REPRESENTACIONES DE $GL(2,\mathbb{R})$ Y FUNCION GAMMA

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS
Y FARMACEUTICAS

por

HUMBERTO EDUARDO PRADO CASTILLO

Noviembre, 1983

Patrocinante: Dr. Jorge Soto Andrade

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION
TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas que la Tesis de Magister presentada por el candidato

Humberto Eduardo Prado Castillo

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Jorge Soto Andrade

Comisión Informante de Tesis

Ricardo Baeza R. — Ricardo Baeza

Manuel Elgueta D.

Gonzalo Riera L.

A G R A D E C I M I E N T O S

Agradezco la colaboración de Jorge Soto Andrade y Manuel Elgueta, así como también a Carmen Lagos quien transcribió este trabajo con habilidad y dedicación.

RESUMEN

Sean $(S,\Pi^{\alpha,\beta})$ $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^{\times})$ los modelos reducidos para la serie principal de $GL(2,\mathbb{R})$, donde S es el espacio de Schwartz de $\mathbb{R}^{\times}$, y sea $(S', '\Pi^{\alpha,\beta})$ la representa - ción contragradiente. Entonces para cualquier $\sigma \in (\mathbb{R}^{\times})$ la transformada de Mellin de

$$\left('\Pi^{\alpha,\beta}_{h_a}\right)(\sigma) \qquad (a \in \mathbb{R}^{\times})$$

$$\left('\Pi^{\alpha,\beta}_{u_b}\right)(\sigma) \qquad (b \in \mathbb{R})$$

$$\left('\Pi^{\alpha,\beta}_{w}\right)(\sigma)$$

corresponden a distribuciones definidas mediante la función gamma. A partir de las relaciones

$$w^2 = h_{-1}$$

$$u_{a+b} = u_a u_b$$

$$wu_a w = h_{-a^{-1}} u_{-a} w u_{-a^{-1}}$$

entre los generadores del grupo y debido a que $'\Pi^{\alpha,\beta}$ es una representación, se obtienen identidades donde interviene la función gamma. Utilizando el mismo método para la serie discreta, se obtienen otras identidades para la misma función.

I N D I C E

N O T A C I O N E S

$k^\times$	: grupo multiplicativo de un cuerpo k .
$\mathbb{R}^\times_{>0}$	: grupo multiplicativo de los números reales mayores que cero.
$\hat{k}^\times$	: caracteres de $k^\times$.
$\hat{\mathbb{R}}^\times_{>0}$	: caracteres de $\mathbb{R}^\times_{>0}$.
$\hat{\mathbb{C}}^\times \setminus \hat{\mathbb{R}}^\times$	: caracteres ramificados de $\mathbb{C}^\times$, es decir todas las funciones de la forma $z \to \lvert z\rvert^{ia} e^{im\arg(z)}$, de $\mathbb{C}^\times$ en $\mathbb{C}$, tales que $a \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
$\lvert s\rvert$	: norma de $s \in \mathbb{R}^2$.
$\lVert (s,t)\rVert$	: norma de $(s,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times$.
F	: transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}$.
$ev(z,\ell)$	: funcional evaluación en el punto (z,ℓ) .
$C^\infty(\mathbb{R}^\times)$	: espacio de las funciones indefinidamente diferenciables sobre $\mathbb{R}^\times$.
$S(\mathbb{R})$	: espacio de Schwartz de $\mathbb{R}$.
$GL^+(2,\mathbb{R})$	: grupo de las matrices de 2×2 de determinante positivo y con coeficientes reales.
$d^\times x$	: medida de Haar sobre $\mathbb{R}^\times$, $\frac{dx}{\lvert x\rvert}$

I N T R O D U C C I O N

El propósito de este trabajo es obtener relaciones para la función gamma utilizando los modelos reducidos para la serie discreta de $GL^+(2,\mathbb{R})$ y la serie principal de $GL(2,\mathbb{R})$. Para este fin se define la representación de Weil de $GL(2,\mathbb{R})$ y se construyen las series discreta y principal; cabe hacer notar que los modelos que constituyen tanto la serie principal como la serie discreta no se realizan como subrepresentaciones y por lo tanto no es posible definir los operadores de la representación directamente por restricción, sin embargo según una idea de P. Cartier es posible realizar los espacios que constituyen ambas series como espacios cuocientes provistos de la acción obvia, definida por paso al cuociente.

Utilizando las relaciones $w^2 = h_{-1}$, $u_{a+b} = u_a u_b$ y $wu_1w = h_{-1}u_{-1}wu_{-1}$, entre los generadores de $GL^+(2,\mathbb{R})$ y considerando la representación contragrediente de la serie discreta, $(S'_+, '\rho^{\Lambda})$, parametrizada por Λ carácter ramificado de $\mathbb{C}^{\times}$, se obtienen identidades para la función gamma. El método para obtener tales resultados es calcular la transformada de Mellin de $'\rho^{\Lambda}_{w}(\sigma)$, $'\rho^{\Lambda}_{u_b}(\sigma)$, y $'\rho^{\Lambda}_{h_a}(\sigma)$, donde σ es carácter de $\mathbb{R}^{\times}_{>0}$; y debido a los resultados de los Capítulos III y IV se puede determinar la transformada de

Mellin de la composición evaluada en σ , según las relaciones ya mencionadas entre los generadores del grupo, relaciones que son respetadas por los operadores $'\rho^{\wedge}$ las cuales implican identidades donde interviene la función gamma. Utilizando el mismo procediemto con los modelos reducidos para la serie principal de $GL(2,\mathbb{R})$ se deducen otras relaciones para la función gamma, diferentes de las obtenidas con los modelos reducidos para la serie discreta de $GL^{+}(2,\mathbb{R})$.

El método utilizado es semejante al realizado en el caso finito $GL(2,k)$ (k, cuerpo finito), para obtener identidades donde intervienen sumas de Gauss, por [L-SA], en tal caso la serie discreta por ejemplo, tiene como espacio ambiente a $\mathbb{C}^{k^{\times}}$ y se calculan las matrices de $\rho^{\wedge}_{w}$, $\rho^{\wedge}_{u_b}$ y $\rho^{\wedge}_{h_a}$ relativas a la base formada por caracteres de $k^{\times}$, lo que es equivalente a calcular la transformada de Mellin (transformada de Fourier sobre $k^{\times}$) de $\rho^{\wedge}_{w}(\sigma)$, $\rho^{\wedge}_{u_b}(\sigma)$ y $\rho^{\wedge}_{h_a}(\sigma)$ donde σ es carácter de $k^{\times}$ y luego se multiplican las matrices según las relaciones entre los generadores.

Es necesario observar que en el caso que el cuerpo k sea $\mathbb{R}$, los caracteres de $\mathbb{R}^{\times}_{>0}$ no pertenecen al espacio donde están definidos los operadores de la representación y por lo tanto se debe considerar como marco natural a la representación contragrediente, definida sobre el espacio dual. Finalmente la justificación para poder realizar lo que es análogo al producto matricial del caso finito, está dado por los resultados obtenidos en el Capítulo IV, donde se muestran algunos lemas de "composición de núcleos definidos por distribuciones".

CAPITULO I. ESPACIOS $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$, $\mathcal{S}_+$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$.

En este Capítulo definiremos y mostraremos algunas de las propiedades que poseen los espacios donde están definidas las representaciones que se consideran en los Capítulos siguientes.

§ 1. Espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$.

Diremos que una función compleja f definida sobre $\mathbb{R}^\times$, es rápidamente decreciente en cero y en el infinito sí y sólo sí para todo entero $n \geq 0$, se tiene:

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^n |f(x)| = 0 ,$$

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} = 0$$

Definiremos el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$ como el espacio de todas las funciones complejas indefinidamente diferenciables, definidas sobre $\mathbb{R}^\times$, que son rápidamente decrecientes en cero y en el infinito, como así también todas sus derivadas. Denotaremos a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$ por $\mathcal{S}$ siempre que no haya riesgo de confusión.

Ejemplos: (1) Pertenecen a S todas las funciones indefinidamente diferenciables sobre $\mathbb{R}^\times$ y de soporte compacto.

(2) La función $e^{-(\ln|x|)^2}$, $(x \neq 0)$ pertenece a S.

(3) Para cada función f en S y cada z en $\mathbb{C}$ la función $|t|^z f(t)$ pertenece a S.

Para cada f en S definiremos:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \text{ y } \quad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.1. Si f pertenece a $S(\mathbb{R}^\times)$. Entonces para cada c en $\mathbb{R}$, las funciones $e^{c?}f_+(e^?)$ y $e^{c?}f_-(-e^?)$ pertenecen a $S(\mathbb{R})$.

Demostración: En efecto, para cada c en $\mathbb{R}$, la función $t \to |t|^c f_\pm(t)$, pertenece a S. Luego sin pérdida de generalidad sea $t = e^x$, por lo tanto:

$$|t|^c f_+(t) = e^{cx} f_+(e^x) .$$

Luego, para cada entero n, $n \geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} |x|^n |e^{cx} f_+(e^x)| = \lim_{t\to+\infty} |\ln(t)|^n |t^c f_+(t)|$$

$$\leq \lim_{t\to+\infty} |t|^n |t^c f_+(t)| = 0 .$$

$$y \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^n |e^{cx} f_+(e^x)| = \lim_{x\to+\infty} |-x|^n |e^{-cx} f_+(e^{-x})|$$

$$= \lim_{t\to+0} |\ln(1/t)|^n |t^c f_+(t)|$$

$$\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{|t|^n} |t^c f_+(t)| = 0 \ .$$

Ahora, para cada entero m , $m \geq 0$

$$D^m(e^{cx} f_+(e^x)) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (e^{cx})^{(m-k)} (f_+(e^x))^{(k)}$$

es una suma de productos de $(f_+(e^x))^{(k)}$ con exponenciales, y por lo tanto se verifica sin mayor dificultad que para todo par de enteros positivos n,m

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^n |D^m(e^{cx} f_+(e^x))| = 0$$

Q.E.D.

<u>Definición 1.1</u>. En S definiremos la familia numerable de seminormas

$$p_{n,m}(f) = \sup_{0<|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^n} |D^m f(x)| + \sup_{1\leq |x|} |x^n D^m f(x)|$$

$(n,m \geq 0)$.

Proposición 1.2. El espacio S provisto de la topología definida por las seminormas $P_{n,m}$, es un espacio vectorial topológico de Fréchet.

Demostración: La familia de seminormas $P_{n,m}$, separa puntos y es numerable, luego define en S una topología localmente convexa, separada y metrizable. Para demostrar la completitud de S, sea (f_j) sucesión de Cauchy en S, luego (f_j) es una sucesión de Cauchy en $C^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$, (consideraremos el espacio $C^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$, provisto de la topología definida por la familia de seminormas $P_{m,K}(f) = \sup_{x \in K} |D^m f(x)|$, K compacto, $m = 0,1,2, \ldots$), entonces debido a que $C^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$ es completo, existe $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$, tal que la sucesión $(D^m f_j)$ converge uniformemente sobre compactos a $(D^m f)$, para todo $m = 0,1,2, \ldots$. Además, por ser (f_j) sucesión de Cauchy en S, resulta que (f_j) es un conjunto acotado en S, es decir: para todo par de enteros positivos m,n, existe constante positiva $M_{m,n}$, que no depende de j, tal que

$$P_{m,n}(f_j) \leq M_{m,n} ,$$

por lo tanto para todo $x \in \mathbb{R}^{\times}$,

$$(1) \qquad |x|^{-n} |D^m f_j(x)| + |x|^n |D^m f_j(x)| \leq M_{m,n}$$

Entonces al hacer tender j a infinito en la desigualdad (1), se deduce que f también pertenece a S . El paso final será demostrar que (f_j) converge a f en S . En efecto, sea $h_j = f_j - f$, claramente h_j pertenece a S para todo j y converge a cero en $C^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$. Por otro lado, debido a que (h_j) es sucesión de Cauchy en S , se tiene que (h_j) es acotada en S , por lo tanto para todo par de enteros positivos m,n , existe $M_{m,n}$ constante positiva que no depende de j , tal que

$$P_{m,n}(h_j) \leq M_{m,n} ,$$

y por lo tanto para todo $m,n \in \mathbb{N}$,

$$(2) \qquad \lim_{|x|\to 0} \frac{1}{|x|^n} |D^m h_j(x)| = 0 ,$$

uniformemente en j , y

$$(3) \qquad \lim_{|x|\to +\infty} |x|^n |D^m h_j(x)| = 0$$

uniformemente en j . Luego de (2) resulta que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe N constante positiva y menor que 1 (N puede elegirse independiente de j), tal que

$$\sup_{0<|x|\leq N} \frac{1}{|x|^n} |D^m h_j(x)| < \varepsilon \quad , \text{ para todo } j \in \mathbb{N} .$$

Además debido a que la sucesión (h_j) converge a cero en $C^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$, tenemos que para cualquier par de enteros positivos m,n la sucesión

$$N^{-n} \sup_{N\leq|x|\leq 1} |D^m h_j(x)|$$

converge a cero cuando j tiende a infinito. Luego de la desigualdad:

$$\sup_{0<|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^n}|D^m h_j(x)| \leq \sup_{0<|x|\leq N} \frac{1}{|x|^n}|D^m h_j(x)| + N^{-n} \sup_{N\leq|x|\leq 1} |D^m h_j(x)| ,$$

se deduce que para todo $m,n \in \mathbb{N}$ la sucesión:

$$(4) \qquad \sup_{0<|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^n} |D^m h_j(x)|$$

converge a cero cuando j tiende a infinito.

Análogamente del límite (3) se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ (que se puede elegir independiente de j) tal que

$$\sup_{M\leq|x|} |x|^n |D^m h_j(x)| < \varepsilon \qquad , \text{ para todo } j \in \mathbb{N}$$

Por otro lado utilizando una vez más el hecho que (h_j) converge a cero en $C^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$, se deduce que para todo $m,n \in \mathbb{N}$ la sucesión

$$M^n \sup_{1 \leq |x| \leq M} |D^m h_j(x)|$$

converge a cero cuando j va hacia $+\infty$. Por lo tanto de la desigualdad

$$\sup_{1 \leq |x|} |x^n D^m h_j(x)| \leq \sup_{1 \leq |x| \leq M} |x^n D^m h_j(x)| + M^n \sup_{M \leq |x|} |D^m h_j(x)| \;,$$

se obtiene que para todo $m,n \in \mathbb{N}$, la sucesión:

$$(5) \qquad \sup_{1 \leq |x|} |x^n D^m h_j(x)|$$

converge a cero cuando j tiende a infinito. Finalmente, de (4) y (5) se concluye que para todo par de enteros positivos m,n, $P_{m,n}(h_j)$ tiende a cero cuando j tiende a infinito.

Q.E.D.

<u>Proposición 1.3</u>. Sea (f_n) sucesión de funciones pertenecientes a $\mathcal{S}$, tal que f_n tiende a cero en $\mathcal{S}$. Entonces f_n tiende a cero en

$$L^p(\mathbb{R}^\times, dx) \qquad , \qquad 1 \leq p < +\infty .$$

<u>Demostración</u>: Sea $A_n = \sup_{0<|x|\leq 1} |f_n(x)|$ y

$B_n = \sup_{|x| \geq 1} |x|^2 |f_n(x)|$ entonces para $1 \leq p < +\infty$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^\times} |f_n(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{0<|x|\leq 1} |f_n(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_{|x|>1} |f_n(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq A_n \left(\int_{0<|x|\leq 1} dx\right)^{1/p} + B_n\left(\int_{|x|>1} |x|^{-2p} dx\right)^{1/p}$$

$$\leq 2^{1/p} \sup_{0<|x|\leq 1} |f_n(x)| + 2^{1/p} \sup_{|x|>1} |x|^2 |f_n(x)|$$

y por lo tanto si n tiende a infinito, $\|f_n\|_p$ tiende a cero.

Q.E.D.

Proposición 1.4. El espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^\times)$ es denso en $S(\mathbb{R}^\times)$

Demostración: Sea $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\times)$, tal que $\alpha(t) = 1$ si $e^{-1} \leq |t| \leq e$, y definamos:

$$g_n(t) = \alpha(|t|^{1/n}) ,$$

entonces:

$$g_n^{(k)}(t) = \frac{1}{n^k}(1-n) \ldots (1-(k-1)n)|t|^{1/n-k}\operatorname{sgn}(t)^k (D\alpha)(|t|^{1/n}) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n^k} |t|^{\frac{k}{n}-k} \operatorname{sgn}(t)^k (D^k\alpha)(|t|^{1/n}) .$$

Ahora, sea f cualquiera, perteneciente a $S(\mathbb{R}^{\times})$ y definamos

$$\phi_n(t) = f(t)\cdot g_n(t) ,$$

entonces para cada n, (ϕ_n) pertenece a $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$ y converge a f en $S(\mathbb{R}^{\times})$. En efecto

$$\sup_{0<|t|<1} |f(t)(g_n(t) - 1)| = \sup_{0<|t|<e^{-n}} |f(t)(g_n(t) - 1)|$$

y

$$\sup_{|t|\geq 1} |f(t)(g_n(t) - 1)| = \sup_{|t|>e^{n}} |f(t)(g_n(t) - 1)|$$

convergen a cero cuando n tiende a infinito.

Por lo tanto para todo ℓ,k enteros positivos

$$\frac{1}{|t|^{\ell}} f^{(k)}(t)g_n(t) , \qquad (0 < |t| \leq 1)$$

converge uniformemente a $\dfrac{f^{(k)}(t)}{|t|^{\ell}}$, y

$$|t|^{\ell} f^{(k)}(t)g_n(t) , \qquad (|t| \geq 1)$$

converge uniformemente a $|t|^{\ell}f^{(k)}(t)$. Además para todo j entero positivo

$$\frac{1}{|t|^{\ell}}\, f^{(k)}(t)[g_n^{(j)}(t) - 1] \quad , \qquad (0 < |t| \leq 1)$$

y $$|t|^{\ell}\, f^{(k)}(t)[g_n^{(j)}(t) - 1] \quad , \qquad (|t| \geq 1)$$

convergen uniformemente a cero. Por otro lado:

$$D^{(k)}\phi_n(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)}(t) g_n^{(j)}(t) \ ,$$

luego se deduce que:

$$\sup_{0<|t|\leq 1} \frac{1}{|t|^{\ell}} |D^{(k)}[\phi_n(t) - f(t)]| \leq$$

$$\leq \sup_{0<|t|\leq 1} \frac{1}{|t|^{\ell}} |f^{(k)}(t)(g_n(t) - 1)| +$$

$$+ \sup_{0<|t|\leq 1} \frac{1}{|t|^{\ell}} \left| \sum_{j=1}^{1} \binom{k}{j} f^{(k-j)}(t) g_n^{(j)}(t) - f^{(k)}(t) \right| ,$$

y $$\sup_{|t|\geq 1} |t|^{\ell} |D^{(k)}[\phi_n(t) - f(t)]| \leq$$

$$\leq \sup_{|t|\geq 0} |t|^{\ell} |f^{(k)}(t)(g_n(t) - 1)| +$$

$$+ \sup_{|t|\geq 1} |t|^{\ell} \left| \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)}(t) g_n^{(j)}(t) - f^{(k)}(t) \right|$$

tienden hacia cero cuando n va a infinito.

Q.E.D.

Proposición 1.5. $S(\mathbb{R}^{\times})$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^{\times})$.

