Para esto es conveniente dar la

Definición 3.2.

$$\sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^p}{}' F(\omega) := \sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^p} 2^{-a(\omega)}F(\omega),$$

donde $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$, *y* $a(\omega)$ *denota el número de índices de* ω *iguales a* 0.

Por ejemplo, si $p=1$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0}{}' F(n)=\frac{1}{2}F(0)+F(1)+F(2)+\ldots=\frac{1}{2}F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}F(n).$$

Si $p=2$,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}{}' F(\omega)=\sum_{m,n=1}^{\infty}F(m,n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}F(0,n)+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}F(m,0)+\frac{1}{4}F(0,0).$$

Observación 3.3. Imponiendo $a=0$, $b\to\infty$, F integrable, $F^{(K)}$ integrable y $\lim_{x\to\infty}F^{(L)}(x)=0$ para todo $L=0,\ldots,K$, la fórmula (3.2) implica

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' F(n) = \int_0^\infty F(x)\,dx-\sum_{L=1}^{K-1}\frac{b_{L+1}}{(L+1)!}F^{(L)}(0)+\frac{(-1)^{K+1}}{K!}\int_0^\infty F^{(K)}(x)\,B_K(x)\,dx, \tag{3.4}$$

donde la suma converge. La igualdad

$$-\frac{b_{L+1}}{(L+1)!}F^{(L)}(0) = \frac{b_{L+1}}{(L+1)!}\int_0^\infty F^{(L+1)}(x)\,dx,$$

permite reducir la fórmula (3.4) a

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' F(n) \;=\; \sum_{L=0}^{K}\int_0^\infty Q_L(x)\,F^{(L')}(x)\,dx, \tag{3.5}$$

donde

$$L' = \begin{cases} L+1 & 1 \le L \le K-1, \\ L & L=0 \text{ ó } L=K, \end{cases}$$

y

$$Q_L(x) = \begin{cases} 1, & L=0, \\ \dfrac{b_{L+1}}{(L+1)!}, & 1 \le L \le K-1, \\ \dfrac{(-1)^{K+1}}{K!}B_K(x), & L=K. \end{cases}$$

Nos concentraremos en series de la forma

$$\sum_{\omega_1,\ldots,\omega_p=0}^{\infty}{}' \; g(\omega)f(\omega)^{-s},$$

aunque frecuentemente nos interesan series de la forma

$$\sum_{\omega\in\mathbb{N}^p} g(\omega)f(\omega)^{-s} = \sum_{\omega_1,\ldots,\omega_p=1}^{\infty} g(\omega)f(\omega)^{-s},$$

o de la forma

$$\sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^p} g(\omega)f(\omega)^{-s} = \sum_{\omega_1,\ldots,\omega_p=0}^{\infty} g(\omega)f(\omega)^{-s}.$$

Afortunadamente, se puede establecer una relación entre estas series y la serie $\sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^p}{}' F(\omega)$. Definamos para $T \subset \{1,2,\ldots,p\}$ y una función $F:\mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ la nueva función $F_T:\mathbb{R}^T \to \mathbb{C}$ mediante

$$F_T(y) = F(y_T), \tag{3.6}$$

donde $(y_T)_j = 0$ si $j \notin T$, $(y_T)_j = y_j$ si $j \in T$. Si T es vacío entendemos por F_T la constante $F(0)$. Entonces

$$\sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^p} F(\omega) = \sum_T 2^{-p+|T|}\sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^T}{}' F_T(\omega), \tag{3.7}$$

donde suponemos que las series de la derecha convergen, la suma recorre todos los subconjuntos propios $T \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ y $|T|$ denota la cardinalidad de T. Si T es vacío se entiende $\sum'_{\omega \in \mathbb{N}_0^T} F_T(\omega) = F(0)$.

Para demostrar esto, tomemos un $\omega \in \mathbb{N}_0^p$ y definamos el conjunto

$$S(\omega) := \{j : \ \omega_j \neq 0, \ 1 \leq j \leq p\}.$$

Al lado izquierdo de (3.7) aparece una vez $F(\omega)$. Al lado derecho aparece $F(\omega)$ exactamente para los T tales que $S(\omega) \subset T$. Aparece con el peso $2^{-p+|T|}$ (por el factor de la primera suma) multiplicado por $2^{-(|T|-|S(\omega)|)}$. Por ende, cada vez que $F(\omega)$ aparece a la derecha, lleva el peso $2^{-p+|S(\omega)|}$. Como hay exactamente $2^{p-|S(\omega)|}$ subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, p\}$ que contienen $S(\omega)$, el peso total es 1, al igual que al lado izquierdo.

