PLANOS DE TRASLACIONES DE ORDEN 7^2 QUE ADMITEN UN GRUPO DE HOMOLOGIAS AFINES DE ORDEN 8

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

MARIA CECILIA PLANAS VERGARA

Patrocinante: Dr. Rolando Pomareda R.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N

T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

MARIA CECILIA PLANAS VERGARA

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Dr. Rolando Pomareda R.

Comisión Informante de Tesis

Dr. Oscar Barriga B.

Dr. Rodrigo Bamón C.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

En [5], Pomareda da algunas condiciones generales que permiten construir abanicos parciales que definen planos de traslación de orden q^2 (q potencia de un primo impar) que admiten un grupo de homologías afines de orden $q + 1$, de manera que una de sus órbitas de componentes determina un régulo en $PG(3,q)$.

En el presente trabajo, consideramos el caso $q = 7$ y siguiendo la técnica desarrollada en [5], probamos (Capítulo II) el siguiente resultado: "Existen salvo isomorfismo y/o derivación simple o múltiple, 4 planos de traslaciones de orden 7^2 y núcleo $GF(7)$ que admiten un grupo de homologías afines de orden 8, de manera que una de sus órbitas de componentes define un régulo en $PG(3,7)$, uno de estos planos es el plano desarguesiano.

En el Capítulo III describimos algunas propiedades de los abanicos que nos permitirán, en los Capítulos IV, V, VI dar información acerca de los grupos de colineaciones de estos planos.

En los dos casos se describe totalmente el grupo de colineaciones, plano Π_1 y plano Π_3 (Capítulo IV y VI). Estos grupos son pequeños (orden $2^7 \cdot 3$) y tienen, respectivamente 6 y 7 órbitas sobre ℓ_∞ .

El caso Π_2 es el más interesante en el sentido que admite un grupo de homologías cíclicas de orden 64 y puede ser obtenido del plano desarguesiano, por medio de un reemplazo de un nido de régulos (Capítulo V).

C A P I T U L O   I

ALGUNAS NOCIONES BASICAS SOBRE PLANOS DE TRASLACIONES

DEFINICION 1.1. Un plano finito de traslación Π es un espacio vectorial V de dimensión $2r$ $(r > 0)$ sobre un cuerpo $E \cong GF(q)$ $(q = p^e$, p primo, e entero) junto con una colección $\mathcal{S}$ de subespacios de dimensión r, que tienen dos a dos intersección trivial y que cubren V. La colección $\mathcal{S}$ se llama abanico y los elementos de $\mathcal{S}$ son las componentes de Π (o de $\mathcal{S}$). El mayor cuerpo L con $E \subset L$ sobre el cual cada elemento de $\mathcal{S}$ es un L-subespacio se llama el núcleo de Π. El plano Π se dice de dimensión k sobre el núcleo L si el espacio vectorial asociado es de dimensión $2k$. Un plano de traslación Π con abanico $\mathcal{S}$ lo anotamos por $\Pi(V,\mathcal{S})$ ó $\Pi(\mathcal{S})$.

NOTA 1.2. Si $\Pi(V,\mathcal{S})$ es un plano de traslación entonces Π es un plano afín, definiendo los puntos de Π como los vectores de V y las rectas como los subconjuntos $\{v + S \,/\, v \in V\}$ para cada $S \in \mathcal{S}$.

PROPOSICION 1.2. Sea $\mathcal{S}$ un abanico en un plano de traslación Π. Sean R_1, R_2, R_3 tres elementos distintos en $\mathcal{S}$. Entonces se puede escoger una base de V tal que

$$R_1 = \{(0,0, \ldots, 0 , y_1,y_2, \ldots, y_r) / y_i \in GF(q) \ , \ i = 1, \ldots, r\} .$$

$$R_2 = \{(x_1,x_2, \ldots, x_r , 0,0, \ldots, 0) / x_i \in GF(q) \ , \ i = 1, \ldots, r\} .$$

$$R_3 = \{(x_1,x_2, \ldots, x_r , x_1,x_2, \ldots, x_r) / x_i \in GF(q) \ , \ i = 1, \ldots, r\} .$$

Más aún, si $R_4 \in S - \{R_1,R_2,R_3\}$ entonces

$$R_4 = \{(x_1, \ldots, x_r , (x_1, \ldots, x_r)M) / x_i \in GF(q) \ , \ i = 1, \ldots, r\}$$

donde M es una matriz de $r \times r$, no singular, con coeficientes en $GF(q)$. Finalmente si

$$Q = \{(z_1, \ldots, z_r, (z_1, \ldots, z_r)N / z_i \in GF(q) \ , \ i = 1, \ldots, r\}$$

es otra componente de S , con $N \in GL(r,q)$ y $M \neq N$, entonces $M - N$ es no singular.

NOTACION 1.4. Anotaremos por X al vector $(x_1, \ldots, x_r)$ y por Y a $(y_1, \ldots, y_r)$. Por $(X = 0)$ a R_1 , por $(Y = 0)$ a R_2 , por $(Y = X)$ a R_3 y por $(Y = XM)$ a R_4 . De esta forma el abanico

$$S = \{(X = 0) \ , \ (Y = 0) \ , \ (Y = XM_i) \quad i = 1, \ldots, q^r - 1\}$$

donde M_i son matrices de $r \times r$, no singulares y $M_i - M_j$ no singular $\forall \ i \neq j$.

<u>Demostración de 1.3</u>. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de R_2 y sea $\{w_1, \ldots, w_r\}$ base de R_1 . Entonces $\{v_1, \ldots, v_r,w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de V . Respecto a esta base, un vector $(x_1,x_2, \ldots, x_r,y_1, \ldots, y_r) \in$ $\in R_1$ sí y sólo si $x_1 = x_2 \ldots = x_r = 0$.

También $(x_1,x_2, \ldots, x_r,y_1, \ldots, y_r) \in R_2$ sí y sólo si $y_1 = y_2 = \ldots = = y_r = 0$.

Afirmamos que si $(x_1,x_2, \ldots, x_r,y_1, \ldots, y_r) \in R_3$ entonces $(y_1,y_2, \ldots, y_r)$ es una función lineal de $x_1, \ldots, x_r$. Para ello notemos que si $(x_1, \ldots, x_r,y_1, \ldots, y_r)$ y $(x_1,x_2, \ldots, x_r,z_1,z_2, \ldots, z_r)$ están en R_3 , entonces $(0,0, \ldots, 0,y_1 - z_1, \ldots, y_r - z_r) \in R_1 \cap R_3 = \{0\}$, de donde $y_i = z_i \quad \forall i = 1, \ldots, r$. Luego $(y_1, \ldots, y_r) = f((x_1, \ldots, x_r))$. Un argumento similar prueba que f es GF(q)-lineal biyectiva.

Sea $f((x_1,x_2, \ldots, x_r)) = (x_1,x_2, \ldots, x_r)M$ para una cierta matriz no singular M . Si cambiamos de base mediante la transformación $\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & M^{-1} \end{array}\right]$ entonces R_3 es $(Y = X)$.

Sea $R_4 \in \mathcal{S} - \{R_1,R_2,R_3\}$ entonces R_4 es $(Y = XN)$, para una cierta matriz N . Por último si $(Y = XR) \neq (Y = XS)$ son componentes de $\mathcal{S}$ entonces $R - S$ es no singular, ya que si

$$\begin{aligned} v(R - S) = 0 &\Rightarrow vR = vS \\ &\Rightarrow (v,vR) = (v,vS) \in (Y = XR) \cap (Y = XS) = \{0\} \\ &\Rightarrow v = 0 . \end{aligned}$$

NOTA 1.5. El recíproco de (1.3) es también válido, es decir, si $\mathcal{M}$ es una colección de matrices de $r \times r$ con coeficientes en GF(q) tales que

(1) $|\mathcal{M}| = q^r + 1$

(2) $0,I \in \mathcal{M}$, donde 0 es la matriz nula, I la matriz identidad.

(3) Si $R,S \in \mathcal{M}$, entonces $R - S = 0$ ó $R - S$ es no singular.

Entonces podemos construir un plano de traslación mediante el abanico

$$\mathcal{S} = \{((x_1,x_2, \ldots, x_r),(x_1, \ldots, x_r)M) \ / \ M \in \mathcal{M} \ , \ x_i \in GF(q) \ , \ i = 1, \ldots, r\}$$

$$\cup \ \{(0,0, \ldots, 0,y_1, \ldots, y_r) \ / \ y_i \in GF(q) \ , \ i = 1, \ldots, r\} \ .$$

DEFINICION 1.6. Una colineación de un plano de traslación Π es una colineación del plano afin Π, es decir, es una biyección entre los puntos de Π y de las rectas de Π que respeta la incidencia.

Con la notación de (1.4) el grupo

$$T = \{T_{a,b} \ : \ (x,y) \rightarrow (x,y) + (a,b) \ / \ (a,b) \in V\}$$

es un grupo de colineaciones de Π llamado grupo de traslaciones de Π.

Si $\mathrm{Aut}(\Pi)$ denota el grupo de todas las colineaciones de Π, entonces se puede probar [3, Cap. I] que $\mathrm{Aut}(\Pi) = G_o T$, donde G_o es un subgrupo de $\Gamma L(2r,q)$ que fija al abanico $\mathcal{S}$, donde $\Gamma L(2r,q)$ denota al grupo de transformaciones semi lineales de un espacio de dim $2r$ sobre $GF(q)$.

G_o se llama el complemento de traslación de Π y $G_o \cap GL(2r,q)$ se llama el complemento de traslación lineal de Π. El grupo T de traslaciones de Π es un p-grupo abeliano elemental de orden q^{2r}.

NOTA 1.7. Si una colineación α de Π está en el complemento de traslación de Π, entonces α induce una permutación entre las componentes de Π, esto es, $\forall \ M \in \mathcal{S}$, $(Y = XM)^{\alpha} \in \mathcal{S}$.

DEFINICION 1.8. Con la notación de (1.4), el orden de Π es q^r , y Π se dice que es de dimensión r sobre $GF(q)$.

Podemos extender el plano afín Π a un plano proyectivo. Usaremos la notación ℓ_∞ para la recta en el infinito de Π .

Una homología de Π es una homología del plano proyectivo asociado, esto es, una colineación que fija todos los puntos de una recta ℓ y todas las rectas que pasan por un punto $P \notin \ell$. La recta ℓ es el eje de la homología y el punto P es el centro.

NOTA 1.9. Con la notación de (1.4), se puede probar que el grupo

$$\tilde{K} = \left\{ (X,Y) \to (X,Y) \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in GF(q) \right\}$$

es el grupo de homologías de eje ℓ_∞ y centro $(0,0)$.

NOTA 1.10. Si α es una homología de eje afín en un plano de traslación Π , ya que el grupo de traslaciones actúa transitivamente sobre los puntos afines de Π , podemos suponer que el eje de α es una componente de Π .

DEFINICION 1.11. Si α es una homología en el complemento lineal de traslación de Π , la componente que pasa por el centro de α se denomina el coeje de α .

DEFINICION 1.12. Sea Σ el espacio proyectivo de dimensión 3 sobre el cuerpo $GF(q)$. Sean a,b,c tres rectas disjuntas de Σ . Por cualquier punto de a pasa exactamente una recta que corta a b y c . Tal recta es llamada una transversal a a,b y c . Hay exactamente $q + 1$ transversales a cualquier trio de rectas distintas y ellas son mutuamente disjuntas. Sean

a', b', c' tres transversales a a, b y c. El conjunto R de transversales a a', b' y c' el cual incluye a las rectas a, b y c es independiente de la elección de a', b' y c' y se llama el <u>régulo</u> determinado por a, b y c.

