GEOMETRIA ESTOCASTICA DE CIERTOS ESPACIOS DE GELFAND FINITOS

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias
Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

MARIA CECILIA SILVA PAREJAS

Noviembre,1993

Director de Tesis : JORGE SOTO ANDRADE

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

Informe de Aprobación

Tesis de Magister

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por la Candidata:

Cecilia Silva Parejas

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias Matemáticas.

Director de Tesis :
Dr. Jorge Soto Andrade ....

Comisión Informante de Tesis :
Dr. Rodrigo Bamón ....

Dr. Manuel Elgueta ....

Dr. Eduardo Friedmann Eduardo Friedmann

Dedicado a mi pequeñito, el Segu.

AGRADECIMIENTOS

Agadezco la ayuda prestada en este trabajo por el profesor Jorge Soto Andrade.

Este trabajo ha sido realizado con apoyo del proyecto 92-1041 y del DTI de la Universidad de Chile.

Capítulo 3 . Ejemplos.

INDICE

INTRODUCCION

Sea X un conjunto finito y G un grupo también finito actuando a la derecha sobre X por $x \mapsto x \cdot g$ ($x \in X, g \in G$). Llamaremos espacio geométrico al par (X, G) provisto de la acción de G en X.

Un endomorfismo de un espacio geométrico (X, G) es una aplicación $\phi : X \rightarrow X$ que conmuta con la acción del grupo, es decir,

$$\phi(x \cdot g) = \phi(x) \cdot g \qquad (\forall\, x \in X, \forall\, g \in G)$$

Entre los ejemplos más familiares de espacios geométricos finitos tenemos el n-ágono regular, poliedros y polítopos regulares, el plano euclideano finito, el semiplano de Poincaré finito, etc.

En estos ejemplos se ve, sin embargo, que en general los espacios geométricos no admiten muchos endomorfismos y en la mayoría de los casos sólo se tiene el endomorfismo trivial.

Si pensamos ahora, en una generalización de los puntos $x \in X$ a puntos "fisionados" o más claramente, a medidas de probabilidad sobre X, tenemos una extensión del concepto de endomorfismo de (X, G) (observamos que la acción de G en X induce una acción en el conjunto $M^1(X)$ de las medidas de probabilidad sobre X).

Llamaremos pseudo-endomorfismo de (X, G) a toda aplicación $\Psi : X \rightarrow M^1(X)$ que conmuta con la acción del grupo G. Denotaremos por $\mathrm{Psend}(X, G)$ al monoide de pseudo-endomorfismos del espacio geométrico (X, G).

Dado $\Psi \in \mathrm{Psend}(X, G)$, podemos ver que estudiar sus iterados Ψ^n ($n \in \mathbb{N}$) equivale a estudiar un paseo aleatorio G-simétrico sobre el conjunto X. De este modo, nos interesamos en la estructura del monoide $\mathrm{Psend}(X, G)$ pues describe de cierta forma la "geometría estocástica" del espacio geométrico (X, G).

En particular, es de interés estudiar los movimientos brownianos en $\mathrm{Psend}(X, G)$. Llamamos movimiento browniano a toda familia continua $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$ en $\mathrm{Psend}(X, G)$ tal que

$$\begin{aligned} \Psi_{t+s} &= \Psi_t \circ \Psi_s \qquad \forall\, t, s \geq 0 \\ \Psi_0 &= I \end{aligned}$$

donde I es el neutro en $\mathrm{Psend}(X, G)$ y que satisface además la condición inicial de Lindeberg L_Ω relativa a una órbita $\Omega \in X^2/G$. Esta condición nos dice, en términos más concretos, que el movimiento tiene velocidad inicial positiva sólo en la órbita Ω.

En el teorema 2.1 se da una caracterización explícita de tales movimientos en cualquier espacio de Gelfand finito (X, G). De hecho, se tiene que existe $c \geq 0$ tal que

$$\Psi_t^\Omega(x_\circ) = \sum_{i\in I} e^{c(\overline{\lambda_i^\Omega}-1)t}\, d_i' \phi_i \qquad \forall\, t \geq 0$$

donde $\{\phi_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de funciones esféricas de (X, G) relativas al origen $x_\circ \in X$, $\{d_i'\}_{i\in I}$ es la medida de Plancherel asociada y λ_i^Ω denota el valor propio del operador de promedio M_Ω asociado a la función esférica ϕ_i.

Nos interesamos también en los límites de los movimientos brownianos para t tendiendo a ∞, los cuales son elementos idempotentes de $\mathrm{Psend}(X, G)$.

Para el caso en que el espacio geométrico (X, G) es transitivo y G es un producto semi-directo, de la forma $G = K \ltimes H$ donde $K = \mathrm{Stab}_G(x_\circ)$ $(x_\circ \in X)$, se da una manera de encontrar los idempotentes de $\mathrm{Psend}(X, G)$. (En [1] se muestra varios ejemplos de espacios geométricos (X, G) donde $G = K \ltimes H$. Se calcula también las funciones esféricas de estos espacios).

Determinar los elementos idempotentes en Psend(X, G) es equivalente a determinar las medidas de probabilidad sobre X, idempotentes y K-invariantes. Por la proposición 2.4 éstas son exactamente las medidas de probabilidad uniforme con soporte un subgrupo K-invariante de H. Ahora, los subgrupos K-invariantes de H en principio son fáciles de encontrar pues sólo pueden ser uniones de órbitas de H/K.

Con esta descripción precisa de los idempotentes de Psend(X, G) en el caso en que G es un producto semi-directo, se establece en el teorema 2.2 el límite de un movimiento browniano $\{\Psi_t^\Omega\}_{t\geq 0}$ de tipo Ω. Tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \Psi_t^\Omega = \Psi_{\langle\Omega\rangle}$$

donde $\Psi_{\langle\Omega\rangle}$ denota el pseudo-endomorfismo idempotente que asocia a cada $x \in X$ la medida de probabilidad uniforme portada por el subgrupo generado por $C_\Omega(x)$.

En otras palabras, un pseudo-endomorfismo idempotente Ψ está "conectado" con el elemento neutro de Psend(X, G) por medio de un movimiento browniano, si Ψ está generado por alguna órbita $\Omega \in X^2/G$. En este caso, cualquier movimiento browniano de tipo Ω "conecta" ambos idempotentes.

Más generalmente, nos preguntamos cuándo dos idempotentes están conectados por un movimiento browniano. En este caso, el teorema 2.3 nos dice que si $\{\Psi_t^\Omega(\Im)\}_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano de tipo Ω con punto de partida $\Im$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \Psi_t^\Omega(\Im) = \Psi_{\langle\Omega\rangle\Im}$$

donde $\Psi_{\langle\Omega\rangle\Im}$ denota el pseudo-endomorfismo idempotente que asocia a $x_\circ$ la medida de probabilidad uniforme con soporte el producto del subgrupo generado por $C_\Omega(x_\circ)$ y el subgrupo K-invariante $H_\Im$ asociado al idempotente $\Im$.

En el capítulo 3 se muestra dos ejemplos de espacios de Gelfand (X, G) donde $G = K \ltimes H$ y $K = \mathrm{Stab}_G(x_\circ)$ $(x_\circ \in X)$: el m–cubo y la biblioteca de la Margarita con n libros. En estos ejemplos se muestra explícitamente los idempotentes y límites de los movimientos brownianos con cualquier idempotente de partida.

Finalmente, podemos generalizar todo lo anterior al caso en que G no es necesariamente un producto semi-directo, al caso de un espacio geométrico (X, G) donde el conjunto X puede ser dotado de una estructura de grupo admisible . En este caso se pueden determinar también los idempotentes de $\mathrm{Psend}(X, G)$ y los límites de movimientos brownianos.

Como ejemplo de esto tenemos, en el capítulo 3, el árbol simétrico finito.

Capítulo 1
Conceptos Básicos

1.1 Definiciones

Llamaremos espacio geométrico al par (X, G) donde X denota un conjunto y G un grupo actuando a la derecha sobre X por $x \mapsto x \cdot g \quad (x \in X, g \in G)$.

En todo lo que sigue, consideraremos siempre espacios geométricos donde X y G son finitos.

Llamaremos representación natural asociada a la acción de G en X a la representación (H, τ) de G , cuyo espacio de representación H es el espacio $\mathbb{C}^X$ formado por las funciones complejas sobre X y acción τ definida por

$$[\tau_g(f)](x) = f(x \cdot g) \qquad (f \in H, g \in G, x \in X)$$

El espacio $H = \mathbb{C}^X$ admite un producto escalar $<,>$ que es invariante bajo τ, definido por

$$\langle f, h \rangle = \sum_{x \in X} f(x)\overline{h(x)} \qquad (f, h \in H)$$

Denotaremos por $L^2(X)$ al espacio $\mathbb{C}^X$ provisto de este producto escalar.

La acción de G en X induce una acción de G en $X \times X$ definida por

$$(x, y) \cdot g = (x \cdot g, y \cdot g) \qquad (x, y \in X, g \in G)$$

Denotaremos por X^2/G al conjunto de órbitas de la acción de G en $X \times X$, es decir, X^2/G consta de todas las "configuraciones geométricas" posibles de un par de puntos del conjunto X.

Dada una órbita $\Omega \in X^2/G$ y $x \in X$, consideremos el conjunto

$$C_\Omega(x) = \{y \in X/(x,y) \in \Omega\}$$

formado por todos los $y \in X$ que están en una misma configuración dada Ω con x. Geométricamente, $C_\Omega(x)$ se interpreta como una "esfera de centro x y radio Ω" por analogía con el plano euclideano y su grupo de movimientos rígidos. En este caso, cada órbita $\Omega_r \in X^2/G$ está formada por los pares de puntos a distancia r. Luego, el conjunto $C_{\Omega_r}(x)$ es efectivamente un círculo de radio r centrado en punto x.