Demostración: El espacio $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$ es denso en $C_c(\mathbb{R}^{\times})$, al considerar $C_c(\mathbb{R}^{\times})$ con la topología inducida por $L^2(\mathbb{R}^{\times})$, y $C_c(\mathbb{R}^{\times})$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^{\times})$, por lo tanto $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^{\times})$ y debido a que $S(\mathbb{R}^{\times})$ contiene a $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^{\times})$ se deduce la proposición.

Q.E.D.

§ 2. Espacio S_+.

Denotaremos por S_+ al espacio de todas las funciones pertenecientes a $S(\mathbb{R}^{\times})$, cuyo soporte está contenido en $\mathbb{R}^{\times}_{>0}$.

En lo que sigue, S_+ será considerado con la topología inducida por $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Proposición 2.1. El espacio S_+ es un subespacio cerrado de $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Demostración: Es evidente a partir de la definición de S_+.

Q.E.D.

Proposición 2.2. Las inclusiones:

$$C_c^{\infty}(\mathbb{R}^{\times}_{>0}) \subset S_+ \subset L^2(\mathbb{R}^{\times}_{>0}) \quad ,$$

con contínuas y con imagenes densas.

Demostración: Se deduce inmediatamente, debido a que la misma proposición es cierta para $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\times})$.

Q.E.D.

§ 3. Espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$.

Para cada $p = (p_1,p_2,p_3)$, p_i enteros positivos, denotaremos por D^p a $D_1^{p_1}D_2^{p_2}D_3^{p_3}$, donde $D_i^{p_i}$ es la derivada parcial de orden p_i, respecto a la i-ésima variable. Si x pertenece a $\mathbb{R}^2$ y $m = (m_1,m_2)$ pertenece a $\mathbb{N}^2$, denotaremos por x^m a $x_1^{m_1}x_2^{m_2}$. En lo que sigue denotaremos por I_o a $\mathbb{R}^2 \times \{0 < |t| \leq 1\}$, y por I_1 a $\mathbb{R}^2 \times \{1 < |t|\}$.

Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$, al espacio de todas las funciones complejas, definidas sobre $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times}$, que son indefinidamente diferenciables y tales que para todo $p \in \mathbb{N}^3$, $m \in \mathbb{N}^2$, $\ell \in \mathbb{N}$

$$\sup_{(x,t)\in I_o} \left| \frac{x^m}{t^{\ell}} D^p f(x,t) \right| < \infty$$

y
$$\sup_{(x,t)\in I_1} |x^m t^{\ell} D^p f(x,t)| < \infty$$

Proposición 3.1. Sea $f \in S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, P polinomio en dos variables. Entonces para todo $n,m \in \mathbb{N}$, las funciones

$$(x,t) \to P(x)Q(t)D^m f(x,t)$$

y $$(x,t) \to \frac{P(x)}{t^n} D^m f(x,t)$$

pertenecen a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$.

Demostración: Es consecuencia de la definición.

Como ejemplos de funciones pertenecientes a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, tenemos:

(1) Todas las funciones pertenecientes a $C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$

(2) Si f pertenece a $S(\mathbb{R}^2)$, y g pertenece a $S(\mathbb{R}^\times)$, entonces $f\cdot g$ pertenecen a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$.

En el Capítulo II, necesitaremos el lema siguiente:

Lema 3.1. Sea f perteneciente a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, g perteneciente a $S(\mathbb{R}^\times)$, P polinomio en dos variables. Entonces las funciones:

$$\phi_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{P(x)}\, f(x,t/_{P(x)}) & \text{si } P(x) \neq 0\,,\ t \neq 0 \\ 0 & \text{si } P(x) = 0\,,\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\phi_2(x,t) = \begin{cases} f(x)g(tP(x)) & \text{si} \quad P(x) \neq 0 \ , \quad t \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad P(x) = 0 \ , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$.

Demostración: Se verifica sin dificultad la continuidad de ϕ_1 en todos aquellos puntos (x,t) tales que $P(x) = 0$, $t \neq 0$. Además se tiene que ϕ_1 es indefinidamente diferen - ciable en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times$ y para todo $m \in \mathbb{N}^3$,

$$D^m \phi_1(x,t) = 0 \quad ,$$

para todo (x,t) tal que $P(x) = 0$, $t \neq 0$. Por otro lado debido a que para cada $m \in \mathbb{N}^3$, $D^m\phi_1$ decrece rápidamente en los bordes de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times$, se tiene que para todo $\ell \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^3$

$$\sup_{(x,t)\in I_o} \left| \frac{x^k}{t^\ell} D^m\phi_1(x,t) \right| < \infty$$

y $$\sup_{(x,t)\in I_1} |t^\ell x^k D^m \phi_1(x,t)| < \infty$$

La comprobación de que ϕ_2 pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ es análoga.

Q.E.D.

Definición: En $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, definiremos la familia numerable de seminormas

$$P_{m,\ell,k}(f) = \sup_{(x,t)\in I_o} \left|\frac{x^m}{t^\ell} D^k f(x,t)\right| + \sup_{(x,t)\in I_1} |x^m t^\ell D^k f(x,t)|$$

$\ell \in \mathbb{N}$, $k,m \in \mathbb{N}^3$.

Proposición 3.2. $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ es un espacio vectorial topológico de Fréchet según la topología definida por la familia numerable de seminormas $P_{m,\ell,k}$.

Demostración: La familia de seminormas $P_{m,\ell,k}$ separa puntos y es numerable, luego define en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ una topología localmente convexa, separada y metrizable. Para mostrar la completitud de $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, sea (f_j) sucesión de Cauchy en $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, (consideremos el espacio $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ provisto de la topología definida por las seminormas

$$P_{m,k}(f) = \sup_{(x,t)\in K} |D^m f(x,t)| ,$$

donde $m \in \mathbb{N}^3$, y K es compacto en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times$.) , entonces debido a que $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ es completo, se tiene que existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ tal que la sucesión $(D^m f_j)$ converge uniformemente sobre compactos a $D^m f$ para cualquier $m \in \mathbb{N}^3$. Por otro lado, debido a que (f_j) es una sucesión de Cauchy en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, resulta que (f_j) es un conjunto acotado en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, es decir, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, $k,m \in \mathbb{N}^3$

existe constante positiva M que no depende de j y solamente depende de ℓ,k,m tal que

(1) $\quad P_{m,\ell,k}(f_j) \leq M$

Luego al hacer tender j a infinito en la desigualdad (1), se deduce que f también pertenece a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$. La última parte de la demostración consiste en probar que (f_j) converge a f en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$. En efecto, sea

$$h_j = f_j - f \ ,$$

claramente h_j pertenece a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$ para todo j , y converge a cero en $C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$. Por otro lado, debido a que (h_j) es sucesión de Cauchy en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$ se tiene que (h_j) es acotada en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$, por lo tanto existe M constante positiva que depende solamente de ℓ,k,m , tal que

$$P_{m,\ell,k}(h_j) \leq M$$

para todo j . Por lo tanto, para todo ℓ,k,m se tiene:

(2) $$\lim_{\|(x,t)\| \to (\infty,0)} \frac{1}{|t|^{\ell}} \left| x^m D^k h_j(x,t) \right| = 0$$

uniformemente en j , y

(3) $$\lim_{\|(x,t)\| \to (\infty,\infty)} |t|^{\ell} \left| x^m D^k h_j(x,t) \right| = 0$$

uniformemente en j . Luego de (2) resulta que para cualquier $\varepsilon > 0$, existen constantes A y B (que se pueden elegir independientes de j) tales que

$$\sup_{\substack{0<|t|\leq A \\ B\leq \|x\|}} \left| \frac{x^m}{t^\ell} D^k h_j(x,t) \right| < \varepsilon \qquad , \text{ para todo } j \in \mathbb{N} .$$

Por otro lado, utilizando el hecho que la sucesión (h_j) converge a cero en $C^\infty(\mathbb{R}^\times)$, se deduce que para cada k , la sucesión:

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq B \\ A\leq|t|\leq 1}} |D^k h_j(x,t)|$$

converge a cero cuando j tiende a infinito. Por lo tanto, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $k,m \in \mathbb{N}^3$ se tiene

$$\sup_{(x,t)\in I_o} \left| \frac{x^m}{t^\ell} D^k h_j(x,t) \right| \leq$$

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq B \\ 0<|t|\leq A}} \left| \frac{x^m}{t^\ell} D^k h_j(x,t) \right| + \sup_{\substack{\|x\|\geq B \\ |t|\leq A}} \left| \frac{x^m}{t^\ell} D^k h_j(x,t) \right|$$

$$+ \sup_{\substack{\|x\|\leq B \\ A\leq|t|\leq 1}} \left| \frac{x^m}{t^\ell} D^k h_j(x,t) \right| + \sup_{\substack{B\leq\|x\| \\ A\leq|t|\leq 1}} \left| \frac{x^m}{t^\ell} D^k h_j(x,t) \right|$$

donde cada sumando del lado derecho converge a cero cuando

j tiende a infinito. Análogamente a partir de (3) y que (h_j) tiende a cero en $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, se deduce que para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $k,m \in \mathbb{N}^3$

$$\sup_{(x,t)\in I_1} |t^\ell x^m D^k h_j(x,t)|$$

converge a cero cuando j tiende a infinito.

Q.E.D.

En lo que sigue, consideremos los espacios $L^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ con la norma:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^\times} |f(x,t)|^p dxdt \right)^{1/p}$$

Proposición 3.3. Sea (f_j) sucesión perteneciente a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, convergente en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$. Entonces (f_j) es convergente en $L^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración: La aserción de la proposición, se deduce de la siguiente estimación:

Sea $f \in S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$,

$$A = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^\times} |f(x,t)|$$

$$B = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^\times} |f(x,t)||x|^4|t|^2 ,$$

entonces

$$\|f\|_p \le \left(\int_{\|(x,t)\|\le 1} |f(x,t)|^p dxdt \right)^{1/p} + \left(\int_{\|(x,t)\|\ge 1} |f(x,t)|^p dxdt \right)^{1/p}$$

$$\le A \left(\int_{\|(x,t)\|\le 1} dxdt \right)^{1/p} + B \left(\int_{\|(x,t)\|\ge 1} |x|^{-4p}|t|^{-2p} dxdt \right)^{1/p}$$

Q.E.D.

Proposición 3.4. $C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, es denso en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$.

Demostración: Sea $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, tal que $\alpha(x,t) = 1$ si $-1 \le \|x\| \le 1$, $e^{-1} \le |t| \le e$ y definamos

$$\alpha_n(x,t) = \alpha\left(\frac{x}{n}, |t|^{1/n}\right).$$

Entonces para cualquier $f \in S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, $\phi_n(x,t) = \alpha_n(x,t)f(x,t)$ pertenece a $C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y además $\phi_n \to f$ en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$.

Proposición 3.5. $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$

Demostración: $C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, es denso en $C_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ según la topología de L^2, y este último es denso en $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, por lo tanto $C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ y luego se tiene que $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$.

Q.E.D.

CAPITULO II. REPRESENTACION DE WEIL DE $GL(2,\mathbb{R})$

En este Capítulo describiremos la representación de Weil de G asociada a los espacios cuadráticos reales $(\mathbb{R}^2,H)$ y $(\mathbb{C},N)$, donde $H(x) = x_1x_2$, $(x \in \mathbb{R}^2)$ y $N(z) = \pi z\bar{z}$, $(z \in \mathbb{C})$. También describiremos los modelos reducidos para la serie discreta y la serie principal respectivamente.

En todo el Capítulo denotaremos por G al grupo $GL(2,\mathbb{R})$.

§ 1. Presentación de $GL(2,k)$, k un cuerpo conmutativo cualquiera.

Definición 1.1. Definiremos

$$h_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} , \quad (a \in k^\times) ,$$

$$h'_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} , \quad (r \in k^\times) ,$$

$$u_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (b \in k) ,$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$H = \{h_a \ / \ a \in k^{\times}\} \quad ,$$

$$H' = \{h'_r \ / r \in k^{\times}\} \quad ,$$

$$U = \{u_b \ / b \in k\} \ .$$

<u>Teorema 1.1</u>. El grupo $GL(2,k)$ está engendrado por los generadores h_a , $(a \in k^{\times})$, h'_r , $(r \in k^{\times})$, u_b , $(b \in k^{+})$ y w , con las relaciones:

i) $h'_r h'_t = h'_{rt}$ $\quad (r,t \in k^{\times})$,

ii) $h_a h_b = h_{ab}$ $\quad (a,b \in k^{\times})$,

iii) $u_a u_b = u_{a+b}$ $\quad (a,b \in k^{+})$,

iv) $h'_t h_a = h_a h'_t$ $\quad (a,t \in k^{\times})$,

v) $u_b h'_t = h'_t u_{tb}$ $\quad (t \in k^{\times} \ , \ b \in k^{+})$,

vi) $h_a u_b = u_{a^2 b} h_a$ $\quad (a \in k^{\times} \ , \ b \in k^{+})$,

vii) $w^2 = h_{-1}$

viii) $wh'_t = h_t h'_t w$ $\quad (t \in k^{\times})$,

ix) $wh_a = h_{a^{-1}} w$ $\quad (a \in k^{\times})$,

x) $wu_a w = h_{-a^{-1}} u_{-a} w u_{-a^{-1}}$ $\quad (a \in k^{\times})$.

Se tiene de hecho:

$$GL(2,k) = H'HU \,\dot\cup\, H'HUwU \;.$$

Para la demostración fácil de este teorema, ver [SA].

§ 2. Definición de la representación de Weil.

En lo que sigue (E,Q) denotará a cualquiera de los espacios cuadráticos reales, $(\mathbb{R}^2,H)$ ó $(\mathbb{C},N)$, y B_Q será la forma bilineal asociada a Q definida por:

$$B_Q(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \qquad (x,y \in E) \;.$$

Además denotaremos por $\mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^\times)$, al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$.

Lema 2.1. Para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}^\times$ y $z \in \mathbb{R}^2$, vale la identidad:

$$\int_{\mathbb{R}^4} e^{i\alpha[Q(x+y)-Q(y+z)]} f(y)\,dy\,dx =$$

$$= d(Q,\alpha) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha Q(y+z)} f(y)\,dy$$

donde $$d(Q,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{|\alpha|} & \text{si } Q = H \\ \dfrac{i}{\alpha} & \text{si } Q = N\,. \end{cases}$$

<u>Demostración</u>: Sean $\alpha \in \mathbb{R}^{\times}$, $z \in \mathbb{R}^2$ fijos. Supongamos primero que $Q = H$ y definamos para cada $\varepsilon > 0$

$$e^{-\varepsilon|\alpha x|} = e^{-\varepsilon|\alpha x_1|-\varepsilon|\alpha x_2|} \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

Entonces por convergencia dominada, tenemos

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\alpha H(x+y)-i\alpha H(y+z)}\, e^{-\varepsilon|\alpha x|}\, f(y)dydx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\alpha H(x+y)-i\alpha H(y+z)} f(y)dydx\ .$$

En efecto, denotemos B_H por B , y sea

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha H(x+y)-i\alpha H(y+z)}\, f(y)dy =$$

$$= e^{i\alpha H(x)-i\alpha H(z)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha B(x,y)-i\alpha B(y,z)}\, f(y)dy$$

por lo tanto $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Ahora sea $h_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon|\alpha x|}\, h(x)$, entonces $h_\varepsilon(x) \to h(x)$ puntualmente cuando $\varepsilon \to 0$ y además:

$|h_\varepsilon(x)| \leq |h(x)|$ para todo x, y todo $\varepsilon > 0$, de donde se deduce la afirmación (1). Por otra parte, aplicando Fubini, obtenemos para cada $\varepsilon > 0$

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\alpha H(x+y)-i\alpha H(y+z)} \, e^{-\varepsilon|\alpha x|} \, f(y)dydx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4} e^{-i\alpha H(y+z)} \, f(y) \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha H(x+y)} \, e^{-\varepsilon|\alpha x|} \, dxdy \, .$$

Ahora sea:

$$\phi_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha H(x+y)} \, e^{-\varepsilon|\alpha x|} \, dx$$

entonces

$$\phi_\varepsilon(y) = e^{i\alpha H(y)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha H(x)+i\alpha B(x,y)} \, e^{-\varepsilon|\alpha x|} \, dx =$$

$$= e^{i\alpha H(y)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha x_1 x_2+i\alpha(x_1 y_2+x_2 y_1)} \, e^{-\varepsilon|\alpha x_1|-\varepsilon|\alpha x_2|} dx_1 dx_2 =$$

$$= e^{i\alpha H(y)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon|\alpha x_2|+i\alpha x_2 y_1} \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha(x_2+y_2)x_1} e^{-\varepsilon|\alpha x_1|} dx_1 dx_2 =$$

$$= 2\varepsilon|\alpha|e^{i\alpha H(y)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x_2 y_1 - \varepsilon|\alpha x_2|}}{\varepsilon^2\alpha^2 + \alpha^2(x_2+y_2)^2}\, dx_2$$

y haciendo los cambios de variables, $x_2 + y_2 = s$, y después $s = \varepsilon t$, obtenemos:

$$\phi_\varepsilon(y) = 2\varepsilon|\alpha| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha y_1 s - \varepsilon|\alpha(s-y_2)|}}{(\alpha\varepsilon)^2 + (\alpha s)^2}\, ds$$

$$= \frac{2}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha y_1 s - \varepsilon|\alpha(s-y_2)|}}{1 + (s/\varepsilon)^2}\, ds$$

$$= \frac{2}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha y_1 \varepsilon t - \varepsilon|\alpha(\varepsilon t-y_2)|}}{1 + t^2}\, dt$$

Sea $g_\varepsilon(t) = \dfrac{e^{i\alpha y_1 \varepsilon t - \varepsilon|\alpha(\varepsilon t-y_2)|}}{1 + t^2}$ entonces $g_\varepsilon(t) \to \dfrac{1}{1 + t^2}$ puntualmente cuando $\varepsilon \to 0^+$, y además para todo $\varepsilon > 0$ y todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $|g_\varepsilon(t)| \leq \dfrac{1}{1 + t^2}$ por lo tanto:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \phi_\varepsilon(y) = \frac{2}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \frac{2\pi}{|\alpha|}$$

Por otro lado notar que para cualquier f perteneciente a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, vale la estimación

$$|f(y)\phi_{\varepsilon}(y)| \leq \frac{2\pi}{|\alpha|} |f(y)| \text{ , para todo } y \in \mathbb{R}^2 ,$$

$\varepsilon > 0$; luego podemos aplicar convergencia dominada para calcular

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha H(y+z)} f(y)\phi_{\varepsilon}(y)\, dy =$$

$$= \frac{2\pi}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha H(y+z)} f(y)\, dy .$$

Finalmente según (1) y (2) la expresión del lado izquierdo es igual a

$$\int_{\mathbb{R}^4} e^{i\alpha H(x+y)-i\alpha H(y+z)} f(y)\, dy\, dx .$$

Ahora supongamos $Q = N$, y sea

$$h_{\varepsilon}(x) = e^{-\varepsilon N(x)+i\alpha N(x)} [f\cdot e^{-i\alpha B_N(\cdot,z)}]^{\wedge}(x) ,$$

(donde $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f), entonces

$$h_{\varepsilon}(x) \to e^{i\alpha N(x)} [f\cdot e^{-i\alpha B_N(\cdot,z)}]^{\wedge}(x) \text{ puntualmen-}$$

te, y para cada $\varepsilon > 0$, h_{ε} es integrable en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto:

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\alpha[N(x+y)-N(y+z)]} f(y)\, dy\, dx =$$

$$= e^{-i\alpha N(z)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha N(x)} [f \cdot e^{-i\alpha B_N(\cdot, z)}]^{\wedge}(x)\, dx =$$

$$= e^{-i\alpha N(z)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\varepsilon N(x)+i\alpha N(x)} [f \cdot e^{-i\alpha B_N(\cdot, z)}]^{\wedge}(x)\, dx .$$

Por otro lado

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\varepsilon N(x)+i\ N(x)} [f \cdot e^{-i\alpha B_N(\cdot, z)}]^{\wedge}(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\varepsilon N(x)+i\alpha N(x)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha B_N(x,y)} f(y) e^{-i\alpha B_N(y,z)}\, dy\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha B_N(y,z)} f(y) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\varepsilon N(x)+i\alpha N(x)}\, e^{i\alpha B_N(x,y)}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon - i\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha B_N(y,z)} f(y)\, e^{\frac{-\alpha^2 N(y)}{\varepsilon - i\alpha}}\, dy$$

Ahora aplicando convergencia dominada, obtenemos:

$$(5)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon - i\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha B_N(y,z)}\, f(y)\, e^{\frac{-\alpha^2 N(y)}{\varepsilon - i\alpha}}\, dy =$$

$$= \frac{i}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha B_N(y,z)}\, f(y)\, e^{-i\alpha N(y)}\, dy\ .$$

Luego de (3), (4) y (5) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^4} e^{i\alpha[N(x+y)-N(y+z)]}\, f(y)\, dy\, dx =$$

$$= \frac{i}{\alpha}\, e^{-i\alpha N(z)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha[B_N(y,z)+N(y)]}\, f(y)\, dy =$$

$$= \frac{i}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha N(y+z)}\, f(y)\, dy\ .$$

Q.E.D.