Poniendo $K_1 = \ldots = K_p = K$ (donde el valor del entero K se elegirá más adelante), la generalización de (3.5) es

$$\sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^p}{}' F(\omega) = \sum_{L_1=0}^{K} \sum_{L_2=0}^{K} \cdots \sum_{L_p=0}^{K} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^p} \mathcal{Q}_L(x) \frac{\partial^{|L'|} F(x)}{\partial x^{L'}} \, dx, \tag{3.8}$$

en la cual

$$L = (L_1, \ldots, L_p), \quad L' = (L'_1, \ldots, L'_p), \quad |L'| = L'_1 + \cdots + L'_p, \quad \mathcal{Q}_L(x) = \prod_{j=1}^{p} Q_{L_j}(x_j),$$

y todas las integrales se suponen absolutamente convergentes.

Si cada L_i satisface $1 \leq L_i \leq K - 1$, todas las integrales iteradas pueden evaluarse ya que $\mathcal{Q}_L(x)$ es constante, lo que da

$$\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^p} \mathcal{Q}_L(x) \frac{\partial^{|L'|} F(x)}{\partial x_1^{L'_1} \cdots \partial x_p^{L'_p}} \, dx_1 \cdots dx_p = (-1)^p \frac{b_{L+1}}{(L+1)!} \left. \frac{\partial^{|L|} F(x)}{\partial x_1^{L_1} \cdots \partial x_p^{L_p}} \right|_{x=0},$$

donde

$$\frac{b_{L+1}}{(L+1)!} = \prod_{i=1}^{p} \frac{b_{L_i+1}}{(L_i+1)!}.$$

Si L es tal que algún L_j es 0 y $L_i < K$ para todo i, le asociamos $T = \{j : L_j = 0\}$. Sea $\mathcal{L}_T$ el conjunto de índices L asociados a un mismo T. De esta manera, cada L pertenece a un único $\mathcal{L}_T$, y $|\mathcal{L}_T| = (K-1)^{p-|T|}$. Tenemos para $L \in \mathcal{L}_T$

$$\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^p} \mathcal{Q}_L(x) \frac{\partial^{|L'|} F(x)}{\partial x_1^{L'_1} \cdots \partial x_p^{L'_p}} \, dx_1 \cdots dx_p = (-1)^{p-|T|} \mathcal{Q}_L \int_{\mathbb{R}^T} \frac{\partial^{|L|} F_T(y)}{\partial y^L} \, dy,$$

donde (con la notación de (3.6))

$$\frac{\partial^{|L|} F_T(y)}{\partial y^L} := \left(\frac{\partial^{|L|} F(x)}{\partial x^L} \right)_T \quad (\text{con } y \in \mathbb{R}^T), \qquad \mathcal{Q}_{L,T} = \prod_{j \notin T} \frac{b_{L_j+1}}{(L_j+1)!}, \tag{3.9}$$

obteniendo finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^p}{}' F(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^p_{\geq 0}} F(x)\, dx + \sum_T (-1)^{p-|T|} \sum_{L \in \mathcal{L}_T} \mathcal{Q}_{L,T} \int_{\mathbb{R}^T_{\geq 0}} \frac{\partial^{|L|} F_T(y)}{\partial y^L}\, dy + \\ & (-1)^p \sum_{L_1=1}^{K-1} \cdots \sum_{L_p=1}^{K-1} \frac{b_{L+1}}{(L+1)!} \frac{\partial^L F(x)}{\partial x^L}\bigg|_{x=0} + \sum_{\substack{L:\text{algún} \\ L_i=K}} \int_{\mathbb{R}^p_{\geq 0}} \mathcal{Q}_L(x) \frac{\partial^{L'} F(x)}{\partial x^{L'}}\, dx, \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde en la suma sobre T, este recorre todos los subconjuntos propios y no vacíos de $\{1, 2, \ldots, p\}$. En la suma $\sum_{L \in \mathcal{L}_T}$ se recorren todos los p-tuplos $L = (L_1, L_2, \ldots, L_p) \in \mathbb{N}_0^p$ con $L_i < K$ para todo $1 \leq i \leq p$ y $L_i = 0 \Leftrightarrow i \in T$. En la última suma $L \in \mathbb{N}_0^p$ satisface $L_i \leq K$, con igualdad para al menos un índice i.

La anterior puede aplicarse si $F(x)$, con $x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$, es tal que las integrales a la derecha convergen absolutamente, y

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\partial^{|L|} F(x)}{\partial x_1^{L_1} \cdots \partial x_p^{L_p}} = 0, \qquad |L| = 0, 1, \ldots, pK.$$

Lema 3.4. *Sea $L \in \mathbb{N}_0^p$ y $F(x) = g(x) f(x)^{-s}$. Entonces*

$$\frac{\partial^{|L|} F(x)}{\partial x_1^{L_1} \cdots \partial x_p^{L_p}} = \frac{\partial^{|L|} g(x)}{\partial x^L} f(x)^{-s} + \sum_{\nu=1}^{|L|} \binom{-s}{\nu} P_L^{(\nu)}(x)\, f(x)^{-(s+\nu)}, \tag{3.11}$$

donde $P_L^{(\nu)}(x)$ es un polinomio en $x = (x_1, \ldots, x_p)$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado menor o igual a $n + m\nu - |L|$ (si este número es negativo, $P_L^{(\nu)}(x) \equiv 0$).