1.2 Espacios de Gelfand

Definición 1 *Un espacio geométrico transitivo (X,G) se denomina espacio de Gelfand si el álgebra conmutante $A = End_G(L^2(X), \tau)$, formada de todos los operadores de entrelazamiento o endomorfismos de la representación natural $(L^2(X), \tau)$ de G es conmutativa.*

Si $x_\circ \in X$ y $K = Stab_G(x_\circ)$, se dice también que (G,K) es un par de Gelfand.El punto $x_\circ \in X$ se denomina punto base del espacio de Gelfand (G,K).

Denotemos por $K(X)$ al álgebra formada de las funciones complejas sobre $X \times X$ (o núcleos).

El "producto de Volterra" o producto matricial de núcleos está definido por

$$(K \star L)(x,z) = \sum_{y \in X} K(x,y)L(y,z)$$

Una descripción equivalente de $\mathrm{End}_G(L^2(X), \tau)$ está dada por la subálgebra de $K(X)$ compuesta de los núcleos G-invariantes, lo que denotaremos por $K^G(X)$, es decir,

$$K^G(X) = \{K : X \times X \to \mathbb{C} / K(x \cdot g, y \cdot g) = K(x, y)\}$$

Proposición 1 *El álgebra conmutante $End_G(L^2(X), \tau)$ de la representación natural $(L^2(X), \tau)$ de G es isomorfa al álgebra de núcleos G-invariantes $K^G(X)$*

Demostración: Definamos una aplicación de $K^G(X)$ en $\mathrm{End}_G(L^2(X), \tau)$ asociando a cada núcleo K el operador de entrelazamiento M_K definido por

$$[M_K(f)](x) = \sum_{y \in X} K(x, y) f(y) \tag{1}$$

Se tiene entonces que

$$M_{K \star L} = M_K \cdot M_L$$

Claramente esta aplicación es un isomorfismo de álgebras, pues para cada operador de entrelazamiento M, el correspondiente núcleo G-invariante K tal que $M_K = M$ es la matriz de M respecto a la base canónica de $L^2(X)$ formada por las deltas de Dirac δ_x, es decir,

$$K(x, y) = [M(\delta_y)](x)$$

Corolario 1 *Un espacio geométrico transitivo (X, G) es de Gelfand si y sólo si el álgebra de núcleos G-invariantes $K^G(X)$ es conmutativa*

El espacio vectorial $K^G(X)$ tiene una base natural normalizada, dada por las órbitas de la acción de G en $X \times X$, formada por los núcleos K_Ω $(\Omega \in X^2/G)$

$$K_\Omega = \frac{1}{|C_\Omega(x_\circ)|} \chi_\Omega$$

donde χ_Ω denota la función característica de la órbita Ω.

Luego, tenemos una base de $\mathrm{End}_G(L^2(X),\tau)$ correspondiente a los núcleos K_Ω vía el isomorfismo definido en (1), formada por los operadores de promedio M_Ω, donde

$$[M_\Omega(f)](x) = \frac{1}{|C_\Omega(x_\circ)|} \sum_{y \in C_\Omega(x)} f(y)$$

Ahora, para calcular la composición de dos operadores de promedio M_Ω y M_Θ recurrimos a los núcleos asociados K_Ω y K_Θ

$$(K_\Omega \star K_\Theta)(x,z) = \sum_{y \in X} K_\Omega(x,y) K_\Theta(y,z) = \frac{C^{\Xi}_{\Omega,\Theta}}{|C_\Omega(x_\circ)||C_\Theta(x_\circ)|}$$

donde

$$C^{\Xi}_{\Omega,\Theta} = |\{y \in X | (x,y) \in \Omega \ , (y,z) \in \Theta\}|$$

con $(x,z) \in \Xi$ arbitrario.

Luego, tenemos

Proposición 2 *Sean $\Omega, \Theta \in X^2/G$. Entonces*

$$M_\Omega \circ M_\Theta = \sum_{\Xi \in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_\circ)|}{|C_\Omega(x_\circ)||C_\Theta(x_\circ)|} C^{\Xi}_{\Omega,\Theta} M_\Xi$$

1.3 Funciones esféricas

En todo lo que sigue, supondremos que (X,G) es un espacio geométrico transitivo.

Proposición 3 *Sea $x_\circ \in X$ y $K = Stab_G(x_\circ)$. Si (U,π) es una representación irreducible unitaria de G , entonces la correspondencia $v \mapsto \phi_v$ definida por*

$$\phi_v(u) : x \mapsto \langle \pi_{g_x}(u), v \rangle$$

donde $g_x \in G$ es tal que $x_\circ \cdot g_x = x$, establece un anti-isomorfismo

$$U^K \simeq Hom(\pi,\tau)$$

donde $U^K = \{u \in U \mid \pi_k(u) = u \quad \forall k \in K\}$

Si el espacio geométrico (X, G) es de Gelfand se deduce, como consecuencia del lema de Schur, que la representación natural asociada $(L^2(X), \tau)$ se descompone en subrepresentaciones irreducibles, sin multiplicidades, en la forma

$$L^2(X) = \bigoplus_{i \in I} H_i \qquad \text{(suma ortogonal)} \tag{2}$$

donde cada H_i es un subespacio estable de $L^2(X)$ que no admite subespacios estables propios y además H_i no es isomorfo a $H_j (i \neq j)$ como representación de G.

Además como esta descomposición no tiene multiplicidades, si denotamos por τ^i la restricción de τ a H_i obtenemos que $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}(\tau^i, \tau) = 1 \quad (\forall i \in I)$. Luego, a partir de la proposición anterior se obtiene

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_i^K) = 1$$

donde $H_i^K = \{f \in H_i \mid f(x \cdot k) = f(x) \quad \forall x \in X, \ \forall k \in K\}$. Es decir, todas las funciones $f \in H_i$, invariantes por K son proporcionales.

Definición 2 *Se llama función esférica (de tipo i) asociada a* (X, G) *a toda función* K*-invariante, no nula, de* H_i.

Notemos que los espacios H_i se recuperan a partir de las funciones esféricas, pues cada función esférica (de tipo i) engendra a H_i como $\mathbb{C}[G]$-módulo.

Usualmente consideraremos en cada H_i la función esférica ϕ_i tal que $\phi_i(x_\circ) = 1$

1.4 Las Funciones esféricas y los caracteres de $\mathrm{End}_G(L^2(X), \tau)$

Designaremos por $\widehat{A}$ el conjunto de los caracteres del álgebra $A = \mathrm{End}_G(L^2(X), \tau)$, es decir, el conjunto de los homomorfismos unitarios de álgebras de A en $\mathbb{C}$. Se tiene,

$$A = \mathbb{C}P_i \simeq \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$$

donde $\{P_i\}_{i\in I}$ es la familia de proyectores ortogonales de $L^2(X)$ sobre los H_i. Por consiguiente $|\widehat{A}| = |I|$. Más aún, $\widehat{A}$ consta de los caracteres α_i definidos por $\alpha_i(P_j) = \delta_{i,j}$. Como los subespacios H_i son los subespacios propios simultáneos de la familia conmutativa A de operadores, se tiene de hecho la resolución espectral

$$\phi = \sum_{i\in I} \alpha_i(\phi) P_i$$

La relación entre las funciones esféricas y los caracteres de A se explicita en la siguiente

Proposición 4 *Dado un caracter $\alpha_i \in \widehat{A}$, se define una función esférica ϕ_i (de tipo i), con $\phi_i(x_\circ) = 1$, por*

$$\phi_i(x) = \alpha_i(M_{\Omega_{(x_\circ,x)}}) \tag{3}$$

donde $\Omega_{(x_\circ,x)} \in X^2/G$ es la órbita que contiene al par $(x_\circ, x)$

Demostración: Sea ψ_i función esférica de tipo i y sea $\Omega \in X^2/G$. Se tiene

$$M_\Omega(\psi_i) = \sum_{j\in I} \alpha_j(M_\Omega) P_j(\psi_i) = \alpha_i(M_\Omega)\psi_i$$

de donde, evaluando en $x_\circ \in X$, se obtiene,

$$\psi_i(x) = \alpha_i(M_\Omega)\psi_i(x_\circ) = \phi_i(x)\psi_i(x_\circ)$$

para cualquier $x \in X$ tal que $(x_\circ, x) \in \Omega$, lo que muestra que toda función esférica ψ_i de tipo i es proporcional a la función ϕ_i definida en (3) y establece en particular que $\phi_i \in H_i$.

La aplicación definida en (3) es de hecho una biyección entre el conjunto de caracteres de $A = \mathrm{End}_G(L^2(X), \tau)$ y el conjunto de las funciones esféricas asociadas al espacio de Gelfand (X, G) (relativas a la elección del origen $x_\circ \in X$).