<u>Teorema 2.1</u>. Existe una representación unitaria $(S(E\times\mathbb{R}^{\times}),\ \Pi^Q)$ de G, llamada representación de Weil de G asociada al espacio cuadrático real (E,Q), donde Π^Q está definido sobre los generadores de G por las fórmulas siguientes:

$$\Pi^{Q}_{h_a}(f)(x,t) = \lambda_Q(a) f(ax,t) \qquad (a \in \mathbb{R}^{\times}) ,$$

$$\Pi^{Q}_{h'_r}(f)(x,t) = |r|^{-1/2} f(x,r^{-1}t) \qquad (r \in \mathbb{R}^{\times}) ,$$

$$\Pi^{Q}_{u_b}(f)(x,t) = e^{ibtQ(x)} f(x,t) \qquad (b \in \mathbb{R}) ,$$

$$\Pi^{Q}_{w}(f)(x,t) = c(t,Q) \int_E e^{itB_Q(x,y)} f(y,t)\, dy$$

para $f \in \mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^{\times})$, $x \in E$, $t \in \mathbb{R}^{\times}$, donde:

$$\lambda_Q(a) = \begin{cases} |a| & \text{si } Q = H \\ a & \text{si } Q = N \end{cases}$$

y

$$c(t,Q) = \begin{cases} \dfrac{|t|}{2\pi} & \text{si } Q = H \\ -it & \text{si } Q = N . \end{cases}$$

Demostración: Sea $F(f(\cdot,t))(x) = \int_E e^{iB_N(x,y)} f(y,t)\, dy$

la transformada de Fourier de $f(\cdot,t)$, y sea

$J(x) = (x_2,x_1)$, $(x \in \mathbb{R}^2)$, entonces

$$(1) \quad \Pi^{Q}_{w}(f)(x,t) = \begin{cases} \dfrac{|t|}{2\pi} F(f(\cdot,t))\left(\dfrac{tJ(x)}{2\pi}\right) & \text{si } Q = H \\ -itF(f(\cdot,t))(tx) & \text{si } Q = N , \end{cases}$$

por lo tanto Π^Q_w es un automorfismo de $\mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^\times)$, y también se verifica trivialmente que $\Pi^Q_{h_a}$, $\Pi^Q_{h'_r}$ y $\Pi^Q_{u_b}$ son automorfismos de $\mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^\times)$. Ahora debemos demostrar que las relaciones (i) a (x) entre los generadores de G (teorema 1.1.), son respetadas por Π^Q . La verificación para las relaciones (i) a (vi), y (viii), (ix) es un cálculo sencillo. En el caso de (vii) y (x), observamos lo siguiente:

$$\left(\Pi^Q_{h_{-a^{-1}}} \circ \Pi^Q_{u_{-a}} \circ \Pi^Q_w \circ \Pi^Q_{u_{-a^{-1}}}\right)(f)(z,t) =$$

$$= \lambda_Q(-a^{-1})c(t,Q) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ita^{-1}Q(y+z)} f(y,t)\, dy \;,$$

y debido al lema 2.1., tenemos la estimación

$$\left(\Pi^Q_w \circ \Pi^Q_{u_a} \circ \Pi^Q_w\right)(f)(z,t) =$$

$$= \frac{c^2(t,Q)}{|a|^2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{ita^{-1}[Q(x+y)-Q(y+z)]} f(y,t)\, dy\, dx$$

$$= \frac{c^2(t,Q)}{|a|^2}\, d(ta^{-1},Q) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ita^{-1}Q(y+z)} f(y,t)\, dy \;.$$

Luego la relación (x) es respetada por Π^Q , sí y sólo sí:

$$(2) \qquad \lambda_Q(-a^{-1})c(t,Q) = \frac{c^2(t,Q)d(ta^{-1},Q)}{|a|^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c^2(t,H)2\pi}{|at|} & \text{si } Q = H \\ \\ \dfrac{ic^2(t,N)}{ta} & \text{si } Q = N \end{cases}$$

Por otro lado:

$$\left(\Pi_w^Q \circ \Pi_w^Q\right)(f)(z,t) = \begin{cases} \dfrac{c^2(t,H)4\pi^2}{|t|^2} & \text{si } Q = H \\ \\ \dfrac{c^2(t,N)}{|t|^2} & \text{si } Q = N \end{cases}$$

además $\qquad \Pi^Q_{h_{-1}}(f)(z,t) = \lambda_Q(-1)f(-z,t)$

por lo tanto la relación (vii) es respetada por Π^Q sí y sólo si:

$$(3) \qquad \lambda_Q(-1) = \begin{cases} \dfrac{c^2(t,H)4\pi^2}{|t|^2} & \text{si } Q = H \\ \\ \dfrac{c^2(t,N)}{|t|^2} & \text{si } Q = N \end{cases}$$

Entonces de las ecuaciones (2) y (3) se deduce que las relaciones (vii) y (x) son respetadas por Π^Q si y sólo si:

$$\lambda_Q(a) = \begin{cases} |a| & \text{si} \quad Q = H \\ a & \text{si} \quad Q = N \end{cases}$$

y

$$c(t,Q) = \begin{cases} \dfrac{|t|}{2\pi} & \text{si} \quad Q = H \\ -it & \text{si} \quad Q = N \end{cases}$$

Finalmente la unitariedad de los operadores $\Pi^Q_{h_a}$, $\Pi^Q_{h'_r}$ y $\Pi^Q_{u_b}$ es evidente. En el caso de Π^Q_w realicemos la demostración cuando $Q = N$; entonces según la ecuación (1):

$$\langle \Pi^Q_w(f), \Pi^Q_w(g) \rangle = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times} t^2 F(f(\cdot,t))(tx)\, \overline{F(g(\cdot,t))(tx)}\, dxdt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times} f(x,t)\overline{g(x,t)}\, dxdt$$

$$= \langle f,g \rangle .$$

Q.E.D.

Teorema 2.2. La representación de Weil de G se extiende por densidad a $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, como una representación unitaria y contínua.

Demostración: (i) Previamente demostremos que Π^Q es contínua sobre $SO(2,\mathbb{R})$. Sea $g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ y sean $a = \dfrac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}$ y $b = \operatorname{cotg}\theta$. Entonces según Proposición A.1. del Apendice de este Capítulo tenemos:

$$\Pi^Q_{g(\theta)}(f)(y,t) =$$

$$= c(t,Q)\ \lambda_Q((\operatorname{sen}\theta)^{-1}) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ibtQ(y-x)} e^{-itaB_Q(x,y)} f(x,t)\,dx$$

$$= \frac{c(t,Q)\lambda_Q((\operatorname{sen}\theta)^{-1})}{\lambda_Q(b)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ib^{-1}tQ(x+ay)} e^{-itB_Q(y,x+ay)}\ \Pi^Q_W(f)(x,t)\,dx$$

Además se verifican las estimaciones

$$|e^{ib^{-1}tQ(x+ay)} e^{-itB_Q(y,x+ay)}\ \Pi^Q_W(f)(x,t)| = |\Pi^Q_W(f)(x,t)|\ ,$$

y debido a que a y b^{-1} tienden a cero respectivamente, cuando θ tiende a cero, tenemos que $\dfrac{\lambda_Q((\operatorname{sen}\theta)^{-1})}{\lambda_Q(b)}$ tiende a 1 cuando θ tiende a cero y $e^{ib^{-1}Q(x+ay)} e^{-itB_Q(y,x+ay)}\ \Pi^Q_W(f)(x,t)$ converge puntualmente hacia $e^{-itB_Q(y,x)}$ $\Pi_w^Q(f)(x,t)$, cuando θ tiende a cero.

Por lo tanto al tomar límite cuando θ tiende a cero, tenemos que $\Pi_{g(\theta)}^Q(f)(y,t)$ converge puntualmente hacia

$$\Pi_{w^{-1}}^Q(\Pi_w^Q(f))(y,t) = f(y,t) .$$

Ahora utilizando el hecho

$$|f(y,t)\ \Pi_{g(\theta)}^Q(f)(y,t)| \leq M|f(y,t)|$$

para alguna constante positiva M que no depende de θ ni de (y,t) , se concluye que para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$,

$$\lim_{\theta\to 0} \langle \Pi_{g(\theta)}^Q(f),f\rangle = \langle f,f\rangle$$

(ii) Sea (g_n) sucesión en G , que converge a I (G lo supondremos provisto con la topología inducida por $\mathbb{R}^4$). Entonces utilizando la descomposición de Iwasawa de G , (es decir $G = UHH'SO(2,\mathbb{R})$ tenemos que existen a_n, r_n , b_n y θ_n tales que

$$g_n = u_{b_n} h_{a_n} h'_{r_n} g(\theta_n)$$

donde b_n y θ_n tienden a cero cuando n va a infinito, y a_n, r_n tienden a 1. Entonces

$$\Pi_{g_n}^Q(f)(x,t) = e^{itb_nQ(x)} \lambda_Q(a_n)|r_n|^{-1/2}\Pi_{g(\theta_n)}^Q(f)(a_nx,r_n^{-1}t)$$

y según (i) $\Pi^{Q}_{g_n}(f)(x,t)$, converge puntualmente a $f(x,t)$ cuando n va a infinito. Además existe $M > 0$ que no depende de n ni de (x,t) tal que

$$|f(x)\ \Pi^{Q}_{g_n}(f)(x,t)| \leq M|f(x,t)|$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times}$. Por lo tanto para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Pi^{Q}_{g_n}(f),f\rangle = \langle f,f\rangle$$

Q.E.D.

§ 3. Serie discreta de G .

Espacios $S(\Lambda)$.

Sea $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge}$, es decir $\Lambda(z) = |z|^{i\lambda}\, e^{im\arg(z)}$, ($m \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \arg(z) < 2\pi$).

Para cada $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge}$, definamos $S(\Lambda)$ como el espacio de todas las funciones complejas f , definidas sobre $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{\times}$, tales que:

i) $f(z\cdot w,t) = \Lambda(z)f(w,t|z|^2)$, para todo $z \in \mathbb{C}^{\times}$, $w \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}^{\times}$.

ii) f es indefinidamente diferenciable en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times}$, (al identificar $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$).

iii) Para cada z fijo , $f(z,\cdot)$ pertenece a $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Otra realización de los espacios $S(\Lambda)$ es la siguiente:

Proposición 3.1. Para cada $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$ existe biyección lineal de $S(\Lambda)$ sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Demostración: Para cada $f \in S(\Lambda)$, definamos $\theta(f)(t) = f(1,t)$, $(t \in \mathbb{R}^{\times})$, entonces θ , es biyección lineal, con inversa

$$\theta^{-1}(g)(z,t) = \begin{cases} \Lambda(z)g(t|z|^{2}) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

para todo $g \in S(\mathbb{R}^{\times})$.

Q.E.D.

Topología para $S(\Lambda)$, $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$.

En $S(\Lambda)$ definiremos la topología que se obtiene al transportar la topología de $S(\mathbb{R}^{\times})$ sobre $S(\Lambda)$, según θ . Diremos que una sucesión (f_n) en $S(\Lambda)$ es convergente a cero si y solo si $\theta(f_n)(\cdot) = f_n(1,\cdot)$, es convergente a cero en $S(\mathbb{R}^{\times})$. Así podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Existe isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de $S(\Lambda)$, $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$, sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$

Corolario 3.1. Sea $f \in S(\Lambda)$. Entonces para cada t fijo en $\mathbb{R}^{\times}$, la función $f(\cdot,t)$ pertenece a $S(\mathbb{R}^2)$.

Demostración: Para todo $f \in S(\Lambda)$, existe g en $S(\mathbb{R}^{\times})$, tal que

$$f(z,t) = \begin{cases} \Lambda(z)\; g(t|z|^2) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Q.E.D.

Definición de la serie discreta.

Los espacios $S(\Lambda)$, $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$, son los espacios en los que actúan las representaciones de la serie discreta de G , pero debido a que éstos no son subespacios de $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$ no es posible definir directamente por restricción la acción de la representación sobre $S(\Lambda)$. No obstante, la representación de Weil $(S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})\ ,\ \Pi^N)$, define por paso al cuociente una acción sobre $S(\Lambda)$.

Definición 3.1. Para cada $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$ y $f \in S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$, definamos

$$(1) \qquad P^{\Lambda}(f)(t) = \int_{\mathbb{C}^{\times}} \Lambda^{-1}(s) f(s,t|s|^{-2})\, ds^{\times}$$

Proposición 3.2. Para cada $\Lambda \in (\mathbb{C}^\times)^\wedge \setminus (\mathbb{R}^\times)^\wedge$, P^Λ es una aplicación lineal contínua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$

Demostración: Según lema 3.1. del Capítulo I, la función

$$\phi(s,t) = \begin{cases} f(s,t|s|^{-2})|s|^{-2} & , \quad |s| \neq 0 \quad , \quad t \neq 0 \\ \\ 0 & , \quad |s| = 0 \quad , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, y

$$P^\Lambda(f)(t) = \int_{\mathbb{C}^\times} \Lambda^{-1}(s)\phi(s,t)ds ,$$

por lo tanto existe $M > 0$ tal que:

$$|P^\Lambda(f)(t)| \leq \int_{\mathbb{C}^\times} |\phi(s,t)|ds < \int_{\mathbb{C}^\times} \frac{M}{1+s^4}\, ds < \infty$$

y se concluye que la integral (1) es uniformemente convergente para todo $t \neq 0$. Además para todo ℓ entero positivo $D_t^\ell \phi$, pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, luego se deduce que la integral

$$\int_{\mathbb{C}^\times} |D_t^\ell\, (s,t)|ds$$

es uniformemente convergente para todo $t \neq 0$. Por lo tanto

$P^{\Lambda}(f)(t)$ es indefinidamente diferenciable como función de t . Por otro lado para todo m,ℓ enteros positivos, las funciones

$$(s,t) \mapsto t^m D_t^{\ell}\phi(s,t)$$

y

$$(s,t) \mapsto \frac{1}{t^m} D_t^{\ell}\phi(s,t) \quad ,$$

pertenecen a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$, por lo tanto existen M y N constantes positivas que no dependen de t tales que:

$$|t|^m |D_t^{\ell}(P^{\Lambda}(f))(t)| \leq |t|^m \int_{\mathbb{C}} |D_t^{\ell}\phi(s,t)|ds \leq M \ ,$$

para todo t , $|t| \geq 1$, y

$$\left|\frac{1}{t^m} D_t^{\ell}(P^{\Lambda}(f))(t)\right| \leq \frac{1}{|t|^m} \int_{\mathbb{C}^{\times}} |D_t^{\ell}\phi(s,t)|ds \leq N$$

para todo t , $0 < |t| \leq 1$. Luego para cada $f \in S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$, $P^{\Lambda}(f)$ pertenece a $S(\mathbb{R}^{\times})$. Ahora para probar la continuidad de P^{Λ} , sea (f_k) sucesión en $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$ convergente a cero, entonces la sucesión definida por:

$$\phi_k(s,t) = \begin{cases} f_k(s,t|s|^{-2})\ |s|^{-2} & , \text{ si } |s| \neq 0 \ , \ t \neq 0 \\ \\ 0 & , \text{ si } |s| = 0 \ , \ t \neq 0 \end{cases}$$

también converge a cero en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, y por lo tanto para todo ℓ,m enteros positivos,

$$\sup_{\substack{|s|\leq 1\\ |t|\geq 1}} (|t|^m |D_t^\ell \phi_k(s,t)|)$$

y
$$\sup_{\substack{|s|\geq 1\\ |t|\geq 1}} (|t|^m |D_t^\ell \phi_k(s,t)|\,|s|^4)$$

convergen a cero cuando k tiende a infinito.

Luego para todo t , $|t| \geq 1$.

$$|t|^m |D_t^\ell P^\wedge(f_k)(t)| \leq \sup_{\substack{|t|\geq 1\\ |s|\leq 1}} |t|^m |D_t^\ell \phi_k(s,t)| \int_{|s|\leq 1} ds +$$

$$+ \sup_{\substack{|t|\geq 1\\ |s|\geq 1}} |t|^m |D_t^\ell \phi_k(s,t)| \int_{|s|\geq 1} \frac{1}{|s|^4}\, ds$$

tiende a cero cuando k va a infinito.

Análogamente

$$\sup_{\substack{0<|t|\leq 1\\ |s|\leq 1}} \left(\frac{1}{|t|^m} \ |D_t^\ell \phi_k(s,t)| \right)$$

y $$\sup_{\substack{0<|t|\le 1\\ |s|\ge 1}} \left\{ \frac{1}{|t|^m} \, |D_t \phi_k(s,t)| \right\}$$

convergen a cero cuando k tiende a infinito, y luego para todo t , $0 < |t| \le 1$,

$$\frac{1}{|t|^m} \, |D_t^{\ell} P^{\Lambda}(f_k)(t)| \quad ,$$

converge uniformemente a cero para todo t , tal que $0 < |t| \le 1$.

Finalmente para demostrar que P^{Λ} es sobreyectiva, sea $g \in S(\mathbb{R}^{\times})$, y $f \in S(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$\int_{\mathbb{C}^{\times}} \Lambda^{-1}(s) f(s) d^{x}s = \theta(\Lambda)$$

sea finito y distinto de cero, entonces según lema 3.1. del Capítulo I, la función

$$\phi(s,t) = \begin{cases} \theta(\Lambda)^{-1} f(s) g(t|s|^2) \ , & \text{si} \quad |s| \neq 0 \ , \quad t \neq 0 \\ \\ 0 \ , & \text{si} \quad |s| = 0 \ , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

pertenece a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$, y se verifica sin mayor dificultad que $\quad P^{\Lambda}(\phi)(t) = g(t) \qquad (t \in \mathbb{R}^{\times})$

Q.E.D.