NOTA 1.13. Se puede probar que el mismo régulo es determinado por cualesquiera tres de sus rectas, más aún, el conjunto de transversales a cualquier trío de rectas de R es independiente de la particular elección de las tres rectas de R y forma un régulo R', llamado el <u>régulo opuesto a</u> R.

DEFINICION 1.14. Sea Σ el espacio proyectivo de dim 3 sobre el cuerpo $GF(q)$. Un abanico W en Σ es un conjunto de $q^2 + 1$ rectas de Σ que son tales que cada punto de Σ está sobre exactamente una recta de W.

OBSERVACION 1.15. Si Π es un plano de traslación de orden q^2 definido por un abanico $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}$ determina en $\Sigma = PG(3,q)$ un abanico en el sentido de (1.14).

DEFINICION 1.16. Sea $\mathcal{S}$ un abanico en $\Sigma = PG(3,q)$ con la propiedad que $\mathcal{S}$ contiene un conjunto de $q - 1$ régulos disjuntos. Entonces $\mathcal{S}$ da origen a una clase de abanicos en Σ que incluye al mismo $\mathcal{S}$ y a los abanicos obtenidos de $\mathcal{S}$, por reemplazo de cada régulo R_i en cualquier subconjunto de régulos disjuntos, por su régulo opuesto R_i'. Nos referiremos a cualesquiera de dos abanicos en esta clase como "<u>obtenidos por reemplazo</u>".

OBSERVACION 1.17. Estudiaremos aquellos abanicos que satisfacen (1.16) y que dan origen a planos de traslaciones de orden $q^2 = 7^2$ los cuales admiten grupos de homologías afines de orden 8 y cuyas órbitas no triviales sobre los abanicos asociados son régulos. Este es el caso del plano desarguesiano y de los planos de Hall. Estos planos son obtenidos por reemplazo.

C A P I T U L O   II

PLANOS DE TRASLACIONES DE ORDEN 49 QUE ADMITEN UN GRUPO DE HOMOLOGIAS DE ORDEN 8

OBSERVACION 2.1. En [5] Pomareda considera la siguiente situación general: Π un plano de traslación de orden q^2 (q impar) cuyo núcleo contiene a $GF(q)$. Si Π admite un grupo de homologías G en el complemento lineal de traslación de orden $q + 1$, con eje $\mathcal{H}$, de modo que una de sus G-órbitas de componentes define un régulo en $PG(3,q)$ entonces se tienen los siguientes resultados:

(1) G es un grupo cíclico.

(2) Existe una coordenatización tal que los elementos de G tienen la forma $\begin{bmatrix} I - MC & hc \\ C & I - MC \end{bmatrix}$ donde h es un no cuadrado fijo en $GF(q)$, M es una matriz de 2×2 que define el eje de la homología y $C = 0$ ó $C = (M + \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in GF(q)$. Más aún se puede elegir $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h & 0 \end{bmatrix}$ y

(3) Cada G-órbita de componentes de Π define una red derivable, en

particular, si q es primo, cada G-órbita de componentes define un régulo en $PG(3,q)$.

(4) Usando la coordenatización de (2), existen funciones f,g definidas en $GF(q)$ tales que, para cada $a \in GF(q)$ la matriz $\begin{bmatrix} 0 & a \\ f(a) & g(a) \end{bmatrix}$ determina una componente de Π .

(5) Las funciones f y g de (4) satisfacen las siguientes condiciones

(i) f es una biyección en $GF(q)$.

(ii) $f(x) = hx$, para $x = 0, 1, -1$ y $f(x^{-1})f(x) = h^2 \quad \forall\, x \neq 0$.

(iii) $g(0) = g(1) = g(-1) = 0$ y $g(x^{-1}) = -\dfrac{hg(x)}{xf(x)} \quad \forall\, x \neq 0$

(iv) $\{g(x)[f(y) + h](y - 1) - g(y)[f(x) + h](x - 1)\}^2 +$ $+ 4(x - y)[f(x) - f(y)](1 - xy)[h^2 - f(x)f(y)]$ es un no cuadrado en $GF(q)$, para cada x,y , $x \neq y,y^{-1}$ en particular: $g^2(x) + 4xf(x)$ es un no cuadrado en $GF(q)$, $\forall\, x,y$, $x \neq y,y^{-1}$.

(v) La colección de las G-órbitas de las componentes determinadas por $\begin{bmatrix} 0 & a \\ f(a) & g(a) \end{bmatrix}$ definen un abanico parcial Π_o .

Si Π y Π^1 son planos de traslaciones construidas a partir de Π_o y si en cada uno de ellos las G-órbitas de componentes definen régulos en $PG(3,q)$, entonces Π y Π^1 son obtenidos uno del otro, por reemplazo.

(vi) Cualquier no cuadrado $h \in GF(q)$ puede ser usado para describir el abanico parcial Π_o , en el sentido que los planos así construídos son isomorfos.

(Ver [5] Teoremas (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7)).

2.2. El caso $q = 7$.

Sea Π un plano de traslación de orden 49 el cual admite un grupo de homologías G de orden 8 , una de cuyas órbitas de componentes define un régulo en $PG(3,7)$. Entonces por (2.1) G es un grupo cíclico y cada G-órbita de componentes es una red derivable, y de aquí, cada G-órbita define un régulo en $PG(3,7)$.

En lo que sigue, fijaremos el no cuadrado $h = -1$ en $GF(7)$.

PROPOSICION 2.3. Existen exactamente 8 funciones f definidas en $GF(7)$ que satisfacen las condiciones de (2.1).

<u>Demostración</u>: De las condiciones (i), (ii) de (2.1), (5); nos basta definir $f(2)$ y $f(3)$. Así, $f(2) \in \{2,3,4,5\}$ y entonces $f(3) \in \{2,3,4,5\} - \{f(2),f(4)\}$. Obtenemos de esa forma 8 funciones f las cuales están dadas por:

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x) &= 6x \\
f_2(x) &= 3x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 3x \\
f_3(x) &= 3x^5 + 3x^4 + 4x^2 + 3x \\
f_4(x) &= 6x^5 \\
f_5(x) &= 4x^5 + 4x^3 + 5x \\
f_6(x) &= x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x \\
f_7(x) &= x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x \\
f_8(x) &= x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x
\end{aligned}\right\}$$

Estas expresiones se obtienen del cuadrado de valores de las $f_i(x)$, aplicando la fórmula de Lagrange.

NOTA 2.4. Para $a \in GF(7)$, $a \neq 0$, sea R'_a el régulo opuesto al régulo R_a definido por la G-órbita de la componente $Y = X\begin{bmatrix} 0 & a \\ f(a) & g(a) \end{bmatrix}$. Entonces R'_a es la G-órbita de la componente $Y = X\begin{bmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{f(a)} & -\frac{g(a)}{f(a)} \end{bmatrix}$ de un plano obtenido de Π por reemplazo (de R_a por R'_a) .

- Para $f_1(x) = 6x$.

  Primeramente si reemplazamos solamente el régulo R_2 por R'_2 obtenemos un abanico parcial definido por la G-órbita de las componentes

  $\begin{bmatrix} 0 & a \\ f_2(a) & \tilde{g}_2(a) \end{bmatrix}$ $\tilde{g}_2$ es una función que satisface 2.1.4.

  Igualmente si reemplazamos sólo R_3 por R'_3 obtenemos las componentes

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ f_3(a) & \tilde{g}_3(a) \end{bmatrix} .$$

  Finalmente si reemplazamos tanto R_2 como R_3 obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ f_4(a) & \tilde{g}_4(a) \end{bmatrix}$$

- Si procedemos en igual forma con $f_5(x) = 4x^5 + 4x^3 + 5x$ obtenemos consecuentemente

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ f_6 & \tilde{g}_6(a) \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 0 & a \\ f_7(a) & \tilde{g}_7(a) \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & a \\ f_8(a) & \tilde{g}_8(a) \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Podemos quedarnos sólo con

$$f(x) = 6x \quad \text{y} \quad f(x) = 4x^5 + 4x^3 + 5x .$$

PROPOSICION 2.5.

(a) Para $f(x) = 6x$ existen dos funciones g_i^1, definidas en $GF(7)$, que satisfacen (2.1.5) y están dadas por

$$g_1^1(x) = 0 \quad y \quad g_2^{(1)}(x) = 6x^6 + 6x^5 + x^3 + x^2 .$$

(b) Para $f(x) = 4x^5 + 4x^3 + 5x$, existen dos funciones $g_i^{(2)}$ que satisfacen (2.1.5) dadas por

$$g_1^{(2)}(x) = 3x^6 + 5x^5 + x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x$$

$$g_2^{(2)}(x) = x^6 + 5x^4 + x^2 .$$

Demostración: (1) $f(x) = 6x$. Sea g una función como en (2.1), entonces $g(0) = g(1) = g(-1) = 0$ y

$$g(x^{-1}) = \frac{g(x)}{xf(x)} \qquad \forall\, x \neq 0 .$$

Nos basta definir, en nuestro caso $g(2)$ y $g(3)$ con la condición dada en (2.1), de donde obtenemos que $g(2) \in \{0,1,-1\}$ y $g(3) \in \{0,2,-2\}$. Pero si verificamos la condición (2.1.5) nos quedamos solo con

$$\left.\begin{array}{l} g_1^1(2) = 0 \\ g_1^{(1)}(3) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_2^{(1)}(2) = 0 \\ g_2^{(1)}(3) = 2 \end{array}\right\}$$

Aplicando la fórmula de Lagrange obtenemos para

$$g_1^1(x) = 0$$

y

$$g_2^{(1)}(x) = 6x^6 + 6x^5 + x^3 + x^2 .$$

NOTA 2.6. Por medio de cálculos elementales, completamos en cada uno de los casos anteriores los cuatro abanicos parciales definidos por los pares de funciones f_i y $g_j^{(i)}$, $i = 1,2$, $j = 1,2$. Para

$$f(x) = 6x \qquad g_1^{(1)}(x) = 0 .$$

Este abanico está definido por el conjunto de matrices $\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} a,b \in GF(7) \right\}$, y es el abanico asociado al plano desarguesiano.

En los otros tres casos, solamente mostraremos las matrices que definen las G-órbitas de componentes diferentes de la G-órbita de la componente $x = 0$.