1.5 Ecuación funcional

Sean $M_{\Omega_{(x_\circ,x)}}$ y $M_{\Omega_{(x_\circ,y)}}$ los operadores de promedio asociados a las órbitas $\Omega_{(x_\circ,x)}, \Omega_{(x_\circ,y)} \in X^2/G \ \ (x, y \in X)$. Para calcular la composición de estos operadores de promedio recurriremos a los núcleos correspondientes $K_{\Omega_{(x_\circ,x)}}$ y $K_{\Omega_{(x_\circ,y)}}$

$$\chi_{\Omega_{(x_\circ,x)}} = \sum_{(y,z)\in\Omega_{(x_\circ,x)}} \delta_{(y,z)} = \frac{1}{|\mathrm{Stab}_G(x_\circ, x)|} \sum_{g\in G} \delta_{(x_\circ,x)\cdot g}$$

Puesto que $|\mathrm{Stab}_G(x_\circ, x)||C_{\Omega_{(x_\circ,x)}}(x_\circ)| = |K|$,se tiene

$$K_{\Omega_{(xo,x)}} = \frac{1}{|K|} \sum_{g\in G} \delta_{(x_\circ,x)\cdot g}$$

El producto de los núcleos es entonces

$$\begin{aligned} K_{\Omega_{(x_\circ,x)}} \star K_{\Omega_{(x_\circ,y)}} &= \frac{1}{|K|^2} \sum_{g,g'\in G} \delta_{(x_\circ\cdot g, x\cdot g)} \star \delta_{(x_\circ\cdot g', y\cdot g')} \\ &= \frac{1}{|K|^2} \sum_{g\in G} \sum_{\{g'\in G/x\cdot g = x_\circ\cdot g'\}} \delta_{(x_\circ\cdot g, y\cdot g')} \\ &= \frac{1}{|K|^2} \sum_{g\in G} \sum_{k\in K} \delta_{(x_\circ\cdot g, y\cdot kg_x g)} \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{k\in K} K_{\Omega_{(x_\circ, y\cdot kg_x)}} \end{aligned}$$

donde $g_x \in G$ es tal que $x_\circ \cdot g_x = x$ y $\Omega_{(x_\circ,y\cdot kg_x)}$ es la G-órbita que contiene a $(x_\circ, y \cdot kg_x)$. Luego

$$M_{\Omega_{(x_\circ,x)}} \circ M_{\Omega_{(x_\circ,y)}} = \frac{1}{|K|} \sum_{k\in K} M_{\Omega_{(x_\circ,y\cdot kg_x)}}$$

Proposición 5 *Las funciones esféricas asociadas al espacio de Gelfand (X, G) tal que $\phi(x_\circ) = 1$ satisfacen la ecuación funcional*

$$\phi(x)\phi(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \phi(y \cdot kg_x) \tag{4}$$

donde $g_x \in G$ es tal que $x_\circ \cdot g_x = x$ y $K = Stab_G(x_\circ)$

Demostración: Inmediata, a partir del cálculo anterior y la proposición 4.

1.6 Funciones esféricas y proyectores

Consideremos la función delta de Dirac $\delta_{x_\circ}$ y formemos $P_i(\delta_{x_\circ})$ donde P_i es el proyector ortogonal de $L^2(X)$ sobre H_i ($i \in I$) en la descomposición (2). Sea K_i el núcleo G-invariante asociado a P_i. Entonces

$$[P_i(\delta_{x_\circ})](x) = \sum_{y \in X} K_i(x, y)\delta_{x_\circ}(y) = K_i(x, x_\circ)$$

Claramente, la función $x \mapsto K_i(x, x_\circ)$ $(x \in X)$ es K-invariante y pertenece al subespacio H_i, luego la función ψ_i ($i \in I$) definida por

$$\psi_i(x) := K_i(x, x_\circ) \tag{5}$$

es una función esférica de tipo i. Esta función esférica satisface la condición de normalización

$$\psi_i(x_\circ) = ||\psi_i||_2^2$$

En efecto, la idempotencia del proyector P_i se escribe en términos de K_i como

$$\sum_{y \in X} K_i(x, y)K_i(y, z) = K_i(x, z)$$

en vista de que $K_i(x, y) = \overline{K_i(y, x)}$ ya que $P_i = P_i^*$, tenemos

$$||\psi_i||_2^2 = \sum_{y \in X} \overline{\psi_i(y)}\psi_i(y) = \sum_{y \in X} K_i(x_\circ, y)K_i(y, x_\circ) = K_i(x_\circ, x_\circ) = \psi_i(x_\circ)$$

Sea $d_i := \dim_{\mathbb{C}} H_i$. Podemos obtener la dimensión d_i de los subespacios H_i en términos de las funciones esféricas ψ_i, pues

$$d_i = \mathrm{Tr}(P_i) = \sum_{x \in X} K_i(x,x) = |X| K_i(x_\circ, x_\circ) = |X| \psi_i(x_\circ)$$

Proposición 6 *La función delta de Dirac $\delta_{x_\circ}$ se desarrolla en términos de las funciones esféricas ϕ_i del espacio de Gelfand (X,G) (con $\phi_i(x_\circ) = 1$) como*

$$|X| \delta_{x_\circ} = \sum_{i \in I} d_i \phi_i$$

donde $d_i = dim_{\mathbb{C}} H_i$

Demostración: Puesto que $I = \sum_{i \in I} P_i$, se tiene

$$\delta_{x_\circ} = \sum_{i \in I} \psi_i = \sum_{i \in I} \psi_i(x_\circ) \phi_i = \frac{1}{|X|} \sum_{i \in I} d_i \phi_i$$

Definición 3 *Denotemos $d'_i = \frac{d_i}{|X|}$ $(i \in I)$.*

$\{d'_i\}_{i \in I}$ se llama la medida de Plancherel del espacio de Gelfand (X,G)

Observemos que $\psi_i = d'_i \phi_i$.

1.7 Funciones K-invariantes

Sea $x_\circ \in X$ y $K = \mathrm{Stab}_G(x_\circ)$.

Definición 4 *Denotaremos por $L^1_K(X)$ al espacio formado de las funciones complejas sobre X que son K-invariantes.*

$$L^1_K(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f(x \cdot k) = f(x) \ \ \forall x \in X \ , \forall k \in K \}$$

El conjunto $L^1(K\backslash G/K)$ de las funciones complejas sobre G que son K-biinvariantes, es decir,

$$L^1(K\backslash G/K) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f(kgk') = f(g) \ \forall k, k' \in K \ \ \forall g \in G\}$$

es una subálgebra del álgebra de convolución $\mathbb{C}^G$,y como $L^1(K\backslash G/K)$ se identifica a $L^1_K(X)$ vía el isomorfismo como G-espacios de $K\backslash G$ y X , podemos transportar la estructura de $L^1(K\backslash G/K)$ de manera de proveer a $L^1_K(X)$ de una estructura de álgebra unitaria, cuyo producto de convolución está definido por

$$(f_1 * f_2)(x) = \sum_{y \in X} f_1(x \cdot g_y^{-1}) f_2(y) \tag{6}$$

donde $g_y \in G$ es tal que $x_\circ \cdot g_y = y$. Observemos que, por la K-invariancia, esta definición no depende de la elección de g_y.

Proposición 7 *Se define un isomorfismo del álgebra de núcleos G-invariantes $K^G(X)$ sobre $L^1_K(X)$ asociando a cada $K \in K^G(X)$ la aplicación $f_K \in L^1_K(X)$ definida por*

$$f_K(x) = K(x, x_\circ) \tag{7}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(f_K * f_L)(x) &= \sum_{y \in X} f_K(x \cdot g_y^{-1}) f_L(y) \\
&= \sum_{y \in X} K(x \cdot g_y^{-1}, x_\circ) L(y, x_\circ) \\
&= \sum_{y \in X} K(x, y) L(y, x_\circ) \\
&= (K \star L)(x, x_\circ) \\
&= f_{K \star L}(x)
\end{aligned}$$

Corolario 2 *Un espacio geométrico (X, G) es de Gelfand si y sólo si $L^1_K(X)$ es conmutativo*

Sea K_i el núcleo G-invariante asociado al proyector P_i $(i \in I)$. La relación $P_i \circ P_j = \delta_{i,j} P_i$ $(i, j \in I)$ se expresa en términos de los núcleos como $K_i \star K_j = \delta_{i,j} K_i$. Por lo tanto, las imagenes f_{K_i} y f_{K_j} de estos núcleos, vía el isomorfismo definido en (7), también satisfacen la relación $f_{K_i} * f_{K_j} = \delta_{i,j} f_{K_i}$. Estas imagenes no son otras que las funciones esféricas ψ_i y ψ_j definidas en (5). Luego

$$\psi_i * \psi_j = \delta_{i,j} \psi_i$$

El espacio vectorial complejo $L^1_K(X)$ posee entonces una base de idempotentes ortogonales formada por las funciones esféricas $\psi_i = d_i' \phi_i$.

Proposición 8 *Sea ϕ función esférica del espacio de Gelfand (X, G) tal que $\phi(x_\circ) = 1$, donde $x_\circ \in X$ es el punto base de (X, G). Entonces*

$$|\phi(x)| \leq 1 \qquad (\forall x \in X)$$

Demostración: Sea ψ la función esférica idempotente definida en (5). Entonces

$$\psi(x) = \sum_{z \in X} \psi(z) \psi(x \cdot g_z^{-1})$$

Haciendo $z = y \cdot g_x$ tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{y \in X} \psi(y \cdot g_x) \psi(x_\circ \cdot g_y^{-1}) \\ &= \sum_{y \in X} \psi(y \cdot g_x) \overline{\psi(y)} \\ &= \langle \tau_{g_x}(\psi), \psi \rangle \end{aligned}$$

De aquí, por la desigualdad de Cauchy, tenemos que

$$|\psi(x)|^2 \leq < \psi, \psi >< \tau_{g_x}(\psi), \tau_{g_x}(\psi) >$$

como el producto interno en $L^2(X)$ es invariante bajo τ, tenemos

$$|\psi(x)| \;\leq\; ||\psi||_2^2 = \psi(x_\circ)$$

1.8 Transformada esférica

Denotemos por S al conjunto de las funciones esféricas del espacio de Gelfand (X, G) tal que $\phi(x_\circ) = 1$.

Definición 5 *Definimos para cada función $f \in L^1_K(X)$ su transformada esférica $\widehat{f} : S \to \mathbb{C}$ por*

$$\widehat{f}(\phi) = \sum_{x \in X} f(x)\overline{\phi(x)}$$

Si ϕ_i es función esférica de tipo i, denotaremos $\widehat{f}(i) := \widehat{f}(\phi_i)$.

Proposición 9 *Sean $f, g \in L^1_K(X)$. Entonces*

1. $f = \sum_{i \in I} \widehat{f}(i) d'_i \phi_i$
2. $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$
3. $\widehat{f * g}(i) = \widehat{f}(i)\widehat{g}(i)$

Demostración:

$$f * g = (\sum_{i \in I} \widehat{f}(i) d'_i \phi_i) * (\sum_{i \in I} \widehat{g}(i) d'_i \phi_i) = \sum_{i \in I} \widehat{f}(i)\widehat{g}(i) d'_i \phi_i$$

Capítulo 2
Movimientos brownianos en Psend(X,G)

2.1 Endomorfismos de espacios geométricos

Definición 1 *Un endomorfismo de un espacio geométrico* (X, G) *es una aplicación* $\phi : X \to X$ *tal que*

$$\phi(x \cdot g) = \phi(x) \cdot g$$

Denotaremos por $\mathrm{End}(X, G)$ al conjunto de endomorfismos del espacio geométrico (X, G). $\mathrm{End}(X, G)$ es un monoide unitario respecto a la composición de endomorfismos.