Representaciones $(\widetilde{S}_\Lambda, \widetilde{\Pi}^\Lambda)$, $\Lambda \in (\mathbb{C}^\times)^\wedge \setminus (\mathbb{R}^\times)^\wedge$

En este párrafo demostraremos que la representación de Weil $(S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times), \Pi^N)$ define una representación $\widetilde{\Pi}^\Lambda$ en el espacio cuociente $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times) / (\mathrm{Ker}(P^\Lambda)$, que denotaremos por $\widetilde{S}_\Lambda$

Lema 3.1. Para cada $\Lambda \in (\mathbb{C}^\times) \setminus (\mathbb{R}^\times)^\wedge$ el espacio $\mathrm{Ker}(P^\Lambda)$ es un subespacio estable bajo la representación de Weil Π^N de G .

Demostración: Se verifica sin mayor dificultad que $\Pi^N_{h_a}$, $\Pi^N_{h'_r}$, y $\Pi^N_{u_b}$ dejan estable a $\mathrm{Ker}(P^\Lambda)$. Para verificar la aserción con Π^N_w , sea $f \in \mathrm{Ker}(P^\Lambda)$, entonces

$$P^\Lambda(\Pi^N_w(f))(t) = \int_{\mathbb{C}^\times} \Lambda(s)\ \Pi^N_w(f)(s^{-1}, t|s|^2)\, d^\times s$$

$$= -it \int_{\mathbb{C}^\times} \Lambda(s)|s|^2 \int_{\mathbb{C}} e^{2\pi it|s|^2 \mathrm{Re}(s^{-1}\bar{w})} f(w, t|s|^2)\, dw\, d^\times s$$

$$= -it \int_{\mathbb{C}^\times} \int_{\mathbb{C}} \Lambda(s)|s|^2 e^{2\pi it \mathrm{Re}(s\bar{w})} f(w, t|s|^2)\, dw\ d^\times s$$

$$= -it \int_{\mathbb{C}^\times} \int_{\mathbb{C}} \Lambda(s)\ e^{2\pi it \mathrm{Re}(z)} f(zs^{-1}, t|s|^2)\, dz\ d^\times s\ , \qquad (1)$$

Ahora debido a que f pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, tenemos que existen constantes positivas, A , B y C , tales que para cada $t \neq 0$ fijo, valen las estimaciones siguientes:

$$\frac{1}{|s|^2} \int_{\mathbb{C}} |f(zs^{-1},t|s|^2)|dz = \int_{\mathbb{C}} |f(w,t|s|^2)|dw$$

$$\leq A \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{1+|w|^4} dw \quad , \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{C}^\times$$

y $$\int_{\mathbb{C}^\times} \frac{|f(zs^{-1},t|s|^2)|}{|s|^2} ds \leq B|t| \int_{|s|\leq 1} ds + \frac{C}{|t|^2} \int_{|s|\geq 1} \frac{1}{|s|^4} ds ,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Luego en (1) podemos cambiar el orden de integración, y por lo tanto:

$$P^\Lambda(\Pi_W^N(f))(t) = -it \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}^\times} \Lambda(s)|s|^2 e^{2\pi i t \mathrm{Re}(z)} f(zs^{-1},t|s|^2) d^\times s dz$$

$$= -it \int_{\mathbb{C}} \Lambda(z) e^{2\pi i t \mathrm{Re}(z)} \int_{\mathbb{C}^\times} \Lambda(y) f(y^{-1},t|z|^2|y|^2) d^\times y dz = 0 \ .$$

Finalmente $\mathrm{Ker}(P^\Lambda)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ por ser el núcleo de una aplicación contínua.

Q.E.D.

Teorema 3.2. La representación de Weil $(S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times), \Pi^N)$ define una acción por paso al cuociente en el espacio $\widetilde{S}_\Lambda$, $\Lambda \in (\mathbb{C}^\times)^\wedge \setminus (\mathbb{R}^\times)^\wedge$

Demostración: Según lema 3.1. es posible definir en el espacio cuociente $\widetilde{S}_\Lambda$, una acción que denotaremos $\widetilde{\Pi}^\Lambda$ y está definida por:

$$\widetilde{\Pi}^\Lambda_g(\widetilde{f}) = \widetilde{\Pi^N_g(f)} \quad , \qquad (g \in G) \; ,$$

donde $\widetilde{f}$ denota a la clase de $f \in S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ módulo $\mathrm{Ker}(P^\Lambda)$. Se verifica fácilmente que el par $(S_\Lambda, \widetilde{\Pi}^\Lambda)$ es una representación de G.

Q.E.D.

Otra realización de la representación $(\widetilde{S}_\Lambda, \widetilde{\Pi}^\Lambda)$.

Sea $\phi : \widetilde{S}_\Lambda \to S(\Lambda)$, definido por

$$\phi(\widetilde{f}) = \theta^{-1}(P^\Lambda(f)) \; ,$$

donde θ^{-1} está definido en la demostración a la proposición 3.1. Así según el lema 3.1. ϕ establece un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de $\widetilde{S}_\Lambda$ sobre $S(\Lambda)$, hecho que nos permite trasladar la acción $\widetilde{\Pi}^\Lambda$ al espacio $S(\Lambda)$. Denotaremos por Π^Λ a la acción $\widetilde{\Pi}^\Lambda$ trasladada a $S(\Lambda)$ según ϕ.

Teorema 3.3. Las representaciones $(\widetilde{S}_{\Lambda}\ \widetilde{\Pi}^{\Lambda})$ y $(S(\Lambda),\Pi^{\Lambda})$ son equivalentes para cada $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$

Demostración: La representación Π^{Λ} , está definida por

$$\Pi_g^{\Lambda} = \phi \circ \widetilde{\Pi}_g^{\Lambda} \circ \phi^{-1} \qquad (g \in G) .$$

Q.E.D.

Definición 3.2. Llamaremos serie discreta (de representacio - nes) de G , al conjunto de tipos de isomorfía de las repre - sentaciones $(S(\Lambda),\Pi^{\Lambda})$, $(\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge})$.

Teorema 3.4. Modelos reducidos para la serie discreta.
Sea $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$. Entonces la correspondencia $\theta : f \to f(1,\cdot)$, de $S(\Lambda)$ sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$, establece un iso - morfismo de la representación $(S(\Lambda),\Pi^{\Lambda})$ sobre la represen - tación $(S(\mathbb{R}^{\times}),\rho^{\Lambda})$, definida por las fórmulas siguientes para toda $f \in S(\mathbb{R}^{\times})$,

i) $\qquad \rho_{h_a}^{\Lambda}(f)(t) = a\Lambda(a)f(ta^2)$, $\qquad (a \in \mathbb{R}^{\times})$,

ii) $\qquad \rho_{h'_r}^{\Lambda}(f)(t) = |r|^{-1/2}f(tr^{-1})$, $\qquad (r \in \mathbb{R}^{\times})$,

iii) $\qquad \rho_{u_b}^{\Lambda}(f)(t) = e^{i\pi bt}f(t)$, $\qquad (b \in \mathbb{R})$,

iv) $\rho_w^{\Lambda}(f)(t) = -it \int_{\mathbb{C}} e^{it2\pi \mathrm{Re}(z)} \Lambda(z) f(t|z|^2)\,dz$

Demostración: Según teorema 3.3.,

$$\Pi_g^{\Lambda} = \phi \circ \widetilde{\Pi}_g^{\Lambda} \circ \phi^{-1} \quad , \text{ para todo } \quad g \in G \ .$$

Además según la proposición 3.1.,

$$\theta : f \mapsto f(1,\cdot)$$

establece un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de $S(\Lambda)$ sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$. Por lo tanto

$$(\theta \circ \Pi_g^{\Lambda} \circ \theta^{-1})(f) = \Pi_g^{\Lambda}(\theta^{-1}(f))(1,\cdot)$$

para todo $g \in G$, y todo $f \in S(\mathbb{R}^{\times})$. Entonces se verifica sencillamente

$$\rho_g^{\Lambda}(f)(\cdot) = \Pi_g^{\Lambda}(\theta^{-1}(f))(1,\cdot)$$

para todo $g \in G$, $f \in S(\mathbb{R}^{\times})$.

Q.E.D.

Teorema 3.5. Las representaciones $(S(\mathbb{R}^{\times}),\rho^{\Lambda})$, $\Lambda \in (\mathbb{C}^{\times})^{\wedge} \setminus (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$, se extienden por densidad a $L^2(\mathbb{R}^{\times})$, como representaciones unitarias y contínuas.

Demostración: La unitariedad, se deduce trivialmente para (i), (ii) y (iii). Para (iv) tenemos que para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\times})$,

$$\left(\rho_w^{\Lambda}\right)^{-1}(f)(t) = -it \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi i t \mathrm{Re}(z)} \Lambda(z) f(t|z|^2)\,dz$$

por lo tanto para cualquier $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\times})$:

$$\langle f, \left(\rho_w^{\Lambda}\right)^{-1}(g) \rangle = -i \int_{\mathbb{R}^{\times}} t f(t) \int_{\mathbb{C}} e^{2\pi i t \mathrm{Re}(z)} \Lambda^{-1}(z) \overline{g(t|z|^2)}\,dz\,dt$$

$$= -i \int_{\mathbb{R}^{\times}} \int_{\mathbb{C}} |x|\,|z|^{-2} \Lambda(z^{-1}) e^{2\pi i x \mathrm{Re}(z^{-1})} f(x|z|^{-2}) \overline{g(x)}\,dz\,dx$$

$$= -i \int_{\mathbb{R}^{\times}} |x| \int_{\mathbb{C}} e^{2\pi i x \mathrm{Re}(z)} \Lambda(z) f(x|z|^2) \overline{g(x)}\,dz\,dx$$

$$= \langle \rho_w^{\Lambda}(f), g \rangle .$$

Por lo tanto $\left(\rho_w^{\Lambda}\right)^{*} = \left(\rho_w^{\Lambda}\right)^{-1}$, y queda demostrado que ρ_w^{Λ} es unitario. La continuidad de la representación ρ^{Λ} , se deduce de la continuidad de la representación Π^{N} , de la continuidad de $P^{\Lambda}|$ y de la aserción

$$\rho_g^{\Lambda} \circ P^{\Lambda} = P^{\Lambda} \circ \Pi_g^{N} \qquad , \quad \text{para todo } g \in G .$$

Q.E.D.

§ 4. Serie principal de G .

Espacios $S(\alpha,\beta)$.

Sean $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$, definamos $S(\alpha,\beta)$, como el espacio de todas las funciones complejas f definidas sobre $(\mathbb{R}^{\times})^{3}$, e indefinidamente diferenciables en $(\mathbb{R}^{\times})^{3}$, y tales que

(1) $f(rx,sy,t) = \alpha(r)\beta(s)f(x,y,trs)$

para todo $(x,y,t) \in (\mathbb{R}^{\times})^{3}$, $r \neq 0$, $s \neq 0$;

(2) para cada (x,y) fijo en $\mathbb{R}^{\times} \times \mathbb{R}^{\times}$, la función $f(x,y,\cdot)$ pertenece a $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Otra realización de los espacios $S(\alpha,\beta)$ es la siguiente

Proposición 4.1. Para cada $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$, existe biyección lineal de $S(\alpha,\beta)$ sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Demostración: Para cada $f \in S(\alpha,\beta)$, sea

$$\Omega(f)(t) = f(1,1,t) .$$

Entonces Ω es biyección lineal, con inversa

$$\Omega^{-1}(h)(x,y,t) = \alpha(x)\beta(y)h(xyt) \quad , \qquad (h \in S(\mathbb{R}^{\times}))$$

Q.E.D.

Topología para $S(\alpha,\beta)$.

Según la proposición 4.1. Ω transporta la topología de $S(\mathbb{R}^{\times})$ sobre $S(\alpha,\beta)$. Por lo tanto diremos que una sucesión (f_n) en $S(\alpha,\beta)$ es convergente a cero sí y sólo si $\Omega(f_n)$ es convergente a cero en $S(\mathbb{R}^{\times})$.

<u>Teorema 4.1</u>. La aplicación Ω establece un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de $S(\alpha,\beta)$ sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Definición de la serie principal.

Los espacios $S(\alpha,\beta)$, provistos de una acción por definir, son los espacios que constituyen la serie principal de G . Al igual que en la serie discreta, los espacios $S(\alpha,\beta)$ no son subespacios de $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$. Sin embargo la representación de Weil $(S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times}),\Pi^H)$, define por paso al cuociente una acción en $S(\alpha,\beta)$.

<u>Definición 4.1</u>. Para cada $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$, definamos

$$p^{\alpha,\beta}(f)(t) = \int_{\mathbb{R}^{\times}\times\mathbb{R}^{\times}} \alpha^{-1}(r)\beta^{-1}(s)f(r,s,t_{rs})d^{x}rd^{x}s$$

para todo $f \in S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$, y todo $t \neq 0$.

<u>Proposición 4.2</u>. Para cada $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^{\times})^{\wedge}$, la aplicación $p^{\alpha,\beta}$, es lineal contínua de $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$ sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$

Demostración: Según lema 3.1. del Capítulo I, la función

$$\phi(x_1,x_2,t) = \begin{cases} f(x_1,x_2,{}^{t}/_{x_1x_2})\cdot \dfrac{1}{x_1x_2} & \text{si } x_1x_2 \neq 0 \ , \ t \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x_1x_2 = 0 \ , \ t \neq 0 \end{cases}$$

pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, y por lo tanto existe M constante positiva tal que

$$|p^{\alpha,\beta}(f)(t)| \leq \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} |\phi(x_1,x_2,t)|dx_1dx_2 \leq \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} \frac{M}{1+x_1^2+x_2^2}\, dx_1dx_2$$

luego la integral que define $p^{\alpha,\beta}(f)(t)$ es uniformemente convergente para todo $t \in \mathbb{R}^\times$ y toda función f perteneciente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$. Además para todo ℓ entero positivo, $D_t^\ell\phi$, pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, luego se deduce que

$$\int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} |D_t^\ell\phi(x_1,x_2,t)|dx_1dx_2$$

es uniformemente convergente para todo $t \neq 0$. Por lo tanto $p^{\alpha,\beta}(f)(t)$ es indefinidamente diferenciable como función de t . Por otro lado para todo m,ℓ enteros positivos, las funciones

$$(x_1,x_2,t) \mapsto t^m D_t^\ell\phi(x_1,x_2,t)$$

y $$(x_1,x_2,t) \mapsto \frac{1}{t^m} D_t^{\ell}\phi(x_1,x_2,t)$$

pertenecen a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{\times})$, por lo tanto existen M y N que no dependen de t , tales que

$$|t|^m |D_t^{\ell}(p^{\alpha,\beta}(f))(t)| \leq |t|^m \int_{\mathbb{R}^{\times}\times\mathbb{R}^{\times}} |D_t^{\ell}\phi(x_1,x_2,t)|dx_1dx_2 < M$$

y

$$\frac{1}{|t|^m}|D_t^{\ell}(p^{\alpha,\beta}(f))(t)| \leq \frac{1}{|t|^m} \int_{\mathbb{R}^{\times}\times\mathbb{R}^{\times}} |D_t^{\ell}\phi(x_1,x_2,t)|dx_1dx_2 < N$$

para todo $t \neq 0$; por lo tanto $p^{\alpha,\beta}(f) \in S(\mathbb{R}^{\times})$.

La continuidad de $p^{\alpha,\beta}$ se demuestra de manera similar a la demostración de la continuidad de p^{Λ} . La sobreyectividad se deduce de la siguiente manera: Sea $f \in S(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{\times}\times\mathbb{R}^{\times}} \alpha^{-1}(r)\beta^{-1}(s)f(r,s)d^{\times}rd^{\times}s = \lambda(\alpha,\beta)$$

sea finito y distinto de cero. Entonces para cualquier $g \in S(\mathbb{R}^{\times})$, la función

$$\phi(x_1,x_2,t) = \begin{cases} \lambda^{-1}(\alpha,\beta)f(x_1,x_2)g(tx_1x_2) \;, & \text{si } x_1x_2 \neq 0 \;, \quad t \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x_1x_2 = 0 \;, \quad t \neq 0 \end{cases}$$

pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$, y se comprueba trivialmente que:

$$P^{\alpha,\beta}(\phi)(t) = g(t)$$

Q.E.D.

Lema 4.1. Para cada $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^\times)^\wedge$, el espacio $\mathrm{Ker}(P^{\alpha,\beta})$ es un subespacio estable bajo la representación de Weil de G asociada al espacio cuadrático $(\mathbb{R}^2,H)$.

Demostración: Se verifica fácilmente la aserción para los operadores $\Pi^H_{h_a}$, $\Pi^H_{h'_r}$ y $\Pi^H_{u_b}$.

Para verificar la aserción con Π^H_w , sea $f \in \mathrm{Ker}(P^{\alpha,\beta})$, entonces:

$$P^{\alpha,\beta}(\Pi^H_w(f))(t) = \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^2} \alpha(r)\beta(s)\Pi^H_w(f)(r^{-1},s^{-1},trs)d^\times r d^\times s$$

$$= \frac{|t|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} \alpha(r)\beta(s)(rs) \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(rx+sy)} f(x,y,trs)dxdyd^\times rd^\times s$$

Sean $rx = u_1$, $sy = u_2$, entonces

$$P^{\alpha,\beta}(\Pi^H_w(f))(t) =$$

$$= \frac{|t|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} \alpha(r)\beta(s) \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(u_1+u_2)} f(r^{-1}u_1,s^{-1}u_2,trs)du_1du_2d^\times rd^\times s$$

$$= \frac{|t|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(u_1+u_2)} \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} \alpha(r)\beta(s) f(r^{-1}u_1, s^{-1}u_2, trs)\, d^\times r\, d^\times s\, du_1 du_2$$

$$= \frac{|t|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(u_1+u_2)} \alpha(u_1)\beta(u_2) \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} \alpha(y_1)\beta(y_2) f(y_1^{-1}, y_2^{-1}, tu_1u_2y_1y_2)$$

$$d^\times y_1 d^\times y_2 du_1 du_2$$

$$= 0 \ .$$

Q.E.D.

Teorema 4.2. La representación de Weil $(S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times), \Pi^H)$ define una acción por paso al cuociente, en el espacio $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in (\mathbb{R}\ )^\wedge)$.

Demostración: Según lema 4.1., es posible definir en el espacio $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}$ la acción $\widetilde{\Pi}^{\alpha,\beta}$, definida por

$$\widetilde{\Pi}_g^{\alpha,\beta}(\widetilde{f}) = \widetilde{\Pi_g^H(f)} \quad , \quad (g \in G) \quad , \quad (\widetilde{f} \in \widetilde{S}_{\alpha,\beta}) \ .$$

Q.E.D.

Otra realización de la representación $(\widetilde{S}_{\alpha,\beta}, \widetilde{\Pi}^{\alpha,\beta})$.

Sea $\phi : \widetilde{S}_{\alpha,\beta} \to S(\alpha,\beta)$, definido por $\phi(\widetilde{f}) = \Omega^{-1}(P^{\alpha,\beta}(f))$.

Entonces según la proposición 4.1., ϕ establece un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}$ sobre $S(\alpha,\beta)$.

Teorema 4.3. El isomorfismo ϕ de $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}$ sobre $S(\alpha,\beta)$, traslada la acción $\widetilde{\Pi}^{\alpha,\beta}$ a $S(\alpha,\beta)$.