<u>Caso 1:</u> $f(a) = 6a$

$$g(a) = 6a^6 + 6a^5 + a^3 + a^2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Este abanico está definido por las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ \phi_1(a,b) & \psi_1(a,b) \end{bmatrix}$,
$a,b \in GF(7)$, donde

$$\phi_1(a,b) = a^6(5b + 2b^2 + 6b^3 + 5b^4 + 5b^5) + a^5(6b + 3b^2 + 4b^3 + 5b^4 + 6b^5) + $$
$$+ a^4(b + 2b^2 + 2b^3 + 3b^4 + 5b^5) + a^3(4b + 2b^2 + 5b^3 + b^4 + 4b^5) + $$
$$+ a^2(b + 4b^2 + b^3 + 3b^4 + 5b^5) + a(3b + 2b^2 + 4b^3 + 6b^4 + 6b^3) + 6b$$

$$\psi_1(a,b) = b^6(6 + 3a + 5a^2 + 6a^3 + 2a^4 + 2a^5) + b^5(6 + 3a + 5a^2 + 6a^3 + 2a^4 + a^5) + $$
$$+ b^4(2a + 5a^2 + 5a^3 + 2a^4 + 5a^5) + b^3(1 + 5a + 2a^2 + 2a^3 + 2a^4 + 3a^5) + $$
$$+ b^2(1 + 5a + a^3 + 6a^4 + 6a^5) + b(a + 2a^2 + 4a^4) + a \, .$$

<u>Caso 2</u>: $f(a) = 4a^5 + 4a^3 + 5a$

$g(a) = 3a^6 + 5a^5 + a^4 + 5a^3 + 3a^2 + 4a$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Este abanico $\tilde{S}_2$ está definido por las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ \phi_2(a,b) & \psi_2(a,b) \end{bmatrix}$
$a,b \in GF(7)$ donde

$$\phi_1(a,b) = b^5(2a^5 + 6a^4 + 5a^3 + 5a^2 + a + 4) + b^4(6a^6 + 6a^5 + a^4 + 5a^3 + 4a^2 + 2a) + $$
$$+ b^3(6a^5 + 2a^4 + 2a^3 + 5a + 4) + b^2(a^6 + 5a^5 + 6a^4 + 5a^3 + 3a^2) + $$
$$+ b(6a^6 + a^5 + 6a^3 + 4a^2 + 2a + 5)$$

$$\psi_2(a,b) = b^6(6a^5 + 2a^4 + 4a^3 + 4a^2 + 4a + 3) + b^5(a^6 + 4a^4 + 6a^3 + a) +$$
$$+ b^4(6a^6 + a^5 + 2a^4 + 6a^3 + a^2 + 6a + 1) +$$
$$+ b^3(5a^6 + 5a^5 + a^4 + 6a^3 + 3a^2 + a) +$$
$$+ b^2(a^5 + 4a^4 + 6a^3 + 5a^2 + 6a + 3) +$$
$$+ b(5a^6 + 2a^4 + 4a^3 + 4a^2 + 3a + 6) + a \,.$$

<u>Caso 3</u>: $f(a) = 4a^5 + 4a^3 + 5a$

$g(a) = a^6 + 5a^4 + a^2$

$$\begin{bmatrix}0&2\\2&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0&4\\4&2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4&3\\3&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}6&4\\4&3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4&5\\5&2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5&3\\3&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}6&5\\5&0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5&2\\2&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&3\\3&2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0&5\\5&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&3\\3&4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5&5\\5&4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&1\\1&5\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5&4\\4&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3&2\\2&5\end{bmatrix}$$

En este caso el abanico $\widetilde{S}_3$ está definido por las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ \phi_3(a,b) & \psi_3(a,b)\end{bmatrix}$ donde

$$\phi_3(a,b) = a^6(5b^5 + b^3 + 6b^2 + b) + a^5(b^5 + b^4 + 2b^3 + 4b^2 + 6b) +$$
$$+ a^4(2b^5 + 4b^4 + 4b^3 + 3b^2 + 2b) + a^3(2b^3 + 6b^2) +$$
$$+ a^2(4b^5 + b^4 + 3b^3 + 5b^2 + b) + a(3b^5 + 2b^4 + 2b^3 + 4b^2 + 4b) +$$
$$+ 4b^5 + 4b^3 + 5b$$

$$\psi_3(a,b) = a^5(4b^6 + 6b^5 + 2b^4 + 4b^3 + 3b^2 + 2) + a^4(3b^6 + 5b^5 + 3b^4 + 6b^3 + 5b) +$$
$$+ a^3(2b^6 + b^5 + 2b^4 + 5b^3 + 3b^2 + b) + a^2(3b^6 + 4b^5 + 5b^4 + 4b^3 + b) +$$
$$+ a(4b^6 + 2b^5 + 3b^2 + 1) + 6b^6 + 5b^4 + y^2 \,.$$

C A P I T U L O III

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ABANICOS

NOTA 3.1. Para facilitar los cálculos concernientes a grupos de colineaciones, podemos coordenatizar los planos construídos en (II) de modo que el eje y coeje de las homologías del grupo G coincidan ahora con las componentes $(y = 0)$ y $(x = 0)$ respectivamente.

Por medio de la transformación lineal $\alpha = \left[\begin{array}{c|c} I & -M \\ \hline -M & I \end{array}\right]$, donde $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ como en (II) cada componente de los abanicos $\widetilde{S}_1$, $\widetilde{S}_2$ y $\widetilde{S}_3$ definida por la matriz R , se transforma en una componente definida por la matriz $(I - RM)^{-1}(R - N)$.

De esta manera obtenemos tres abanicos S_1 , S_2 y S_3 con los que trabajaremos de aquí en adelante. Estos abanicos están definidos por las matrices:

$$S_1$$

$$R_1^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R_2^{(1)} = \left\{\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&3\\4&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&4\\3&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&4\\3&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&3\\4&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&5\\2&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_3^{(1)} = \left\{\begin{pmatrix}0&4\\3&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&3\\4&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&0\\2&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&1\\2&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&6\\5&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&6\\4&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1\\3&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&0\\5&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_4^{(1)} = \left\{\begin{pmatrix}1&5\\1&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&2\\6&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&6\\3&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&5\\3&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2\\4&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&6\\6&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&1\\1&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&1\\4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_5^{(1)} = \left\{\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&4\\5&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&6\\1&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&1\\2&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&6\\5&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&3\\1&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&4\\6&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&1\\6&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_6^{(1)} = \left\{\begin{pmatrix}4&2\\0&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&5\\0&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&3\\3&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&5\\1&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&2\\6&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&4\\1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&3\\6&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&4\\4&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{y} \quad \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$S_2$$

$$R_1^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\6&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&2\\5&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&5\\2&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&5\\2&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&2\\5&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&6\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_2^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&3\\4&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&4\\3&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&4\\3&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&3\\4&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&5\\2&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_3^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}0&4\\3&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&3\\4&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&0\\2&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&1\\2&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&6\\5&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&6\\4&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1\\3&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&0\\5&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_4^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}1&5\\1&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&2\\6&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&6\\3&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&5\\3&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2\\4&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&6\\6&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&1\\1&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&1\\4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_5^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&4\\5&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&6\\1&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&1\\2&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&6\\5&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&3\\1&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&4\\6&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&1\\6&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_6^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}4&2\\0&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&5\\0&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&3\\3&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&5\\1&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&2\\6&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&4\\1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&3\\6&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&4\\4&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S}_3 \qquad\qquad \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$R_1^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}0&6\\1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&2\\5&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&5\\2&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&5\\2&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&2\\5&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1\\6&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_2^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}0&5\\4&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&2\\3&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&0\\4&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&3\\0&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&4\\0&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&4\\5&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&3\\2&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&0\\3&4\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_3^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}0&3\\2&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&4\\5&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&0\\4&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&6\\3&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&1\\4&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&6\\5&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&0\\3&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_4^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}1&5\\6&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&2\\1&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&6\\1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&1\\6&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&5\\3&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&1\\0&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2\\4&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&6\\0&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_5^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}1&4\\5&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&3\\2&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&6\\1&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&3\\1&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6&4\\6&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&1\\2&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&6\\5&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&1\\6&5\end{pmatrix}\right\}$$

$$R_6^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}2&4\\4&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&3\\3&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&5\\6&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&5\\3&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4&2\\4&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5&4\\6&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\right\}$$

OBSERVACION 3.2. Para cada $i = 1,2,3$ se tiene que

$$\underset{I \in \mathcal{S}_i}{R \in \mathcal{S}_i} \Rightarrow -R \in \mathcal{S}_i .$$

LEMA 3.3. Sea $\mathcal{S}$ un abanico en un espacio vectorial V de dimensión $2r$ sobre $GF(p)$, (p primo impar) tal que $\underset{I \in \mathcal{S}}{\forall R \in \mathcal{S} \Rightarrow -R \in \mathcal{S}}$ entonces

Si existe una colineación α que transforme $(X = 0)$ en $(X = 0)$ y $(Y = 0)$ en $(Y = XN)$, $\underset{N \neq 0}{N \in \mathcal{S}}$ o bien que lleve

$(Y = XN)$ en $(X = 0)$ y

$(X = 0)$ en $(Y = 0)$

entonces $R + N \in \mathcal{S}$, $\forall\, R \in \mathcal{S}$.

Demostración: Supongamos $(X = 0) \xrightarrow{\alpha} (X = 0)$ para $N \in \mathcal{S}$.

$$(Y = 0) \xrightarrow{\alpha} (Y = XN)$$

Supongamos también que $(Y = X) \xrightarrow{\alpha} (Y = XP)$ $P \in \mathcal{S}$, $P \neq N$.

Luego

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & AN \\ \hline 0 & A(P - N) \end{array}\right] \text{, cierto } A \in GL(r,q) \text{ .}$$

Entonces, $\forall\, M \in \mathcal{S}$, existe $R \in \mathcal{S}$ tal que

$$(Y = XR) \xrightarrow{\alpha} (Y = XM)$$

$$\therefore\ A^{-1}RA = (M - N)(P - N)^{-1} \qquad (1)$$

Como también $-R \in \mathcal{S}$, existe $Q \in \mathcal{S}$ tal que

$$A^{-1}(-R)A = (Q - N)(P - N)^{-1} \qquad (2)$$

sumando (1) y (2) se tiene que

$$-M + 2N = Q \in \mathcal{S} \qquad \therefore\ M - 2N \in \mathcal{S} \qquad \forall\, M \in \mathcal{S} \qquad (3)$$

y aplicando (3) reiteradamente y ya que (-2) es un generador del grupo aditivo de $GF(p)$, (p impar) se tiene que $M + N \in \mathcal{S}$, $\forall\, M \in \mathcal{S}$.

Procediendo en igual forma, se prueba la segunda parte del lema.

LEMA 3.4. Sea $\mathcal{S}$ un abanico en un espacio vectorial de dimensión $2r$ sobre $GF(p)$, p primo impar.

Si existe colineación α tal que

$$(Y = 0) \xrightarrow{\alpha} (Y = 0)$$

y $$(X = 0) \xrightarrow{\alpha} (Y = XN) \ , \quad N \in \mathcal{S} \ , \quad N \neq 0$$

o bien si

$$(Y = XN) \longrightarrow (X = 0) \ , \quad N \in \mathcal{S} \ , \quad N \neq 0$$

$$(Y = 0) \longrightarrow (X = 0)$$

entonces $(M^{-1} + N^{-1})^{-1} \in \mathcal{S}$, $\forall\, M \in \mathcal{S}$, $M \neq 0$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que existe una colineación α del primer tipo, consideremos ahora $\mathcal{S}^{-1} = \{R^{-1} / \mathbb{R} \in \mathcal{S}\}$, entonces $\mathcal{S}^{-1}$ es un abanico ya que para todo $R \neq T$, $(T^{-1} - R^{-1}) =-R^{-1}(T - R)T^{-1}$ es invertible. Si Π^{-1} es el plano asociado a $\mathcal{S}^{-1}$, entonces la colineación inducida por α transforma $(X = 0)$ en $(X = 0)$ e $(Y = 0)$ en $Y = XN^{-1})$. Aplicando ahora (3.3) se obtiene lo pedido.

LEMA 3.5. Sea $\mathcal{S}$ un abanico en un plano de traslación Π tal que $I \in \mathcal{S}$ y $R \in \mathcal{S} \Rightarrow -R \in \mathcal{S}$, entonces, sí existe una colineación α tal que

$$(X = 0) \xrightarrow{\alpha} (Y = XR)$$

$$(Y = 0) \longrightarrow (Y = X\mathcal{S})$$

entonces se tiene que $\frac{1}{2}\,(R + \mathcal{S}) \in \mathcal{S}$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que existe una tal colinealción α , supongamos además que la imagen bajo α de la componente $(Y = X)$ es la componente $(Y = XT)$, $T \in \mathcal{S}$.