Si el espacio geométrico (X, G) es transitivo tenemos que $\mathrm{End}(X, G)$ es un grupo. En efecto, todo endomorfismo ϕ está determinado únicamente por su imagen en un $x_\circ \in X$. Explícitamente

$$\phi(x) = \phi(x_\circ) \cdot g_x$$

donde $g_x \in G$ es tal que $x_\circ \cdot g_x = x$. Luego, si $\phi \in \mathrm{End}(X, G)$ está definido por $\phi(x_\circ) := x_\circ \cdot g$ entonces ϕ^{-1} está definido por $\phi^{-1}(x_\circ) = x_\circ \cdot g^{-1}$. Más aún, tenemos la siguiente

Proposición 1 *Sea* (X, G) *espacio geométrico transitivo. Sea* $x_\circ \in X$ *y* $K = Stab_G(x_\circ)$. *Entonces*

$$N_G(K)/K \simeq End(X, G)$$

donde $N_G(K)$ denota el normalizador de K en G.

Demostración: Definamos una aplicación $\phi : N_G(K) \to \text{End}(X, G)$ asociando a cada $g \in N_G(K)$ el endomorfismo ϕ_g determinado por $\phi_g(x_\circ) := x_\circ \cdot g$. Ya que $g \in N_G(K)$ la aplicación ϕ_g está bien definida y establece un epimorfismo de grupos cuyo núcleo es K.

Un endomorfismo de un espacio geométrico (X, G) es una aplicación de X en X intrínsecamente geométrica. En el caso de que el espacio (X, G) no tenga "simetrías internas" no triviales, diremos que el espacio es simple.

Definición 2 *Un espacio geométrico (X, G) se dice simple si sólo admite el endomorfismo trivial, es decir,*

$$End(X, G) = \{Id_X\}$$

Corolario 1 *Sea (X, G) espacio geométrico transitivo, $x_\circ \in X$ y $K = Stab_G(x_\circ)$. Entonces (X, G) es simple si y sólo si $K = N_G(K)$.*

Demostración: Inmediata a partir de la proposición anterior.

Observemos además que $K = N_G(K)$ si y sólo si $\text{Fix}_X(K) = \{x_\circ\}$.

Es bien sabido que la mayoría de los espacios geométricos usuales son simples o casi simples, en el sentido de tener muy pocos endomorfismos no triviales. Para más detalle véase en [5]

2.2 Pseudo-endomorfismos de Espacios Geométricos

Como vimos en el párrafo anterior, en los ejemplos usuales el monoide $\text{End}(X, G)$ tiene una estructura bastante trivial. No sucede así, sin embargo, con el monoide $\text{Psend}(X, G)$ de pseudo-endomorfismos de (X, G).

Denotemos por $M^1(X)$ al conjunto de medidas de probabilidad sobre X, es decir, $\mu \in M^1(X)$ es una asignación de pesos sobre X con suma total 1.

Observemos que la acción de G en X induce una acción en $M^1(X)$ definida por

$$(\mu \cdot g)(x) = \mu(x \cdot g^{-1})$$

Definición 3 *Llamaremos pseudo-endomorfismo de un espacio geométrico (X, G) a una aplicación $\phi : X \to M^1(X)$ que conmuta con la acción de G , es decir, tal que*

$$[\phi(x \cdot g^{-1})](y) = [\phi(x)](y \cdot g)$$

Denotaremos por $\text{Psend}(X, G)$ al conjunto de pseudo-endomorfismos de (X, G).

Observemos que un endomorfismo ϕ induce un pseudo-endomorfismo $x \mapsto \delta_{\phi(x)}$ $(x \in X)$ de X con valores en el conjunto de medidas de Dirac de X.

Por lo tanto, el concepto de pseudo-endomorfismo es una generalización del concepto de endomorfismo, en el sentido de ser un endomorfismo que lleva puntos del conjunto X en puntos "fisionados".

Pensando entonces en las medidas de probabilidad sobre X como puntos fisionados podemos definir la composición de dos pseudo-endomorfismos ϕ y ψ por

$$(\phi \circ \psi)(x) = \sum_{y \in X} [\psi(x)](y)\phi(y)$$

Es fácil verificar que $\phi \circ \psi$ es un pseudo-endomorfismo y de este modo tenemos que $\text{Psend}(X, G)$ es un monoide unitario.

Dado $\phi \in \text{Psend}(X, G)$, podemos ver que estudiar sus iterados ϕ^n $(n \in \mathbb{N})$ equivale a estudiar un paseo aleatorio G-simétrico sobre el conjunto X. De este modo, nos interesamos en la estructura del monoide $\text{Psend}(X, G)$ pues describe de cierta forma la "geometría estocástica" del espacio geométrico (X, G).

2.3 Medidas de probabilidad K-invariantes

Definición 4 *Sea $x_\circ \in X$ y $K = Stab_G(x_\circ)$. Denotaremos por $M^1_K(X)$ al conjunto de medidas de probabilidad K-invariantes sobre X, es decir,*

$$M^1_K(X) = \{\mu \in M^1(X) \mid \mu(x \cdot k) = \mu(x) \;\; \forall x \in X \;, \forall k \in K\}$$

$M^1_K(X)$ es un submonoide unitario del álgebra de convolución $L^1_K(X)$.

La relación entre $M^1_K(X)$ y $\mathrm{Psend}(X, G)$ es muy estrecha ya que si $\phi \in \mathrm{Psend}(X, G)$ entonces, por la propiedad de conmutación con la acción de G de los pseudo-endomorfismos, obtenemos que $\phi(x_\circ) \in M^1_K(X)$. Más aún, si el espacio (X, G) es transitivo tenemos que la aplicación $\phi \mapsto \phi(x_\circ)$ es una biyección ya que $\phi(x_\circ)$ determina completamente al pseudo-endomorfismo ϕ. En efecto,

$$[\phi(x)](y) = [\phi(x_\circ)](y \cdot g_x^{-1})$$

donde $g_x \in G$ es tal que $x_\circ \cdot g_x = x$.

Resumiendo, se tiene

Proposición 2 *La aplicación $\phi \mapsto \phi(x_\circ)$ de $Psend(X, G)$ en $M^1_K(X)$ define un isomorfismo de monoides*

Demostración:

$$\begin{aligned}
[(\phi \circ \psi)(x_\circ)](x) &= \sum_{y \in X} [\phi(y)](x)[\psi(x_\circ)](y) \\
&= \sum_{y \in X} [\phi(x_\circ)](x \cdot g_y^{-1})[\psi(x_\circ)](y) \\
&= [\phi(x_\circ) * \psi(x_\circ)](x)
\end{aligned}$$

En todo lo que sigue a continuación nos referiremos indistintamente a pseudo-endomorfismos o a medidas de probabilidad K-invariantes.

2.4 Movimientos Brownianos en Espacios de Gelfand

Definición 5 *Sea (X, G) espacio geométrico finito. Llamaremos movimiento markoviano en (X, G) a toda familia continua $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$ en Psend(X, G) tal que*

$$\begin{aligned} \Psi_{t+s} &= \Psi_t \circ \Psi_s \qquad \forall\, t, s \geq 0 \\ \Psi_0 &= I \end{aligned}$$

donde I es la identidad en Psend(X, G).

Un movimiento markoviano es entonces un semigrupo uniparamétrico continuo en $\mathrm{Psend}(X, G)$.

Aclararemos que, por el hecho de considerar un espacio geométrico finito, no nos preocuparemos de problemas de naturaleza topológica y entenderemos que una familia $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$ de pseudo–endomorfismos es continua si $t \mapsto [\Psi_t(x)]\,(y)$ es continua $\forall\, x, y \in X$.

Consideraremos un tipo especial de movimiento markoviano con condición inicial.

Definición 6 *Sea $\Omega \in X^2/G$. Llamaremos movimiento browniano de tipo Ω a todo movimiento markoviano $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$ tal que*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[\Psi_t(x)]\{X - \{y \in X | (x, y) \in \Delta \cup \Omega\}\} = 0$$

$\forall x \in X$ y donde Δ denota la diagonal en $X \times X$.

La condición L_Ω se llama condición de Lindeberg relativa a Ω. Evidentemente, por la propiedad de conmutación con la acción de G de los pseudo–endomorfismos, para satisfacer la condición L_Ω basta tener la nulidad del límite para un $x \in X$.

Para este tipo de movimientos se tiene una caracterización precisa.

Teorema 1 *Sea (X, G) espacio de Gelfand finito. Consideremos un movimiento browniano $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$ de tipo Ω, $\Omega \in X^2/G$ y llamemos $\mu_t^\Omega := \Psi_t(x_\circ)$ $(x_\circ \in X)$. Entonces existe una constante $c \geq 0$ tal que*

$$\mu_t^\Omega = \sum_{i\in I} e^{c(\overline{\lambda_i^\Omega}-1)t} d_i' \phi_i \qquad \forall\, t \geq 0$$

donde $\{\phi_i\}_{i\in I}$ denota la familia de funciones esféricas de (X, G) relativas al origen $x_\circ$, $\{d_i'\}_{i\in I}$ la medida de Plancherel asociada y λ_i^Ω denota el valor propio del operador de promedio M_Ω asociado a la función esférica ϕ_i

Demostración: Sabemos que los $\{d_i'\phi_i\}_{i\in I}$ forman una base de idempotentes ortogonales del álgebra de convolución $L_K^1(X)$. Como $\mu_t^\Omega \in M_K^1(X)$ y $\widehat{\mu_{t+s}}(i) = \widehat{\mu_t}(i)\widehat{\mu_s}(i)$
$(\forall\, i \in I,\ \forall\, t, s \geq 0)$, existen $a_i \in \mathbb{C}$ tales que

$$\mu_t^\Omega = \sum_{i\in I} e^{a_i t}\, d_i' \phi_i$$

La condición de Lindeberg L_Ω dice que el soporte de la derivada $\frac{d}{dt}\mu_t^\Omega$ en t=0 está contenido en $\{x_\circ\} \cup C_\Omega(x_\circ)$, pero como

$$\sum_{x\in X} \frac{d}{dt}\mu_t^\Omega(x) = \frac{d}{dt}\sum_{x\in X} \mu_t^\Omega(x) = 0$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt}\mu_t^\Omega|_{t=0} = c(\nu_\Omega - \delta_{x_\circ}) \qquad c \geq 0$$

donde ν_Ω denota la medida de probabilidad uniforme con soporte la esfera $C_\Omega(x_\circ)$. Finalmente, observando que $M_\Omega(\delta_{x_\circ}) = \nu_{\check{\Omega}}$, donde $\check{\Omega}$ es la G-órbita en X^2 definida por $\check{\Omega} = \{(x, y) \in \Omega/(y, x) \in \Omega\}$ se tiene el resultado.