Demostración. Por inducción sobre el número de derivadas $|L|$:

Si $|L| = 1$, entonces $\partial^{|L|} F / \partial x^L = \partial F / \partial x_i$ para algún i, por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} f(x)^{-s} - s g(x) f(x)^{-(s+1)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} f(x)^{-s} + \binom{-s}{1} P_L^{(1)}(x)\, f(x)^{-(s+1)}, \end{aligned}$$

y

$$P_L^{(1)}(x) = g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \tag{3.12}$$

es un polinomio en x de grado menor o igual a $n+m-1$.

Supóngase que lo anterior vale para $|L| = r \geq 1$. Derivando la expresión

$$\frac{\partial^{|L|}F(x)}{\partial x^L} = \frac{\partial^{|L|}g(x)}{\partial x^L} f(x)^{-s} + \sum_{\nu=1}^{r} \binom{-s}{\nu} P_L^{(\nu)}(x)\, f(x)^{-(s+\nu)},$$

poniendo $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, con el 1 en la coordenada j, se tienen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{|L|}g(x)}{\partial x^L} f(x)^{-s}\right) &= \left(\frac{\partial^{|L|+1}g(x)}{\partial x^{L+e_j}}\right) f(x)^{-s} + \\
&\quad \binom{-s}{1} \frac{\partial^{|L|}g(x)}{\partial x^L} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} f(x)^{-(s+1)}, \\
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_L^{(\nu)}(x)\, f(x)^{-(s+\nu)}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} P_L^{(\nu)}(x)\right) f(x)^{-(s+\nu)} - \\
&\quad (s+\nu)\, P_L^{(\nu)}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} f(x)^{-(s+\nu+1)}, \qquad \nu \geq 1.
\end{aligned}$$

Por tanto se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^{|L|}F}{\partial x^L} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{|L|}g(x)}{\partial x^L} f(x)^{-s} + \sum_{\nu=1}^{r} \binom{-s}{\nu} P_L^{(\nu)}(x)\, f(x)^{-(s+\nu)}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^{|L|+1}g(x)}{\partial x^{L+e_j}}\right) f(x)^{-s} + \sum_{\nu=1}^{r+1} \binom{-s}{\nu} P_{L+e_j}^{(\nu)}(x)\, f(x)^{-(s+\nu)},
\end{aligned}$$

donde

$$P_{L+e_j}^{(\nu)}(s,x) = \begin{cases}
\dfrac{\partial P_L^{(1)}(x)}{\partial x_j} + \dfrac{\partial^{|L|}g(x)}{\partial x^L} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}, & \nu = 1, \\
\dfrac{\partial P_L^{(\nu)}(x)}{\partial x_j} + \nu P_L^{(\nu-1)}(x) \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}, & 2 \leq \nu \leq r, \\
\nu P_L^{(\nu-1)}(x) \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}, & \nu = r+1,
\end{cases}$$

y por hipótesis de inducción, se concluye que $P_{L+e_j}^{(1)}(x), P_{L+e_j}^{(\nu)}(x)$ y $P_{L+e_j}^{(r+1)}(x)$ son de grado menor o igual a $n+m-(r+1), n+m\nu-(r+1)$ y $n+m(r+1)-(r+1)$ en x respectivamente, lo que demuestra la afirmación para $r+1$. □

Observemos que la hipótesis H sobre $f(x)$ implica que su parte homogénea de grado más alto es de la forma

$$f_m(x) = a_1 x_1^m + \ldots + a_p x_p^m + h(x),$$

donde cada $a_i \neq 0$ y $h(x)$ es una suma de monomios mixtos de grado m (h podría ser nula). Esto se demuestra restringiendo $f_m(x)$ al conjunto

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0} : x_i = 0, i \neq j, x_j \neq 0\}$$

y observando que $f(x) \neq 0$ para $x \in S_j$ por la hipótesis H. Por esto, si $T \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ el grado de $f_T(y)$ definido en (3.6) sigue siendo m (en las variables restantes y_j con $j \in T$) y f_T sigue satisfaciendo la hipótesis H (si T no es vacío). Por esto podemos aplicar el Teorema 2.12 del capítulo anterior a cada sumando de la imagen de (3.11) bajo la definición dada en (3.6), es decir,

$$\frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L}\left(g_T(y) f_T(y)^{-s}\right) = \frac{\partial^{|L|} g_T(y)}{\partial y^L} f_T(y)^{-s} + \sum_{\nu=1}^{|L|} \binom{-s}{\nu} P^{(\nu)}_{L,T}(y)\, f_T(y)^{-(s+\nu)}, \quad (3.13)$$

y obtener la siguiente[2]