Por la proposición 6 [4, pág. 491] obtenemos que para cada $M \in \mathcal{S}$ existe $N \in \mathcal{S}$ tal que

$$(1) \qquad [(M - R)^{-1} - (\mathcal{S} - R)^{-1}][(T - R)^{-1} - (\mathcal{S} - R)^{-1}]^{-1} = A^{-1}NA$$

para cierta $A \in GL(2,q)$ (y recíprocamente). Reemplazando N por $(-N)$ en (1), tenemos que existe $L \in \mathcal{S}$ tal que

$$(2) \qquad [(L - R)^{-1} - (\mathcal{S} - R)^{-1}][(T - R)^{-1} - (\mathcal{S} - R)^{-1}]^{-1} = A^{-1}(-N)A$$

sumando (1) y (2) y simplificando tenemos:

$$(3) \qquad (L - R)^{-1} + (M - R)^{-1} = 2(\mathcal{S} - R)^{-1}$$

despejando L en (3), tenemos entonces que la aplicación tal que

$$(4) \qquad M \rightarrow L = R + [-(M - R)^{-1} + 2(\mathcal{S} - R)^{-1}]^{-1}$$

es una colineación de Π.

Esta colineación transforma $(X = 0)$ en $(Y = XQ)$ donde $Q = \frac{1}{2}(R + \mathcal{S})$

$$\therefore \quad Q \in \mathcal{S} \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}(R + S) \in \mathcal{S} .$$

C A P I T U L O IV

GRUPO DE COLINEACIONES DEL PLANO DEFINIDO POR $\mathcal{S}_1$

Sea G el grupo de homologías que mencionábamos en el Capítulo II. Por la coordenatización realizada en (3.1) G es un grupo de homologías de eje (Y = 0) y coeje (X = 0) y

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right) \right\rangle$$

NOTA 4.1. Las únicas matrices en $\mathcal{S}_1$ que tienen inverso multiplicativo en $\mathcal{S}_1$ son las correspondientes al régulo definido por la órbita de la compo - nente (Y = X) .

PROPOSICION 4.2.

(1) El único grupo de homologías de eje (Y = 0) y coeje (X = 0) es el grupo G .

(2) El único grupo de homologías de eje (X = 0) y coeje (Y = 0) es $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & I \end{array}\right) , \left(\begin{array}{c|c} -I & \\ \hline & I \end{array}\right) \right\}$ al que denotaremos por H .

<u>Demostración</u>: (1) Si α es una homología de eje $(Y = 0)$ y coeje $(X = 0)$ entonces α se puede representar en la forma

$$\alpha = \left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & A \end{array}\right), \qquad \text{cierta } A \in GL(2,7)$$

entonces $RA \in S_1$ $\quad \forall\, R \in S_1$, en particular $R = I \Rightarrow A \in S_1$ y también como $\alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(S_1)$ tenemos que $A^{-1} \in S$.

$A, A^{-1} \in S_1$, por (4.1) tenemos que $A \in \langle \bar{g} \rangle$, es decir $\alpha \in G$.

(2) Si β es una homología de eje $(X = 0)$ y coeje $(y = 0)$ entonces

$$\beta = \left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline & I \end{array}\right), \qquad \text{para cierta } B \in GL(2,7).$$

Luego $\quad B^{-1}R \in S_1$, $\qquad \forall\, R \in S_1$

y también $BR \in S_1$, $\qquad \forall\, R \in S_1$,

en particular, $R = I \Rightarrow B, B^{-1} \in S_1$, nuevamente por (4.1) tenemos que $B \in \langle \bar{g} \rangle$.

Sea $B \neq \pm I$.

(i) Si $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, debemos tener que $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} R \in S_1 \quad \forall\, R \in S_1$,

pero escogiendo $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, tenemos que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \notin S_1$

$\therefore$ no puede ser $B = \pm\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Si $B = \pm\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $\beta^2 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 6 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & I \end{array}\right)$, una contradicción.

(iii) $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$; tomando $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ debemos tener que $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_1$, ie $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_1$ $\rightarrow\!|\!\leftarrow$, finalmente tampoco puede ser $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $B = \pm I$.

COROLARIO 4.3. No existe colineación $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$ que transforme $(Y = 0)$ en $(X = 0)$.

Demostración: Resulta inmediatamente del hecho que si σ es una colineación de Π_1 que envía $(Y = 0)$ en $(X = 0)$, entonces $\sigma^{-1}G\sigma$ es un grupo de homologías de eje $(X = 0)$ y coeje $(Y = 0)$ de orden 8, lo que contradice (4.2.2.)

PROPOSICION 4.4. Sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$, entonces α fija la componente $(X = 0)$ sí y sólo si α fija $(Y = 0)$.

Demostración: Sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$. Supongamos que α fija la componente $(X = 0)$, y supongamos que α transforma $(Y = 0)$ en $(Y = XN)$, $N \in S_1$. Entonces por (3.3) debemos tener que $R + N \in S_1 \quad \forall\, R \in S_1$.

Probaremos que esta condición no puede darse. Como el grupo G fija $(X = 0)$, $(Y = 0)$ y actúa transitivamente en cada órbita, podemos considerar solamente cada uno de los siguientes casos:

(1) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, (3) $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $N = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, (5) $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (6) $N = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Caso (1)</u>: $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ considerar $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$N + R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \notin S_1$.

<u>Caso (2)</u>: $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, sea $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; $N + R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \notin S_1$

<u>Caso (3)</u>: $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, sea $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $N + R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \notin S_1$

<u>Caso (4)</u>: $N = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, sea $R = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $N + R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \notin S_1$

<u>Caso (5)</u>: $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $N + R = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \notin S_1$

<u>Caso (6)</u>: $N = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $N + R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \notin S_1$.

Recíprocamente, supongamos que β es una colineación de Π_1 que fija $(Y = 0)$ y transforma $(X = 0)$ en $(Y = XN)$, $(N \neq 0)$ entonces por (3.4)

$$(R^{-1} + N^{-1})^{-1} \in S_1 \qquad \forall\, R \in S_1 \ , \quad R \neq 0 \tag{1}$$

Nuevamente veremos que esta situación no puede darse, por lo que nos basta considerar

$$N \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\} .$$

Si consideramos $R = N$ en la relación (1) debemos tener que $\frac{1}{2} N \in S_1$. Pero

$$\frac{1}{2} N \in \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\} \cap S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\therefore$ N sólo puede ser $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Pero si $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ sea $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ entonces

$$(R^{-1} + N^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \notin S_1 .$$

COROLARIO 4.5.

(1) No existen en Π_1, elaciones de eje $(X = 0)$, ni elaciones de eje $(Y = 0)$.

(2) No existen en Π_1, homologías de eje $(Y = 0)$ y coeje $(Y = XR)$, $R \in S_1$, tampoco existen homologías de eje $(X = 0)$ y coeje $(Y = XS)$, $S \in S_1$, $S \neq 0$.

Demostración: (1) Inmediato de (4.4).

(2) Si α es una homología de eje $(Y = 0)$ y coeje $(X = 0)$ y β es una homología de eje $(Y = 0)$ y coeje $(Y = XR)$, $R \in S_1$, entonces por un teorema de André [3], Cap. I., existe en $\langle \alpha,\beta \rangle$ una elación de eje $(Y = 0)$ que transforma $(X = 0)$ en $(Y = YR)$, lo que contradice (4.4).

ESTABILIZADOR DE $(X = 0)$ 4.6. Sea α una colineación de Π_1 que fija $(X = 0)$, entonces por (4.4), α fija $(Y = 0)$.

Luego, existen $A,B \in GL(2,7)$ tales que

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

Además tenemos por (4.2.1) que $G \leq Aut(\Pi_1)$, en particular $\alpha^{-1}G\alpha = G$.

Sea $\overline{G}$ el subgrupo de $GL(2,7)$ generado por $\overline{g} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $G = \left\langle \left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & \overline{g} \end{array}\right) \right\rangle$ y entonces

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \overline{g} \end{array}\right) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \overline{g} \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1}\overline{G}B = \overline{G}$$

$\therefore$ B normaliza $\overline{G}$.

PROPOSICION 4.7. Sea $\overline{G} = \left\langle g = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ cíclico de orden 8. Entonces el normalizador en $GL(2,7)$ de $\overline{G}$ se puede obtener como

$$N_{GL(2,7)}(\overline{G}) = \langle v \rangle \cup s\langle v \rangle ,$$

donde $v = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ genera el centralizador en $GL(2,7)$ de $\overline{G}$ y s es la involución $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tal que $s^{-1}gs = g^{-1}$.

<u>Demostración</u>: Calculando directamente se tiene que

$$C_{GL(2,7)}(\overline{G}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad a,b \in GF(7) \ , \ (a,b) \neq (0,0) \right\}$$

y es un grupo cíclico de orden $16 \times 3 = 48$ generado por $v = \tau \cdot z$, donde $\tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ de orden 16 , $z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ de orden 3 .

Como $Aut(\overline{G})$ es un grupo de orden 4 se tiene que el índice de $C_{GL(2,7)}(\overline{G})$ en $N_{GL(2,7)}(\overline{G})$ es 1, 2 ó 4.

Pero $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ normaliza $\overline{G}$, pero no lo centraliza, con lo cual

$$[N_{GL(2,7)}(\overline{G}) : C_{GL(2,7)}(\overline{G})] > 1 .$$

Por otra parte, en forma directa, se puede ver que no existe $a \in GL(2,7)$ tal que $a^{-1}ga = g^3$. De allí, tampoco existe $b \in GL(2,7)$ tal que $b^{-1}gb = g^5$ pues si así fuera, como $s^{-1}gs = g^{-1}$, tendríamos

$$(\delta b)^{-1}g(\delta b) = b^{-1}\delta^{-1}g\delta b = b^{-1}g^{-1}b = b^{-1}g^{7}b =$$

$$= (b^{-1}gb)^{7}$$

$$= (g^{5})^{7} = g^{3} \qquad \rightarrow\mid\leftarrow$$

luego $[N(\overline{G}) : C(\overline{G})] = 2$ y $N_{GL(2,7)}(\overline{G}) = \langle v\rangle \cup \delta\langle v\rangle$, $v = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

LEMA 4.8. Las únicas colineaciones de Π_1 de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right)$, para $g \in \overline{G}$, son tales que $A = \pm I$.

<u>Demostración:</u> Sea $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right)$ una tal colineación, entonces

$$\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

como $\sigma = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right) \in G$ entonces $\beta = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$ es una colineación y por 4.22 se tiene que $A = \pm I$.

LEMA 4.9. Sea $\tau = v^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ entonces en Π_1 no hay colineación de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \tau \end{array}\right)$.

<u>Demostración:</u> Sea $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \tau \end{array}\right)$ una tal colineación como $\tau^2 \in \overline{G}$, por (4.8) se tiene que $A^2 = \pm I$.

(1) Si $A = \pm I$.

Como α es una colineación de Π_1 se tiene que

$$A^{-1}R\tau \in \mathcal{S}_1 \quad , \quad \forall\ R \in \mathcal{S}_1$$

en particular $\pm\tau \in \mathcal{S}_1$ contradicción.

(2) Si $A^2 = I$, $A \neq -I$, entonces $\det A = -1$. Como se tiene que $A^{-1}\tau \in \mathcal{S}_1$ y $\det(A^{-1}\tau) = 1$ debemos tener que

$$A^{-1} \in \left\{ \pm\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

pero ninguna de las anteriores es de orden 2.

(3) Si $A^2 = -I$, A es de orden 4 y $\det A = 1$ debemos tener que $A^{-1}\tau \in \mathcal{S}_1$, pero $\det(A^{-1}\tau) = -1$ y $\mathcal{S}_1$ no contiene componentes determinadas por matrices de determinante -1 . Con esto se completa la demostración.

COROLARIO 4.10. No hay en Π_1 colineaciones de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & v \end{array}\right)$.

<u>Demostración</u>: Inmediato de (4.9) ya que $v^3 = \tau$.