Observación: En el caso en que las G-órbitas en X^2 sean simétricas (como ocurre en todos los ejemplos que consideraremos) , es decir, $\Omega = \check{\Omega} \;\; \forall\, \Omega \in X^2/G$ tenemos que el operador de promedio es autoadjunto, luego sus valores propios $\{\lambda_i^\Omega\}_{i\in I}$ son reales.

Un movimiento browniano $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$ de tipo Ω es un movimiento markoviano puro, en el sentido de que Ψ_t "despega" del neutro con velocidad inicial positiva solamente en la G-órbita Ω.

Tenemos entonces la siguiente descripción para los movimientos markovianos.

Proposición 3 *Todo movimiento markoviano es composición de movimientos brownianos.*

Demostración:

$$\frac{d}{dt}\mu_t|_{t=0} = \sum_{\Omega\in X^2/G} c_\Omega(\nu_\Omega - \delta_{x_\circ}) \qquad c_\Omega \geq 0$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mu_t &= \sum_{i\in I} e^{[\sum_{\Omega\in X^2/G} c_\Omega(\lambda_i^\Omega - 1)]t} d_i' \phi_i \\
&= \prod_{\Omega\in X^2/G} \sum_{i\in I} e^{c_\Omega(\lambda_i^\Omega - 1)t} d_i' \phi_i \\
&= \prod_{\Omega\in X^2/G} \mu_t^\Omega
\end{aligned}$$

Teniendo una descripción explícita de los movimientos brownianos para todo $t \geq 0$, nos interesamos en el comportamiento de tales movimientos para t tendiendo a infinito. Como $\lambda_i^\Omega = \phi_i(y)$ $(y \in C_\Omega(x_\circ))$ tenemos que $|\lambda_i^\Omega| \leq 1$ $(\forall i \in I)$, obtenemos que $\lim_{t\to\infty} \Psi_t$ es un pseudo–endomorfismo idempotente. Recordamos que la convergencia es puntual, es decir, $\Psi = \lim_{t\to\infty} \Psi_t$ si $[\Psi(x)](y) = \lim_{t\to\infty}[\Psi_t(x)](y)$ $(\forall\, x, y \in X)$.

2.5 Producto semi-directo

Para determinar el límite de los movimientos brownianos del espacio de Gelfand (X, G) nos concentraremos en el caso en que G es un producto semi-directo de subgrupos.

Supongamos que G es un grupo finito que es producto semi-directo de subgrupos, lo que denotaremos por $G = K \ltimes H$. Es decir, K y H son subgrupos de G tales que

$$G = KH \qquad H \trianglelefteq G \qquad H \cap K = \{e\}$$

Podemos considerar el espacio geométrico transitivo $(K\backslash G, G)$ donde la acción derecha de G en $K\backslash G$ esta dadá por

$$(Kg') \cdot g = Kg'g \qquad g', g \in G$$

También podemos considerar el espacio geométrico transitivo (H, G) donde G actúa en H a la derecha por

$$h \cdot g = P_H(hg) \qquad h \in H, g \in G$$

donde $P_H : G \to H$ es la proyección de G en H.

Como H es un subgrupo normal de G, tenemos que la acción de G en H está dada explícitamente por

$$\begin{aligned} h \cdot h' &= P_H(hh') &= hh' \\ h \cdot k &= P_H(hk) &= k^{-1}hk \end{aligned}$$

Estos dos espacios geométricos $(K\backslash G, G)$ y (H, G) son isomorfos con isomorfismo $\alpha : K\backslash G \to H$ definido por $\alpha(Kg) = P_H(g)$.

Además, si el subgrupo H es abeliano, tenemos que (H, G) es un espacio de Gelfand con punto base e, el elemento neutro de G.

Esto es claro ya que por el corolario 2 basta ver que $L^1_K(H)$ es conmutativo. Pero esta última es una subálgebra del álgebra de convolución $L^2(H)$ que es claramente conmutativa si H lo es.

Algunos ejemplos de espacios geométricos donde $G = K \ltimes H$ son

1. El n–ágono regular
2. El grupo de Heisenberg
3. El espacio euclideano finito n-dimensional
4. El m–cubo
5. La biblioteca de la Margarita con n libros

Estos ejemplos están tratados con más detalle en [1].

2.6 Pseudo– endomorfismos idempotentes

Supondremos que (X, G) es un espacio geométrico donde G es un producto semidirecto, es decir,

$$G = K \ltimes H$$

donde $K = \mathrm{Stab}_G(x_\circ)$ $(x_\circ \in X)$.

En la sección anterior vimos que el espacio (X, G) es isomorfo al espacio (H, G) con isomorfismo $\alpha : X \to H$ dado por

$$\alpha(x) = P_H(g_x)$$

donde $g_x \in G$ es tal que $x_\circ \cdot g_x = x$.

Sea $A \subseteq H$ y denotemos por $\nu_A \in M_K^1(H)$ a la medida de probabilidad uniforme con soporte A ,es decir,

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{|A|} & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Sean $\mu_1, \mu_2 \in M_K^1(H)$, entonces

$$\text{sop}(\mu_1 * \mu_2) = \text{sop}\mu_1 \cdot \text{sop}\mu_2 \tag{8}$$

Pues si $h_1 \in \text{sop}\mu_1$ y $h_2 \in \text{sop}\mu_2$, entonces

$$(\mu_1 * \mu_2)(h_1 h_2) = \sum_{g \in G} \mu_1(h_1 h_2 g^{-1})\mu_2(g) \geq \mu_1(h_1)\mu_2(h_2)$$

luego, $\text{sop}\mu_1 \cdot \text{sop}\mu_2 \subseteq \text{sop}(\mu_1 * \mu_2)$.

Recíprocamente, si $h \in \text{sop}(\mu_1 * \mu_2)$ entonces $\exists\ h_2 \in \text{sop}\mu_2$ tal que $\mu_1(hh_2^{-1}) > 0$,es decir, $hh_2^{-1} \in \text{sop}\mu_1$.

Los subgrupos de H que son $K-$ invariantes, es decir, subgrupos donde se puede restringir la acción de K en H, son los pseudo–endomorfismos idempotentes en el siguiente sentido.

Proposición 4 *Existe una biyección entre los subgrupos de H que son K–invariantes y las medidas de probabilidad en X , K–invariantes e idempotentes.*

Demostración: Sea $\mu \in M_K^1(X)$. Definamos $H_\mu \subset H$ por

$$H_\mu := \psi(\text{sop}\mu)$$

Si μ es idempotente, $\mu * \mu = \mu$, entonces, por (8) H_μ es un subgrupo de H que es además K-invariante pues μ lo es.

Recíprocamente, dado un subgrupo H' de H, K–invariante, la medida de probabilidad uniforme μ, con soporte $\alpha^{-1}(H')$ es una medida idempotente, K-invariante, y se tiene que $H_\mu = H'$.

Según esta proposición, para determinar las medidas de probabilidad sobre X, K-invariantes e idempotentes (y por lo tanto los pseudo–endomorfismos idempotentes) basta encontrar los subgrupos K–invariantes de H y definir una medida de probabilidad uniforme con soporte el subgrupo.

2.7 Límites de movimientos brownianos

Nos interesamos en determinar el límite, para t tendiendo a infinito, de movimientos brownianos que, como sabemos, son elementos idempotentes de Psend(X,G). Para esto, será importante conocer el "núcleo" de las funciones esféricas del espacio de Gelfand (X, G). Denotemos por S a la familia de funciones esféricas ϕ del espacio de Gelfand (X, G) tal que $\phi(x_\circ) = 1$.

Lema 1 *Sea G grupo finito tal que $G = K \ltimes H$ con K y H subgrupos de G. Entonces,para toda función esférica $\phi \in S$ del espacio de Gelfand $(H.G)$ se tiene que*

$$H_\phi = \{h \in H / \phi(h) = 1\}$$

es un subgrupo K–invariante de H.

Demostración: Recordemos la ecuación funcional (4)

$$\phi(h)\phi(h') = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \phi(hkh')$$

donde $K = \mathrm{Stab}_G(e)$. Ahora bien, la función esférica ϕ toma su máximo valor en el origen, es decir, $|\phi(h)| \leq 1$ $(\forall h \in H)$. Luego, si h y $h' \in H_\phi$ entonces

$\phi(hkh') = 1$ $(\forall k \in K)$. En particular, $\phi(hh') = 1$. La K-invariancia de H_ϕ proviene de la K-invariancia de ϕ .

Observemos que el recíproco no es cierto en general, como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $K = \{e\}$ y $H = C_2 \times C_2$. Las funciones esféricas de (H, G) son entonces los caracteres de H y el subgrupo trivial $\{e\}$ de H no es el núcleo de ningún caracter de H.