Proposición 3.5. *Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$, con f de grado $m > 0$ que satisface la hipótesis H y g de grado menor o igual a n. Sea $L \in \mathbb{N}_0^p$ tal que algún $L_i = 0$, y sea $T = \{i : L_i = 0\}$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^T_{\geq 0}} \frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L}\left(g_T(y) f_T(y)^{-s}\right) dy$$

converge para $\Re(s) > \frac{n+|T|-|L|}{m}$ y se extiende a una función de s meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en

$$s = \frac{n + |T| - |L| - \ell}{m}, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, \qquad s \neq 0, -1, -2, \ldots.$$

Su valor en el punto regular $s = 0$ es

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^T_{\geq 0}} \frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L}\left(g_T(y) f_T(y)^{-s}\right) dy\bigg|_{s=0} &= \int_{\mathbb{R}^T_{\geq 0}} \frac{\partial^{|L|} g_T}{\partial y^L}(y) f_T(y)^{-s}\, dy\bigg|_{s=0} \\ &+ \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{|L|} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sum_{\lambda=i_\nu}^{n-|L|+|T|} \binom{-\nu}{\lambda} \int_{\sigma \in \mathcal{O}_T} D_{\lambda,\nu}(\sigma)\, f_{T,m}(\sigma)^{-\nu}\, d\sigma, \quad (3.14) \end{aligned}$$

donde $i_\nu = \max\{\lceil |T|/m \rceil - \nu, 0\}$, $\mathcal{O}_T$ es el primer octante de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^T$, $f_{T,m}$ es la parte homogénea de f_T de grado maximal y $D_{\lambda,\nu}(\sigma)$ es el coeficiente de $v^{m\nu-|T|}$ en $\left(P^{(\nu)}_L r^\lambda\right)_T(v\sigma)$, con r definido en (2.3) y $P^{(\nu)}_L$ definido en (3.11).

---

[2] En la siguiente ecuación es importante recordar que la notación $\frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L}(F_T)$ es una abreviación de $\left(\frac{\partial^{|L|} F}{\partial x^L}(x)\right)_T$ (ver (3.9)).

Demostración. Aplicando a la identidad (3.11) el homomorfismo $F \to F_T$ que lleva funciones con dominio $\mathbb{R}^p$ a funciones con dominio $\mathbb{R}^T$, obtenemos (3.13), donde $P_{L,T}^{(\nu)} = \left(P_L^{(\nu)}\right)_T$. La integral

$$\int_{\mathbb{R}^T_{\geq 0}} \frac{\partial^{|L|} g_T(y)}{\partial y^L} f_T(y)^{-s}\, dy,$$

admite una continuación meromorfa (con polos como se indica en la proposición) por el Teorema 2.12. Para $\nu \geq 1$ fijo, el mismo teorema nos da la convergencia para $\Re(s) > \frac{n-|L|+|T|}{m}$ de

$$G_\nu(s) = G_{\nu,L,T}(s) := \int_{\mathbb{R}^T_{\geq 0}} P_{L,T}^{(\nu)}(y)\, f_T(y)^{-(s+\nu)}\, dy,$$

y su continuación meromorfa en s. Al verificar que $s = 0, -1, -2, \ldots$ son puntos regulares de $\binom{-s}{\nu} G_\nu(s)$ es necesario notar (si $s + \nu > 0$) que el factor $\binom{-s}{\nu}$ cancela el polo proveniente del Teorema 2.12.

Para obtener el valor en $s = 0$ de $\binom{-s}{\nu} G_\nu(s)$, notemos que $G_\nu(s)$ tiene un polo simple en $s = 0$ para $1 \leq \nu < \frac{n-|L|+|T|}{m}$. Llamemos su residuo R_ν. Considerando el factor $\binom{-s}{\nu}$ obtenemos

$$\lim_{s \to 0} \binom{-s}{\nu} G_\nu(s) = \frac{(-1)^\nu}{\nu} R_\nu.$$

Para aplicar el Teorema 2.12 observemos que el grado de $P_{L,T}^{(\nu)}(y)$ es a lo más $n' = n + m\nu - |L|$. Como nos interesa el residuo de G_ν en $s = 0$, resolvemos

$$\nu = \frac{n' + |T| - \ell}{m},$$

lo que da $\ell = n - |L| + |T|$ y

$$R_\nu = \frac{1}{m} \sum_{\lambda = i_\nu}^{n-|L|+|T|} \binom{-\nu}{\lambda} \int_{\sigma \in \mathcal{O}_T} D_{\lambda,\nu}(\sigma)\, f_{T,m}(\sigma)^{-\nu}\, d\sigma, \tag{3.15}$$

Sumando (3.15) sobre ν, se obtiene (3.14). □

La siguiente proposición, aunque casi demasiado obvia, nos será necesaria en la demostración del teorema principal de este capítulo.