COROLARIO 4.11. No existen en Π_1 colineaciones del tipo $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \tau^i \end{array}\right)$, i impar, ni del tipo $\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & v^{6k+3} \end{array}\right)$, ni del tipo $\left(\begin{array}{c|c} C & \\ \hline & v^{6k+1} \end{array}\right)$.

<u>Demostración</u>: Inmediato ya que $\tau^{2r} \in \overline{G}$, $v^{6k} \in \overline{G}$.

OBSERVACION 4.12. El grupo cíclico de orden 6 descrito por $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda I & 0 \\ \hline 0 & \lambda I \end{array}\right), \ \lambda \in GF(7)^* \right\}$ corresponde al subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Pi_1)$ de homologías de centro en el origen y eje ℓ_∞ y lo denotaremos por Z .

LEMA 4.13. No existen en Π_1 colineaciones del tipo $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & v^{6k+2} \end{array}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, ni tampoco de la forma $\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & v^{6k+4} \end{array}\right)$ que no sean las del subgrupo generado por G,H y Z .

<u>Demostración</u>: Supongamos que $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & v^2 \end{array}\right)$ es una colineación de Π_1 .

Como $v^2 = (2\tau)^2 = 4\tau^2$ y $\tau^2 \in \overline{G}$, tenemos que $v^2 = 4g$. Sea $\sigma = \left(\begin{array}{c|c} 2I & 0 \\ \hline 0 & 2I \end{array}\right) \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$, luego $\alpha\sigma = \left(\begin{array}{c|c} 2A & \\ \hline & g \end{array}\right) \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$, y por el lema 4.8 se tiene que $2A = \pm Id$, luego $A = \pm 4I$ y de allí

$$\alpha = \left(\begin{array}{c|c} 4I & 0 \\ \hline 0 & 4I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & g \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \pm I & \\ \hline & I \end{array}\right) \in \langle G, Z, H\rangle .$$

La segunda parte del lema es análoga a la primera, notando que $v^4 = (2\tau)^4 = 2\tau^4$, $\tau^4 \in \overline{G}$.

COROLARIO 4.14. No existen colineaciones de Π_1 de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & v^i \end{array}\right)$ i entero, diferentes de aquellas en el grupo generado por G,H y Z .

Demostración: Inmediato de 4.8 - 4.1.3. y del hecho que v^5 es también un generador de $\langle v\rangle$.

LEMA 4.15. Sea $s \in N_{GL(2,7)}(\overline{G})$, $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces no hay colineaciones de Π_1 de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & s \end{array}\right)$, $A \in GL(2,7)$.

Demostración: Sea $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & s \end{array}\right)$, supongamos que $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$. Como $s^2 = I \Rightarrow$ por (4.2.2), $\alpha^2 \in H$, luego $A^2 = \pm I$.

Caso 1: Si $A = \pm I \Rightarrow \pm Rs \in S_1 \quad \forall\ R \in S_1$ en particular $\pm s \in S_1 \quad \rightarrow\leftarrow$ contradicción.

Caso 2: Si $A^2 = I$, $A \neq \pm I$, luego $\det A = -1$, traza $A = 0$.

Como $A^{-1}s \in S_1$ y $\det(A^{-1}s) = 1$,

$$\Rightarrow A^{-1}s \in S_1 \cap SL(2,7) = \left\{\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

luego

$$A^{-1} \in \left\{ \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

pero si en cada uno de los casos chequeamos con $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_1$, vemos que $A^{-1}R\delta \notin S_1$ $\rightarrow\!|\!\leftarrow$ contradicción.

<u>Caso 3</u>: $A^2 = -I \Rightarrow A^4 = I$ y $\det A = 1$.

Pero $A^{-1}\delta \in S_1$ y $\det A^{-1}\delta = -1$ $\rightarrow\!|\!\leftarrow$ contradicción pues en S_1 no hay matrices de determinante -1 .

COROLARIO 4.16. No existen colineaciones de Π_1 de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau^{2k} \end{array}\right)$, $A \in GL(2,7)$, como tampoco de la forma $\beta = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & \delta z \end{array}\right)$ con $B \in GL(2,7)$, $z \in Z$.

<u>Demostración</u>: Inmediato de (4.15) ya que $\tau^{2k} \in \overline{G}$ $\forall k$ y $\sigma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau^{-2k} \end{pmatrix} \in$ $\in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$.

LEMA 4.17. La transformación inducida por la matriz $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} -\delta\tau^5 & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau \end{array}\right)$ es una colineación de Π_1 , de orden 4 que produce 4 órbitas sobre $\ell_\infty - \{(0),(\infty)\}$.

<u>Demostración</u>: Calculando directamente se tiene que

$$(R_1^{(1)})^\alpha = R_1^1 \quad , \quad (R_2^{(1)})^\alpha = R_2^1 \quad , \quad (R_3^{(1)})^\alpha = R_5^{(1)}$$

$$(R_4^{(1)})^\alpha = R_6^{(1)} \quad , \quad (R_5^{(1)})^\alpha = R_3^{(1)} \quad , \quad (R_6^{(1)})^\alpha = R_4^{(1)} \ .$$

LEMA 4.18. La colineación $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} \pm\delta\tau^5 & \\ \hline & \delta\tau \end{array}\right)$ de (4.17) es la única de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & \delta\tau \end{array}\right)$ con $A \in GL(2,7)$.

<u>Demostración</u>: Sea $\sigma = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau \end{array}\right)$ colineación de Π_1 . Ya que $\delta\tau = \tau^7\delta$ y $(\delta\tau)^2 = -I$ tenemos que por (4.8) $A^2 = \pm I$.

<u>Caso 1</u>: $A = \pm I$, como $\pm R(\delta\tau) \in \mathcal{S}_1 \quad \forall\, R$

$$\Rightarrow \pm\delta\tau \in \mathcal{S}_1 \quad \rightarrow\!|\!\leftarrow$$

<u>Caso 2</u>: $A^2 = I$, $A \neq \pm I$, entonces $\det A = -1$, debemos tener que $A^{-1}\delta\tau \in \mathcal{S}_1$, pero $\det(A^{-1}\delta\tau) = -1$ y $\mathcal{S}_1$ no contiene matrices de determinante -1 .

<u>Caso 3</u>: $A^2 = -I$, entonces A es de orden 4 y $\det A = 1$.

$$\therefore\ A^{-1}\delta\tau \in \mathcal{S}_1 \cap SL(2,7)$$

$$= \left\{\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

luego

$$A^{-1} \in \left\{\pm\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

(i) Si $A^{-1} = \pm\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, o bien si $A = \pm\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, escogiendo $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_1$ se ve que $A^{-1}R\delta\tau \notin \mathcal{S}_1$.

(ii) Si $A^{-1} = \pm\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, escogiendo $R = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_1$ tenemos que $A^{-1}R\delta\tau \notin \mathcal{S}_1$.

$\therefore$ La única posibilidad es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, es decir $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -\delta\tau^5$.

TEOREMA 4.19. El estabilizador de $(Y = 0)$ es un subgrupo de orden $2^7 \cdot 3$ generado por $\langle G,H,Z,W \rangle$ y tiene 6 órbitas sobre ℓ_∞ de longitudes 1, 1, 8, 8, 16 y 16 respectivamente. A este grupo lo anotaremos por $\mathcal{E}$.

Demostración: Por (4.17) $\mathcal{E} = \langle G,H,Z,W \rangle$ es un subgrupo del estabilizador de $(Y = 0)$.

Además por (4.4) y (4.6) toda colineación de Π_1 que fija $(Y = 0)$ es de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ con $A \in GL(2,7)$, $B \in N_{GL(2,7)}(\overline{G})$. Por (4.16) y (4.14), sólo nos falta verificar que si $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta v^i \end{array}\right)$ es una colineación de Π_1 entonces $\alpha \in \langle G,H,Z,W \rangle$.

Por (4.16) si i es par, entonces no hay tal α . Supongamos i impar, como $v = 2\tau$, nos basta comprobar que las colineaciones de Π_1 de la forma $\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau^i \end{array}\right]$, i impar son sólo las de $\mathcal{E}$.

Sea $\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau^i \end{array}\right] \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$, entonces como $\tau^{2k+1} = \tau^{2k}\tau = g\tau = \tau g$ con $g \in \overline{G}$ tenemos

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau^{2k+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau g \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right]$$

luego por (4.18), $\alpha \in \mathcal{E}$.

TEOREMA 4.20. Toda colineación de Π_1 fija a $(X = 0)$ (y de (4.4) también a $(Y = 0)$).

Demostración: Sea α una colineación de Π_1 y supongamos que α transforma $(X = 0)$ en $(Y = XR)$, donde $R \neq 0$ por (4.3).

Sea $S \in \mathcal{S}_1$ tal que $(Y = 0)^\alpha = (Y = XS)$ (por (4.4)) . Entonces por (3.5)

$$\frac{1}{2}(R + S) \in S_3 .$$

Como el estabilizador de $(X = 0)$ tiene 4 órbitas sobre S_1, podemos suponer que R es alguno de los representantes de dichas órbitas ie, podemos suponer que

$$R \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} .$$

Caso 1: $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ entonces calculando directamente:

$$\frac{1}{2}(R + S_1) \cap S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(i) $S = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -R$ no puede ser ya que en tal caso como R,S están en la misma órbita bajo $\mathcal{E}$, tendríamos que $(X = 0)$ e $(Y = 0)$ estarían en una misma órbita, lo que contradice a (4.3).

Nos quedan sólo $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = S_1$ ó $S = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = S_2$.

Por otra parte, el subgrupo de $\mathcal{E}$ que fija a $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ está generado

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$ y σ transforma $(Y = XS_1) \to (Y = XS_1')$

$(Y = XS_2) \to (Y = XS_2')$

donde $S_1' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_2' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ entonces si $\alpha : (Y = 0) \to (Y = XS_1)$ entonces

$$\alpha\sigma : (X = 0) \to (X = XR)$$

$$(Y = 0) \to (Y = XS_1)$$

y por (3.5) nuevamente $\frac{1}{2}(R + S_1') \in \mathcal{S}_1$ es decir $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_1$ $\rightarrow\!|\!\leftarrow$ una contradicción, argumento similar descarta a S_2 .

Caso 2: $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $\frac{1}{2}(R + \mathcal{S}_1) \cap \mathcal{S}_1 = \{-R\}$ y ambos están en la misma órbita bajo $\mathcal{E}$.

Caso 3: $R = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}(R + \mathcal{S}_1) \cap \mathcal{S}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y cualquiera de ellos está en la misma órbita bajo $\mathcal{E}$ que R .

$\therefore$ La única posibilidad es $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en este caso tenemos

$$\frac{1}{2}(R + \mathcal{S}_1) \cap \mathcal{S}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

podemos descontar a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ya que están en la misma órbita que R bajo $\mathcal{E}$.

(i) Si $S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ entonces la componente $(Y = X)$ se transforma bajo α en alguna de las componentes de $\mathcal{S}_1 - \{R,S\}$. Examinando cada una de las posibles imágenes bajo α de $(Y = X)$, todas ellas nos conducen a contradicciones. Mostramos a continuación un par de casos, los restantes se prueban usando argumentos similares:

- Si $(Y = X)^{\alpha} = (X = 0)$ entonces $\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline -A & -A \end{array}\right]$ para cierta $A \in GL(2,7)$, pero en este caso

$$(Y = 2X)^{\alpha} = \left(Y = X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right) \notin \mathcal{S}_1 .$$

- Si $(Y = X)^{\alpha} = \left(Y = X\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\right)$ entonces $\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline A\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & A\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right]$ cierta $A \in GL(2,7)$, pero entonces

$$(Y = 2X)^{\alpha} = \left\{ Y = X\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \notin S_1 .$$

Y así, se descarta cada una de las posibilidades $\therefore$ este caso no puede darse.