Denotaremos por $(S(\alpha,\beta),\Pi^{\alpha,\beta})$ a la representación que se obtiene al trasladar la acción $\widetilde{\Pi}^{\alpha,\beta}$ a $S(\alpha,\beta)$, según ϕ.

Definición 4.2. Llamaremos serie principal (de representaciones) de G, al conjunto de tipos de isomorfía de las representaciones $(S(\alpha,\beta),\Pi^{\alpha,\beta})$, $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^\times)^\wedge$, $\alpha \neq \beta$.

Teorema 4.4. Modelos reducidos para la serie principal.
Sean $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^\times)^\wedge$, $\alpha \neq \beta$, entonces la correspondencia $f \mapsto f(1,1,\cdot)$ de $S(\alpha,\beta)$ sobre $S(\mathbb{R}^\times)$ establece un isomorfismo de la representación $(S(\alpha,\beta),\Pi^{\alpha,\beta})$ sobre la representación $(S(\mathbb{R}^\times),\rho^{\alpha,\beta})$, definida por las fórmulas siguientes para todo $f \in S(\mathbb{R}^\times)$.

i) $\rho^{\alpha,\beta}_{h_a}(f)(t) = a\,\alpha(a)\beta(a)f(ta^2)$, $\quad (a \in \mathbb{R}^\times)$,

ii) $\rho^{\alpha,\beta}_{h'_r}(f)(t) = |r|^{-1/2}f(tr^{-1})$, $\quad (r \in \mathbb{R}^\times)$,

iii) $\rho^{\alpha,\beta}_{u_b}(f)(t) = e^{ibt}f(t)$, $\quad (b \in \mathbb{R})$,

iv) $$\rho^{\alpha,\beta}_{w}(f)(t) = \frac{|t|}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{it(x+y)}\alpha(x)\beta(y)f(txy)\,dxdy$$

Demostración: De la proposición 4.1., $\Omega(f)(t) = f(1,1,t)$ establece un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de $S(\alpha,\beta)$ sobre $S(\mathbb{R}^\times)$, y del teorema 4.4.,

$\Pi_g^{\alpha,\beta} = \phi \circ \tilde{\Pi}_g^{\alpha\ \beta} \circ \phi^{-1}$ (para todo $g \in G$). Por lo tanto

$$(\Omega \circ \Pi_g^{\alpha,\beta} \circ \Omega^{-1})(f)(t) = \Pi_g^{\alpha,\beta}(\Omega^{-1}(f))(t)$$

Entonces se verifica fácilmente

$$\rho_g^{\alpha,\beta} = \Pi_g^{\alpha,\beta}(\Omega^{-1}(f))$$

para todo $g \in G$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$.

Teorema 4.5. Las representaciones $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times), \rho^{\alpha,\beta})$ se extienden por densidad a $L^2(\mathbb{R}^\times)$, como representaciones unitarias y contínuas.

Demostración: La unitariedad se deduce trivialmente para (i), (ii) y (iii). En (iv), tenemos lo siguiente:

$$\rho_w^{\alpha,\beta}(f)(t) = \frac{|t|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(x+y)} \alpha(x)\beta(y)f(txy)dxdy$$

$$= \frac{|t|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(x+u/tx)} \alpha(x)\beta(u/tx)f(u) \frac{du}{|tx|} dx$$

$$= \frac{\beta^{-1}(t)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{itx+iu/x} \alpha(x)\beta^{-1}(x)\beta(u)f(u)du \frac{dx}{|x|}$$

$$= \frac{\beta^{-1}(t)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \alpha(x)\beta^{-1}(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{iu/x} \beta(u)f(u)du \right\} \frac{dx}{|x|}$$

$$= \frac{\beta^{-1}(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \alpha(x)\beta^{-1}(x)(\beta\cdot f)^{\wedge}(1/x)\ \frac{dx}{|x|}$$

$$= \beta^{-1}(t)[\alpha\cdot\beta^{-1}\cdot|\cdot|^{-1}(\beta\cdot f)^{\wedge}(1/\cdot)]^{\wedge}(t)$$

luego:

$$\int_{\mathbb{R}^\times} \rho_w(f)(t)\cdot\overline{\rho_w(f)}(t)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\times} [\alpha\cdot\beta^{-1}|\cdot|^{-1}(\beta\cdot f)^{\wedge}(1/\cdot)]^{\wedge}(t)\overline{[\alpha\beta^{-1}|\cdot|^{-1}(\beta\cdot f)^{\wedge}(1/\cdot)]^{\wedge}}(t)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\times} |t|^{-2}(\beta\cdot f)^{\wedge}(1/t)\cdot\overline{(\beta\cdot f)^{\wedge}}(1/t)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\times} \beta(t)f(t)\overline{\beta}(t)\overline{f}(t)dt = \langle f,f\rangle\ .$$

La continuidad de la representación se obtiene a partir del hecho

$$\rho_g^{\alpha,\beta}\circ P^{\alpha,\beta} = P^{\alpha\ \beta}\circ \Pi_g^H \qquad \text{(para todo } g\in G)$$

y de la continuidad de la representación Π^H .

Q.E.D.

CAPITULO III. TRANSFORMADA DE MELLIN.

En este Capítulo definiremos la transformada de Mellin sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$ y daremos algunas de sus propiedades más importantes.

§ 1. Transformada de Mellin sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Supongamos f perteneciente a $S(\mathbb{R}^{\times})$, entonces la transformada de Mellin de f es la función $\hat{f}$ definida por

$$\hat{f}(w;\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^{\times}} |x|^{w} \operatorname{sgn}(x)^{\varepsilon} f(x)\, d^{\times}x$$

$w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Observemos que si denotamos $\operatorname{Re}(w) = c$, $\operatorname{Im}(w) = y$, entonces:

$$\hat{f}(w;0) = F(e^{c?} f_{+}(e^{?}))(y) + F(e^{c?} f_{-}(-e^{?}))(y)$$

$$\hat{f}(w;1) = F(e^{c?} f_{+}(e^{?}))(y) - F(e^{c?} f_{-}(-e^{?}))(y)$$

donde F es la transformada de Fourier usual sobre $\mathbb{R}$.

Ahora recordemos que para cada $c \in \mathbb{R}$ y $f \in S(\mathbb{R}^{\times})$ las funciones $e^{c?} f_{+}(e^{?})$ y $e^{c?} f_{-}(-e^{?})$ pertenecen al espacio de Schwartz de $\mathbb{R}$, por lo tanto la integral que define $\hat{f}$

es absolutamente convergente, y para cada $c \in \mathbb{R}$, las funciones $y \mapsto f(c + iy;\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \{0,1\})$, pertenecen a $S(\mathbb{R})$. Esto nos permite enunciar el siguiente resultado ([L])

Proposición 1.1. Sea f perteneciente a $S(\mathbb{R}^{\times})$. Entonces:

(a) Para cada $c \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in \{0,1\}$, se tiene $\hat{f}(c + i?;\varepsilon)$ pertenece a $S(\mathbb{R})$.

(b) Para $\varepsilon \in \{0,1\}$, la función $\hat{f}(\cdot,\varepsilon)$ es una función entera de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Llamaremos W al espacio de todas las funciones ϕ que van de $\mathbb{C} \times \{0,1\}$ en $\mathbb{C}$, que son enteras, en la primera variable, y tales que para cada $c \in \mathbb{R}$ y cada $\varepsilon \in \{0,1\}$, la función $y \mapsto \phi(c + iy;\varepsilon)$ pertenece a $S(\mathbb{R})$. Nuestro objetivo siguiente será definir una topología en W y luego establecer que la transformada de Mellin, es un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de $S(\mathbb{R}^{\times})$ sobre W.

Proposición 1.2. Para $\phi \in W$, la integral

$$\int_{\mathrm{Re}(z)=c} |x|^{-z} \, \phi(z;\varepsilon)dz \qquad (\varepsilon \in \{0,1\})$$

es absolutamente convergente, y no depende de c.

Demostración: Sean $c_1 < c_2$ y consideremos el rectángulo R, de vértices $c_1 + iN$, $c_2 + iN$, $c_2 - iN$, $c_1 - iN$, $c_1 + iN$, entonces debido a que ϕ es entera, obtenemos:

$$\int_{R} |x|^{-w}\phi(w;\varepsilon)\ dw = 0 \qquad \varepsilon \in \{0,1\}$$

Por otro lado para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$ $\phi(t + i?;\varepsilon) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, por lo tanto las integrales

$$\int_{c_1+iN}^{c_2+iN} |x|^{-w}\phi(w;\varepsilon)dw \quad y \quad \int_{c_2-iN}^{c_2-iN} |x|^{-w}\phi(w;\varepsilon)dw$$

tienden a cero cuando $|N| \to +\infty$, lo que implica

$$\int_{Re(w)=c_1} |x|^{-w}\phi(w;\varepsilon)dw = \int_{Re(w)=c_2} |x|^{-w}\phi(w;\varepsilon)dw$$

Q.E.D.

Teorema 1.1. Fórmula de inversión: Para cada función f perteneciente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\times})$, vale la identidad:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi i} \sum_{\varepsilon=0}^{1} \int_{Re(w)=c} |x|^{-w}\ \hat{f}(w;\varepsilon)dw$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la integración

$$\int_{Re(w)=c} |x|^{-w}\ \hat{f}(w;\varepsilon)dw\ ,$$

es a lo largo de $Re(w) = 0$. Además supongamos que $x > 0$. Entonces realizando el cambio de variable $x = e^t$, obtenemos por inversión de Fourier el resultado del teorema. En el caso $x < 0$, se hace $x = -e^t$ y la deducción es análoga a la anterior.

Q.E.D.

Corolario 1.1. Si $\hat{f} \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$ para cualquier f perteneciente a $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Definamos la transformada de Mellin inversa por:

$$\check{\phi}(x) = \frac{1}{4\Pi i} \sum_{\varepsilon=0}^{1} \int_{Re(w)=c} |x|^{-w} \operatorname{sgn}(x)^{\varepsilon} \phi(w;\varepsilon)\, dw$$

para cualquier $\phi \in W$, $c \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.3. Para cualquier $\phi \in W$, la función $\check{\phi}$ pertenece a $S(\mathbb{R}^{\times})$.

Demostración: Se deduce del teorema 1.1.

Q.E.D.

Corolario 1.2. Si $\phi \in W$, entonces

$$\phi(w;\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{w} \operatorname{sgn}(x)^{\varepsilon} \check{\phi}(x)\, d^{\times}x .$$

$w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$.

§ 2. Topología para W .

La transformada de Mellin como una biyección lineal entre $S(\mathbb{R}^{\times})$ y W transporta la topología de S a W . Dado que $S(\mathbb{R}^{\times})$ es un espacio metrizable, caracterizaremos la topología de W mediante sucesiones. Diremos que una sucesión (ϕ_n) de W es convergente a ϕ en W sí y sólo sí la sucesión $(\check{\phi}_n)$ es convergente a $\check{\phi}$ en $S(\mathbb{R}^{\times})$. Así es inmediato el siguiente resultado:

Teorema 2.1. La transformada de Mellin es un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de $S(\mathbb{R}^{\times})$ sobre W .

Teorema 2.2. Identidad de Parseval: Para todo f,g pertenecientes a $S(\mathbb{R}^{\times})$, vale la identidad:

$$\int_{\mathbb{R}^{\times}} f(x)\overline{g(x)}\,d^{x}x = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=0}^{1}\int_{Re(z)=0} \hat{f}(z;\varepsilon)\overline{\hat{g}(z;\varepsilon)}\,dz \; .$$

Demostración: Denotemos por $\hat{f}_{+}(z)$ y $\hat{f}_{-}^{-}(z)$, la transformada de Mellin de f_{+} y f_{-}^{-} respectivamente, evaluadas en $(z,0)$, (donde $f_{-}^{-}(x) = f_{-}(-x)$). Entonces

$$\hat{f}(z,1) = \hat{f}_{+}(z) - \hat{f}_{-}^{-}(z)$$

y

$$\hat{f}(z,0) = \hat{f}_{+}(z) + \hat{f}_{-}^{-}(z)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=0}^{1}\int_{\mathrm{Re}(z)=0}\hat{f}(z;\varepsilon)\overline{\hat{g}(z;\varepsilon)}\,dz = \int_{\mathrm{Re}(z)=0}\hat{f}_+(z)\overline{\hat{g}_+(z)} + \hat{f}_-(z)\overline{\hat{g}_-(z)}\,dz$$

$$= \int_0^{+\infty} f_+(x)\overline{g_+(x)} + f_-(-x)\overline{g_-(-x)}\,\frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\frac{dx}{|x|}$$

Q.E.D.

§ 3. Transformada de Mellin sobre S_+ .

Sea f perteneciente a S_+ , entonces la transformada de Mellin de f , no depende de la variable $\varepsilon \in \{0,1\}$, y por lo tanto la función $\hat{f}$ queda definida por

$$\hat{f}(z) = \int_0^{-\infty} x^{z-1} f(x)\,dx \qquad , \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Denotaremos por W_+ al espacio de todas las funciones f que van de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, que son enteras, y tales que para cada $c \in \mathbb{R}$, la función $t \mapsto f(c + it)$ pertenece al espacio de Schwartz de $\mathbb{R}$. Así tenemos los siguientes hechos, cuya demostración se obtiene a partir de lo establecido para la transformada de Mellin sobre $S(\mathbb{R}^\times)$.

Teorema 3.1. (i) Fórmula de inversión: Para todo $f \in S_+$, vale la identidad

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re(z)=0} x^{-z} \hat{f}(z)\, dz$$

(ii) La transformada de Mellin, establece un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos de S_+ sobre W_+

(iii) $$\int_{Re(z)=0} \hat{f}(z)\overline{\hat{g}(z)}\, dz = \int_0^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, \frac{dx}{x}$$

para todo f y g pertenecientes a S_+.

CAPITULO IV. ALGUNOS LEMAS DE COMPOSICION DE NUCLEOS.

En este Capítulo definiremos los duales topológicos de $S(\mathbb{R}^{\times})$ y W respectivamente. También mostraremos algunos lemas técnicos de composición de operadores definidos sobre el dual topológico de W, tales lemas serán utilizados en el Capítulo V.

§ 1. Espacios $S'(\mathbb{R}^{\times})$ y W'

A los duales topológicos de $S(\mathbb{R}^{\times})$ y W, los denotaremos por $S'(\mathbb{R}^{\times})$ y W' respectivamente y los supondremos provistos de la topología débil $*$. Dado que $S(\mathbb{R}^{\times})$ y W son metrizables, podemos caracterizar a los funcionales contínuos sobre $S(\mathbb{R}^{\times})$ y sobre W respectivamente, por la siguiente proposición.

Proposición 1.1. (a) u pertenece a $S'(\mathbb{R}^{\times})$ sí y sólo sí para toda sucesión (f_n) de $S(\mathbb{R}^{\times})$ que converge a cero, la sucesión $\langle u,f_n\rangle$ converge a cero.

(b) θ pertenece a W' si y sólo sí para toda sucesión (ϕ_n) de W que converge a cero, la sucesión $\langle \theta,\phi_n\rangle$ converge a cero.

A los elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\times)$ y W' los llamaremos distribuciones sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$ y distribuciones sobre W respectivamente.

Ejemplos:

(1) Cualquier función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^\times)$, tal que $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$, para todo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$, define una distribución sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$ que denotaremos por T_f, y está definida según:

$$\langle T_f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^\times} f(x) g(x) dx$$

para cualquier $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$. Es claro que T_f es lineal. Para probar que es contínuo, sea $g_n \in \mathcal{S}$, tal que $g_n \to 0$ cuando $n \to \infty$; entonces porque g_n está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$ se tiene que $f \cdot g_n \in \mathcal{S}$ para cada n y además $f \cdot g_n \to 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto $f \cdot g_n \to 0$ en $L^1(\mathbb{R}^\times)$.

La correspondencia, $f \mapsto T_f$ es inyectiva, por lo tanto identificaremos la función f con la distribución T_f, y anotaremos $\langle T_f, g \rangle$ por $\langle f, g \rangle$.

(2) Para cada $(z, \varepsilon) \in \mathbb{C} \times \{0,1\}$, la función $x \mapsto |x|^z \operatorname{sgn}(x)^\varepsilon$, $(x \neq 0)$, define una distribución sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$, mediante

$$\langle |\ |^z \operatorname{sgn}^\varepsilon, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{z-1} \operatorname{sgn}(x)^\varepsilon g(x) dx \qquad (g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\ ))$$

En este ejemplo debemos observar que $\langle |\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon, g\rangle = g(z;\varepsilon)$; es decir el valor de $\langle |\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon, g\rangle$ como función de (z,ε) es igual a la transformada de Mellin de g , evaluada en (z,ε) .

Llamaremos camino recto al infinito, a cualquier curva contínua c , en el plano complejo, que no se intersecte consigo misma y para la cual existe $a \in \mathbb{R}$, de modo que $c(t) = a + it$ para todo $|t|$ suficientemente grande.

Lema 1.1. Sea ψ una función que satisface:

(i) Para cada $\varepsilon \in \{0,1\}$, la función $z \mapsto \psi(z;\varepsilon)$ es analítica excepto en $\ell(y_o,r) = \{z \in \mathbb{C}/z = x+iy,\ x \text{ entero},\ x \leq r\}$

(ii) para cada $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$,

$$\lim_{|y|\to+\infty} (1 + |y|^2)|\psi(x + iy;\varepsilon) = 0 ,$$

(iii) para toda función ϕ perteneciente a W ,

$$\sum_{\varepsilon=0}^{1} \int_c \psi(z;\varepsilon)\phi(z;\varepsilon) = 0$$

donde c es un camino recto al infinito que deja a la izquierda los puntos de $\ell(y_o),r)$. Entonces $\psi(z;\varepsilon) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}\setminus \ell(y_o,r)$, $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Demostración: Sea $\sum_\varepsilon \int_c \psi(z;\varepsilon)\phi(z;\varepsilon)dz = 0$, entonces según el teorema de la integral de Cauchy se tiene:

$$\sum_{\varepsilon} \int_{C} \psi(z;\varepsilon)\phi(z;\varepsilon)dz = \int_{\mathbb{R}\times\{0,1\}} \psi(a + it;\varepsilon)\phi(a + it;\varepsilon)dtd\varepsilon = 0$$

para todo $a \geq r$, (donde $d\varepsilon$ es la medida de conteo en $\{0,1\}$). Sea I intervalo cualquiera de $\mathbb{R}$, y denotemos por A_o a $I \times \{0\}$ y por A_1 a $I \times \{1\}$. Ahora utilizando el hecho conocido que asegura la existencia de una sucesión $g_n(\ ;0)$ perteneciente a $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, y que converge puntualmente casi en todas partes hacia la función característica χ_{A_o} de A_o, se deduce que para cada $\varepsilon \in \{0,1\}$ fijo, la sucesión $g_n(t,0)\psi(a + it;\varepsilon)$ converge puntualmente hacia $\chi_{A_o}(t;\varepsilon)\psi(a + it;\varepsilon)$. Entonces debido a que la hipótesis (iii) es cierta en particular para funciones $t \to g(t;\varepsilon)$ que per - tenezcan a $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ para cada $\varepsilon \in \{0,1\}$; se tiene que la sucesión (h_n) definida por $h_n(t;\varepsilon) = g_n(t;0)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \{1,0\}$, que claramente pertenece a $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, también satisface (iii). Entonces aplicando convergencia dominada, se tiene:

$$(1) \qquad 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\times\{0,1\}} \psi(a + it;\varepsilon)g_n(t;0)dtd\varepsilon$$

$$= \int \psi(a + it;\varepsilon)\chi_{A_o}(t,\varepsilon)dtd\varepsilon$$

$$= \int_{I} \psi(a + it;0)dt$$

Del mismo modo, se tiene que existe sucesión $g_n(\cdot,1)$ perteneciente a $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ y tal que $g_n(\cdot;1)$ converge puntualmente casi en todas partes hacia la función característica χ_{A_1} de A_1 , y utilizando una vez más el teorema de convergencia dominada, se deduce que:

$$(2) \qquad 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\times\{0,1\}} \psi(a + it;\varepsilon)g_n(t;1)dtd\varepsilon = \int_I \psi(a + it;1)dt$$

Luego, de (1) y (2) se tiene que para cualquier I , intervalo de $\mathbb{R}$,

$$\int_I \psi(a + it;0)dt = \int_I \psi(a + it;1)dt = 0$$

y por lo tanto $\psi(a + it;\varepsilon) = 0$ para $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Finalmente, por extensión analítica se obtiene la aserción del lema.