Proposición 3.6. *Para $L \in \mathbb{N}^p$ y $x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$,*

$$\frac{\partial^L}{\partial x^L}\left(g(x) f(x)^{-s}\right)$$

es una función entera de s. Su valor en $s = 0$ es

$$\left(\frac{\partial^L}{\partial x^L} \left(g(x) f(x)^{-s} \right) \Big|_{x=0} \right) \Big|_{s=0} = \frac{\partial^{|L|} g(x)}{\partial x^L} \Big|_{x=0}. \tag{3.16}$$

Demostración. Por hipótesis H sobre $f(x)$, la expresión

$$\frac{\partial^L}{\partial x^L} \left(g(x) f(x)^{-s} \right)$$

para cada p-tupla $x \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$ es una función entera de s, pues $f(x) \neq 0$. Para $x = 0$ se tiene

$$\frac{\partial^L}{\partial x^L} \left(g(x) f(x)^{-s} \right) \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{|L|} g(0)}{\partial x^L} f(0)^{-s} + \sum_{\nu=1}^{|L|} \binom{-s}{\nu} P_L^{(\nu)}(0)\, f(0)^{-(s+\nu)},$$

y como el coeficiente binomial $\binom{-s}{\nu}$ es un polinomio en s, evaluando en $s = 0$ se obtiene

$$\left\{ \frac{\partial^{|L|} g(0)}{\partial x^L} f(0)^{-s} + \sum_{\nu=1}^{|L|} \binom{-s}{\nu} P_L^{(\nu)}(0)\, f(0)^{-(s+\nu)} \right\} \Big|_{s=0} = \frac{\partial^{|L|} g}{\partial x^L}(0). \qquad \square$$

Observación 3.7. Si $g(x) = x_1^{M_1} \cdots x_p^{M_p}$, donde cada $M_i > 0$, el lado derecho de (3.16) es nulo salvo para $L = M = (M_1, \ldots, M_p)$, pues:

Si $L_i < M_i$ para algún i, la derivada $\partial^L g(x) = C_L\, x_1^{r_1} \cdots x_p^{r_p}$ es tal que $r_i > 0$, y $\partial^L g(0) = 0$. Si $L_i > M_i$ para algún i, $\partial^L g(x) \equiv 0$, pues se deriva respecto de x_i más veces que el grado de ésta. Finalmente,

$$\sum_{L_1=1}^{K-1} \cdots \sum_{L_p=1}^{K-1} \frac{b_{L+1}}{(L+1)!} \frac{\partial^L F(x)}{\partial x^L} \Big|_{x=0} = \prod_{i=1}^{p} \frac{b_{M_i+1}}{M_i + 1}.$$

Para evaluar los términos de (3.10) en que algún L_i es igual a K, se debe hacer algo distinto. Esto, además, dará un valor mínimo de K a elegir.

Lema 3.8. *Sea L tal que algún $L_j = K$. La integral múltiple*

$$\int_{\mathbb{R}^p_{\geq 0}} \mathcal{Q}_L(x) \frac{\partial^{|L'|} g(x)}{\partial x^{L'}} f(x)^{-s}\, dx$$

donde $|L'|$ se define en (3.8), es convergente para $\Re(s) > \frac{n+p-|L'|}{m}$. Para $K > n$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^p_{\geq 0}} \mathcal{Q}_L(x) \frac{\partial^{|L'|} g(x)}{\partial x^{L'}} f(x)^{-s}\, dx \Big|_{s=0} = 0. \tag{3.17}$$

Demostración. La hipótesis sobre L implica que no todos los $Q_{L_i}(x_i)$ son constantes, pero están acotadas por una constante C_K que no depende de s:

$$|Q_{L_i}(x_i)| \leq C_K.$$

Por otro lado, mediante el cambio a coordenadas "esféricas"(v, σ) dado en 2.2, la desigualdad $p - 1 + (n - |L'|) - m\Re(s) < -1$ da el semiplano de convergencia. La hipótesis sobre L implica $|L'| \geq K > n$, y como $g(x)$ es de grado a lo más n,

$$\frac{\partial^{|L'|} g(x)}{\partial x^{L'}} \equiv 0,$$

por lo tanto, basta tomar $K \geq n + 1$, y la integral es trivialmente nula. □

Lema 3.9. *Sea L tal que algún $L_j = K$. Para $\nu \geq 1$, la integral múltiple*

$$\binom{-s}{\nu} \int_{\mathbb{R}^p_{\geq 0}} \mathcal{Q}_L(x)\, P^{(\nu)}_{L'}(x)\, f(x)^{-(s+\nu)}\, dx$$

donde $|L'|$ se define en (3.8), es convergente para $\Re(s) > \frac{n+p-|L'|}{m}$. Para $K > n+p$ se tiene

$$\binom{-s}{\nu} \int_{\mathbb{R}^p_{\geq 0}} \mathcal{Q}_L(x)\, P^{(\nu)}_{L'}(x)\, f(x)^{-(s+\nu)}\, dx \Bigg|_{s=0} = 0. \tag{3.18}$$