(ii) $S = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ tampoco puede darse, ya que el estabilizador de $(X = 0)$, $(Y = 0)$ e $(Y = X)$ transforma $\left\{ Y = X\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ en $\left\{ Y = X\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

(iii) La única alternativa que nos queda es que $(Y = 0)^{\alpha} = (Y = 2X)$ ie $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Nuevamente al igual que en (i), examinando cada posibilidad para $(Y = X)^{\alpha}$, llegamos, por argumentos similares a los usados en (i), a una contradicción.

$\therefore$ No existe una tal colineación

$\therefore$ el teorema sigue.

Tenemos así el siguiente

TEOREMA 4.21. El complemento de traslación lineal del plano Π_1 es el grupo generado por G,H,Z, de orden $2^7 \cdot 3$ y tiene 6 órbitas sobre ℓ_{∞} de longitudes 1,1,8,8,16,16.

<u>Demostración</u>: Inmediato de (4.19) y (4.20).

C A P I T U L O V

EL PLANO DEFINIDO POR $\mathcal{S}_2$

PROPOSICION 5.1. El plano Π_2 posee un grupo de homologías de eje $(X = 0)$ y coeje $(Y = 0)$, cíclico de orden 24, el cual tiene 2 órbitas sobre $\mathcal{S} - \{(Y = 0), (X = 0)\}$.

<u>Demostración</u>: Sea H el grupo generado por $\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right)$. Calculando directamente vemos que H es un grupo de colineaciones de Π_2. Además H transforma

$$R_1^{(2)} \to R_2^{(2)} \qquad R_3^{(2)} \to R_6^{(2)}$$

$$R_2^{(2)} \to R_3^{(2)} \qquad R_6^{(2)} \to R_1^{(2)}$$

y H fija a $R_4^{(2)}$ y a $R_5^{(2)}$.

NOTACION 5.2. Como en (4), sea $\overline{G}$ el subgrupo de $GL(2,7)$ generado por $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Así, $G = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \overline{g} \end{array}\right) \quad \overline{g} \in \overline{G} \right\}$.

Igualmente, sea $\overline{H}$ el subgrupo de $GL(2,7)$ generado por $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ en esta forma:

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \overline{h} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \quad \overline{h} \in \overline{H} \right\} .$$

OBSERVACION 5.3. Las únicas matrices que definen componentes de S_2 que tienen inversas que también definen componentes de S_2 son las siguientes:

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

los cuales forman exactamente $\overline{G} \cup \overline{H}$.

LEMA 5.4. (1) El único grupo de homologías de eje $(Y = 0)$ y coeje $(X = 0)$ es el grupo G .

(2) El único grupo de homologías de eje $(X = 0)$ y coeje $(Y = 0)$ es el grupo H .

<u>Demostración</u>: (1) Sea $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right)$ una homología de eje $(Y = 0)$ y coeje $(X = 0)$, para cierto $K \in GL(2,7)$.

Luego $RK \in S_2 \quad \forall\, R \in S_2$, en particular, $K \in S_2$. También como α^{-1} es una colineación se tiene que $K^{-1} \in S_2$, luego por (5.3) $K \in \overline{G} \cup \overline{H}$.

Si $K \notin \overline{G}$, entonces $K \in \overline{H} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ pero si verificamos cada posibilidad para K , vemos que escogiendo $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_2$ se tiene que $RK \notin S_2$, una contradicción.

(2) Sea $\beta = \left(\begin{array}{c|c} L & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$ una tal homología, $L \in GL(2,7)$ por el mismo argumento anterior se tiene que L y $L^{-1} \in S_2$ si $L \notin \overline{H}$ entonces $L \in \overline{G} - \{\pm I\}$. Nuevamente verificando cada posible L y escogiendo $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ vemos que $L^{-1}R \notin S_2$.

PROPOSICION 5.5. Sea α una colineación de Π_2 , entonces α fija a $(X = 0)$ sí y sólo si α fija a $(Y = 0)$.

<u>Demostración</u>: $\Rightarrow$) Supongamos que α es una colineación de Π_2 que transforma $(X = 0)$ en $(Y = XN)$, $N \in S_2$ y que además fija a $(Y = 0)$. Entonces por (3.3) se tiene

(1) $(R^{-1} + N^{-1})^{-1} \in S_2$, $\forall\, R \in S_2$. En particular $R = N$ tenemos que $4N \in S_2$. Aplicando nuevamente (1) a $4N$ y siguiendo este proceso concluimos que $\lambda N \in S_4$, $\forall\, \lambda \in GF(7)$. Pero una simple inspección nos muestra que ésto no es verdadero. Luego α debe también fijar a $(X = 0)$.

$\Leftarrow$) Aplicando (3.4) y usando el mismo argumento que en el caso anterior.

COROLARIO 5.6. No existen elaciones de eje $(X = 0)$, ni elaciones de eje $(Y = 0)$ en el plano Π_2 .

OBSERVACION 5.7. El plano de traslación Π_2 admite un grupo de colineaciones $\mathcal{G} = G \times H$ el producto directo de dos grupos cíclicos de orden 8 con eje afin. En estas condiciones a partir del teorema 2.1 de [2] , se prueba

(1) Π_2 es un plano de André

(2) Π_2 se construye a partir del plano desarguesiano por reemplazo de un 8-nido de régulos 0 .

(3) Π_2 se construye del plano desarguesiano por reemplazo de un 8-nido y de un conjunto de redes de André mutuamente disjuntas.

Antes de dar una respuesta a cual de las alternativas anteriores se verifica en nuestro caso, calculemos primeramente:

ESTABILIZADOR DE $(X = 0)$ 5.8. Sea Γ el estabilizador de G en el complemento lineal de traslaciones de Π_2 .

Entonces por (5.4) tenemos inmediatamente:

LEMA 5.9. H y G son subgrupos normales de Γ .

OBSERVACION 5.10. Sea $\alpha \in \Gamma$ entonces por (5.5) $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, para ciertas $A,B \in GL(2,7)$ y ya que $G \trianglelefteq \Gamma$, $H \trianglelefteq \Gamma$ se tiene

$$\alpha^{-1}G\alpha = G \quad , \qquad \alpha^{-1}H\alpha = H$$

luego $\quad B \in N_{GL(2,7)}(\bar{G}) \quad , \qquad A \in N_{GL(2,7)}(\bar{H})$.

A continuación enumeraremos una serie de resultados destinados a determinar cuales $A \in N_{GL(2,7)}(\bar{H})$, $B \in N_{GL(2,7)}(\bar{G})$ son tales que $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ es una colineación de Π .

Primeramente tenemos, calculando directamente que:

LEMA 5.11.

$$N_{GL(2,7)}(H) = \langle w, r \,/\, wr = rw^7 \;;\; w^{48} = I = r^2 \rangle$$

donde $w = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. También de 4.7 tenemos que

$$N_{GL(2,7)}(G) = \langle v, s \,/\, vs = sv^7 \;,\; v^{48} = s^2 = I \rangle$$

$$v = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \;,\; s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

LEMA 5.12.

(1) $\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right]$ con $g \in \overline{G}$, $A \in GL(2,7)$ es una colineación de Π_2 sí y sólo sí $A \in \overline{H}$.

(2) No existen colineaciones de Π_2 de la forma $\beta = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & \tau \end{array}\right)$, $C \in GL(2,7)$, $\tau = v^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Demostración: (1) Igual a (4.8).

(2) Por (1), $C^2 \in \overline{H}$ y siguiendo argumento similar a (4.9).

LEMA 5.13. (1) No hay colineaciones de la forma $\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ 0 & \tau^i \end{array}\right]$ para ningún i impar $A \in GL(2,7)$.

(2) No hay colineaciones de la forma $\left[\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & v \end{array}\right]$ para $C \in GL(2,7)$.

(3) No hay colineaciones de la forma $\left[\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right]$ para $D \in GL(2,7)$.

(4) No hay colineaciones de la forma $\left(\begin{array}{c|c} * & \\ \hline & sg \end{array}\right)$ $g \in \overline{G}$.

Demostración: (1) Inmediato de (5.12.2) ya que τ es de orden 24.

(2) Inmediato de (5.12)

(3) Como $\delta^2 = I$, por (5.12.1), $A^2 \in \overline{H}$ y siguiendo argumento similar a (4.15)

(4) De (3)

COROLARIO 5.14. No hay colineaciones de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & v^i \end{array}\right)$ para i impar, $A \in GL(2,7)$.

Demostración: De (5.13.2), se tiene que no hay colineaciones de la forma $\left(\begin{array}{c|c} * & \\ \hline & v^j \end{array}\right)$ con m.c.d(j,48) = 1 .

De 5.12, no hay para $j = 3r$, r impar.

LEMA 5.15. No hay colineaciones de la forma $\left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline & v^{6k} \end{array}\right)$ ni de la forma $\left(\begin{array}{c|c} C & \\ \hline & v^2 \end{array}\right)$, $C \in GL(2,7)$ excepto las de $\langle G \times H, Z\rangle$.

Demostración: $v^2 = 4\tau^2$, $\tau^2 \in G$, aplicando (5.12.1) sigue el lema.

COROLARIO 5.16. No hay colineaciones de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & v^{2k} \end{array}\right)$, excepto las de $\langle G \times H, Z\rangle$.

Demostración: Inmediato de (5.15) y (5.14).

PROPOSICION 5.17. $\alpha = \left[\begin{array}{c|c} rw & 0 \\ \hline 0 & \delta v \end{array}\right]$ define una colineación de Π_2 .

Demostración: Calculando directamente tenemos que

$$R_1^{(2)} \xrightarrow{\alpha} R_6^{(2)} \qquad R_4^{(2)} \longrightarrow R_4^{(2)}$$

$$R_2^{(2)} \xrightarrow{\alpha} R_3^{(2)} \qquad R_5^{(2)} \longrightarrow R_5^{(2)}$$

$$R_3^{(2)} \longrightarrow R_2^{(2)} \qquad R_6^{(2)} \longrightarrow R_1^{(2)}$$

LEMA 5.18. Las únicas colineaciones de la forma $\left[\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & \delta v \end{array}\right]$ son las del grupo generado por $G \times H$, Z y α .

Demostración: Sea $\sigma : \left[\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & \delta v \end{array}\right]$ colineación de Π_2 , δv es de orden 12 y $(\delta v)^2 = 3I$. Como también $A^{-2}(\delta v)^2 \in S_2 \Rightarrow 3A^{-2} \in S_2$. Como $A^{-1}\delta v \in S_2 \Rightarrow \det A \in \{1,2,4\}$ y por ( ) A normaliza H .

$\therefore$ $A \neq w^{2k-1}$ (ya que éstos tienen det -1, 3 ó 5) .

Si $A = w^{2k}$ $k = 1, \ldots, 24$ como $3A^{-2} \in S \Rightarrow A \in \{w^4, w^{10}, w^{16}, w^{22}, w^{28}, w^{34}, w^{40}, w^{46}\}$. Pero en cada uno de estos casos obtenemos que $A^{-1}\delta v \notin S_2$.

Luego $A \neq w^i$, todo i .

$\therefore$ $A \in rw^i$, cierto i .

Como $\det A \in \{1,2,4\} \Rightarrow i$ debe ser impar, calculando para $A = rw^i$, i impar tal que $A^{-1}(\delta v) \in S_2$ obtenemos

$$A \in \{\pm rw, \ rw^7, \ rw^{13}, \ rw^{119}\} .$$

Como $w^{6t} \in \overline{H}$, $v^{6t} \in \overline{G}$, la proposición sigue.