Q.E.D.

A cada función ψ que satisfaga las hipótesis del lema anterior, le podemos hacer corresponder una distribución $\theta(\psi,c)$ sobre W , definida por

$$\langle \theta(\psi,c),\phi \rangle = \sum_{\varepsilon=0}^{1} \int_C \psi(z;\varepsilon)\phi(z;\varepsilon)dz \quad , \qquad (\phi \in W)$$

donde c es un camino recto al infinito que no intersecta a $\ell(y_o,r)$. Según el lema, para cada c fijo, la correspondencia, $\psi \mapsto \theta(\psi,c)$ es uno a uno y lineal, luego se identifica la función ψ con la distribución $\theta(\psi,c)$ sobre W.

§ 2. Algunos lemas de composición de núcleos, definidos por distribuciones sobre W.

Preliminares: A las distribuciones θ sobre W, que se identifican con funciones, las denotaremos por $\theta(z;\varepsilon)$. Para cualquier u perteneciente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\times)$, denotaremos por $\hat{u}$ a la distribución de W definida por

$$\langle \hat{u},\phi\rangle = \langle u,\check{\phi}\rangle \quad ,$$

para todo ϕ en W.

<u>Lema 2.1</u>. Sean U y T aplicaciones lineales contínuas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$, U' y T' respectivamente sus tranpuestas tal que

$$[U'(|\ |^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge(w,\ell) = v(z,w;\ell,\varepsilon) \quad ,$$

$z,w \in \mathbb{C}$, $\ell,\varepsilon \in \{0,1\}$, donde v satisface:

(i) $v(z,w;\ell,\varepsilon)$ es una función analítica en cada variable, excepto en los polos, $z - w = -n$, $(n = 0,1,2,\ldots)$,

(ii) existe $c_o \geq 0$, tal que para cada $w \in \mathbb{C}$ fijo y cualquier $c \leq c_o$

$$\lim_{|y|\to+\infty} |v(c + iy,w;\ell,\varepsilon)| < \infty \qquad (\ell,\varepsilon \in \{0,1\})$$

y para cada $z \in \mathbb{C}$ fijo y cualquier $c \leq c_o$

$$\lim_{|y|\to+\infty} |v(z,c + iy;\ell,\varepsilon)| < \infty \qquad (\ell,\varepsilon \in \{0,1\})$$

(iii) para cada $(z,\varepsilon) \in \mathbb{C} \times \{0,1\}$, la función $v(z,\ ;\varepsilon,\ )$ está definida como distribución de W por

$$\langle v(z,\ ;\varepsilon,\ ),\phi(\ ,\ )\rangle = \sum_{\ell=0}^{1} \int_{c} v(z,w;\varepsilon,\ell)\phi(w,\ell)dw$$

donde c es un camino recto al infinito que deja los polos de $v(z,\ ;\varepsilon,\ )$ a la derecha, y está a la izquierda de la recta $Re(w) = c_o$.

Sea

$$[T'(|\ |^z sgn^\varepsilon)]^\wedge(w,\ell) = t(z,w;\ell,\varepsilon), \qquad (z,w \in \mathbb{C},\ \ell,\varepsilon \in \{0,1\})$$

donde t satisface las condiciones (i), (ii), (iii) y además;

(iv) La función $g(y;\ell,\varepsilon) = t(z,c + iy;\ell,\varepsilon)v(c + iy,w;\ell,\varepsilon)$ como función de y , definida para todo y , tal que $y \neq Im(v)$, $y \neq Im(z)$, es rápidamente decreciente en el infinito, para cualquier valor de c , tal que $c \leq c_o$. Entonces para todo $z,w \in \mathbb{C}$ tales que $Im(w) \neq Im(z)$ y $\varepsilon,\ell \in \{0,1\}$ se tiene:

$$[(U' \circ T')(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge (w,\ell) = \sum_{j=0}^{1} \int_\gamma t(z,\sigma;\varepsilon,j)\, v(\sigma,w;j,\ell)\, d\sigma$$

donde γ es cualquier camino recto al infinito, que quede a la izquierda de $\mathrm{Re}(\sigma) = c_o$, además γ debe ser curvo, si es necesario, de modo que los polos de $t(z,\ ;\varepsilon,\ )$ queden a la derecha y los polos de $v(\ ,w;\ ,\ell)$ queden a la izquierda.

Demostración: En (iii) el valor de la integral no depende del camino elegido, siempre que este satisfaga las hipótesis requeridas, por lo tanto el valor será el mismo si integramos a lo largo de una recta conveniente paralela al eje imaginario. Además utilizando las identidades:

$$\langle T'(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon), f\rangle = \langle [T'(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge, \hat{f}\rangle =$$

$$= \langle t(z,\cdot,\varepsilon,\cdot), f(\cdot,\cdot)\rangle ,$$

para todo f en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^X)$, $(z,\varepsilon) \in \mathbb{C} \times \{0,1\}$, y

$$\langle v(z,\cdot,\varepsilon,\cdot), \phi\rangle = \langle [U'(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge, \phi\rangle =$$

$$= \langle |\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon, U(\check{\phi})\rangle = (U(\check{\phi}))^\wedge (z,\varepsilon)$$

para todo $\phi \in W$, $(z,\varepsilon) \in \mathbb{C} \times \{0,1\}$. Obtenemos para z , tal que $\mathrm{Re}(z) > c_o$

$$\langle [(U' \circ T')(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge, \phi \rangle = \langle t(z,\cdot,\varepsilon,\cdot), (U(\check{\phi}))^\wedge \rangle$$

$$= \sum_{\ell,j} \int_{\mathrm{Re}(\sigma)=a} t(z,\sigma;\varepsilon,j) \int_{\mathrm{Re}(w)=b} v(\sigma,w;j,\ell)\phi(w;\ell)\,dw\,d\sigma$$

con $b < a < c_o < \mathrm{Re}(z)$, así podemos aplicar Fubini para deducir:

$$\langle [(U' \circ T')(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge, \phi \rangle =$$

$$= \sum_{\ell,j} \int_{\mathrm{Re}(w)=b} \phi(w;\ell) \int_{\mathrm{Re}(\sigma)=a} t(z,\sigma;\varepsilon,j)v(\sigma,w;j,\ell)\,d\sigma\,dw$$

para toda función $\phi \in W$. Por otro lado, la función

$$\psi(w;\ell) = \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathrm{Re}(\sigma)=a} t(z,\sigma,\varepsilon,j)v(\sigma,w;j,\ell)\,d\sigma$$

con ε, z fijos, define una distribución de W' , por integración contra funciones de W . Por lo tanto:

$$[(U' \circ T')(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge (w;\ell) = \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathrm{Re}(\sigma)=a} t(z,\sigma;\varepsilon,j)v(\sigma,w;j,\ell)\,d\sigma$$

y de (iv) se deduce que el valor de esta integral es el mismo a lo largo de cualquier camino, de los requeridos por el lema, siempre que $\mathrm{Im}(z) \neq \mathrm{Im}(w)$.

Q.E.D.

Lema 2.2. Sea F aplicación lineal y contínua de $S(\mathbb{R})$ en $S(\mathbb{R}^{\times})$ y F' su transpuesta. Además supongamos $[F'(|\,|^z\mathrm{sgn}^{\varepsilon})]^{\wedge} = w(z;\varepsilon)ev(1-z,\varepsilon)$, $(z,\varepsilon) \in \mathbb{C} \times \{0,1\}$, y $w(z;\varepsilon)$ es una función analítica en z , excepto para $z = 0, -1, -2, \ldots$. Entonces vale la identidad entre distribuciones

$$[(F' \circ F')(|\,|^z\mathrm{sgn}^{\varepsilon})]^{\wedge} = w(z;\varepsilon)w(1-z;\varepsilon)ev(z,\varepsilon)$$

para todo $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Demostración: Sea $\phi \in W$, entonces se verifica:

$$(F(\check{\phi}))^{\wedge}(z;\varepsilon) = \langle |\,|^z\mathrm{sgn}^{\varepsilon}, F(\check{\phi}) \rangle$$

$$= \langle (F'(|\,|^z\mathrm{sgn}^{\varepsilon}))^{\wedge}, \phi \rangle = w(z;\varepsilon)\phi(1-z;\varepsilon)$$

por lo tanto:

$$\langle [(F' \circ F')(|\,|^z\mathrm{sgn}^{\varepsilon})]^{\wedge}, \phi \rangle = \langle F'(|\,|^z\mathrm{sgn}^{\varepsilon}), F(\check{\phi}) \rangle$$

$$= w(z;\varepsilon)(F(\check{\phi}))^{\wedge}(1-z;\varepsilon) = w(z;\varepsilon)w(1-z;\varepsilon)\phi(z;\varepsilon)$$

$$= w(z;\varepsilon)w(1-z;\varepsilon)\langle ev(z,\varepsilon), \phi \rangle$$

para cualquier $\phi \in W$.

Q.E.D.

<u>Lema 2.3.</u> Sean F, U aplicaciones lineales y contínuas de $S(\mathbb{R}^\times)$ en $S(\mathbb{R}^\times)$, y F', U' las respectivas transpuestas. Suponer que

$$[U'(|\,|^z \operatorname{sgn}^\varepsilon)]^\wedge(s;\ell) = v(z,s;\varepsilon,\ell) ,$$

$z,s \in \mathbb{C}$, $\varepsilon,\ell \in \{0,1\}$, y

$$[F'(|\,|^z \operatorname{sgn}^\varepsilon)]^\wedge = w(z;\varepsilon)\, ev(1-z,\varepsilon)$$

$(z,\varepsilon) \in \mathbb{C} \times \{0,1\}$, donde v satisface las condiciones (i), (ii), (iii) del lema 2.1., y w verifica:

(i) $z \mapsto w(z;\varepsilon)$ es una función analítica para cada $\varepsilon \in \{0,1\}$, excepto en los polos $z = 0, -1, -2, \ldots,$

(ii) para cada z,s,ε,ℓ fijos, las funciones

$$y \mapsto v(z,c+iy;\varepsilon,\ell)w(c+iy;\varepsilon) \; , \quad \text{donde} \quad |y| \neq \operatorname{Im}(z)$$

$$y \mapsto w(c+iy;\varepsilon)w(c+iy,s;\varepsilon,\ell) \; , \quad \text{donde} \quad |y| \neq \operatorname{Im}(s)$$

son rápidamente decrecientes en el infinito, para cualquier valor de c que sea menor o igual a c_o . Entonces

(a) $[(U' \circ F' \circ U')(|\,|^z \operatorname{sgn}^\varepsilon)]^\wedge(s;\ell) =$

$$= \sum_{j=0}^{1} \int_\gamma v(z,\sigma;\varepsilon,j)w(\sigma;j)v(1-\sigma,s;j,\ell)\,d\sigma$$

donde γ es cualquier camino recto al infinito, situado a la izquierda de la recta de $\operatorname{Re}(\sigma) = c_o$ y curvo de modo que los polos de $\sigma \mapsto w(\sigma;j)$ queden a la izquierda y los polos de $\sigma \mapsto v(z,\sigma;\varepsilon,j)v(1-\sigma,s;j,\ell)$ queden a la derecha con s y z elegidos de modo tal que ningún polo de $w(\sigma;j)$ coincida con algún polo de $v(z,\sigma;\varepsilon,j)v(1-\sigma,s;j,\ell)$

(b) $[(F' \circ U' \circ F')(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge(\sigma,\ell) =$

$$= w(z;\varepsilon)v(1-z,1-\sigma;\varepsilon,\ell)w(1-\sigma;\varepsilon)$$

para todo $z,\sigma \in \mathbb{C}$ tales que $z \neq \pm n$, $\sigma \neq \pm n$, n entero.

<u>Demostración</u>: (a) Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $\mathrm{Re}(z) > c_o$, entonces para cualquier f en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\times)$ se tiene según el ejemplo N° 2, párrafo § 1.:

$$[F(f)]^\wedge(z;\varepsilon) = \langle [F'(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge, \hat{f}\rangle = w(z;\varepsilon)\hat{f}(1-z;\varepsilon) .$$

Entonces para cualquier ϕ perteneciente a W ,

$$\langle [(U' \circ F' \circ U')(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon)]^\wedge, \phi\rangle = \langle U'(|\,|^z \mathrm{sgn}^\varepsilon), F(U(\check{\phi}))\rangle$$

$$= \sum_j \int_{\mathrm{Re}(\sigma)=a} v(z,\sigma;\varepsilon,j)[F(U(\check{\phi}))]^\wedge(\sigma;j)d\sigma$$

$$= \sum_j \int_{\mathrm{Re}(\sigma)=a} v(z,\sigma;\varepsilon,j)w(\sigma;j)[U(\check{\phi})]^\wedge(1-\sigma;j)d\sigma$$

$$= \sum_j \sum_\ell \int_{\mathrm{Re}(\sigma)=a} v(z,\sigma;\varepsilon,j)w(\sigma;j) \int_{\mathrm{Re}(s)=b} v(1-\sigma,s;j,\ell)\phi(s;\ell)ds d\sigma$$

donde $a < b < c_o < Re(z)$ y $a + b \neq 1,2, \ldots,$ así resulta posible cambiar el orden de integración, y obtenemos:

$$\langle [[U' \circ F' \circ U'](|\,|^z sgn^{\varepsilon})]^{\wedge}, \phi \rangle =$$

$$= \sum_{\ell, j} \int_{Re(s)=b} \phi(s;\ell) \int_{Re(\sigma)=a} v(z,\sigma;\varepsilon,j)w(\sigma;j)v(1-\sigma,s;j,\ell)d\sigma ds \ ,$$

y debido a que la función:

$$(s;\ell) \longmapsto \sum_{j} \int_{Re(\sigma)=a} v(a,\sigma;\varepsilon,j)w(\sigma;j)v(1-\sigma,s;j,\ell)d\sigma$$

define una distribución de W por integración contra funciones de W , tenemos:

$$[(U' \circ F' \circ U')(|\,|^z sgn^{\varepsilon})]^{\wedge}(s;\ell) =$$

$$= \sum_{j} \int_{Re(\sigma)=a} v(z,\sigma;\varepsilon,j)w(\sigma;j)v(1-\sigma,s;j,\ell)d\sigma$$

y luego (a) se deduce por el teorema de Cauchy, eligiendo s y z en la forma que es exigida por el enunciado.

Para demostrar (b), observemos lo siguiente:

$$\langle [W' \circ U' \circ W')(|\,|^z sgn^{\varepsilon})]^{\wedge}, \phi \rangle =$$

$$= w(z;\varepsilon) \sum_j \int_{Re(\sigma)=a} v(1-z,\sigma;\varepsilon,j)w(\sigma;j)\phi(1-\sigma;j)d\sigma$$

$$= w(z,\varepsilon) \sum_j \int_{Re(\sigma)=a-1} v(1-z,1-\sigma;\varepsilon,j)w(1-\sigma;j)\phi(\sigma;j)d\sigma$$

de donde se deduce la aserción (b).

Q.E.D.

§ 3. Espacios S_+' y W_+'.

Los funcionales lineales y contínuos sobre S_+ y sobre W_+ respectivamente, se caracterizan por la siguiente proposición:

Proposición 3.1. (a) u pertenece a S_+' sí y sólo sí para toda sucesión (f_n) de S_+, que sea convergente a cero, la sucesión $\langle u,f_n\rangle$ converge a cero.

(b) θ pertenece a W_+' sí y sólo sí para toda sucesión (ϕ_n) de W_+, que sea convergente a cero, la sucesión $\langle\theta,\phi_n\rangle$ es convergente a cero.

Demostración: Es evidente, debido a que S_+ y W_+ son espacios metrizables.

Q.E.D.

Los lemas (2.1), (2.2) y (2.3) se reformulan en W'_+ de la manera obvia, recordando que las funciones de W_+ no dependen de la variable $\varepsilon \in \{0,1\}$, y toda función ϕ pertenciente a W se proyecta sobre W_+ según la correspondencia $\phi \mapsto \phi(\ ;0)$.

Definiremos para cualquier u perteneciente a S'_+ la distribución $\hat{u}$ sobre W_+ , según la identidad $\langle \hat{u},\phi\rangle = \langle u,\check{\phi}\rangle$, para toda ϕ perteneciente a W_+ , donde $\check{\phi}$ es la tranformada de Mellin inversa de ϕ .

Las distribuciones v sobre W_+ que se identifiquen con funciones definidas sobre alguna región A del plano complejo, las denotaremos por $v(z)$, $(z \in A)$.

En los resultados siguientes omitiremos las demostraciones debido a que son los lemas análogos a los lemas 2.1., 2.2. y 2.3.

<u>Lema 3.1</u>. Sean U,T aplicaciones lineales y contínuas sobre S_+ , U' y T' respectivamente sus transpuestas, tales que

$$[U'(\ )^z]^\wedge(w) = v(z,w) ,$$

$$[T'(\ )^z]^\wedge(w) = t(z,w) ,$$

donde v y t satisfacen las hipótesis del lema 2.1.

Entonces

$$[(U' \circ T')((\ )^z)]^\wedge(w) = \int_\gamma t(z,\sigma)v(\sigma,w)d\sigma$$

donde γ es un camino recto al infinito que verifica las hipótesis del lema 2.1.

Lema 3.2. Sea F aplicación lineal y contínua de S_+ en S_+ y sea F' su transpuesta, tal que

$$[F'(\ )^z]^\wedge = w(z)ev(1-z) ,$$

donde la función $z \mapsto w(z)$ verifica las hipótesis del lema 2.2.. Entonces:

$$[(F' \circ F')(\ )^z]^\wedge = w(z)w(1-z)ev(z)$$

Lema 3.3. Sea F,U aplicaciones lineales y contínuas de S_+ en S_+ , y F',U' las respectivas transpuestas. Sea

$$[U'(\ )^z]^\wedge(s) = v(z,s) ,$$

$$[F'(\ )^z]^\wedge = w(z)ev(z) ,$$

donde v y w satisfacen las hipótesis del lema 2.3.. Entonces:

(a) $$[(U' \circ F' \circ U')(\ )^z]^\wedge(s) = \int_\gamma v(z,\sigma)w(\sigma)v(1-\sigma,s)d\sigma$$

donde γ es un camino recto al infinito que satisface las condiciones del lema 2.3.

(b) $$[(F' \circ U' \circ F')(\ )^z]^\wedge(\sigma) = w(z)v(1-z,1-\sigma)v(1-\sigma) .$$

CAPITULO V. LEMAS NO CLASICOS PARA LA FUNCION GAMMA.