Demostración. Por el lema anterior, los $Q_{L_i}(x_i)$ están acotadas por una constante que no depende de s, y mediante el cambio de variable en 2.2 se obtiene ahora la desigualdad

$$p - 1 + (n + m\nu - |L'|) - m(\Re(s) + \nu) < -1,$$

lo que da el semiplano de convergencia $\Re(s) > \frac{n+p-|L'|}{m}$. Por lo tanto, si $K \geq n+p+1$ la integral es regular en $s = 0$ ya que

$$|L'| \geq |L| \geq L_j = K > n + p.$$

El factor $\binom{-s}{\nu}$ nos da entonces trivialmente el valor 0 en $s = 0$, obteniendo finalmente (3.18). □

Por 3.8 y 3.9 se obtiene entonces:

Proposición 3.10. *Sea K un entero con $K > n + p$ y sea $L \in \mathbb{N}_0^p$ tal que algún $L_i = K$. La integral*

$$\int_{\mathbb{R}^p_{\geq 0}} \mathcal{Q}_L(x)\, \frac{\partial^{|L'|}}{\partial x^{L'}} \left(g(x)\, f(x)^{-s}\right) dx$$

donde $|L'|$ se define en (3.8), es regular para $s = 0$, y su valor en este punto es 0.

Finalmente, los resultados obtenidos en las proposiciones 3.5, 3.6 y 3.10 permiten concluir:

Teorema 3.11. *Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado $m > 0$ en p variables que satisface la hipótesis H, y sea $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en p variables de grado menor o igual a un entero $n \geq 0$. Entonces la función*

$$Z(s; f, g) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^p}{}' g(\omega) f(\omega)^{-s} := \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^p} 2^{-a(\omega)} g(\omega) f(\omega)^{-s},$$

donde $a(\omega)$ denota el número de índices de ω iguales a 0, es convergente para $\Re(s) > \frac{n+p}{m}$, y es una función regular en este dominio. $Z(s; f, g)$ se extiende a todo $\mathbb{C}$ en una función meromorfa, cuyas únicas singularidades son polos simples en los puntos

$$s = \frac{n+p-\ell}{m}, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots, \qquad s \neq 0, -1, -2, \ldots$$

Su valor en $s = 0$ es

$$\begin{aligned} Z(0; f, g) &= (-1)^p \sum_{L_1=1}^{n+p} \cdots \sum_{L_p=1}^{n+p} c_L \frac{\partial^{|L|} g}{\partial x^L}(0) + \left. \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^p} g(x) f(x)^{-s}\, dx \right|_{s=0} \\ &+ \sum_T (-1)^{p-|T|} \sum_{L \in \mathcal{L}_T} \mathcal{Q}_{L,T} \left. \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^T} \frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L} \left(g_T(y) f_T(y)^{-s} \right) dy \right|_{s=0}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde la suma sobre T y $L \in \mathcal{L}_T$ es como en (3.10),

$$c_L := \prod_{j=1}^p \frac{b_{L_j+1}}{(L_j+1)!}, \qquad \mathcal{Q}_{L,T} := \prod_{j \notin T} \frac{b_{L_j+1}}{(L_j+1)!},$$

la integral sobre $\mathbb{R}_{\geq 0}^p$ fue calculada en el Teorema 2.12 y las integrales sobre $\mathbb{R}_{\geq 0}^T$ en la Proposición 3.5.

Demostración. Fijemos un entero $K \geq 1$. Usando el Teorema 2.12, los lemas 3.4, 3.8, 3.9, y las proposiciones 3.5 y 3.6, vemos en (3.10) con $F(x) = g(x) f(x)^{-s}$, que todos los términos tienen una extensión meromorfa al semiplano $\Re(s) > \frac{n+p-K}{m}$, con a lo más polos simples en $s = \frac{n+p-\ell}{m}$, $s \neq 0, -1, -2, \ldots$. Como $K \gg 0$ es arbitrario, obtenemos la continuación meromorfa a $\mathbb{C}$.