Lema 2 *Sea (X, G) espacio de Gelfand y sea $\mu \in M_K^1(X)$, donde $K = Stab_G(x_\circ)$ $(x_\circ \in X)$. Entonces*

$$\{\phi \in S | \widehat{\mu}(\phi) = 1\} = \{\phi \in S | \phi(sop\mu) = 1\}$$

Demostración: Sea $\phi \in S$ tal que $\phi(\text{sop}\mu) = 1$, entonces

$$\widehat{\mu}(\phi) = \sum_{x \in sop\mu} \mu(x)\overline{\phi(x)} = 1$$

Recíprocamente, sea $\phi \in S$ tal que $\widehat{\mu}(\phi) = 1$

$$0 = 1 - \widehat{\mu}(\phi) = \sum_{x \in X} \mu(x) - \sum_{x \in X} \mu(x)\overline{\phi(x)} = \sum_{x \in sop\mu} [1 - \overline{\phi(x)}]\mu(x)$$

Pero, $|\phi(x)| \leq 1 \;\; \forall\, x \in X$, por lo tanto $\phi(\text{sop}\mu) = 1$.

Teorema 2 *Sea (X, G) espacio de Gelfand con punto base $x_\circ$, donde $G = K \ltimes H$ y $K = Stab_G(x_\circ)$.Consideremos un movimiento browniano $\{\Psi_t\}_{t \geq 0}$ en (X, G) de tipo Ω $(\Omega \in X^2/G)$. Entonces*

$$\lim_{t \to \infty} \Psi_t = \Psi_{\langle \Omega \rangle}$$

donde $\Psi_{\langle \Omega \rangle}$ denota el pseudo-endomorfismo idempotente que asocia a cada $x \in X$ la medida de probabilidad uniforme portada por el subgrupo generado por $C_\Omega(x)$.

Demostración: Llamemos $\mu_t^\Omega := \Psi_t(x_\circ)$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t^\Omega = \sum_{\{i\in I|\lambda_i^\Omega=1\}} d_{i'}\phi_i$$

Pero

$$\begin{aligned}
\{i \in I \,|\lambda_i^\Omega = 1\} &= \{i \in I \,|\phi_i(y) = 1 \ \ \forall y \in C_\Omega(x_\circ))\} \\
&= \{i \in I \,|\phi_i(y) = 1 \ \ \forall y \in < C_\Omega(x_\circ) > \} \\
&= \{i \in I/\phi_i(\mathrm{sop}\nu_{<\Omega>}) = 1\} \\
&= \{i \in I/\widehat{\nu_{\langle\Omega\rangle}}(i) = 1\}
\end{aligned}$$

donde $\nu_{<\Omega>}$ denota la medida de probabilidad uniforme portada por el subgrupo generado por $C_\Omega(x_\circ)$.

Observando que si $\mu \in M_K^1(X)$ es idempotente, entonces $\widehat{\mu}(\phi) = \ 0 \ \ ó \ \ 1$ $\forall\ \phi \in S$,obtenemos el resultado.

2.8 Movimientos brownianos generales

Según el teorema anterior, podemos decir que la identidad I , que es un idempotente trivial, y cualquier otro elemento idempotente $\Im$ de Psend(X, G) están "conectados" por un movimiento browniano si el soporte de la medida idempotente K- invariante asociada a $\Im$ está generado por alguna órbita $\Omega \in X^2/G$. En este caso, cualquier movimiento browniano de tipo Ω "conecta" ambos idempotentes.

Nos preguntamos ahora, en general, bajo qué condiciones dos idempotentes están conectados por un movimiento browniano.

Definición 7 *Sea (X, G) espacio geométrico finito. Llamaremos movimiento markoviano en (X, G) con punto de partida $\Im$ a toda familia continua $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$ en*

Psend(X,G) tal que

$$\Psi_{t+s} = \Psi_t \circ \Psi_s \qquad \forall\, t, s \geq 0$$
$$\Psi_0 = \Im$$

donde $\Im$ es un elemento idempotente de Psend(X, G).

Observamos que $\Im$ es el elemento neutro del semigrupo uniparamétrico $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$.

Definición 8 *Sea $\Omega \in X^2/G$.Llamaremos movimiento browniano de tipo Ω con punto de partida $\Im$ a todo movimiento markoviano $\{\Psi_t\}_{t\geq 0}$ con punto de partida $\Im$ tal que*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[\Psi_t(x)]\{X - \{C_\Omega(x) \cup sop\Im(x)\}\} = 0$$

Denotaremos por $\{\Psi_t^\Omega(\Im)\}_{t\geq 0}$ a los movimientos brownianos de tipo Ω con punto de partida $\Im$. Se subentenderá que si no se especifica el idempotente de partida, éste es simplemente el neutro I.

Proposición 5 *Sea (X, G) espacio de Gelfand finito. Todo movimiento browniano de tipo Ω con punto de partida $\Im$ es de la forma*

$$\Psi_t^\Omega(\Im) = \Psi_t^\Omega \circ \Im \qquad \forall\, t \geq 0$$

Demostración : Denotemos por $\mu_t^\Omega(\Im) := \Psi_t^\Omega(\Im)(x_\circ)$. Por continuidad, tenemos que

$$\widehat{\mu_t^\Omega(\Im)}(i) = 0 \qquad \forall\, t \geq 0$$

$\forall i \in I$ tal que $\widehat{\Im(x_\circ)}(i) = 0$. De manera similar al teo (2.1), obtenemos que existe $c \geq 0$ tal que

$$\mu_t^\Omega(\Im) = \sum_{\{i\in I|\widehat{\Im(x_\circ)}(i)=1\}} e^{c(\overline{\lambda_i^\Omega}-1)t}\phi_i d_i'$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in I} e^{c(\overline{\lambda_i^{\Omega}}-1)t}\phi_i d_i' * \Im(x_\circ) \\
&= \mu_t^{\Omega}(Id) * \Im(x_\circ)
\end{aligned}
$$

Corolario 2 *Todo movimiento markoviano de (X,G) con punto de partida $\Im$ es composición de un movimiento markoviano en (X,G) y el idempotente $\Im$*

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\Psi_t(\Im) &= \prod_{\Omega\in X^2/G} \Psi_t^{\Omega}(\Im) \\
&= \prod_{\Omega\in X^2/G} (\Psi_t^{\Omega} \circ \Im) \\
&= (\prod_{\Omega\in X^2/G} \Psi_t^{\Omega}) \circ \Im
\end{aligned}
$$

2.9 Límites de movimientos brownianos generales

Sea $\Im$ el pseudo-endomorfismo de partida de un movimiento browniano. Como $\Im$ es idempotente obtenemos que $\Im(x_\circ)$ $(x_\circ \in X)$ es una medida uniforme soportada por un subgrupo K-invariante $H_\Im$ de H

Teorema 3 *Sea (X,G) espacio de Gelfand con punto de base $x_\circ$ tal que $G = K \ltimes H$ y $K = Stab_G(xo)$. Sea $\Omega \in X^2/G$ y $\{\Psi_t^{\Omega}(\Im)\}_{t\geq 0}$ movimiento browniano de tipo Ω con punto de partida $\Im$. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \Psi_t^{\Omega}(\Im) = \Psi_{<\Omega>\Im}$$

donde $\Psi_{<\Omega>\Im}$ denota el pseudo-endomorfismo idempotente que asocia a $x_\circ$ la medida de probabilidad uniforme soportada por el producto de subgrupos $< C_\Omega(x_\circ) >$ y $H_\Im$

Demostración

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t^{\Omega}(\Im) \;=\; \lim_{t\to\infty} \mu_t^{\Omega} * \nu_{H_\Im}$$

$$= \nu_{<\Omega>} * \nu_{H_\Im}$$

$$= \nu_{<\Omega>H_\Im}$$

2.10 Operaciones admisibles

Sea (X, G) espacio de Gelfand finito. Supongamos que el conjunto X puede ser provisto de una estructura de grupo de manera que los "núcleos" de las funciones esféricas sean subgrupos K-invariantes de X, como en el caso en que G es un producto semidirecto. En este caso, podemos determinar explícitamente el límite de un movimiento browniano, como en los teoremas 2.2 y 2.3.

Definición 9 *Supongamos que el conjunto X puede ser provisto de una estructura de grupo $(X, \star)$. Diremos que tal estructura es admisible si*

$$(x, y) \in \Omega \Rightarrow (x \star z, y \star z) \in \Omega$$

$\forall z \in X$, $\forall \Omega \in X^2/G$

Elegiremos como punto base $x_\circ$ del espacio de Gelfand al elemento neutro de la operación admisible y denotaremos como siempre $K = \mathrm{Stab}_G(x_\circ)$.

Para tener análogos a los teoremas 2.2 y 2.3 necesitamos demostrar la proposición 2.4 y el lema 2.1 en el caso de que el conjunto X esté provisto de una estructura de grupo admisible.

Proposición 6 *Sea (X, G) espacio de Gelfand tal que X está provisto de una estructura de grupo admisible. Entonces existe una biyección entre los subgrupos K-invariantes de X y las medidas de probabilidad sobre X que son idempotentes y K-invariantes.*

Demostración: Sea $\mu \in M_K^1(X)$ tal que $\mu * \mu = \mu$ y sean $x, y \in \text{sop}(\mu)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu(x \star y) &= (\mu * \mu)(x \star y) \\ &= \sum_{z \in X} \mu(z)\mu((x \star y) \cdot g_z^{-1}) \\ &\geq \mu(y)\mu((x \star y) \cdot g_y^{-1}) \end{aligned}$$

Si $(x, x_\circ) \in \Omega$, entonces $((x \star y) \cdot g_y^{-1}, x_\circ) \in \Omega$ y por la K-invariancia de μ tenemos que

$$\mu(x \star y) \geq \mu(x)\mu(y)$$

es decir, el soporte de μ es subgrupo de X. Además, la K-invariancia de μ implica la K-invariancia del soporte.

Recíprocamente, sea X' subgrupo K-invariante de X. Definamos $\mu \in M_K^1(X)$ idempotente por

$$\mu = \nu_{X'}$$

Lema 3 *Sea (X, G) espacio de Gelfand tal que X está provisto de una estructura de grupo admisible. Sea ϕ función esférica de (X, G) . Entonces*

$$X_\phi = \{x \in X / \phi(x) = 1\}$$

es un subgrupo K-invariante de X.