En este Capítulo demostraremos algunos lemas no clási - cos para la función gamma que se deducen a partir de los modelos reducidos para la serie discreta de $GL^+(2,\mathbb{R})$ y de los modelos reducidos para la serie principal de $GL(2,\mathbb{R})$.

1. Función $\Gamma_{\mathbb{C}}$.

Preliminares.

(i) Los modelos reducidos para la serie discreta de $GL^+(2,\mathbb{R})$ están constituídos por (S_+,ρ^Λ) , $(\Lambda \in (\mathbb{C}^\times)^\wedge \setminus (\mathbb{R}^\times)^\wedge)$, donde ρ^Λ está definido sobre los gene - radores h_a , $(a \neq 0)$, h'_r , $r > 0$, u_b y w según el teorema 3.4. del Capítulo II.

(ii) Denotaremos por $(S'_+,{}'\rho^\Lambda)$ a la representación contra - grediente de la representación (S_+,ρ^Λ) , donde ${}'\rho^\Lambda$ está definida por:

$$\langle {}'\rho^\Lambda_g(u),f\rangle = \langle u,\rho^\Lambda_{g^{-1}}(f)\rangle ,$$

para todo $u \in S'_+$, $f \in S_+$, $g \in G$.

(iii) Denotaremos por $g(z,m)$ a

$$g(z,m) = \frac{(e^{iz\pi/2} + i^m e^{-iz\pi/2})\pi\Gamma(1-z)}{2^{-z}\Gamma(1+\frac{m-z}{2})\Gamma(1+\frac{-m-z}{2})}$$

para todo m entero y z complejo distinto de $2+m+2n$, $2-m+2n$, $-n$, con n entero positivo.

(iv) Definiremos la función $\Gamma_{\mathbb{C}}$, por

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(z,m) = g(z,m)\Gamma(z)$$

con m y z como en (iii).

<u>Proposición 1.1</u>. Sea $\Lambda(w) = |w|^{i\lambda}e^{im\arg(w)}$, $w \in \mathbb{C}^{\times}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Entonces:

(i) $[{}'\rho^{\Lambda}_{h_a}((\ )^z)]^{\wedge} = a^{-1}|a|^{2z-i\lambda}ev(z)$, $\quad (a \in \mathbb{R}^{\times})$

(ii) $$[{}'\rho^{\Lambda}_{u_b}((\ )^z)]^{\wedge}(w) = \frac{1}{2\pi i}\Gamma(z-w)\pi^{-(z-w)}[b_+^{-(z-w)}e^{i(z-w)\pi/2} + b_-^{-(z-w)}e^{-i(z-w)\pi/2}]$$

$z-w \neq 0, -1, -2, \ldots$, $b \in \mathbb{R}^{\times}$.

(iii) $[{}'\rho^{\Lambda}_{w}((\ )^z)]^{\wedge} = (-i)(2\pi)^{-(2z-i\lambda)}\Gamma_{\mathbb{C}}(2z-i\lambda,m)ev(i\lambda-z+1)$.

z complejo distinto de $2+m+2n$, $2-m+2n$, $-n$, $(n \in \mathbb{N})$.

Demostración: (i) Para cualquier ϕ perteneciente a W_+, se tiene:

$$\langle ({}'\rho^{\Lambda}_{h_a}((\ )^z))^{\wedge},\phi\rangle = \langle (\ )^z,\rho^{\Lambda}_{h_a^{-1}}(\check{\phi})\rangle$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{z-1}|a|^{-i\lambda}a^{-1}\check{\phi}(a^{-2}x)\,dx$$

$$= a^{-1}|a|^{2z-i\lambda}\phi(z)$$

$$= a^{-1}|a|^{2z-i\lambda}\langle ev(z),\phi\rangle .$$

(ii) Sea $b > 0$, y sea $v_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon t}t^{i\alpha}$, con $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, v_ε pertenece a S'_+, y para cualquier ϕ perteneciente a W_+, la sucesión

$\langle {}'\rho^{\Lambda}_{u_b}(v_\varepsilon),\check{\phi}\rangle$ converge hacia

$\langle {}'\rho^{\Lambda}_{u_b}((\ )^{i\alpha}),\check{\phi}\rangle$, cuando $\varepsilon \to 0^+$. Por otro lado tenemos la estimación

$$\langle {}'\rho^{\Lambda}_{u_b}(v_\varepsilon),\check{\phi}\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t(ib\pi+\varepsilon)}t^{i\alpha-1}\check{\phi}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-t(ib\pi+\varepsilon)}t^{i\alpha-1}\int_{-i\infty}^{+i\infty} t^{-w}\phi(w)\,dw\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-t(ib\pi+\varepsilon)}t^{i\alpha-1}\int_{Re(w)=-1/2} t^{-w}\phi(w)\,dwdt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{Re(w)=-1/2}\phi(w)\int_0^{+\infty} e^{-t(ib\pi+\varepsilon)}t^{i\alpha-w-1}dtdw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{Re(w)=-\frac{1}{2}}\phi(w)\Gamma(i\alpha - w)e^{i(i\alpha-w)}(-b\pi + i\varepsilon)^{-(i\alpha-w)}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(-\frac{1}{2}+i(\alpha-t)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)e^{i(1/2+it)\pi/2}(-b\pi+i\varepsilon)^{-(1/2+it)}dt\ .$$

Sea

$$\psi_\varepsilon(t) = \phi\left(-\frac{1}{2}+(i(\alpha-t)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)e^{i(1/2+it)\pi/2}(-b\pi+i\varepsilon)^{-(1/2+it)}\quad ,$$

entonces se tienen los siguientes hechos:

(1) $\quad |\psi_\varepsilon(t)| \leq |\phi(-1/2 + i(\alpha - t)|\ \ |\Gamma(1/2 + it)|e^{\pi/2|t|}$,

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(2) Debido a que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la función

$t \to \phi(-1/2 + i(\alpha - t))$,

es rápidamente decreciente en el infinito, y además

$$\lim_{|t|\to+\infty} |\Gamma(1/2 + it)e^{\pi/2|t|}| = \sqrt{2\pi}$$

se tiene que la función

$$t \to |\phi(-1/2 + i(\alpha - t))| \; |\Gamma(1/2 + it)|e^{\pi/2|t|}$$

es integrable en $\mathbb{R}$.

(3) La sucesión $\psi_\varepsilon(t)$, converge puntualmente hacia

$$\phi(-1/2 + i(\alpha-t))\Gamma(1/2 + it)e^{i(1/2+it)\pi/2}(b\pi)^{-(1/2+it)}$$

cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Luego, según (1), (2) y (3), se tiene para todo $b > 0$

$$\langle {}'\rho^{\Lambda}_{u_b}((\;)^{i\alpha}),\check{\phi}\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re(w)=-1/2} \phi(w)\Gamma(i\alpha-w)e^{i(i\alpha-w)\pi/2}(b\pi)^{-(i\alpha-w)}dw$$

Análogamente, si $b < 0$, se deduce que

$$\langle {}'\rho^{\Lambda}_{u_b}((\;)^{i\alpha}),\check{\phi}\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re(w)=-1/2} \phi(w)\Gamma(i\alpha-w)e^{-i(i\alpha-w)\pi/2}(b_-\pi)^{-(i\alpha-w)}dw$$

De este modo, en cualquiera de los casos, $b > 0$ ó $b < 0$, se tiene:

$$\langle [\,{}'\rho^{\Lambda}_{u_b}(\ )^{i\alpha}]^{\wedge},\phi\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(w)=-1/2} \phi(w)\Gamma(i\alpha-w)\pi^{-(i\alpha-w)}[\,b_+^{-(i\alpha-w)}e^{i(i\alpha-w)\pi/2} +$$

$$+ b_-^{-(i\alpha-w)}e^{-i(i\alpha-w)\pi/2}]\,dw$$

donde $b_+^z = \begin{cases} b^z & \text{si } b > 0 \\ 0 & \text{si } b \le 0 \end{cases}$, $b_-^z = \begin{cases} 0 & \text{si } b > 0 \\ |b|^z & \text{si } b < 0 \end{cases}$

Por lo tanto, para todo $b \neq 0$.

$$[\,{}'\rho^{\Lambda}_{u_b}((\ )^{i\alpha})]^{\wedge}(w) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,\Gamma(i\alpha-w)\pi^{-(i\alpha-w)}[\,b_+^{-(i\alpha-w)}e^{i(i\alpha-w)\pi/2} + b_-^{-(i\alpha-w)}e^{-i(i\alpha-w)\pi/2}]\,,$$

y luego (ii) se deduce por prolongación analítica.

(iii) Sea $v_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon\sqrt{t}}\,t^{i\alpha+\varepsilon/2}$, $(\varepsilon > 0\ ,\ \alpha \in \mathbb{R})$

Entonces para cada ϕ perteneciente a W_+

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle\,{}'\rho^{\Lambda}_{w}(v_\varepsilon),\check{\phi}\rangle = \langle\,{}'\rho^{\Lambda}_{w}((\ )^{i\alpha}),\check{\phi}\rangle$$

Por otro lado

$$\langle\, '\rho_w^\Lambda(v_\varepsilon), \check{\phi}\,\rangle = \langle\, v_\varepsilon, \rho_{w^{-1}}^\Lambda(\check{\phi})\,\rangle$$

$$= -i \int_0^{+\infty} t^{i\alpha+\varepsilon/2} e^{-\varepsilon\sqrt{t}} \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi i t \mathrm{Re}(z)} \Lambda(z)\check{\phi}(t|z|^2)\,dz\,dt$$

$$= -i \int_0^{+\infty} \check{\phi}(t)^{\,i\lambda-i\alpha-\varepsilon/2} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i r\cos\theta}\, r^{2i\alpha-i\lambda+\varepsilon/2} e^{-\varepsilon r/t^{1/2}} \frac{dr}{r}\, d\theta\, dt$$

y según [G-S]

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i r\cos\theta}\, r^{2i\alpha-i\lambda+\varepsilon/2} e^{-\varepsilon r/t^{1/2}} \frac{dr}{r}\, d\theta$$

$$= \Gamma(2i\alpha-i\lambda+\varepsilon/2)\, e^{i(2i\alpha-i\lambda+\varepsilon/2)\pi/2} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} \left(2\pi\cos + \frac{i\varepsilon}{\sqrt{t}}\right)^{-(2i\alpha-i\lambda+\varepsilon/2)} d\theta$$

Sean $\displaystyle h_\varepsilon(t) = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} \left(2\pi\cos\theta + \frac{i\varepsilon}{\sqrt{t}}\right)^{-(2i\alpha-i\lambda+\varepsilon/2)} d\theta$,

$$c_\varepsilon = -i\Gamma(2i\alpha - i\lambda + \varepsilon/2)\, e^{i(2i\alpha-i\lambda+\varepsilon/2)\pi/2}$$

Entonces existe $M > 0$ tal que

$$|h_\varepsilon(t)| \le \begin{cases} 2\pi M & \text{si } 0 < t \le 1 \\ 2\pi M t & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$$

y $h_\varepsilon(t)$ converge puntualmente hacia

$$(2\pi)^{-(2i\alpha-i\lambda)}g(2i\alpha - i\lambda,m)$$

cuando ε tiende a 0^+ (ver definición (iii) en los preli - minares). Ahora debido a que

$$|\check{\phi}(t)t^{i\lambda-i\alpha-\varepsilon/2}h_\varepsilon(t)| \leq \begin{cases} M\ 2\pi|\phi(t)t^{-1}| & , \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ \\ M\ 2\pi|\phi(t)t| & , \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon \int_0^{+\infty} \check{\phi}(t)t^{i\lambda-i\alpha-\varepsilon/2}h_\varepsilon(t)dt$$

$$= -i\Gamma_{\mathbb{C}}(2i\alpha - i\lambda,m)(2\pi)^{-(2i\alpha-i\lambda)}\langle ev(i\lambda - i\alpha + 1),\phi\rangle$$

y por lo tanto:

$$\langle [\,'\rho_w^{\Lambda}(\ )^{i\alpha}]^{\wedge},\phi\rangle =$$

$$= -i\Gamma_{\mathbb{C}}(2i\alpha - i\lambda,m)(2\pi)^{-(2i\alpha-i\lambda)}\langle ev(i\lambda - i\alpha + 1),\phi\rangle$$

de donde se deduce (iii), por extensión analítica.

§ 2. Algunas identidades para la función $\Gamma_{\mathbb{C}}$.

En este párrafo mostraremos las identidades para la función $\Gamma_{\mathbb{C}}$, que se obtienen a partir de las relaciones $w^2 = h_{-1}$,

$u_{a+b} = u_a u_b$, y $wu_a w = h_{-a^{-1}} u_{-a} wu_{-a^{-1}}$, entre los generadores de $GL_2^+(\mathbb{R})$.

Proposición 2.1. La relación $w^2 = h_{-1}$, implica la identidad

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(1 + z,m)\Gamma_{\mathbb{C}}(1 - z,m) = 4\pi^2$$

Demostración: Según proposición 1.1. se tiene

$$[\,'\rho_w^\Lambda((\ )^z)]^\wedge = -i(2\pi)^{-(2z-i\lambda)}\Gamma_{\mathbb{C}}(2z - i\lambda,m)ev(1 + i\lambda - z)$$

y

$$[\,'\rho_{h_{-1}}^\Lambda((\ )^z)]^\wedge = -ev(z)$$

Luego, de la identidad

$$[\,'\rho_{w^2}^\Lambda((\ )^z)]^\wedge = [\,'\rho_{h^{-1}}^\Lambda((\ )^z)]^\wedge \ ,$$

y del lema 3.2. , Capítulo IV, se tiene

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(2z - i\lambda,m)\Gamma_{\mathbb{C}}(2 - 2z + i\lambda,m) = 4\pi^2 \ ,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, por extensión analítica tenemos

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(2z - w,m)\Gamma_{\mathbb{C}}(2 - 2z + w,m) = 4\pi^2 \ .$$

Finalmente, cambiando $2z$ por z y eligiendo w igual a -1 , se tiene la identidad.

Q.E.D.

Proposición 2.2. La relación $u_{a+b} = u_a u_b$ con a y b positivos, implica

$$\Gamma(z - w)(a + b)^{-(z-w)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re(\sigma)=c} \Gamma(z - \sigma)\Gamma(\sigma - w)a^{w-\sigma}b^{\sigma-z}d\sigma$$

donde $Re(w) < c < Re(z)$.

Demostración: Según la proposición 1.1. parte (ii), se tiene:

$$[\,'\rho^{\wedge}_{u_b}((\ )^z)]^{\wedge}(w) = \frac{1}{2\pi i}\Gamma(z - w)(\pi b)^{-(z-w)}e^{i(z-w)\pi/2} \quad .$$

Luego, aplicando el lema 3.1. del Capítulo IV a $\rho^{\wedge}_{u_a}$ y $\rho^{\wedge}_{u_b}$ con a y b positivos, se tiene la aserción de la proposición.

Q.E.D.

Corolario 2.1.

$$\Gamma(w)\left(\frac{b}{b + 1}\right)^w = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re(\sigma)=c} \Gamma(w - \sigma)\Gamma(\sigma)b^{\sigma}d\sigma$$

$0 < Re(\sigma) < Re(w)$, $b > 0$.

Demostración: Elegir $a = 1$ en la proposición, y realizar los cambios de variables $z - w = z'$ y $\sigma - w = \sigma'$.

Q.E.D.

Proposición 2.3. (Lema de Barnes no desplegado).

La relación $wu_1w = h_{-1}u_{-1}wu_{-1}$ implica la identidad

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(z_1+\sigma)\Gamma(z_2+\sigma)\Gamma_{\mathbb{C}}(z_3-2\sigma,m)e^{-i\sigma\pi}2^{2\sigma}d\sigma$$

$$= \frac{\pi^{z_3}2^{-2(z_1+z_2)}e^{-iz_3\pi/2}\Gamma_{\mathbb{C}}(2z_1+z_3,m)\Gamma_{\mathbb{C}}(2z_2,m)}{\operatorname{sen}(\pi(z_1+z_2+z_3))\Gamma(z_1+z_2+z_3)}$$

donde el camino de integración es curvo, de modo que los polos de $\Gamma(z_1+\sigma)\Gamma(z_2+\sigma)\Gamma_{\mathbb{C}}(z_3-2\sigma,m)$ quedan a la izquierda del camino, y z_1,z_2,z_3 son tales que $\sum_{i=1}^{3} z_i$ no sea entero

Demostración: Recordemos que para cualquier f perteneciente a S_+ se tiene $\rho_{h_{-1}}(f) = -f$, por lo tanto para cualquier ϕ perteneciente a W_+ y $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\langle {}'\rho^{\Lambda}_{h_{-1}u_{-1}wu_{-1}}((\ )^z),\check{\phi}\rangle = -\langle {}'\rho^{\Lambda}_{u_{-1}wu_{-1}}((\ )^z),\check{\phi}\rangle$$

Por otro lado, según la proposición 1.1. se tiene:

$$[{}'\rho^{\Lambda}_{u_{-1}}((\ )^z)]^{\wedge}(\sigma) = \Gamma(z-\sigma)\pi^{-i(z-\sigma)}e^{i(z-\sigma)\pi/2}\ ,$$

$$[{}'\rho^{\Lambda}_{u_1}((\ )^z)]^{\wedge}(\sigma) = \Gamma(z-\sigma)\pi^{-i(z-\sigma)}e^{-i(z-\sigma)\pi/2}\ ,$$

$$[\,'\rho_w^{\Lambda}((\ )^z)] = \Gamma_{\mathbb{C}}(2z - i\lambda)ev(1 - (z - i\lambda)) ,$$

luego $\rho_{u_{-1}}^{\Lambda}$, $\rho_{u_1}^{\Lambda}$ y ρ_w^{Λ} satisfacen las hipótesis del lema 3.3. Capítulo IV. Por lo tanto, a partir de la relación $wu_1w = h_{-1}u_{-1}wu_{-1}$ se tiene la identidad:

$$-[\,('\rho_{u_{-1}}^{\Lambda} \circ {}'\rho_w^{\Lambda} \circ {}'\rho_{u_{-1}}^{\Lambda})(\ )^z]^{\wedge} = [\,('\rho_w^{\Lambda} \circ {}'\rho_{u_{-1}}^{\Lambda} \circ {}'\rho_w^{\Lambda})(\ )^z]^{\wedge},$$

la cual junto con la identidad

$$\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)\Gamma(z)} , \qquad (z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

implican la aserción propuesta.

Q.E.D.

§ 3. Función $\Gamma_{\mathbb{R}}$.

<u>Definición</u>: Definiremos la función $\Gamma_{\mathbb{R}}$ por

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(z,\varepsilon) = \begin{cases} 2\Gamma(z)\cos(z\pi/2) & \text{si } \varepsilon = 0 \\ \\ 2i\Gamma(z)\ \operatorname{sen}(z\pi/2) & \text{si } \varepsilon = 1 , \end{cases}$$

z complejo distinto de $0, -1, -2, \ldots$

En este párrafo se demostrarán las identidades para la función $\Gamma_{\mathbb{R}}$ que se obtienen a partir de las relaciones (iii), (vii) y (x) entre los generadores de $GL(2,\mathbb{R})$.

Denotemos por $(S', '\rho^{\alpha,\beta})$ a la representación contragradiente de la representación $(S(\mathbb{R}^{\times}), \rho^{\alpha,\beta})$, con $\alpha,\beta \in (\mathbb{R}^{\times})$, $\alpha \neq \beta$.