Para $F(x) = g(x) f(x)^{-s}$ en (3.10), fijemos $K \geq n + p + 1$. Esto nos permite evaluar $Z(0; f, g)$ como suma de los 4 tipos de términos del lado derecho. El término $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^p} F(x)\, dx$ aparece sin cambios en (3.19). Lo mismo vale para los términos del tipo $\int_{\mathbb{R}^T} \frac{\partial^{|L|} F_T(y)}{\partial y^L}\, dy$. Los términos $\frac{b_{L+1}}{(L+1)!} \frac{\partial^L F(x)}{\partial x^L}\Big|_{x=0}$ están dados por la Proposición 3.6. Por último, los términos $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^p} \mathcal{Q}_L(x) \frac{\partial^{L'} F(x)}{\partial x^{L'}}\, dx$ son todos nulos en $s = 0$ por la Proposición 3.10. $\square$

El Teorema 3.11 se refiere a series del tipo

$$\sum_{\omega_1,\dots,\omega_p=0}^{\infty}{}' g(\omega)f(\omega)^{-s},$$

aunque también nos interesan series de la forma

$$\sum_{\omega\in\mathbb{N}^p} g(\omega)f(\omega)^{-s} = \sum_{\omega_1,\dots,\omega_p=1}^{\infty} g(\omega)f(\omega)^{-s},$$

y también

$$\sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^p} g(\omega)f(\omega)^{-s} = \sum_{\omega_1,\dots,\omega_p=0}^{\infty} g(\omega)f(\omega)^{-s}.$$

La relación (3.7) demuestra que la primera parte del Teorema 3.11 vale sin cambios para series de Dirichlet del tipo $\sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^p} g(\omega)f(\omega)^{-s}$. El valor en $s=0$, naturalmente, tiene una expresión algo distinta.

Series de la forma $\sum_{\omega\in\mathbb{N}^p} g(\omega)f(\omega)^{-s}$ se reducen a $\sum_{\omega\in\mathbb{N}_0^p} \tilde{g}(\omega)\tilde{f}(\omega)^{-s}$ poniendo

$$\tilde{f}(x_1,\dots,x_p) = f(x_1+1,\dots,x_p+1), \qquad \tilde{g}(x_1,\dots,x_p) = g(x_1+1,\dots,x_p+1),$$

notando que $\tilde{f}$ satisface la hipótesis H si f lo hace.

Capítulo 4

Valores en $s = 0$, $p = 1$ y $p = 2$

En este capítulo usaremos los resultados de los capítulos anteriores para demostrar algunos casos de nuestra corrección conjetural del trabajo de Chen y Eie (ver Introducción) respecto del valor en $s = 0$ de

$$Z(s; f, g) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^p}{}' g(\omega) f(\omega)^{-s}.$$

Teorema 4.1. *Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ polinomios, ambos en una o en dos variables, que satisfacen la hipótesis H. Entonces para $g(x) = 1$, se tiene la relación*

$$\big(\deg(\alpha) + \deg(\beta)\big)\, Z(0; \alpha\beta, 1) = \deg(\alpha)\, Z(0; \alpha, 1) + \deg(\beta)\, Z(0; \beta, 1).$$

Demostración. Consideremos primero el caso de polinomios en una variable ($p = 1$). El Teorema 3.11 con $p = 1$ y $n = 0$ da $Z(0; f, 1) = J(0; f, 1)$ ya que dos de las tres sumas son vacías (recordemos que T recorre los subconjuntos propios y no vacíos de $\{1, 2, \ldots p\}$ y que $J(s; f, g)$ está definido en el Teorema 2.12). El Teorema 2.14 concluye la demostración para el caso $p = 1$.

Si aplicamos el mismo esquema al caso $p = 2$, sólo es trivialmente nulo el primer término. El Teorema 2.14 muestra que el término $\int_{\mathbb{R}^2_{\geq 0}} f(x)^{-s}\, dx$ tiene la relación correcta entre los casos $f = \alpha\beta$ y $f = \alpha$ o $f = \beta$. Quedan sólo dos términos por considerar: $L = (1, 0)$, $T = \{2\}$ y $L = (0, 1)$, $T = \{1\}$. El siguiente cálculo permite terminar la demostración. $\square$

Proposición 4.2. *Sean α, β polinomios en dos variables que satisfacen la hipótesis H. Entonces para $T = \{1\}$ ó $T = \{2\}$*

$$\big(\deg(\alpha) + \deg(\beta)\big) \int_0^\infty \frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L} \big(\alpha_T(y)^{-s} \beta_T(y)^{-s}\big)\, dy \bigg|_{s=0} =$$
$$\deg(\alpha) \int_0^\infty \frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L} \big(\alpha_T(y)^{-s}\big)\, dy \bigg|_{s=0} + \deg(\beta) \int_0^\infty \frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L} \big(\beta_T(y)^{-s}\big)\, dy \bigg|_{s=0}.$$