LEMA 5.19. Las únicas colineaciones de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & \delta v^i \end{array}\right)$ i entero, $A \in GL(2,7)$ son aquellas en $\langle G \times H, Z, \alpha\rangle$

Demostración: Si $\sigma = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & \delta v^i \end{array}\right) \in \mathrm{Aut}(\Pi_2)$ entonces $\sigma = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & \delta v \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & v^{i-1} \end{array}\right)$

y aplicando (5.18), (5.16) y (5.14) se concluye.

PROPOSICION 5.20. El estabilizador $\mathcal{E}$ de $(X = 0)$ en el complemento de traslación lineal de Π_2 es el grupo $\langle G \times H, Z, \alpha \rangle$ de orden $2^7 \cdot 3$ y tiene 5 órbitas sobre ℓ_∞ de longitudes 1,1,32,8,8.

El plano Π_2 obtenido del plano desarguesiano por reemplazo de un nido de régulos.

DEFINICION 5.21. Sea $q \geq 5$ potencia de un primo impar, $\Sigma = PG(3,q)$ el 3 espacio proyectivo, Ω un abanico regular (esto es, un abanico que determina al plano desarguesiano.

Un t - nido N de régulos de Ω es una colección de t régulos en Ω tal que cada recta de Ω está contenida en exactamente 0 ó 2 régulos de N. Por último, el t - nido N se dice reemplazable si existe un abanico parcial V de Σ que cubre los mismos puntos que N y que no tenga componente en común con N.

El problema del reemplazo: Sea $\sigma \in G \times H$ dada por $\sigma = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 5 & 6 & & \\ \hline & & 0 & 6 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right]$

entonces $|\sigma| = 4$ y σ fija por lo menos 3 subespacios mutuamente disjuntos sobre FG(7), a saber; los subespacios de dimensión 2 determinados por las componentes de Π_2 definidas por las matrices $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ entonces por [1], todos los subespacios de dim 2 sobre GF(7) que son invariantes bajo σ son mutuamente disjuntos y definen un abanico regular.

Tal colección de subespacios están dados por

$$\left\{ (X, XT_\sigma) \ / \ T_\sigma = \begin{pmatrix} a & a+b \\ b & 5a-b \end{pmatrix} \right\}_{a,b \in GF(7)}$$

En efecto, si transformamos esta colección via $\mu = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 6 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 6 \end{array}\right]$

vemos que ésta se convierte en

$$\left\{ \left(X, X \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \right) \right\}_{\alpha, \beta \in GF(7)}$$

en donde reconocemos unas claramente al plano desarguesiano.

Coordenatizando nuestro plano original Π_2 según μ obtenemos un abanico S_2^μ determinado por las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nuestro grupo G se puede representar ahora como el subgrupo de $GL(4,7)$ generado por $\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right]$ y nuestro grupo H, como el subgrupo generado por $\left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$.

NOTA. En el plano desaguesiano, llamamos una <u>red de André</u> N_δ $(\delta \in GF(7))$ a la colección de componentes $(Y = XM)$ tales que $M^8 = \delta$.

La reunión de estas N_δ , $\delta \in GF(7)$, cubren todo el plano desarguesiano.

Elijamos ahora una componente T de nuestro plano, que no sea una componente del plano desarguesiano $\mathcal{D}$. Por ejemplo, la componente T determinada por $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Entonces T es un subplano de Baer de $\mathcal{D}$.

Sea R_T el régulo determinado por T en $\mathcal{D}$, en nuestro caso, R_T está determinado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix},$$

Entonces tenemos que

$$|R_T \cap N_i| = 2 \qquad i = 1,2,4,6$$

y

$$R_T \cap N_5 = \phi = R_T \cap N_3$$

es decir, R_T comparte 0 ó 2 componentes con cada red de André N_δ de $\mathcal{D}$ en tales condiciones, tenemos que la órbita de R_T bajo $G \times H$ corresponde a un nido de régulos en $\mathcal{D}$. Sean R_i , $i = 1, \ldots, 8$ la órbita de R_T bajo $G \times H$ entonces si en el plano desarguesiano, mantenemos los ejes $(X = 0)$, $(Y = 0)$ y las redes de André comunes N_5 y N_3 , y reemplazamos cada uno de los régulos R_i por sus opuestos, obtenemos nuestro

nuestro plano Π .

OBSERVACION. Estudiando nuestro plano original, desde este último punto de vista, es decir, obtenido del plano desarguesiano, es muy posible que podamos obtener más información respecto al grupo completo de colineaciones. Este trabajo, esperamos realizarlo a continuación.

C A P I T U L O VI

GRUPO DE COLINEACIONES DEL PLANO DEFINIDO POR $\mathcal{S}_3$

OBSERVACION 6.1. Las únicas matrices en $\mathcal{S}_3$ que tienen universo multiplicativo en S_3 son $\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ correspondientes a $\overline{G}$ además de $\pm\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Sea $k = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $k^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Con la misma notación definida en (4) tenemos

PROPOSICION 6.2. (1) El único grupo de homologías de eje $(Y = 0)$ y coeje $(X = 0)$ es el grupo G .

(2) El único grupo de homologías de eje $(X = 0)$ y coeje $(Y = 0)$ es $\left\{\left(\begin{array}{c|c} +I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)\right\}$ que seguiremos denotando por H como en (4).

<u>Demostración</u>: (2) Sea α una homología de eje $(Y = 0)$ y coeje $(X = 0)$ entonces $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & I \end{array}\right)$ cierto $A \in GL(2,7)$.

Como α es una colineación, $A^{-1}R \in \mathcal{S}_3$ $\forall\ R \in \mathcal{S}_3$, en particular $A^{-1} \in \mathcal{S}_3$.

Como α^{-1} también es colineación, $A \in S_3$.

$\therefore$ $A \in S_3$ y $A^{-1} \in S_3$.

$$\therefore \quad A \in \left\{\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}2 & 5\\2 & 2\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}5 & 5\\2 & 5\end{pmatrix}\right\} \cup \left\{\pm\begin{pmatrix}0 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}4 & 4\\5 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

<u>Caso 1</u>: Si $A = \pm\begin{pmatrix}2 & 5\\2 & 2\end{pmatrix}$, ó $A = \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ ó $A = \pm\begin{pmatrix}5 & 5\\2 & 5\end{pmatrix}$ escogiendo $R = \begin{pmatrix}1 & 5\\6 & 1\end{pmatrix}$ se ve que $A^{-1}R \notin S_3$.

<u>Caso 2</u>: Si $A = \pm k$ ó $A = \pm k^{-1}$ como α^2 debe ser una colineación, se tiene $A^{-2}R \in S_3$ $\forall$ R pero escogiendo $R = \begin{pmatrix}1 & 5\\6 & 1\end{pmatrix}$, se tiene que $A^{-2}R \notin S_3$.

$\therefore$ Las únicas posibilidades son $A = \pm I$, de donde $\alpha \in H$.

(1) Sea $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & B\end{array}\right)$ una homología de eje $(Y = 0)$ entonces $RB \in S_3$ $\forall\ R \in S_3$, en particular $B \in S_3$. También $RB^{-1} \in S_3$ $\forall$ R , en particular $B^{-1} \in S_3$, luego si $B \notin \overline{G}$ entonces $B = \pm k$, $\pm k^{-1}$, pero si escogemos $R = \begin{pmatrix}1 & 5\\6 & 1\end{pmatrix}$, tenemos que en cada caso $RB \notin S_3$.

Luego $B \in \overline{G}$ y $\alpha \in G$.

COROLARIO 6.3. No existe colineación de Π_3 que transforme $(Y = 0)$ en $(X = 0)$.

<u>Demostración</u>: Análogo a (4.3).

PROPOSICION 6.4. Sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_3)$ entonces α fija la componente $(X = 0)$ sí y sólo si α fija $(Y = 0)$.

Demostración: Sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_3)$ tal que $(X = 0)^{\alpha} = (X = 0)$ y $(Y = 0)^{\alpha} =$ $= (Y = XN)$, cierto $N \in \mathcal{S}_3$, por (3.3) debemos tener que $R + N \in \mathcal{S}_3$ $\forall\ R \in \mathcal{S}_3$ procediendo en forma análoga a (4.4) podemos reducirnos solo a los casos en que N es alguna de las siguientes:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

pero si en cada uno de estos casos escogiendo $R = N$ se ve que $R + N \notin \mathcal{S}_3$. Luego, no hay tal colineación.

Recíprocamente, sea β una colección de Π_3 que fija $(Y = 0)$ y transforma $(X = 0)$ en $(Y = XN)$, $N \neq 0$. Entonces por (3.4) se tiene $(R^{-1} + N^{-1}) \in \mathcal{S}_3$, $\forall\ R \in \mathcal{S}_3$. Nuevamente, nos basta considerar el caso en que N es una de las de (*). Si en cada uno de estos casos escogemos $R = N$, deberíamos tener que $4N \in \mathcal{S}_3$, pero calculando en cada elección posible de N, vemos que esto no ocurre.

$\therefore$ No hay tal β.

COROLARIO 6.5. (1) No existen en Π_3 elaciones de eje $(X = 0)$, ni elaciones de eje $(Y = 0)$.

(2) No existen en Π_3 homologías de eje $(Y = 0)$ y coeje $(Y = XR)$, $R \in \mathcal{S}_3$, ni homologías de eje $(X = 0)$ y coeje $(Y = XS)$, $S \in \mathcal{S}_3$, $S \neq 0$.

Demostración: (1) Inmediato de (6.4).

(2) Análogo a (4.5).

6.6. ESTABILIZADOR DE $(X = 0)$. Análogamente a (4.6) si α es una colineación de Π_3 que fija $(X = 0)$, entonces α fija $(Y = 0)$ y de allí $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, $A, B \in GL(2,7)$ y B normaliza $\overline{G}$

De (4.7) tenemos que el normalizador de $\overline{G}$ en $GL(2,7)$ está generado por $v = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donde v es un elemento de orden 48 que genera el centralizador de $\overline{G}$ y s es una involución tal que

$$s^{-1} v s = v^7 .$$

LEMA 6.7. Las únicas colineaciones de Π_3 de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right)$ con $A \in GL(2,7)$, $g \in \overline{G}$ son tales que $A = \pm I$.

<u>Demostración</u>: Análogo a (4.8).

LEMA 6.8. Sea $\tau = v^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. No hay colineaciones de Π_3 de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \tau \end{array}\right)$, $A \in GL(2,7)$.

<u>Demostración</u>: Sea $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \tau \end{array}\right)$ una colineación de Π_3 , para $A \in GL(2,7)$.

Como $\tau^2 \in \overline{G}$, por (6.7), $A^2 = \pm I$.

<u>Caso 1</u>: Si $A = \pm I$; $R\tau \in S_3$ $\forall R \in S_3$, en particular $\pm\tau \in S_3$ $\rightarrow\!|\!\leftarrow$ contradicción.

<u>Caso 2</u>: $A^2 = I$, $A \neq \pm I$, det $A = -1$ y traza $A = 0$.

Como $A^{-1} R\tau \in S_3$ $\forall R \in S_3$, en particular $A^{-1}\tau \in S_3$ y como $\det(A^{-1}\tau) = 1$, luego $A^{-1}\tau \in R_1 \cup R_2 \cup R_3$.

(i) $A^{-1}\tau \in R_1$, $\Rightarrow A^{-1}\tau = g$, $g \in \overline{G}$

$$\Rightarrow A = A^{-1}\tau = g^{-1}$$

pero como τ centraliza $\overline{G}$, $g\tau^{-1}$ es de orden 16.

(ii) Si $A^{-1}\tau \in R_2$ entonces

$$A^{-1} \in \left\{ \pm\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

el único de estos de det - 1 y traza cero es $\pm\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pero escogiendo $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que $A^{-1}R\tau = \pm\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2$.