Demostración: A partir de la ecuación funcional

$$\phi(x)\phi(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \phi(x \cdot k g_y)$$

y puesto que $|\phi(x)| \leq 1$ $(\forall x \in X)$ deducimos que si $\phi(x) = \phi(y) = 1$ entonces $\phi(z) = 1$ para todo z en $C_\Omega(y)$ donde Ω es la G-órbita en X^2 tal que $x \in C_\Omega(x_\circ)$.

Si la operación es admisible, tenemos que $x \star y \in C_\Omega(y)$, es decir, $\phi(x \star y) = 1$.

Teorema 4 *Sea* (X, G) *espacio de Gelfand tal que* X *está provisto de una estructura de grupo admisible. Sea* $\{\Psi_t^\Omega(\Im)\}_{t\geq 0}$ *movimiento browniano de tipo* Ω $(\Omega \in X^2/G)$ *con punto de partida el idempotente* $\Im$. *Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \Psi_t^\Omega(\Im) = \Psi_{<\Omega>\Im}$$

Capítulo 3
Ejemplos

3.1 El m – cubo

Sea m entero, m ≥ 1. Consideremos el grupo G de isometrías de la distancia de Hamming D sobre $X = \{0,1\}$, definida por

$$D(x,y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_m)$, $y = (y_1, \cdots, y_m)$ $\in X$. En otras palabras $D(x,y)$ es el número de coordenadas distintas de x e y.

G actúa a la derecha transitivamente sobre X por $x \mapsto g^{-1}(x)$ $(x \in X, g \in G)$.

El espacio geométrico (X, G) se llama m–cubo y es un espacio de Gelfand con punto base $x_\circ = (0, \cdots, 0)$.

Podemos pensar también en el m–cubo como un análogo discreto módulo 2 de $\mathbb{R}^m$.

Sea T el subgrupo de G formado por todas las traslaciones $t_y : x \mapsto x+y$ $(x \in X)$ y denotemos por $K = \mathrm{Stab}_G(x_\circ)$.

Puesto que T actúa transitivamente sobre X, tenemos que $G = KT$

Claramente, $T \cong C_2^m$ y $K \cong S_m$ pues dado $\sigma \in S_m$ podemos definir $k_\sigma \in K$ por $k_\sigma(x) = x^\sigma$ donde $x^\sigma = (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(m)})$. Además, como cada elemento de K debe permutar los vértices a distancia 1 del origen $x_\circ$, K no puede tener más de m! elementos. Luego, $K = \{k_\sigma \mid \sigma \in S_m\}$.

A partir de la relación

$$k_\sigma \circ t_y \circ k_\sigma^{-1} = t_{y^\sigma} \quad (\forall\, y \in X, \forall\, \sigma \in S_m)$$

deducimos que

$$G \cong S_m \ltimes C_2^m$$

Las órbitas de la acción por conjugación de S_m en C_2^m están definidas por la distancia al origen.

$$O_r = \{h \in C_2^m \mid D(h, x_\circ) = r\} \qquad (r = 0, \cdots, m)$$

Luego, las oŕbitas de G en $C_2^m \times C_2^m$ son

$$\Omega_r = \{(h_1, h_2) \in C_2^m \times C_2^m \mid D(h_1, h_2) = r\} \quad (r = 0, \cdots, m)$$

Las funciones esféricas del m–cubo pueden calcularse, por ejemplo, por el método de ruptura de simetrías (véase [7]) obteniendo que éstas son

$$\phi_i(j) = \frac{1}{\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}} \sum_{k=0}^{\min(i,j)} (-1)^k \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-i \\ j-k \end{pmatrix} \qquad i, j = 0, \cdots, m.$$

Además, la medida de Plancherel está dada por

$$d_i' = \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} 2^{-m}$$

Proposición 1 *Existe sólo 4 subgrupos de C_2^m invariantes bajo la acción de S_m.*

Demostración: Las órbitas de la acción de S_m en C_2^m son invariantes bajo la acción de S_m. Un subgrupo de C_2^m que sea S_m–invariante debe ser entonces unión de órbitas. Claramente

$$\begin{aligned} H_o &:= O_o \\ H_a &:= O_o \cup O_m \\ H_p &:= O_o \cup O_2 \cup \cdots \cup O_{2[\frac{m}{2}]} \\ H_u &:= O_o \cup O_1 \cup \cdots \cup O_m \end{aligned}$$

son subgrupos de C_2^m invariantes bajo la acción de S_m y son los únicos, pues si $H \subseteq C_2^m$es S_m–invariante y H contiene una órbita O_r, con r impar, $r < m$, entonces $O_1 \subseteq H$ y tenemos que $H = H_u$.

Los sub–índices de los 4 subgrupos S_m–invariantes de C_2^m aluden respectivamente a las palabras origen, antipodal, par y uniforme.

Denotaremos por ν_A a la medida de probabilidad uniforme con soporte A, es decir,

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{|A|} & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Proposición 2 *Existe 4 medidas de probabilidad idempotentes S_m–invariantes en el m–cubo.*

1. $\delta_o := \nu_{H_o}$
2. $p_a := \nu_{H_a}$
3. $p_p := \nu_{H_p}$
4. $p_u := \nu_{H_u}$

Demostración: Inmediata, a partir de la proposición anterior y la proposición 2.4.

Más específicamente, estas medidas están definidas por

1. $\delta_o(O_o) = 1$

2. $p_a(O_o) = p_a(O_m) = \frac{1}{2}$

3. $p_p(O_r) = \frac{1}{2^{m-1}}$, r par

4. $p_u(O_r) = \frac{1}{2^m}$, $r = 1, \cdots, m$

Observamos además que todos los subgrupos S_m–invariantes del m–cubo son generados por una órbita. En efecto,

$$\begin{aligned} H_o &= < O_o > & \\ H_a &= < O_m > & \\ H_p &= < O_r > & \text{r par}, 0 < r < m \\ H_u &= < O_r > & \text{r impar}, 0 < r < m \end{aligned}$$

Luego, en el m–cubo, todo idempotente se obtiene como límite de un movimiento browniano que parte de la identidad.

Para determinar el límite de un movimiento browniano general, con cualquier idempotente origen, debemos conocer la tabla de productos de los subgrupos S_m–invariantes de C_2^m, que es inmediata salvo por

$$H_a \cdot H_p = \begin{cases} H_p & \text{si m es par} \\ H_u & \text{si m es impar} \end{cases}$$

Teorema 1 *Sea $\{\Psi_t^\Omega\}_{t \geq 0}$ movimiento browniano de tipo Ω en el m–cubo con cualquier idempotente de partida. Denotemos $\mu_t^\Omega = \Psi_t^\Omega(x_o)$. Entonces*

1. $\lim_{t\to\infty} \mu_t^{\Omega_r}(\delta_\circ) = \begin{cases} \delta_\circ & si\ r = 0 \\ p_a & si\ r = m \\ p_p & si\ r\ es\ par \quad ,0 < r < m \\ p_u & si\ r\ es\ impar \quad ,0 < r < m \end{cases}$

2. $\lim_{t\to\infty} \mu_t^{\Omega_r}(p_a) = \begin{cases} p_a & si\ r = 0\ o\ m \\ p_p & si\ r\ y\ m\ son\ pares \quad ,0 < r < m \\ p_u & si\ r\ es\ par\ y\ m\ impar\ o\ r\ impar \quad ,0 < r < m \end{cases}$

3. $\lim_{t\to\infty} \mu_t^{\Omega_r}(p_p) = \begin{cases} p_p & si\ r\ es\ par \\ p_u & si\ r\ es\ impar \end{cases}$

4. $\lim_{t\to\infty} \mu_t^{\Omega_r}(p_u) = p_u \quad r = 0, \cdots, m$

3.2 Biblioteca de la Margarita con n libros

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea S_n el grupo simétrico. Consideremos el grafo $\Gamma_n = (V_n, L_n)$ donde L_n es el subconjunto de $S_n \times S_n$ definido por

$$(s,t) \in L_n \iff \exists\, i \in \{2, \cdots, n\} \text{ tal que } s = t(1i)$$

donde $(1i)$ es la transposición que intercambia 1 e i.

Designemos por $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ al grupo de todos los automorfismos del grafo Γ_n, es decir,

$$\mathrm{Aut}(\Gamma_n) = \{g \in \mathrm{Biy}(S_n) \mid (s,t) \in L_n \Rightarrow (g(s), g(t)) \in L_n\}$$

$\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ actúa de manera natural y transitiva sobre S_n por

$$s \cdot g = g^{-1}(s)$$

El espacio geométrico $(S_n, \mathrm{Aut}(\Gamma_n))$, con punto base e, se denomina Biblioteca de la Margarita con n libros.

Consideremos el subgrupo $B(S_n)$ de $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ formado de las traslaciones

$$b_s : t \mapsto st \qquad (s, t \in S_n)$$

Puesto que $B(S_n)$ actúa transitivamente sobre S_n se obtiene que

$$\mathrm{Aut}(\Gamma_n) = K(S_n)B(S_n)$$

donde $K(S_n)$ es el estabilizador en $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ del elemento neutro e de S_n.

Lema 1 *El grupo $K(S_n)$ consta de las conjugaciones*

$$k_\sigma : t \mapsto \sigma t \sigma^{-1} \qquad (t \in S_n)$$

definidas $\forall\ \sigma \in S_n$ tal que $\sigma(1) = 1$. Luego $K(S_n) \cong S_{n-1}$

Demostración: Sea $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(1) = 1$. La relación

$$\sigma\tau(1i)\sigma^{-1} = \sigma\tau\sigma^{-1}(1\sigma(i))$$

implica que $k_\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma_n)$. Como $k_\sigma(e) = e$, obtenemos que $k_\sigma \in K(S_n)$. Además $k_\sigma = k_\rho \Rightarrow \sigma = \rho$. Por otro lado, sea $k \in K(S_n)$. Como $((1i), e) \in L_n\ \forall\, i = 2, \cdots, n$ se tiene que $(k(1i), e) \in L_n\ \forall\, i = 2, \cdots, n$, por lo tanto $\exists\ j \in \{2, \cdots, n\}$ tal que

$$k(1i) = (1j)$$

En otras palabras, cada elemento de $K(S_n)$ permuta las transposiciones del tipo $(1i)$. Luego, $K(S_n)$ posee a lo más $(n-1)!$ elementos.