Demostración. Haremos sólo el caso $L = (1,0)$, $T = \{2\}$, ya que el otro es idéntico si se invierte el orden de las variables. En (3.14) la primera suma es nula pues involucra derivadas de $g(x) = 1$. Como $|T| = 1 = |L|$ y $n = 0$, sólo aparece el término con $\nu = 1$ y $\lambda = 0$. Como $\mathcal{O}_T = \{1\}$, el valor en cero de la "integral"sobre $\sigma \in \mathcal{O}_T = \{1\}$ en (3.14) es su valor en $\sigma = 1$. Por lo tanto tenemos

$$-\deg(f) \int_0^\infty \frac{\partial^{|L|}}{\partial y^L}\left(f_T(y)^{-s}\right) dy \bigg|_{s=0} = \frac{D(f)}{f_{T,m}(1)}, \tag{4.1}$$

donde $D(f) = D_{0,1}(1)$ es el coeficiente de x_2^{m-1} en (el polinomio en una variable x_2)

$$P_{L,T}^{(1)}(x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0},$$

$\big($ver (3.12)$\big)$. Pongamos $m_1 = \deg(\alpha)$ y $m_2 = \deg(\beta)$. Para $f(x) = \alpha(x)\beta(x)$, de grado $m_1 + m_2$, se tiene por lo tanto (sencillamente por la regla de Leibnitz)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} \cdot \beta(0, x_2) + \frac{\partial \beta}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} \cdot \alpha(0, x_2).$$

Tomando el coeficiente de grado (maximal) $m_1 + m_2 - 1$ en x_2, se tiene[1]

$$D(\alpha\beta) = D(\alpha)\beta_{m_2}(0,1) + D(\beta)\alpha_{m_1}(0,1).$$

Finalmente,

$$\frac{D(\alpha\beta)}{f_{m_1+m_2}(0,1)} = \frac{D(\alpha) \cdot \beta_{m_2}(0,1) + D(\beta) \cdot \alpha_{m_1}(0,1)}{\beta_{m_2}(0,1)\alpha_{m_1}(0,1)} = \frac{D(\alpha)}{\alpha_{m_1}(0,1)} + \frac{D(\beta)}{\beta_{m_2}(0,1)}$$

lo que termina la demostración de la Proposición en vista de (4.1). $\square$

Aunque el Teorema 4.1 se refiere a sumas $\sum'$, es fácil extenderlo a otro tipo de sumas. Pongamos

$$Z_{\mathbb{N}}(s; f, g) := \sum_{\omega \in \mathbb{N}^p} g(\omega) f(\omega)^{-s}.$$

y

$$Z_{\mathbb{N}_0}(s; f, g) := \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^p} g(\omega) f(\omega)^{-s}.$$

Corolario 4.3. *Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ polinomios, ambos en una o en dos variables, que satisfacen la hipótesis H. Entonces para $g(x) = 1$, se tienen las relaciones*

$$\big(\deg(\alpha) + \deg(\beta)\big)\, Z_{\mathbb{N}}(0; \alpha\beta, 1) = \deg(\alpha)\, Z_{\mathbb{N}}(0; \alpha, 1) + \deg(\beta)\, Z_{\mathbb{N}}(0; \beta, 1)$$

y

$$\big(\deg(\alpha) + \deg(\beta)\big)\, Z_{\mathbb{N}_0}(0; \alpha\beta, 1) = \deg(\alpha)\, Z_{\mathbb{N}_0}(0; \alpha, 1) + \deg(\beta)\, Z_{\mathbb{N}_0}(0; \beta, 1).$$

[1] Aquí se usa la hipótesis H y la observación hecha antes de la Proposición 3.5.

Demostración. La igualdad para $Z_{\mathbb{N}_0}$ es una consecuencia inmediata del Teorema 4.1, la identidad (3.7) y de la observación hecha antes de la Proposición 3.5. Para $Z_{\mathbb{N}}$ basta con usar la identidad recién demostrada junto a la observación al final del capítulo anterior y $\widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$. $\square$

Bibliografía

[1] M. Abramowitz e I. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, 9a. ed., Dover, 1972.

[2] Pi. Cassou - Noguès, *Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées a un polynôme, I*, Journal of Number Theory, **14** (1982), 32 - 64.

[3] Pi. Cassou - Noguès, *Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées a un polynôme, II*, American Journal of Math., **106** (1984), 255 - 299.

[4] K. Chen y M. Eie, *A theorem on zeta functions associated with polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., **351** (1999), 3217 - 3228.

[5] F. Díaz y Díaz y E. Friedman, *Finite products of regularized products*, Mathematical Research Letters, **15** (2008), 33 - 41.

[6] K. Mahler, *Über einen Satz von Mellin*, Mathematische Annalen, **100** (1928), 384 - 398.

[7] A. N. Parshin e I. R. Shafarevich (eds.), *Number Theory II*, 1a. ed., Springer - Verlag, 1992.

[8] T. Shintani, *On values at s=1 of certain L functions of totally real algebraic number fields*, en: S. Inayaga (ed.), Algebraic Number Theory, Papers contributed for the Intenational Simposium, Kyoto, 1976, Japan Society for Promotion of Science, 1977, 201 - 212.

[9] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis*, 4ta. ed., Cambridge University Press, 1963.