Proposición 3.1. Sean $\alpha(x) = |x|^{ia}\operatorname{sgn}(x)^j$, $\beta(x) = |x|^{ib}\operatorname{sgn}(x)^k$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ y $j,k \in \{0,1\}$. Entonces:

(i) $[\,'\rho^{\alpha,\beta}_{h_t}(|\;|^z\operatorname{sgn}^{\ell})]^{\wedge} = |t|^{2z-ia-ib-1}\operatorname{sgn}(t)^{j+k}\operatorname{ev}(z;\ell)$

donde z y w son tales que, z - w no sea entero.

(ii) $[\,'\rho^{\alpha,\beta}_{u_b}(|\;|^z\operatorname{sgn}^{\ell})]^{\wedge}(w;i) = \frac{1}{4\pi i}\,\Gamma_{\mathbb{R}}(z-w;i-\ell)\,|b|^{-(z-w)}\operatorname{sgn}(b)^{i-\ell}$

(iii) Para todo z complejo tal que z - ia y z - ib no sean enteros, se tiene:

$$[\,'\rho^{\alpha,\beta}_{w}(|\;|^z\operatorname{sgn}^{\ell})]^{\wedge} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\Gamma_{\mathbb{R}}(z-ia;\ell-k)\,\Gamma_{\mathbb{R}}(z-ib;\ell-j)\operatorname{ev}(1+ai+ib-z,j+k-\ell)$$

Demostración: La demostración de (i) y (iii) es similar a la demostración de (i) y (ii) de la proposición 1.1.

La comprobación de (iii) se realiza de la manera siguiente:

Para cada $z \in \mathbb{C}$, $\ell \in \{0,1\}$, $\varepsilon \geq 0$, denotemos por $e_{\varepsilon}(z,\ ,\ell)$ a la función

$$e_{\varepsilon}(z,x,\ell) = e^{-\varepsilon|x|}\,|x|^{-z+\varepsilon}\operatorname{sgn}(x)^{\ell} ,$$

y para cada f perteneciente a $S(\mathbb{R}^{\times})$ y $\varepsilon \geq 0$, sea

$$H_{\varepsilon}(f)(t) = \frac{|t|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(x+y)} e_{\varepsilon}(ia,x^{-1},j) e_{\varepsilon}(ib,y^{-1},k)\,dxdy$$

Entonces para cada ε mayor o igual a cero $H_{\varepsilon}(f)$ pertenece a $S(\mathbb{R}^{\times})$ y cuando ε es igual a cero se tiene $H_{o}(f) = \rho_{W}^{\alpha,\beta}(f)$. Por otro lado para cualquier ϕ perteneciente a W y cualquier c en $\mathbb{R}$ y ℓ en $\{0,1\}$ se tiene

$$\langle \,|\,|^{ic}\mathrm{sgn}^{\ell}, H_{\varepsilon}(\check{\phi})\,\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{ic-1}\mathrm{sgn}(t)^{\ell} H_{\varepsilon}(\check{\phi})(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{\phi}(t)\,|t|^{-ic}\mathrm{sgn}(t)^{\ell} F(e_{\varepsilon}(1+i(b-c),\ ,\ell-k))(t)$$

$$F(e_{\varepsilon}(1+i(a-c),\ ,\ell-j))(t)\,dt\ .$$

donde F es la transformada de Fourier usual sobre $\mathbb{R}$. Luego, según |G-S.| se tiene:

(1) $\quad F(e_{\varepsilon}(1 - \lambda,\ ,\ell))(t) =$

$$= \begin{cases} \Gamma(\lambda+\varepsilon)[\,e^{-i(\lambda+\varepsilon)\pi/2}(t-i\varepsilon)^{-(\lambda+\varepsilon)} - e^{i(\lambda+\varepsilon)\pi/2}(t+i\varepsilon)^{-(\lambda+\varepsilon)}] & ,\ \text{si } \ell = 1 \\ \Gamma(\lambda+\varepsilon)[\,e^{i(\lambda+\varepsilon)\pi/2}(t+i\varepsilon)^{-(\lambda+\varepsilon)} + e^{-i(\lambda+\varepsilon)\pi/2}(t-i\varepsilon)^{-(\lambda+\varepsilon)}] & ,\ \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

para todo complejo λ restringido a $-\varepsilon < \mathrm{Re}(\lambda) < 1 - \varepsilon$.

Además $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} (t + i\varepsilon)^{-(\lambda+\varepsilon)} = t_+^{-\lambda} + e^{i\lambda\pi} t_-^{-\lambda}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} (t - i\varepsilon)^{-(\lambda+\varepsilon)} = t_+^{-\lambda} + e^{-i\lambda\pi} t_-^{-\lambda}$$

Por lo tanto la expresión del lado derecho de (1) como función de t converge puntualmente hacia

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(\lambda;\ell)\,|t|^{-\lambda}\operatorname{sgn}^{\ell}(t) \ .$$

Entonces aplicando convergencia dominada, se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{\phi}(t)\,|t|^{-ic}\operatorname{sgn}(t)^{\ell} F(e_{\varepsilon}(1+i(b-c),\ ,\ell-k))(t)$$

$$F(e_{\varepsilon}(1+i(a-c),\ ,\ell-j))(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Gamma_{\mathbb{R}}(ic-ia;\ell-j)\Gamma_{\mathbb{R}}(ic-ib;\ell-k)\langle ev(ia+ib-ic+1),j+k-\ell),\phi\rangle$$

luego esta última expresión es igual a:

$$\langle |\,|^{ic}\operatorname{sgn}^{\ell}, H_{o}(\check{\phi})\rangle = \langle (\rho_{w}(|\,|^{ic}\operatorname{sgn}^{\ell}))^{\wedge},\phi\rangle$$

Q.E.D.

Proposición 3.2. La relación $w^2 = h_{-1}$, implica la identidad

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(z;\ell)\Gamma_{\mathbb{R}}(1 - z;\ell) = 2\pi$$

Demostración: Según proposición 3.1.

$$[\,'\rho_{h-1}^{\alpha,\beta}(|\ |^{z}\operatorname{sgn}^{\ell})]^{\wedge} = ev(z,\ell)$$

y

$$[\,'\rho_{w}^{\alpha,\beta}(|\ |^{z}\operatorname{sgn}^{\ell})]^{\wedge} = F(z-ia,\ell-k)F(z-ib,\ell-j)ev(1+ia+ib-z,j+k-\ell)$$

donde $F(z;\ell) = \frac{1}{2\pi}\Gamma_{\mathbb{R}}(z)$.

Entonces F satisface las hipótesis del lema 2.2. Capítulo IV. Por lo tanto para todo $j,k,\ell \in \{0,1\}$, se tiene:

$$ev(z,\ell) = [\,'\rho_{w^2}^{\alpha,\beta}(|\ |^{z}\operatorname{sgn}^{\ell})]^{\wedge} =$$

$$= F(z-ia,\ell-k)F(z-ib,\ell-j)F(1+ia+ib-z,j+k-\ell)F(1+ia+ib-z,j+k-\ell)$$

para todo z complejo, a y b reales tales que $z - ia$, $z - ib$ y $1 + ia + ib - z$ sean distintos de un entero. Lo que implica

$$[F(z,\ell)F(1-z,\ell)]^{2} = 1$$

o equivalentemente

$$(1) \qquad [\Gamma_{\mathbb{R}}(z,\ell)\Gamma_{\mathbb{R}}(z,\ell)]^{2} = 4\pi^{2}$$

Ahora en cualquiera de los casos $\ell = 1$ ó $\ell = 0$, se tiene que (1) es equivalente a:

$$\frac{1}{\pi^2}[\Gamma(z)\Gamma(1-z)\operatorname{sen}\pi z]^2 = 1 ,$$

pero $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ y $\operatorname{sen}\pi x$ toman el mismo signo para todo x real y no entero, lo que implica

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\operatorname{sen}\pi z = \pi$$

de donde se obtiene

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(z,\ell)\Gamma_{\mathbb{R}}(1-z,\ell) = 2\pi$$

Q.E.D.

Corolario 3.1. La relación $w^2 = h_{-1}$ implica

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

Proposición 3.3. La relación $u_{a+b} = u_a u_b$ con $a > 0$, $b > 0$ implica

$$\frac{1}{4\pi i}\sum_{j=0}^{1}\int_{Re(\sigma)=c}\Gamma_{\mathbb{R}}(z-\sigma;\ell-j)\Gamma_{\mathbb{R}}(\sigma-w;j-k)a^{w-\sigma}b^{\sigma-z}d\sigma$$

$$= \Gamma_{\mathbb{R}}(z-w;\ell-k)(a+b)^{-(z-w)} ,$$

donde $Re(w) < c < Re(z)$, $\ell,k \in \{0,1\}$.

Demostración: Según la proposición 3.1., tenemos

$$[\,'\rho_{u_b}^{\alpha,\beta}((|\,|^z \operatorname{sgn}^{\ell})]^{\wedge}(w;j) = \frac{1}{4\pi i}\,\Gamma_{\mathbb{R}}(z-w;\ell-j)b^{-(z-w)}$$

y se verifican las hipótesis del lema 2.1. del Capítulo IV, de donde se obtiene la identidad propuesta.

Q.E.D.

Proposición 3.4. (Lema de Barnes desplegado).

La relación $wu_1w = h_{-1}u_{-1}wu_{-1}$ implica la identidad

$$\frac{1}{4\pi i}\sum_{j=0}^{1}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma_{\mathbb{R}}(z_1+z;j)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_2+z;j)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_3-z;j)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_4-z;j)dz$$

$$= \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(z_1+z_3;0)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_2+z_3;0)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_1+z_4;0)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_2+z_4;0)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(z_1+z_2+z_3+z_4;\,0)}$$

donde el camino de integración de $-i\infty$ a $+i\infty$ es curvo, de modo que los polos de $\Gamma_{\mathbb{R}}(z_1+z;j)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_1+z;j)$ quedan a la izquierda y los polos de $\Gamma_{\mathbb{R}}(z_3-z;j)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_4-z;j)$ a la derecha para cualquier $j \in \{0,1\}$, y z_1, z_2, z_3, z_4 son tales que $z_1+z_2+z_3+z_4$ debe ser distinto de $1+4k$, $3+4k$, para cualquier k entero, además los polos de $\Gamma_{\mathbb{R}}(z_1+z;j)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_2+z;j)$ no deben coincidir con los polos de $\Gamma_{\mathbb{R}}(z_3-z;j)\Gamma_{\mathbb{R}}(z_4-z;j)$.

Demostración: Debido a que para cada x en $\mathbb{R}$ la función $y \to \Gamma(x + iy)$ es rápidamente decreciente en el infinito (ver [E-M-O-T], se tiene:

$$\lim_{|y| \to +\infty} (1 + |y|^2)\,|\Gamma(x + iy)|\,|\Gamma(x + iy)|\,e^{\pi/2|y|} = 0$$

por lo tanto existe M mayor que cero que depende solamente de x tal que

$$|\Gamma(x + iy)|\,|\Gamma(x + iy)|\,|\cos((x + iy)\pi/2| \leq \frac{M}{1 + |y|^2}$$

Por otro lado, se conocen las transformadas de Mellin de ${}'\rho_{w}^{\alpha,\beta}(|\,|^{z}\mathrm{sgn}^{\ell})$, ${}'\rho_{u_b}^{\alpha,\beta}(|\,|^{z}\mathrm{sgn}^{\ell})$ y ${}'\rho_{h-1}^{\alpha,\beta}(|\,|^{z}\mathrm{sgn}^{\ell})$, además debido a que ${}'\rho^{\alpha,\beta}$ es una representación, se tiene que la relación (X) entre los generadores es respetada por ${}'\rho^{\alpha,\beta}$. Por lo tanto se satisfacen las hipótesis del lema 2.3. del Capítulo IV. Finalmente, la identidad propuesta se deduce utilizando la identidad funcional por la función $\Gamma_{\mathbb{R}}$ enunciada en la proposición 3.2.

Q.E.D.

APENDICE DEL CAPITULO II

Lema A.1. Sea f perteneciente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ y $b \neq 0$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{itbQ(x)} f(x,t)\,dx = \frac{1}{\lambda_Q(b)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-itb^{-1}Q(x)}\ \Pi^Q_{w^{-1}}(f)(x,t)\,dx$$

Demostración: Definamos para cada $\varepsilon > 0$, la sucesión

$$\phi^Q_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} e^{-\varepsilon|tbx_1|-\varepsilon|tx_2|}\, e^{-\varepsilon|t|} & \text{si } Q = H \\ \\ e^{-\varepsilon N(x)}\, e^{-\varepsilon t^2} & \text{si } Q = N \end{cases}$$

Entonces ϕ^Q_ε pertenece a $L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\times)$ para cada $\varepsilon > 0$. Denotemos por e^{ibQ} a la función definida por $e^{itbQ(x)}$; luego

$$\Pi^Q_w\,(e^{ibQ}\ \phi^Q_\varepsilon)(x,t) = c(t,Q) \int_{\mathbb{R}^2} e^{itB(x,y)} e^{ibtQ(y)}\ \phi^Q_\varepsilon(y,t)\,dy\ .$$

Entonces si $Q = H$, tenemos que:

$$\mathbb{I}_{W}^{H}\,(e^{ibH}\,\phi_{\varepsilon}^{H})(x,t) = \frac{|t|}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{itB_H(x,y)}\,e^{ibtH(y)}\,\phi_{\varepsilon}^{H}(y,t)\,dy$$

$$= \frac{e^{-itb^{-1}H(x)}}{\pi|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\varepsilon x_1 sb^{-1}}\,e^{-\varepsilon|s\varepsilon-x_2|b^{-1}}}{1+s^2}\,ds\cdot e^{-\varepsilon|t|}$$

Además

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{e^{i\varepsilon x_1 sb^{-1}}\,e^{-\varepsilon|s\varepsilon-x_2|b^{-1}}}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2}$$

y $$\left|\frac{e^{i\varepsilon x_1 sb^{-1}}\,e^{-\varepsilon|s\varepsilon-\ x_2|b^{-1}}}{1+s^2}\right| \leq \frac{1}{1+s^2}$$

por lo tanto aplicando convergencia dominada tenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{I}_{W}^{H}\,(e^{ibH}\,\phi_{\varepsilon}^{H})(x,t) = \frac{e^{-itb^{-1}H(x)}}{\pi|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+s^2}\,ds$$

$$= \frac{e^{-itb^{-1}H(x)}}{|b|}$$

Ahora si $Q = N$

$$\Pi_w^N (e^{ibN} \phi_\varepsilon^N)(x,t) = -ite^{-\varepsilon t^2} \int e^{itB_N(x,y)} e^{ibtN(y)} \phi_\varepsilon^N(y,t)dy$$

$$= \frac{-ite^{-\varepsilon t^2} e^{-N(ty^2)/\varepsilon - ibt} e^{-\varepsilon t^2}}{\varepsilon - ibt}$$

y esta última expresión converge puntualmente hacia

$$\frac{e^{-itN(y)/b}}{b} \quad , \text{ cuando } \varepsilon \text{ tiende a cero.}$$

Por otro lado, de la unitariedad de Π_w^Q , tenemos

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^2} e^{ibtQ(x)} \phi_\varepsilon^Q(x,t)f(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \Pi_\varepsilon^Q(e^{ibQ} \phi_\varepsilon^Q)(x,t)\Pi_{w^{-1}}^Q(f)(x,t)dx$$

Entonces en el lado izquierdo de (1), tenemos

$$|e^{ibtQ(x)} \phi_\varepsilon^Q(x,t)f(x,t)| \leq |f(x,t)|$$

y

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{ibtQ(x)} \phi_\varepsilon^Q(x,t)f(x,t) = e^{ibtQ(x)} f(x,t)$$

Luego

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{ibtQ(x)} \phi_\varepsilon^Q(x,t)f(x,t)dx \ ,$$

converge hacia

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^2} e^{ibtQ(x)} f(x,t)dx \ ,$$

cuando $\varepsilon \to 0^+$. Del mismo modo tenemos que

$$|\Pi_w^Q (e^{ibQ}\Pi_\varepsilon^Q)(x,t)\Pi_{w^{-1}}^Q(f)(x,t)| \leq M^Q \ |\Pi_{w^{-1}}(f)(x,t)|$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \Pi_w^Q(e^{ibQ} \ \phi_\varepsilon^Q)(x,t) \ \Pi_{w^{-1}}^Q(f)(x,t) = \frac{e^{-itb^{-1}Q(x)}}{\lambda_Q(b)} \ \Pi_{w^{-1}}^Q(f)(x,t)$$

por lo tanto la expresión del lado derecho de (1) converge hacia

$$(3) \quad \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-itb^{-1}Q(x)} \ \Pi_{w^{-1}}^Q(f)(x,t)dx$$

cuando ε tiende a cero. Entonces de (2) y (3) tenemos la aserción de lema.

Q.E.D.

<u>Proposición A.1.</u> Sea f perteneciente a $S(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$. Entonces para todo $b \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, vale la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ibtQ(y-x)} e^{-iatB_Q(y,x)} f(x,t)dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_Q(b)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ib^{-1}tQ(x+ay)} e^{-itB_Q(y,x+ay)} \Pi_w^Q(f)(x,t)dx$$

Demostración: Según lema A.1., tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ibtQ(y-x)} e^{-iatB_Q(y,x)} f(x,t)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ibtQ(z)} e^{-iatB_Q(y,y-z)} f(y-z,t)dz =$$

$$= \frac{1}{\lambda_Q(b)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ib^{-1}tQ(z)} \Pi^Q_{w^{-1}}(e^{-iatB(y,y-\xi)} f(y-\xi,t))(z,t)dz \ .$$

Además:

$$\Pi^Q_{w^{-1}}(e^{-iatB(y,y-\xi)} f(y-\xi,t))(z,t) =$$

$$= e^{-itB(y,z)} \Pi_w^Q(f)(z - ay,t)$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ibtQ(y-x)} e^{-iatB_Q(y,x)} f(x,t)dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_Q(b)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ib^{-1}tQ(z)} e^{-itB(y,z)} \Pi_w^Q(f)(z-ay,t)\,dz \ ,$$

y realizando el cambio de variables $z - ay = x$, tenemos la aserción de la proposición.

Q.E.D.

B I B L I O G R A F I A

[E-M-O-T] : Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F., "Higher Transcendental Functions", V. I, Mc Graw-Hill, 1953.

[G-S] : Gelfand, I.M., Shilov, G.E., "Generalized Functions", V. I, Academic Press, New York and London, 1964.

[L] : Lang, S., "SL(2,$\mathbb{R}$) ", Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1975.

[L-SA] : Li, W.W., Soto Andrade, J., "Barnes'Identities and Representations of GL_2", Journal fur die reine und angewandte Math., (por aparecer).

[S] : Schwatz,L., "Theorie des Distributions", Hermann, Paris, 1966.

[SA] : Soto Andrade, J., "Représentations de Certains Groupes Symplectiques Finis", Mémoire 55-56, Soc. Math. de France, 1978.

[V] : Vilenkin, N.J., "Special Functions and the Theory of Group Representations", A.M.S., transl. Providence, R.I., 1968.

[W-W] : Whittaker, E.T., Watson, G.N., "Modern Analysis", 4ta. ed, Cambridge Univ. Press, London and N. York, 1963.

[Z] : Zemanian, A.H., "Distribution Theory and Transform Analysis", International Series in Pure and Applied Math. Mc Graw-Hill, 1965.