(iii) $A^{-1}\tau \in R_3 \Rightarrow A^{-1} \in \left\{ \pm\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

el único de los anteriores de traza 0 y det -1 es $A^{-1} = \pm\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, pero nuevamente escogiendo $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $A^{-1}R\tau \notin \mathcal{S}_3$.

$\therefore$ El caso $A^2 = I$ no puede ser.

<u>Caso 3</u>: $A^2 = -I$ entonces A es de orden 4 y $\det A = 1$ escogiendo $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, debe tenerse que $A^{-1}R\tau \in \mathcal{S}_3$, pero $\det(A^{-1}R\tau) = 5$ y en $\mathcal{S}_3$ no hay matrices de det 5 .

$\therefore$ No hay tal colineación.

COROLARIO 6.9. No hay colineaciones de Π_3 de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & v \end{array}\right)$, para $A \in GL(2,7)$.

Demostración: Inmediato de (6.8) ya que $v^3 = \tau$.

COROLARIO 6.10. No existen en Π_3 colineaciones del tipo $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \tau^i \end{array}\right)$, i impar, $A \in GL(2,7)$. Ni tampoco del tipo $\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & v^{6k+1} \end{array}\right)$, ni

$$\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & v^{6k+3} \end{array}\right) .$$

Demostración: Análogo a (4.11).

OBSERVACION 6.11. Nuevamente el subgrupo $Z = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda I & 0 \\ \hline 0 & \lambda I \end{array}\right) \quad \lambda \in GF(7)\right.$ es el subgrupo de $Aut(\Pi_3)$ correspondiente a homologías de centro el origen y eje ℓ_∞ .

LEMA 6.12. No existen en Π_3 colineaciones del tipo $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & v^{6k+2} \end{array}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $A \in GL(2,7)$, ni tampoco de la forma $\beta = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & v^{6k+4} \end{array}\right)$, que no sean aquellas en el subgrupo generado por G,H y Z .

Demostración: Análogo a (4.13).

COROLARIO 6.13. No existen colineaciones de Π_3 de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & v^i \end{array}\right)$ para $i \in \mathbb{Z}$, $A \in GL(2,7)$, excepto de aquellas en el subgrupo generado por G,H y Z .

Demostración: Igual que (4.14).

LEMA 6.14. No existen colineaciones de Π_3 de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & s \end{array}\right)$, para $A \in GL(2,7)$.

Demostración: Supongamos que $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & s \end{array}\right) \in Aut(\Pi_3)$. Como $s^2 = I$, por (6.2.2) $\Rightarrow A^2 = \pm I$.

Caso 1: Si $A = \pm I \Rightarrow \pm s \in S_3$ $\rightarrow\!|\!\leftarrow$ contradicción.

Caso 2: $A^2 = I$, $A \neq \pm I$. Entonces det $A = -1$, traza $A = 0$.

Como $A^{-1}s \in S_3$ y $\det(A^{-1}s) = 1$, debemos tener que

$$A^{-1}s \in R_1 \cup R_2 \cup R_3 .$$

(i) $A^{-1}s \in R_1$ entonces

$$A^{-1} \in \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

- Si $A^{-1} = \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ó $A^{-1} = \pm\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}$, escogiendo $R = \begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ tenemos que $A^{-1}Rs \notin S_3$.

- Si $A^{-1} = \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ escoger $R = \begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 1\end{pmatrix}$ y $A^{-1}Rs \notin S_3$.

- Si $A^{-1} = \pm\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ escoger $R = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, y $A^{-1}Rs \notin S_3$.

$\therefore \quad A^{-1}s \notin R_1$.

(ii) Si $A^{-1}s \in R_2$ entonces

$$A^{-1} \in \left\{\pm\begin{pmatrix}5 & 0\\ 4 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}\right\}$$

pero ninguno de éstos es de traza 0 .

(iii) $A^{-1}s \in R_3$ entonces

$$A^{-1} \in \left\{\pm\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

y ninguno de ellos tiene traza 0 .

$\therefore$ A no puede ser de orden 2.

Caso 3: Si $A^2 = -I$, entonces A es de orden 4 y $\det A = 1$, entonces $A^{-1}R\delta \in S_3 \quad \forall\, R \in S_3$, pero si escogemos $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, vemos que $\det(A^{-1}R\delta) = 5$ y S_3 no contiene matrices de determinante 5.

Lo que concluye la demostración.

COROLARIO 6.15. No existen colineaciones de Π_3 de la forma $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & \delta\tau^{2k} \end{array}\right)$ $k \in \mathbb{Z}$, $A \in GL(2,7)$, ni tampoco de la forma $\beta = \left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline & \delta z \end{array}\right)$, para $z \in Z$, $B \in GL(2,7)$.

Demostración: Análogo a (4.16).

LEMA 6.16. La transformación determinada por la matriz $\alpha = \left(\begin{array}{c|c} -\delta\tau^5 & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau \end{array}\right)$ induce una colineación de orden 4 de Π_3 y $\langle G,\alpha \rangle$ produce 5 órbitas sobre $\ell_\infty - \{(0),(\infty)\}$.

Demostración: Calculando directamente, se tiene que

$$(R_1^{(3)})^\alpha = R_1^{(3)} \,, \quad (R_2^{(3)})^\alpha = R_3^{(3)} \,, \quad (R_3^{(3)})^\alpha = R_2^{(3)}$$

$$(R_4^{(3)})^\alpha = R_4^{(3)} \,, \quad (R_5^{(3)})^\alpha = R_5^{(3)} \,, \quad (R_6^{(3)})^\alpha = R_6^{(3)}$$

LEMA 6.17. La colineación α de (6.16) es la única de la forma $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau \end{array}\right)$, $A \in GL(2,7)$.

Demostración: Sea $\sigma = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \delta\tau \end{array}\right)$ colineación de Π_3 . Como $(\delta\tau)^2 = -I$, tenemos por (6.2), $A^2 = \pm I$ también ya que $\delta\tau \notin S_3$, $A \neq \pm I$.

Caso 1: $A^2 = I$, $A \neq \pm I$. Entonces $\det A = -1$, traza $A = 0$ y $A^{-1}R\delta\tau \in S_3 \quad \forall\, R \in S_3$, pues escogiendo $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, $\det(A^{-1}R\delta\tau) = 5$

y S_3 no contiene matrices de det 5 .

<u>Caso 2</u>: $A^2 = -I$. Entonces A es de orden 4 y det $A = 1$.

Como $A^{-1}\delta T \in S_3$ y $\det(A^{-1}\delta T) = 1$

$\Rightarrow A^{-1}\delta T \in R_1^{(3)} \cup R_2^{(3)} \cup R_3^{(3)}$

(i) Sea $A^{-1}\delta T \in R_2^{(3)}$ entonces

$$A^{-1} \in \left\{\pm\begin{pmatrix}4 & 6\\4 & 1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}1 & 4\\6 & 4\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}6 & 4\\3 & 1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}\right\}$$

de las anteriores, solo $\pm\begin{pmatrix}1 & 4\\6 & 4\end{pmatrix}$ es de orden 4 y en tal caso escogiendo $R = \begin{pmatrix}1 & 4\\5 & 1\end{pmatrix}$, vemos que $A^{-1}R\delta T \notin S_3$.

(ii) $A^{-1}\delta T \in R_3^{(3)}$ entonces

$$A^{-1} \in \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 5\\5 & 5\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 5\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}5 & 1\\6 & 0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

De las anteriores, sólo $\pm\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 5\end{pmatrix}$ es de orden 4, pero en tal caso escogiendo $R = \begin{pmatrix}1 & 5\\6 & 1\end{pmatrix} \in S_3$ tenemos que $A^{-1}R\delta T \notin S_3$.

(iii) $A^{-1}\delta T \in R_1^{(3)}$ entonces

$$A^{-1} \in \left\{\pm\begin{pmatrix}3 & 5\\5 & 4\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 2\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}4 & 5\\5 & 3\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

pero si A^{-1} es cualquiera de $\pm\begin{pmatrix}3 & 5\\5 & 4\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}4 & 5\\5 & 3\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$ escogiendo $R = \begin{pmatrix}1 & 4\\5 & 1\end{pmatrix}$, vemos que $A^{-1}R\delta T \notin S_2$.

$\therefore$ Solamente nos quedamos con el caso $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -\delta\tau^5$ y $\sigma = \alpha$.

TEOREMA 6.18. El estabilizador $\mathcal{E}$ de $(X = 0)$ en el complemento de traslaciones de Π_3 es de orden $2^7\,3$ y está generado por G , H , Z y V , donde V es el subgrupo generado por la colineación α de (6.16).

Además, tiene 7 órbitas sobre ℓ_∞ de longitudes 1, 1, 8, 16, 8, 8, 8 respectivamente.

Demostración: Análoga a (4.19).

TEOREMA 6.19. Toda colineación de Π_3 fija a $(X = 0)$ (y por (6.4) también a $(Y = 0)$) .

Demostración: Sea α una colineación de Π_3 y supongamos que $(X = 0)^\alpha =$ $= (Y = XR)$, cierto $R \in \mathcal{S}_3$, $R \neq 0$ entonces por (6.3) hay $S \in \mathcal{S}_3$, tal que $(Y = 0)^\alpha = (Y = XS)$.

Entonces por (3.5), se tiene que

$$\frac{1}{2}(R + S) \in \mathcal{S}_3 .$$

Nos basta considerar el caso en que R es un representante de las órbitas del estabilizador de $(X = 0)$ en $\mathcal{S}_3$.

Esto es: basta considerar los casos

$$R \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>Caso 1</u>: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos entonces los $S \in S_3$ tales que $\frac{1}{2}(R + S) \in S_3$ y obtenemos solamente el valor $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pero en esta situación, R y S están en la misma órbita del estabilizador de $(X = 0)$, con lo cual tendríamos que $(X = 0)$ e $(Y = 0)$ están en una misma órbita, lo que contradice a (6.3).

<u>Caso 2</u>: $R = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $\frac{1}{2}(R + S_3) \in S_3 = \left\{\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\right\}$

pero cualquiera de los anteriores está en la misma órbita que R bajo el estabilizador de $(X = 0)$. Siguiendo el mismo argumento que en el caso anterior obtenemos una contradicción.

<u>Caso 3</u>: $R = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $\frac{1}{2}(R + S_3)$ $_3 = \left\{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -R\right\}$ y está en la misma órbita que R bajo $\mathcal{G}$. Nuevamente una contradicción.

<u>Caso 4</u>: $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}(R + S_3) \in S_3 = \{-R\}$ nuevamente igual al caso anterior.

<u>Caso 5</u>: $R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}(R + S_3) \in S_3 = \{-R\}$

$\therefore$ una contradicción.

$\therefore$ No existe tal colineación y el teorema sigue.

TEOREMA 6.20. El complemento de traslación lineal de Π_3 es el grupo $\mathcal{G}$ de orden $2^7 \cdot 3$ y tiene 7 órbitas sobre ℓ_∞ de longitudes 1,1,8,16,8,8,8

<u>Demostración</u>: Inmediato de (6.19) y (6.18).

B I B L I O G R A F I A

[1] Johnson, N.L., Translation planes of order q^2 that admit $q + 1$ elations, Geometriae Dedicata 15 (1984), 329-337.

[2] Johnson, N.L. and Pomareda, R., André planes and Nest of reguli, submitted to Geom. Ded.

[3] Luneburg, H., Translation planes, Springer Verlag 1980, New York, Berlin, Heidelberg.

[4] Maduram, D.M., Matrix representation of translation planes, Geometriae Dedicata 4 (1975), 485-492.

[5] Pomareda, R., Translation planes of odd order that admit a homology group of order $q + 1$, Submitted to Geom. Ded. (1987).