Ya que $k_\sigma b_s k_{\sigma^{-1}} = b_{\sigma s \sigma^{-1}}$ tenemos que $B(S_n) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\Gamma_n)$. Luego

$$\mathrm{Aut}(\Gamma_n) = K(S_n) \ltimes B(S_n) \simeq S_{n-1} \ltimes S_n$$

Las órbitas de la acción de $K(S_n)$ en S_n están descritas en el siguiente

Lema 2 *Dos elementos s y t de S_n pertenecen a la misma $K(S_n)$-órbita en S_n si y sólo si*

i) s y t son conjugados en S_n

ii) el orden del ciclo que contiene a 1 es el mismo para s y para t

Demostración: Inmediata a partir del lema anterior.

Proposición 3 *El espacio geométrico $(Aut(\Gamma_n), S_n)$ es un espacio de Gelfand.*

Demostración: Basta verificar la simetría de las $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$-órbitas de $S_n \times S_n$, es decir, que $\exists\ g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ tal que $(s,t)\cdot g = (t,s)\ \ \forall (s,t) \in S_n \times S_n$. Pero esto es equivalente a decir que $\exists\ g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ tal que

$$\begin{aligned}(b_{t^{-1}}g^{-1}b_s)(s^{-1}t) &= t^{-1}s \quad y \\ (b_{t^{-1}}g^{-1}b_s)(e) &= e \qquad \forall (s,t) \in S_n \times S_n\end{aligned}$$

Luego, si $\forall\ r \in S_n$, r y r^{-1} pertenecen a la misma $K(S_n)$-órbita en S_n , $(\mathrm{Aut}(\Gamma_n), S_n)$ es un espacio de Gelfand, lo cual se obtiene gracias al lema anterior.

Las funciones esféricas y la medida de Plancherel asociada a este espacio de Gelfand están calculadas en [8]

Proposición 4 *H es subgrupo $K(S_n)$-invariante de S_n si y sólo si $H \trianglelefteq S_{n-1}$ ó $H \trianglelefteq S_n$.*

Demostración: Si $H \trianglelefteq S_{n-1} = \mathrm{Stab}_{S_n}(1)$ o $H \trianglelefteq S_n$ entonces H es un subgrupo $K(S_n)$-invariante de S_n puesto que la acción de $K(S_n)$ en S_n está dada por $h \cdot k_\sigma = \sigma^{-1}h\sigma$.

Recíprocamente, sea $H \leq S_n$, $K(S_n)$-invariante. Si $H \subseteq S_{n-1}$, tenemos claramente que H es normal en S_{n-1}.

Por otro lado, supongamos que $H \not\subseteq S_{n-1}$. Sea $N_{S_n}(H) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma H \sigma^{-1} = H\}$. Entonces

$$S_{n-1} \leq N_{S_n}(H) \leq S_n$$

Sea $\sigma \in S_n - S_{n-1}$ y $h \in H - S_{n-1}$. Supongamos $\sigma(1) = j$ y $h(1) = i$ $(i \neq 1, j \neq 1)$. Sea $\tau = (ij) \in S_{n-1}$. Entonces

$$(h^{-1}t\sigma)(1) = 1$$

es decir, $h^{-1}t\sigma \in K(S_n)$ y, por lo tanto, $\sigma \in N_{S_n}(H)$.

3.3 Arbol simétrico finito

Definamos

$$\begin{aligned} T_o &:= \{0\} \\ T_m &:= \textstyle\prod_{j=1}^{m} H_{Q_j} \qquad m = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

donde H_{Q_j} es un grupo abeliano de orden Q_j.

Llamaremos árbol simétrico finito al grafo $\Gamma_n = (V_n, L_n)$ donde $V_n = \cup_{j=0}^{n} T_j$ es el conjunto de vértices y $L_n \subset V_n^2$ es el conjunto de aristas definido como sigue

$$(s,t) \in L_n \Longleftrightarrow \exists\, j \in \{1, \cdots, n-1\} \text{ tal que } s \in T_j,\ t \in T_{j+1}$$

$$\text{y } s_i = t_i \quad \forall i = 1, \cdots, j$$

Consideremos el grupo $G = \mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ de todos los automorfismos del árbol Γ_n, es decir,

$$G = \{g : V_n \to V_n \text{ biyectiva} \mid (s,t) \in L_n \Rightarrow (g(s), g(t)) \in L_n\}$$

G actúa naturalmente en V_n, pero no de manera transitiva. Sin embargo, G actúa transitivamente sobre cada "generación" T_j. En particular, sobre la última generación T_n que llamaremos el espacio de puntas del árbol Γ_n.

Sobre T_n podemos definir una distancia D_2 que clasifica las órbitas de G en $T_n \times T_n$, de modo que el espacio geométrico (G, T_n) es un espacio de Gelfand con punto base $t_0 = (0, \cdots, 0)$. Esta distancia $D_2 : T_n^2 \rightarrow \{0, \cdots, n\}$ está definida por

$$D_2(s,t) = N_2(s-t)$$

donde $N_2(t) = (n+1) - \inf N_0(t)$ (por convención $\inf \phi := n+1$) y donde $N_0(t) = \{i \in \{1, \cdots, n\} \mid t_i \neq 0\}$.

D_2 es una distancia sobre T_n que verifica la desigualdad ultramétrica

$$D_2(r,t) \leq \text{máx}\{D_2(r,s), D_2(s,t)\}$$

Denotemos por$K_2(T_n)$ al $\text{Stab}_G(t_0)$. Las órbitas de $K_2(T_n)$ en T_n están dadas por

$$C_m(t_0) = \{t \in T_n \mid N_2(t) = m\}$$

Sean $s, t \in T_n$. Definimos $s+t$ por

$$s + t = (s_1 + t_1, \cdots, s_n + t_n)$$

Esta operación provee a T_n de una estrucura de grupo abeliano admisible. Esta estructura es la de producto directo $H_{Q_1} \times \cdots \times H_{Q_n}$.

Las funciones esféricas de éste espacio de Gelfand, que se pueden calcular por el método de ruptura de simetrías obteniendo, como en el m–cubo, un m-paralelepípedo, están calculadas en [1] por otro método.

Proposición 5 *Los subgrupos de T_n , $K_2(T_n)$-invariantes son*

$$H_m = \underbrace{(0, \cdots, 0)}_{n-m} \times \prod_{j=n-m+1}^{n} H_{Q_j} \qquad m = 0, \cdots, n$$

Demostración: Los subgrupos H_m son claramente $K_2(T_n)$-invariantes ya que

$$H_m = \cup_{j=0}^{m} C_j(t_0)$$

Además, si H es subgrupo de T_n, $K_2(T_n)$-invariante y si $m \in \{0, \cdots, n\}$ es el mayor índice tal que $C_m(t_0) \subseteq H$ entonces $H = H_m$.

Todos los subgrupos $K_2(T_n)$-invariantes de T_n son generados por una órbita. En efecto,

$$H_m = < C_m(t_0) >$$

Proposición 6 *Existe n+1 medidas de probabilidad idempotentes $K_2(T_n)$-invariantes en T_n.*

$$\begin{aligned} p_m(C_l) &= \begin{cases} 0 & l > m \\ \frac{1}{Q_{n-m+1}\cdots Q_n} & l \leq m \end{cases} \qquad (m = 1, \cdots, n) \\ p_0 &= \delta_{(0,\cdots,0)} \end{aligned}$$

Teorema 2 *Sea $\{\Psi_t^{\Omega}\}_{t\geq 0}$ movimiento browniano de tipo Ω en el árbol sim'etrico finito con cualquier idempotente de partida. Denotemos $\mu_t^{\Omega} = \Psi_t^{\Omega}(x_\circ)$. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t^{\Omega_r}(p_m) = p_{m\acute{a}x(r,m)}$$

Demostración:

$$H_m H_r = H_{\text{máx}(r,m)}$$

ya que $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n$.

BIBLIOGRAFIA.

1. BEN MANSOUR, S. " Le cube come couple de Gelfand " . These , Univ. Paul Sabatier , Touluse , 1981.

2. FIGA-TALAMANCA, " An example in finite harmonic analysis with application to diffusion in compact ultrametric spaces ". Preprint , 1992.

3. GARCIA-ZAMBRANO, S. " Caracteres de espacios de Gelfand finitos " . Tesis de Magister en Ciencias , Depto. Mat. Universidad de Chile , Santiago , 1984.

4. HEYER, H. " Probability measures on locally compact groups " . Springer - Verlag, Berlin, 1977.

5. LETAC, G. " Les fonctions sphériques d'un couple de Gelfand simétrique et les chaines de Markov " . Adv. Appl. Prob. 14, p. 272-294 , 1982.

6. SOTO-ANDRADE, J. " Pseudo-transformacions et mouvement browniens sur des espaces de Gelfand discrets " . Publ. Labo. Stat. et Proba., Univ. Paul Sabatier, Touluse, 1984.

7. SOTO-ANDRADE, J. " En torno a las funciones esféricas (caso finito) " . Sem. Repr. Grupos y Anal. Harm. , Depto. Mat. Univ. de Chile, Santiago, 1984.

8. SOTO-ANDRADE, J. " Espacios de Gelfand discretos y paseos aletorios ". VII Seminario Nacional de Matemática. , Depto. Mat. Univ. de Chile, Santiago, 1984.

9. SOTO-ANDRADE, J. " Harmonic analysis of random walks on the Daisy library graph ". En "Harmonic analysis and discrete potential theory",Ed. M. Picardello, Plenum Press, New York and London, 1992, pág. 223-232.